作业 4：强化学习

2 Bellman Equation（25pt）

1. 写出衰减系数为 γ 的 MDP 中，策略 π 的状态值函数 $V^{\pi}(s)$ 的定义。

在衰减系数为 γ 的 MDP 中，策略 π 的状态值函数 $V^{\pi}(s)$ 定义为从状态 s 出发，按照策略 π 选择动作所能获得的期望折扣累计奖励。

$$V^{\pi}(s)=\mathbb{E}_{\pi}\left[G_t|S_t=s\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\gamma^t R_t\middle|S_t=s\right]$$

2. 写出状态值函数 $V^{\pi}(s)$ 所符合的贝尔曼（Bellman）期望方程。

状态值函数 $V^{\pi}(s)$ 所符合的贝尔曼期望方程为：

$$V^{\pi}(s)=\sum_{a\in\mathcal{A}}\pi(a|s)\left(\mathcal{R}_s^a+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}_{ss'}^a V^{\pi}(s')\right)$$

3. 考虑一个均匀随机策略 π_0 （以相同的概率选取所有动作），初始状态值函数 $V_0^{\pi_0}(A)=V_0^{\pi_0}(B)=V_0^{\pi_0}(C)=0$，请利用 2 中的贝尔曼期望方程，写出上述 MDP 过程中，迭代式策略评估进行一步更新的状态值函数 $V_1^{\pi_0}$ 。

由于初始状态值函数 $V_0^{\pi_0}(A)=V_0^{\pi_0}(B)=V_0^{\pi_0}(C)=0$ ，为了简便起见，以下式子忽略了 $\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}_{ss'}^a V^{\pi}(s')$ 项，因为其值为 0 。

$$\begin{aligned}
V_1^{\pi_0}(A)&=\mathcal{R}_A^{ab} &&=-4=-4\\
V_1^{\pi_0}(B)&=\frac{1}{2}\mathcal{R}_B^{ba}+\frac{1}{2}\mathcal{R}_B^{bc} &&=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 2=1.5\\
V_1^{\pi_0}(C)&=\frac{1}{2}\mathcal{R}_C^{ca}+\frac{1}{2}\mathcal{R}_C^{cb} &&=\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{2}\times 0=4
\end{aligned}$$

4. 基于 3 中计算得到的 $V_1^{\pi_0}$ ，利用贪心法得到确定性策略 π_1 。

根据 $V_1^{\pi_0}$ 的值，可以得到确定性策略 π_1 如下：

$$\begin{aligned}
\pi_1(A)&=ab\\
\pi_1(B)&=bc\\
\pi_1(C)&=ca
\end{aligned}$$

3 $\mathrm{TD}(\lambda)$ & Eligibility Trace（附加题，10pt）

1. 定义 $T(S_1,S_2)=\begin{cases}1 & \text{if } S_1=S_2\\ 0 & \text{if } S_1\neq S_2\end{cases}$ ，在后向视角中，状态 s 在第 t 步的价值更新量为 $\Delta V_t^{\text{back}}(s)=\alpha\delta_t E(s)$ 。请证明：对于整条轨迹，状态 s 的价值更新量 $\Delta V_{\text{all}}^{\text{back}}(s)=\sum_{t=0}^{T-1}\Delta V_t^{\text{back}}(s)=\alpha\sum_{t=0}^{T-1}I(s,S_t)\sum_{k=t}^{T-1}(\gamma\lambda)^{k-t}\delta_k$ 。

$$\Delta V_{\text{all}}^{\text{back}}(s)=\sum_{t=0}^{T-1}\Delta V_t^{\text{back}}(s)=\alpha\sum_{t=0}^{T-1}\delta_t E(s)$$

由于在更新时，对于第 t 步，我们遇到状态 S_t ，于是更新它的资格迹：

$$E(S_t)=E(S_t)+1$$

再对所有状态 S 的资格迹进行衰减：

$$E\left(S\right)=\gamma\lambda E\left(S\right)$$

故而有

$$E\left(s\right)=\sum_{k=t}^{T-1}I\left(s,S_k\right)\left(\gamma\lambda\right)^{k-t}$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta V_{\text{all}}^{\text{back}}\left(s\right)&=\alpha\sum_{t=0}^{T-1}\delta_tE\left(s\right)\\&=\alpha\sum_{t=0}^{T-1}\delta_t\sum_{k=t}^{T-1}I\left(s,S_k\right)\left(\gamma\lambda\right)^{k-t}\\&=\alpha\sum_{t=0}^{T-1}I\left(s,S_t\right)\sum_{k=t}^{T-1}\left(\gamma\lambda\right)^{k-t}\delta_k\end{aligned}$$

