复数乘方、开方

$$\boxed{z^n \equiv \underbrace{z\cdot z\cdot \cdots\cdots z}_{n\text{个}} = r^n e^{in\theta}}$$

ⓐ 注意：给定一个 z，则 z^n 是唯一确定的。

定义 给定 z，$n\in\mathbb{N}$. 如果 z_0 满足 $z_0^n=z$

则 z_0 称为 z 的 n次方根，$z_0=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$

ⓐ 注意：给定 z 后，z_0 不是 唯一确定的

$$z_0\ ,\ e^{i\frac{2\pi}{n}}z_0\ ,\ e^{i\frac{2\pi\cdot 2}{n}}z_0,\cdots,e^{i\frac{2\pi\cdot(n-1)}{n}}z_0$$

都是 z 的 n次方根. 因为

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot k}\right)^n=e^{i2\pi k}=1,\quad\forall\ k=0,1,\cdots,n-1$$

n次方根的多值性来自 幅角多值性.

$$\boxed{z=re^{i\theta}=re^{i(\theta+2\pi)}=\cdots=re^{i(\theta+2\pi(n-1))}}$$

于是

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\boxed{r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}}},\text{或}\quad r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}},\text{或}\cdots r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+(n-1)2\pi}{n}}}$$

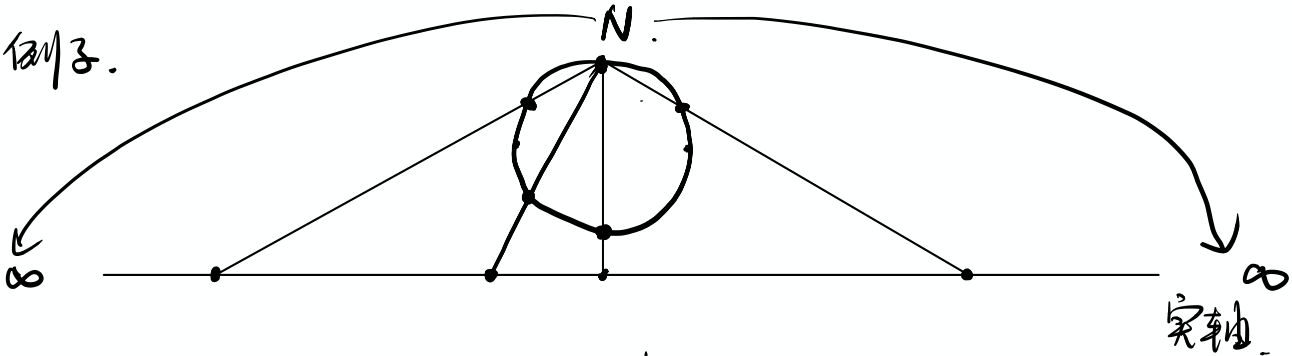
共 n 个可能的不同值.

ⓑ. 注意.

$$r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+n2\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}+2\pi i}=\boxed{r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}}}$$ 重复了

复平面与无穷远点

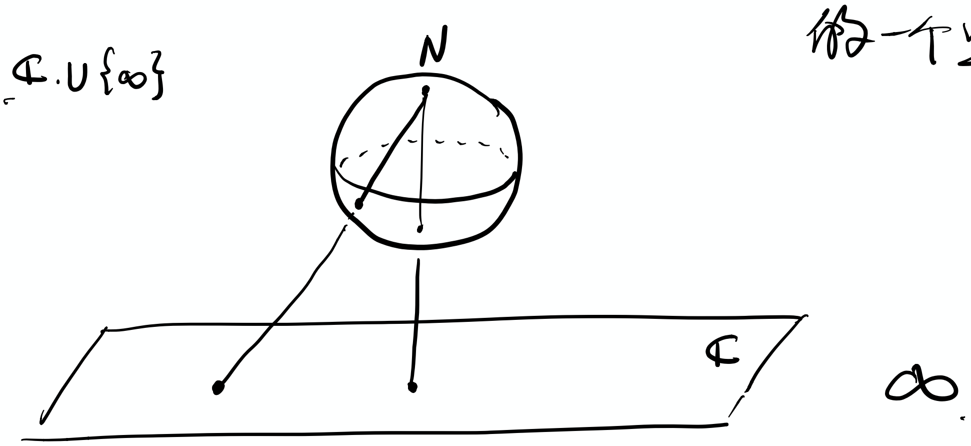
简单例子.



除了北极 N，圆上任意一点都在数轴上找到对应射影点.

⇒ 北极 N 可以对应数轴的无穷远点 → 额外增加的一个点

扩展复平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$



即平一一对应：除了北极.

⇒ 北极对应复平面的无穷远点 ∞（额外增加的一个点）.

换个角度：把复平面上任一点都可用球面上一个点来表示.

这个球面也常被称为"复球面"或"黎曼球面"

Riemann sphere

数的概念

实数、复数：加乘（交换、结合、分配）.

能否再扩充？

实数 $\longrightarrow$ 复数 : 1维 $\longrightarrow$ 2维.

