物理中级数

把无穷个"东西"加起来：数、算符、几何对象...

- 微扰展开
- 非微扰展开
- 特殊函数定义：ϑ函数、Bessel，hypergeometric
- 场论算符，$\mathcal{O}(z) = \sum_n \mathcal{O}_n(z) z^{-n-h}$

复常数项级数

定义：无穷求和 $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ 称为复常数项级数，其中 $c_k \in \mathbb{C}$.

定义：级数 S 收敛与发散.

令 $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k$，若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在且为有限值 s，则 S 收敛于 s

否则称 S 发散.

$c_k = a_k + ib_k$. 则 $\sum c_k$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum a_k$ 与 $\sum b_k$ 都收敛.

Cauchy 判敛法： S 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon > 0$. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > n_\epsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$

有 $|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| < \epsilon$.

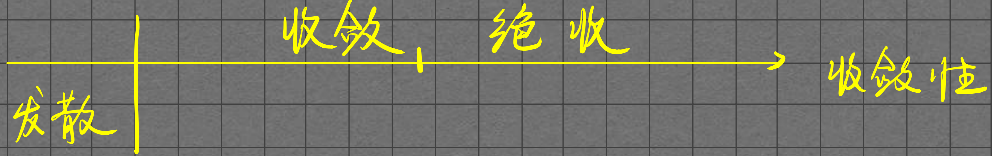
ⓐ 直观来说就是部分和随着 n 增大振荡越来越小

ⓑ 直观，适用于任何复级数判敛 但难用.

定义：绝对收敛

$S \equiv \sum_k c_k$. 若正项级数 $\sum_k |c_k|$ 收敛. 则称 S 绝对收敛.

显然，绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛. (Cauchy 判敛 + 三角不等式)



$\boxed{\text{重要判敛法}}$

$$\text{① Abel 引理} \quad \xrightarrow{\text{Cauchy}} \text{② Abel 判敛法}, \qquad \text{① Abel 引理} \xrightarrow{\text{Cauchy}} \text{③ Dirichlet 判敛法}$$

① Abel 引理. 略

若实数列 $\{r_k\}_{k=1}^n$ 单调，而复数列 $\{c_k\}_{k=1}^n$ 的部分和数列 $\{\sum_{i=1}^k c_i\}_{k=1}^n$ 有上界 M，则

$$\left|\sum_{k=1}^n r_k c_k\right| \leq M(|r_1| + 2|r_n|)$$

② Abel 判敛法

若 $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ 单调有界 而 $\sum_{k=1}^\infty c_k$ 收敛. 则 （c_k 必趋 0.）

$$\sum_{k=1}^\infty r_k c_k \text{ 收敛.}$$

说明：r_k 单调有界 $\Rightarrow$ $r_k \to \infty$ 逼近定值 r_∞.

$$\Rightarrow \sum_k r_k c_k \sim (\text{前面有限项}) + r_\infty \sum_k c_k$$

证明：$\sum_{k=1}^\infty c_k$ 收敛. 则对 $\forall \epsilon$. $\exists n_\epsilon > 0$. s.t. 对 $\forall n > n_\epsilon$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| < \epsilon.$$

即 $\{c_k\}_{k=n+1}^{n+p}$ 数列和有上界 ϵ 于是

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} r_k c_k\right| < \epsilon(|r_{n+1}| + 2|r_{n+p}|).$$

又 r_n 有界 K. 于是 $< \epsilon \cdot 3K \Rightarrow$ 收敛.

略

Dirichlet 判敛法

若实数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调趋 0. 而 $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的部分和 $\{\sum_{k=1}^{n} c_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有界.

则 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$ 收敛.

说明：部分和 $\sum_{k=1}^{n} c_k$ 有界，即使不收敛，也只是在做有限幅度振荡；引入 r_k 作为衰减因子. 迫使 $\sum_k r_k c_k$ 部分和振荡越来越小 $\Rightarrow$ 收敛

证明：

$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调趋 0. $\Leftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon$. $\exists n_0$, s.t. 对 $\forall n$ 有 $|a_n| < \epsilon$.

