เอกสาร ประกอบ การ สอน

คณิตศาสตร์

เรื่อง: ทดลอง เอกสาร มัธยมศึกษา ปี ที่ 6

ดร. ภาณุวิชญ์ เชื้อพล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น วิทยาเขตหนองคาย

สารบัญ

1 ทบทวนความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต **1**

1.1 จุด เส้นตรงและมุม 4

1.2 วงกลม 11

1.2.1 เส้นสัมผัสวงกลม 21

1.3 พื้นที่สามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยม และวงกลม 24

1.3.1 พื้นที่สามเหลี่ยม 24

1.3.2 พื้นที่วงกลม 25

1.3.3 พื้นที่สี่เหลี่ยม 26

1.4 อัตราส่วนของสามเหลี่ยมและสามเหลี่ยมคล้าย 32

1.4.1 อัตราส่วนของสามเหลี่ยม 32

1.4.2 สามเหลี่ยมคล้าย 32

2 ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องการแปรผัน **39**

2.1 การแปรผัน 39

2.1.1 การแปรผันตรง 39

2.1.2 การแปรผกผัน 40

2.1.3 การแปรผันเกี่ยวเนื่อง 40

3 ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องตรีโกณมิติ **45**

3.1 ตรีโกณมิติเบื้องต้น 45

3.1.1 องศาและเรเดียน 45

3.2 กฎของกฎของไซน์และโคไซน์ 48

4 ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องเซต **51**

4.1 การดำเนินการทางเซต 51

4.1.1 ยูเนียน 51

4.1.2 อินเตอร์เซก 52

4.1.3 ผลต่างของเซต 52

4.1.4 คอมพลีเมนต์ของเซต 53

5 ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องจำนวนจริง **57**

5.1 พหุนาม 57

5.1.1 การดำเนินการเกี่ยวกับพหุนาม 57

5.1.2 การหารสังเคราะห์ 68

5.1.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ 70

5.2 สมการตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$ 72

5.2.1 ผลบวกรากและผลคูณรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$ . . . 72

6 ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องตรีโกณมิติ 76

6.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ 76

6.1.1 ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐาน 78

6.2 องศาและเรเดียน 79

6.3 ทบทวนสูตรตรีโกณมิติที่จำเป็น 80

6.3.1 โคฟังก์ชัน 80

6.3.2 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ 80

6.3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมสองเท่า 80

6.3.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม 80

6.4 การแปลงมุมในรูปอย่างง่าย 82

6.4.1 เครื่องหมายและจตุภาค (ควอดรันท์) 82

6.4.2 การวัดมุม 84

6.4.3 มุมคู่ π และมุมคี่ π 86

6.4.4 ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมเรเดียนในรูป $2n\pi \pm \theta$ และ $(2n+1)\pi \pm \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ 87

6.5 กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ 99

บทที่ 1
ทบทวนความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต

ข้อตกลง 1.1

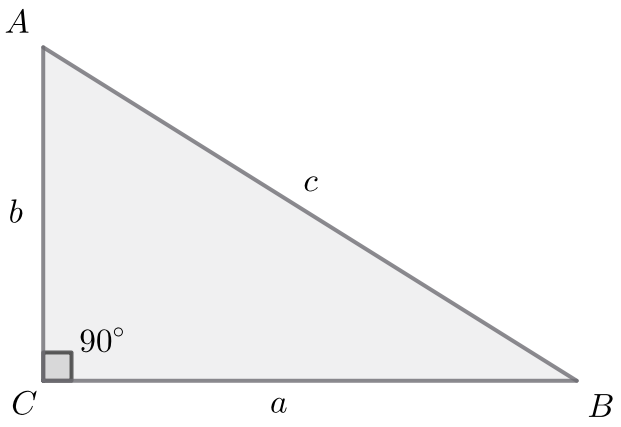
สัญลักษณ์ต่าง ๆ ตลอดเนื้อหาของเอกสารฉบับนี้ มีความหมายดังนี้

1. สัญลักษณ์ $\times$ และ $\cdot$ หมายถึง เครื่องหมายคูณ
2. สัญลักษณ์ $\angle A$ หรือ $\hat{A}$ หมายถึง ขนาดของมุม A
3. สัญลักษณ์ $\triangle ABC$ หมายถึง สามเหลี่ยม ABC และ $[\triangle ABC]$ หมายถึง พื้นที่ของ $\triangle ABC$
4. สัญลักษณ์ $\square ABCD$ หมายถึง สี่เหลี่ยม $ABCD$ และ $[\square ABCD]$ หมายถึง พื้นที่ของ $\square ABCD$
5. ให้ ℓ_1 และ ℓ_2 แทนเส้นตรงสองเส้น สัญลักษณ์ $\ell_1 // \ell_2$ หมายถึง เส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ขนานกัน

ทฤษฎีบท 1.1

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีความยาวด้านต่าง ๆ แสดงดังรูปที่ 1.1
เราได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

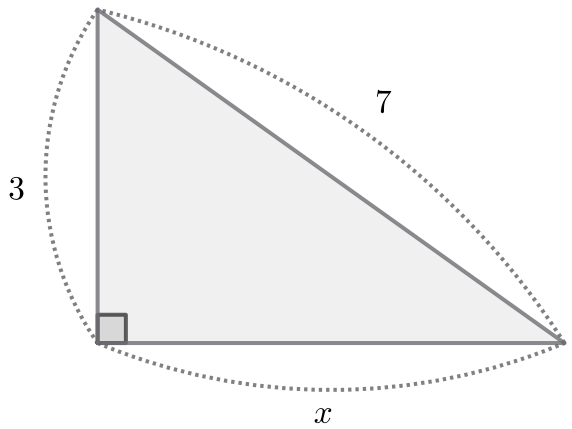


รูปที่ 1.1

ตัวอย่าง 1.1: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูปที่ 1.2 จงหาความยาว x

1. 4
2. 10
3. $\sqrt{40}$
4. $\sqrt{58}$

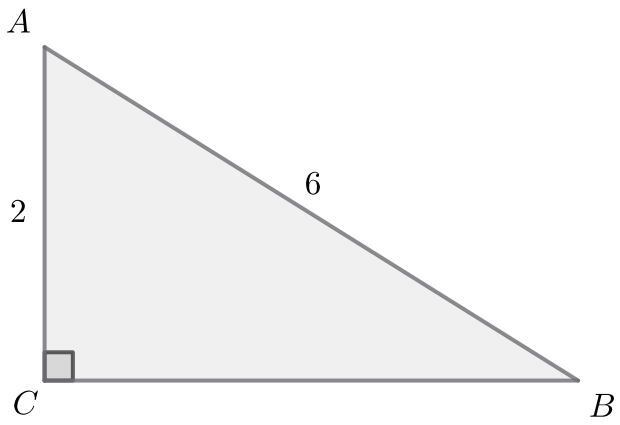


รูปที่ 1.2

ตัวอย่าง 1.2: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูปที่ 1.3 จงหาความยาวด้าน BC

1. 3
2. $3\sqrt{2}$
3. 4
4. $4\sqrt{2}$

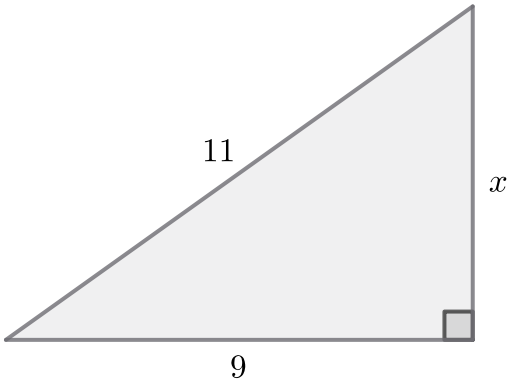


รูปที่ 1.3

ตัวอย่าง 1.3: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูปที่ 1.4 จงหาความยาว x

1. 2
2. 6
3. $2\sqrt{10}$
4. $6\sqrt{10}$

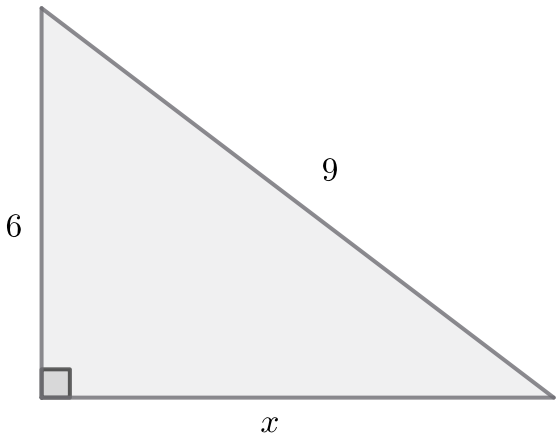


รูปที่ 1.4

ตัวอย่าง 1.4: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

จากรูปที่ 1.5 จงหา x

1. $3\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{6}$
4. $3\sqrt{13}$

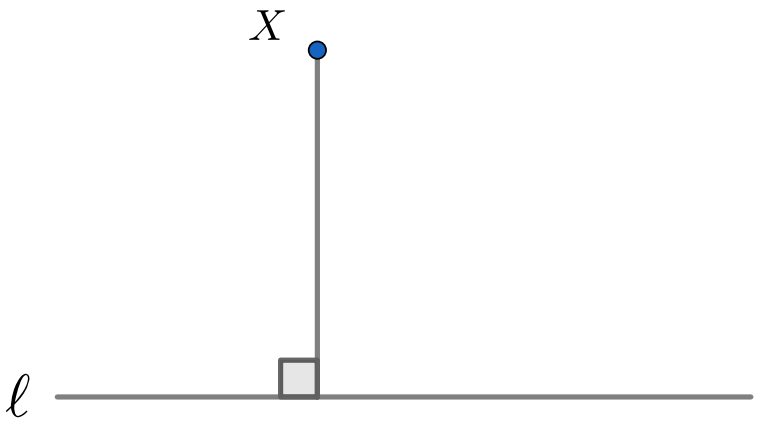


รูปที่ 1.5

1.1 จุด เส้นตรงและมุม

ข้อควรรู้ 1.1

จากจุดจุดหนึ่งภายนอกเส้นตรง สามารถลากเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้
จากรูปที่ 1.6 เราสามารถลากเส้นจากจุด X มาตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ ได้

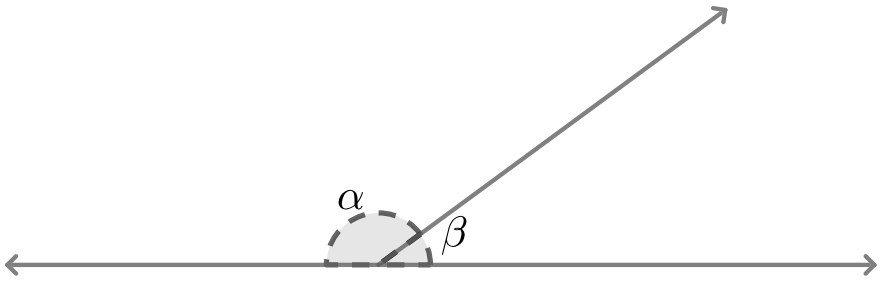


รูปที่ 1.6

ข้อควรรู้ 1.2

ถ้ามุมสองมุมอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน แล้วมุมทั้งสองนั้นจะเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก
จากรูปที่ 1.7 สามารถสรุปได้ว่า

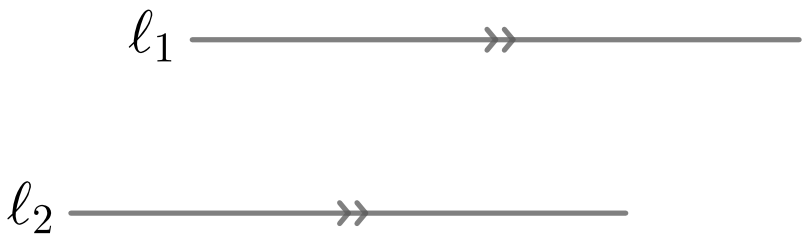
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



รูปที่ 1.7

บทนิยาม 1.1

เส้นตรงสองเส้น **ขนานกัน** ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงสองเส้นนั้นอยู่บนระนาบเดียวกันและไม่ตัดกัน
จากรูปที่ 1.8 แสดงเส้นตรง $\ell_1 // \ell_2$

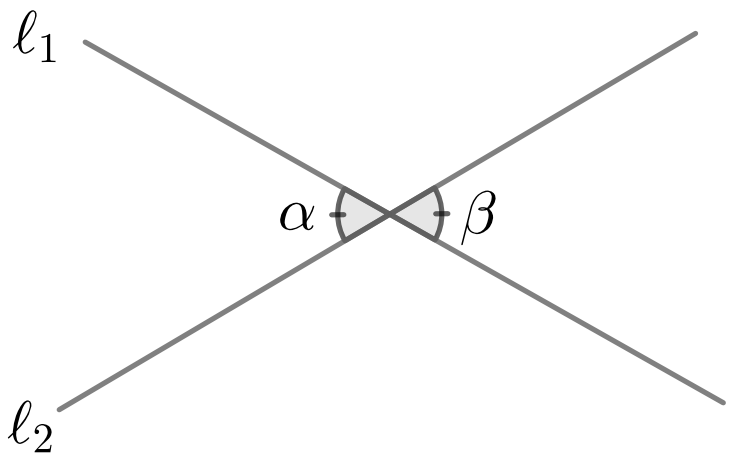


รูปที่ 1.8

ข้อควรรู้ 1.3

เส้นตรงสองเส้นตัดมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน
จากรูปที่ 1.9 แสดงเส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ตัดกัน สามารถสรุปได้ว่า

$$\alpha = \beta$$

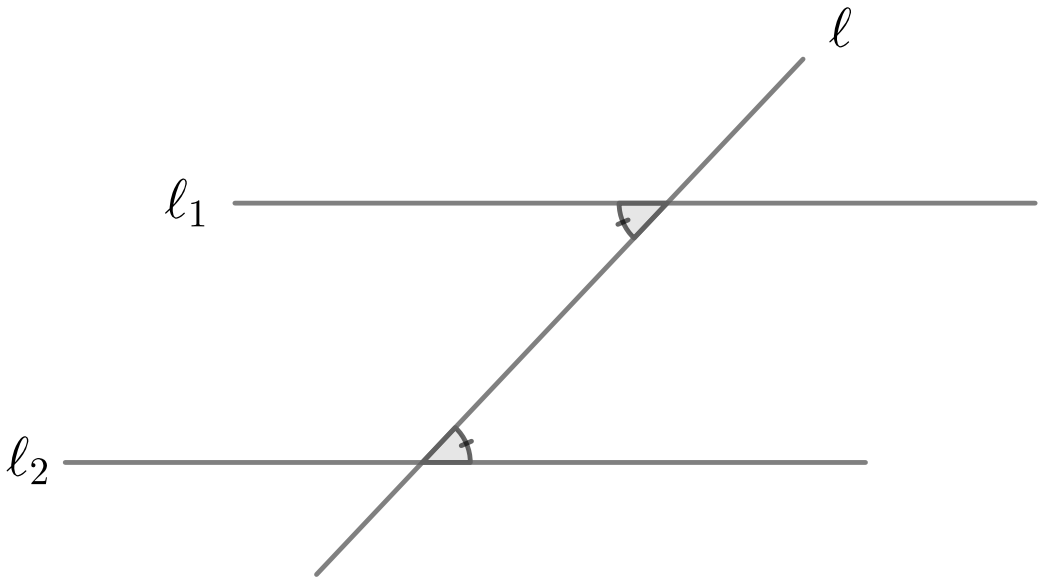


รูปที่ 1.9

ข้อควรรู้ 1.4

ถ้าเส้นตรงสองเส้นถูกตัดด้วยเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ทำให้มุมแย้งเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน จากรูปที่ 1.10 เส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ถูกตัดด้วยเส้นตรง ℓ ที่ทำให้ $\alpha = \beta$ สามารถสรุปได้ว่า

$$\ell_1 // \ell_2$$



รูปที่ 1.10

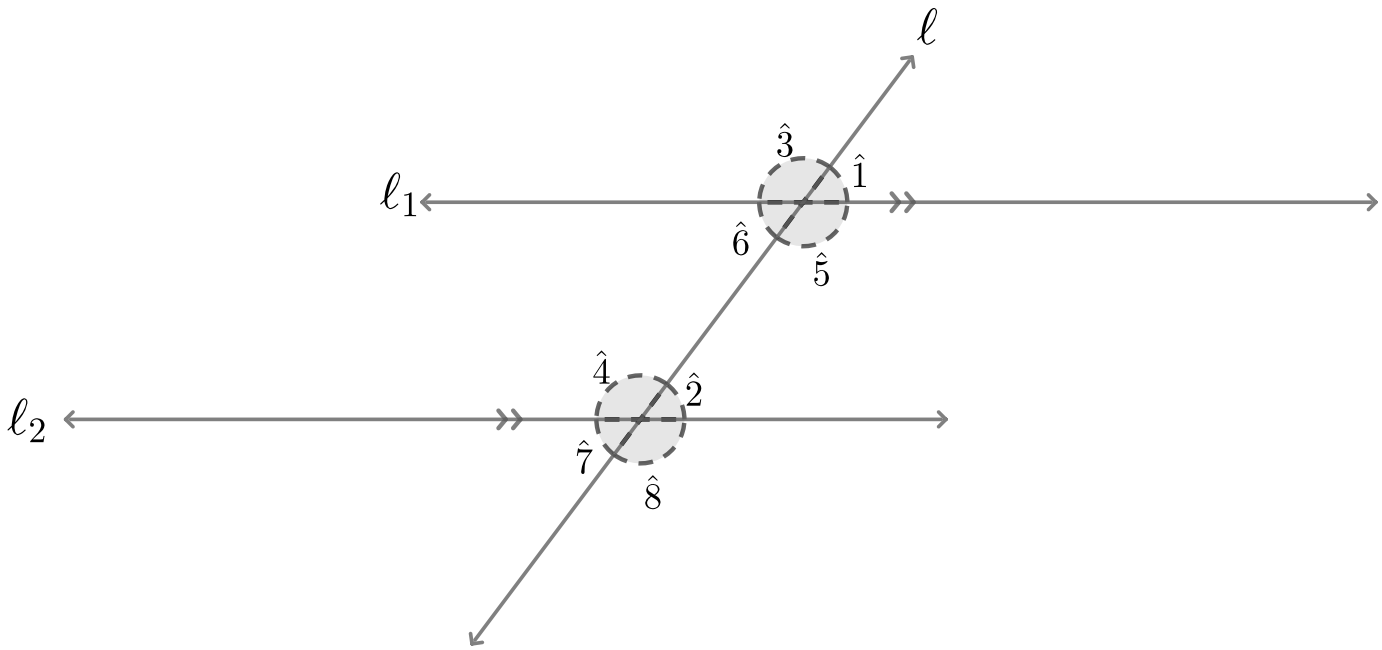
ทฤษฎีบท 1.2

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้าเส้นตรงคู่นี้ **ขนานกัน** แล้ว

1. มุมแย้งเท่ากัน
2. มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
3. มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

จากรูปที่ 1.11 กำหนดให้เส้นตรง ℓ ตัดกับเส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ที่ขนานกัน สามารถสรุปได้ว่า

