潘逸文. panyw5@mail.sysu.edu.cn

panyw5.github.io/courses/mmp.html

办公室 旧数学楼 412 东.

余钊焕. yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn.

两位助教: 胡泽熙 张钊.

QQ群:

532326718

考核方式：期末(50%)+ $\underbrace{\text{平时 (50%)}}_{\text{期中，作业，平时考试考核}}$

作业一般一周一次，每周二课上交.

林老师讲义 获得方法

复数

一、"数"的历史

① 自然数（原始社会） Natural numbers，$\mathbb{N}$.

$0, 1, 2, 3, 4, \cdots$

② 整数（古埃及、古希腊） integer numbers，$\mathbb{Z}$.

$\cdots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.

③ 有理数（古埃及、古希腊）

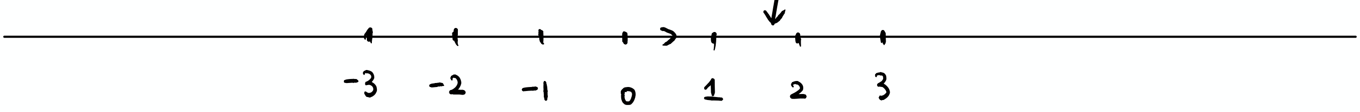
（包含整数） rational numbers $\mathbb{Q}$.

$\frac{p}{q}$，$X.XXXXX$

④ 无理数 irrational（古希腊） 不能写成整数之比

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \cdots$

中间填满无理数和有理数



实数

二. 运算的基本性质

实数与实数之间有加减乘除运算.

ⓐ 加法. 有交换律. 结合律.
ⓑ 乘法: 有交换律. 结合律.

} 之间 分配律.

ⓒ 减法: 加法的逆运算.

ⓓ 除法(不能除以0): 乘法的逆运算.

问题:

是否有别的东西能够满足这些性质?

由实数定义的简单代数方程. $x^2=-1$. 却没有实数解

问题: 如果有解. 解是什么样的?

三. 复数

我们要对实数进行扩充，目标是：

A. 维持实数的代数性质.

B. 使实数方程 $x^2=-1$ 有解.

考虑一个最基本的"复数"，称为"虚数单位" i，并

$\boxed{\text{定义 } i^2=-1}$ 实现了目标B

取任意两个实数 $a, b\in\mathbb{R}$. 与 i 进行形式上的加乘运算

$$\overbrace{a+b}^{\text{加法}}\underbrace{i}_{\text{乘法}},\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

定义：所有形如 $\boxed{\underset{\text{实部}}{a} + i\underset{\text{虚部}}{b},\ a,b\in\mathbb{R}}$ 的物体称为复数.

z 的实部 $=a$ 记为 $\boxed{\mathrm{Re}\,z}$，z 的虚部 $=b$ 记为 $\boxed{\mathrm{Im}\,z}$

全体复数记为 $\mathbb{C}$. (Complex). 显然 $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. (全体虚部为0的复数)

定义：$z=a+ib \xrightarrow{z\text{ 的复共轭}} \boxed{z^*=\bar{z}\equiv a-ib.}$

读作 z star z bar.

复数运算.

加 $x_1+y_1i + x_2+y_2i = \underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{实数加法}} + (y_1+y_2)i$.

减 $x_1+y_1i - x_2+y_2i = (x_1-x_2) + (y_1-y_2)i$.

乘 $(x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = (x_1x_2-y_1y_2) + (x_1y_2+x_2y_1)i$.

除 $\dfrac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \dfrac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}i$

理解这些运算

A：若把这些式子看成运算的定义，则可验证基本性质.（交换、结合、分配）

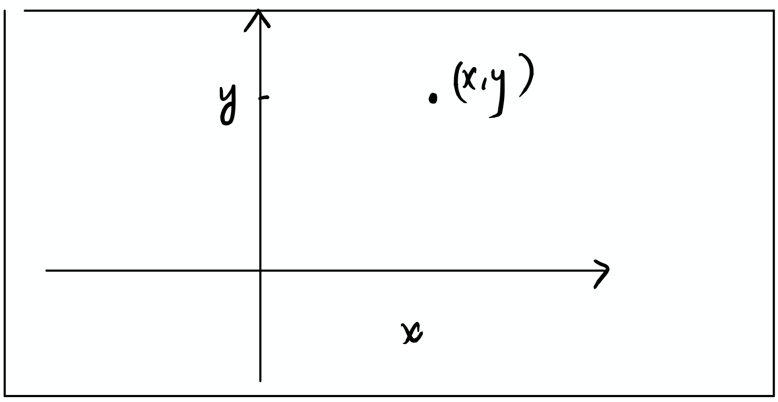
B. 也可把运算性质作为出发点，则这些式子为运算性质的结果.