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ 部分和有界. $\Leftrightarrow \exists M>0$, s.t. $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k < M$. , $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k = |S_{n+m} - S_n| < |S_{n+m}| + |S_n| < 2M.$$

Abel 引理：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m+n} r_k c_k\right| \leq 2M\,(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < 2M \cdot 3\epsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+n} r_k c_k \text{ 收敛}.$$

略

总结：Abel 引理 + Cauchy 判敛法 $\longrightarrow$ Abel / Dirichlet 判敛法.

适用于复合级数 $\sum_k \underset{\uparrow \atop 实}{r_k} \underset{\uparrow \atop 复}{c_k}$.（书上写 $\sum_k a_k \alpha_k$）

Abel： r_k 单调有界， $\sum_k c_k$ 收敛（暗示 $c_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$，负责压制）

↓强化　　↓弱化

Dirichlet： r_k 单调趋 0， $\sum_k c_k$ 有界

（负责压制）

回顾：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 称为调和级数，发散：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O(\frac{1}{n})$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}\begin{cases}\text{发散} & 0<p<1\\ \text{收敛} & p>1\end{cases}$$

方法：积分判别法 和 $\frac{1}{x^p}$ 的单调性. $(p>1)$.

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x^p}dx$$

例：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{+ik\theta}}{k^s}$，for fixed $0<\theta<2\pi$ $\quad s>0$.

(1) $s>1$：$\sum_k\left|\frac{e^{ik\theta}}{k^s}\right|=\sum_k\frac{1}{k^s}$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数绝对收敛

(2) $0<s\leqslant1$：$\frac{1}{k^s}$ 发散. $\Rightarrow$ 不绝对收敛

是否收敛？

考虑 $c_k\equiv e^{ik\theta}$，$r_k\equiv\frac{1}{k^s}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}\right|=\left|\frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}\right|\ (\text{等比求和})$$

$$=\left|\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}e^{\frac{i}{2}n\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{+\frac{i\theta}{2}}}\left(e^{-\frac{i}{2}n\theta}-e^{+\frac{i}{2}n\theta}\right)\right|$$

$$\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}\right|=\left|\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$ 有界 for fixed $\theta\neq0,2\pi$

$\xrightarrow[\frac{1}{k^s}\text{ 单调趋 }0.]{\text{Dirichlet}}$ 收敛 $\Rightarrow$ 条件收敛

复函数项级数

$S(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 即级数每项都是相同定义域的复变函数

部分和：$S_n(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

定义：在一点处收敛

给定 $z \in$ 定义域，若 $\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ 存在且是有限值 $s(z)$，则称 $S(z)$ 在 z 处收敛于 $s(z)$

定义：在定义域上收敛.

$\forall z \in$ 定义域，若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在且是有限值 $s(z)$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在定义域收敛.

$s(z)$ 称为 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 和函数（对其性质一无所知）

用 $\epsilon - n$ 语言：

与z有关

$\sum_k f_k(z)$ 在 D 内收敛，说明对 $\forall \epsilon > 0$，$\forall z \in S$. $\underbrace{\exists\, n_\epsilon(z) \in \mathbb{N}}_{\text{刻画“足够多的项数”}}$

s.t. 对 $\forall\, n > n_\epsilon(z)$ 有

$$\left| S_n(z) - s(z) \right| < \epsilon$$

some fixed fn

定义：一致收敛.

与z无关的自然数

设在定义域上有函数 $S(z)$，s.t. 对 $\forall \epsilon > 0$. $\exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N}$. s.t. 当 $n > n_\epsilon$ 有

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon$$

在定义域上处处成立，则称 $S(z)$ 一致收敛于 $s(z)$.