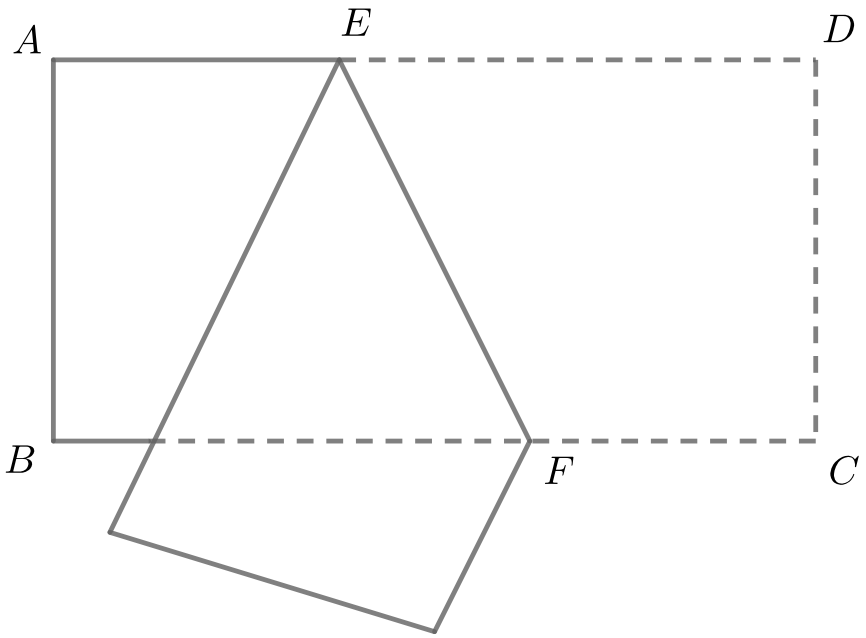
1. $\hat{4} = \hat{5}$ และ $\hat{2} = \hat{6}$
2. $\hat{1} = \hat{2}$, $\hat{3} = \hat{4}$, $\hat{5} = \hat{8}$ และ $\hat{6} = \hat{7}$
3. $\hat{2} + \hat{5} = 180^\circ$ และ $\hat{4} + \hat{6} = 180^\circ$



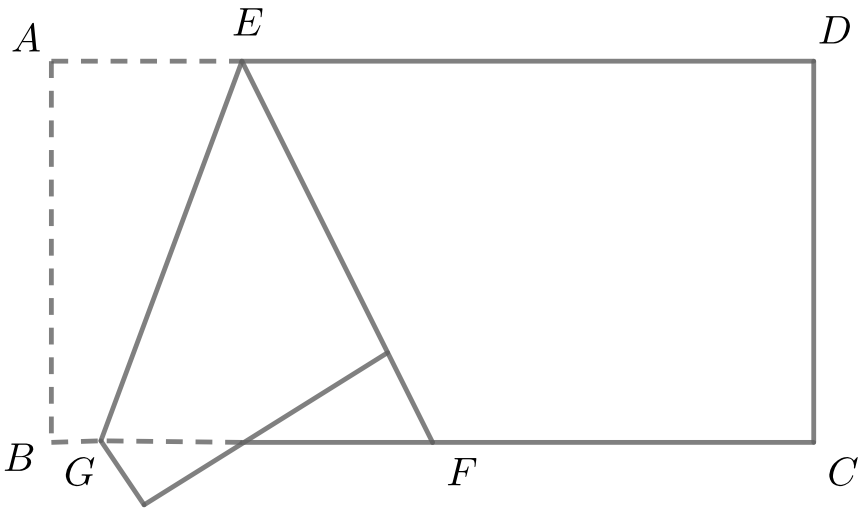
รูปที่ 1.11

จงใช้ข้อมูลตอบคำถามตัวอย่าง 1.5 และ ตัวอย่าง 1.6

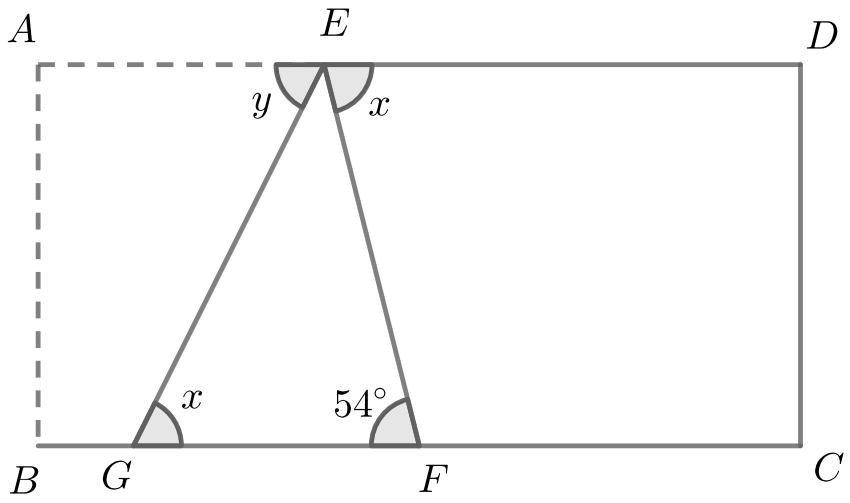
1. พับกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามรอย EF และคลี่กระดาษออก ดังรูปที่ 1.12
2. พับอีกครั้งตรงมุม A และพับตามรอย EF รอยพับที่เกิดขึ้นคือเส้นตรง EG ดังรูปที่ 1.13
3. แสดงรอยพับทั้งหมดจากการคลี่กระดาษออกโดยที่ EFB กาง 54° ดังรูปที่ 1.14



รูปที่ 1.12



รูปที่ 1.13



รูปที่ 1.14

ตัวอย่าง 1.5: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

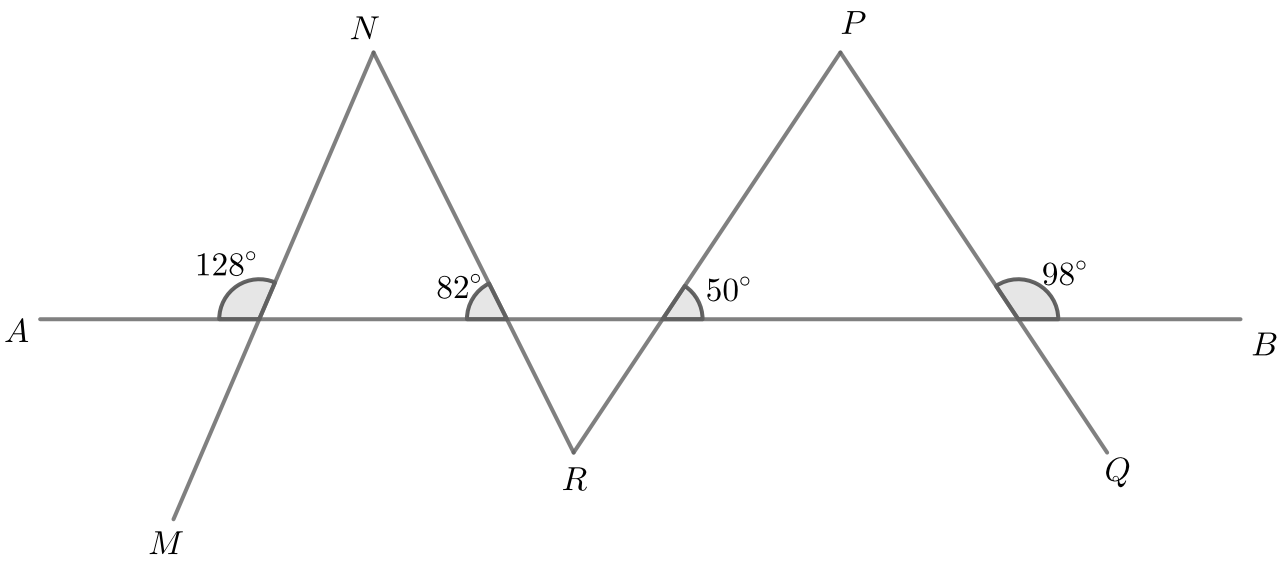
จากรูปที่ 1.12 มุม x มีขนาดเท่าใด

1. 36°
2. 54°
3. 60°
4. 63°

ตัวอย่าง 1.6: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

จากรูปที่ 1.12 มุม y มีขนาดเท่าใด

1. 36°
2. 54°
3. 60°
4. 63°



รูปที่ 1.15

ตัวอย่าง 1.7: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

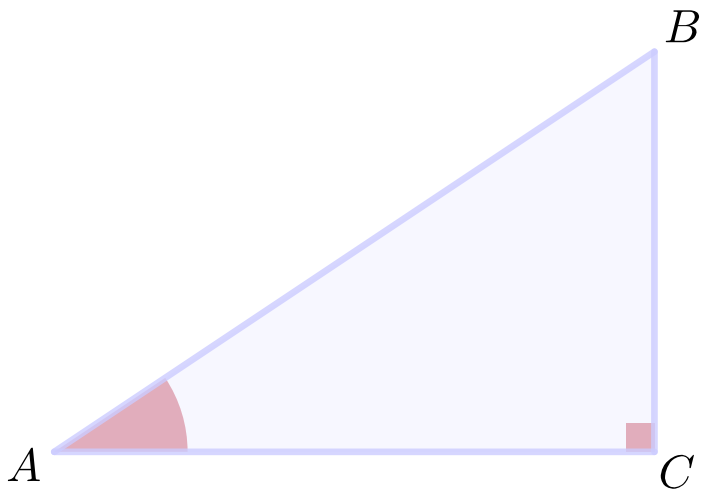
จากรูปที่ 1.15 ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $MN//PR$
2. $NR//PQ$
3. $\angle NRP = 50^\circ$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

1.2 วงกลม

ทฤษฎีบท 1.3

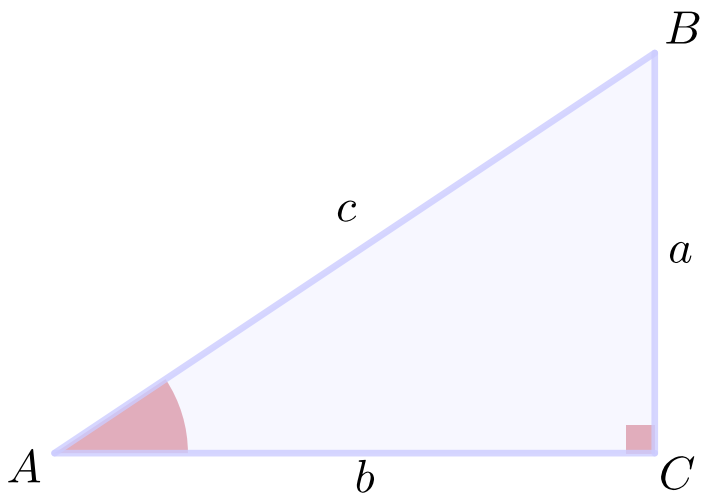
มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก
จากรูปที่ 1.16 เราได้ว่า $\angle ABC = 90^\circ$



รูปที่ 1.16

ทฤษฎีบท 1.4

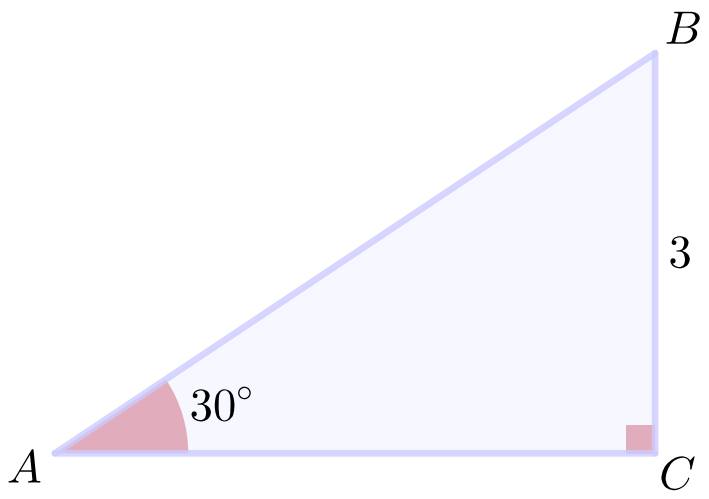
ถ้า มุม ที่ จุดศูนย์กลาง ของ วงกลม และ มุม ใน ส่วน โค้ง ของ วงกลม รองรับ ด้วย ส่วน โค้ง เดียวกัน แล้ว มุม ที่ จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลม
จากรูปที่ 1.17 เราได้ว่า $\angle AOB = 2\angle ACB$



รูปที่ 1.17

ทฤษฎีบท 1.5

มุมในส่วนของวงกลมเดียวกันย่อมเท่ากัน
จากรูปที่ 1.18 เราได้ว่า $B\hat{A}C = B\hat{D}C$

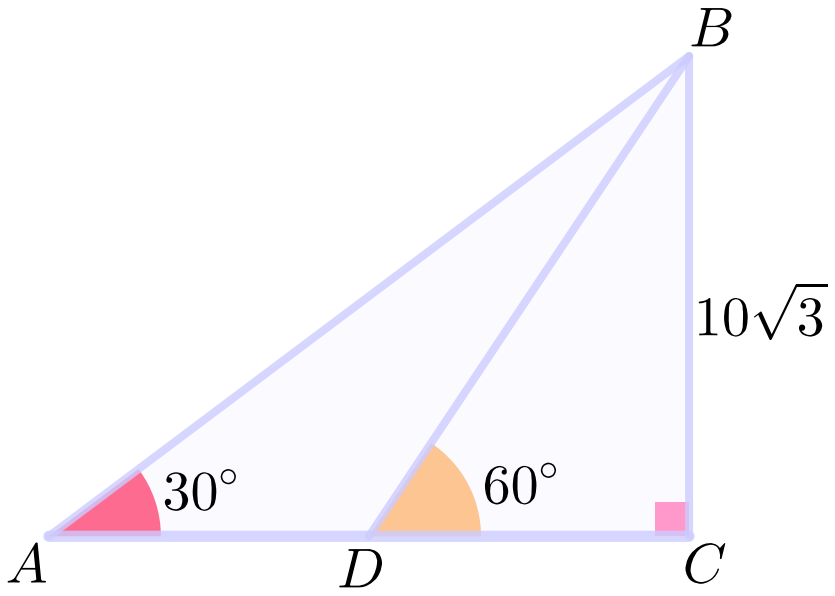


รูปที่ 1.18

ตัวอย่าง 1.8: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

จากรูปที่ 1.19 กำหนดให้ A, B และ C อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม และ $\angle OBC = 39^\circ$ แล้วมุม x มีขนาดเท่าใด

1. 39°
2. 51°
3. 78°
4. 102°

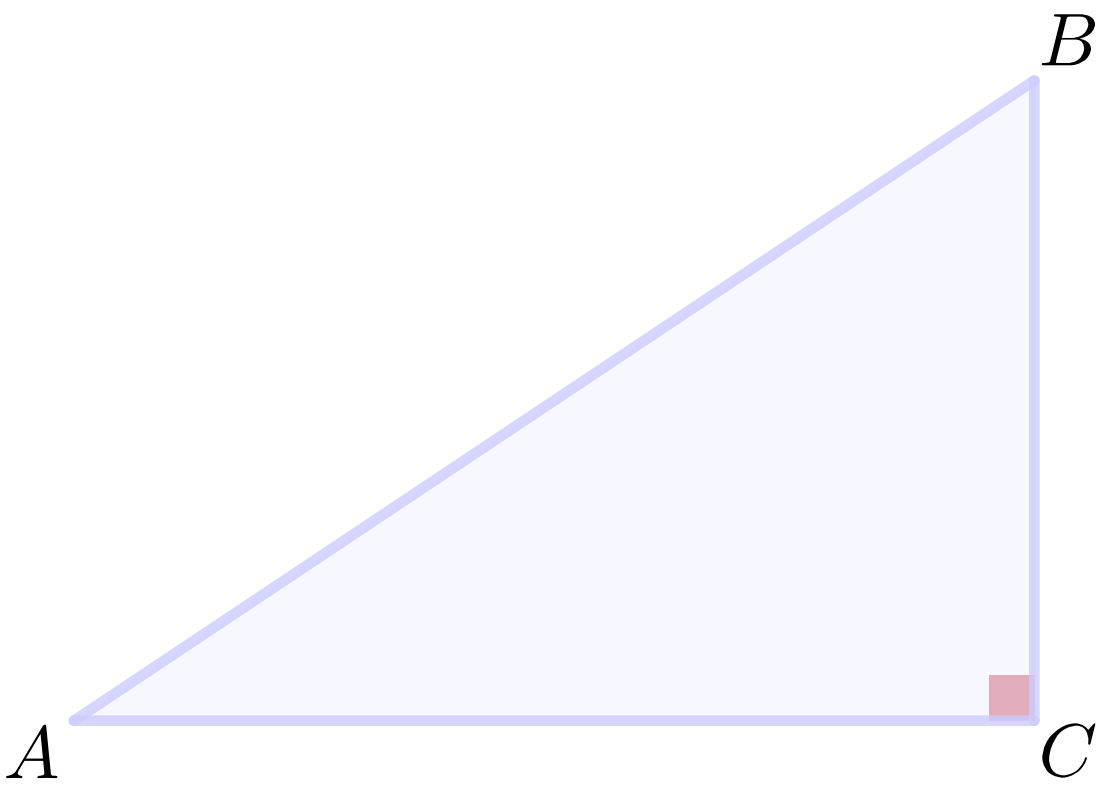


รูปที่ 1.19

ตัวอย่าง 1.9: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

จากรูปที่ 1.20 กำหนดให้จุด A, B, C และ D อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ให้ E เป็นจุดตัดของ AC และ BD เมื่อ $\angle AED = 112^\circ$ และ $\angle EDC = 31^\circ$ แล้ว $\angle ABE$ เท่ากับข้อใด

1. 37°
2. 68°
3. 81°
4. 99°

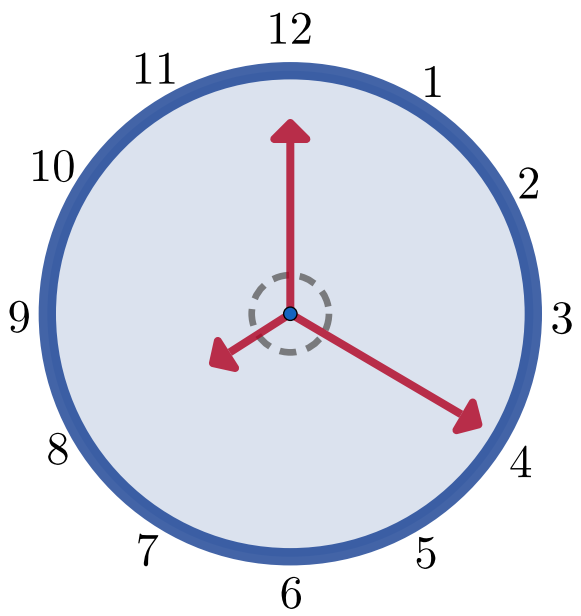


รูปที่ 1.20

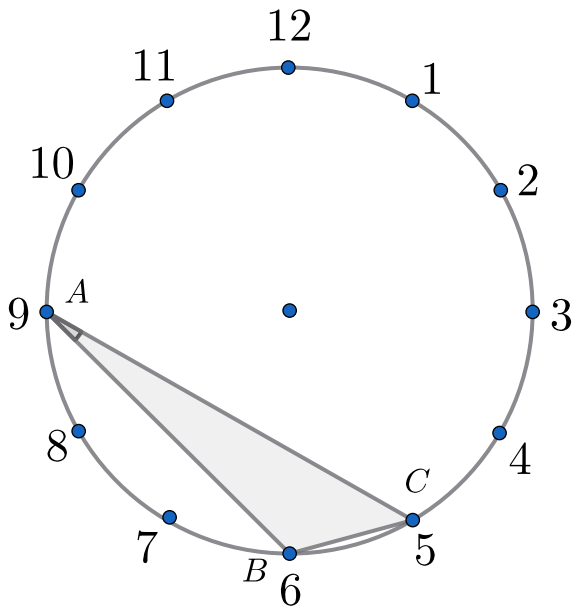
ตัวอย่าง 1.10: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

หน้าปัดนาฬิกาถูกแบ่งเป็น 60 ส่วนเท่า ๆ กัน (ดังแสดงในรูปที่ 1.21) ให้ A, B และ C เป็นจุดอยู่ ที่ $9, 6$ และ 5 นาฬิกา ตามลำดับ (ดังแสดงในรูปที่ 1.22) สมมติว่าจุดทั้งสามจุดนี้อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม O แล้ว $\angle BAC$ มีค่าเท่าใด

