d' Alembert 的收敛半径：如果 $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|}_{\text{普通极限}} \equiv l \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 则收敛半径为 $R=\frac{1}{l}$ [redacted]

基准例子：$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k$

$$\left|\frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^k}\right| = |\lambda| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right| = l = |\lambda| \Rightarrow R=\frac{1}{|\lambda|}$$

例子：$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$ 与 $S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k\lambda_k z^k$

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)}{k}\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|}_{\frac{1}{R_2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right| = 1\cdot\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|}_{\frac{1}{R_1}}$$

例子：$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k^k}z^k$

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{k!} = \frac{(k+1)\ k^k}{(k+1)\ (k+1)^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} \Rightarrow R=e.$$

即 $k\to\infty$ 时，$\frac{k!}{k^k}$ 一定程度上像 $\left(\frac{1}{e}\right)^k$

的确有 Stirling 渐近公式

$$\frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

在收敛圆内，幂级数的和函数解析，求导和积分均与无穷求和交换，且收敛半径不变。

说明：由于幂级数在收敛圆内闭一致收敛

$\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ 和函数的导数、积分 = 逐项求导、积分的和。

考虑 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (z-a)^k$

逐项求导：$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k\lambda_k}_{\lambda_k'} (z-a)^{k-1} \Rightarrow \sqrt[k]{\lambda_k'} = \sqrt[k]{k\lambda_k}$

$\Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k\lambda_k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\lambda_k}$，$\boxed{\text{因 } \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k} = 1}$

$\Rightarrow$ 收敛半径不变。

逐项求积分也一样。

关键：Weierstrass 逐项求导积分

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1.$$

Taylor展开

定理.

考虑 $N(a,R)$ 内解析的 f. 则对 $\forall\ z \in N(a,R)$

涉及 ζ, a, z 3个量

ζ：哑变量

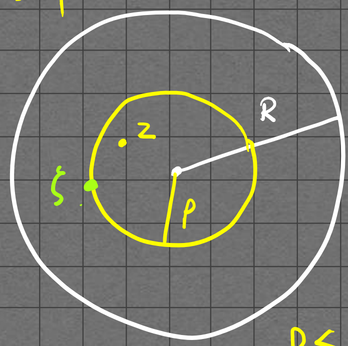
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial N(a,\rho<R)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right](z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\boxed{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}(z-a)^n.$$

Taylor系数　展开中心.

高阶导数公式(第二章)

说明: $N(a,R)$ 内解析 $\Rightarrow$ Cauchy 积分公式.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial N(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \quad \rho<R.$$



$\rho<R$.

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial N(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}d\zeta.$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial N(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}\frac{1}{\zeta-a}d\zeta.$$

这里要求 $|z-a|<\rho<R$

利用 $\sum_k\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k$ 绝对收敛

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial N(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k d\zeta.$$

目标 求和移到积分号外

要移动 $\oint d\zeta$ 到求和号内: 需要 $\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k}_{F_k(\zeta)}$ 作为 ζ 的级数

在 $\partial N(a,\rho)$ 一致收敛:

$$|F_k(\zeta)|=\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|}\frac{|z-a|^k}{\rho^k}\le \underbrace{M\frac{|z-a|^k}{\rho^{k+1}}}_{\text{与}\zeta\text{无关的界}},$$

其中 M 是 $|f(\zeta)|$ 在 $\partial N(a,\rho)$ 上的界.

又：$|z-a|<\rho \Rightarrow$ 幂级数收敛

$\xrightarrow[\text{M-判敛}]{\text{Weierstrass}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi-a}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k$ 沿 $\partial N(a,\rho)$ 一致+绝对收敛.

$\oint\Sigma=\Sigma\oint$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial N(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{\xi-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k d\xi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{k!}\,\frac{k!}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(z-a)^k.$$

关键：给定函数和展开中心 Taylor展开唯一.

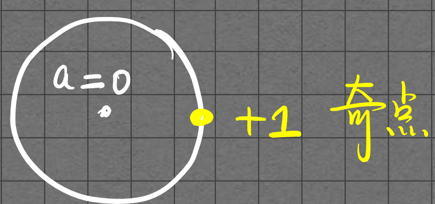
Taylor系数很难算。

通常：Taylor展开级数的收敛半径

～ 中心 到最近奇点的距离.

