特殊点集

定义：开集

设 $S \subset \mathbb{C}$，$\boxed{\text{若 } \forall z \in S.\ z \text{ 都是 } S \text{ 的内点，则 } S \text{ 为开集}}$

开集 刻画/标记 邻近关系

注意，

ⓐ 邻域是特殊的开集

不管邻域多小，邻域中心都有同伴（许多，点的非孤立性）

ⓑ 开集的具体定义依赖最初，邻域的定义。

ⓒ $\bigcup\limits_{i=1}^{\text{有/无限}}$ 开集$_i$ 还是开集

$\bigcap\limits_{i=1}^{\text{有限}}$ 开集$_i$ 还是开集

满足这些条件的开集指定方法

定义了 $\mathbb{C}$ 的拓扑

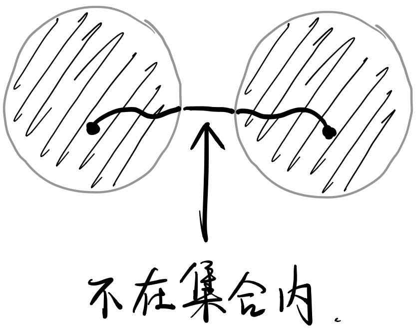
存在非标准拓扑

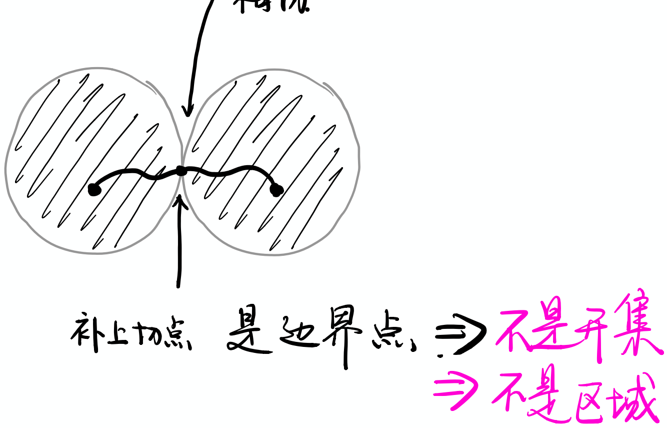
（离散拓扑，任何一点，都是孤立点，）

$\mathbb{C}$ 与 ϕ 是开集

定义：区域 D（domain）

非空、连通开集（即开集内任何两点可用一条完全在集合内的曲线连接）

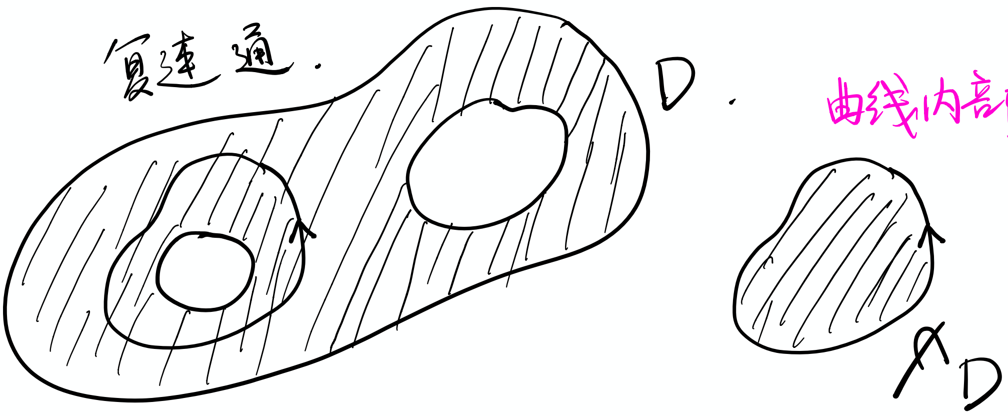




定义：闭域.