2. 在前向视角中，状态 s 在第 t 步的价值更新量为 $\Delta V_t^{\text{for}}\left(s\right)=I\left(s,S_t\right)\alpha\left(G_t^\lambda-V\left(S_t\right)\right)$ 。现在，我们需要将 G_t^λ 展开为用 R_t，$V\left(S_t\right)$ 描述的表达式，并得出 $\Delta V_t^{\text{for}}\left(s\right)$ 使用 $R_t,V\left(S_t\right)$ 描述的表达式。（提示：可依次算出每一项的系数）

由于

$$G_t^{(n)}=R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\cdots+\gamma^{n-1}R_{t+n}+\gamma^nV\left(S_{t+n}\right)$$

以及

$$G_t^\lambda=\left(1-\lambda\right)\sum_{n=1}^{T-t-1}\lambda^{n-1}G_t^{(n)}+\lambda^{T-t-1}G_t^{(T-t)}$$

所以

$$G_t^\lambda=\sum_{n=1}^{T-t}\left(\gamma\lambda\right)^{n-1}R_{t+n}+\sum_{n=1}^{T-t-1}\gamma^n\left(1-\lambda\right)\lambda^{n-1}V\left(S_{t+n}\right)+\gamma^{T-t}\lambda^{T-t-1}V\left(S_T\right)$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta V_t^{\text{for}}\left(s\right)&=I\left(s,S_t\right)\alpha\left(G_t^\lambda-V\left(S_t\right)\right)\\&=I\left(s,S_t\right)\alpha\left(\sum_{n=1}^{T-t}\left(\gamma\lambda\right)^{n-1}R_{t+n}+\sum_{n=1}^{T-t-1}\gamma^n\left(1-\lambda\right)\lambda^{n-1}V\left(S_{t+n}\right)+\gamma^{T-t}\lambda^{T-t-1}V\left(S_T\right)-V\left(S_t\right)\right)\end{aligned}$$

3. 在前向视角中，对于整条轨迹，状态 s 的价值更新量为 $\Delta V_{\text{all}}^{\text{for}}\left(s\right)=\sum_{t=0}^{T-1}\Delta V_t^{\text{for}}\left(s\right)$ 。请证明： $\Delta V_{\text{all}}^{\text{for}}\left(s\right)=\Delta V_{\text{all}}^{\text{back}}\left(s\right)$ 。

要证明

$$\Delta V_{\text{all}}^{\text{for}}\left(s\right)=\Delta V_{\text{all}}^{\text{back}}\left(s\right)$$

由前两问可知

$$\Delta V_{\text{all}}^{\text{back}}(s)=\alpha\sum_{t=0}^{T-1}I(s,S_t)\sum_{k=t}^{T-1}(\gamma\lambda)^{k-t}\delta_k$$

$$\Delta V_{\text{all}}^{\text{for}}(s)=\alpha\sum_{t=0}^{T-1}I(s,S_t)\left(G_t^{\lambda}-V(S_t)\right)$$

故而只需要证明

$$\sum_{k=t}^{T-1}(\gamma\lambda)^{k-t}\delta_k=G_t^{\lambda}-V(S_t)$$

由于

$$\delta_t=R_{t+1}+\gamma V(S_{t+1})-V(S_t)$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=t}^{T-1}(\gamma\lambda)^{k-t}\delta_k&=\sum_{n=1}^{T-t}(\gamma\lambda)^{n-1}\delta_{t+n-1}\\&=\sum_{n=1}^{T-t}(\gamma\lambda)^{n-1}\left(R_{t+n}+\gamma V(S_{t+n})-V(S_{t+n-1})\right)\\&=\sum_{n=1}^{T-t}(\gamma\lambda)^{n-1}R_{t+n}+\sum_{n=1}^{T-t-1}\gamma^n(1-\lambda)\lambda^{n-1}V(S_{t+n})+\gamma^{T-t}\lambda^{T-t-1}V(S_T)-V(S_t)\\&=G_t^{\lambda}-V(S_t)\end{aligned}$$

