$$= \overset{①}{\frac{1}{n+1+g(z)}} - \overset{②\,③}{\frac{1}{(n+2+g(z))(n+3+g(z))}} - \cdots - \overset{2p-2,\ 2p-1}{\frac{1}{(n+2p-2+g(z))(n+2p-1+g(z))}}$$

$$- \frac{1}{n+2p+g(z)} \quad 2p$$

$$< \frac{1}{n+1+g(z)} \boxed{< \frac{1}{n}}$$

对 ∀z

② 当 $N = 2p+1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+2p-1} \frac{(-)^{k-1}}{k+g(z)} \right|$$

$$= \left| \underbrace{\frac{1}{n+1+g} - \frac{1}{n+2+g}}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n+2p-1+g} - \frac{1}{n+2p+g}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{n+2p+1+g}}_{\geq 0} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1+g} - \frac{1}{n+2+g} + \cdots + \frac{1}{n+2p-1+g} - \frac{1}{n+2p+g} + \frac{1}{n+2p+1+g}$$

$$= \overset{①}{\frac{1}{n+1+g(z)}} - \overset{②\,③}{\frac{1}{(n+2+g(z))(n+3+g(z))}} - \cdots - \overset{2p-2,\ 2p-1}{\frac{1}{(n+2p-2+g(z))(n+2p-1+g(z))}}$$

$$\underbrace{- \overset{2p}{\frac{1}{n+2p+g(z)}} + \frac{1}{n+2p+1+g(z)}}_{\leq 0.}$$

$$= \frac{1}{n+1+g(z)} + (\leq 0)$$

$$< \frac{1}{n}$$

不管什么 z

即 $n\to\infty$ 时 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-)^{k-1}}{k+g(z)}\right|$ 都很小：

对 $\forall\epsilon$，任选 $n_\epsilon>\frac{1}{\epsilon}$，必有对 $\forall n>n_\epsilon$，$\forall N\in\mathbb{N}$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+N}\frac{(-)^{k-1}}{k+g(z)}\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{n_\epsilon}<\epsilon.\quad,\quad 对\forall z 成立.$$

之前的不等式　　$n>n_\epsilon$　　n_ϵ 的设定；与 z 无关

也与 N 无关

$\Rightarrow$ 一致收敛.

但是该级数不是绝对收敛：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-)^{k-1}}{k+g}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+g(z,\bar z)}$$

而对 $\forall z$. 选任意实数 $\lambda>g(z)+1$ 必有（因 $k\geq1$）

$$\lambda>\frac{g(z,\bar z)}{k}+1\Longleftrightarrow\lambda k>g(z,\bar z)+k\Longleftrightarrow\frac{1}{k+g}>\frac{1}{\lambda}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+g(z)}>\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

而后面调和级数发散. 因此的确不绝对收敛.

例：$\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 在 $N(0,1)$ 内绝对收敛. 但不一致收敛

绝对收敛：$|z|<1. \Rightarrow \lim_{n\to} |z|^n = 0$，$\sum_{k=1}^{\infty} |z|^k \xrightarrow[\text{数列求和}]{\text{无穷等比}} |z| \frac{1}{1-|z|}$ 是收敛的

该级数逐点收敛到 $\frac{z}{1-z} \equiv S(z)$（用无穷等比数列求和）

不是一致收敛. 分析部分和 $S_n(z)$ 与 $S(z)$ 的误差.

