$\boxed{\text{Cauchy 积分定理的证明}}$ 不依赖 Green's 的证明.

核心思路：

① 用非常多分段之折线逼近曲线

② 用多项式逼近真实一般解析函数

多项式的闭曲线积分很简单，相应证明来自 Green's 定理.

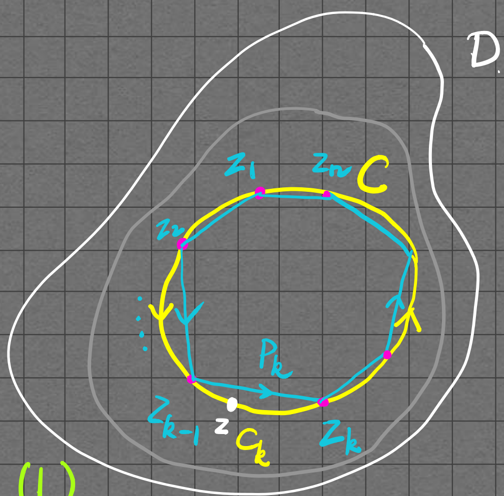
③ 刻画逼近的误差.

④ 利用积分的线性性和路径可加性，不断简化问题.

(曲线 → 多边形 → 三角形 → 无穷小三角形).

证明：

① 取 $\overline{G}\subset D$. s.t. $C\subset\overline{G}$，并在 C 上取分点 $\{z_i\}_{i=1}^{n}$ 并用折线 $P=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_n$ 连接. 当 n 足够大，可使 $P\subset\overline{G}$



$\Rightarrow f$ 在 $C, P\subset\overline{G}$ 上一致连续.

② 刻画误差

分拆 C, P

$$\left|\int_C f(z)\,dz-\int_P f(z)\,dz\right| = \left|\sum_k\int_{C_k}f(z)\,dz-\sum_k\int_{P_k}f(z)\,dz\right| \quad (1)$$

$$-\underbrace{\int_{C_k} f(z_k)\,dz+\int_{P_k}f(z_k)\,dz}_{\text{相等抵消}} \quad (2)$$

$$=\left|\sum_k\int_{C_k}\big(f(z)-f(z_k)\big)\,dz-\sum_k\int_{P_k}\big(f(z)-f(z_k)\big)\,dz\right|$$

因 $f(z_k)\int_{C_k}dz=\int_{C_k}f(z_k)\,dz=\int_{P_k}f(z_k)\,dz=f(z_k)\int_{P_k}dz=f(z_k)(z_k-z_{k-1})$

希望这个误差越小越好，相应地，分点要设得很密

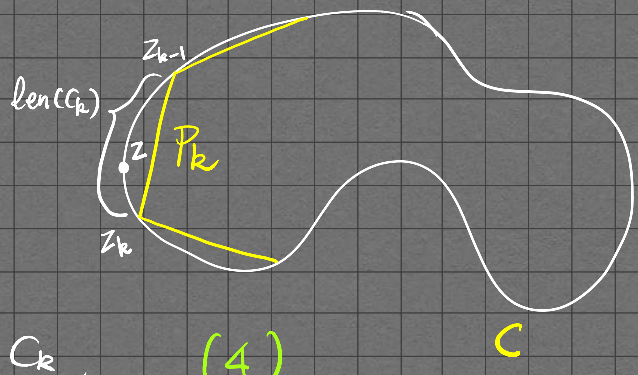
要多密呢？

由 f 在 $\bar{G}$ 上一致连续性

对 $\forall \epsilon$. $\exists$统一的 $\delta \equiv \delta_\epsilon > 0$ s.t.

$$|f(z) - f(z_k)| < \epsilon, \quad \forall\, z \text{ s.t. } |z - z_k| < \delta \quad (3)$$

$\longrightarrow$ 将作为分点所需密集度标准



取分点 $\{z_k\}$ 足够密, s.t.

$$\mathrm{Len}(P_k) < \mathrm{Len}(C_k) < \delta$$

$$\Rightarrow \forall z \in C_k. \quad |z - z_k| < \mathrm{Len}(C_k) < \delta.$$

$$\boxed{|f(z) - f(z_k)| < \epsilon} , \quad \forall\, z \in C_k . \quad (4)$$

及 $\forall\, z \in P_k$

于是

$$\left| \int_C f(z)\, dz - \int_P f(z)\, dz \right|$$

$$= \left| \sum_k \int_{C_k} (f(z) - f(z_k))\, dz - \sum_k \int_{P_k} (f(z) - f(z_k))\, dz \right|$$

$-\int_{C_k} f(z_k) dz + \int_{P_k} f(z_k) dz$

$$< \sum_k \int_{C_k} \underbrace{|f(z) - f(z_k)|}_{<\epsilon} |dz| + \sum_k \int_{P_k} \underbrace{|f(z) - f(z_k)|}_{<\epsilon} |dz|$$

三角不等式.

$$< \epsilon \sum_k \left(\int_{C_k} |dz| + \underbrace{\int_{P_k} |dz|}_{< L_k} \right)$$

