复积分定义

定义各类曲线.

光滑曲线. 设曲线方程 $y=f(x)$, 则光滑 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 连续

或参数化 $x(t), y(t)$ 的光滑 $\Leftrightarrow$ $x'(t), y'(t)$ 连续

逐段光滑曲线: 有限条光滑曲线衔接而成的曲线.

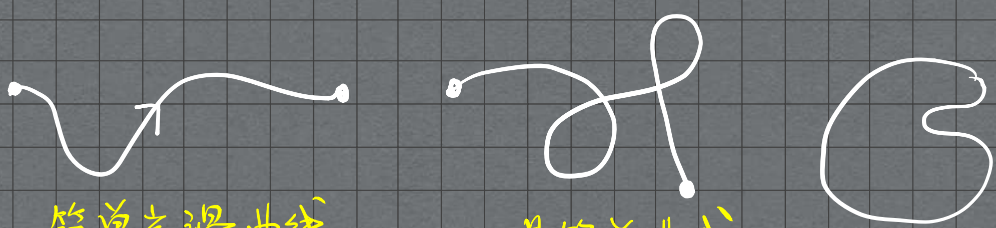
例: 折线.

简单曲线, 即没有自相交之曲线

方向由起点指向终点.

围线 逐段光滑简单闭合曲线.

围线正向: 使得所围区域内部在左边. ≈ 逆时针.



简单光滑曲线. 不是简单曲线. 简单围线

一元实函数积分：　x 轴有限区间.

复积分　：　　　曲线上.

复积分：核心思想，是利用复数加法封闭性，和黎曼积分思想

① 复数之和还是复数 ⇒ 小复数累积成大复数

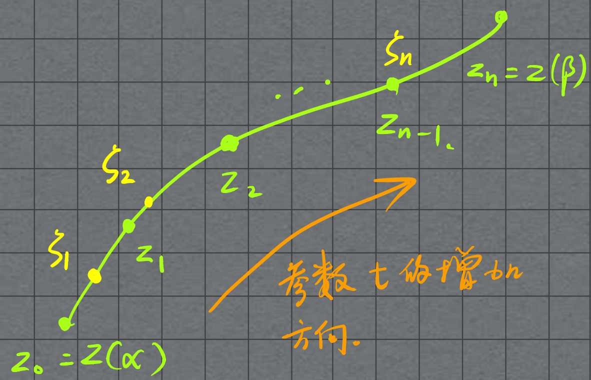
② 黎曼积分思想：积分区域不同分割有相同的和.

插值不变性.

曲线 C　$z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.　$f(z)$ 在 C 上有定义.

取分点 $z_0 = z(\alpha)$, $z_1, \cdots,$ $z_n = z(\beta)$, z_{k-1} 至 z_k 间弧段任取. ζ_k

设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$



令分点数 $n \to \infty$

且选取分点 s.t. $\max\limits_{1 \le k \le n-1} |z_k - z_{k-1}| \to 0$ ("条件")

若此时 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = I$ 且 I 与满足条件

的分点设置无关 则称 $f(z)$ 沿 C 可

积，且记其积分值 I

$$I \equiv \int_C f(z)\,dz.$$

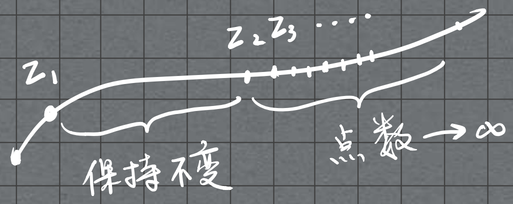
C：积分区域.

反向积分：　$\int_{C^-} f(z)\,dz = \int_{\underbrace{-C}} f(z)\,dz$

代数拓扑的记号，路径作为代数对象可加减和数乘.

① 注意积分方向. 沿参数t增加方向

② 有无穷的分点方法违背"条件"



$\max|z_k - z_{k+1}| = |z_1 - z_2| \not\to 0.$

③ 复积分可直观地理解成把小量累积成大量.