1. 10°
2. 15°
3. 20°
4. 30°



รูปที่ 1.21

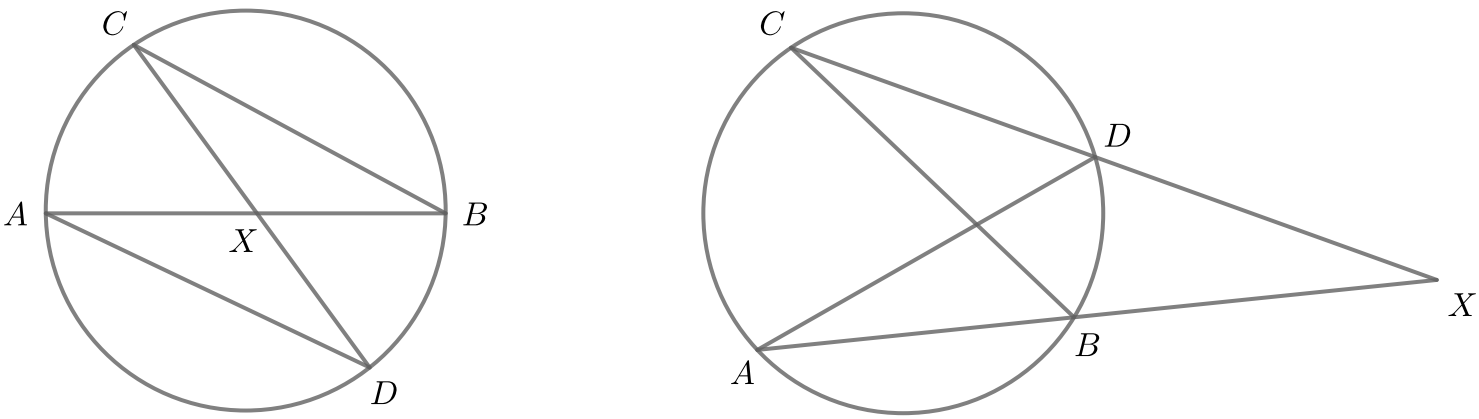


รูปที่ 1.22

ทฤษฎีบท 1.6

จากรูปที่ 1.23 คอร์ด AB และคอร์ด CD ตัดกันที่จุด X เราได้ว่า

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

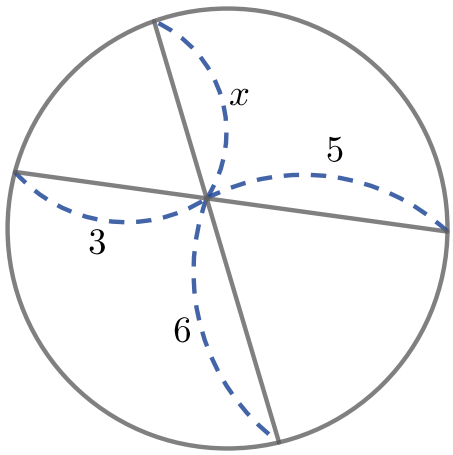


รูปที่ 1.23

ตัวอย่าง 1.11: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

กำหนดให้ คอร์ด AB และคอร์ด CD ตัดกันดังรูปที่ 1.24 จงหาว่า x มีค่าเท่าใด

1. 2
2. 2.5
3. 3.6
4. 4

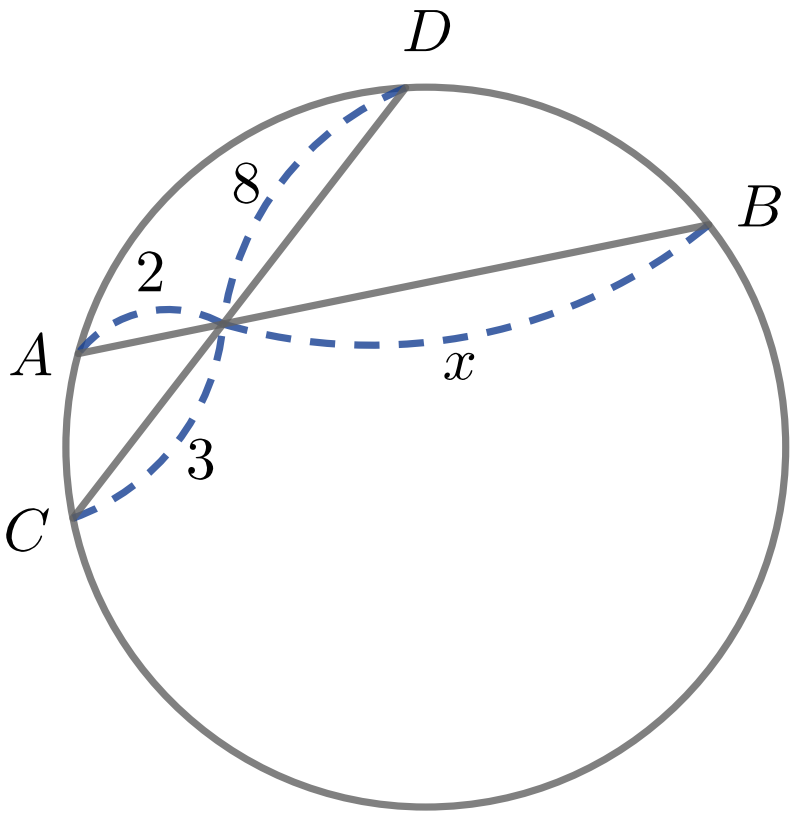


รูปที่ 1.24

ตัวอย่าง 1.12: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

กำหนดให้ คอร์ด AB และคอร์ด CD ตัดกันดังรูปที่ 1.25 จงหาว่า x มีค่าเท่าใด

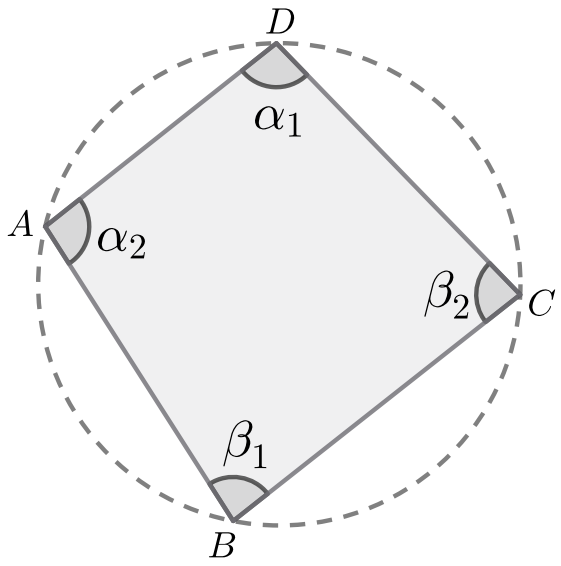
1. 9
2. 12
3. $\frac{16}{3}$
4. $\frac{3}{4}$



รูปที่ 1.25

ทฤษฎีบท 1.7

ขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่ด้านที่แนบในวงกลมรวมกันแล้วเท่ากับสองเท่าของมุมฉาก
จากรูปที่ 1.26 กำหนดให้ $\square ABCD$ แนบในวงกลม เราได้ว่า $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$ และ $\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ$

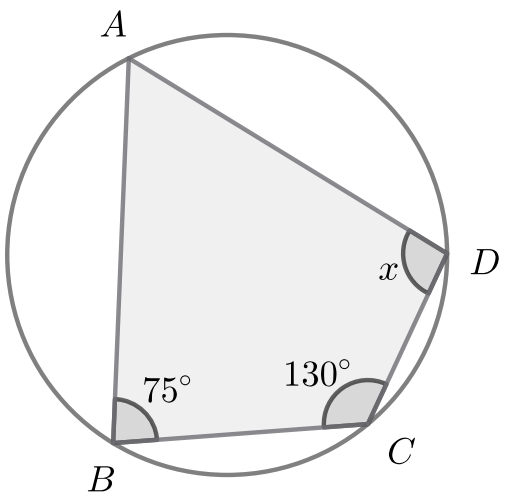


รูปที่ 1.26

ตัวอย่าง 1.13: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

$\square ABCD$ บรรจุในวงกลม โดยที่ $\angle AED = 75^\circ$ และ $\angle BCD = 130^\circ$ ซึ่งแสดงดังรูปที่ 1.27 แล้วมุม x มีค่าเท่าใด

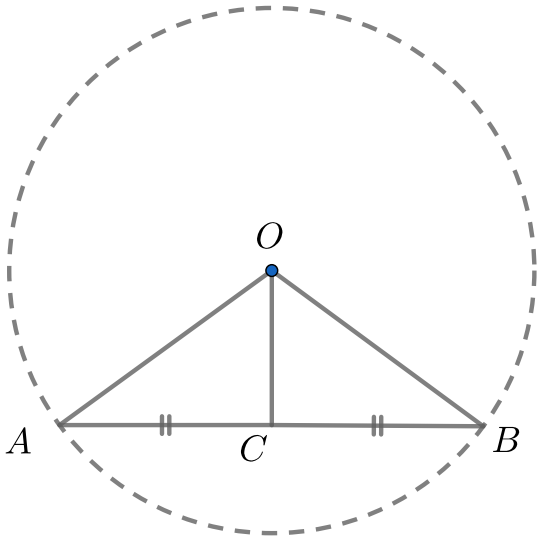
1. 80°
2. 100°
3. 105°
4. 110°



รูปที่ 1.27

ทฤษฎีบท 1.8

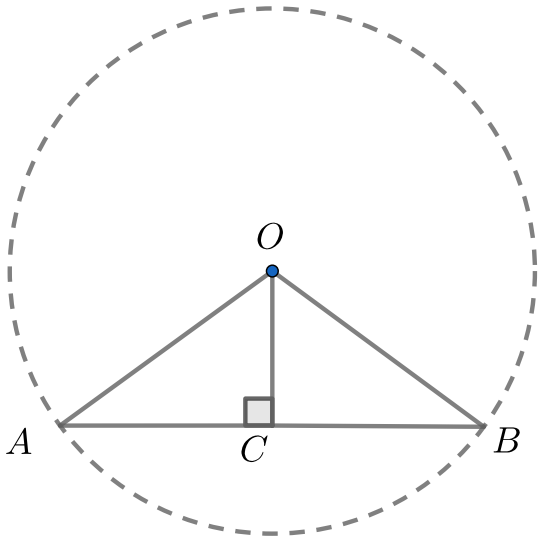
ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไป **แบ่งครึ่ง** คอร์ดซึ่งไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง ส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด
จากรูปที่ 1.28 เราได้ว่า OC ตั้งฉากกับ



รูปที่ 1.28

ทฤษฎีบท 1.9: บทกลับของทฤษฎี 1.8

ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไป **ตั้งฉาก** กับคอร์ดซึ่งไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง ส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด
จากรูปที่ 1.29 เราได้ว่า $AC = CB$

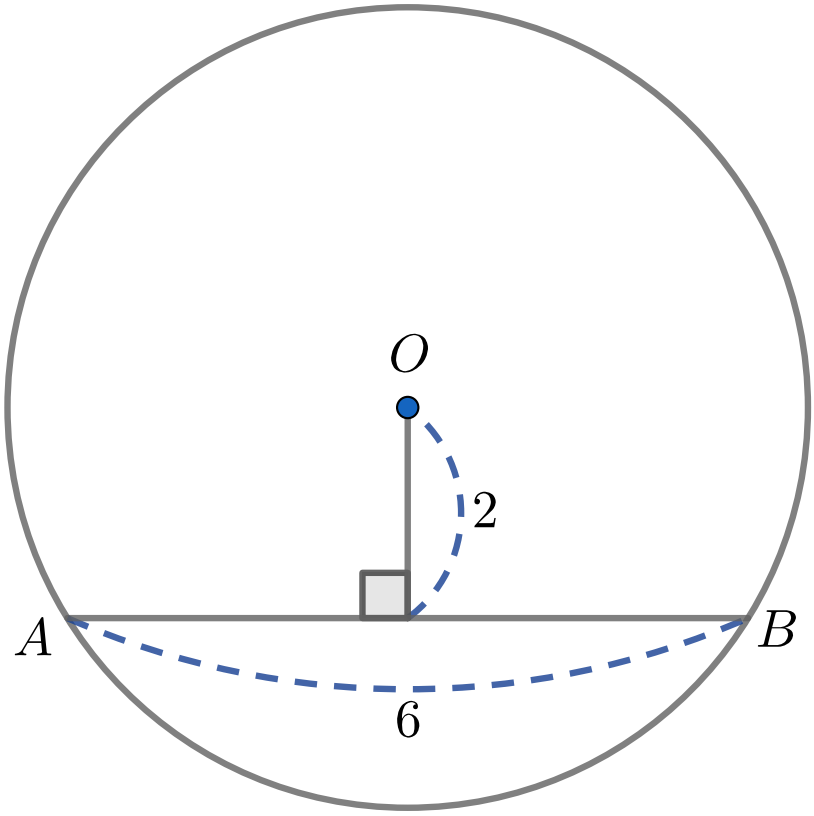


รูปที่ 1.29

ตัวอย่าง 1.14: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

จากรูปที่ 1.30 กำหนดให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด O และมีความยาวคอร์ด AB เท่ากับ 6 เซนติเมตร และระยะจากจุด O ถึงคอร์ด AB เท่ากับ 2 เซนติเมตร จงหาความยาวรัศมีวงกลม

1. $\sqrt{11}$
2. $\sqrt{13}$
3. 4
4. 5



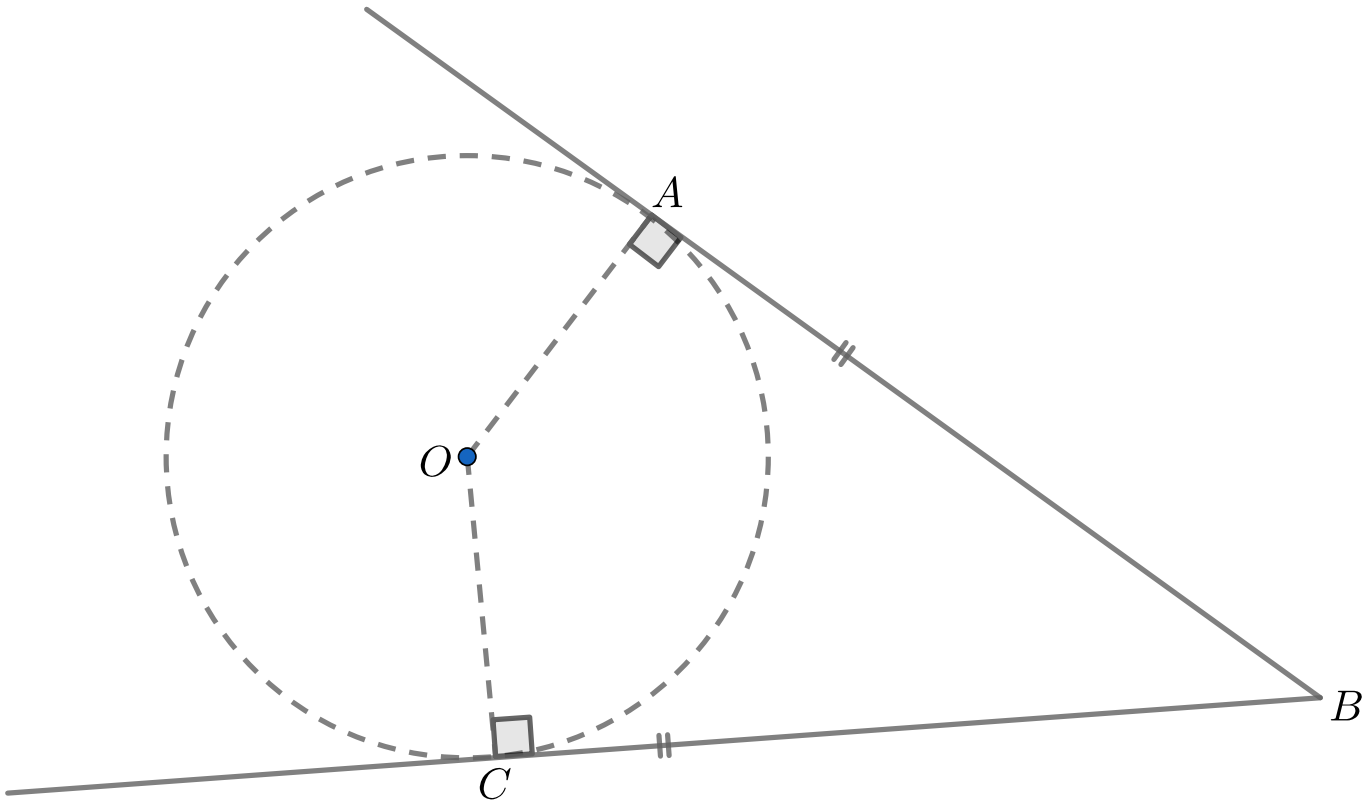
รูปที่ 1.30

1.2.1 เส้นสัมผัสวงกลม

ข้อควรรู้ 1.5

1. **เส้นสัมผัสวงกลม** คือ เส้นตรงซึ่งตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น
2. จากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลม ลากเส้นสัมผัสมายังวงกลมได้เพียงสองเส้นเท่านั้น และ **เส้นสัมผัสนั้นยาวเท่ากัน**
3. เส้นสัมผัส **ตั้งฉาก** กับเส้นรัศมีซึ่งลากมาที่จุดสัมผัส

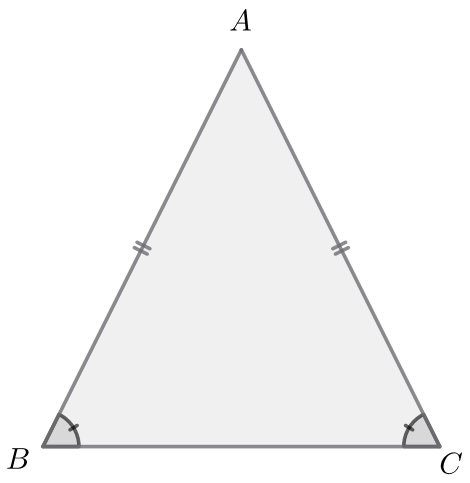
จากรูปที่ 1.31 เราได้ว่า $\angle OCB = \angle OAB = 90^\circ$ และ $AB = CB$



รูปที่ 1.31

ข้อควรรู้ 1.6

รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้านและมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากันเรียกว่า **รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว**
จากรูปที่ 1.32 เราได้ว่า $AB = AC$ และ $\angle ABC = \angle ACB$