区域 D 与边界 ∂D 之并 称为闭域，或 D 的闭包 (closure of D)

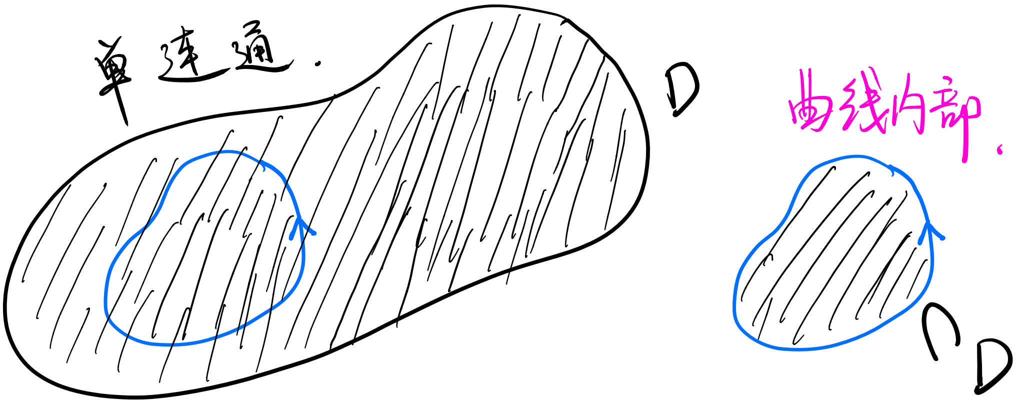
定义：若区域 D 内任何简单闭曲线的内部都属于 D 则称区域 D 单连通. 否则称为复连通.



复联通

||

有穿洞.



单联通

||

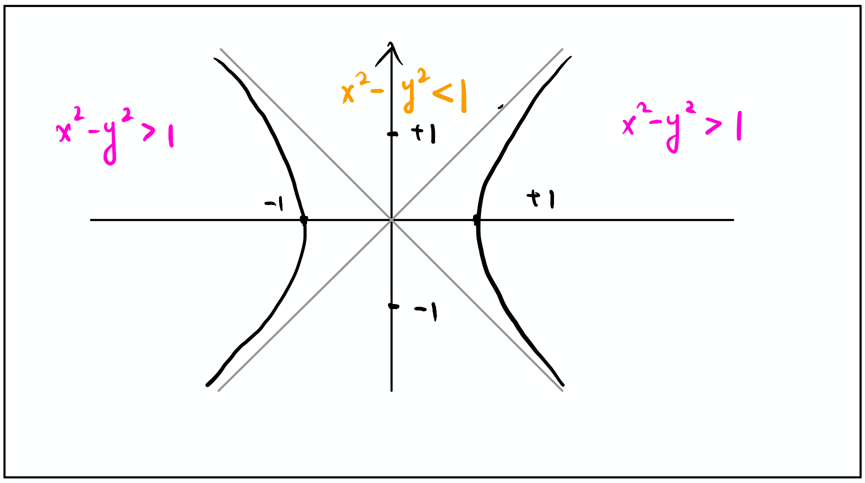
没穿洞.

例： $z = x+iy$， $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow$.

$\operatorname{Re} z^2 < 1$. 开集. 连通 区域. 单连通

$\operatorname{Re} z^2 > 1$ 开集 不连通.

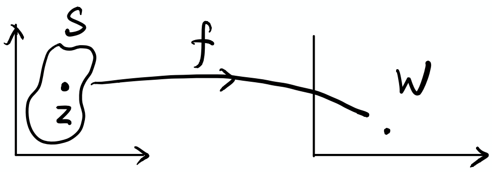
$\operatorname{Re} z^2 = 1$ 不是开集 不连通.