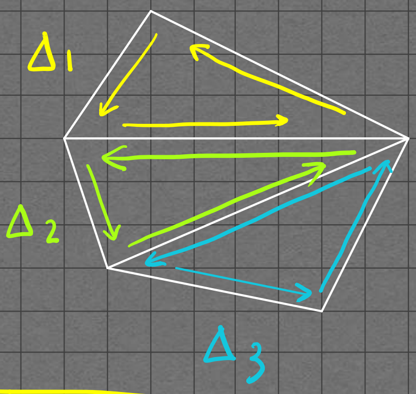
$$< \epsilon \sum_k 2L_k = 2L(C)\epsilon.$$

于是, 曲线积分 $\int_C f(z)$ 可用多边形积分 $\int_P f(z)$ 逼近至任意精度 $2L\epsilon$

曲线 $\longrightarrow$ 多边形.

④ P是多边形.

$$\boxed{\oint_P f(z)dz = \sum_k \oint_{\Delta_k} f(z)dz}$$



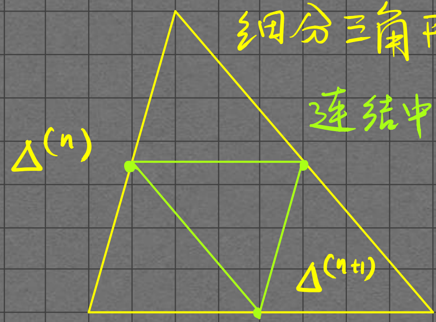
即闭多边形边界复积分可用三角形边界积分构成.

多边形 $\longrightarrow$ 有限三角形 ($\oint_\Delta f(z)dz$ 还是太难)

⑤ 考虑任一个 Δ 及其上积分

细分三角形

连结中点



仔细研究 $I_\Delta = \oint_\Delta f(z) \overset{\text{细分}}{=} \sum_{i=1}^{4} \oint_\Delta f(z)dz$.

取贡献最大的子三角形, 记为 $\Delta^{(1)}$ 有

$$|I_{\Delta^{(1)}}| \ge \frac{1}{4}|I_\Delta| \quad (\text{联系三角不等式})$$

$$|I_1 + I_2| \le |I_1| + |I_2| \le 2\max(|I_1|, |I_2|)$$

再取 $\Delta^{(1)}$ 的分割. 得积分贡献最大的 $\Delta^{(2)}$. 以此类推得

$\Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \cdots$

有.

$$|I_{\Delta^{(n)}}| \ge \left(\frac{1}{4}\right)^n |I_\Delta| \quad (*)$$

$\Delta^{(n)}$ 越来越小, 并最终 $n \longrightarrow \infty$, $\Delta^{(n)}$ 收缩为一点 记为 z_0

显然 $z_0 \in \Delta^{(n)}$ 的内部, $\forall n$.

⑥ $I_{\Delta^{(n)}}$ 的积分区域足够小，$f(z)$ 在其上的变化不显著，可用多项式逼近：利用 $f(z)$ 在 Δ 中可导，对 $\forall\epsilon$，可找到足够大的 n（从而 $\Delta^{(n)}$ 足够贴近 z_0），s.t. $\forall\ z\in\Delta^{(n)}$ 内部

$$\left|f(z)-\left(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)\right)\right| \le \epsilon|z-z_0|. \quad (**)$$

说明：f 在 Δ 中可导，于是在 z_0 可导，于是

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

极限定义 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall\epsilon>0$，$\exists\ \delta_\epsilon>0$，s.t. $\forall z\in N(z_0,\delta_\epsilon)$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\epsilon.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\right|<\epsilon|z-z_0|$$

只要 n 足够大，$\Delta^{(n)}$ 会被 $N(z_0,\delta_\epsilon)$ 包含，便有上面结论

于是

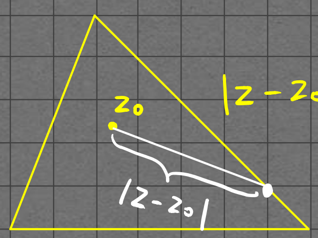
$$|I_{\Delta^{(n)}}| = \left|\oint_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{\Delta^{(n)}}\Big(f(z)-\underbrace{\left(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)\right)}\Big)dz\right|$$

$$\int_{\Delta^{(n)}}\left[f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)\right]dz=0.$$

$$\le \oint_{\Delta^{(n)}}\left|f(z)-\left(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)\right)\right||dz|$$

$$\overset{(**)}{\le} \epsilon\int_{\Delta^{(n)}}|z-z_0|\,|dz| < \epsilon\frac{|\Delta|}{2^n}\cdot\frac{|\Delta|}{2^n} = \frac{\epsilon}{4^n}|\Delta|^2$$

（因 $|z-z_0|<|\Delta^{(n)}|$，$\int_{\Delta^{(n)}}|dz|=|\Delta^{(n)}|$）



$|z-z_0| < |\Delta^{(n)}|$

$\Delta^{(n)}$，周长 $|\Delta^{(n)}| = \left(\frac{1}{2}\right)^n|\Delta|$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n |I_\Delta| \overset{(*)}{\leq} |I_{\Delta(n)}| < \epsilon \frac{|\Delta|^2}{4^n}$$

$$\Rightarrow I_\Delta < \epsilon |\Delta|^2$$

$\Rightarrow$ $\forall$ 三角形 Δ. 积分 $I_\Delta = 0$.