ⓐ 收敛 — 一致收敛 → 收敛性

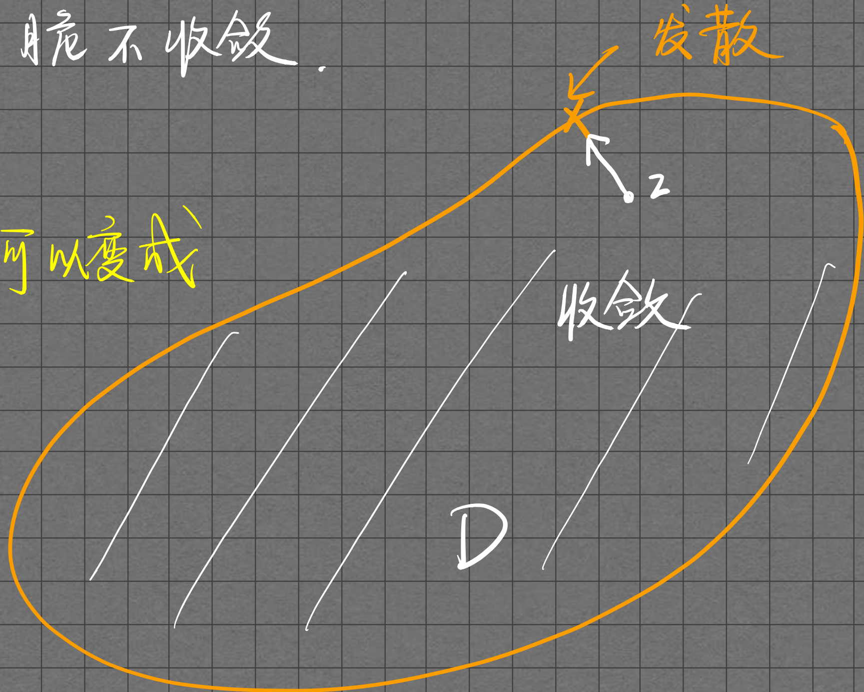
ⓑ 若 $\sum_k f_k(z)$ 在 D 内收敛但不一致收敛，说明当 ϵ 大小时.

$n_\epsilon(z)$ 在 D 内没有上限、找不到统一的 n_ϵ

ⓒ 若 $\sum_k f_k(z)$ 在 D 内收敛但不一致收敛，说明

$\sum_k f_k(z)$ 在 $z \to \partial D$ 某处 时 收敛性越来越差.

在该处干脆不收敛.



ⓓ 换个定义域可以变成一致收敛

Cauchy一致判敛法：$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上一致收敛

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon>0$，$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$，s.t. 当 $n>n_\epsilon$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \epsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}，\forall z \in E \text{ 成立}$$

略.

证明：注意到 $\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) = S_{n+p}(z) - S_n(z)$，则我们要分析

$|S_{n+p}(z) - S_n(z)|$，when n 足够大，及 $p>0$.

而收敛性 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \to S(z)$ 暗示了 $S_{n+p} - S(z) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 提示我们

$$|S_{n+p}(z) - S(z) - S_n(z) + S(z)|$$

必要性：一致收敛 $\Rightarrow$ $\exists$ 函数 $S(z)$，s.t. 对 $\forall \epsilon$，$\exists n_\epsilon > 0$，s.t. 当 $n>n_\epsilon$，及 $\forall p>0$，有

$$|S_n(z) - S(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |S_{n+p}(z) - S(z)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow |S_{n+p}(z) - S(z) - S_n(z) + S(z)| < |S_n(z) - S(z)| + |S_{n+p} - S(z)|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

充分性：若 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \epsilon$ 成立 for $\forall n>n_0$，$p>0$. 则在每一点 z 处 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \longrightarrow S(z)$，又

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \epsilon$$

$$\xrightarrow{p\to\infty} |S(z) - S_n(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in E$$

一致 vs 绝对

- $\xrightarrow{\text{收敛}} \mid \xrightarrow{\text{一致收敛}}$ 收敛性
- $\xrightarrow{\text{收敛}} \mid \xrightarrow{\text{绝对收敛}}$ 收敛性

} 收敛性哪个强

复习：正项级数比较判敛法.