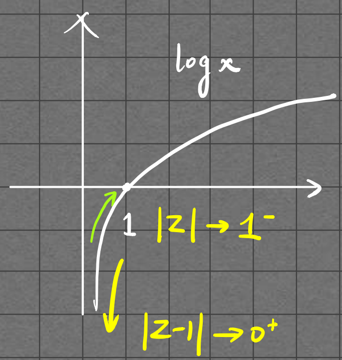
$$|S_n(z) - S(z)| = \left| \frac{z(1-z^n)}{1-z} - \frac{z}{1-z} \right| = \left| \frac{-z^{n+1}}{1-z} \right|$$

Cauchy 一致收敛：想要 $|S_n(z) - S(z)| < \epsilon$. 则有

$$\frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} < \epsilon \iff |z|^{n+1} < \epsilon|1-z| \iff n > \frac{\log \epsilon|1-z|}{\log|z|} - 1$$

即"足够大的 n"由 $n_\epsilon(z) = \mathrm{ceil}\left(\frac{\log(\epsilon|z-1|)}{\log|z|} - 1\right)$ 刻画.

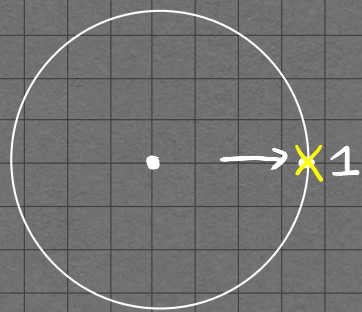
但这个 n_ϵ 随 $z\to 1$ 变无穷大（固定 ϵ）



ⓐ $|z-1| > 0 \Rightarrow$ 分子 $\log|z-1| \xrightarrow{|z-1|\to 0} -\infty$.

ⓑ $|z|<1, \Rightarrow$ 分母 $\log|z| \xrightarrow{z\to 1} -0$.

$$\Rightarrow n_\epsilon = \frac{\log \epsilon}{\log|z|} + \frac{\log|z-1|}{\log|z|} - 1 \rightarrow \frac{-\infty}{-0} = +\infty.$$



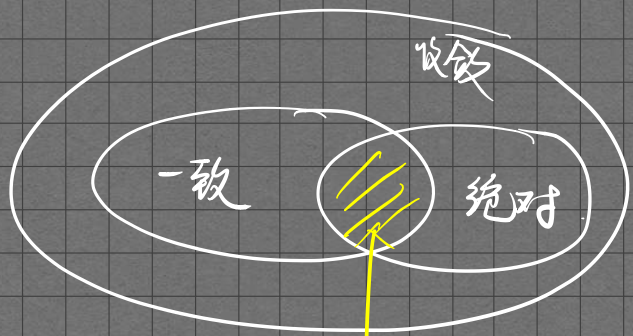
$\Rightarrow$ 给定 ϵ 之后，所需 n_ϵ 随 $z\to 1$ 无限增大.

不可能找到统一的 n_ϵ 作为"足够大"的标准.

总结 一致和绝对收敛均强于收敛，但二者没有必然关系

$\sum z^k$ ：（单位圆内），绝对收敛，不一致收敛

$\sum \frac{(-)^k}{k+g(z)}$：一致收敛，不绝对收敛。



后面的重点，研究对象

逐项有界，界级数收敛

Weierstrass-M 一致判敛法.

若∃正常数列 $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ s.t. $|f_k(z)| \le M_k$, $\forall z \in E$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ 收敛，则

可以取=号

S 一致 + 绝对收敛

证明要点：绝对收敛来自正项级数比较判别法：$\sum_k |f_k|$ 与 $\sum M_k$.

一致收敛来自

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(z)| < \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon.$$

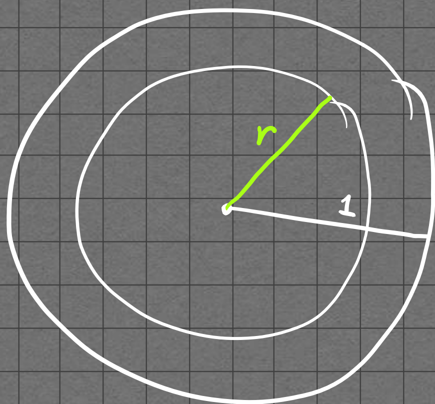
Cauchy 不等式 $\qquad$ $\sum_k M_k$ 收敛.