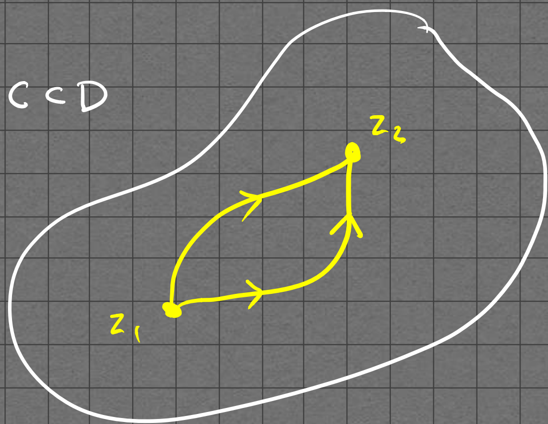
$$\Rightarrow \oint_P f(z)\,dz = 0 \quad , \forall P.$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\,dz = 0 \quad , \forall C.$$

Cauchy 积分定理推论.

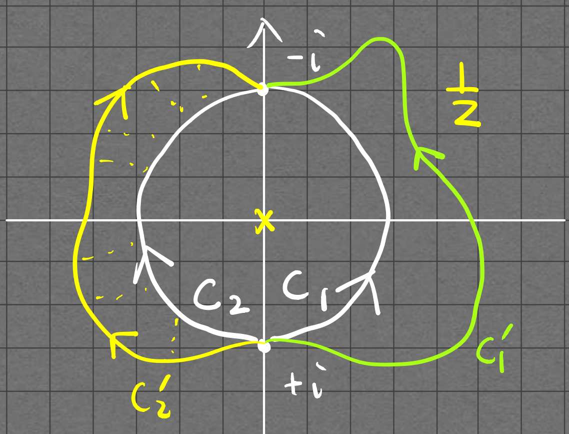
① 单连通区域 D, f 在 D 内解析, $z_1, z_2 \in D$, $C \subset D$

则 $\int_{C\ z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ 与具体路径 C 无关.



② 路径在单复连通解析区内 固定端点.

连续形变 不改积分



$$\int_{C_1} \frac{1}{z}dz - \int_{C_2} \frac{1}{z}dz \neq 0$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

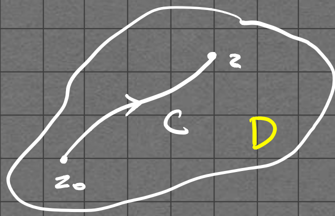
$$\int_{C_1'} \frac{1}{z}dz \neq \int_{C_2'} \frac{1}{z}dz \neq 0$$

—会还会碰到

定理：单连通区域 D. f 在 D 内解析，

则对 $\forall\, z, z_0 \in D$，$C(z_0 \to z) \subset D$ 所定义函数

$$\Phi(z) \equiv \int_C f(\zeta)\, d\zeta$$



在 D 内解析，且 $\Phi'(z) = f(z)$.

证明：关键，分析 $\dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}$ 与 $f(z)$ 的差

考虑 $z+\Delta z \in D$ 及 z 到 $z+\Delta z$ 的小线段 P $\xRightarrow{|\Delta z|\text{足够小}}$ $P \subset D$ $\boxed{\text{跳过}}$

$$\Rightarrow F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0,\, C+P}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0,\, C}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{z,\, P}^{z+\Delta z} f(\zeta) \equiv \Delta F(z)$$

$$\Rightarrow \Delta F(z) - f(z)\Delta z = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - f(z)\Delta z = \int_z^{z+\Delta z} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\, d\zeta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \int_z^{z+\Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z}\, d\zeta \right| < \int_z^{z+\Delta z} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\Delta z|} |d\zeta|$$

由于 f 在 D 内，于是在 P 上连续，于是

对 $\forall \epsilon$. $\exists \delta$. s.t. 当 $|\zeta - z| < \delta$，有 $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$. 于是取 $|\Delta z| < \delta$. 有

$$\int_{z}^{z+\Delta z} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\Delta z|} |d\zeta| < |\Delta z| \frac{\epsilon}{|\Delta z|} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = f(z), \quad , z \in D.$$

定义：原函数

若 f 在 D 内解析. 若 Φ 满足 $\Phi'(z)=f(z)$, $\forall z\in D$. 则称 Φ 为 f 的原函数

ⓐ $\Phi(z)$ 不唯一： $\Phi(z)$ 与 $\Phi(z)+\text{const}$ 都是

ⓑ 不解析的复变函数没有原函数（后面的内容）.

ⓒ Newton-Leibniz公式.

给定单连通区域 D. f 在 D 中解析. Φ 是 f 原函数.