复变函数

定义：单值函数 多值函数

S是点集．若 对 $\forall z\in S$．按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应．
则 f 定义了单值函数，定义域为 S



若对某个或多个 $z\in S$，有多个复数对应．则 f 定义了多值函数．

S 称为函数 f 的定义域．两类函数统称复变函数．记作

$$\boxed{w=f(z) \quad 或 \quad f(z)}$$

记 $w=u+iv$．　$z=x+iy$　则

$$w=f(z)=u(z)+iv(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

即一个复变函数相当于两个2元实变函数．

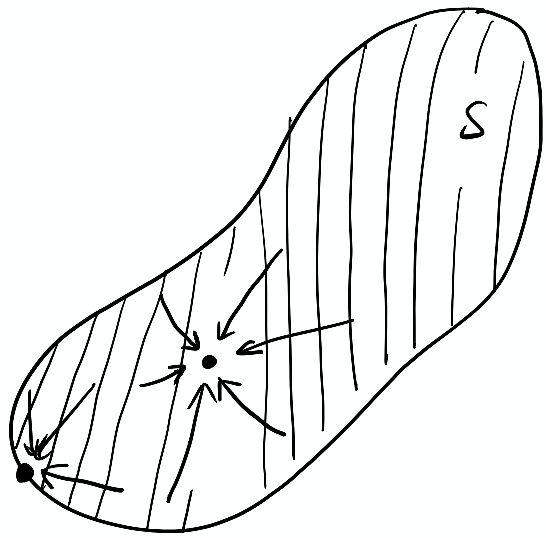
定义：极限

设函数 $w=f(z)$ 在点集 S 上定义. 还不用是区域 z_0 是 S 的聚点

$\boxed{\text{若对 } \forall \epsilon>0.\ \exists \delta.\ \text{s.t. 对 } \forall z\in (N(z_0,\delta)\cap S)-\{z_0\} \text{ 都有 } |f(z)-w_0|<\epsilon.}$

则称 w_0 是 $f(z)$ 在 z_0 的极限.

记作 $w_0=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$



ⓐ. f 在 z_0 可以无定义.

因聚点不需要属于定义域点集

ⓑ S 从四面八方逼近 z_0 时，f 都逼近同一个 w_0.

比一元实变函数极限存在要苛刻

定义：连续性.(一点处)

设函数 f 定义在 S 上. $z_0\in S$，且是 S 的聚点.

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在有限，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

$f(z_0)$ 有定义

则称 f 在 z_0 处连续.

@ $f(z)$ 在 $z_0 = x_0+iy_0$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 x_0,y_0 处连续. [redacted]

定义：若 f 在点集 S 上每点都连续 $\Rightarrow$ f 在 S 上连续.

$\boxed{\text{解析函数}}$

定义：f 在 z_0 处导数

设 f 定义在区域 D 上. $z_0 \in D$.(即 f 在 z_0 有定义)

$$\boxed{\text{若极限 } \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \text{ 存在且有限.}}$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处可导或可微，

该极限称为 f 在 z_0 处的导数或微商，

记作 $\left[f(z)'\right]_{z=z_0}$ $f'(z_0)$ 或 $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$ 或 $\frac{df(z_0)}{dz}$

注意：D 是连通开集，$z \in D$

$\Longrightarrow$ $z+\Delta z \in D$ 对 $|\Delta z|$ 足够多小

$\Rightarrow$ $f(z+\Delta z)$ 有定义 对 $|\Delta z|$ 足够多小

在全$\mathbb{C}$有定义

例3. $f(z) = z^n$. $n=0,1,2,\cdots$ $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}$.

$f(z)$ 处处可导.

全$\mathbb{C}$有定义

例4. $f(z) = \bar{z}$ 即 $f(x,y) = x-iy$. 则

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{x+\Delta x - i(y+\Delta y) - (x-iy)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad \begin{cases} \xrightarrow{\Delta y=0,\ \Delta x\to 0} 1 \\ \xrightarrow{\Delta x=0,\ \Delta y\to 0} -1 \end{cases}$$

异号

明显结果依赖 Δx 与 Δy 的细节. 即极限实际上不存在.

$\Rightarrow f(z) = \bar{z}$ 处处不可导.

定义：解析函数

analytic

若函数在区域 D 内可导，则 $f(z)$ 是 D 上的解析函数，或全纯函数。或称 f 在区域 D 内解析。

holomorphic

求导法则：

都在D内解析。

线性法则：$[f(z)+g(z)]' = f'(z) + g(z)'$

莱布尼兹法则：$[f_1(z) f_2(z)]' = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)$.

