作业 2：学习理论

2 概率近似正确（Probably Approximately Correct）（35pt）

1. 证明如果误差 $\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right)$ 大于 ϵ，那么 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 必然和某个 r_i 不重叠，即 $\left\{\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right)>\epsilon\right\} \subset \bigcup_{i=1}^4\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i=\emptyset\right\}$。

假设误差 $\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right)>\epsilon$ 而 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 和所有 r_i 都有重叠。

此时，记矩形

$$\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}=[l', r'] \times [b', t']$$

$$r_1=[l, r] \times [b'', t]$$

$$r_2=[l'', r] \times [b, t]$$

$$r_3=[l, r] \times [b, t'']$$

$$r_4=[l, r''] \times [b, t]$$

则显然有 $l \leq l' \leq l'' \leq r'' \leq r' \leq r$， $b \leq b' \leq b'' \leq t'' \leq t' \leq t$。

记 r_1, r_2, r_3, r_4 组成的图形为 R''，由于 r_i 是概率 $\operatorname{Pr}\left[r_i\right] \geq \frac{\epsilon}{4}$ 的最小矩形，同时考虑到四个矩形存在重叠部分，可以得出 $\operatorname{Pr}\left[\mathrm{R}''\right]<\epsilon$。

由于 $l \leq l' \leq l'' \leq r'' \leq r' \leq r$， $b \leq b' \leq b'' \leq t'' \leq t' \leq t$，所以有 $\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right)<\operatorname{Pr}\left[\mathrm{R}''\right]<\epsilon$，与题设矛盾。故 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 必然和某个 r_i 不重叠。

2. 计算矩形 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 和给定区域 r_i 没有任何重叠的概率 $\operatorname{Pr}_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i=\emptyset\right\}\right]$ 尽可能紧的上界。

要使矩形 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 和给定区域 r_i 没有任何重叠，需要保证训练集 $\mathcal{D}_n$ 中的所有正例点都不在 r_i 中，另外，训练集 $\mathcal{D}_n$ 中的所有负例点必然不在 R 中，自然不会在 r_i 中。故需要保证训练集 $\mathcal{D}_n$ 中的所有 n 个点都不在 r_i 中，即

$$\operatorname{Pr}_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i=\emptyset\right\}\right]=\left(1-\operatorname{Pr}\left[r_i\right]\right)^n \leq\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^n$$

3. 计算矩形 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 和 r_1， r_2， r_3 和 r_4 中的某一个没有重叠区域的概率 $\operatorname{Pr}_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\bigcup_{i=1}^4\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i=\emptyset\right\}\right]$ 尽可能紧的上界。

利用 Union bound 可得

$$\operatorname{Pr}_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\bigcup_{i=1}^4\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i=\emptyset\right\}\right] \leq \sum_{i=1}^4 \operatorname{Pr}_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i=\emptyset\right\}\right] \leq 4\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^n$$

4. 证明： $\operatorname{Pr}_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right)>\epsilon\right] \leq 4 \exp \left(-\frac{n \epsilon}{4}\right)$。

利用 2.1 题的结论可得

$$\left\{\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right)>\epsilon\right\} \subset \bigcup_{i=1}^4\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i=\emptyset\right\}$$

又因为对于任意 $x \in \mathbb{R}$， $1-x \le e^{-x}$ 成立，故

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) > \epsilon\right] \le \Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\bigcup_{i=1}^{4}\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i = \emptyset\right\}\right] \le 4\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^n \le 4\exp\left(-\frac{n\epsilon}{4}\right)$$

5. 证明： $\mathbf{R}^2$ 上所有轴对齐矩阵组成的假设空间 $\mathcal{H}$ 是 PAC-可学习的。

PAC-可学习要求对于任意 $\epsilon > 0$， $\delta > 0$，有

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) - \min_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{E}\left(\mathrm{R}\right) > \epsilon\right] \le \delta$$

由于 $\min_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{E}\left(\mathrm{R}\right) = 0$，令 $\delta = 4\exp\left(-\frac{n\epsilon}{4}\right)$，利用 2.4 题的结论可得

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) > \epsilon\right] \le 4\exp\left(-\frac{n\epsilon}{4}\right)$$

故 $\mathcal{H}$ 是 PAC-可学习的。

6. 计算此时矩形 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 和给定区域 r_i 没有任何重叠的概率 $\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i = \emptyset\right\}\right]$ 尽可能紧的上界。