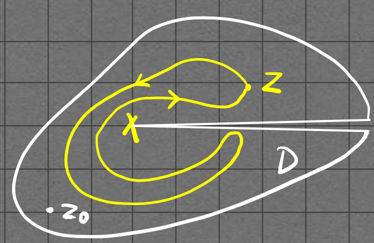
则 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z)-\Phi(z_0)$, $\forall z, z_0\in D$.

- 有时 Φ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个多值函数.

则 Φ 的支点必然是在单连通解析区外.

(by assumption, 因 Φ 在支点不可导).

而由于 D 单连通, $z\in D$ 不管怎么绕圈 都不可能绕支点完整一圈. $\Rightarrow$ $\Phi(z)-\Phi(z_0)$ 不发生多值现象.



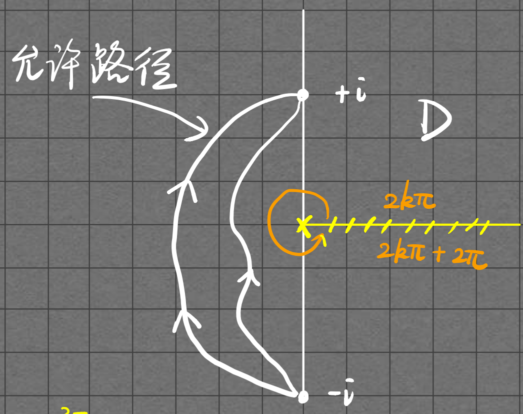
$\Rightarrow$ D 的指定实际等价于"主值分支"或割线指定

$\Rightarrow$ D 变了, 结果可能改变

$\Rightarrow$ $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \mathrm{Int}(z_0, z; f; D)$ ← 幕后.

例：$\frac{1}{z}$ 的原函数 $\underbrace{\ln z}_{\mathbb{C}\text{上多值函数}} + \text{const.}$

① 选单通解析区为 $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$



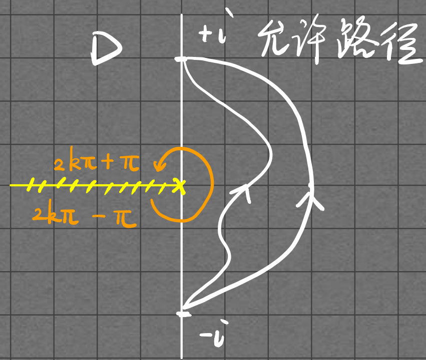
$C \subset D$ 积分 $\Rightarrow \displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{1}{z} dz = \int_{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta$

$= i(2k\pi + \frac{\pi}{2}) - i(2k\pi + \frac{3\pi}{2})$

$= -\pi i$

等价于选了 $\ln z$ 的割线是 $\mathbb{R}_{\geq 0}$

② 选单通解析区为 $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$



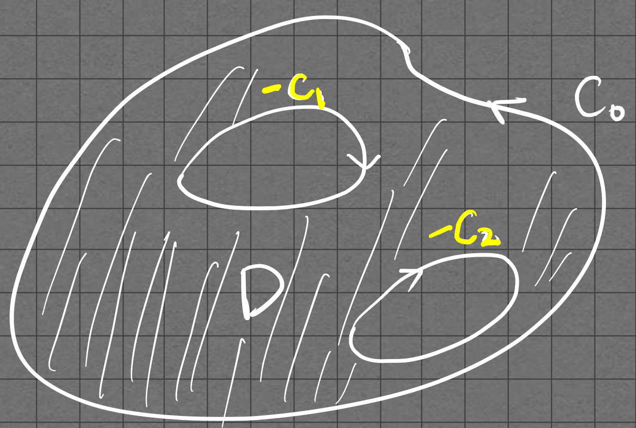
$C \subset D$ 积分 $\Rightarrow \displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{1}{z} dz = \int_{2k\pi - \frac{\pi}{2}}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta$

$= i(2k\pi + \frac{\pi}{2}) - i(2k\pi - \frac{\pi}{2})$

$= +\pi i$

复连通 Cauchy 积分定理.

设复连通区域 D 的边界由 C_0 与 $C_1^-, C_2^-, \cdots$ 等构成
其中 C_i 互不相交 且 $C_1, \cdots, C_n$ 在 C_0 内部.



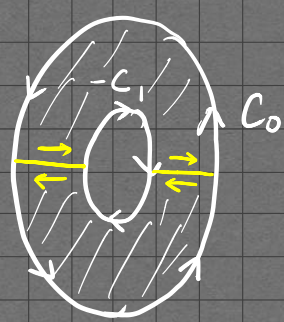
考虑 f 在 D 内解析，$\bar{D}$ 上连续.

$$\oint_{C_0} f(z) + \oint_{-C_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{-C_n} f(z)dz = 0.$$

或

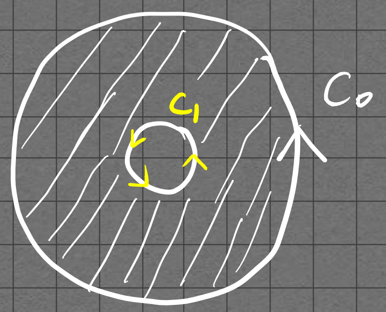
$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz.$$

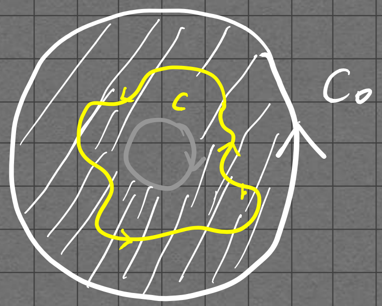
证明：关键是把复连通区域分析成多个单连通区域之并.