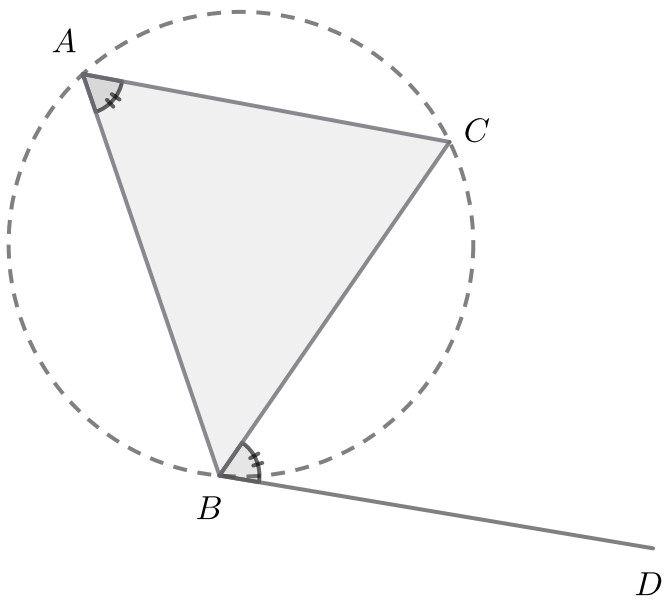


รูปที่ 1.32

ทฤษฎีบท 1.10

มุมที่เกิดจากเส้นสัมผัสจดกับคอร์ดย่อมเท่ากับมุมที่อยู่ในส่วนของวงกลมตรงกันข้าม
จากรูปที่ 1.33 เราได้ว่า

$$\angle BAC = \angle DBC$$

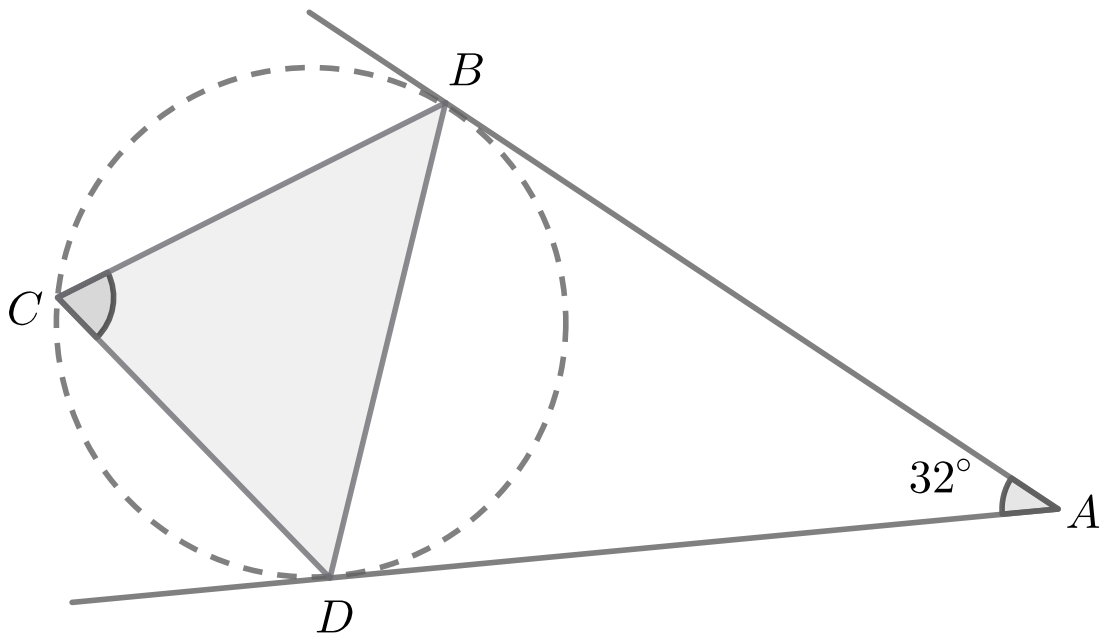


รูปที่ 1.33

ตัวอย่าง 1.15: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

จากรูปที่ 1.34 จงหา $\angle BCD$

1. 71°
2. 72°
3. 73°
4. 74°



รูปที่ 1.34

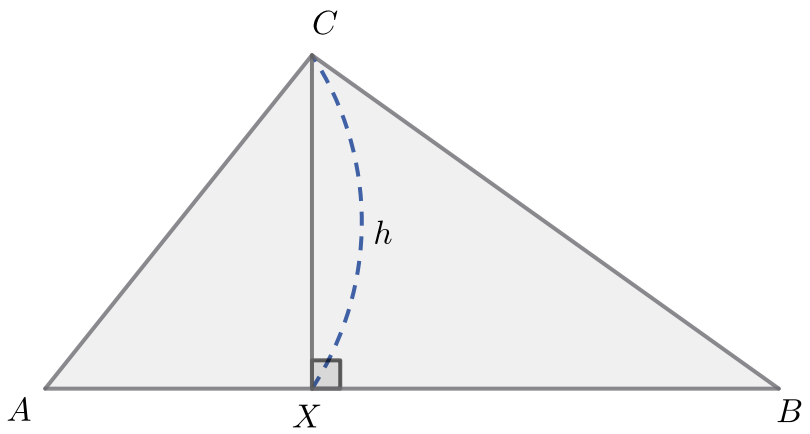
1.3 พื้นที่สามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยม และวงกลม

1.3.1 พื้นที่สามเหลี่ยม

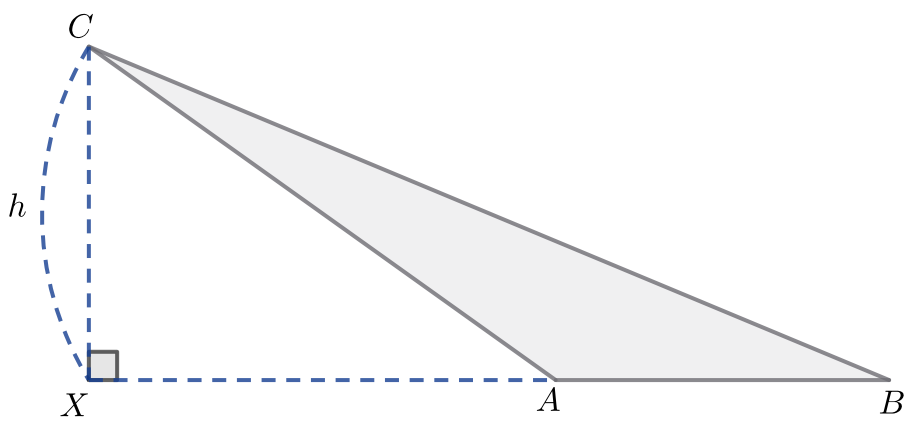
ข้อควรรู้ 1.7

กำหนดให้ $\triangle ABC$ แสดงดังรูปที่ 1.35, 1.36 และ 1.37 ตามลำดับ เราจะได้ว่าพื้นที่ของ $\triangle ABC$ หาได้จาก

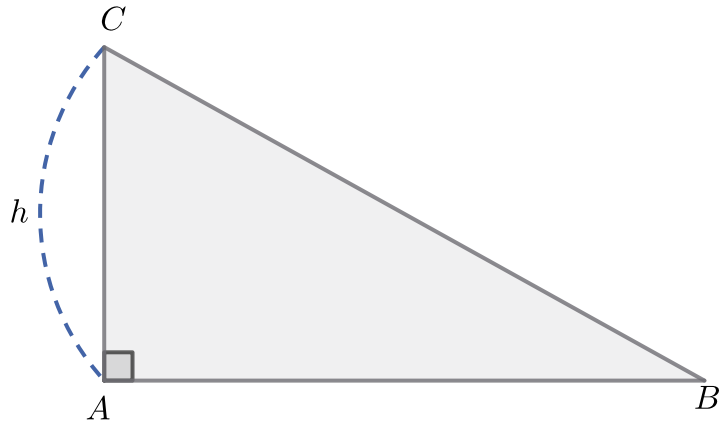
$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \times h \times AB$$



รูปที่ 1.35



รูปที่ 1.36



รูปที่ 1.37

1.3.2 พื้นที่วงกลม

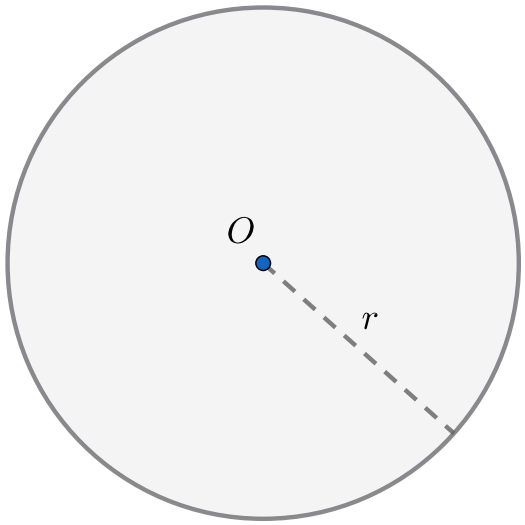
ข้อควรรู้ 1.8

กำหนดให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด O และมีรัศมี r หน่วย แสดงดังรูปที่ 1.38 เราจะได้ว่าพื้นที่ของวงกลมหาได้จาก

$$\pi \times r^2$$

และความเส้นรอบวงกลมหาได้จาก

$$2 \times \pi \times r$$



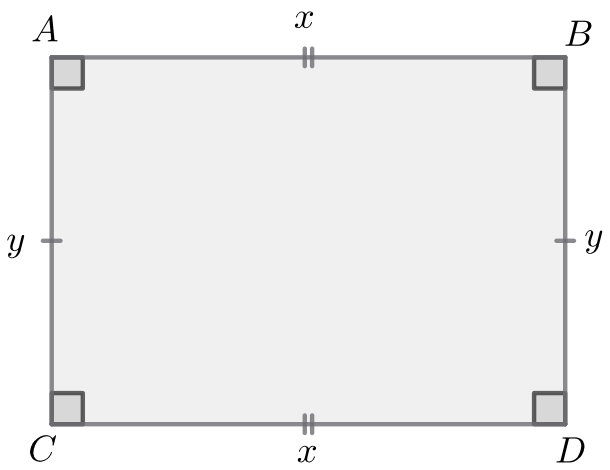
รูปที่ 1.38

1.3.3 พื้นที่สี่เหลี่ยม

ข้อควรรู้ 1.9

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แสดงดังรูปที่ 1.39
เราจะได้ว่า

$$[\square ABCD] = xy$$

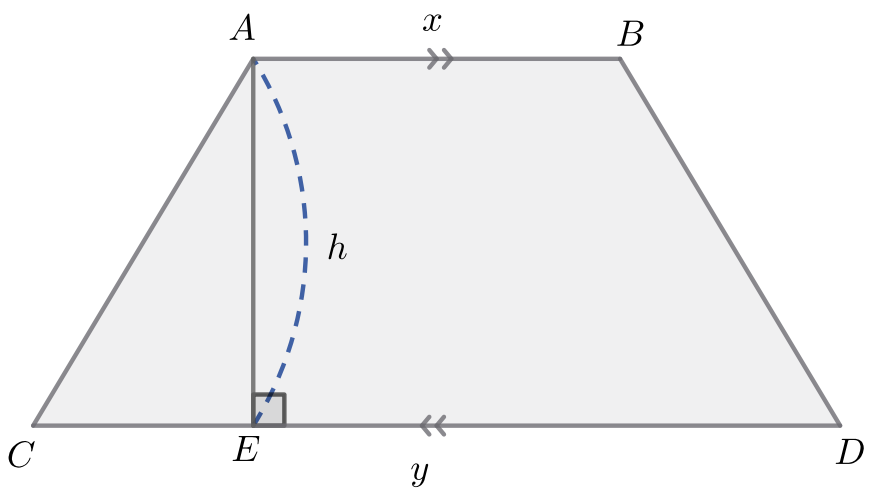


รูปที่ 1.39

ข้อควรรู้ 1.10

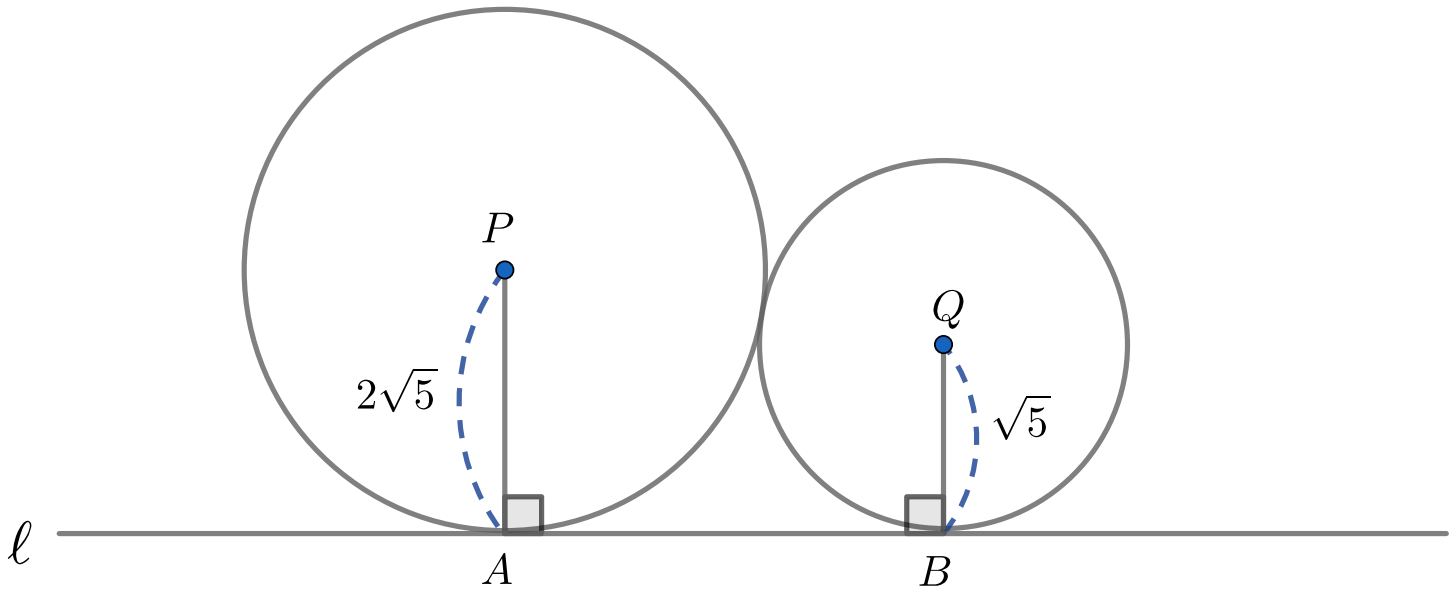
กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู แสดงดังรูปที่ 1.40
เราจะได้ว่า

$$[\square ABCD] = \frac{1}{2} \times (x + y) \times h$$



รูปที่ 1.40

จากรูปที่ 1.41 วงกลม P มีรัศมี $2\sqrt{5}$ เซนติเมตร และวงกลม Q มีรัศมี $\sqrt{5}$ เซนติเมตร วงกลม P และ Q สัมผัสกัน และวงกลมทั้งสองสัมผัสกับส่วนของเส้นตรง (ตั้งฉากซึ่งกัน และตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง ℓ กำหนดให้ A และ B เป็นจุดตัดของส่วนของเส้นตรง ℓ และเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดศูนย์กลางวงกลม P และ Q มาที่เส้นตรง ℓ จากข้อมูลดังกล่าวให้ใช้ตอบคำถามตัวอย่าง 1.16 และตัวอย่าง 1.17



รูปที่ 1.41

ตัวอย่าง 1.16: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

จากรูปที่ 1.41 ข้อใดคือผลรวมของพื้นที่ของวงกลม P และวงกลม Q

1. 15π ลูกบาศก์เซนติเมตร
2. 25π ลูกบาศก์เซนติเมตร
3. 35π ลูกบาศก์เซนติเมตร
4. 45π ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่าง 1.17: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

จากรูปที่ 1.41 จะหาความยาวของส่วนเส้นตรง AB

1. $3\sqrt{5}$ เซนติเมตร
2. $4\sqrt{5}$ เซนติเมตร
3. $2\sqrt{10}$ เซนติเมตร
4. $4\sqrt{10}$ เซนติเมตร

ตัวอย่าง 1.18: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

ขยายสวนแอปเปิ้ลเป็นรูปวงกลมที่มี รัศมี r เมตร โดยขยายรัศมีให้ใหญ่ขึ้น 2 เมตร จะได้พื้นที่วงกลมขยายมากขึ้นเมื่อ เทียบกับวงกลมเดิม กี่ตารางเมตร

1. $\pi(r+2)^2$
2. $\pi\left(r^2+4\right)$
3. $4\pi(r-1)$
4. $4\pi(r+1)$

ตัวอย่าง 1.19: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปวงกลมมีพื้นที่เท่ากัน จงหาว่าความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเป็นกี่เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางของรูปวงกลม (กำหนดให้ $\sqrt{\pi}=1.772$)

1. 0.564
2. 0.886
3. 1.129
4. 1.772

ตัวอย่าง 1.20: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีอัตราส่วนด้านสั้นที่สุดต่อด้านยาวที่สุดเป็น 8 : 17 และมีพื้นที่เป็น 240 ตารางหน่วย จงหาด้านยาวเป็นอันดับสอง

1. 30 หน่วย
2. 34 หน่วย
3. 36 หน่วย
4. 40 หน่วย

ตัวอย่าง 1.21: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ลาดยาว 72 เซนติเมตร ถูกตัดเป็นสองส่วนและนำมาสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดต่างกัน กำหนดให้ความยาวและ ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่เล็กกว่ายาว x เซนติเมตร และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองรูปรวมกันเท่ากับ y ตาราง เซนติเมตร จะหาค่าของ x เมื่อกำหนดให้ $y = 234$

1. 3
2. 5
3. 9
4. 15

ตัวอย่าง 1.22: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

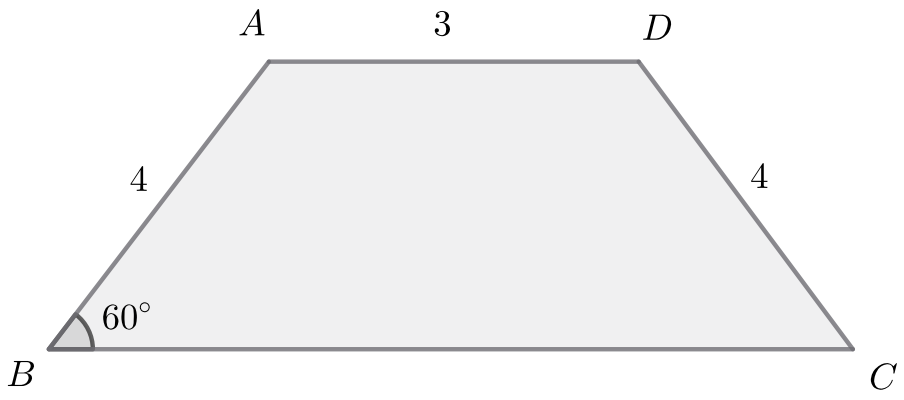
ให้ A และ B เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปที่คล้ายกัน ถ้าอัตราส่วนของความยาวด้านที่สมนัยกันของสี่เหลี่ยมผืนผ้า A และ B เท่ากับ $2 : 3\sqrt{2}$ แล้วอัตราส่วนของพื้นที่ของสีเหลี่ยมผืนผ้า A และ B คือข้อใด

1. $3\sqrt{2} : 2$
2. $2 : 3\sqrt{2}$
3. $2 : 9$
4. $9 : 2$

ตัวอย่าง 1.23: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งแสดงดังรูปที่ 1.42 จะหาความยาวของด้าน BC

1. 5 หน่วย
2. 7 หน่วย
3. 9 หน่วย
4. 11 หน่วย



รูปที่ 1.42

ตัวอย่าง 1.24: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

จากตัวอย่าง 1.23 จงหา $[\square ABCD]$

1. $2\sqrt{3}$ ตารางหน่วย
2. $8\sqrt{3}$ ตารางหน่วย
3. $10\sqrt{3}$ ตารางหน่วย
4. $14\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

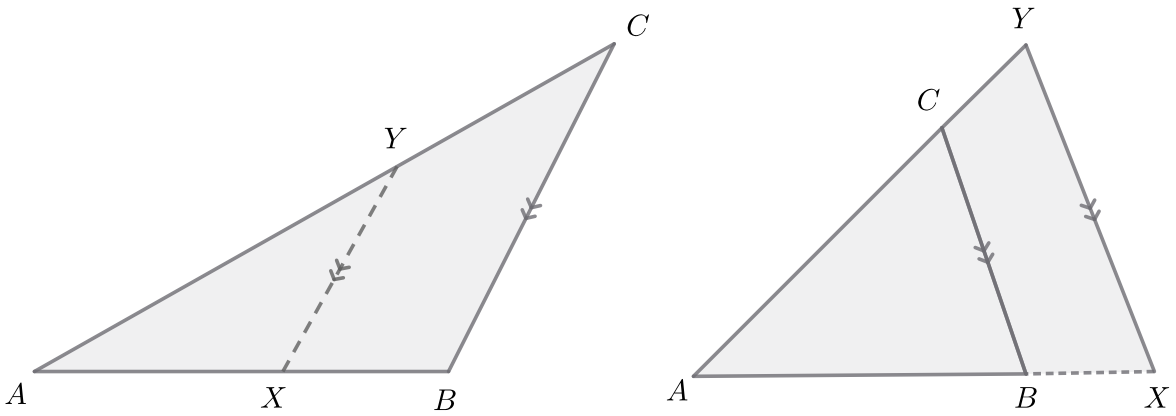
1.4 อัตราส่วนของสามเหลี่ยมและสามเหลี่ยมคล้าย

1.4.1 อัตราส่วนของสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบท 1.11

ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากขนานกับด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม จะแบ่งด้านที่เหลือออกเป็นสัดส่วนกัน จากรูปที่ 1.43 เราได้ว่า