所以上式成立。

4 Q-Learning & Sarsa（25pt）

1. 补充 `./algorithms/QLearning` 函数，填入 1 行代码实现 Q-learning 算法；

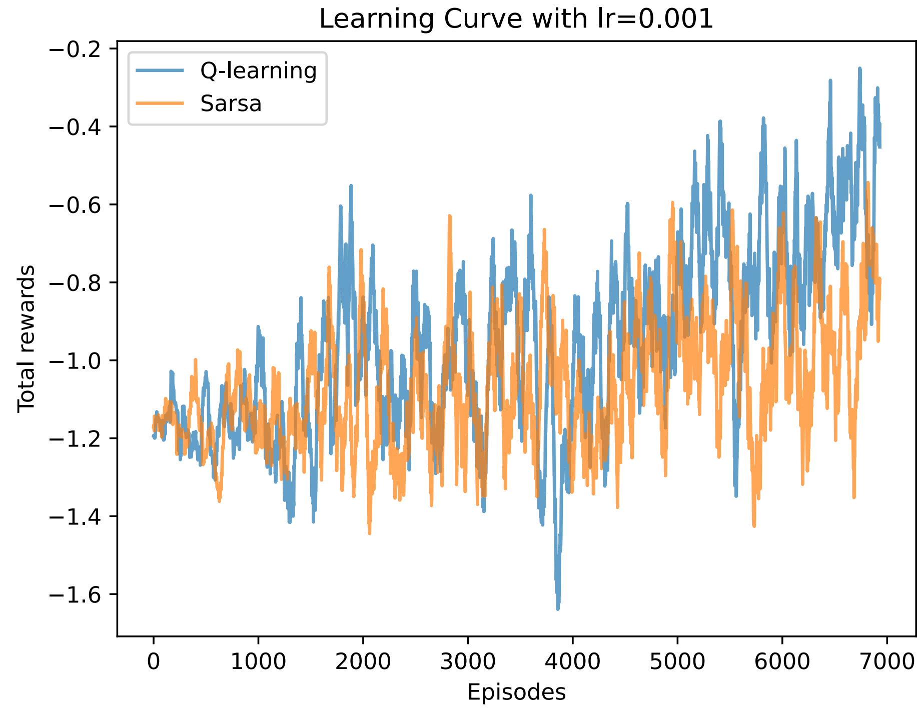
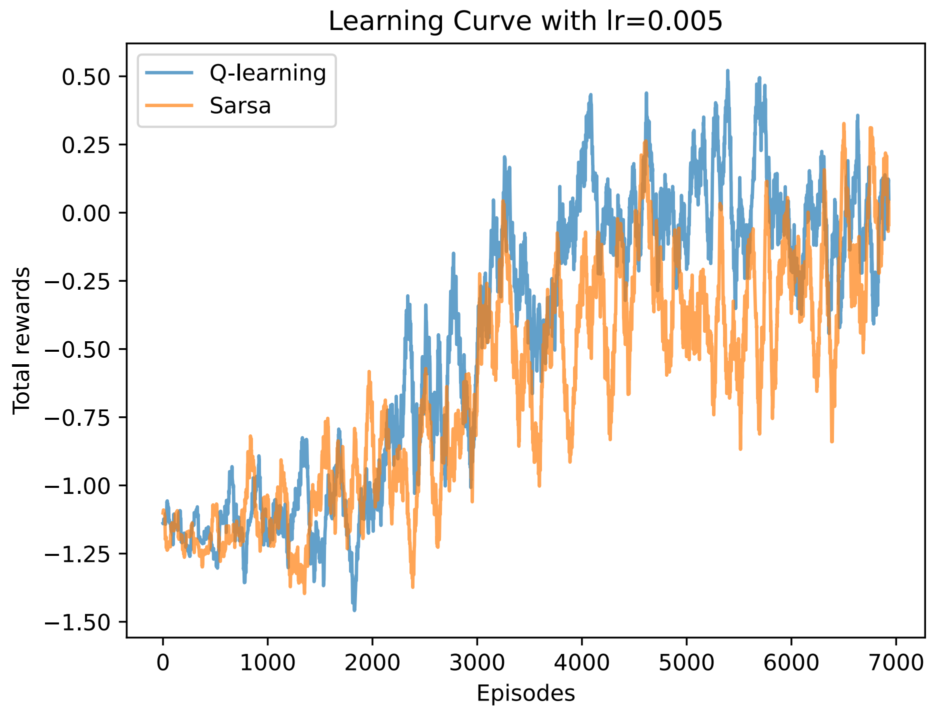
```
Q[s][a] = Q[s][a] + lr * (reward + gamma * np.max(Q[nexts]) - Q[s][a])
```