例：

$$\frac{1}{1-z} \overset{a=0}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(1)(z-0)^k$$



$z=+1$ 是奇点。 收敛半径：$|\underbrace{1}_{奇}-\overbrace{0}^{心}|$

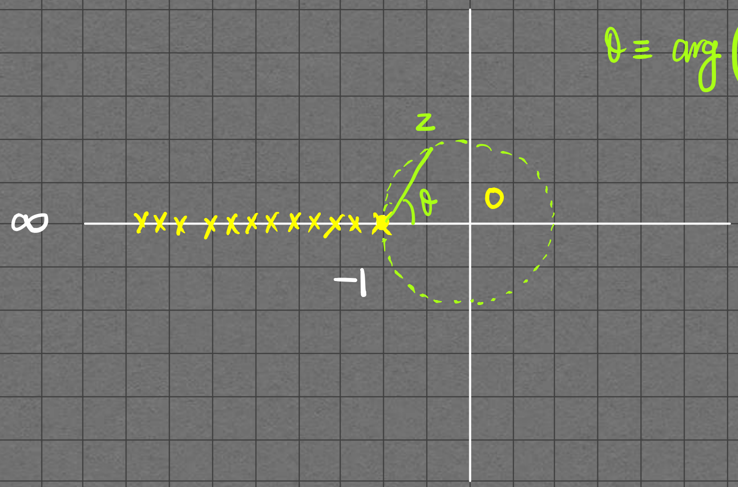
常见函数的Taylor展开

单值解析函数 跟实函数的常见Taylor展开一样.

$$e^z, \qquad \frac{1}{z-a} \qquad \sin z \quad \cos z$$

注意多值函数的Taylor展开要指定单值分支.

支点为 $z=-1$ 与 $z=\infty$, $z+1 = z-(-1)$



$$\theta \equiv \arg(z-(-1)) \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

$$\arg(0-(-1)) = 2\pi k$$

$$\ln(1+z) = \underbrace{2\pi k i}_{\text{控制单值分支}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \frac{1}{n} z^n}_{\xrightarrow[z\to 0]{} 0} \xrightarrow{z\to 0} 2\pi k i$$

无穷阶可导实函数与解析函数

同是无穷阶可导实函数的Taylor展开的性质要诡异得多.

比如：$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的处处无穷阶可导函数.

特别地：

$$f(0)=0, \quad f'(0)=0, \quad f''(0)=f'''(0)=\cdots=0.$$

$\Rightarrow$ 以 $a=0$ 为展开中心的实Taylor展开为

$$\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x-0)^n \underline{=0. \neq f(x). \ \forall x\neq 0 !!}$$

$f(x)$ 的Taylor级数收敛，但和函数不是 $f(x)$！

物理中若 $x=$ 某种实耦合常数，

则任何形如 $\underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\text{非微扰效应.}}$ 的效应都无法通过 $\underbrace{\text{小 } x \text{“级数展开”}}_{\text{微扰展开.}}$ 来逐阶研究.

但是，作为复变函数 $e^{-\frac{1}{z^2}}$ 在 $z\to 0$ 极限不存在：

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} e^{-\frac{1}{x^2-y^2+2ixy}} = \lim_{y\to 0} e^{+\frac{1}{y^2}} = e^{+\infty} = \infty.$$

沿虚轴

因此在 $z=0$ 处是本性奇点．不能泰勒展开．

解析延拓

设 f 在区域 D 中解析. 若 $\exists$ 区域 $\tilde{D} \supset D$. 以及 $\tilde{f}$ 在 $\tilde{D}$ 上解析. 并且在 $f(z\in D) = \tilde{f}(z\in D)$ 则称 $\tilde{f}$ 为 f 在 $\tilde{D}$ 内的解析延拓.

解析延拓是唯一的.

例子:

一致在 D 上

$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 在 $D = N(0,1)$ 内闭一致收敛到和函数 $S(z)$.

$\tilde{S}(z) \equiv \frac{1}{1-z}$ 在 $\tilde{D} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ 解析 显然

$$\tilde{S}(z\in D) = S(z\in D)$$

$\Rightarrow \frac{1}{1-z}$ 是和 $S(z)$ 的解析延拓

例子: $\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$ on $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$

$\tilde{\zeta}(z)$ on $\tilde{D} = \mathbb{C} \setminus \{+1\}$.

