回顾

- 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (z-a)^k$ 只有 $(z-a)$ 的非负幂次项.

- ∃收敛圆 $|z-a|=R$，其中 $R\geqslant 0$.

① 圆内绝对 + 内闭一致收敛

② 圆内和函数解析，$\lim$，$\int$，$\frac{d}{dz}$ 均与 $\sum_k$ 交换. 如

$$\frac{d}{dz}\sum_k \lambda_k (z-a)^k = \sum_k \lambda_k \frac{d}{dz}(z-a)^k$$

交换前后收敛半径相同

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

③ 圆外发散

- 圆内 $N(a,R)$ 解析函数 $f(z)$ 必有展开 $(z\in N(a,R))$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma\subset\partial N(a,R)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right](z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(z-a)^n$$

- 求和从 $n=0$ 开始.
- 积分变量 ζ（内部变量. 哑变量）
- 全局变量 z, a. : 采样点, 与展开中心 都是f解析点.
- z 与 a 之间没有任何奇点.

- Γ 与 a 之间也没有任何奇点. ⇒ 高阶导数公式必然成立.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

- $N(a,R)$ 中的有限个人造奇点基本不影响展开式.

$$f(z)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{1-z}, & z\in N(0,1)-\{0\}\\ 10086 & z=0\end{cases}$$ (人造奇点)

则对 $\forall\ z\neq 0$，可以原点为中心展开.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\sum_{k=0}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial N(0,\rho<1)}\frac{1}{\xi^{n+1}(1-\xi)}d\xi\right]z^n$$

$$\neq\sum_{n=0}\frac{1}{n!}\underbrace{f^{(n)}(0)}_{\text{0 处导数没定义}}z^n$$

解析函数的 Laurent 展开.

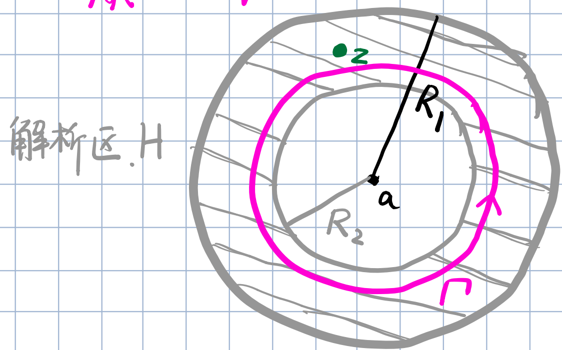
$R_2=0$ 时 $H=N(a,R_1)\setminus\{a\}$ "a的去心邻域".

① 环 $H: R_2<|z-a|<R_1$ 内解析的函数 $f(z)$

可展开为双边幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$,

从 $-\infty$ 开始

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi,\quad \forall z\in H,\quad \Gamma\subset H.$$



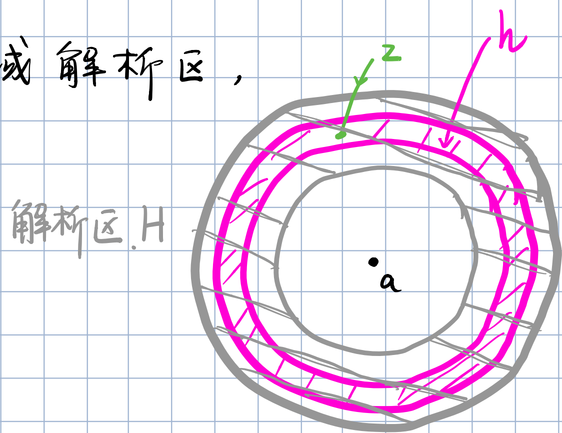
证明概要:

ⓐ 环 H 内有闭子环 h (包含 z 点) 作为复连通闭域解析区,

可用 Cauchy 积分公式

$$f(z\in H)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial h}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

∂h: 内圈 外圈.