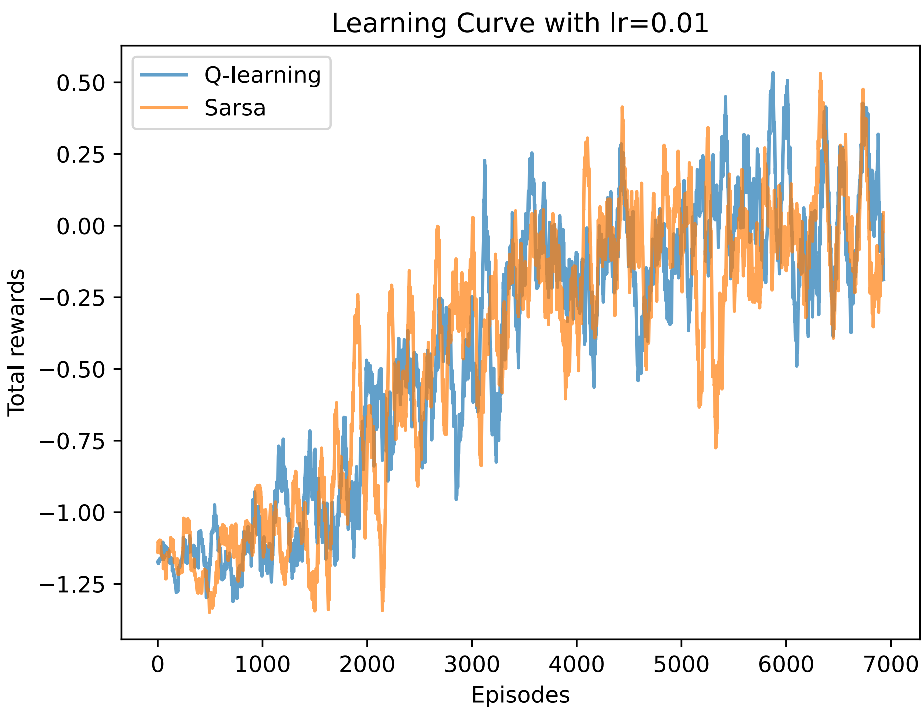
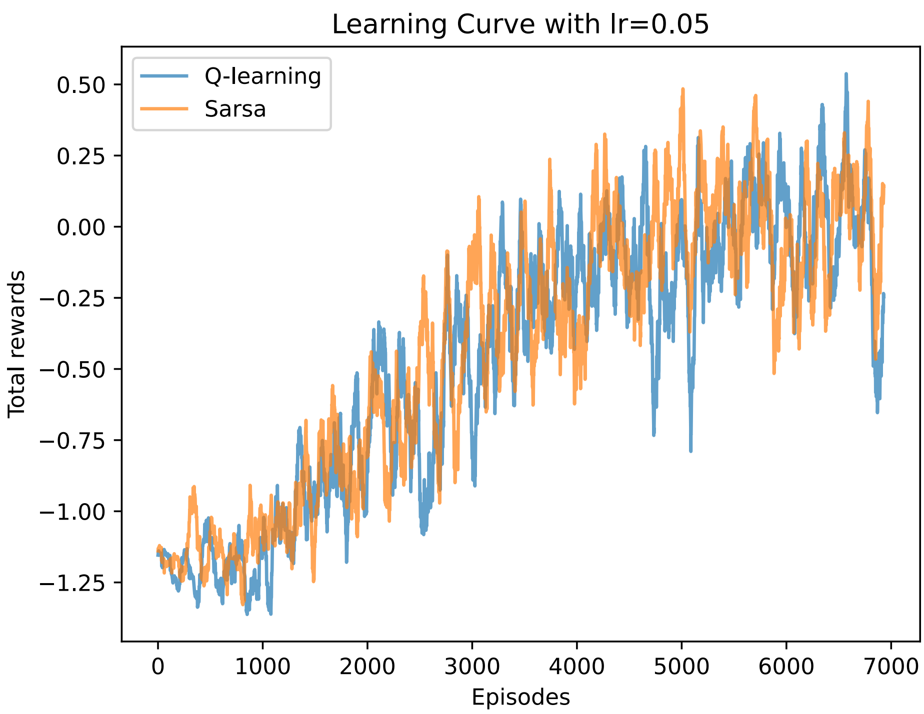
2. 补充 `./algorithms/Sarsa` 函数，实现 Sarsa 算法；(可参考提供的 Q-learning 算法)