参考 2.2 题的证明，要使矩形 $\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}$ 和给定区域 r_i 没有任何重叠，需要保证训练集 $\mathcal{D}_n$ 中的所有正例点都不在 r_i 中，另外，训练集 $\mathcal{D}_n$ 中的所有负例点必然不在 R 中，自然不会在 r_i 中。故只有那些噪声的正例点可以在 r_i 中，这些点最多有 $\eta' n$ 个。故需要保证训练集 $\mathcal{D}_n$ 中至少有 $(1-\eta')n$ 个点不在 r_i 中，即

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i = \emptyset\right\}\right] \le \left(1-\Pr\left[r_i\right]\right)^{(1-\eta')n} \le \left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^{(1-\eta')n}$$

7. 给出当存在噪音时， $\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) > \epsilon\right]$ 的上界，并证明此时 $\mathcal{H}$ 依然是 PAC-可学习的。

参考 2.3-2.5 题的证明，利用 Union bound 可得

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\bigcup_{i=1}^{4}\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i = \emptyset\right\}\right] \le \sum_{i=1}^{4}\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i = \emptyset\right\}\right] \le 4\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^{(1-\eta')n}$$

利用 2.1 题的结论可得

$$\left\{\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) > \epsilon\right\} \subset \bigcup_{i=1}^{4}\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i = \emptyset\right\}$$

又因为对于任意 $x \in \mathbb{R}$， $1-x \le e^{-x}$ 成立，故

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) > \epsilon\right] \le \Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\bigcup_{i=1}^{4}\left\{\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n} \cap r_i = \emptyset\right\}\right] \le 4\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^{(1-\eta')n} \le 4\exp\left(-\frac{(1-\eta')n\epsilon}{4}\right)$$

PAC-可学习要求对于任意 $\epsilon > 0$， $\delta > 0$，有

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) - \min_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{E}\left(\mathrm{R}\right) > \epsilon\right] \le \delta$$

由于 $\min_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{E}\left(\mathrm{R}\right) = 0$，令 $\delta = 4\exp\left(-\frac{(1-\eta')n\epsilon}{4}\right)$，利用 2.4 题的结论可得

$$\Pr_{\mathcal{D}_n \sim D^n}\left[\mathcal{E}\left(\mathrm{R}_{\mathcal{D}_n}\right) > \epsilon\right] \le 4\exp\left(-\frac{(1-\eta')n\epsilon}{4}\right)$$

故 $\mathcal{H}$ 是 PAC-可学习的。

3 集中不等式（10pt）

取值在 $\{1,2,\ldots,K\}$ 的 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是服从 Multinoulli 分布的独立随机变量，$\Pr\left[X_i=k\right]=p_k$ ，参数 $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_K)$ 满足 $p_k\geq 0$ ，$\sum p_k=1$。我们可以使用经验分布 $\hat{\boldsymbol{p}}=\left(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_K\right)$： $\hat{p}_k=\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\mathbb{I}\left[X_i=k\right],\ k=1,2,\ldots,K$ 来估计 $\boldsymbol{p}$。求证：对任意 $\delta>0$，以至少 $1-\delta$ 的概率，$\left\|\boldsymbol{p}-\hat{\boldsymbol{p}}\right\|_\infty=\max\limits_k\left|p_k-\hat{p}_k\right|\leq\sqrt{\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{2K}{\delta}}$ 。

利用 Hoeffding 不等式可得，对于 $a_i<X_i<b_i$ ，有

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mathbb{E}X_i\right)\right|\geq\epsilon\right)\leq 2\exp\left[-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)^2}\right]$$

代入此题中的条件：

$$a_i=0\leq\mathbb{I}\left[X_i=k\right]\leq 1=b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{I}\left[X_i=k\right]-\mathbb{E}\left[\mathbb{I}\left[X_i=k\right]\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}\left[X_i=k\right]-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}\left[X_i=k\right]\right]=n\hat{p}_k-np_k$$

故可得

$$\Pr\left(\left|\hat{p}_k-p_k\right|\geq\epsilon\right)=\Pr\left(\left|n\hat{p}_k-np_k\right|\geq n\epsilon\right)\leq 2\exp\left[-\frac{2n^2\epsilon^2}{n}\right]=2\exp\left[-2n\epsilon^2\right]$$

由于

$$\Pr\left(\max_k\left|\hat{p}_k-p_k\right|\geq\epsilon\right)\leq\sum_{k=1}^{K}\Pr\left(\left|\hat{p}_k-p_k\right|\geq\epsilon\right)=2K\exp\left[-2n\epsilon^2\right]$$