略

例. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 在 $|z| \le r$, $0<r<1$，上绝对收敛且一致收敛

因为当 $|z| \le r < 1$，逐项有界 $|z^k| \le r^k$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ 收敛 (但 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 在 $|z| \le 1$ 上不一致收敛)



例: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^s}$, $s>1$ 在 $\forall \theta \in \mathbb{R}$ 处绝对 + 一致收敛.

看成 $f_k(\theta)$

因

$$\left|\frac{e^{ik\theta}}{k^s}\right| \le \frac{1}{k^s} \quad 且 \quad \sum_k \frac{1}{k^s} \text{ 收敛}.$$

逐项有界.

$\xrightarrow[\text{M-判敛}]{\text{Weierstrass}}$ 绝对 + 一致收敛.

一致收敛的好处.

定理（和函数连续）

若级数 $S(z)$ 在定义域上逐项连续，且在定义域上一致收敛于和函数 $s(z)$

则和函数 $s(z)$ 在定义域上连续

即：逐项连续 $\xrightarrow{\text{一致收敛}}$ 和函数连续

$$\text{定义域逐项连续} \ \big\downarrow{\text{一致收敛}} \ \text{和函数连续}$$

证明：略.

• 少了一致收敛，则和函数可能不连续.

$$S(x) = x + \sum_{k=2} x^k - x^{k-1}$$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

因 $$S_n(x) = x + x^2 - x^1 + x^3 - x^2 + \cdots + x^n - x^{n-1} = x^n$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$ 明显不连续.

$$|S_n(x) - 0| < \epsilon \Rightarrow x^n < \epsilon \Rightarrow n_\epsilon(x) = \left[\frac{\ln\epsilon}{\ln x}\right], \quad 0<x<1$$

$n_\epsilon(x\to 1) = \infty$. 统一个 n_ϵ 不存在. $\Rightarrow$ (0,1) 上不一致收敛)

定理.（和函数可积与积分求和交换）

若 S 在 C 上逐项连续，且 $S(z)$ 在 C 上一致收敛于和 $s(z)$ 则

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\,dz = \int_C s(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)\,dz.$$

即逐项连续 $\Rightarrow$ 逐项积分存在 $\xrightarrow{\text{一致收敛}}$ 和函数可积 且 $\sum_k \int = \int \sum_k$

证明：略.

Weierstrass定理.(和函数可导性，求导求和交换)

(常称"内闭一致收敛") [redacted]

若 $S(z)$ D内 逐项解析，且在D内任一个有界闭集一致收敛于$s(z)$，则

(a) $s(z)$ 在 D 内解析

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z)$ 在D上 内闭一致收敛于 $s^{(p)}(z)$，$\forall p\in N$.

证明准备工作： Cauchy积分定理的逆定理.(Morera定理)

设 f 在单连通 D 内 连续. 若 f 的 D 内 闭道积分总有 [redacted]

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

则 f 在 D 内 解析.

证明. 任意闭线积分为 0

$$\Rightarrow F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$$ 与路径无关. 是 z 的单值函数.

当 Δz 足够小，$z+\Delta z\in D$. 并可用直线段 P 连结 z, $z+\Delta z$

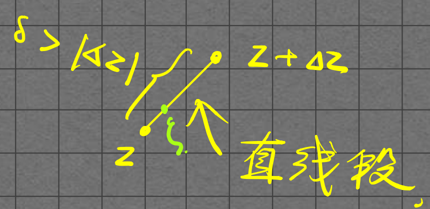
$$\Rightarrow F(z+\Delta z) - F(z) = \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} - \int_{z_0}^{z}\right) f(\xi)\,d\xi = \int_z^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi.$$

$$= \int_z^{z+\Delta z}[f(\xi)-f(z)]\,d\xi + \boxed{\int_z^{z+\Delta z} f(z)\,d\xi}$$ 加一项减一项