求导链式法则：$[f(g(z))]' = \left.\dfrac{dg(w)}{dw}\right|_{w=f(z)} \dfrac{df(z)}{dz}$.

例子：多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^n$ ，$n=0,1,2,\cdots$

则 $P_n(z)' = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}$.

省

例：$F(z) \equiv (z+a)^n = g(f(z))$ ，其中 $g(w)=w^n$，$f(z)=z+a$

$$\frac{d}{dz}(z+a)^n = \left.\frac{dg}{dw}\right|_{w=f(z)} \frac{df(z)}{dz} = n\, w^{n-1}\Big|_{w=z+a} \frac{d(z+a)}{dz}$$

$$= n(z+a)^{n-1}\cdot 1$$

定义：若 f 在 z_0 不解析，但在 z_0 的任一邻域内都有 f 的解析点，则 z_0 为 f 的奇点。

奇点包括：无定义、不连续、不可导等情况。

$f(z)=\bar{z}$ 处处不解析，但没有奇点。

$f(z)=\frac{1}{z}$ ：$z=0$ 是奇点

若 f 在 D 除了在一些孤立点是奇点外，在 D 内处处解析，则称 f 是 D 上亚纯函数

Cauchy-Riemann 条件

- 可导是很强的条件.（要求与 $\Delta z \to 0$ 的方向无关）.
- 寻找新的方法刻画可导性.

令 $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

则 $$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - i v(x,y)}{\Delta x + i \Delta y}$$

ⓐ 考虑 $\Delta y = 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

ⓑ 又考虑 $\Delta x = 0$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + i v(x, y+\Delta y) - u(x,y) - i v(x,y)}{i \Delta y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

ⓐ = ⓑ（方向无关）

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{Cauchy-Riemann 方程.}}$$

是 $f(z)$ 在 z 处可导的必要条件.

ⓒ CR 的复坐标表示

$z(x,y)=x+iy$. $\quad \bar{z}(x,y)=x-iy$

$\Leftrightarrow x(z,\bar{z})=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad y(z,\bar{z})=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$\forall$ 函数 $W(x,y)$ 可看成关于 $z,\bar{z}$ 的函数 $W(x(z,\bar{z}),y(z,\bar{z}))$

反之. $\forall$ 函数 $W(z,\bar{z})$ 可看成关于 x,y 的函数 $W(z,\bar{z})=W(z(x,y),\bar{z}(x,y))$

$\Rightarrow$ 复合函数 $W(x(z,\bar{z}),y(z,\bar{z}))$ 求导.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial z}&=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}-i\frac{\partial W}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}}&=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}\right)\end{aligned}}$$

即: $$\boxed{\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}-i\frac{\partial W}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}\right)}$$

$f=u+iv$,

CR $\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0.$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u+iv)+i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)=0$ (3)

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f=0$. $\quad f(x(z,\bar{z}),y(z,\bar{z}))$ (4)

(5)

即 f 可导性 $\Rightarrow \overbrace{\partial_{\bar{z}}f=0}^{CR}$

或 f 可导性 $\Leftrightarrow \partial_{\bar{z}}f$ + 可微性.

$\frac{\partial}{\partial z}$ 与 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

回顾偏导数：$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \boxed{\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} \cdot (x, y \text{ 独立性})}$

特别地：$\boxed{\frac{\partial x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1.}$

z 与 $\bar{z}$ 不独立　　$z \to z + \Delta z.$　　$\bar{z} \to \bar{z} + \overline{\Delta z}.$　(直观上)

但形式上：

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x - iy) = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy) = 0 \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x-iy) = 1$$

(还有线性性、莱布尼兹律、链式法则)

$\Rightarrow$ 形式上，$\frac{\partial}{\partial z}$，$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 与"偏导数"完全一样，$z, \bar{z}$ 形式上"独立"

(放弃具体直观，拥抱形式代数)

$\frac{\partial}{\partial z}$，$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ~ 对 $z, \bar{z}$ 的"偏导"

$\Longrightarrow$ f 解析(或全纯) $\approx$ f 只含 z 而不含 $\bar{z}$. $\approx \partial_{\bar{z}} f = 0$

(避开奇点).

f 是反全纯 $\approx$ f 只含 $\bar{z}$ 而不含 z　　$\approx \partial_z f = 0.$

注意："若 f 只含 z，则 $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$." 不完全对.