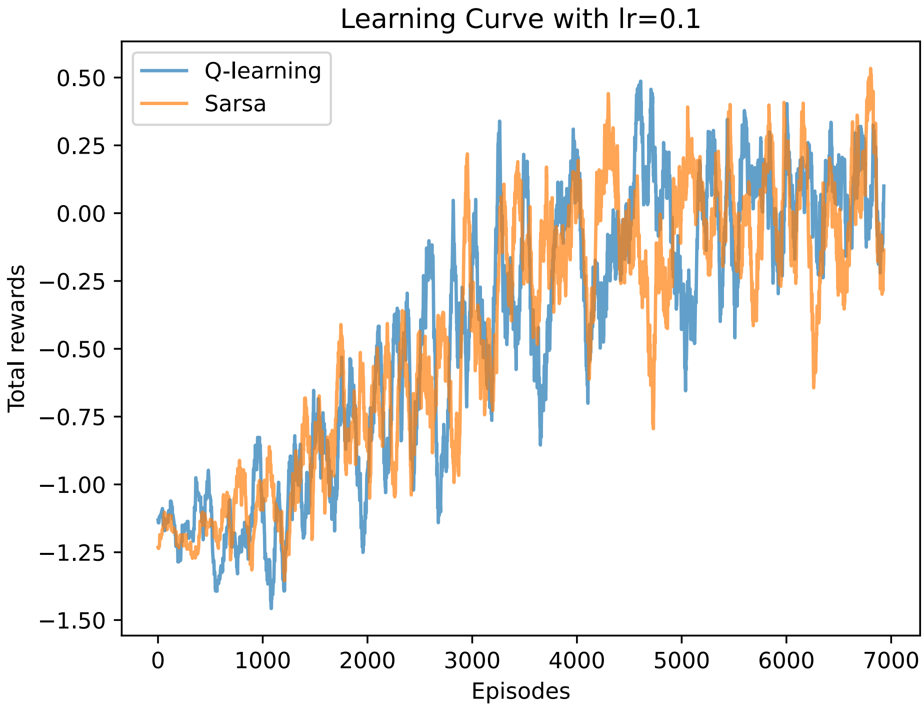
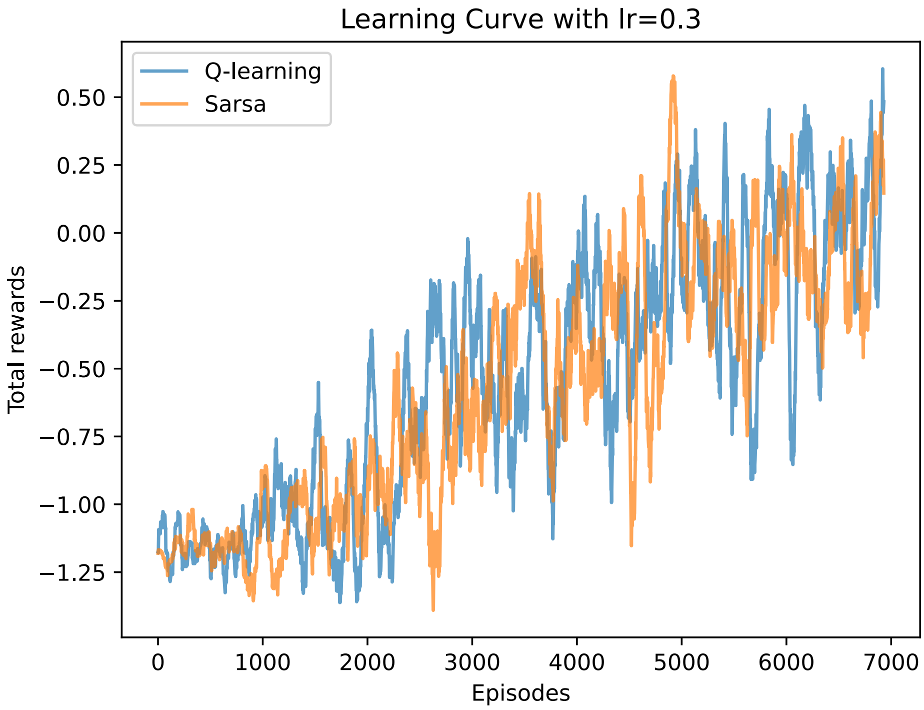
```
Q = np.zeros((env.observation_space.n, env.action_space.n))
episode_reward = np.zeros((num_episodes,))
for i in range(num_episodes):
    tmp_episode_reward = 0
    s, info = env.reset()
    if np.random.rand() > e:
        a = np.argmax(Q[s])
    else:
        a = np.random.randint(env.action_space.n)
    while True:
        nexts, reward, terminated, truncated, info = env.step(a)
        done = terminated or truncated
        if np.random.rand() > e:
            nexta = np.argmax(Q[nexts])
        else:
            nexta = np.random.randint(env.action_space.n)
        Q[s][a] = Q[s][a] + lr * (reward + gamma * Q[nexts][nexta] - Q[s][a])
        tmp_episode_reward += reward
        s, a = nexts, nexta
        if done:
```