推论：围线在解析区域的连续形变不改变积分

后面章节会反复暗中涉及这个事实。

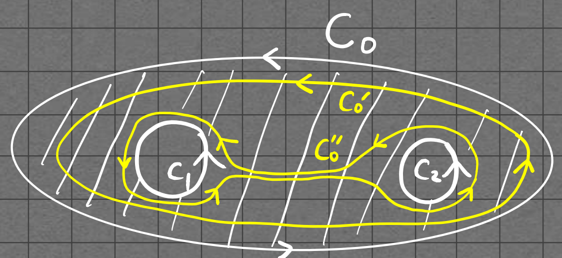




$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz$$

$C_1 \sim C_0 \sim C_1'$

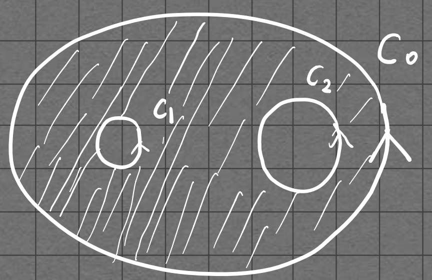
orignal theorem.

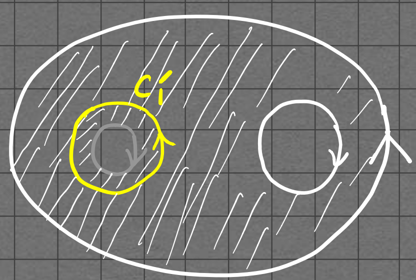


break

$C_0 \sim C_0' \sim C_0'' \sim C_1 + C_2$

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_0'} f(z)dz = \int_{C_0''} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$





$$\oint_{C_1} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz - \int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_1'} f(z)dz$$

$C_1 \sim C_0 - C_2 \sim C_1'$

同伦/同调/上同调 雏形

代数拓扑。

作业：

1

(a) 考察 e^x 与 $\ln x$ 的关系　　　$a^i = (e^{\ln a})^i = e^{i\ln a}$

(b) i^{a+bi} ：考察 i 的表示方法

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i. \Rightarrow i^{a+bi} = e^{\frac{\pi}{2}i(a+ib)} = e^{-\frac{b}{2}\pi + \frac{a\pi}{2}i}$$

2. 考察 $\begin{cases} \text{共轭调和函数与解析函数的关系.} \\ \text{读题细心与猜测出题者的意思.} \end{cases}$

$w = e^x \sin y - ie^x \cos y$. 没错 但是要写成 $z = x+iy$ 的表达式

(但不是 z 与 $\bar{z}$ 的表达式)

$w = e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \sin\frac{z-\bar{z}}{2i} - ie^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \cos\frac{z-\bar{z}}{2i}$ 含了 $\bar{z}$!

注意：解析函数 满足 $\partial_{\bar{z}} f = 0 \Rightarrow f$ 可以写成只含 z 的表达式.

$$w = e^x \sin y - ie^x \cos y = e^x(\sin y - i\cos y)$$

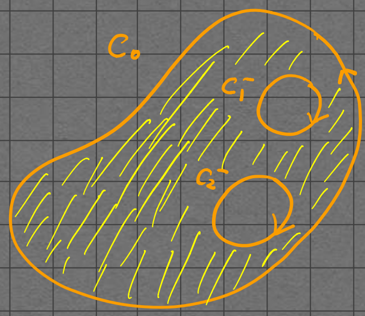
$$= -ie^x(\cos y + i\sin y) = -ie^x e^{iy} = -ie^{x+iy} = -ie^z.$$

Cauchy 积分公式

考虑单连通或复连通 区域 D，

设 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析. 则.

$$\underbrace{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}_{\text{Cauchy 积分公式}} \quad , \forall z \in D.$$



D

- Cauchy 积分公式 $\Longleftrightarrow$ Cauchy 积分定理

证明：关键. 把 C 积分化为 $\forall z$ 点无穷小邻域边界积分
s.t. $f(\xi)$ 在那里 几乎就是个常数

D

然后估计 $\left| f(z) - \oint_{\partial N(z,\rho)}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \right|$. 跳过

首先. 在 z 附近 作小圆 $\partial N(z,\rho)$，于是 f 在 $C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + \partial N(z,\rho)^-$ 所围区域区域及边界上解析.