实际上，$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right) \propto \delta^2(x,y)$.　　(后面讲)

定义：二元实函数的可微性.

考虑 D 上二元函数 u . $(x,y)\in D$. 若

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y) = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

其中 $o(\rho)$ 是 $\rho\to 0$ 的高阶无穷小. 则称 f 在 (x,y) 处可微.

定理：设 $f=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 上定义. $\underset{z}{\overset{x+iy}{\parallel}}\in D$. 则

$$\begin{cases} u(x,y),\ v(x,y) \text{ 在 } (x,y) \text{ 处可微} \\ u(x,y),\ v(x,y) \text{ 在 } (x,y) \text{ 满足 CR} \end{cases} \Longleftrightarrow f(z) \text{ 在 } z=x+iy \text{ 处可导.}$$

证明：先证 $f(z)$ 可导 $\Rightarrow$ u,v 可微且在 (x,y) 处满足 CR

$f(z)$ 在 z 处可导 $\Rightarrow$ $f(z+\Delta z)-f(z)=\boxed{f'(z)\Delta z+\eta(z,\Delta z)\Delta z}$.

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\eta(z,\Delta z)=0$.

令 $f'(z)=\alpha+i\beta$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ (1)

则 $\Delta u+i\Delta v=\boxed{(\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)+\eta(z,\Delta z)\Delta z}$

$$=(\alpha\Delta x-\beta\Delta y)+i(\beta\Delta x+\alpha\Delta y)+\eta(z,\Delta z)\Delta z \quad (2)$$

比较左右.

$$\Rightarrow \Delta u(x,y)=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+\mathrm{Re}(\eta(z,\Delta z)\Delta z) \quad (3)$$

$$\Delta v(x,y)=\beta\Delta x+\alpha\Delta y+\mathrm{Im}(\eta(z,\Delta z)\Delta z) \quad (4)$$

又由于 $|\mathrm{Re}\,\eta(z,\Delta z)\Delta z|<|\eta(z,\Delta z)\Delta z|$，因此.

$$\lim_{\Delta z\to 0} \mathrm{Re}\,\eta(z,\Delta z) = 0, \quad (5)$$

类似地有

$$\lim_{\Delta z\to 0} \mathrm{Im}\,\eta(z,\Delta z) = 0 \quad (6)$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(\eta\Delta z)$ 与 $\mathrm{Im}(\eta\Delta z)$ 为高阶无穷小

$\Rightarrow$
$$\Delta u(x,y) = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \text{高阶无穷小} \quad (7)$$
$$\Delta v(x,y) = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + \text{高阶无穷小}. \quad (8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u \text{ 和 } v \text{ 在 } (x,y) \text{ 处可微。 则 且} \\ \alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \qquad \beta = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (9)$$

再证 u, v 可微且 CR $\Rightarrow$ f 可导.

过程把上面证明过程反过来即可，关键是

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \eta_u$$ 中 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\eta_u}{\rho} = 0$，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

定理. 设 $f = u(x,y) + iv(x,y)$ 在区域 D 上定义. $z = x+iy \in D$. 则

$$\begin{cases} u(x,y),\ v(x,y) \text{ 在 } (x,y) \text{ 处有连续1阶偏导} \\ u(x,y),\ v(x,y) \text{ 在 } (x,y) \text{ 处满足 CR} \end{cases} \Leftrightarrow f(z) \text{ 在 } z \text{ 处可导.}$$

注意

u, v 有<u>连续</u> 1 阶偏导数 (强) $\qquad$ u, v 可微 (弱)

$$\begin{cases} u, v \text{ 有连续 1 阶偏导数} \\ \text{CR 条件} \end{cases} \quad \underline{\text{等价}} \quad \begin{cases} u, v \text{ 可微} \\ \text{CR 条件.} \end{cases}$$