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$$



รูปที่ 1.43

1.4.2 สามเหลี่ยมคล้าย

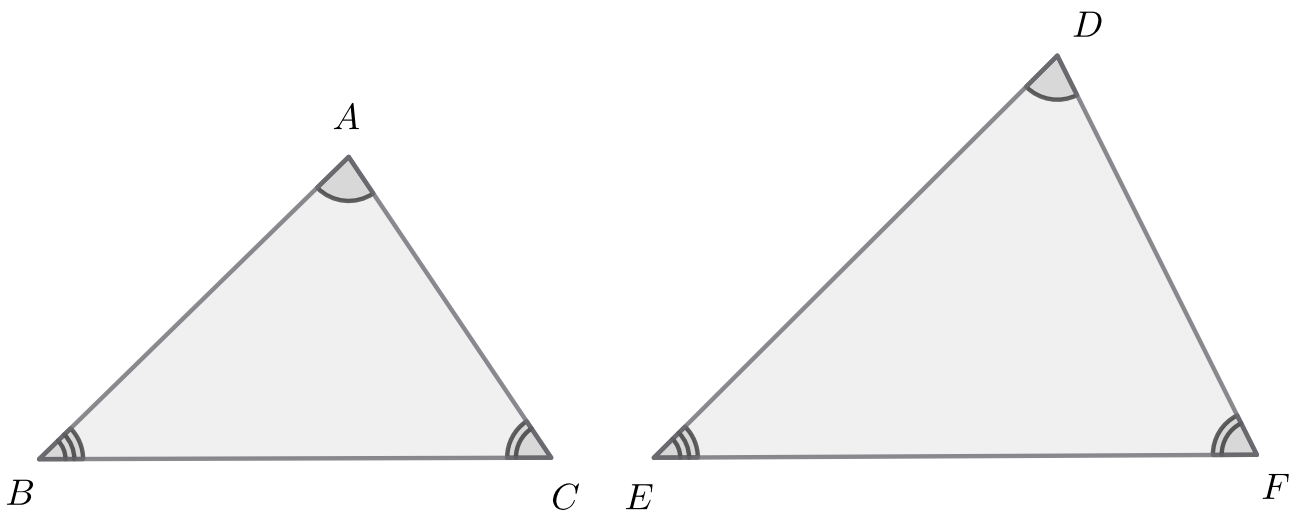
ข้อควรรู้ 1.11

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่า **รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน** จากรูปที่ 1.44

* $\angle A = \angle D$
* $\angle B = \angle E$
* $\angle C = \angle F$

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน แทนด้วย $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ รูปสามเหลี่ยมคล้ายสองรูปมีด้านที่สมนัยกันเป็นสัดส่วนกัน

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

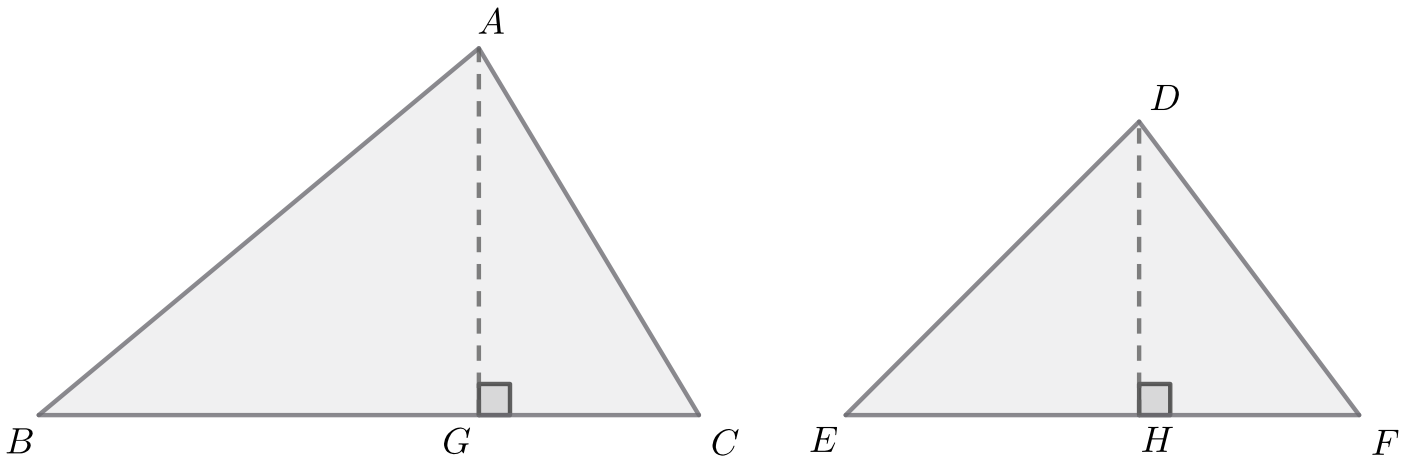


รูปที่ 1.44

ทฤษฎีบท 1.12

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายเป็นสัดส่วนกับจัตุรัสซึ่งตั้งอยู่บนด้านที่สมนัยกัน
จากรูปที่ 1.45 กำหนดให้ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ และ BC กับ EF เป็นด้านที่สมนัยกัน เราจะได้ว่า

$$\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle DEF]} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$



รูปที่ 1.45

ตัวอย่าง 1.25: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

เสาไฟสนามสูง 40 เซนติเมตรตั้งฉากกับพื้นดิน มีไฟปลายเสาไฟ ไฟส่องไปหารูป ปั้นที่สูง 120 เซนติเมตร ที่ตั้งฉากกับพื้นดิน เสาไฟกับรูปปั้นห่างกัน 1 เมตรทำให้ เกิดเงาขึ้นที่กำแพงตึก ถ้าอาคารอยู่ห่างจากรูปปั้น 2 เมตร จะเกิดเงาสูงจากพื้นกี่เมตร

1. 2.4
2. 2.6
3. 2.8
4. 3.2

ตัวอย่าง 1.26: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

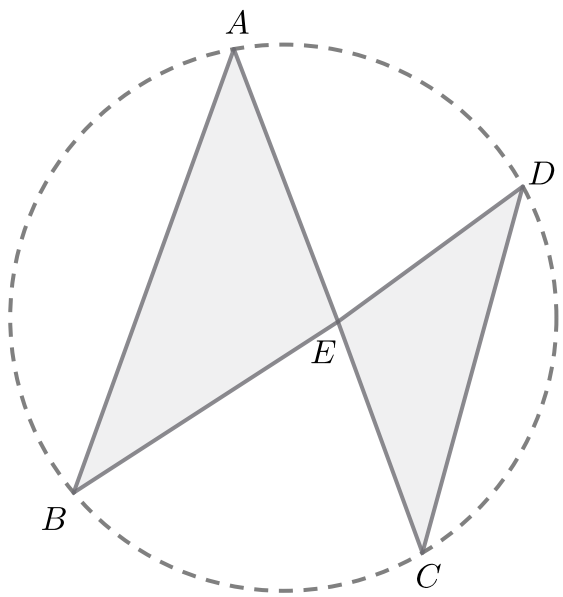
ให้ A และ B เป็นรูปสามหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน ถ้าอัตราส่วนของความยาวด้านของ A ต่อความยาวด้าน ของ B คือ $4 : 3\sqrt{2}$ แล้วอัตราส่วนของพื้นที่ของ A ต่อพื้นที่ของ B คือข้อใด

1. $3\sqrt{2} : 4$
2. $4 : 3\sqrt{2}$
3. $8 : 9$
4. $9 : 8$

ตัวอย่าง 1.27: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

จากรูปที่ 1.46 กำหนดให้ $AB : DC = 3 : 5$ และ $[\triangle ABC] = 6$ ตารางเซนติเมตร แล้ว $[\triangle DEC]$ มีค่ากี่ตารางเซนติเมตร

1. 10 ตารางเซนติเมตร
2. $\frac{50}{3}$ ตารางเซนติเมตร
3. $\frac{52}{5}$ ตารางเซนติเมตร
4. $\frac{54}{5}$ ตารางเซนติเมตร

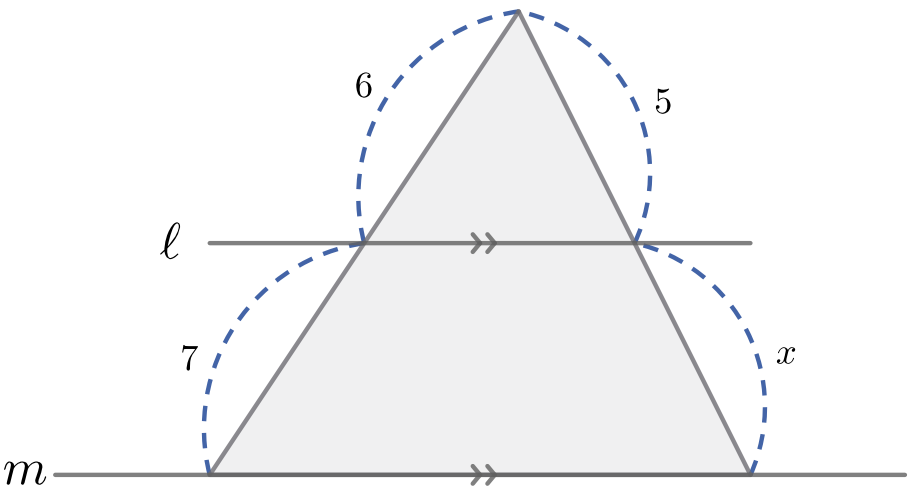


รูปที่ 1.46

ตัวอย่าง 1.28: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

จากรูปที่ 1.47 กำหนดให้ เส้นตรง ℓ ขนานกับ เส้นตรง m จะหาความยาว x

1. $\frac{30}{7}$
2. $\frac{35}{6}$
3. $\frac{42}{5}$
4. 8

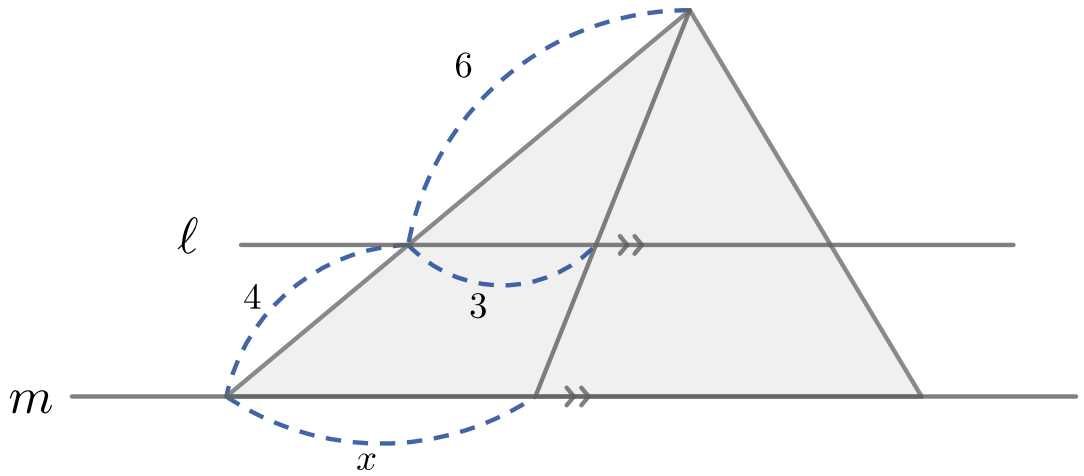


รูปที่ 1.47

ตัวอย่าง 1.29: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

จากรูปที่ 1.48 กำหนดให้ เส้นตรง ℓ ขนานกับ เส้นตรง m จะหาความยาว x

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7

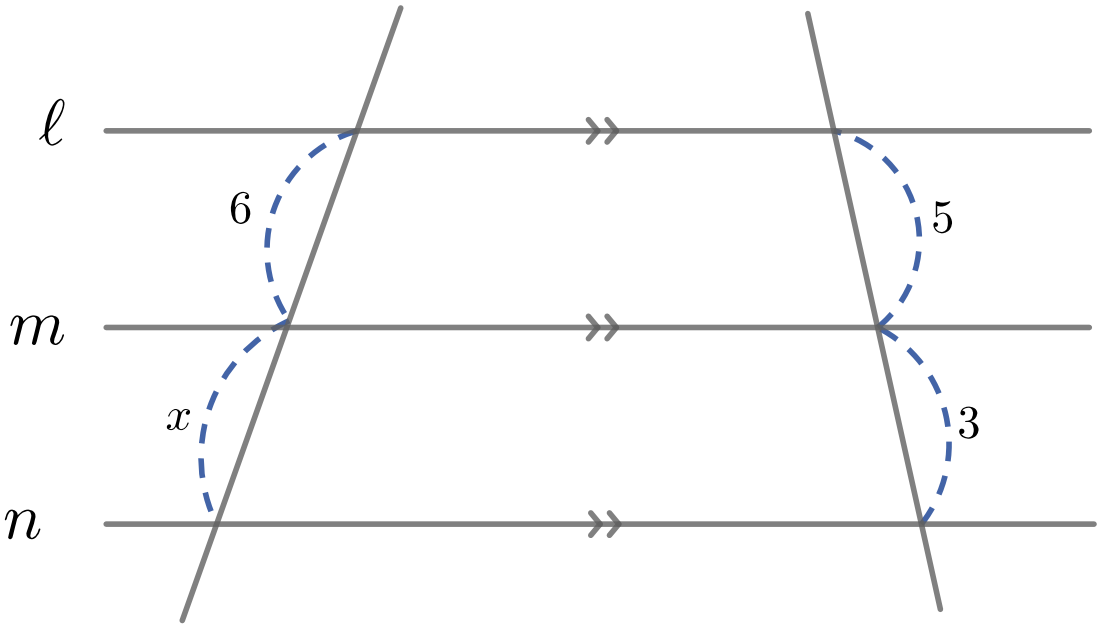


รูปที่ 1.48

ตัวอย่าง 1.30: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

จากรูปที่ 1.49 กำหนดให้เส้นตรง ℓ ขนานกับเส้นตรง m และ เส้นตรง m ขนานกับเส้นตรง n จะหาความยาว x

1. 2
2. $\frac{15}{6}$
3. $\frac{18}{5}$
4. 10



รูปที่ 1.49

บทที่ 2
ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องการแปรผัน

2.1 การแปรผัน

การแปรผัน แบ่งออกเป็น 3 ชนิด ดังนี้

1. การแปรผันตรง
2. การแปรผันแบบผกผัน
3. การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

2.1.1 การแปรผันตรง

การแปรผันตรง คือความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ โดยที่อัตราส่วนของปริมาณหนึ่งต่ออีกปริมาณหนึ่งเป็นค่าคงตัว กล่าวคือ เมื่อปริมาณหนึ่งเปลี่ยนแปลง อีกปริมาณหนึ่งจะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกันและเป็นสัดส่วนกัน

บทนิยาม 2.1

กำหนดให้ x และ y แทนปริมาณใด ๆ จะกล่าวว่า y **เป็นสัดส่วนโดยตรง** กับ x^n เมื่อ n เป็นจำนวนจริง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y \propto x^n$ ซึ่งหมายความว่า

$$y = \alpha x^n$$

โดยที่ α เป็นค่าคงตัว และ $\alpha \neq 0$ เรียก α ว่า **ค่าคงตัวของการแปรผัน**
กรณีพิเศษ เมื่อ $n = 1$ จะเรียกว่า y **แปรผันตรง** กับ x

2.1.2 การแปรผกผัน

การแปรผกผัน คือความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ โดยที่ผลคูณของปริมาณทั้งสองเป็นค่าคงตัว กล่าวคือ เมื่อปริมาณหนึ่งเพิ่มขึ้น อีกปริมาณหนึ่งจะลดลงในอัตราส่วนที่สอดคล้องกัน

บทนิยาม 2.2

กำหนดให้ x และ y แทนปริมาณใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ จะกล่าวว่า y **แปรผกผัน** กับ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y \propto \frac{1}{x}$ เมื่อสามารถเขียนความสัมพันธ์ในรูป

$$y = \frac{\alpha}{x}$$

โดยที่ α เป็นค่าคงตัวและ $\alpha \neq 0$ เรียก α ว่า **ค่าคงตัวของการแปรผัน**

2.1.3 การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

การแปรผันเกี่ยวเนื่อง คือความสัมพันธ์ที่ปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับหลายปริมาณพร้อมกัน ซึ่งอาจเป็นการแปรผันตรง การแปรผกผัน หรือการผสมกันของทั้งสองลักษณะ

บทนิยาม 2.3

กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ และ y แทนปริมาณใด ๆ จะกล่าวว่า y **แปรผันเกี่ยวเนื่อง** กับ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ y แปรผันตรงกับผลคูณของปริมาณเหล่านั้น เขียนได้เป็น

$$y = \alpha x_1 x_2 \cdots x_n$$

โดยที่ α เป็นค่าคงตัวและ $\alpha \neq 0$ เรียก α ว่า **ค่าคงตัวของการแปรผัน**

ตัวอย่าง 2.1: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

กำหนดให้ y เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ x^2 และเมื่อ $x = -2$ จะได้ $y = -5$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = -5$
2. เมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ จะได้ $y = -\frac{5}{6}$
3. เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ จะได้ $y = -\frac{5}{6}$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 2.2: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

กำหนดให้ y เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ x^2 และเมื่อ $x = -6$ จะได้ $y = 9$ ถ้า $x = 8$ แล้ว y มีค่าเท่าใด

1. 16
2. 32
3. 64
4. 256

ตัวอย่าง 2.3: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

กำหนดให้ y เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ x^2 และเมื่อ $x = -1$ จะได้ $y = 3$ ข้อใดเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y และ x

1. $y = x^2 + 2$
2. $y = -x^2 + 4$
3. $y = 2x^2 + 1$
4. $y = 3x^2$

ตัวอย่าง 2.4: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

กำหนดให้ y เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ x^2 และเมื่อ $x = 4$ จะได้ $y = -4$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y และ x

1. $y = \frac{1}{2}x^2 - 12$
2. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$
3. $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$
4. $y = -\frac{1}{4}x^2$

บทที่ 3
ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องตรีโกณมิติ

3.1 ตรีโกณมิติเบื้องต้น

3.1.1 องศาและเรเดียน

หลักการ 3.1

* เปลี่ยน **เรเดียน** เป็น **องศา** แทน π ด้วย 180°
* เปลี่ยน **องศา** เป็น **เรเดียน** คูณด้วย $\dfrac{\pi}{180}$

ตัวอย่าง 3.1: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

72° เท่ากับกี่เรเดียน

1. $\dfrac{2\pi}{3}$
2. $\dfrac{2\pi}{5}$
3. $\dfrac{3\pi}{4}$
4. $\dfrac{3\pi}{5}$

ตัวอย่าง 3.2: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

ถ้า A อยู่ในจตุภาคที่ 1 โดยที่ $0^\circ < A < 90^\circ$ แล้ว $\cos(90^\circ - A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\sin(A)$
2. $\cos(A)$
3. $-\sin(A)$
4. $-\cos(A)$

ตัวอย่าง 3.3: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

กำหนด $0^\circ < A < 90^\circ$ แล้วจงหาค่าของ

$$\sin(90^\circ - A)\cos(A)\tan^2(A) + \frac{\sin(A)\cos(90^\circ - A)}{\tan^2(A)}$$

1. -1
2. 1
3. $\sin(2A)$
4. $\cos(2A)$

ตัวอย่าง 3.4: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ถ้า $\tan(\theta) = -10$ เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ แล้ว $\cos(\theta)$ มีค่าเท่าไร

1. $\dfrac{-1}{\sqrt{101}}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$
3. $\dfrac{10}{\sqrt{101}}$
4. $\dfrac{-10}{\sqrt{101}}$

ตัวอย่าง 3.5: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ถ้า θ เป็นมุม ซึ่ง $270^\circ < \theta < 360^\circ$ และ $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{4}$ แล้ว $\sin(2\theta)$ มีค่าเท่าไหร่

1. $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

2. $\frac{\sqrt{15}}{8}$
3. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
4. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

ตัวอย่าง 3.6: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

ถ้า $\tan(\theta) = 3$ สำหรับ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ แล้ว $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ มีค่าเท่าไร

1. $\frac{1}{\sqrt{10}}$
2. $\frac{2}{\sqrt{10}}$
3. $\frac{3}{\sqrt{10}}$
4. $\frac{4}{\sqrt{10}}$