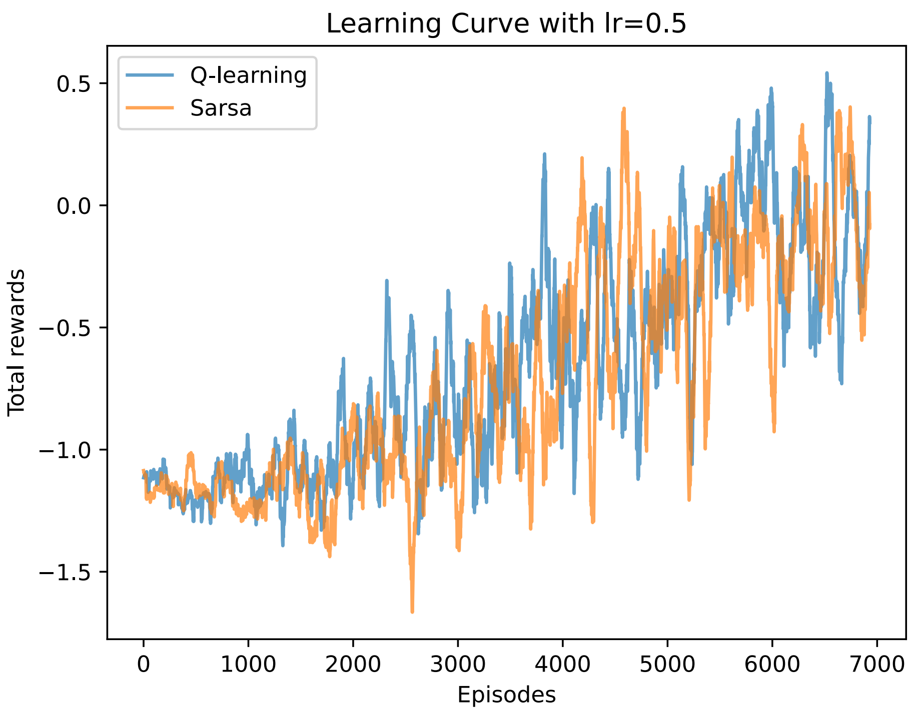
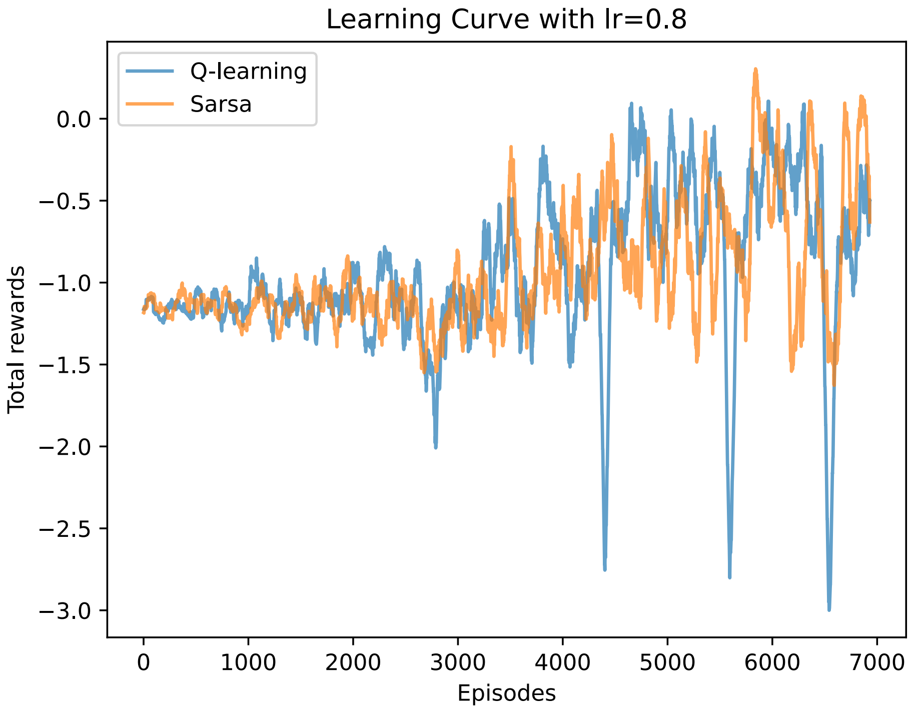
```
            break
    episode_reward[i] = tmp_episode_reward
    print(f"Total reward until episode {i + 1}: {tmp_episode_reward}")
    if i % 10 == 0:
        e *= decay_rate
return Q, episode_reward
```

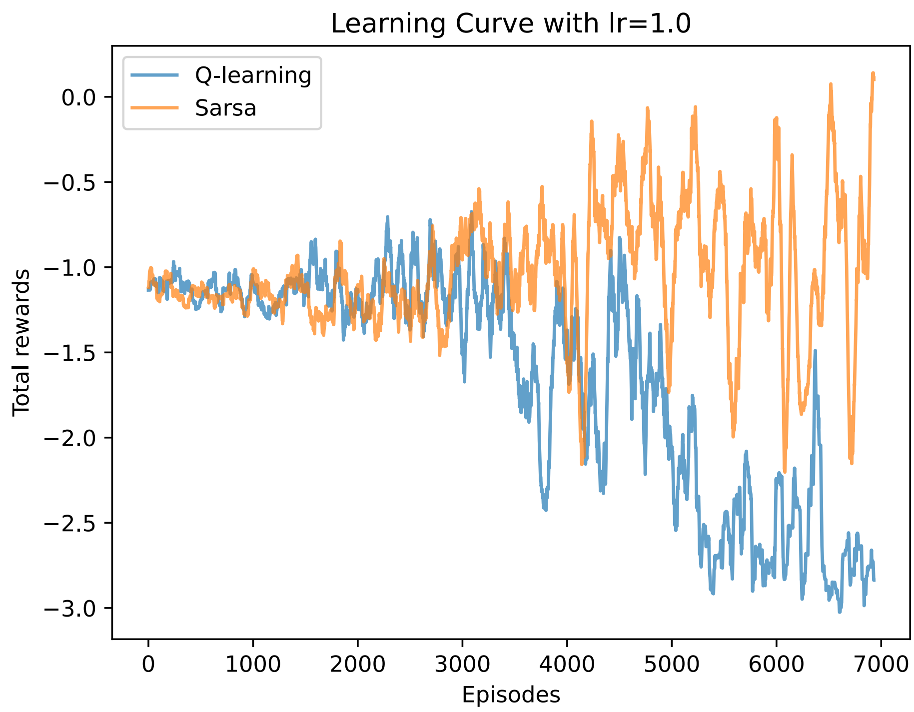
3. 完成两种不同算法迭代步长 `lr` 取值下的对比实验，绘制不同步长下的学习曲线图，并简要分析结果。（提示：`main.py` 的注释中有相关绘图代码）