弄到 3维？ 不行.

必须抛弃乘法交换律：

扩充到 4维 $h = x + iy + jz + kt$, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

（四元数, quaternions）

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

$ij = k, \cdots$

$\Longrightarrow h_1 h_2 \neq h_2 h_1$.

$h_1(h_2 h_3) = (h_1 h_2) h_3$

再扩充？ 再抛弃乘法结合律

扩充到 8维.（八元数）.

octonians

$(O_1 O_2) O_3 \neq O_1 (O_2 O_3)$

再扩充. 抛弃交错性（比结合性更弱的性质）

扩充到 16维（十六元数）

Sedenions

数与几何.

复数　　　　四元数　　　　8元数

$$\underbrace{S^1 \qquad\qquad S^3 \qquad\qquad S^7}$$

关键词：“可平行化球面” 李群

点集基础

- 复变函数的定义域是 $\mathbb{C}$ 中点集
- 需要明确 $\mathbb{C}$ 中点集性质
- 缩写符号： s.t. = "使得"（such that），　$\forall$ = "任意"（Any），　$\exists$ = "存在"（Exist）

$\in$ = "属于"（与 ϵ "epsilon" 区分）

定义：z_0 的半径为 ϵ 的邻域

$$\boxed{N(z_0,\epsilon)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<\epsilon\}}$$

ⓐ 是 $\mathbb{C}$ 的子集　　ⓑ. z_0 为中心. ϵ 为半径开圆盘

ⓒ. 是下面讨论的基础.，也可以其它凸多边形的内部定义.

点与点集的相对关系

完全包围.

定义：内点.

设 $S\subset\mathbb{C}$. 若 $z_0\in S$ 且 $\exists\,\epsilon$. s.t. $N(z_0,\epsilon)\subset S$. 则 z_0 为 S 的内点

ⓐ 对 $z\in N(z_0,\epsilon)$，则 z 必然是 $N(z_0,\epsilon)$ 的内点.

ⓑ. 刻画 z_0 被 S 完全包围（包括点自己）.

例：$S=\{|z|\le 1\}$ $z_0=1$ (No) $z_0=0.\underbrace{99999\cdots\cdots9}_{\text{有限个}}$ (Yes)

$S=\{0<|z|<1\}$, $z_0=0$. (No) $z_0\notin S$

$S=\{|z|\le 1\}\cup\{|z-\frac{1}{2}|\le 1\}$, $z_0=\frac{1}{2}$ (Yes

$S=\{|z|\le 1\}\cap\{|z-\frac{1}{2}|\le 1\}$, $z_0=\frac{1}{2}$ (No).

$S=\{|z|\le R\}$, $R>0$, z 是 S 内点，求最大的 N s.t. z^N 仍是内点

定义：边界点

与内点比较

z_0 并未脱离 S

$S\subset\mathbb{C}$, $z_0\in\mathbb{C}$. 若对 $\forall\epsilon$, $\begin{cases} N(z_0,\epsilon)\cap S\ne\emptyset \\ N(z_0,\epsilon)\not\subset S \end{cases}$ 则 z_0 为 S 的边界点.

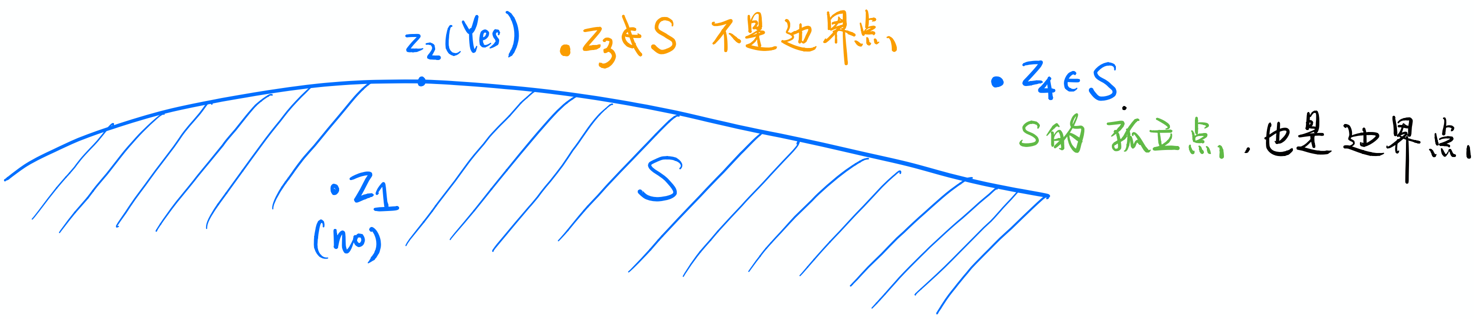
z_0 并未被 S 完全包围

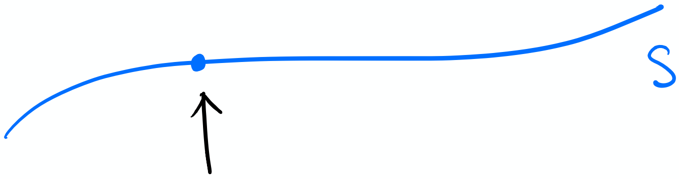
S 的全体边界点构成 S 的边界 ∂S.