ตัวอย่าง 3.7: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2566

กำหนดให้ $\tan(\theta) = 3$ เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ และ $x = \cos(\theta), y = \sin(\theta)$ ข้อใดถูกต้อง

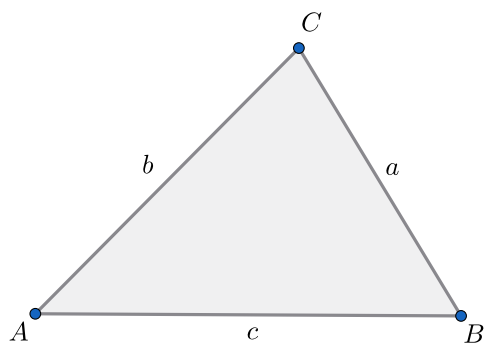
1. $xy = \frac{3\sqrt{10}}{5}$
2. $x - y = \frac{\sqrt{10}}{5}$
3. $x + y = \frac{2\sqrt{10}}{5}$
4. ถูกต้องข้อ 1, 2 และ 3

3.2 กฎของกฎของไซน์และโคไซน์

ทฤษฎีบท 3.1: กฎของโคไซน์

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มีความยาวแต่ละด้านซึ่งแสดงดังรูปที่ 6.5 เราจะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

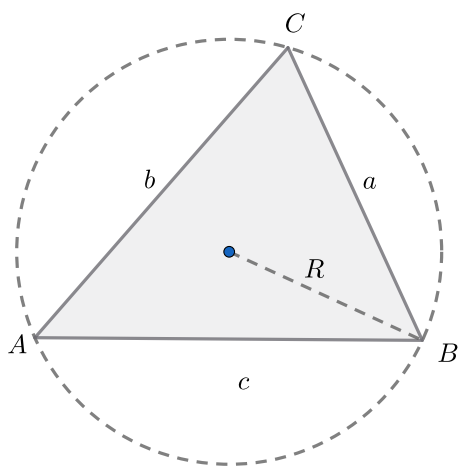


รูปที่ 3.1

ทฤษฎีบท 3.2: กฎของไซน์

กำหนดให้ $\triangle ABC$ ถูกล้อมรอบด้วยวงกลมรัศมี R แต่มีความยาวแต่ละด้านซึ่งแสดงดังรูปที่ 6.6 เราจะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$



รูปที่ 3.2

ตัวอย่าง 3.8: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

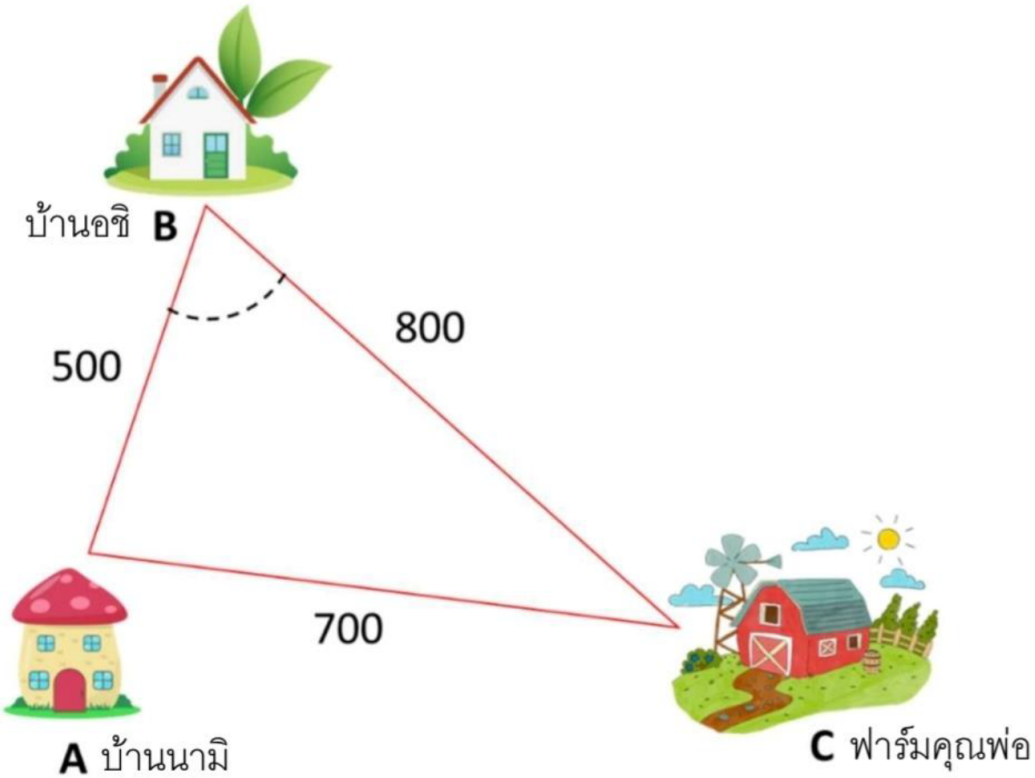
กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $AB = 3$ หน่วย $AC = 3$ หน่วย และ $\angle A = 120^\circ$ จงหาความยาวด้าน BC

1. $3\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{7}$
4. 9

ตัวอย่าง 3.9: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

จากรูปที่ 6.7 จงหาขนาดของมุม B

1. 30°
2. 45°
3. 60°
4. 75°

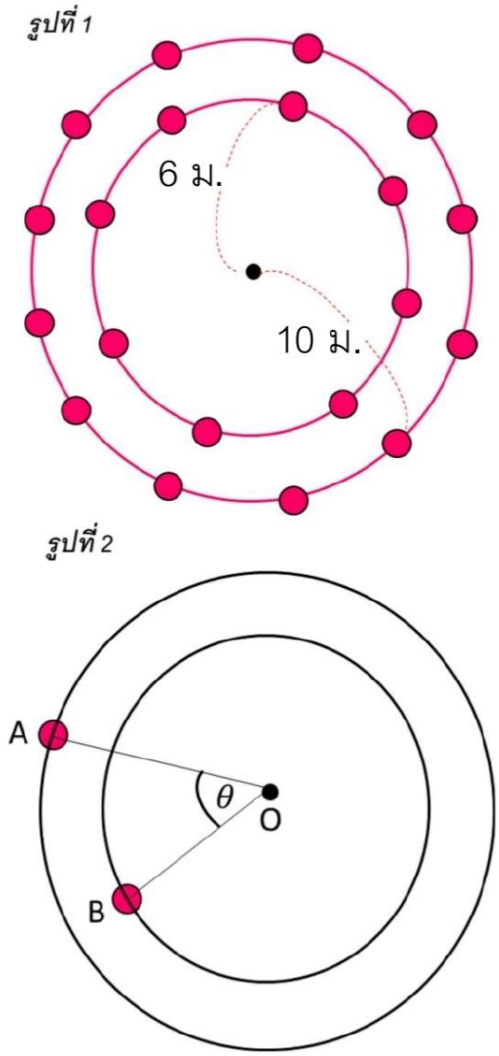


รูปที่ 3.3

ตัวอย่าง 3.10: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

รูปที่ 6.8 แสดงภาพมุมสูงของม้าหมุนในสวน แห่งหนึ่ง โดยมีที่นั่งอยู่บนเส้นรอบวงสองวง และ หมุนรอบจุดศูนย์กลาง O โดยมีรัศมีของวงกลมด้าน นอกเท่ากับ 10 เมตร รัศมีของวงกลมด้านในเท่ากับ 6 เมตร กำหนดให้ที่นั่ง A และ B อยู่ข้างกันบนเส้นรอบวงด้าน นอก และด้านในตามลำดับ โดยไม่คำนึงขนาดของที่นั่ง เมื่อที่นั่ง A และ B เริ่มขยับไปพร้อมๆ กัน รูปที่ 2 แสดงให้เห็นตำแหน่ง A และ B หลังผ่านไป $2-3$ นาที หลังจากเริ่มหมุน ถ้า $\angle AOB = \theta$ และ $\cos(\theta) = \dfrac{11}{24}$ จงหาระยะทางจาก A มา B

1. 7
2. 9
3. 11
4. 13



รูปที่ 3.4

บทที่ 4
ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องเซต

4.1 การดำเนินการทางเซต

กำหนดให้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์ และให้ A, B เป็นเซตย่อยของ U

4.1.1 ยูเนียน

ให้ A และ B เป็นเซต **ยูเนียนของเซต A และ B** แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$ หมายถึง เซตของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในเซต A หรือเซต B หรืออยู่ในทั้งสองเซตร่วมกัน

ตัวอย่าง 4.1

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\{3, 5\} \cup \{2, 3, 5\} = \{2, 3, 5\}$$
$$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$$

จากตัวอย่าง 4.1 จะได้สมบัติที่สำคัญคือ

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{และ} \quad A \cup U = U$$

4.1.2 อินเตอร์เซก

ให้ A และ B เป็นเซต **อินเตอร์เซกของเซต A และ B** แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ หมายถึง เซตของสมาชิกที่อยู่ร่วมกันในทั้งเซต A และเซต B

ตัวอย่าง 4.2

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} &= \{2, 3\} \\ \{3, 5\} \cap \{2, 3, 5\} &= \{3, 5\} \\ \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} &= \emptyset \\ \{1, 2\} \cap \emptyset &= \emptyset \end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 4.2 จะได้สมบัติว่า

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{และ} \quad A \cap \mathcal{U} = A$$

4.1.3 ผลต่างของเซต

ให้ A และ B เป็นเซต **ผลต่างของเซต A กับ B** แทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ หมายถึง เซตของสมาชิกที่อยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B

ตัวอย่าง 4.3

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4\} &= \{1\} \\ \{7, 8, 9\} - \{8\} &= \{7, 9\} \\ \{1, 3, 5\} - \{2, 4, 6\} &= \{1, 3, 5\} \\ \{2, 3, 4\} - \{1, 2, 3\} &= \{4\} \\ \{3, 5\} - \{2, 3, 5\} &= \emptyset \\ \{1, 2\} - \emptyset &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 4.3 จะได้ว่า

$$A - \emptyset = A \quad \text{และ} \quad A - \mathcal{U} = \emptyset$$

4.1.4 คอมพลีเมนต์ของเซต

ให้ A เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ U **คอมพลีเมนต์ของเซต** A แทนด้วยสัญลักษณ์ A' หรือ A^c หมายถึง เซตของสมาชิกทั้งหมดใน U ที่ไม่อยู่ในเซต A

กล่าวคือ

$$A' = A^c = U - A$$

ตัวอย่าง 4.4

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\}^c &= \{4, 5\} \\ \{1, 4\}^c &= \{2, 3, 5\} \\ U^c &= \emptyset \\ \emptyset^c &= U \end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 4.4 จะเห็นว่า

$$U^c = \emptyset \quad \text{และ} \quad \emptyset^c = U$$

ตัวอย่าง 4.5: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $A \cap B = \{3, 5\}$
2. $A \cup B$ มีจำนวนสมาชิก 10 ตัว
3. $A - B = B - A$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 4.6: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

กำหนดให้ $A = \{1, 3, 4, 8\}$ และ $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $A - B = B - A$
2. $A \cup B$ มีจำนวนสมาชิก 9 ตัว
3. $A \cap B = \{3, 8\}$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ข้อควรรู้ 4.1: หลักการรวมเข้า–เอาออก

ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด โดยมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $n(A), n(B)$ และ $n(C)$ ตามลำดับ

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

ตัวอย่าง 4.7: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

มีนักเรียน 50 คน เลือกเข้าชมรม 3 ชมรม คือ ดนตรี ศิลปะ และกีฬา โดยนักเรียนแต่ละคนต้องเลือกอย่างน้อย 1 ชมรม แต่ไม่เกิน 2 ชมรม และมีเงื่อนไขดังนี้

- จำนวนนักเรียนที่เลือกชมรม 2 ชมรมใด ๆ มีจำนวนเท่ากัน
- นักเรียนที่เลือกกีฬามี 20 คน
- นักเรียนที่เลือกศิลปะมี 15 คน
- นักเรียนที่เลือกศิลปะเพียงชมรมเดียวมี 7 คน

จงหาจำนวนนักเรียนที่เลือกกีฬาเพียงชมรมเดียว

บทที่ 5
ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องจำนวนจริง

5.1 พหุนาม

5.1.1 การดำเนินการเกี่ยวกับพหุนาม

หลักการ 5.1: การบวกและการลบพหุนาม

การบวกและการลบพหุนาม ให้บวกลบเฉพาะเอกนามที่เป็นชนิดเดียวกัน (มีตัวแปรและเลขชี้กำลังเท่ากัน) หากไม่สามารถบวกลบกันได้ ให้คงรูปเดิมไว้ เช่น

$$\left(2x^5+4x+5\right)+\left(x^5-x^2-2x\right)=3x^5-x^2+2x+5$$
$$\left(x^2-2x-1\right)-\left(2x^2-x-2\right)=-x^2-x+1$$
$$\left(3x^3-5x+2\right)+\left(-x^3+4x-7\right)=2x^3-x-5$$
$$\left(4x^2+x-6\right)-\left(x^2-3x+1\right)=3x^2+4x-7$$

หลักการ 5.2: การคูณพหุนาม

การคูณพหุนาม ให้ใช้สมบัติการแจกแจง โดยคูณทุกพจน์ของพหุนามหนึ่งเข้ากับทุกพจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง

เช่น

$$
\begin{aligned}
6\left(x^2-x-1\right) &= 6x^2-6x-6 \\
(x+3)\left(x^2-2x+1\right) &= x^3+x^2-5x+3 \\
(2x-1)\left(x^2+4x-3\right) &= 2x^3+7x^2-10x+3\left(2x^2+4x+5\right)\left(x^2-2\right) \\
&= 2x^4-4x^2+4x^3-8x+5x^2-10 \\
&= 2x^4+4x^3+x^2-8x-10
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 5.1: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

กำหนด $A = -9x^2 + 4x + 2$ และ $B = 3x^2 + x - 7$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $2A - B = -15x^2 - 3x - 5$
2. $2A - 3B = -21x^2 + 24x - 17$
3. $A + 3B = 7x - 19$
4. ไม่ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.2: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ข้อใดต่อไปนี้คือการกระจายนิพจน์ $x(x-8)-(x+2)(x-3)$ และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $-7x+6$
2. $-9x+6$
3. $-10x+6$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.3: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ข้อใดต่อไปนี้คือการแยกตัวประกอบของ $5x + 2y - xy - 10$

1. $(y - 2)(5 - x)$
2. $(x - 2)(5 - y)$
3. $(x - 2)(y + 5)$
4. $(y - 5)(x + 2)$

ข้อควรรู้ 5.1: สูตรการกระจายที่ควรรู้

* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
* $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ตัวอย่าง 5.4: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

การกระจายนิพจน์ในข้อใดถูกต้อง

1. $(x-2)^2 + x(x+4) = 2x^2 + 4$
2. $(x+4)^2 - x(x-1) = 7x + 16$
3. $4(x-1)^2 + (x+2)^2 = 3x^2 - 4x$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.5: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

การแยกตัวประกอบของนิพจน์ในข้อใดถูกต้อง

1. $100x^2 - 49y^2 = (10x + 7y)(10x - 7y)$
2. $27x^3 + 125y^3 = (3x + 5y)\left(9x^2 - 15xy + 25y^2\right)$
3. $x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3 = (x - 4y)^3$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.6: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ข้อใดต่อไปนี้คือการแยกตัวประกอบของนิพจน์ $25x^2 - 81y^2$

1. $(5x - 9y)(5x + 9y)$
2. $(5x - 81y)(5x + y)$
3. $(25x - 9y)(x + 9y)$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.7: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ข้อใดต่อไปคือการกระจายพจน์ $(4x-3y)^3$ และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$
2. $64x^3 + 144x^2y - 108xy^2 - 27y^3$
3. $64x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 27y^3$
4. $64x^3 + 108x^2y - 144xy^2 + 27y^3$

ตัวอย่าง 5.8: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

ข้อใดถูกต้อง

1. $(x+3)\left(x^2-3x+9\right)=x^3-27$
2. $(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)=x^4-25x^2+36$
3. $(x+5)^2-(x+3)(x-3)=10x+16$
4. $(x+3)(x-2)-x(x+1)=-6$

ตัวอย่าง 5.9: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

ข้อใดต่อไปนี้แยกตัวประกอบได้ถูกต้อง

1. $ax^2 - 8ax + 16a = a(x-4)^2$
2. $a^2 + 7a + 12 = (a+4)(a+3)$
3. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

5.1.2 การหารสังเคราะห์

ตัวอย่าง 5.10

จงใช้การหารสังเคราะห์เพื่อหาผลหารและเศษ จากการหารพหุนาม $3x^4 + 2x^2 + 3x - 5$ ด้วย $x + 1$

ตัวอย่าง 5.11

จงใช้การหารสังเคราะห์เพื่อหาผลหารและเศษ จากการหารพหุนาม $x^3 + x^2 - 18x + 18$ ด้วย $x - 3$

ตัวอย่าง 5.12

กำหนดให้ $p(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 8$ และ $q(x) = x^2 + 4x - 2$ จงใช้การหารสังเคราะห์เพื่อหาผลหารและเศษ จากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย $q(x)$

5.1.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทฤษฎีบท 5.1

กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม และ α เป็นจำนวนจริง เมื่อหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $x - \alpha$ แล้ว **เศษจากการหารจะมีค่าเท่ากับ** $p(\alpha)$

ตัวอย่าง 5.13

จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือจากการหารพหุนาม $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 2$ ด้วย $x - 3$

ตัวอย่าง 5.14

จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือจากการหารพหุนาม $x^3 - x^2 - x - 15$ ด้วย $x - 3$

ตัวอย่าง 5.15

กำหนดพหุนาม $p(x) = x^3 + 6x^2 - 2\alpha x - 3$ และ $q(x) = x^2 + 4x - 2$ จงหาจำนวนจริง α ที่ทำให้ $p(x)$ ถูกหารด้วยพหุนาม $x + 3$ ลงตัว

ข้อควรรู้ 5.2

กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม และ α เป็นจำนวนจริง

- $p(\alpha) = 0$ ก็ต่อเมื่อ พหุนาม $x - \alpha$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$
- ถ้า $p(\alpha) = 0$ จะเรียก α ว่า **ราก** หรือ **คำตอบ** ของพหุนาม $p(x)$ และของสมการ $p(x) = 0$

ตัวอย่าง 5.16: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ถ้าพหุนาม $x^3 - x^2 + ax + 4$ ถูกหารลงตัวด้วย $x + 2$ แล้ว a มีค่าเท่าไร

1. -2
2. 2
3. -4
4. 4

ตัวอย่าง 5.17: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

ข้อใดคือเศษที่ได้จากการหารพหนุนามด้วย $3x^3 + 4x^2 - 6x - 10$ ด้วย $x - 2$

1. $-6x^2$
2. $6x$
3. -6
4. 6

5.2 สมการตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

ทฤษฎีบท 5.2

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

จะมีคำตอบในระบบจำนวนจริงได้ไม่เกินสองคำตอบ โดยพิจารณาจากค่าของตัวแยกกำลังสอง (discriminant) คือ $b^2 - 4ac$ ดังนี้

- ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ สมการจะมีคำตอบจริง **สองคำตอบที่แตกต่างกัน**
- ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ สมการจะมีคำตอบจริง **เพียงหนึ่งคำตอบ**
- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ สมการจะ **ไม่มีคำตอบในระบบจำนวนจริง**

และคำตอบของสมการสามารถเขียนในรูป

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5.2.1 ผลบวกรากและผลคูณรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

ข้อควรรู้ 5.3

ถ้าสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มี α และ β เป็นคำตอบ (อาจเป็นคำตอบซ้ำหรือคำตอบที่แตกต่างกัน) แล้วจะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ตัวอย่าง 5.18: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ให้ a และ b เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + 2x - 6 = 0$ ข้อใดถูกต้อง

1. $a + b = -2$
2. $(a - b)^2 = 28$
3. $ab = -6$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.19: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