$= f(z)\Delta z$

$$= \int_z^{z+\Delta z} f(\xi)-f(z)\,d\xi + f(z)\Delta z$$

由于 f 连续. 对 $\forall \epsilon$ $\exists \delta$. s.t. 当 $|\Delta z|<\delta$.



$$\left|f(\xi)-f(z)\right|<\epsilon.$$

移项 $f(z)\Delta z$.

$$\Rightarrow \left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| < \int_z^{z+\Delta z}\frac{|f(\xi)-f(z)|}{|\Delta z|}|d\xi|$$

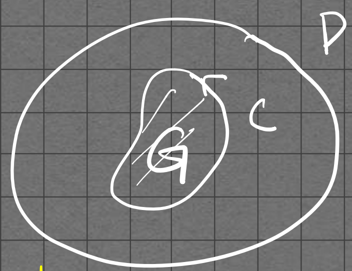
$$< \epsilon\frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}=\epsilon$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z) \Rightarrow f(z)$ 是 $F(z)$ 的导数.

$\Rightarrow F(z)$ 是解析函数

$\Rightarrow F^{(p)}(z)$ 存在, $\forall p\geq 1$ (高阶导数公式)

$\Rightarrow f(z)$ 可导 $\Rightarrow f(z)$ 解析.



证明 Weierstrass 定理.

① 利用一致收敛 $\Rightarrow$ 可逐项积分 $\Rightarrow$ 和函数围道积分为零

思路.

对 D 内任一围线 $C\subset D$, 有 $G=C$ 的内部区域, 且 $\bar{G}\subset D$

$\xRightarrow{\text{条件}} \sum_k f_k(z)$ 在 $\bar{G}$ 上一致收敛, 尤其是在 C 上.

$\Rightarrow$ 和函数积分 $\oint_C s(z)dz=\sum_k\oint_C f_k(z)\,d=0$

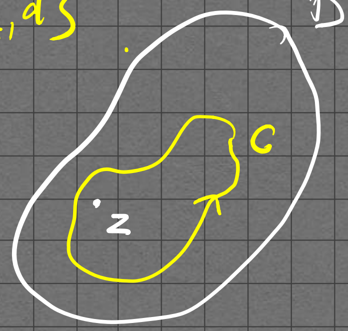
$\Rightarrow$ 和函数 $s(z)$ 沿 D 内任一围线积分为0.

$\Rightarrow$ 另逐项连续 $\xrightarrow{\text{一致收敛}}$ 和 $s(z)$ 连续

$\Rightarrow \forall C$, $S(z)$ 沿 C 连续，且积分为零 $\Rightarrow$ $S(z)$ 解析.

ⓑ 思路是利用 Cauchy 积分公式，比较

$$S^{(p)}(z) = \oint_C \frac{S(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi, \quad \sum_{k=1}^{n} f_k^{(p)}(z) = \sum_k^n \oint_C \frac{f_k(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$$



刻画在大 n 时的误差.

注意给定 z 之后，$\tilde{f}_k(\xi) \equiv \frac{f_k(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}$ 在 $\xi=z$ 处有奇点，积分/求和 交换定理不能用.

对 $\forall z\in D$. 取 C 为 $\partial N(z,R)$，$R>0$ s.t. $C\subset D$. 于是

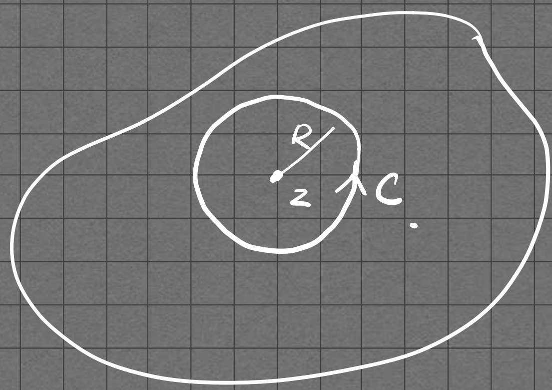
$$\left| S^{(p)}(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k^{(p)}(\xi) \right|$$