但以后在场论、凝聚态中会有别的积分. 不能理解为小数累积. 比如 Grassmann 数的积分.

$$\int d\vartheta\, 1 = 0 \qquad \int d\vartheta\, \vartheta = 1, \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \int d\theta \approx \partial_\theta$$

积分的存在性

定理：沿线连续 $\Rightarrow$ 可积，且

$$\int_C f\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

核心是复数加法与实数加法的兼容，及复数加法矢量性

证明：记 $z_k = x_k + iy_k$，$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$，$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$\Rightarrow \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$

又记 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$，$v_k = v(\xi_k, \eta_k)$，$u_k(\xi_k, \eta_k)$，$\Rightarrow f(\zeta_k) = u_k + iv_k$。

$$\Rightarrow \sum_k f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_k (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_k (u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k)$$

$f(z)$ 的连续性 $\Rightarrow$ u, v 函数连续性 $\Rightarrow$ 上面两个求和的极限存在，且值恰为命题中右侧积分。

复积分基本性质

f, g 沿线连续

① 积分的线性性. $\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz$

② 路径可加性 $\int_{C_1+C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$

③ 路径反向. $\int_{-C} f(z)\, dz = - \int_C f(z)$

④ 三角不等式. (来自 $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$)

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C |f(z)|\, \underbrace{ds}_{\text{弧长微分}}.$$

⑤ 积分微元平移不变性 $dz = d(z+a)$, $\forall a \in \mathbb{C}$

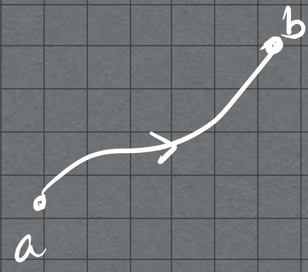
复积分计算.

常用方法：定义、实函数积分.　参数方程.

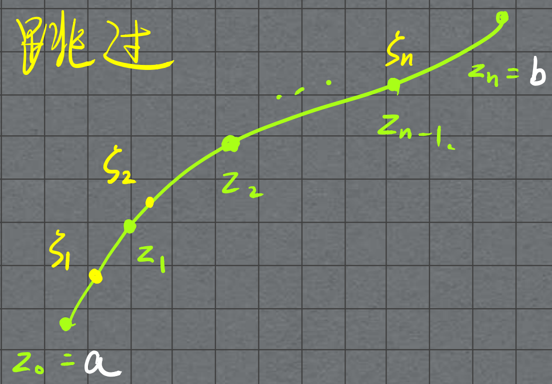
① $\int_C dz = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1)(z_k - z_{k-1})$

$= \lim_{n\to\infty} (z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \cdots + \cdots + z_n - z_{n-1})$

$= \lim_{n\to 0} z_n - z_0 = b - a$　重要结果



② $\int_C z\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$　跳过



$\xlongequal[\text{为 } z_k]{\text{取 } \zeta_k} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}) \equiv I_1$

$\xlongequal[\text{为 } z_{k-1}]{\text{取 } \zeta_k} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}) \equiv I_2$

$I_1 + I_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 \underline{- z_k z_{k-1} + z_{k-1} z_k} - z_{k-1}^2)$

插值不变性　$I_1 = I_2$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k^2 - z_{k-1}^2 = \lim_{n\to\infty} (z_1^2 - z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 + \cdots + z_n^2 - z_{n-1}^2)$

$= z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2$

$2I$

$I = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

$\Rightarrow$ 当 $a = b$，$I = 0$！

③ $\int_{|z|=\rho} z^n \, dz$, $n \neq -1$ 结果与 ρ 无关.