$$\xRightarrow{\text{Cauchy 定理}} \left(\oint_{\underbrace{C_0 - C_1 - C_2 - \cdots}_{C}} + \oint_{-\partial N(z,\rho)}\right)\frac{f(\xi)}{z-\xi} = 0.$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f(\xi)}{z-\xi}\,d\xi = \oint_{\partial N(z,\rho)}\frac{f(\xi)}{z-\xi}$$

$$f(z)\oint_{\partial N(z,\rho)}\frac{1}{\xi - z}\,d\xi$$

//

然后 比较 $\oint_{\partial N(z,\rho)}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$ 与 $2\pi i f(z) = \oint_{\partial N(z,\rho)}\frac{f(z)}{\xi - z}\,d\xi$

$$\left|\oint_{\partial N(z,\rho)}\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,d\xi\right| < \oint_{\partial N(z,\rho)}\frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|}|d\xi|$$

$$< \frac{\epsilon}{\rho}\oint_{\partial N(z,\rho)}|d\xi| = \frac{\epsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = \epsilon,$$

因为 f 在 $\overline{N(z,\rho)}$ 上解析，即肯定连续。因此只需选 $\rho<\delta$.

于是 $\oint_{\partial N(z,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i f(z)$

设积分公式成立. $2\pi i f(z) = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

令 $\tilde{f}(\zeta)$ 为 $\bar{D}$ 上任意解析函数. 则 $(\zeta-z)\tilde{f}(\zeta)$ 也是. 于是

$$\oint_C f(\zeta)d\zeta = \oint_C \frac{(\zeta-z)\tilde{f}(\zeta)}{\zeta-z} = (2\pi i)\left[(\zeta-z)\tilde{f}(\zeta)\right]_{\zeta=z} = 0.$$

关键点:

1. 解析区内点函数值可通过积分提取.

2. 解析区内的函数值完全由解析区边界函数值.
   这与实光滑函数完全不一样（给定边界后. 光滑区的值仍有极大自由度）

3. 可以推广到抽象的对象上: 共形场论 $\mathcal{O}(z) = \oint_{z} \frac{\mathcal{O}(w)}{w-z}dw$

   $\mathcal{O}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}_n z^{-n}$

   "算符"

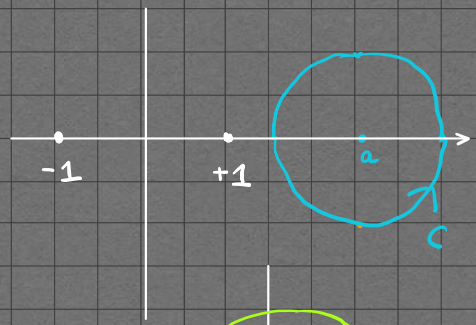
例: $\oint_C \frac{1}{z^2-1} dz$, C : $|z-a| = 1$ $a \in \mathbb{R}$. $a \neq 0$, $a \neq \pm 2$.

关键：a并未指明.值 要分类讨论.

我们用 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式求解.

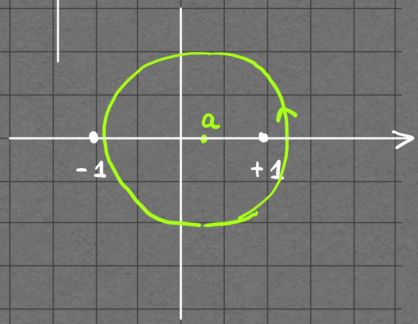
① when $a > +2$. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$ 在 C 内解析.

$\Rightarrow$ $I = 0$.



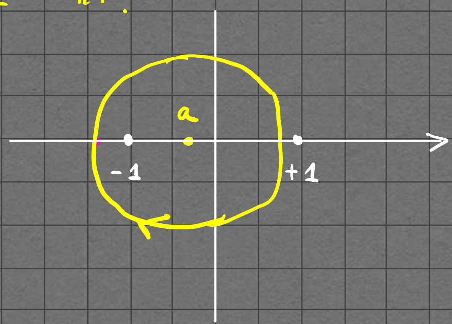
② $0 < a < 2$

$$I = \oint_C \frac{1}{z^2-1} dz = \oint_C \frac{\overbrace{(z+1)^{-1}}^{f(z)}}{z-1} dz = (2\pi i)\left(\frac{1}{z+1}\right)_{z=1} = \pi i.$$



③ $-2 < a < 0$

$$I = \oint_C \frac{\frac{1}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{z-1}\right]_{z=-1} = -\pi i.$$



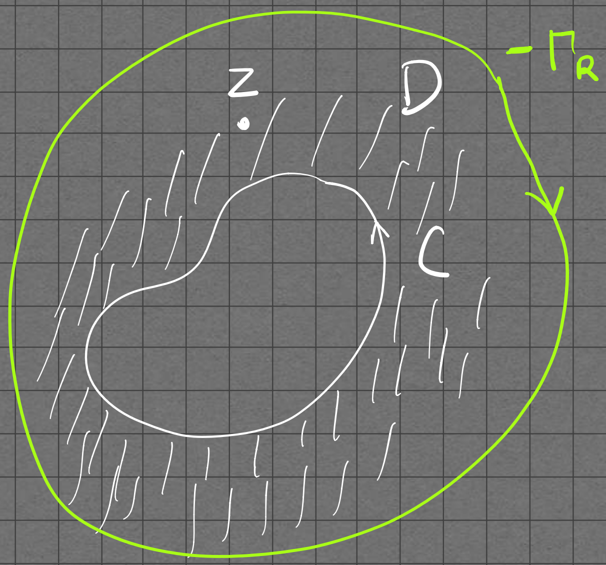
④ $a < -2$, $I = 0$.