有限项，$\oint \sum = \sum \oint$

$$= \left| \oint_C \frac{S(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}} d\xi - \sum_{k=1}^{n} \oint \frac{f_k(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}} d\xi \right|$$

$$= \left| \oint \frac{S(\xi) - \sum_{k=1}^n f_k(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}} d\xi \right|$$

$$< \oint \frac{|S(\xi) - \sum_{k=1}^n f_k(\xi)|}{|\xi-z|^{p+1}} |d\xi|.$$



由 C 上一致收敛性. 对 $\forall \epsilon$, $\exists n_\epsilon > 0$. s.t. $\forall n > n_\epsilon$ 有

$$\left| S(\xi) - \sum_{k=1}^n f_k(\xi) \right| < \epsilon, \quad \forall \xi \in C.$$

$$\Rightarrow < \epsilon \oint_C \frac{|d\xi|}{|\xi-z|^{p+1}} = \epsilon \cdot \frac{2\pi R}{R^{p+1}} = \frac{2\pi\epsilon}{R^p}$$

$$\Rightarrow \frac{p!}{2\pi i} \oint \frac{S(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}} d\xi = S^{(p)}(z) = \sum_k^{\infty} f_k^{(p)}(z).$$

Riemann ζ 函数

$$\frac{1}{k^{\mathrm{Re}z}\, k^{i\,\mathrm{Im}z}}$$

Riemann ζ-函数

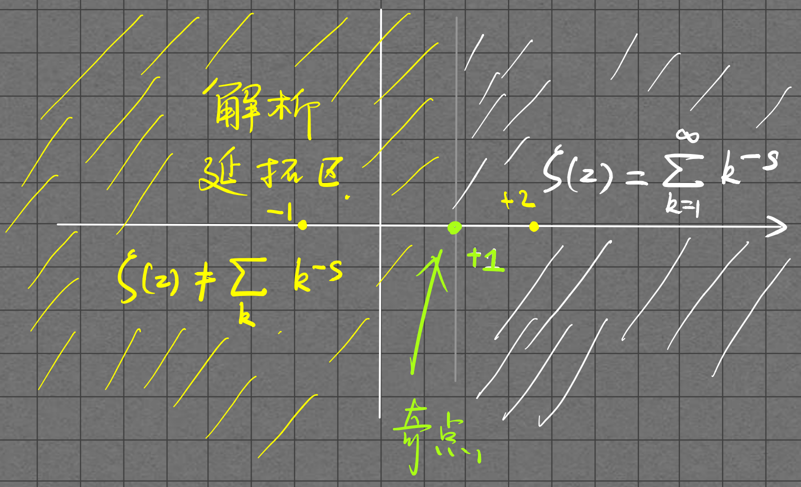
$$\zeta(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-z\ln k}$$

收敛性： $\zeta(z)$ 在 $D \equiv \{z \mid \mathrm{Re}z > 1\}$ 内收敛，且在 D 中任何有界闭集上一致收敛.

$\Rightarrow$ $\zeta(z)$ 可在 D 内可逐项求导、积分.

另外. $\zeta(z)$ 的解析区域可被强行拓展（解析延拓）.
（级数）

即找到一个在 $\mathbb{C}\setminus\{+1\}$ 上解析的函数 $\tilde{\zeta}(z)$, s.t. $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(z)$ when $\mathrm{Re}z > 1$



常见特殊值

$$\zeta(-1) \text{“=”} \sum_k k = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots}_{\text{发散序列}} = -\frac{1}{12} \quad (\zeta\text{-正规化})$$

（真空 Casimir 效应，超弦的时空维度 $=10$）.

$$\zeta(0) = 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(-2n) = \underbrace{2^{-2n} \pi^{s-1}}_{\neq 0} \underbrace{\sin \pi n}_{0} \underbrace{\Gamma(1+2n)}_{(2n)!} \underbrace{\zeta(2n+1)}_{\neq 0}$$ 平凡零点

非平凡零点：(Riemann Hypothesis) 都在 $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ 线上.