令 曲线 由 $\rho e^{i\theta}$ 来参数化. $\Rightarrow$ 沿曲线 $dz = d(\rho e^{i\theta}) = \rho i e^{i\theta} d\theta$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} \rho^n e^{ni\theta} \rho i e^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} \rho^{n+1} e^{(n+1)i\theta} d\theta.$$

$$\underset{=\!=}{n+1\neq 0} \frac{\rho^{n+1}}{n+1} \int_0^{2\pi i(n+1)} e^{(n+1)i\theta} \, d[i(n+1)\theta] = \frac{\rho^{n+1}}{n+1} \int_0^{2\pi i(n+1)} e^x \, dx$$

$$= \frac{\rho^{n+1}}{n+1} e^x \Big|_0^{2\pi i(n+1)} = 0.$$

④ $\int_{|z|=\rho} \frac{1}{z-a} dz$ （是重要结果. 后面会用到.）

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} \rho^0 e^{0 i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z} dz = 1$$

⑤ $\displaystyle\int_{|z|=\rho} \bar{z}\, dz = \int_{|z|=\rho} \rho e^{-i\theta}\, d(\rho e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \rho^2 e^{-i\theta}\, i e^{i\theta} d\theta$

$= \rho^2 \cdot 2\pi i .$

⑥ $\displaystyle\int_{|z|=\rho} \bar{z}^n\, dz \overset{n\neq 1}{=\!=} \int_{|z|=\rho} \rho^n e^{-in\theta}\, d(\rho e^{i\theta}) = \rho^{n+1} \int_{|z|=\rho} e^{-i(n-1)\theta}\, i d\theta.$

$= 0$

Cauchy 积分定理.

铺垫： $\oint_C P_n(z)dz = 0.\quad \forall C$

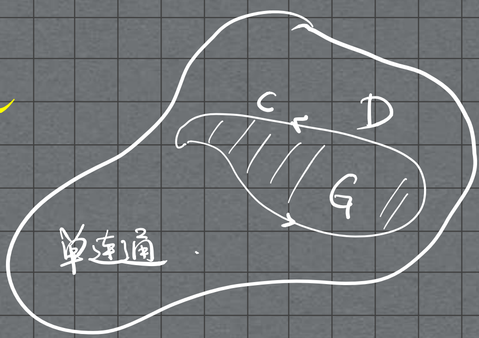
Cauchy 积分定理： $f(z)$. 单连通 D 内部 解析. $C \subset D$.

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = 0.$$

特殊情况.

当 f 不仅仅是解析，而且有 $f'(z)$ 在 D 中连续，

可直接. 用 Green's 公式证： "额外条件"



$$\int_C f(z)dz$$

$$= \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$$

$$= -\int_G \Big(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0}\Big)dxdy + i\int\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}\Big)dxdy$$

CR条件.

$$= 0$$

(此证明适用于多项式函数 $p(z)$，后面会用到 $\oint_C p(z)dz$

Cauchy 积分定理2：围线 $C = \partial D$ f 在 D 中解析.

在 $D \cup C$ 上连续. 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

准备工作：连续与一致连续

一点处连续：设 f 在 D 上定义，给定 $z_0 \in D$（从而 z_0 是 S 聚点）

对 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta_\epsilon > 0$，s.t. $\forall z \in N(z_0, \delta_\epsilon) \cap D$，有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

直观：凡是离 z_0 "足够近"的点 z 的 f 值都很接近 $f(z_0)$
（用邻域半径 δ_ϵ 刻画）（用 ϵ 刻画）

D 上连续：即 f 在 $\forall z_0 \in D$ 处连续，或更完整地，
设 f 在 D 上定义，考虑 $\forall z_0 \in D$

对 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta_{\epsilon, z_0} > 0$，s.t. $\forall z \in N(z_0, \delta_{\epsilon, z_0}) \cap D$，有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