ให้ $x = a$ และ $x = b$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + 2x - 2 = 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a - b = 2\sqrt{3}$
2. $a + b = -2$
3. $ab = 2$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.20: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ให้ $x = a$ และ $y = b$ เป็นคำตอบของของสมการ $(x+1)^2 = 7$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a = b$
2. $a + b > 0$
3. $ab < 0$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 5.21: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

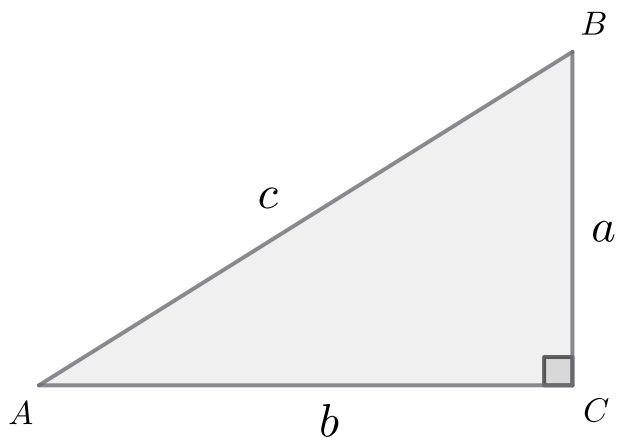
กำหนดให้ x คือ คำตอบของสมการ $x^2 - 2x - 6 = 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x = 1 \pm \sqrt{7}$
2. ผลรวมของคำตอบของสมการ คือ 2
3. สมการนี้ไม่มีคำตอบ
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1 และ 2

บทที่ 6
ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องตรีโกณมิติ

6.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก ดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1

- AB เป็น **ด้านตรงข้ามมุมฉาก** (ด้านยาวที่สุดของสามเหลี่ยม) และมีความยาว c หน่วย
- BC เป็น **ด้านตรงข้ามมุม** A และมีความยาว a หน่วย
- AC เป็น **ด้านตรงข้ามมุม** B และมีความยาว b หน่วย

จากรูปที่ 6.1 สามารถนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติที่สัมพันธ์กับด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังต่อไปนี้

ข้อควรรู้ 6.1

1. **ไซน์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sin(A)$ นิยามโดย

$$\sin(A) = \frac{\text{ความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{c}$$

2. **โคไซน์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\cos(A)$ นิยามโดย

$$\cos(A) = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c}$$

3. **แทนเจนต์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\tan(A)$ นิยามโดย

$$\tan(A) = \frac{\text{ความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A} = \frac{a}{b}$$

ข้อควรรู้ 6.2

นอกจากอัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐานแล้ว ยังมีอัตราส่วนตรีโกณมิติส่วนกลับอีก 3 อัตราส่วน ดังนี้

1. **โคซีแคนต์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\operatorname{cosec}(A)$ ซึ่งเป็นส่วนกลับของ $\sin(A)$

$$\operatorname{cosec}(A) = \frac{1}{\sin(A)} \quad \text{เมื่อ } \sin(A) \neq 0$$

2. **ซีแคนต์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sec(A)$ ซึ่งเป็นส่วนกลับของ $\cos(A)$

$$\sec(A) = \frac{1}{\cos(A)} \quad \text{เมื่อ } \cos(A) \neq 0$$

3. **โคแทนเจนต์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\cot(A)$ ซึ่งเป็นส่วนกลับของ $\tan(A)$

$$\cot(A) = \frac{1}{\tan(A)} \quad \text{เมื่อ } \tan(A) \neq 0$$

ข้อสังเกต 6.1

เนื่องจาก $\sin(A) = \frac{a}{c}$, $\cos(A) = \frac{b}{c}$ และ $\tan(A) = \frac{a}{b}$

จะเห็นได้ว่า $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$ และ $\cot(A) = \dfrac{\cos(A)}{\sin(A)}$

ตัวอย่าง 6.1

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า $\cos(A) = \frac{3}{5}$ จงหาค่าของ $\sin(A)$ และ $\tan(A)$

ตัวอย่าง 6.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า $\tan(A) = \frac{5}{12}$ จงหาค่าของ

$$\frac{2\sin(A) + 3\cos(A)}{\sin(A) - \cos(A)}$$

6.1.1 ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐาน

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานที่ใช้บ่อย ในหน่วยองศา

θ (องศา)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่กำหนดค่า	0	ไม่กำหนดค่า	0

Table 6.1: ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานในหน่วยองศา

6.2 องศาและเรเดียน

หน่วยวัดขนาดของมุมที่ใช้กันทั่วไปมี 2 หน่วย คือ **องศา** และ **เรเดียน** โดยสามารถแปลงหน่วยระหว่างกันได้ดังนี้

หลักการ 6.1

* การแปลงจาก **เรเดียน** เป็น **องศา** ให้แทน π ด้วย 180°
* การแปลงจาก **องศา** เป็น **เรเดียน** ให้คูณด้วย $\frac{\pi}{180}$

ตัวอย่าง 6.3: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

72° เท่ากับกี่เรเดียน

1. $\frac{2\pi}{3}$
2. $\frac{2\pi}{5}$
3. $\frac{3\pi}{4}$
4. $\frac{3\pi}{5}$

ตัวอย่าง 6.4

จงเปลี่ยนมุมพื้นฐานต่อไปนี้ให้อยู่ในหน่วยเรเดียน

1. 0°
2. 30°
3. 45°
4. 60°
5. 90°
6. 180°
7. 270°
8. 360°

จากตารางที่ 6.1 สามารถเขียนค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานในหน่วยเรเดียนได้ดังตารางต่อไปนี้

θ (เรเดียน)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่กำหนดค่า	0	ไม่กำหนดค่า	0

Table 6.2: ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานในหน่วยเรเดียน

6.3 ทบทวนสูตรตรีโกณมิติที่จำเป็น

6.3.1 โคฟังก์ชัน

สำหรับ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ จะมีความสัมพันธ์ของโคฟังก์ชันดังนี้

- $\sin(\theta) = \cos(90^\circ - \theta)$
- $\tan(\theta) = \cot(90^\circ - \theta)$
- $\sec(\theta) = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$

6.3.2 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติพื้นฐานที่ใช้บ่อย มีดังนี้

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- $\sec^2(\theta) - \tan^2(\theta) = 1$
- $\operatorname{cosec}^2(\theta) - \cot^2(\theta) = 1$

6.3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมสองเท่า

ถ้า α เป็นจำนวนจริง จะมีสูตรมุมสองเท่าดังนี้

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

6.3.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม

ให้ A และ B เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$
- $\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$
- $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$
- $\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$
- $\tan(A+B) = \dfrac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)}$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan(A)-\tan(B)}{1+\tan(A)\tan(B)}$

ข้อควรรู้ 6.3

สำหรับจำนวนจริง θ จะมีสมบัติดังนี้

- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

ข้อสังเกต 6.2

1. $\sin(30^\circ) = \dfrac{1}{2}$
2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

เมื่อมุมมีขนาดมากกว่า 90° หรือมีค่ามากกว่า $\dfrac{\pi}{2}$ การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจะไม่สามารถอาศัยตารางมุมพิเศษโดยตรงได้ จึงจำเป็นต้องยุบมุมให้อยู่ในช่วงที่คุ้นเคยก่อน

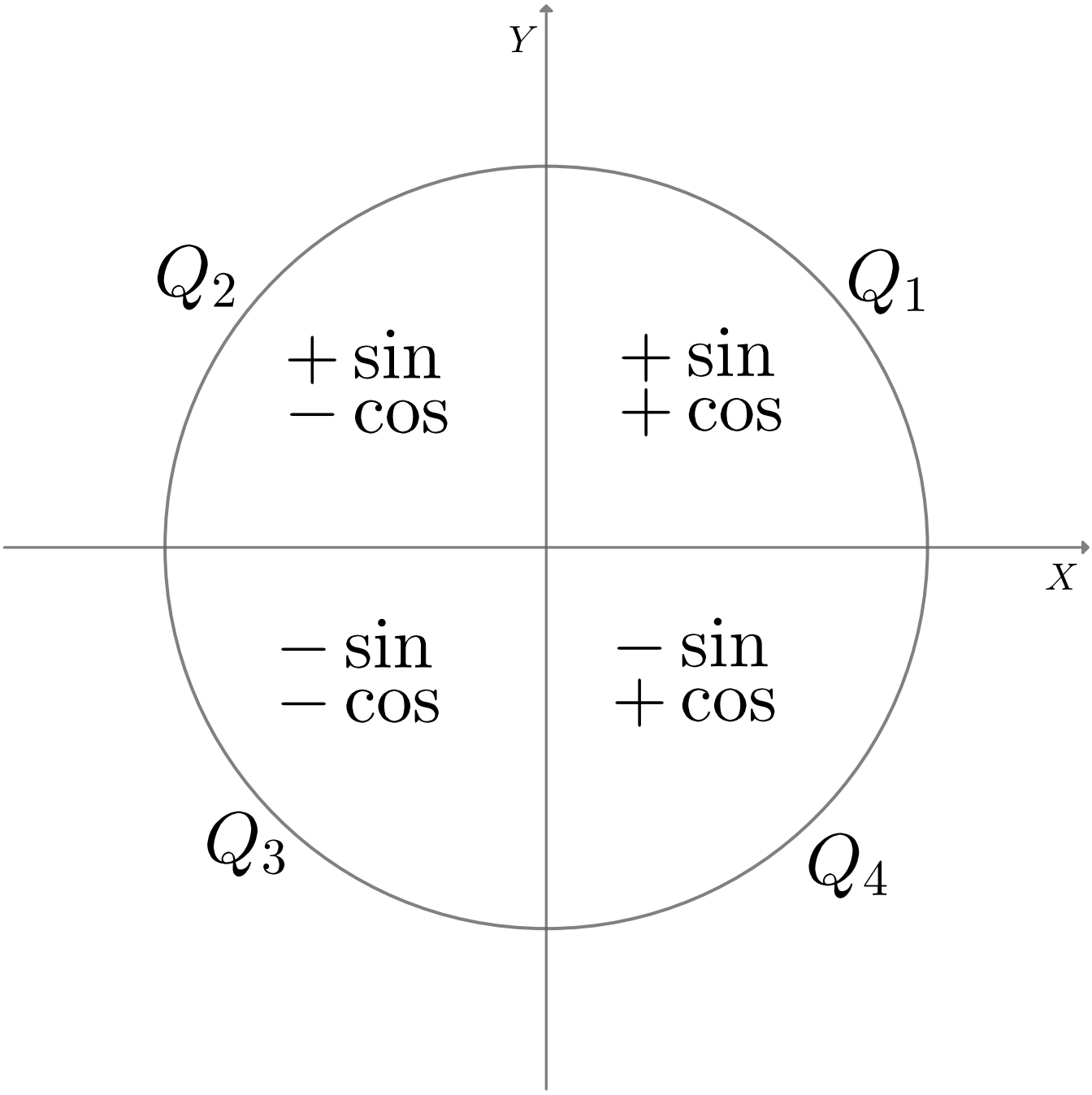
ข้อสังเกต 6.3

1. $\sin(210^\circ) = ?$
2. $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = ?$

6.4 การแปลงมุมในรูปอย่างง่าย

6.4.1 เครื่องหมายและจตุภาค (ควอดรันท์)

จากรูปที่ 6.3 สัญลักษณ์ Q_1, Q_2, Q_3 และ Q_4 หมายถึง **จตุภาคที่หนึ่ง จตุภาคที่สอง จตุภาคที่สาม และจตุภาคที่สี่** (หรือเรียกว่า **ควอดรันท์ที่หนึ่ง สอง สาม และสี่**) ตามลำดับ เราจะได้เครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin และ cos ในแต่ละจตุภาคดังต่อไปนี้



รูปที่ 6.2

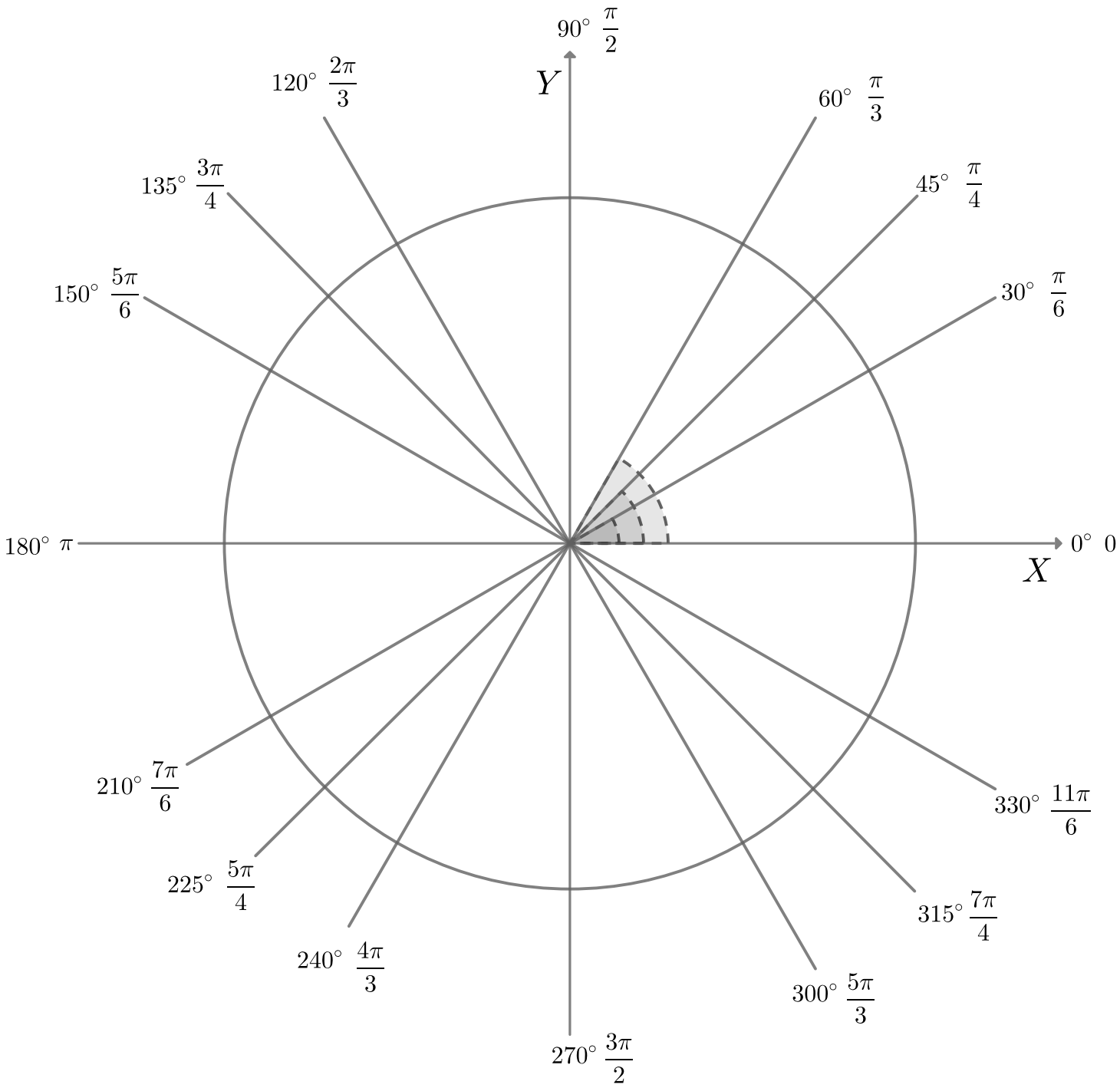
ตัวอย่าง 6.5

ถ้า $\sin(\theta) > 0$ และ $\cos(\theta) < 0$ แล้ว θ อยู่ควอดรันท์ใด

ตัวอย่าง 6.6

กำหนดให้ $\tan^2(\theta) = \frac{1}{5}$ และ θ อยู่ควอดรันท์ที่สอง จงหาค่า $\cot(\theta)$

6.4.2 การวัดมุม



รูปที่ 6.3

ตัวอย่าง 6.7: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

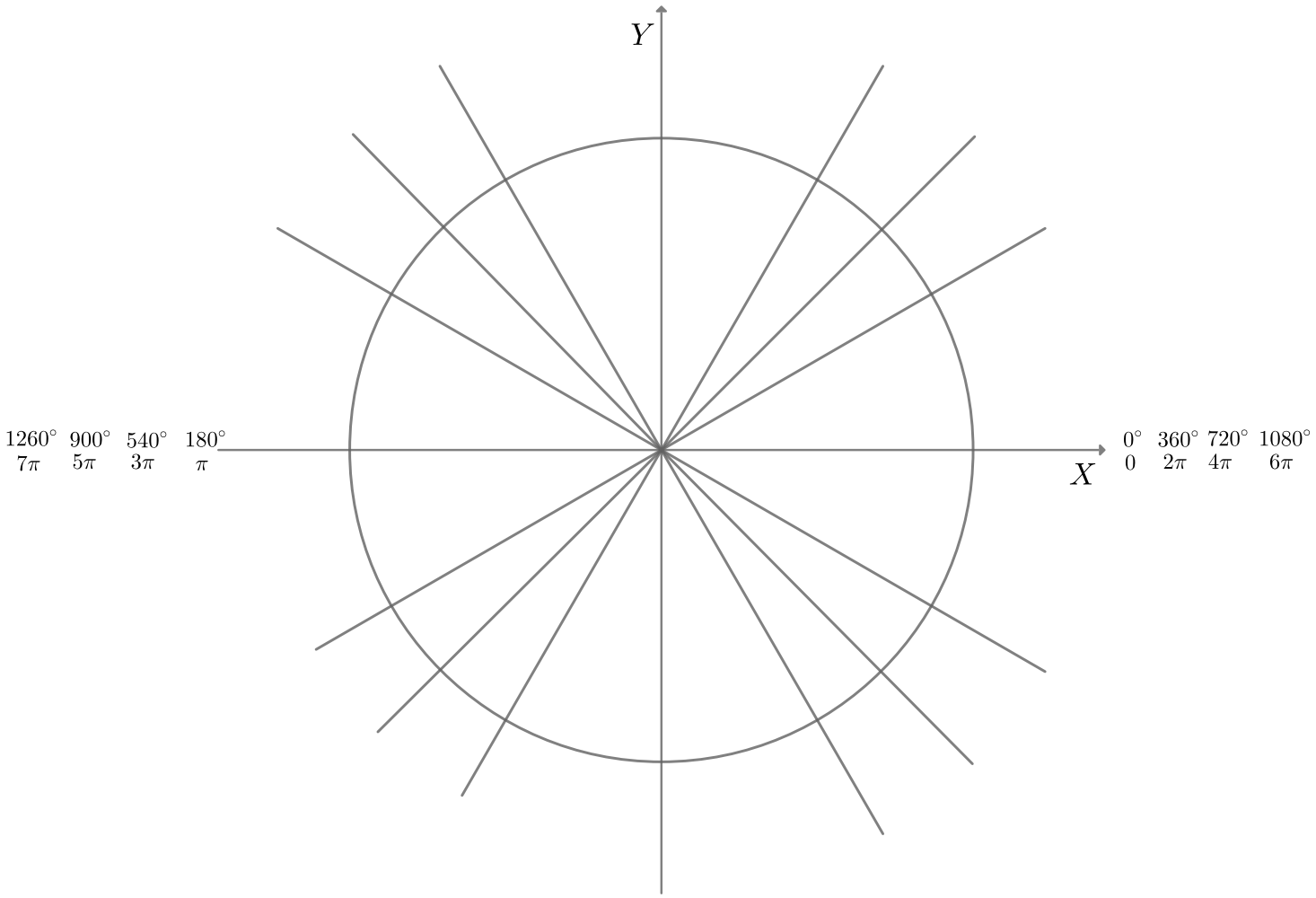
กำหนดให้ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan(A) = 2.4$ จงหาค่า $\cos(A)$

1. $\frac{5}{12}$
2. $\frac{5}{13}$
3. $-\frac{5}{12}$
4. $-\frac{5}{13}$

6.4.3 มุมคู่ π และมุมคี่ π

จากรูปที่ 6.4 สามารถจำแนกมุมที่เป็นพหุคูณของ π ได้ดังนี้

- **มุมคู่** π คือ มุมที่สามารถเขียนได้ในรูป $2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ กล่าวคือ $n = 0, 1, 2, \ldots$
- **มุมคี่** π คือ มุมที่สามารถเขียนได้ในรูป $(2n+1)\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ กล่าวคือ $n = 0, 1, 2, \ldots$