回顾.

重要性质：函数项级数的一致收敛性

核心：收敛速度与 z 无关.

一致收敛的判别：Cauchy 和 Weierstrass-M.

Cauchy：分析部分和 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \epsilon$ （需要不等式技巧）

Weierstrass-M：逐项有界，$|f_k(z)| \le M_k$. 并验证 $\sum_k M_k$ 收敛.

$\Rightarrow$ 一致绝对收敛.

经典例子：$\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ $N(0,1)$ 内 绝对收敛. 不一致收敛.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^{k-1}}{k+g(z)}$，$g(z) \ge 0$ 时. 一致收敛. 不绝对收敛.

一致与绝对没有必然关系.

一致收敛的好处：

① 逐项连续 $\xrightarrow{\text{一致收敛}}$ 和函数收敛.

② C 上逐项连续 $\xrightarrow{\text{一致收敛}}$ 和函数可积，$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C$

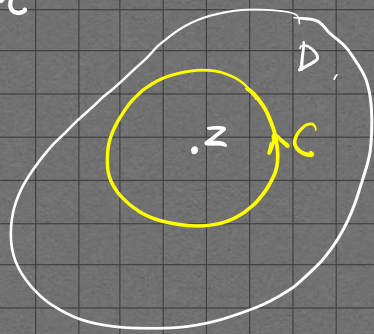
③ D内逐项解析 $\xrightarrow{\text{内闭一致收敛}}$ ⓐ 和函数解析.

Weierstrass定理.

ⓑ $\frac{d^p}{dz^p}\sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^p}{dz^p}$ $p>1$.

ⓐ: $\xrightarrow{\text{内闭一致收敛}} \oint\sum_{k=1}^{\infty} = \oint\sum_{k=1}^{\infty} \xrightarrow[\text{逐项积分为0}]{\text{逐项可积}} \oint_C S(z)\,dz = 0$.

ⓑ 估计大n误差. $\left|\oint_C \frac{S(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\,d\zeta - \sum_{k=1}^{n}\oint_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\,d\zeta\right|$



④ Cauchy积分定理的逆. D内连续 + D内围线积分恒零 $\Rightarrow$ 解析.

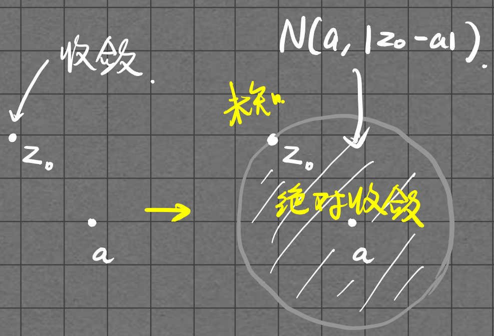
幂级数

定义：$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(z-a)^k$ ，$a,\lambda_k\in\mathbb{C}$. 称为幂级数.

最简单的复函数项级数，$\boxed{\text{逐项解析.}}$

感兴趣：和函数解析性质.

Weierstrass：关键找到一致收敛区域



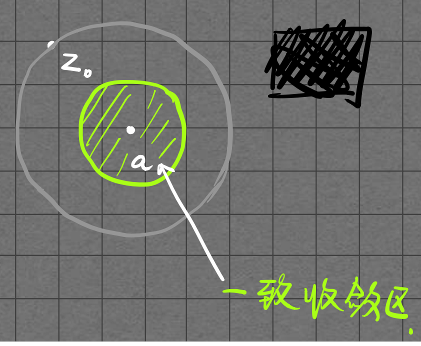
Abel定理：(关于绝对/一致收敛半径)

设 $S(z)\equiv\sum\lambda_k(z-a)^k$ 在 $z_0(\neq a)$ $\boxed{\text{收敛}}$，则

ⓐ $S(z)$ 在 $N(a,|z_0-a|)$ 内绝对收敛

ⓑ 在 $N(a,|z_0-a|)$ 内闭一致收敛.