例子：$\Gamma(x) = (x-1)!$，且 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ for $x \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\tilde{\Gamma}(z) \overset{\mathrm{Re}\,z>0}{\equiv} \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \quad \text{on} \quad \tilde{D} = \{z \mid \mathrm{Re}\,z > 0\}.$$

$$\Rightarrow \tilde{\Gamma}(z+1) = \int_0^\infty x^z e^{-x} dx = -\int_0^\infty x^z d e^{-x}$$

$$= \left(-x^z e^{-x}\Big|_0^\infty\right) + z\int_0^\infty e^{x} x^{z-1} dx$$

$$\overset{\mathrm{Re}\,z>0}{=} 0 + z\Gamma(z).$$

进一步 $\tilde{D} = \{z \mid \mathrm{Re}\,z>0\}$ 可延拓到 $\mathbb{C} - \{0,-1,-2,\cdots\}$

上一章：幂级数与Taylor展开

$$\lambda_0 + \lambda_1(z-a) + \lambda_2(z-a)^2 + \cdots$$

$$f(z) = f(a) + f^{(1)}(a)(z-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(z-a)^2 + \cdots$$

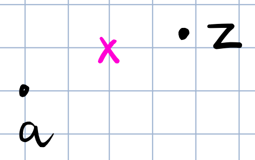
一致收敛区、和函数解析区：一个完整的开圆盘 D

中心 a 与采样点 z 同属盘状解析区

不足

ⓐ 但现实生活中，往往需要将中心 a 放在奇点附近.

⇒ z 与 a 之间可能隔了奇点，



ⓑ 场论中，正幂项相当于"湮灭算符"用于描述粒子的生成.

⇒ 还需要"生成算符".

双边幂级数

① 考虑

$$L(z) \equiv \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}}_{S_2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k}_{S_1}$$

称 双边幂级数.　　收敛区 $N(a, R_1)$，和 $s_1(z)$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k} \xlongequal{\tilde{z}=\frac{1}{z-a}} \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\tilde{z}^k \Longrightarrow \tilde{z} \text{ 的幂级数.}$$

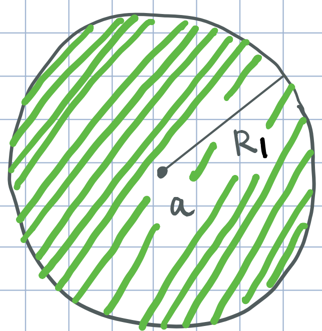
→ 设收敛区 $N_{\tilde{z}}(0, \tilde{R}_2) \Longleftrightarrow z$ 的收敛区 $|z-a| > \frac{1}{\tilde{R}_2} \equiv R_2$