推论：设围线 C 的外部区域为 D. f 在 D 内解析，且

若当 $z\to\infty$ 时，对 $\forall\epsilon>0$，$\exists R_\epsilon>0$

s.t. 对所有 $|z|>R_\epsilon$ 必有 $|f(z)|<\epsilon$，→ 各向大致同速衰减.

则有 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$. $\forall z\in D$



证明：添加一个大圆. 考虑复通区域边界积分.

并说明大圆积分不重要.

作大圆 Γ_R：$|\xi|=R$ s.t. z 与 C 均在 Γ_R 内部. $\boxed{\text{跳过}}$

$$f(z)=\oint_C\frac{f(z)}{\xi-z}d\xi+\oint_{-\Gamma_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}dz$$ （复联通 Cauchy）

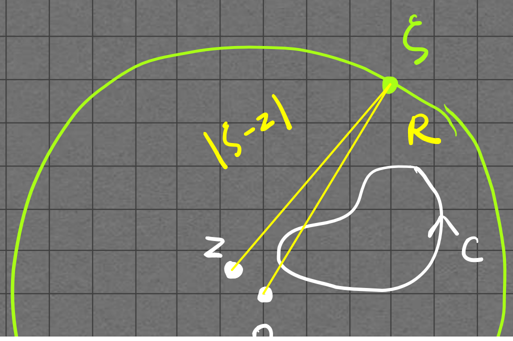
期待 $\int_{-\Gamma_R}$ 积分为 0. 因为当 R 足够大时.

$f(\xi)$ 与 $\frac{1}{\xi-z}$ 都很小

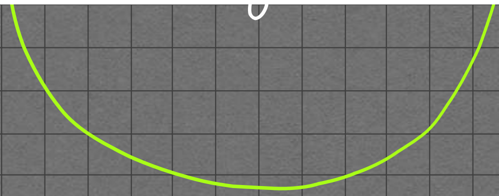
更具体有：给定 $\forall\epsilon$. 选 $R>R_\epsilon$. 则有 $|f(\xi)|<\epsilon$， $\xi\in\Gamma_R$

$$\Rightarrow\left|\oint_{-\Gamma_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}dz\right|<\oint_{-\Gamma_R}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|}|d\xi|$$

$$<\epsilon\oint_{-\Gamma_R}\frac{1}{|\xi-z|}|d\xi|$$



$$\sim \text{“}\frac{1}{R}\cdot 2\pi R\text{”}$$ （粗略估计）



考虑大半径 R s.t. $\frac{1}{2}R > |z|$.

$\Longrightarrow$ 则有 $|\xi - z| > \frac{R}{2}$

$$\left|\oint_{-\Gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, dz\right|$$

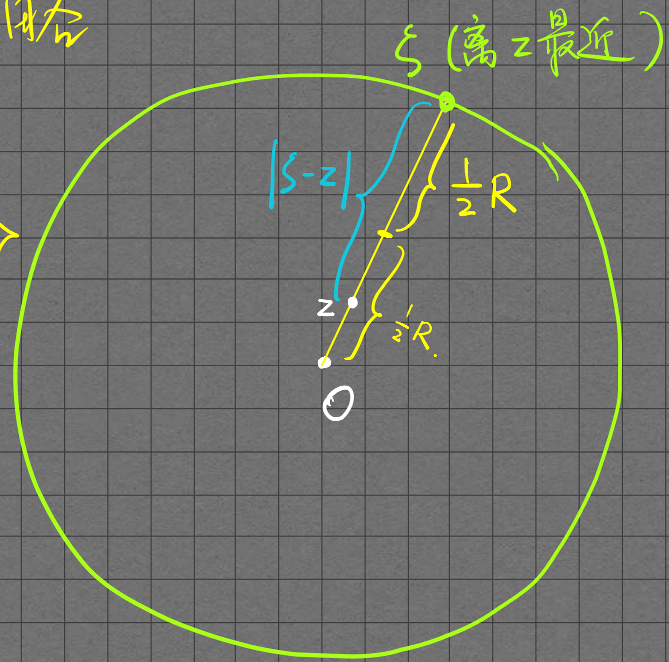
$$< \epsilon \oint_{\Gamma_R} \frac{2}{R}|d\xi| = \epsilon\frac{2}{R}\cdot 2\pi R = 4\pi\epsilon.$$

$\Rightarrow$ $\left|\oint_{-\Gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, dz\right|$ 可任意小

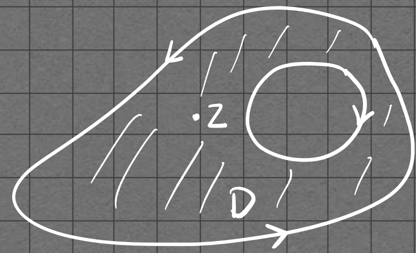
$$\Rightarrow \oint_{-\Gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, dz = 0.$$

$$\Rightarrow f(z) = \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, dz + 0$$

略



$\boxed{\text{高阶导数}}$



①考虑区域 D，$f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析，则

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi. \qquad \forall z\in D.\quad n=1,2,\dots$$

证明：思路是 结果 Cauchy 积分公式与导数定义 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$ 再与目标积分比较误差.