(由ⓐ.自然也绝对收敛)



说明：

考察逐项取绝对值：$\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k||z-a|^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k \left|\lambda_k(z_0-a)^k\right|$ ①

注意到 $\sum_k \lambda_k(z_0-a)^k$ 收敛，于是 $\lambda_k(z_0-a)^k$ 有界 解释

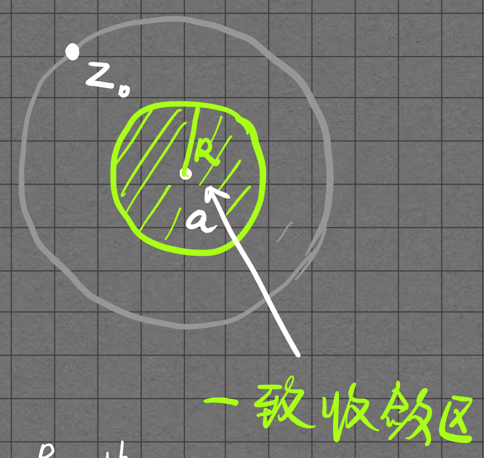
$$\boxed{\Longleftrightarrow \exists M \ \text{s.t.}\ |\lambda_k(z_0-a)^k|<M.}$$ ②

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k |\lambda_k(z_0-a)^k| < \boxed{M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k}$$ ③

ⓐ 当 $\underbrace{|z-a|<|z_0-a|}_{N(a,\ |z_0-a|)}$，$M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k$ 收敛 $\xrightarrow[\text{判敛}]{\text{比较}}$ 绿色级数收敛

$\Downarrow$

$N(a,|z_0-a|)$ 内 原级数绝对收敛.



ⓑ 要证的是一致（+绝对）收敛.

自然联想 Weierstrass-M.

当 $|z-a|\leqslant R<|z_0-a|$，有

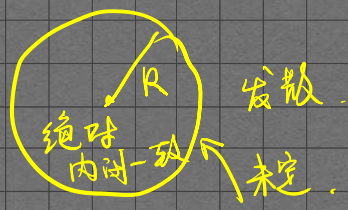
$$\begin{cases} \text{逐项有界.}\ \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k |\lambda_k(z_0-a)^k| \overset{③}{<} M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k < \underbrace{M\left|\frac{R}{z_0-a}\right|^k}_{\text{与}z\text{无关}} \\ \text{界级数}\ \ \sum_{k=0}^{\infty}M\left|\frac{R}{z_0-a}\right|^k \ \text{收敛.} \end{cases}$$

$\xrightarrow[\text{M-判敛.}]{\text{Weierstrass}}$ 原级数绝对+一致收敛.

推论. 若 z_0 为发散点. 则 S 在 $N(a, |z_0-a|)$ 外发散. (反命题)

推论: 幂级数必有 $\boxed{\text{收敛半径}R}$, s.t. $|z-a|<R$ 级数绝对收敛且内闭一致收敛. 而在 $|z-a|>R$ 发散 ∎

定义: $|z-a|=R$: 收敛圆.



思考: ① $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 的收敛半径是多少? $R=1$

② $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k$ 的收敛半径是多少? $z'=\lambda z$ $R=\frac{1}{|\lambda|}$

③ $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-n} z^k$ - - - - - - 把 λ^{-n} 提出. $R=\frac{1}{|\lambda|}$

④ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} z^k$ $\sim e^{\lambda z}$, $R=\infty$.