令

$$2K\exp\left[-2n\epsilon^2\right]=\delta$$

求解得到

$$\epsilon=\sqrt{\frac{1}{2n}\log\frac{2K}{\delta}}$$

故

$$\Pr\left(\max_k\left|\hat{p}_k-p_k\right|\geq\sqrt{\frac{1}{2n}\log\frac{2K}{\delta}}\right)\leq\delta$$

即对任意 $\delta>0$，以至少 $1-\delta$ 的概率，$\left\|\boldsymbol{p}-\hat{\boldsymbol{p}}\right\|_\infty=\max\limits_k\left|p_k-\hat{p}_k\right|\leq\sqrt{\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{2K}{\delta}}$ 。

4 有限假设空间的泛化界（15pt）

假设 D 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的一个数据分布，$f:\mathcal{X}\to\{+1,-1\}$ 是打标函数（labeling function）。定义分布 D 上的标签偏置 p_+ 为：$p_+=\Pr_{x\sim D}[f(x)=+1]$。定义 S 是从分布 D 独立同分布采样出的一个大小为 n 的数据集。我们可以使用 $\hat{p}_+=\frac{1}{n}\sum_{x\in S}\mathbb{I}[f(x)=+1]$。求证：对于任意 $\delta>0$，$|p_+-\hat{p}_+|\le\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2n}}$ 成立的概率至少为 $1-\delta$。

利用 Hoeffding 不等式可得，对于 $a_i<X_i<b_i$，有

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}X_i)\right|\ge\epsilon\right)\le 2\exp\left[-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right]$$

代入此题中的条件：

$$a_i=0\le\mathbb{I}[f(x)=+1]\le 1=b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}[f(x)=+1]-\mathbb{E}[\mathbb{I}[f(x)=+1]])=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[f(x)=+1]-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\mathbb{I}[f(x)=+1]]=n\hat{p}_+-np_+$$

故可得

$$\Pr(|\hat{p}_+-p_+|\ge\epsilon)=\Pr(|n\hat{p}_+-np_+|\ge n\epsilon)\le 2\exp\left[-\frac{2n^2\epsilon^2}{n}\right]=2\exp\left[-2n\epsilon^2\right]$$

令

$$2\exp\left[-2n\epsilon^2\right]=\delta$$

求解得到

$$\epsilon=\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2n}}$$

故

$$\Pr\left(|\hat{p}_+-p_+|\ge\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2n}}\right)\le\delta$$

即对于任意 $\delta>0$，$|p_+-\hat{p}_+|\le\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2n}}$ 成立的概率至少为 $1-\delta$。

5 无限假设空间的泛化界（50pt）

5.1 Rademacher 复杂度

1. 定义只包含两个函数的函数族 $\mathcal{G}=\{g_{-1},g_{+1}\}$，其中 g_{-1} 是恒取 -1 的常数函数，g_{+1} 是恒取 $+1$ 的常数函数，$S=(z_1,z_2,\ldots,z_m)$ 是从分布 $\mathcal{D}$ 采样的大小为 m 的数据集。请直接给出 $\mathcal{G}$ 的 VC 维，并推导 Rademacher 经验复杂度 $\hat{\mathcal{R}}_S(\mathcal{G})$ 的上界。

$\mathcal{G}$ 的 VC 维为 1 。

Rademacher 经验复杂度定义为 $\hat{\mathcal{R}}_S(\mathcal{G}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i g(\boldsymbol{z}_i)\right]$ 。

分别计算 g_{-1} 和 g_{+1} 的对应值：

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i g_{-1}(\boldsymbol{z}_i) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i$$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i g_{+1}(\boldsymbol{z}_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i$$

故

$$\hat{\mathcal{R}}_S(\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i g(\boldsymbol{z}_i)\right] = \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\right|\right]$$

根据 Jensen 不等式，对于一个凸函数 f ，有 $f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) \le \mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right]$ ，反之，对于一个凹函数 f ，有 $f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) \ge \mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right]$ 。

在这种情况下，绝对值的期望可以用 Jensen 不等式进行上界估计，因为绝对值是一个凹函数。因此我们可以得到：

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\right|\right] \le \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\right)^2\right]} \le \sqrt{\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left[\sigma_i^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{m^2}\cdot m} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