C. 注意 两个虚部为0的复数的 $+-\times\div$ 与实数运算没有差别.

复数的表示

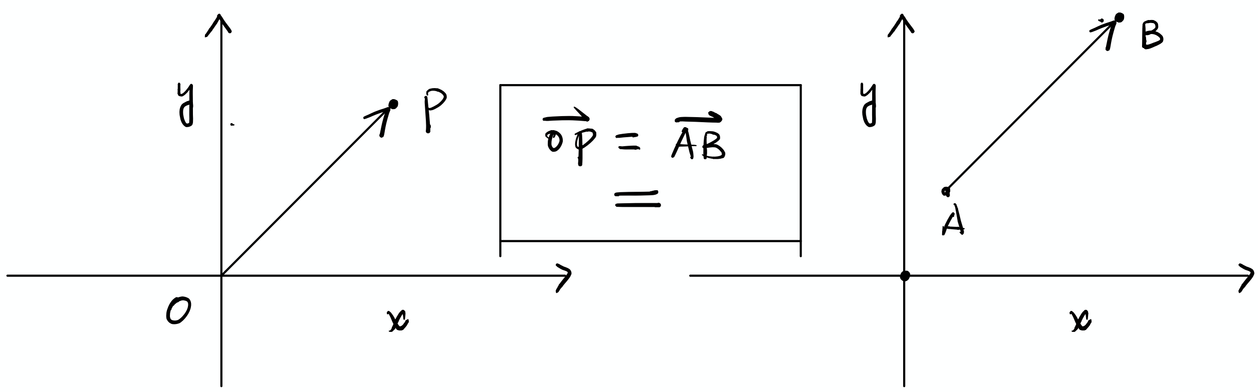
① 代数式表示 与 矢量表示

从 $z = x+yi$，可以看出，粗略来看，$z \sim (x,y) \in \mathbb{R}^2$。



z 可用原点 ⟶ (x,y) 的矢量表示

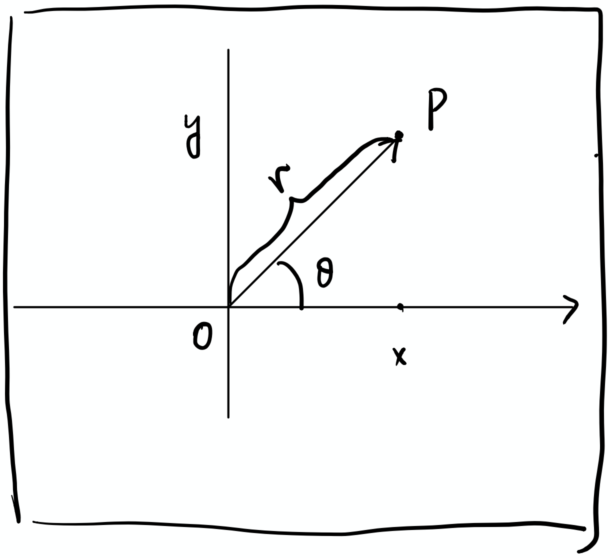
允许矢量平移，即作为复数



复数加减法 == 相应矢量加减法（高中知识）

② 三角表示、指数表示

$$\boxed{x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.}$$



⇒ 三角表示

$$\boxed{\begin{aligned} z &= r\cos\theta + i r\sin\theta. \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}}$$

定义 $e^{i\theta} \doteq \exp(i\theta) \equiv \boxed{\cos\theta + i\sin\theta.}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

exponential

⇒ 指数表示 $\boxed{z = re^{i\theta}.}$

如何理解定义 $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n \quad \text{形式上作 泰勒展开} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} i^{2k}\theta^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1}\theta^{2k+1} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

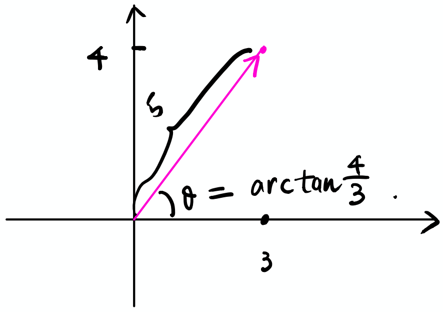
定义：对于 $z = r\cos\theta + r\sin\theta\, i = re^{i\theta}$.

称
r: z 的模 或 绝对值	, $\lvert z\rvert$
θ: z 的辐角	, $\arg z$

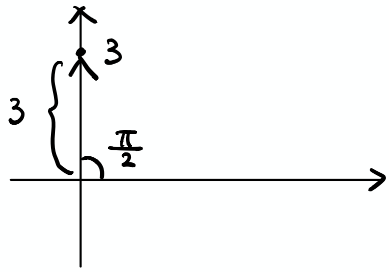
均为实数

例子.

$$
\begin{aligned}
z &= 3+4i \\
&= 5\cos\left(\arctan\frac{4}{3}\right) + 5\sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right) i \\
&= \underbrace{5}_{\text{模}}\, e^{i\underbrace{\left(\arctan\frac{4}{3}\right)}_{\text{辐角}}}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
z = 0+3i &= 3\cos\frac{\pi}{2} + 3i\sin\frac{\pi}{2} \\
&= 3e^{i\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}
$$



辐角多值性. 及 主值分支

注意. 三角函数具有周期性.