步长	学习曲线图
0.001	
0.005	

步长	学习曲线图
0.01	
0.05	

步长	学习曲线图
0.1	
0.3	

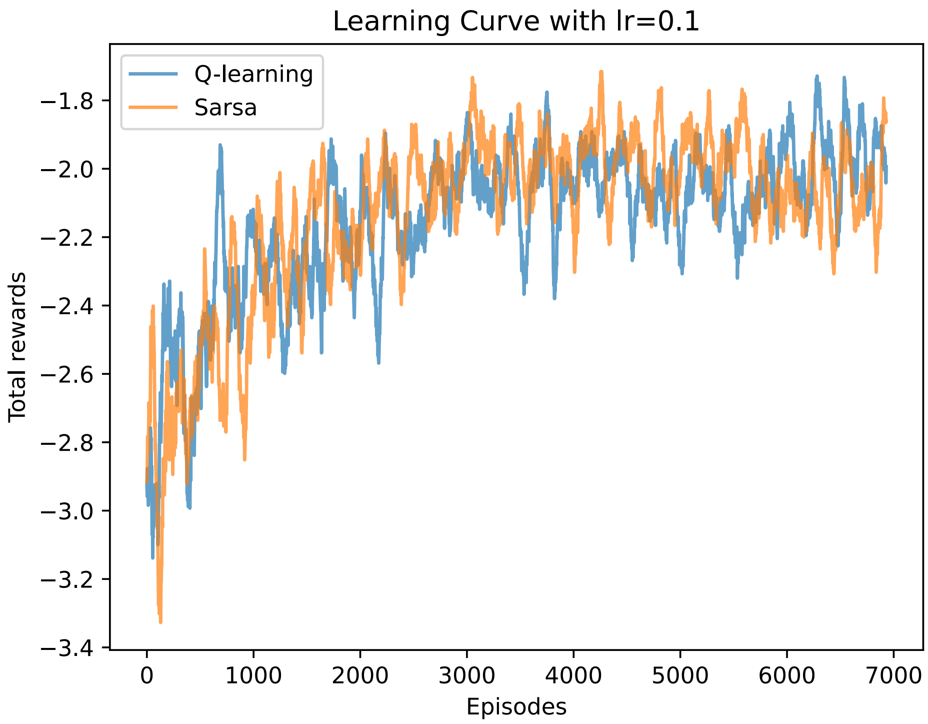
步长	学习曲线图
0.5	
0.8	

步长	学习曲线图
1.0	

从图中可以看到，迭代步长 `lr` 过小时，学习速度较慢，学习曲线上升速度较慢，但是学习曲线的波动较小；迭代步长 `lr` 过大时，学习曲线难以收敛，波动较大；迭代步长 `lr` 适中时，学习曲线上升速度适中，波动较小。

4. 如果修改 `main.py:17` 处的代码，将每步 −0.03 的惩罚值增大到 −0.3，算法学到的策略会有何不同？请简要分析原因。

可以观察到小人会非常迫切地想要到达终点，同时很容易滑入冰洞。这是因为每步的惩罚太大，与滑入冰洞的惩罚相比差距更小，因此小人更加不在乎滑入冰洞的惩罚，而更加迫切地想要到达终点。

