

数学物理方法作业答案

潘逸文^{*}; 余钊焕[†]

中国广州中山大学物理学院

October 2, 2019

简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文件也会每周更新, 可在 QQ 群文件, 或 <https://panyw5.github.io/courses/mmp.html> 以及 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

^{*}Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{e}, \quad (b) 2 + \sqrt{2}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (d) \sqrt{3} + i \text{ 的所有 } 7 \text{ 次方根} \quad (1.1)$$

答 (辐角可任意添加 $2\pi n$ 都对)

$$(a) \frac{i}{e} = \frac{e^{\pi i/2}}{e} = \left(\frac{1}{e}\right) e^{\pi i/2} \quad (1.2)$$

$$(b) |2 + \sqrt{2}i| = \sqrt{2^2 + 2} = \sqrt{6}, \Rightarrow 2 + \sqrt{2}i = \sqrt{6} e^{i \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (1.3)$$

$$(c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}} = 1 + e^{\frac{9\pi i}{14} + \frac{-\pi i}{7}} = 1 + e^{\frac{\pi i}{2}} = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2} e^{\pi i/4} \quad (1.4)$$

$$(d) \sqrt{3} + i = 2e^{i \arctan \frac{\sqrt{3}}{1}} = 2e^{i \frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^{1/7} = 2^{1/7} e^{\frac{i\pi}{42}} e^{\frac{2\pi k i}{7}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6 \quad (1.5)$$

2. 定义点集 $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0, R)\}$, 其中 $R > 0, N = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}_{>0}$ 。讨论 S_N 与 S_{N+1} 之间谁是谁的子集, 是否真子集, 写明推理。

答: S_N 实际上可以写成 $S_N = \{z \in \mathbb{C} | |z| < R^N\} = N(0, R^N)$ 。

(1) 当 $R > 1, R^{N+1} > R^N$, 因此 $S_N \subset S_{N+1}$, 是真子集

(2) 当 $R = 1, R^{N+1} = R^N$, 因此 $S_N = S_{N+1}$, 不是真子集

(3) 当 $R < 1, R^{N+1} < R^N$, 因此 $S_{N+1} \subset S_N$, 是真子集

3. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq R\}$, 其中 $R > 0$ 。求解最大的 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于任意 S 的内点 z , z^N 都还是内点。写明推理。

答: (意思说对即可, 无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

(1) 当 $0 < R \leq 1$, z 作为任意内点, 有 $|z| < R \leq 1$ 。因此对于任何 $N > 1, |z^N| = |z|^N < |z|$, 从而 z^N 也还是内点。因此, $0 < R \leq 1$ 时 N 可以任意大, 没有最大值, 或说 $N_{\max} = +\infty$ 。

(2) 当 $R > 1$, 则 z 作为任意内点, 可能有 $|z| > 1$, 尤其是极为靠近边界的内点。对于这些点, $|z^2| = |z|^2$ 已经大于 R 了, 但是 $z^1 = z$ 自然还是内点。因此 $N_{\max} = 1$ 。

4. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} | |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$ 。 S 是否区域? 是否单连通?

答: (意思说对即可, 无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

当 $R > 2$ 时, 点集恰为以 ± 1 为焦点的椭圆内部, 因此是区域, 且单连通。

当 $R \leq 2$ 时, 点集为空集, 不是区域, 说连不连通都可以。

2 第二周 (9 月 10 日课上交)

0. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$. S 是否区域? 是否单连通?

答: (意思说对即可, 无需严格证明. 关键要意识到有两种情况。)

当 $R > 2$ 时, 点集恰为以 ± 1 为焦点的椭圆内部, 因此是区域, 且单连通。

当 $R \leq 2$ 时, 点集为空集, 不是区域, 说连不连通都可以。

1. 用代数式 (即 $x + iy$ 的形式) 表达以下复数, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a+ib). \quad (2.1)$$