ⓑ $$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-a)-(z-a)}=\frac{1}{\xi-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}\quad \text{or}\quad \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{\frac{\xi-a}{z-a}-1}.$$

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}\ \overset{\xi\in\text{外圈}}{=\!=}\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k \qquad \text{绝对收敛}$$

$$\frac{1}{\frac{\xi-a}{z-a}-1}\ \overset{\xi\in\text{内圈}}{=\!=}\ -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^k \qquad \text{绝对收敛}.$$

ⓒ 检查上述展开的在内外圈一致收敛性

ⓓ $\oint\limits_{内外圈}$ 移入两个无穷求和内.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{内}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^k}d\xi\right](z-a)^k}_{(z-a)\text{负幂项}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{外}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^k}d\xi\right](z-a)^k$$

$(z-a)$ 非负幂项.

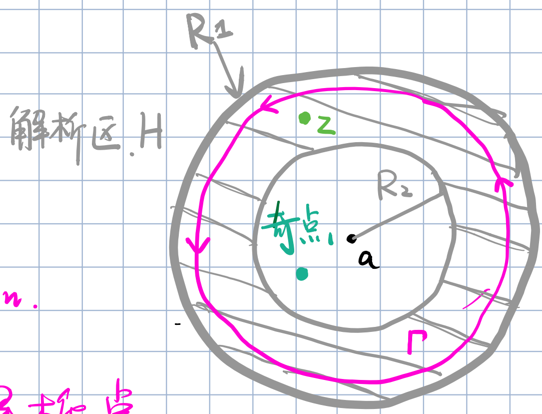
ⓔ 解析区H内围线连续形变积分不变：内外圈 $\longrightarrow \Gamma \subseteq H$.

关键元素：H、a，z、Γ， 求和从 $n=-\infty$ 开始。

ⓐ $f(z)$ 解析区 H， Laurent 展开中心 $a \notin H$. 即 a 可以是非解析点，

但 $z \in H$，$\Gamma \subset H$.

对比 Taylor



ⓑ $C_{n\geq 0}$ $\underset{\text{一般来说}}{\neq}$ $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

因为 $N(a, R_2)$ 内 f 的解析性质未知.

$\Rightarrow$ $f(z)$ 在 Γ 与 a 之间可能有不解析点

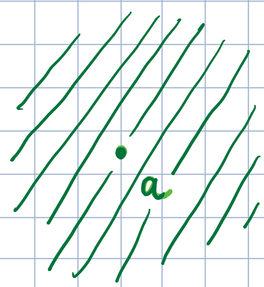
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi \ \overset{\text{一般}}{\neq}\ \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$ (对比 Taylor)

若 a 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f^{(n)}(a)$ 更无从谈起

ⓒ 若有任一 $C_{-n} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$ $\Longleftrightarrow$ $\overline{N(a, R_2)}$ 内有奇点.

但 a 不一定是奇点

• $f(z)=\frac{1}{z-a}$ 在 $\overset{R_2}{\overset{\parallel}{0}} < |z-a| < \overset{R_1}{\overset{\parallel}{+\infty}}$ 内解析 于是环内有 Laurent 展开.



环状解析区

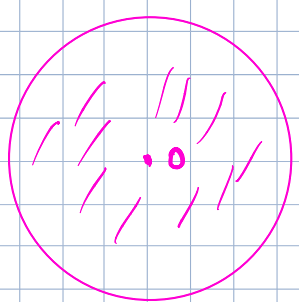
$$\frac{1}{z-a} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k (z-a)^k \qquad C_{k=-1} = 1, \text{ others } C_k = 0.$$

a 的确是 $f(z)$ 的奇点.