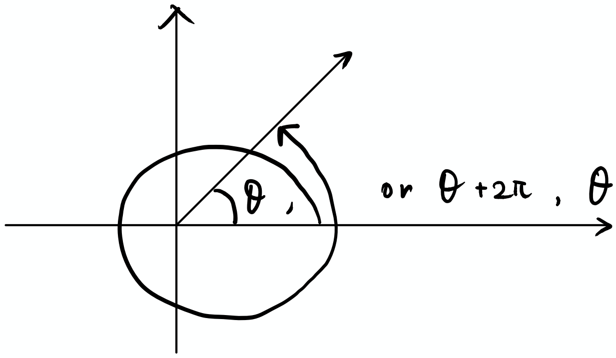
$$\cos(\theta+2\pi n) = \cos\theta, \quad \sin(\theta+2\pi n) = \sin\theta$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\theta+2\pi n) + i\sin(\theta+2\pi n) &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{i(\theta+2\pi n)} &= e^{i\theta}. \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ 同一个 z，可以对应多个幅角

$$\boxed{\cdots, \theta-4\pi, \theta-2\pi, \theta, \theta+2\pi, \theta+4\pi, \cdots}$$



or $\theta+2\pi$, $\theta-2\pi$, $\cdots$

为了明确，可人为约束 θ 的范围，比如

$0 \le \theta < 2\pi$ $\qquad$ $-\pi < \theta \le \pi$

定义：每一个这样的约束/范围指定 称为一个 主值分支.

此外.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} 2\cos\theta &= e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ 2i\sin\theta &= e^{i\theta} - e^{-i\theta} \end{aligned}} \right.$$

特殊值：

利用指数表示，可以得到有趣的特殊值.

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0i = -1$$

$$\Leftrightarrow\ e^{\pi i} + 1 = 0.\ \text{(Euler 公式)}$$

$$\Leftrightarrow\ e^{(2k+1)\pi i} + 1 = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$e^{2\pi i n} = \cos 2\pi n + i\sin 2\pi n = 1 + 0i = 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} = 0 - i = -i.$$

可用于计算奇怪的表达式.

③ 指数表示下的运算

定理：对 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ，$r_2 \neq 0$

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$$

证明：$z_1 = \overbrace{r_1\cos\theta_1}^{\text{实部}} + i\overbrace{r_1\sin\theta_1}^{\text{虚部}}$ ，$z_2 = \overbrace{r_2\cos\theta_2}^{\text{实部}} + i\overbrace{r_2\sin\theta_2}^{\text{虚部}}$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1\cos\theta_1 r_2\cos\theta_2 - r_1\sin\theta_1 r_2\sin\theta_2 + i(r_1\cos\theta_1 r_2\sin\theta_2 + r_1\sin\theta_1 r_2\cos\theta_2)$$

利用三角函数的性质

$$= r_1 r_2\cos(\theta_1+\theta_2) + r_1 r_2 i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

三种表示法之间的关系

$$\boxed{z = x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}}$$

显然有 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$\boxed{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}}$$

check

显然有 $|z| = \sqrt{zz^*}$ 因此我们时常写

$$\boxed{zz^* = |z|^2}$$

显然 $|z| = |-z|$, $|e^{i\theta}| = 1$.

以及 $|e^{i\theta}z| = |z|$.

显然 $|\mathrm{Re}\,z| = |z|\cos\theta \leq |z|$

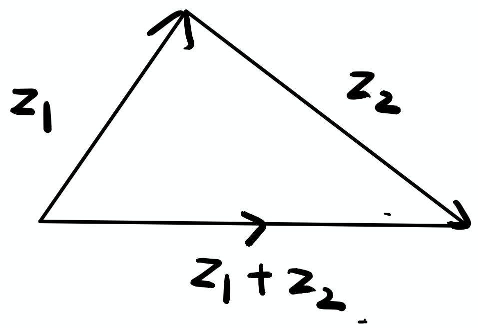
$|\mathrm{Im}\,z| = |z|\sin\theta \leq |z|$

三角不等式.

由于复数加减法与平面矢量加减法是一样的. 因此.

$|z_1| + |z_2| \geq |z_1+z_2|$

"两边长度之和 $\geq$ 第三边长度"



$|z_1+z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

"两边边长之差 $\leq$ 第三边长.

证明.

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(z_1^*+z_2^*) = |z_1|^2+|z_2|^2 + z_1^*z_2 + z_1z_2^*$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + r_1r_2\left(e^{i(\theta_2-\theta_1)} + e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\Big\downarrow \text{凑平方.}$$

$$= \left(|z_1| + |z_2|\right)^2 + 2|z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1-\theta_2) - 1\right]$$

$$\leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

$\Rightarrow |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$