考虑正项级数 $\sum_k a_k$，$\sum_k b_k$. 若 $\sum_k b_k$ 收敛，且有逐项不等式成立.

$$a_k \le b_k \quad , \forall k$$

则 $\sum_k a_k$ 收敛.

defined on $\mathbb{C}$.

例：$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+g(z,\bar{z})}$ 其中 $g(z,\bar{z}) \ge 0$ $\mathbb{C}$中一致收敛，不绝对收敛

目标：分析 $|S_{n+N} - S_n| = \left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{(-1)^{k-1}}{k+g} \right|$

① $N = 2p$

$$|S_{n+2p} - S_n| = \left| \overset{①}{\frac{(-1)^n}{n+1+g}} - \overset{②}{\frac{(-1)^n}{n+2+g}} + \cdots + \overset{2p-1}{\frac{(-1)^n}{n+2p-1+g}} - \overset{2p}{\frac{(-1)^n}{n+2p+g}} \right|$$

$$= \left| \underbrace{\frac{1}{n+1+g} - \frac{1}{n+2+g}}_{\ge 0} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n+2p-1+g} - \frac{1}{n+2p+g}}_{\ge 0} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1+g} - \frac{1}{n+2+g} + \cdots + \frac{1}{n+2p-1+g} - \frac{1}{n+2p+g}$$

$$= \frac{1}{n+1+g(z)} - \frac{1}{(n+2+g(z))(n+3+g(z))} - \cdots - \frac{1}{(n+2p-2+g(z))(n+2p-1+g(z))}$$

$$- \frac{1}{n+2p+g(z)}$$

对 $\forall z$

$$< \frac{1}{n+1+g(z)} \boxed{< \frac{1}{n}}$$

② 当 $N = 2p+1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+2p-1} \frac{(-)^{k-1}}{k+g(z)} \right|$$

$$= \left| \underbrace{\frac{1}{n+1+g} - \frac{1}{n+2+g}}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n+2p-1+g} - \frac{1}{n+2p+g}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{n+2p+1+g}}_{\geq 0} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1+g} - \frac{1}{n+2+g} + \cdots + \frac{1}{n+2p-1+g} - \frac{1}{n+2p+g} + \frac{1}{n+2p+1+g}$$

$$= \frac{1}{n+1+g(z)} - \frac{1}{(n+2+g(z))(n+3+g(z))} - \cdots - \frac{1}{(n+2p-2+g(z))(n+2p-1+g(z))}$$

$$\underbrace{- \frac{1}{n+2p+g(z)} + \frac{1}{n+2p+1+g(z)}}_{\leq 0.}$$

$$= \frac{1}{n+1+g(z)} + (\leq 0)$$

$$< \frac{1}{n}$$

不管什么 z

即 $n\to\infty$ 时 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-)^{k-1}}{k+g(z)}\right|$ 都很小：

对 $\forall\epsilon$，任选 $n_\epsilon>\frac{1}{\epsilon}$，必有 对 $\forall\ n>n_\epsilon$，$\forall p\in\mathbb{N}$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-)^{k-1}}{k+g(z)}\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\epsilon.$$

，对 $\forall z$ 成立.

$\Rightarrow$ 一致收敛.

但是该级数不是绝对收敛：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-)^{k-1}}{k+g}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+g(z,\bar z)}$$

而对 $\forall z$. 选任意实数 $\lambda>g(z)+1$ 必有

$$\lambda>\frac{g(z,\bar z)}{k}+1 \iff \lambda k>g(z,\bar z)+k \iff \frac{1}{k+g}>\frac{1}{\lambda}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+g(z)}>\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

而后面正项级数发散. 因此的确不绝对收敛.