• $f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-b)-(a-b)} = \frac{1}{z-b}\,\frac{1}{1-\frac{a-b}{z-b}} = \frac{1}{z-b}\,\frac{1}{1-u}$

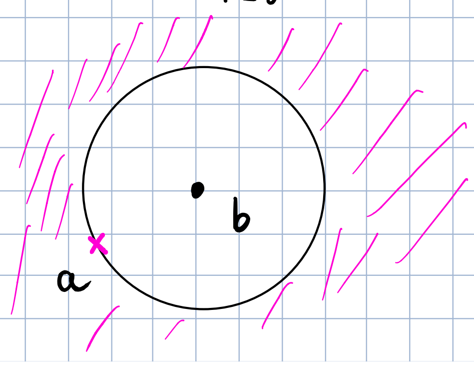
$u \equiv \frac{a-b}{z-b}$

在区域 $|u|<1$ 内可展开. $f(z) = \frac{1}{z-b}\sum_{k=0}^{\infty} u^k$



$|u|<1$

$|z-b|>|a-b|$



$$\Rightarrow \frac{|a-b|}{|z-b|} < 1 \iff (+\infty >) \overbrace{|z-b| > |a-b|}^{H_b} \text{ 内}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k = \underbrace{\cdots + \frac{(a-b)^2}{(z-b)^3} + \frac{a-b}{(z-b)^2} + \frac{1}{z-b}}_{}$$

$f(z)$ 在 H_b 中的 Laurent 展开

$\frac{1}{(z-b)^k}$ 表观奇异项

尽管 $C_{-n} = a-b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ 但 b 不是 $f(z)$ 的奇点

因为 $z=b$ 被排除在展开区以外

即 $=$ 成立的条件是 z 远离 b

真正奇点 a 恰在 $\overline{N(b, R_2)}$ 边界处.

$\Rightarrow$ 无穷多奇异项 $(z-b)^{-k}$ 仍而可能令 b 不是奇点.

物理：

$\frac{1}{z-b}$: 格林函数 / 传播子. 对 自由理论.

$b \sim$ 自由场. 质量.

$\frac{\delta b}{z-b} + \left(\frac{\delta b}{z-b}\right)^2 + \cdots$: 有 相互作用场论的 完全传播子.

$\sim \frac{\delta b}{z-b-\delta b}$

b : 表观质量.

$b+\delta b$: 相互作用带来的真实质量.

ⓓ 若 $N(a,R_2)$ 内的确没有奇点，则两件事同时发生.

(1) $C_{-n} \to 0$ ， $n=1,2,\cdots$

(2) $C_{n\geq 0} \to \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$　　Laurent 展开 $\longrightarrow$ Taylor.

ⓔ 给定 ①函数、②展开中心 及 ③环状解析区域：

展开式是唯一确定的

对于给定展开中心，不同环状解析区域的展开可不同.

例：$f(z) \equiv \dfrac{1}{z(z-1)}$ ，展开中心选为 $z=0$

在以 $z=0$ 为中心的环状区域 $\underbrace{0<|z|<1}_{H_1}$ 和 $\underbrace{1<|z|<\infty}_{H_2}$.

解析.

当 $z \in H_1$. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)} = -\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = -\dfrac{1}{z} - 1 - z - \cdots$

注：$C_n \equiv \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho<1} \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho<1} \dfrac{1}{z^{n+2}(z-1)}dz$

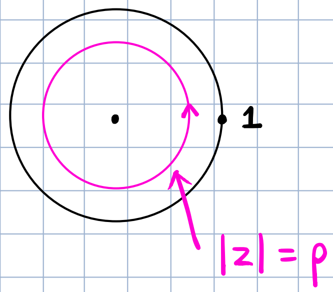
(a) $n=-|n| \leq -2$ 时.

$\dfrac{1}{z^{n+2}}\dfrac{1}{z-1} = z^{|n|-2}\dfrac{1}{z-1}$ 在 $N(0,1)$ 内解析，积分为 0

(b) $n \geq -1$ 时，注意到 $(1-z)^{-1}$ 在 $N(0,1)$ 解析.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho<1} \underbrace{\frac{1}{z^{n+2}}}_{n+2\geq 1}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\bigg|_{z=0}\frac{1}{z-1}$$

$$= -1$$



$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)\,z^n$$

当 $z \in H_2$.
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z|>1$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2}$$

注：$C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z|=\rho>1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>1}\frac{1}{z^{n+2}(z-1)}dz.$ 可用复通 Cauchy 积分定理.