直观：对任何 $z_0 \in D$，

凡是离 z_0 "足够近"的点 z 的 f 值都很接近 $f(z_0)$
（用 δ_{ϵ, z_0} 刻画）（用 ϵ 刻画）

关键点："足够近"的标准 δ_{ϵ, z_0} 与 z_0 有关。

闭域 $\overline{G}=G\cup\partial G$ 上一致连续：

设 f 在 $\overline{G}$ 上定义. 考虑 $\forall z_0\in\overline{G}$

对 $\forall\epsilon>0$. $\exists\delta_\epsilon>0$. s.t. 对 $\forall z\in N(z_0,\delta_\epsilon)\cap\overline{G}$，都有

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon.$$

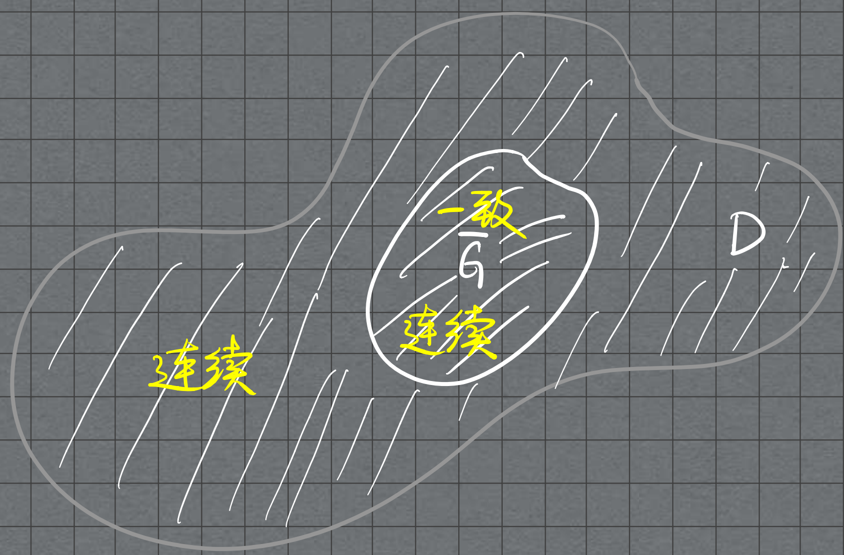
直观：对任何 $z_0\in D$.

凡是离 z_0 "足够近"的点 z 的 f 值都很接近 $f(z_0)$

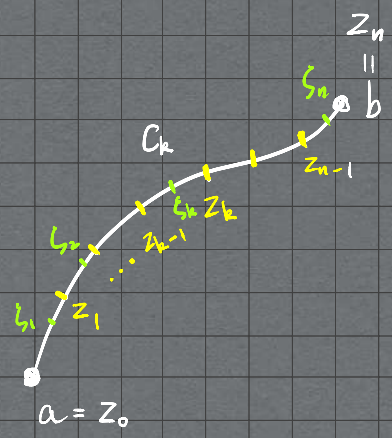
(用统一的 δ_ϵ 刻画)　　(用 ϵ 刻画)

关键点："足够近"的标准 δ_ϵ 是统一(一致)的. 与 z_0 无关.

定理：f 在区域 D 内连续. 则 f 在 D 内任意子闭域 $\overline{G}$ 上一致连续



回顾



1. 复积分定义：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z)\,dz$$

关键点：复数加法封闭性.

满足 $\max\limits_k |z_k - z_{k-1}| \to 0$ 的分点设置无关性

插值 $\{\zeta_k\}$ 选取无关性.

2. 可积的充分条件：沿线连续.

3 复积分的实分解：$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$

4 常用积分结果.

$\int_C dz =$ 终点 − 起点，

$$\oint_{|z|=\rho>0} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

$$\oint_{|z|=\rho>0} z^{n\neq -1}\,dz = 0.$$

5 常用积分方法：定义、化为实积分、参数化.

6 Cauchy 积分定理的特殊情况：$f'(z)$ 连续：用 Green 公式. [redacted]

Cauchy 积分定理：f在 D 内解析，D单连通. $C \subset D$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$$