Cauchy 积分公式.

$\boxed{\text{跳过}}$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \qquad f(z+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z-\Delta z}\,d\xi$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(z)-f(z+\Delta z)}{\Delta z}=\oint_C\frac{-f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z-\Delta z)}\frac{d\xi}{2\pi i}.$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z-\Delta z)}\frac{d\xi}{2\pi i}=\frac{\Delta f}{\Delta z}$$

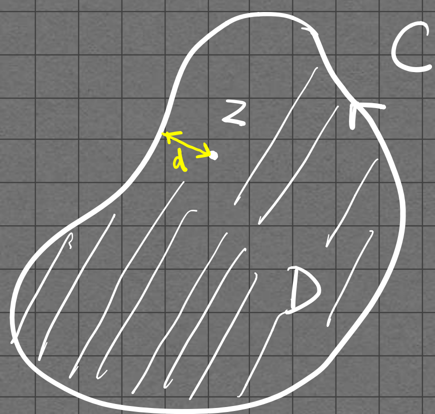
可以推测 $\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z-\Delta z)}$ 在 $\Delta z\to 0$ 时极限正是 $\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}$.

目标是 $\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi$，估计误差

$$\Rightarrow\ \left|\frac{\Delta f}{\Delta z}-\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\frac{d\xi}{2\pi i}\right|$$

$$=|\Delta z|\left|\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2(\xi-z-\Delta z)}\frac{d\xi}{2\pi i}\right|$$

右边已经 $\propto|\Delta z|$ 因此. 只要积分有界 即可完成证明.



ⓐ $|f(\xi)|$ 在 C 上有界.(因为 f 在 $\bar{D}$ 上解析) $\Longrightarrow |f(\xi)| \leq M$, some $M > 0$

给定 z 后, 是一个确定的正数.

ⓑ $|\xi - z| \geq d > 0$

$$\Rightarrow |\xi - z - \Delta z| \geq |\xi - z| - |\Delta z| \geq d - |\Delta z|$$ Cauchy 不等式

$$\Rightarrow |\xi - z|^2 |\xi - z - \Delta z| \geq (d - |\Delta z|)^2 d \geq \left(\frac{d}{2}\right)^2 d$$ when $|\Delta z| \to 0$

ⓒ $$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \frac{d\xi}{2\pi i} \right|$$

$$= |\Delta z| \left| \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)} \frac{d\xi}{2\pi i} \right|$$

$$< |\Delta z| \oint_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2 |\xi - z - \Delta z|} \frac{|d\xi|}{2\pi i} < \frac{M}{\left(\frac{d^3}{4}\right)} |\Delta z| \xrightarrow{|\Delta z| \to 0} 0$$

$$\Longrightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$ 得证

$$\Rightarrow \frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Delta z} \oint \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right] d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Delta z} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)^2 (\xi - z)^2} \left[(\xi - z)^2 - (\xi - z - \Delta z)^2 \right] d\xi.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Delta z} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)^2 (\xi - z)^2} \left[2(\xi - z)\Delta z \right] d\xi.$$

$$= \frac{2}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)^2 (\xi - z)} d\xi.$$

重复之前的分析. $\Rightarrow$

$$f^{(2)}(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi.$$

如此类推.

总结: D中解析的函数 $f(z)$ 的导数 $f^{(p)}(z)$ 可用 f 直接计算.

$\Rightarrow$ $f^{(p)}(z)$ 存在, $\forall p \geq 1$.

$\Rightarrow$ 解析 $\Rightarrow$ 无穷阶可导!

Liouville定理

定义：整函数：在整个 z 平面上解析的函数.

Liouville 定理: 有界 整函数 必为常函数.

证明: 由于 $f(z)$ 有界解析. 于是 $\exists M>0$. s.t. $|f(z)|\le M$. $\forall z\in\mathbb{C}$.

我们计算并估计 $f'(z)$

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial N(z,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|$$

$$\le \frac{1}{2\pi} M \cdot \frac{2\pi R}{R^2} = \frac{M}{R}.$$

略.

令 $R\to\infty$. $\frac{M}{R}\to 0$. $\Rightarrow$ $|f'(z)|\le 0$. $\Rightarrow$ $|f'(z)|=0$.

即 f 是常函数

去掉有界条件. 则 $f(z)$ 应随 R 不断增大, 摆脱上面的论证.

即一般来说. 全 $\mathbb{C}$ 解析的函数必有某方向趋向无穷大.

实际上来自一般结论: $\mathbb{R}^n$ 上有界调和函数必为常数

$\mathbb{R}^2$ 上有上或下界调和函数必为常数