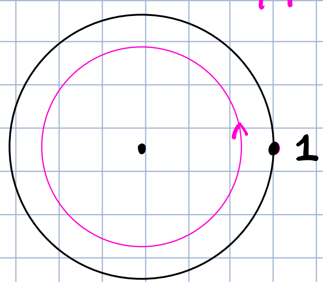
令 $\tilde{z} \equiv \frac{1}{z}$ 则 $d\tilde{z} = -\frac{1}{z^2}dz \Leftrightarrow dz = -\frac{1}{\tilde{z}^2}d\tilde{z}$

$$|z| = \rho > 1 \Leftrightarrow |\tilde{z}| = \frac{1}{\rho} < 1$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\tilde{z}|=\frac{1}{\rho}}\frac{\tilde{z}^{n+2}}{\frac{1}{\tilde{z}}-1}\cdot(-)\frac{1}{\tilde{z}^2}d\tilde{z} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\tilde{z}|=\frac{1}{\rho}<1}\frac{\tilde{z}^{n+1}}{1-\tilde{z}}d\tilde{z}$$

① $n \geq -1$ $\quad \dfrac{\tilde{z}^{n+1}}{1-\tilde{z}}$ 在 $N(0,1)$ 内解析.

积分为0



② $n = -|n| \leq -2$:

$|n| \geq 2$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{\tilde{z}^{|n|+1}} \underbrace{\frac{\tilde{z}^2}{1-\tilde{z}}}_{\text{在 } N(0,1) \text{ 内解析}} d\tilde{z} = \frac{1}{|n|!}\left(\frac{\tilde{z}^2}{1-\tilde{z}}\right)^{(|n|)}\Bigg|_{\tilde{z}=0}$$

$$= +1$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=-2}^{-\infty} (+1)\, z^n$$

零点孤立性

① 定义：m阶零点

若 f 在 a 的一个小邻域 $N(a,\epsilon)$ 解析　　$m-1$

且 $f(a) = f^{(1)}(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ ，$f^{(m)}(a) \neq 0$.

则称 a 为 f 的 m 阶零点． 1阶零点称为单零点

• 由解析性， $f(z) \xlongequal{\text{Taylor}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$.

则除非 $f(z) \equiv 0$. 否则肯定有 m. s.t. $f^{(m)}(a) \neq 0$.

例：$\sin z$ 在 $z = k\pi$ 处有 $\sin k\pi = 0$ 但 $(\sin z)'_{z=k\pi} = \cos k\pi \neq 0$

$\Rightarrow$ $z = k\pi$ 是 $\sin z$ 的 1阶零点

例：$f(z) \equiv (z-a)^m$ 则有 $f(a) = 0$.　　$f^{(k)} = m \cdots (m-k+1)(z-a)^{m-k}$.

于是有 当 $k = 0, 1, \cdots, m-1$　$f^{(k)}(a) = 0$.

但 $f^{(m)} = m! \neq 0$ $\Longrightarrow$ a 是 m 阶零点.

例：$f(z) \equiv (z-a)^m \varphi(z)$. 其中 φ 在 a 处解析 且 $\varphi(a) \neq 0$. 则 a 是 f 的 m 阶零点.

② m阶零点的刻画.

设 f 在 $N(a,R)$ 内解析. 且不恒为零 则

a 是 m 阶零点 $\Longleftrightarrow f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$

其中 φ 在 $N(a,R)$ 内解析. 且 $\varphi(a)\neq 0$.