答: (有多值现象时可以只写某个单值分支的结果)

$$(a) a^i = e^{i \ln a} = \cos(\ln a) + i \sin(\ln a) \quad (2.2)$$

$$(b) i^{a+bi} = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i(a+bi)} = e^{(2k\pi+\frac{\pi}{2})ia - (\frac{\pi}{2}+2k\pi)b} \quad (2.3)$$

$$= e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b} \cos(\frac{\pi a}{2} + 2k\pi a) + i e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b} \sin(\frac{\pi a}{2} + 2k\pi a) \quad (2.4)$$

$$(c) \sin(a+ib) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+ib)} - e^{-i(a+ib)}) = \frac{1}{2i}(e^{-b}e^{ia} - e^b e^{-ia}) \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2i}((\cos a + i \sin a)e^{-b} - (\cos a - i \sin a)e^b) = \frac{1}{2}((e^b + e^{-b}) \sin a + i(e^b - e^{-b}) \cos a). \quad (2.6)$$

2. 设 $u(x, y) = e^x \sin y$, $v(x, y) = -e^x \cos y$, 并考虑复变函数 $w = u(x, y) + iv(x, y)$ 。验证 w 是 \mathbb{C} 上解析函数。

答: 直接计算

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos y. \quad (2.7)$$

显然满足 CR 条件。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数, 同时, 其值域是 \mathbb{R} 的子集。求证 f 是常数函数。

答: 由于 f 的值域是 \mathbb{R} 的子集, 因此 $f = u + iv$ 中 $v = 0$ 。因此由 CR 条件,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.8)$$

即 u 与 x, y 都无关, 是常数。因此 $f = u = \text{常数}$ 。

4. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$, 求其虚部, 并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

答: 设 $v(x, y)$ 存在, 则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x x \sin y - e^x y \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y. \quad (2.9)$$

从而可以计算

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} -(e^x x \sin y + e^x y \sin y)dx + (e^x x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y)dy \quad (2.10)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} -(e^x x \sin y + e^x y \sin y)dx + \int_{(0,x)}^{(x,y)} (e^x x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y)dy \quad (2.11)$$

$$= +e^x x \int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y)dy + e^x \int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y)dy - e^x \int_{(x,0)}^{(x,y)} (y \sin y)dy \quad (2.12)$$

$$= e^x (y \cos y + x \sin y) \quad (2.13)$$

因此 $v(x, y) = e^x (y \cos y + x \sin y) + C$ 。于是

$$u + iv = e^x x \cos y - e^x y \sin y + ie^x (y \cos y + x \sin y) + iC \quad (2.14)$$

$$= e^x (x \cos y - y \sin y + iy \cos y + ix \sin y) + iC \quad (2.15)$$

$$= e^x (x + iy)(\cos y + i \sin y) + iC \quad (2.16)$$

$$= ze^z + iC . \quad (2.17)$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 。

3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z}dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z}dz$, 其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R > 0$, 逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R > 0$, 逆时针方向)。

答: 利用参数积分计算积分。令 $z = re^{i\theta}$, 于是沿着积分曲线有 $dz = rie^{i\theta} d\theta$,

$$I(C) = \int_C \bar{z}dz = \int_C re^{-i\theta} rie^{i\theta} d\theta = (r^2)|_{r=R} i \int d\theta . \quad (3.1)$$

于是有

$$I(C_1) = i \int_0^\pi d\theta = \pi i R^2, \quad I(C_2) = i \int_{-\pi}^0 d\theta = i\pi R^2 . \quad (3.2)$$

2. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续, $G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$ 。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z})dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z})d\bar{z}dz , \quad (3.3)$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$ 。

答：对于题目所述的复变函数，我们可以先对 f 复积分作实部虚部分解（如果直接对 f 用格林公式，没有实虚分解，也算对），并分别利用格林公式，

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_{\partial G} (u dx - v dy) + i \int_{\partial G} (v dx + u dy) \quad (3.4)$$

$$= - \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy . \quad (3.5)$$

又注意到

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) , \quad (3.6)$$

因此代入 $d\bar{z}dz = 2idxy$ ，有

$$\partial_{\bar{z}} f d\bar{z} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) 2idxy + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) 2idxy \quad (3.7)$$

$$= i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy . \quad (3.8)$$

比较 $\int_G \partial_{\bar{z}} f d\bar{z} dz$ 与上面结果可得目标结果。

4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz . \quad (4.1)$$

答：由于 $\sin(\cos z)$ 在全平面解析，我们可以利用 Cauchy 积分公式

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz = 2\pi i \sin(\cos z)|_{z=0} = 2\pi i \sin(1) . \quad (4.2)$$