$$S_2(z) \longrightarrow s_2(z)$$

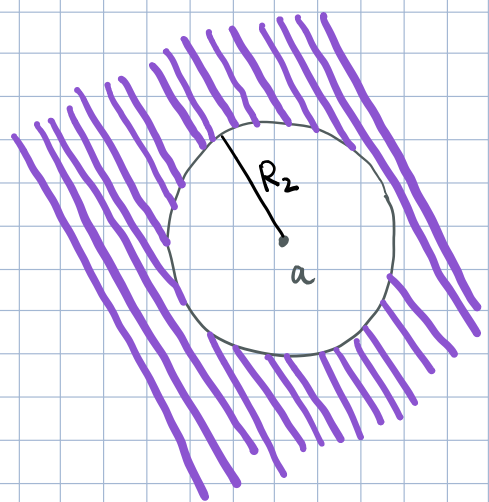
$\sim \overline{N(a, R_2)}^c$ ↑ 补集

S_1 与 S_2 在收敛区域 $N(a, R_1)$、$\overline{N(a, R_2)}^c$ 分别

绝对收敛且内闭一致收敛到 $s_1(z)$ $s_2(z)$



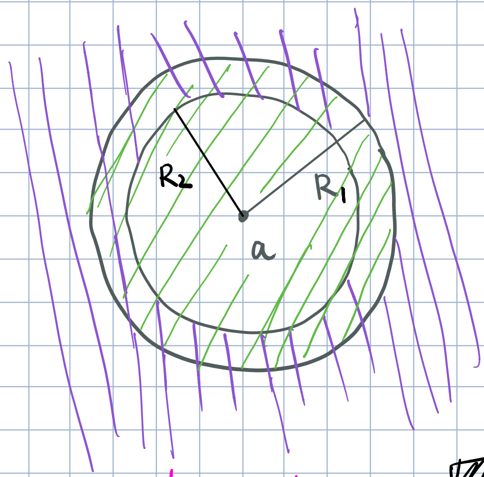
S_1 收敛区



S_2 收敛区

② $R_1 > R_2$ 有公共收敛区域"收敛环"

定义



外 R_1 内 R_2

$R_1 < R_2$ 两个收敛区完全无重叠

双边级数处处发散

$R_1 = R_2$ 两个收敛区完全无重叠

但 $|z-a| = R_1$ 上可能有收敛点.

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow R_1 = 1, \tilde{R}_2 = 1 = R_2$

$\Rightarrow$ 收敛环 $= \phi \Longrightarrow$ 单位圆内外 处处发散,

圆上 也发散. 但 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{i\theta})^n = 2\pi\delta(\theta)$.

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

令 $\tilde{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \tilde{z}^n$

$\xrightarrow{\text{Cauchy}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\lambda|^n} = |\lambda| = \ell \Rightarrow \tilde{R}_2 = \frac{1}{|\lambda|}$

即收敛半径 $R_2 = \frac{1}{\tilde{R}_2} = |\lambda|$

$\Rightarrow S_2$ 级数 收敛区 $z > R_2 = |\lambda|$

当 $|\lambda| < 1$, 有收敛环 为 $|\lambda| < z < 1$

例. $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 z^n}}_{S_2}$

$$\Rightarrow S_1: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n \Rightarrow l_1 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = 1 \Rightarrow R_1 = 1$$

$(\sqrt[n]{n})^2$

$$S_2: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^{-n} \Rightarrow \tilde{l}_{\frac{1}{z}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = 1 \Rightarrow \tilde{R} = 1 \Rightarrow R_2 = 1$$

$\Rightarrow R_1 = R_2$ ，收敛环 $= \phi$

在 $|z| = 1$ 圆周上.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|z^n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|z^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\Big\}$ $S_1 + S_2$ 在单位圆上绝对收敛.

回忆：$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}$ ，$\operatorname{Re} z > 1$ 是收敛区

$\zeta(z=2) = \frac{\pi^2}{6}.$

③ 双边幂级数的性质：

ⓐ 在收敛环内绝对收敛于 $S_1(z)+S_2(z)$，

在环内内闭一致收敛（在所有子闭环上一致收敛）

ⓑ 和函数 $S_1(z)+S_2(z)$ 在收敛环内解析（Weierstrass）.

ⓒ 可以逐项求导，积分.

例. $S=S_1+S_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k z^k+\sum\limits_{k=1}\lambda_2^k z^{-k}$.

$\Rightarrow$ $R_1=\dfrac{1}{|\lambda_1|}$ $\qquad R_2=|\lambda_2|$

$\Rightarrow$ $R_1>R_2$ 时，即 $|\lambda_1\lambda_2|<1$ 时 有收敛环

$$|\lambda_2|<z<\frac{1}{|\lambda_1|}$$

在环内： $S_1(z)=\dfrac{1}{1-\lambda_1 z}$ $\qquad S_2(z)=\dfrac{\lambda_2 z^{-1}}{1-\lambda_2 z^{-1}}=\dfrac{\lambda_2}{z-\lambda_2}$

$\Rightarrow$ 环内： $S_1(z)+S_2(z)=\dfrac{1}{1-\lambda_1 z}+\dfrac{\lambda_2}{z-\lambda_2}=\dfrac{(1-\lambda_1\lambda_2)z}{(1-\lambda_1 z)(z-\lambda_2)}$