刻画 z_0 与 S 若即若离.

ⓐ 边界点可以不属于 S (与内点比较)

ⓑ $S=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<\epsilon\}$，则 $z=0$ 也是一个边界点





线上点也是边界点.

例: $S = \{|z| \le 1\}$, $\partial S = \{z = e^{i\theta}, \forall \theta \in \mathbb{R}\}$

$S = \{|z| < 1\}$, $\partial S = \{z = e^{i\theta}, \forall \theta \in \mathbb{R}\}$

$S = \{|z| < 1\}$,

$x = 0.738 + 0.467i$

$x = \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{1-q}{p}}\,i$ $\quad p>0$, $0<q<1$

$x = \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{P_1}} + \sqrt{\frac{P_2 - P_3}{P_1}}\,i$, $P_1 > P_2 > P_3 > 0$.

x是否S边界点?

$S = \{|z| \le R\}$, $R \ge 0$, x是S的边界点. 问 R为何值时, x^{2018}仍是边界点.

ⓐ 不同的点集 可以有 相同的边界.

$\partial S_1 = \partial S_2 = \partial S_3$.

ⓑ 一条曲线 的边界是曲线自己.

ⓒ 一个点的 边界 是点 自己.

ⓓ 边界点 与 内点、互斥.概念.

z_0附近总有S的人

这些人不是自己

定义：聚点

设 $S \subset \mathbb{C}$，$z_0 \in \mathbb{C}$

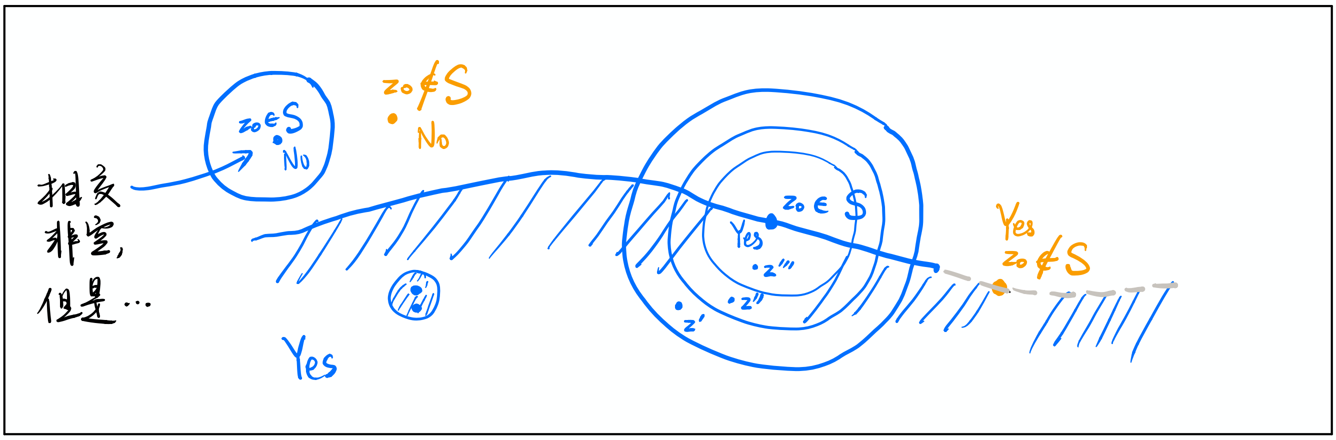
若对 $\forall \epsilon > 0$. $N(z_0, \epsilon) \cap S \neq \phi$，且包含 z_0 以外的点，则称 z_0 是 S 的聚点。

刻画 z_0 能被 S 的点，不断逼近。

即在 z_0 任意近的地方都有 S 的（除 z_0 外的）人

ⓐ 聚点可不属于 S.

ⓑ 内点 $\Rightarrow$ 聚点



例 1

设非零 z 是 $N(0,1)$ 的内点。，$S \equiv \{z^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 则原点是 S 的聚点。

非零 z 是 $\tilde{S}$ 内点 $\Leftrightarrow 0<|z|<1$

$\Rightarrow$ 给定 $\epsilon>0$，则 $\forall n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|z|}$，$\Rightarrow n\ln|z|<\epsilon \Rightarrow \ln|z|^n < \ln\epsilon$.

$\Rightarrow |z|^n < \epsilon$.

$\Rightarrow 0 < |z|^n < \epsilon$

$\Rightarrow z^n \in N(0,\epsilon) \cap S$

$\Rightarrow \forall\epsilon$，$N(0,\epsilon)\cap S \neq \phi$，且交集有原点以外的点。

例 2

设 z 是 $N(0,1)$ 的边界点。，$S \equiv \{z^n \mid n \in \mathbb{N}\}$，原点不是 S 的聚点。

总结：内点、边界点、聚点的关系。