1. 计算围道积分

$$\oint_C \left(z + \frac{1}{z} \right)^n \frac{dz}{z}, \quad C = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}. \quad (4.3)$$

答:

$$\left(z + \frac{1}{z} \right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k \frac{1}{z^{n-k}} = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{z^{n-2k}} . \quad (4.4)$$

因此

$$\oint_C \left(z + \frac{1}{z} \right)^n \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^n \oint_C C_n^k \frac{1}{z^{n-2k+1}} dz . \quad (4.5)$$

只有当 $n - 2k + 1 = 1$ 才有非零积分值，即此时 $n = 2k$ ，即 n 是偶数。积分值为

$$2\pi i C_n^k = 2\pi i C_{2k}^k . \quad (4.6)$$

也可以用高阶导数公式来做。

$$\oint \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \int (z^2 + 1)^n \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \Big|_{z=0} (z^2 + 1)^n \quad (4.7)$$

$$= \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \Big|_{z=0} \sum_{m=0}^n C_n^m z^{2m} . \quad (4.8)$$

注意到

$$\frac{d^k}{dz^k} \Big|_{z=0} z^\ell = k! \delta_{k\ell} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ k!, & k = \ell \end{cases} , \quad (4.9)$$

因此

$$\frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \Big|_{z=0} \sum_{m=0}^n C_n^m z^{2m} = \frac{2\pi i}{n!} \sum_{m=0}^n C_n^m n! \delta_{n,2m} = 2\pi i C_n^{n/2} \quad \text{if } n \in \mathbb{Z}_{\text{even}}, \quad \text{and } 0 \text{ if } n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} . \quad (4.10)$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} , \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} . \quad (4.11)$$

答：由高阶导数公式，可以得到

$$= \frac{2\pi i}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} [(e^z)^{(n)}]_{z=0} = \frac{2\pi i}{n!} . \quad (4.12)$$

也可以用泰勒展开

$$\oint \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} = \oint \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{z^m}{z^n} \frac{1}{z} dz \quad (4.13)$$

由于只有 $1/z$ 会对积分有贡献，因此只有 $m = n$ 会有贡献，

$$\oint \sum_m \frac{1}{m!} \frac{z^m}{z^n} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \frac{1}{n!} . \quad (4.14)$$

也可以用实函数泰勒展开

$$\oint \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} = \oint \frac{e^z \bar{z}^{n+1}}{z^n \bar{z}^n} \frac{dz}{z \bar{z}} = \oint e^z \bar{z}^{n+1} dz = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta + i \sin \theta} (\cos \theta - i \sin \theta)^{n+1} i (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta \quad (4.15)$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} e^{i \cos \theta} (\cos \theta - i \sin \theta)^n d\theta , \quad (4.16)$$

其中用到 $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = 1$ 。于是

$$i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} e^{i \cos \theta} (\cos \theta - i \sin \theta)^n d\theta \quad (4.17)$$

$$= i \int_0^{2\pi} \sum_{k,\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\ell!} \cos^k \theta (i \sin \theta)^\ell (\cos \theta - i \sin \theta)^n d\theta \quad (4.18)$$

$$= i \int_0^{2\pi} \sum_{K=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!(K-k)!} \cos^k \theta (i \sin \theta)^{(K-k)} (\cos \theta - i \sin \theta)^n d\theta \quad (4.19)$$

$$= i \int_0^{2\pi} \left[\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{1}{K!} \sum_{k=0}^K \frac{K!}{k!(K-k)!} \cos^k \theta (i \sin \theta)^{(K-k)} \right] (\cos \theta - i \sin \theta)^n d\theta \quad (4.20)$$

$$= i \int_0^{2\pi} \left[\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{1}{K!} (\cos \theta + i \sin \theta)^K \right] (\cos \theta - i \sin \theta)^n d\theta . \quad (4.21)$$

积分时，只有 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的零次方项有贡献，因为

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \text{ unless } m, n = 0 . \quad (4.22)$$

于是只有 $K = n$ 才有贡献，此时积分函数为 $(n!)^{-1}(\cos \theta + i \sin \theta)^n (\cos \theta - i \sin \theta)^n = 1/n!$ ，因此

$$\int = 2\pi i \frac{1}{n!} . \quad (4.23)$$