即 $\hat{\mathcal{R}}_S(\mathcal{G}) \le \frac{1}{\sqrt{m}}$ 。

2. 定义函数族 $\mathcal{G} : \mathcal{Z} \to [0,1]$ ，课件中对于 Rademacher 复杂度的上界推导是基于对函数 $\Phi(S) = \sup_{g\in G}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right]\right)$ 的分析，其中 $S = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ 是从分布 $\mathcal{D}$ 采样的大小为 m 的数据集，$\hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g\left(z_i\right)$。在本题中你将再次使用 McDiarmid 不等式，基于对函数 $\Psi\left(S\right) = \sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right)$ 的分析，推导出 Rademacher 复杂度更紧的上界。要求给出完整证明，以及使用概率近似正确框架表述最终的结论。

首先检查函数 $\Psi\left(S\right) = \sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right)$ 是否满足 McDiarmid 不等式的条件。

$$\begin{aligned}
\Psi\left(S\right) - \Psi\left(S'\right) &= \sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right) - \sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_{S'}\left(\mathcal{G}\right)\right) \\
&\le \sup_{g\in\mathcal{G}}\left\{\left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right) - \left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_{S'}\left(\mathcal{G}\right)\right)\right\} \\
&= \sup_{g\in\mathcal{G}}\left\{\hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] + 2\left(\hat{\mathcal{R}}_{S'}\left(\mathcal{G}\right) - \hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right)\right\} \\
&\le \sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right]\right) + 2\sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\hat{\mathcal{R}}_{S'}\left(\mathcal{G}\right) - \hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right) \\
&\le \frac{3}{m}
\end{aligned}$$

最后一步利用了课件上的结论 $\sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right]\right) \le \frac{1}{m}$ 和 $\left|\hat{\mathcal{R}}_{S'}\left(\mathcal{G}\right) - \hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right| \le \frac{1}{m}$ 。

利用 McDiarmid 不等式可得

$$\Pr\left(\Psi\left(S\right) - \mathbb{E}_S\left[\Psi\left(S\right)\right] \geq \epsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^m\left(\frac{3}{m}\right)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2m\epsilon^2}{9}\right)$$

故至少有 $1-\dfrac{\delta}{2}$ 的概率有

$$\Psi\left(S\right) \leq \mathbb{E}_S\left[\Psi\left(S\right)\right] + 3\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2m}}$$

而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_S\left[\Psi\left(S\right)\right] &= \mathbb{E}_S\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_S\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\mathbb{E}_{S'}\left(\hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right] - 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}_{S,S'}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right]\right) - 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}_{S,S'}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right]\right)\right] \\
&\leq 2\mathcal{R}_S\left(\mathcal{G}\right)
\end{aligned}$$

最后一步利用了课件上的结论 $\mathbb{E}_{S,S'}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left(\hat{\mathbb{E}}_{S'}\left[g\right] - \hat{\mathbb{E}}_S\left[g\right]\right)\right] \leq 2\mathcal{R}_S\left(\mathcal{G}\right)$。

又因为利用 McDiarmid 不等式可得至少有 $1-\dfrac{\delta}{2}$ 的概率有

$$\mathcal{R}_S\left(\mathcal{G}\right) \leq \hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right) + \sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2m}}$$

故至少有 $1-\dfrac{\delta}{2}$ 的概率有

$$\Psi\left(S\right) \leq 2\mathcal{R}_S\left(\mathcal{G}\right) + 3\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2m}} \leq 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right) + 5\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2m}}$$

即至少有 $1-\delta$ 的概率有

$$\mathbb{E}_{z\sim D}\left[g(z)\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m g(z_i) + 2\mathcal{R}_S\left(\mathcal{G}\right) + 3\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2m}}$$

$$\mathbb{E}_{z\sim D}\left[g(z)\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m g(z_i) + 2\hat{\mathcal{R}}_S\left(\mathcal{G}\right) + 5\sqrt{\frac{\log\frac{2}{\delta}}{2m}}$$

5.2 增长函数

定义从 $\mathbb{R}$ 映射到 $\{+1,-1\}$ 的阈值函数族 $\mathcal{H}=\{x\to\mathbb{I}[x\geq\theta]|\theta\in\mathbf{R}\}\cup\{x\to\mathbb{I}[x\leq\theta]|\theta\in\mathbf{R}\}$，请求出函数族 $\mathcal{H}$ 的增长函数，并导出 $\mathcal{R}_n(\mathcal{H})$ 的上界。

利用增长函数的定义可知增长函数 $\Pi_{\mathcal{H}}(n)$ 是指对任意 n 个样本点 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ，阈值函数族 $\mathcal{H}$ 在这些点上的分类情况的总数。