解析函数的 Laurent 展开

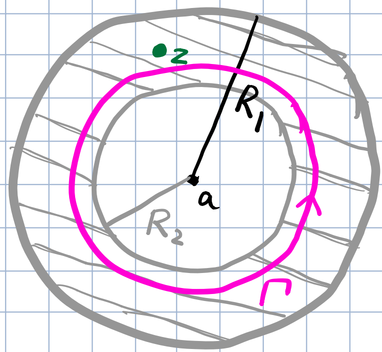
$R_2=0$ 时 $H=N(a,R_1)\setminus\{a\}$ “a的去心邻域”

① 环 $H: R_2<|z-a|<R_1$ 内解析的函数 $f(z)$

可展开为双边幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi \quad ,\forall z\in H,\ \Gamma\subset H.$$

解析区 H



证明概要:

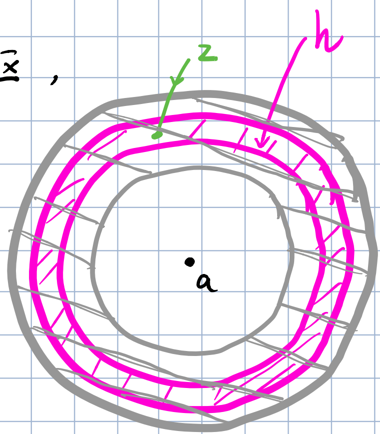
ⓐ 环 H 内有闭子环 h 作为复连通闭域解析区, 包含z点

可用 Cauchy 积分公式

$$f(z\in H)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial h}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

∂h: 内圈 外圈.

解析区 H



ⓑ $$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-a)-(z-a)}=\frac{1}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \quad \text{or} \quad \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{\frac{\xi-a}{z-a}-1}.$$

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \overset{\xi\in\text{外圈}}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k$$ 绝对收敛

$$\frac{1}{\frac{\xi-a}{z-a}-1} \overset{\xi\in\text{内圈}}{=\!=} -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^k$$ 绝对收敛.

ⓒ 检查上述展开的在内外圈一致收敛性

ⓓ $\oint_{内外圈}$ 移入两个无穷求和内.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{内}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^k}d\xi\right](z-a)^k}_{(z-a)\text{负幂项}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{外}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^k}d\xi\right](z-a)^k.$$

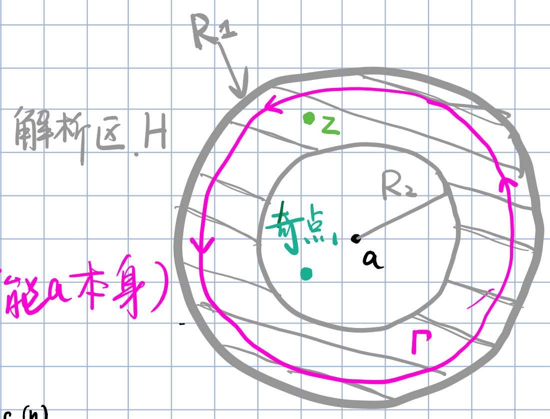
$(z-a)$ 非负幂项.

ⓔ 解析区 H 内 围线连续形变积分不变：内外圈 $\longrightarrow \Gamma \subseteq H$.

关键元素. H、a, z、Γ

ⓐ $f(z)$ 解析区 H，Laurent 展开中心 $a \notin H$. 即 a 可以是非解析点，

但 $z \in H$, $\Gamma \subset H$.



ⓑ $C_{n\geq 0} \overset{\text{一般来说}}{\neq} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

因为内圆 $N(a, R_2)$ 内往往会有奇点（可能a本身）

高阶导数公式. $\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta \;\overset{\Gamma\text{所围区域}}{\underset{\text{是}f\text{的解析区}}{=\!=\!=}}\; f^{(n)}(a)$

公式条件被破坏，若 a 是奇点，则 $f^{(n)}(a)$ 也无从谈起

ⓒ 若有任一 $C_{-n} \neq 0$, $n>0$, $\Longleftrightarrow$ $\overline{N(a, R_2)}$ 内有奇点.

但 a 不一定是奇点.

(b.1) $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ 在 $\underset{R_2}{\overset{}{0}} < |z-a| < \underset{R_1}{+\infty}$ 内解析 于是环

内有 Laurent 展开.

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k (z-a)^k \qquad C_{k=-1} = 1,\ \text{others}\ C_k = 0.$$

a 的确是奇点.