步长	学习曲线图
0.1	

观察学习曲线可以看到，总奖励始终保持在一个较低的值，学习到的策略较为有限。

5 REINFORCE & AC（50pt）

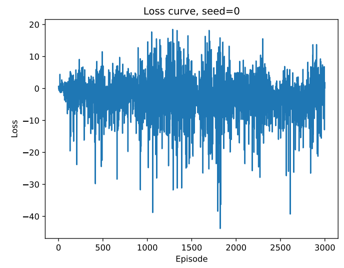
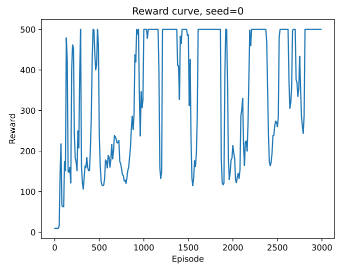
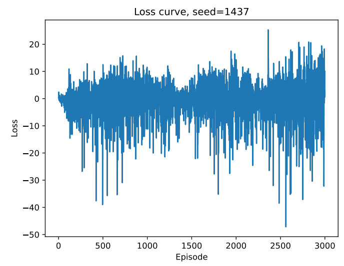
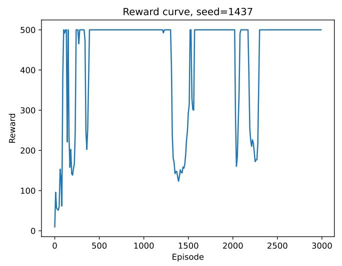
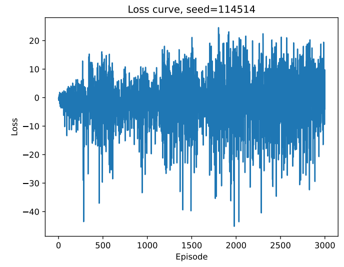
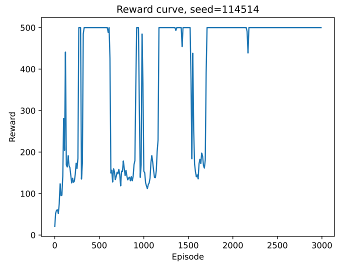
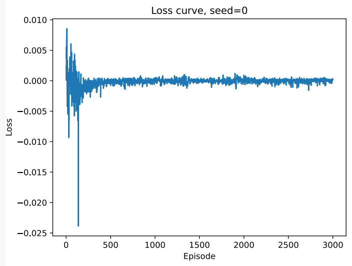
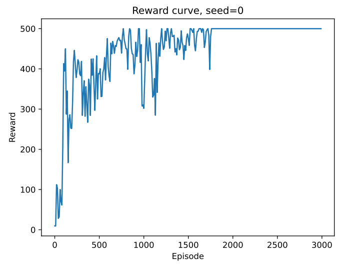
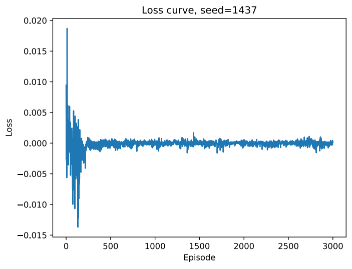
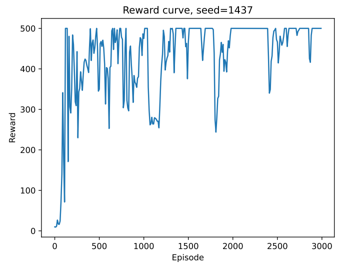
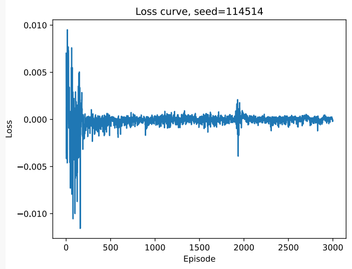
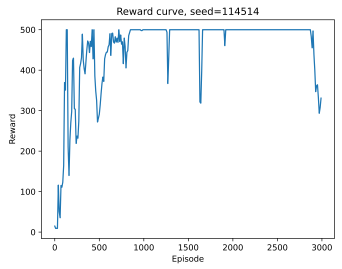
1. 补充 `REINFORCE` 类中的 `learn` 函数，实现 REINFORCE 算法。

```
G = []
cumulative = 0
for reward in reversed(self.rewards):
    cumulative = reward + GAMMA * cumulative
    G.insert(0, cumulative)
G = torch.tensor(G, dtype=torch.float32)
G = (G - G.mean()) / (G.std() + 1e-8)
for action_prob, action, reward in zip(self.action_probs, self.actions, G):
    log_prob = torch.log(action_prob.squeeze(0)[action])
    loss.append(-log_prob * reward)
```

2. 补充 `TDActorCritic` 类中的 `learn` 函数，实现 TD Actor-Critic 算法。value 的损失函数已经预先实现了，只需要实现 policy 的损失函数即可。代码中 $\text{td\_target} = R_{t+1} + \gamma v_\pi\left(S_{t+1}\right)$。

```
v_s = self.ac.v(self.states)
v_s_prime = self.ac.v(self.states_prime) * self.done
td_target = self.rewards + GAMMA * v_s_prime
delta = td_target - v_s
action_log_probs = torch.log(self.action_probs.gather(1, self.actions))
policy_loss = -(action_log_probs * delta.detach()).mean()
```

3. 请绘制两个模型的训练曲线，包括训练过程的损失函数的变化和最终奖励值，并分析训练稳定性及收敛效率。由于强化学习的不稳定性，你的结果需要基于至少 3 个种子。

模型	种子	损失函数曲线	奖励值曲线
REINFORCE	0		
REINFORCE	1437		
REINFORCE	114514		
TDActorCritic	0		
TDActorCritic	1437		
TDActorCritic	114514		

由两个模型的训练曲线可以看到，REINFORCE 算法的训练过程中损失函数波动较大，奖励值曲线波动较大，收敛效率较低；TD Actor-Critic 算法的训练过程中损失函数波动较小，奖励值曲线波动较小，收敛效率较高。

成绩：100

评语：3 +5