而对于阈值函数族 $\mathcal{H}=\{x\to\mathbb{I}[x\geq\theta]|\theta\in\mathbf{R}\}\cup\{x\to\mathbb{I}[x\leq\theta]|\theta\in\mathbf{R}\}$，有两种主要的划分方式：

- 将满足 $x\geq\theta$ 的点标记为 $+1$ ，满足 $x\leq\theta$ 的点标记为 -1 ，此时有 $n+1$ 种划分方式；
- 将满足 $x\geq\theta$ 的点标记为 -1 ，满足 $x\leq\theta$ 的点标记为 $+1$ ，此时有 $n+1$ 种划分方式。

故 $\Pi_{\mathcal{H}}(n)=2n+2$ 。

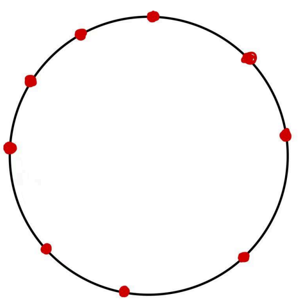
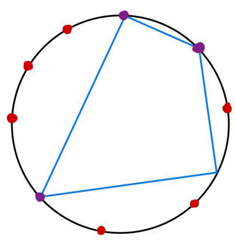
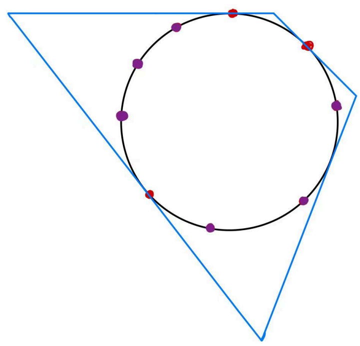
利用课件上的结论可得 $\mathcal{R}_n(\mathcal{H})\leq\sqrt{\frac{2\log\Pi_{\mathcal{H}}(n)}{n}}$ ，代入 $\Pi_{\mathcal{H}}(n)=2n+2$ 可得

$$\mathcal{R}_n(\mathcal{H})\leq\sqrt{\frac{2\log(2n+2)}{n}}$$

5.3 VC 维

与第 2 题中的轴对齐矩阵学习问题类似，我们考虑凸 d 边形学习问题。设假设空间 $\mathcal{H}=\{\mathbb{I}[x\in P]|P\text{ is a convex d-gon}\}$ 是二维平面 $\mathbf{R}^2$ 上所有凸 d 边形分类函数的集合。证明：$\mathcal{H}$ 的 VC 维是 $2d+1$ 。（不考虑数据中存在三点共线的情况）

要证明下界，我们可以构造一个所有 $2d+1$ 个点排布在一个凸 $2d+1$ 边形上（这里画成排布在一个圆上，事实上是等价的）的情况。对于正例数量 $\leq d$ 的情况，可以构造一个顶点包括了全部正例的圆内接凸 d 边形，将其区分开来。对于正例数量 $>d$ 的情况，可以构造一个边与圆切于负例的圆外切凸 d 边形，将其区分开来。如图。

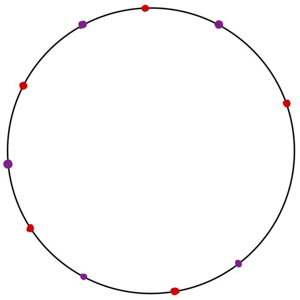
点的排布	点的划分
	 

故 $\mathcal{H}$ 的 VC 维至少为 $2d+1$ 。

下面证明上界。

对于任意 $2d+2$ 个点，假设这些点排布在一个凸 $2d+2$ 边形上，对于正例和负例交替排布的情况，显然需要至少 $d+1$ 条边才能将其区分开来。故此时凸 d 边形无法打散这些点。

假设这些点不排布在一个凸 $2d+2$ 边形上，则至少有一个点位于其他点的“内部”。当这个点为负例而包围它的至少 $d+1$ 个点为正例时，显然无法用凸 d 边形将其区分开来。故此时凸 d 边形无法打散这些点。

点排布在一个凸 $2d+2$ 边形上	点不排布在一个凸 $2d+2$ 边形上
	

故 $\mathcal{H}$ 的 VC 维至多为 $2d+1$ 。

综上，$\mathcal{H}$ 的 VC 维是 $2d+1$ 。

成绩：97

评语：2.5 -1; 2.6 -5; 2.7 -1; 5.1.2 -3; 5.2 -3