รูปที่ 6.4

6.4.4 ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมเรเดียนในรูป $2n\pi \pm \theta$ และ $(2n+1)\pi \pm \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ

หลักการ 6.2

ให้ α เป็นมุมในหน่วยเรเดียน สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม α ได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. พิจารณาเครื่องหมายของมุม α
   1.1. หาก $\alpha > 0$ ให้ดำเนินการตามข้อ 2
   1.2. หาก $\alpha < 0$ ให้ใช้สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมลบ (ดูข้อควรรู้ 6.3) เพื่อแปลงเป็นมุมบวกก่อน แล้วจึงดำเนินการตามข้อ 2
2. เขียนมุม α ให้อยู่ในรูป
$$2n\pi \pm \theta \quad \text{หรือ} \quad (2n+1)\pi \pm \theta$$
   เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
3. ตรวจสอบว่ามุมที่ได้อยู่ในควอดรันท์ใด
4. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม α จะเท่ากับ ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม θ โดยพิจารณาเครื่องหมายของฟังก์ชันตามควอดรันท์นั้น (ตามที่กล่าวไว้ในหัวข้อย่อย 6.4.1)

ตัวอย่าง 6.8

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

1. $\sin(3\pi + \theta)$
   เนื่องจาก $3\pi + \theta$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 3
$$\sin(3\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$
2. $\cos(2\pi + \theta)$
   เนื่องจาก $2\pi + \theta$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 1
$$\cos(2\pi + \theta) = \cos(\theta)$$
3. $\tan(5\pi - \theta)$
   เนื่องจาก $5\pi - \theta$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 2
$$\tan(5\pi - \theta) = -\tan(\theta)$$
4. $\operatorname{cosec}(10\pi - \theta)$
   เนื่องจาก $10\pi - \theta$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 4
$$\operatorname{cosec}(10\pi - \theta) = -\operatorname{cosec}(\theta)$$

ตัวอย่าง 6.9

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

1. $\cot(\theta - \pi)$

$$\cot(\theta - \pi) = -\cot(\pi - \theta)$$

เนื่องจาก $\pi - \theta$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 2 ดังนั้น $\cot(\pi - \theta) = -\cot(\theta)$ จึงได้ว่า

$$\cot(\theta - \pi) = -(-\cot(\theta)) = \cot(\theta)$$

2. $\sec(-2\pi - \theta)$

$$\sec(-2\pi - \theta) = \sec(2\pi + \theta)$$

เนื่องจาก $2\pi + \theta$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 1 ดังนั้น

$$\sec(-2\pi - \theta) = \sec(2\pi + \theta) = \sec(\theta)$$

ตัวอย่าง 6.10

จงหาค่าของ $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

ตัวอย่าง 6.11

จงหาค่าของ $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

ตัวอย่าง 6.12

จงหาค่าของ $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

ตัวอย่าง 6.13

จงหาค่าของ $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

ตัวอย่าง 6.14

จงหาค่าของ $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

ตัวอย่าง 6.15

จงหาค่าของ $\operatorname{cosec}\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

ตัวอย่าง 6.16

จงหาค่าของ $\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$

ตัวอย่าง 6.17

จงหาค่าของ $\cot\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

ตัวอย่าง 6.18

จงหาค่าของ

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)} + \frac{\tan\left(\frac{13\pi}{7}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

ข้อสังเกต 6.4

จากหลักการ 6.2 เราสามารถประยุกต์ใช้เพื่อหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในหน่วยองศาได้ โดยมีแนวคิดเช่นเดียวกัน กล่าวคือ ให้ $\alpha > 0$ เป็นมุมในหน่วยองศา สามารถเขียนมุม α ให้อยู่ในรูป

$$(n \times 180^\circ) \pm \theta$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ กล่าวคือ $n = 0, 1, 2, \ldots$ และ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ จากนั้นพิจารณาควอดรันท์ของมุมที่ได้ และกำหนดเครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติตามควอดรันท์นั้น โดยค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม α จะเท่ากับค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม θ

ตัวอย่าง 6.19

จงหาค่าของ $\operatorname{cosec}(150^\circ)$

ตัวอย่าง 6.20

จงหาค่าของ $\sec(-315^\circ)$

ตัวอย่าง 6.21

จงหาค่าของ $\cot(-1020^\circ)$

ตัวอย่าง 6.22

จงหาค่าของ $\sin(210^\circ)$

ตัวอย่าง 6.23

จงหาค่าของ $\tan(-585^\circ)$

ตัวอย่าง 6.24

จงหาค่าของ $\cos(765^\circ)$

ตัวอย่าง 6.25

จงหาค่าของ

$$\frac{\sin(-420^\circ)\cot(210^\circ) + \sqrt{3}\cot(-390^\circ) - 1}{\cos(-840^\circ)}$$

ตัวอย่าง 6.26: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

ถ้า A อยู่ในจตุภาคที่ 1 โดยที่ $0^\circ < A < 90^\circ$ แล้ว $\cos(90^\circ - A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\sin(A)$
2. $\cos(A)$
3. $-\sin(A)$
4. $-\cos(A)$

ตัวอย่าง 6.27: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

กำหนด $0^\circ < A < 90^\circ$ จงหาค่าของ

$$\sin(90^\circ - A)\cos(A)\tan^2(A) + \frac{\sin(A)\cos(90^\circ - A)}{\tan^2(A)}$$

1. -1
2. 1
3. $\sin(2A)$
4. $\cos(2A)$

ตัวอย่าง 6.28: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ถ้า $\tan(\theta) = -10$ เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ แล้ว $\cos(\theta)$ มีค่าเท่าใด

1. $\dfrac{-1}{\sqrt{101}}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$
3. $\dfrac{10}{\sqrt{101}}$
4. $\dfrac{-10}{\sqrt{101}}$

ตัวอย่าง 6.29: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ถ้า θ เป็นมุม ซึ่ง $270^\circ < \theta < 360^\circ$ และ $\sin(\theta) = -\frac{1}{4}$ แล้ว $\sin(2\theta)$ มีค่าเท่าใด

1. $-\frac{\sqrt{15}}{8}$
2. $\frac{\sqrt{15}}{8}$
3. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
4. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

ตัวอย่าง 6.30: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2565

ถ้า $\tan(\theta) = 3$ สำหรับ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ แล้ว $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ มีค่าเท่าใด

1. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$
3. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$
4. $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$

ตัวอย่าง 6.31: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2566

ให้ $\theta = 135^\circ$ และ $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ แล้ว $x - y$ มีค่าเท่าใด

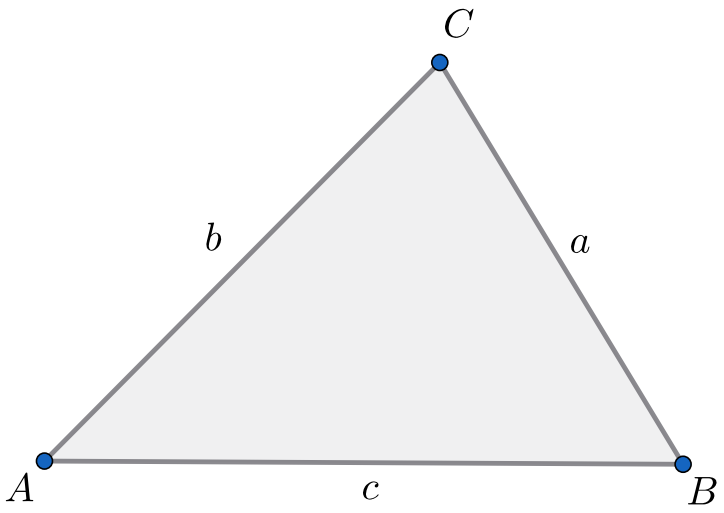
1. $-\sqrt{2}$
2. 0
3. 1
4. $\sqrt{2}$

6.5 กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

ทฤษฎีบท 6.1: กฎของโคไซน์

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งมีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เท่ากับ a, b และ c ตามลำดับ ดังรูปที่ 6.5 จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

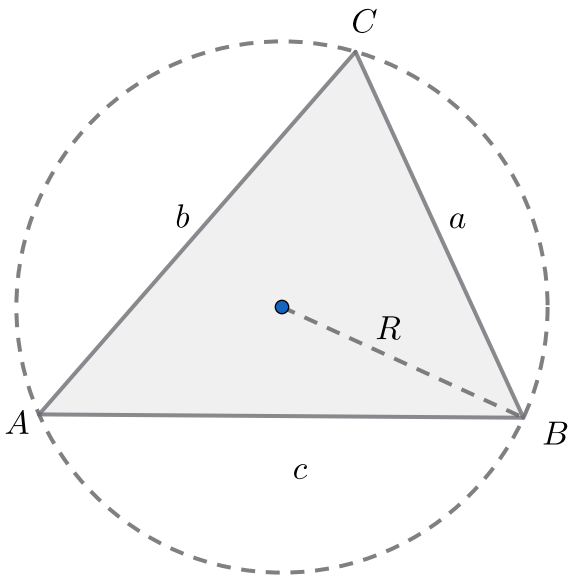


รูปที่ 6.5

ทฤษฎีบท 6.2: กฎของไซน์

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยวงกลมรัศมี R และมีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เท่ากับ a, b และ c ตามลำดับ ดังรูปที่ 6.6 จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$



รูปที่ 6.6

ตัวอย่าง 6.32: NETSAT คณิตศาสตร์ สิงหาคม 2568

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $AB = 3$ หน่วย $AC = 3$ หน่วย และ $\angle A = 120^\circ$ จงหาความยาวด้าน BC

1. $3\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{7}$
4. 9

ตัวอย่าง 6.33: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มีความยาวด้าน BC คือ a หน่วย มีความยาวด้าน CA คือ b หน่วย มีความยาวด้าน AB คือ c หน่วย และยังสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$3(a+b)(a-b) = c(2b+3c)$$

แล้ว $\tan(A)$ มีค่าเท่าใด

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
2. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
3. $2\sqrt{2}$
4. $-2\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 6.34: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ให้ α และ β เป็นค่าคงตัว ซึ่ง $0 < \alpha < \beta < 2\pi$
กำหนดให้ฟังก์ชัน

$$f(x) = \sin^2(x) + \sin^2(x+\beta) + \sin^2(x+\beta) \text{ มีค่าเป็นค่าคงตัว } c \text{ สำหรับ } 0 \leq x \leq 2\pi$$

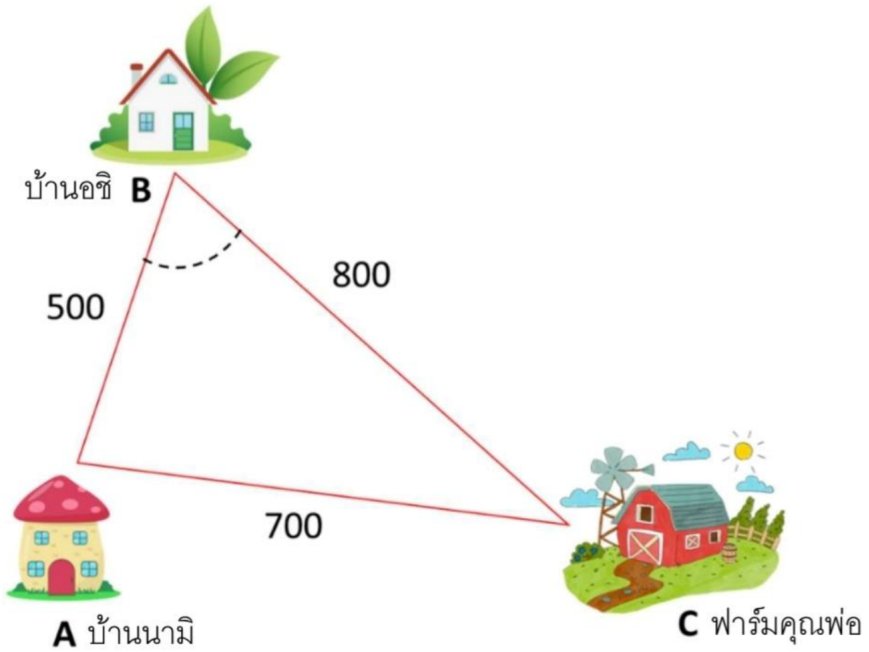
แล้ว c มีค่าเท่าไร

1. 0
2. 1
3. $\frac{3}{2}$
4. 2

ตัวอย่าง 6.35: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

จากรูปที่ 6.7 จงหาขนาดของมุม B

1. 30°
2. 45°
3. 60°
4. 75°



รูปที่ 6.7

ตัวอย่าง 6.36: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

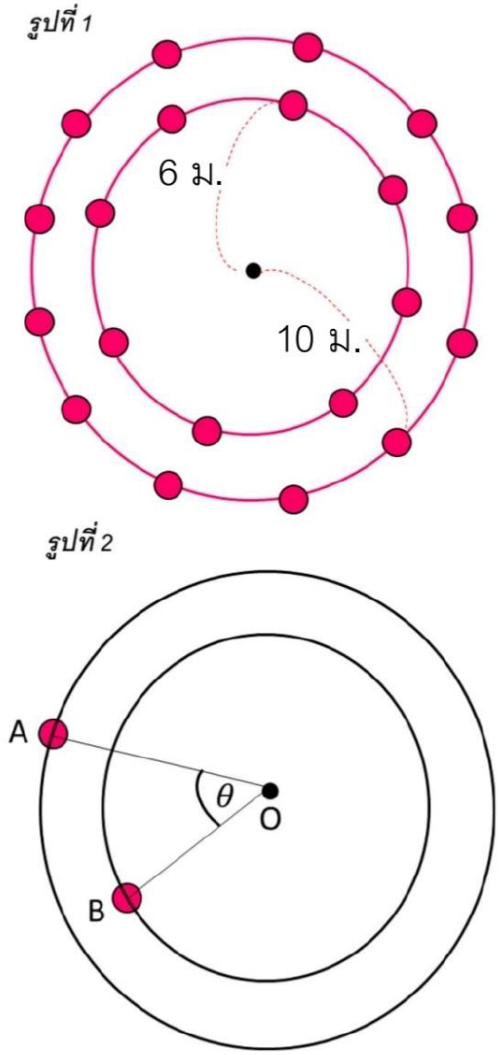
จากรูปที่ 6.7 นามิและอชินัดพบกันที่จุด O ซึ่งอยู่ห่างจากบ้านของนามิ บ้านของอชิ และฟาร์มคุณพ่อ เป็นระยะเท่ากัน จงหาระยะทางโดยประมาณจากบ้านของบ้านของอชิและฟาร์มคุณพ่อไปยังจุด O ที่ใกล้เคียงมากที่สุด โดยกำหนดให้ $\sqrt{3} = 1.73$

1. 300 เมตร
2. 400 เมตร
3. 500 เมตร
4. 600 เมตร

ตัวอย่าง 6.37: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

รูปที่ 6.8 แสดงภาพมุมสูงของม้าหมุนในสวนแห่งหนึ่ง โดยมีที่นั่งอยู่บนเส้นรอบวงสองวงและหมุนรอบจุดศูนย์กลาง O โดยมีรัศมีของวงกลมด้านนอกเท่ากับ 10 เมตร รัศมีของวงกลมด้านในเท่ากับ 6 เมตร กำหนดให้ที่นั่ง A และ B อยู่ข้างกันบนเส้นรอบวงด้านนอกและด้านในตามลำดับโดยไม่คำนึงขนาดของที่นั่ง เมื่อที่นั่ง A และ B เริ่มขยับไปพร้อมๆ กัน รูปที่ 2 แสดงให้เห็นตำแหน่ง A และ B หลังผ่านไป $2-3$ นาที หลังจากเริ่มหมุน ถ้า $\angle AOB = \theta$ และ $\cos(\theta) = \frac{11}{24}$ จงหาระยะทางจาก A มา B

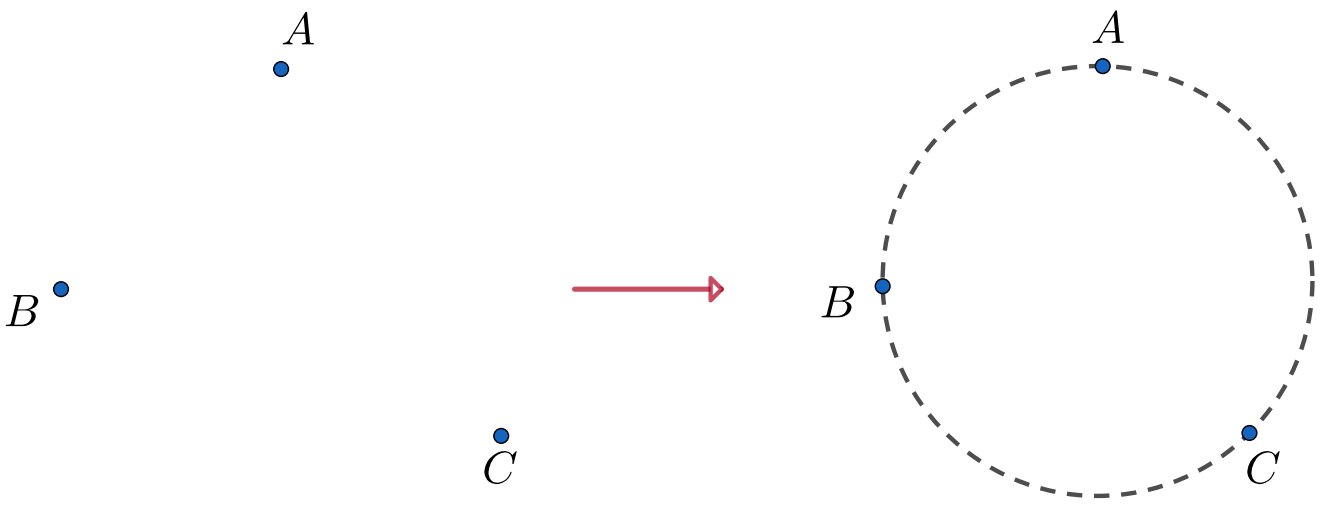
1. 7
2. 9
3. 11
4. 13



รูปที่ 6.8

ข้อควรรู้ 6.4

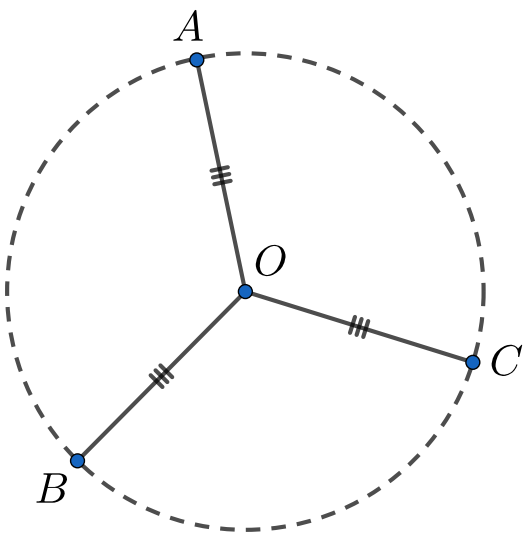
วงกลมวงหนึ่งและวงเดียวเท่ากันที่สามารถผ่านจุดทั้งสามจุดที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
จากรูปที่ 6.9 กำหนดให้จุด A, B และ C เป็นจุดสามจุดที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จึงสามารถถูกวงกลมเพียงวงเดียวผ่านทั้งสามจุด



รูปที่ 6.9

ข้อควรรู้ 6.5

จากจุดจุดหนึ่งภายในวงกลม ถ้าลากส่วนของเส้นตรงไปยังเส้นรอบวงให้ยาวเท่ากันได้ **มากกว่าสองเส้นขึ้นไป** แล้วจุดนั้นจะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
จากรูปที่ 6.10 ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O ไปยังจุด A, B และ C ที่อยู่บนเส้นรอบวงได้ความยาวเท่ากัน จึงสามารถสรุปได้ว่าจุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



รูปที่ 6.10