证明: m 阶零点 $\Longrightarrow f(a)=f^{(1)}(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(z-a)^m+\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(a)(z-a)^{m+1}+\cdots$$

$$=(z-a)^m\underbrace{\left[\frac{1}{m!}f^{(m)}(a)+\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(a)(z-a)+\cdots\right]}$$

$N(a,R)$ 内绝对.一致收敛 $\longrightarrow \varphi(z)$, $\varphi(z=a)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(a)\neq 0$

零点孤立性定理. $a\sim$ 非平凡零点,

③ f 在 $N(a,R)$ 内解析且非恒为零. a 是零点,

则 $\exists\,\epsilon>0$, s.t. f 在 $N(a,\epsilon)$ 中只有 a 为零点,

证明: 利用 $f(z)\sim(z-m)^m\varphi(z)$ 及 $\varphi(a)\neq 0$ and $z-a\neq 0$ when $z\neq a$

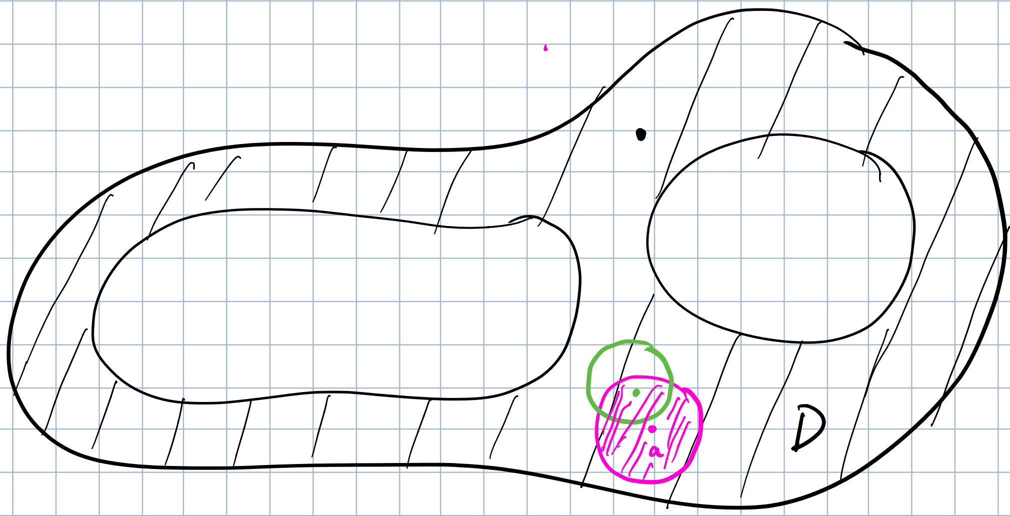
说明: 圆盘解析区中的非平凡零点

{ 要么铺满整个解析区.
{ 要么完全孤立. (与最近的另一个零点有有限大距离).

④ 零点区域的传递性.

设f在区域D中解析. $a\in D$. 考虑某一小邻域 $N(a,R)\subset D$.

若 $f(z\in N(a,R))=0$. 则 $f\equiv 0$. in D



⑤ 设f在D内解析, D内有收敛点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\in D$

且 $z_n\neq a$.

若 $f(z_n)=0$, 则D内f恒为0.

证明: 由于a是f的非孤立零点. $\Rightarrow$ f在a附近恒为0.

$\Rightarrow$ 由"零点区域的传递性"得证.

"反"例：$f(z)=\prod_{n=0}^{\infty}(1-z^{-1}q^n)$ $|q|<0$.

零点 $z_n=q^n$，$n=0,1,2,\cdots$ $\lim_{n\to\infty} z_n=0\notin$ 解析区，因 $z=0$ 是奇点（非平凡零点序列的极限只能是奇点）.

⑤ 若 f_1 f_2 在 D 内解析. 则 f_1. f_2 在一 D 内收敛点列等值. 则 D 内. $f_1(z)=f_2(z)$

证明：

考察 $f=f_1-f_2$. 则 f 在 D 内收敛点列为 0.
$\Rightarrow$ f 恒为 0、$\Rightarrow$ $f_1=f_2$