收敛半径很重要。下面是求收敛半径的方法。

Cauchy 收敛半径求法：$S = \sum \lambda_k z^k$

如 $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\lambda_k} \equiv l \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，则 S 的收敛半径 $R = \frac{1}{l}$

$\overline{\lim_{k\to\infty}}$ 为上极限，即所有$\boxed{\text{收敛}}$子数列的极限最大值。（见下面例子）

基准例子：$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k$　　$\sqrt[k]{|\lambda|^k} = |\lambda| \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\lambda|^k} = |\lambda|$

$\Rightarrow R = \frac{1}{|\lambda|}$

例：$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(\lambda + (-1)^k)^k}_{\lambda_k} z^k$，$\lambda > 0$.

ⓐ $\{\Lambda_k\} \equiv \{\sqrt[k]{|\lambda_k|}\} = \{|\lambda + (-1)^k|\}$ 不是收敛数列，是振荡数列

ⓑ 可以看出极限最大的收敛子列为 $\{\Lambda_{2k}\} = \{(\lambda+1)\}$（因为 $\lambda > 0$）

$\Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[2k]{(\lambda+1)^{2k}} = \lambda + 1$.

$\Rightarrow$ 收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda+1}$.

事实上，原级数

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+1)^{2k} z^{2k} + \sum_{k=0} (\lambda-1)^{2k+1} z^{2k+1}.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+1)^{2k} (z^2)^k + z(\lambda-1) \sum_{k=0} (\lambda-1)^{2k} (z^2)^k.$$ （z^2 级数）

$$= S_1(z^2) + z(\lambda-1) S_2(z^2)$$

S_1 收敛半径 $R_{z^2} = \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{|\lambda+1|^{2k}} \right]^{-1} = \left(\frac{1}{|\lambda+1|}\right)^2 \Rightarrow R_z = \frac{1}{|\lambda+1|} = \frac{1}{\lambda+1}$

S_2 收敛半径 $R_z = \frac{1}{|\lambda-1|}.$

取较小半径 $R = \left|\frac{1}{\lambda+1}\right|$ （因为 $\lambda > 0$）

取上极限的核心思想：把原级数拆分为子级数 $S^{(i)}$ 使得子级数系数有正常极限，$\lim \sqrt[k]{\lambda_k^{(i)}} \Rightarrow R^{(i)} = \frac{1}{\text{极限}^{(i)}}$

取最小的 $R^{(i)}$

d' Alembert 的收敛半径：如果 $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|}_{\text{普通极限.}} \equiv \ell \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 则收敛半径为 $R=\frac{1}{\ell}$

[redacted]

基准例子: $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k$

$$\left|\frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^k}\right| = |\lambda| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right| = \ell = |\lambda| \Rightarrow R=\frac{1}{|\lambda|}$$

例子: $S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$ 与 $S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\lambda_k z^k$

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)}{k}\,\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|}_{\frac{1}{R_2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right| = 1\cdot\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|}_{\frac{1}{R_1}}$$

例子: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{k!} = \frac{(k+1)\quad k^k}{(k+1)\ (k+1)^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} \Rightarrow R=e.$$

即 $k\to\infty$ 时，$\frac{k!}{k^k}$ 一定程度上像 $\left(\frac{1}{e}\right)^k$

的确有 Stirling 渐近公式

$$\frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

在收敛圆内，幂级数的和函数解析，求导和积分均与无穷求和交换，且收敛半径不变。

说明：由于幂级数在收敛圆内闭一致收敛

$\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ 和函数的导数、积分 = 逐项求导、积分的和。

考虑 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (z-a)^k$

逐项求导：$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k\lambda_k}_{\lambda_k'}(z-a)^{k-1} \Rightarrow \sqrt[k]{\lambda_k'} = \sqrt[k]{k\lambda_k}$

$\Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k\lambda_k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\lambda_k}$，$\boxed{\text{因 } \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k} = 1}$

$\Rightarrow$ 收敛半径不变。

关键：Weierstrass 逐项求导积分

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$.

$\Rightarrow$

逐项求积分也一样。