数学物理方法作业答案

潘逸文[*], 余钊焕[†]

中国广州中山大学物理学院

October 2, 2019

简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布，本文件也会每周更新，可在 QQ 群文件，或 **`https://panyw5.github.io/courses/mmp.html`** 以及 **`http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html`** 找到。

[*]Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{e}, \qquad (b)\ 2+\sqrt{2}i\ , \qquad (c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \qquad (d)\ \sqrt{3}+i \text{ 的所有 7 次方根} \tag{1.1}$$

答 (辐角可任意添加 $2\pi n$ 都对)

$$(a)\ \frac{i}{e} = \frac{e^{\pi i/2}}{e} = \left(\frac{1}{e}\right)e^{\pi i/2} \tag{1.2}$$

$$(b)\ |2+\sqrt{2}i| = \sqrt{2^2+2} = \sqrt{6}, \Rightarrow 2+\sqrt{2}i = \sqrt{6}e^{i\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}} \tag{1.3}$$

$$(c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}} = 1+e^{\frac{9\pi i}{14}+\frac{-\pi i}{7}} = 1+e^{\frac{\pi i}{2}} = 1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{\pi i/4} \tag{1.4}$$

$$(d)\sqrt{3}+i = 2e^{i\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3}+i)^{1/7} = 2^{1/7}e^{\frac{i\pi}{42}}e^{\frac{2\pi ki}{7}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots 6 \tag{1.5}$$

2. 定义点集 $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0,R)\}$, 其中 $R>0$, $N = 1,2,\ldots \in \mathbb{N}_{>0}$。讨论 S_N 与 S_{N+1} 之间谁是谁的子集，是否真子集，写明推理。

答：S_N 实际上可以写成 $S_N = \{z\in\mathbb{C} || z| < R^N\} = N(0,R^N)$.

(1) 当 $R>1$, $R^{N+1} > R^N$, 因此 $S_N \subset S_{N+1}$，是真子集

(2) 当 $R=1$, $R^{N+1} = R^N$, 因此 $S_N = S_{N+1}$，不是真子集

(3) 当 $R<1$, $R^{N+1} < R^N$, 因此 $S_{N+1} \subset S_N$，是真子集

3. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$，其中 $R>0$。求解最大的 $N\in\mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

(1) 当 $0<R\le 1$，z 作为任意内点，有 $|z|<R\le 1$。因此对于任何 $N>1$, $|z^N| = |z|^N < |z|$，从而 z^N 也还是内点。因此，$0<R\le 1$ 时 N 可以任意大，没有最大值，或说 $N_{\max} = +\infty$。

(2) 当 $R>1$，则 z 作为任意内点，可能有 $|z|>1$，尤其是极为靠近边界的内点。对于这些点，$|z^2| = |z|^2$ 已经大于 R 了，但是 $z^1 = z$ 自然还是内点。因此 $N_{\max} = 1$。

4. 考虑点集 $S \equiv \{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|+|z+1| < R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域？是否单连通？

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

当 $R>2$ 时，点集恰为以 ± 1 为焦点的椭圆内部，因此是区域，且单连通。

当 $R\le 2$ 时，点集为空集，不是区域，说连不连通都可以。

2　第二周 (9 月 10 日课上交)

0. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$，其中 $R > 0$。S 是否区域？是否单连通？

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

当 $R > 2$ 时，点集恰为以 ± 1 为焦点的椭圆内部，因此是区域，且单连通。

当 $R \leq 2$ 时，点集为空集，不是区域，说连不连通都可以。

1. 用代数式 (即 $x + iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，i 是虚数单位，

$$(a)\ a^i, \text{其中 } a > 0, \qquad (b)\ i^{a+bi}, \qquad (c)\ \sin(a+ib)\ . \tag{2.1}$$

答：(有多值现象时可以只写某个单值分支的结果)

$$(a)\ a^i = e^{i\ln a} = \cos(\ln a) + i\sin(\ln a) \tag{2.2}$$

$$(b)\ i^{a+bi} = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i(a+bi)} = e^{(2k\pi+\frac{\pi}{2})ia-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b} \tag{2.3}$$

$$= e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b}\cos(\frac{\pi a}{2} + 2k\pi a) + ie^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b}\sin(\frac{\pi a}{2} + 2k\pi a) \tag{2.4}$$

$$(c)\ \sin(a+ib) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+ib)} - e^{-i(a+ib)}) = \frac{1}{2i}(e^{-b}e^{ia} - e^{b}e^{-ia}) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{2i}((\cos a + i\sin a)e^{-b} - (\cos a - i\sin a)e^{b}) = \frac{1}{2}\Big((e^b + e^{-b})\sin a + i(e^b - e^{-b})\cos a\Big)\ . \tag{2.6}$$

2. 设 $u(x,y) = e^x \sin y$, $v(x,y) = -e^x\cos y$，并考虑复变函数 $w = u(x,y) + iv(x,y)$。验证 w 是 $\mathbb{C}$ 上解析函数。

答：直接计算

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x\cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x\cos y\ . \tag{2.7}$$

显然满足 CR 条件。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

答：由于 f 的值域是 $\mathbb{R}$ 的子集，因此 $f = u + iv$ 中 $v = 0$。因此由 CR 条件，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \tag{2.8}$$

即 u 与 x, y 都无关，是常数。因此 $f = u =$ 常数。

4. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y) = e^x x\cos y - e^x y \sin y$，求其虚部，并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

答：设 $v(x,y)$ 存在，则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x x\sin y - e^x y\sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x x\cos y + e^x\cos y - e^x y \sin y\ . \tag{2.9}$$

从而可以计算

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} -(e^x x\sin y + e^x y\sin y)dx + (e^x x\cos y + e^x \cos y - e^x y\sin y)dy \tag{2.10}$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} -(e^x x\sin y + e^x y\sin y)dx + \int_{(0,x)}^{(x,y)} (e^x x\cos y + e^x \cos y - e^x y\sin y)dy \tag{2.11}$$

$$= +e^x x\int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y)dy + e^x\int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y)dy - e^x\int_{(x,0)}^{(x,y)} (y\sin y)dy \tag{2.12}$$

$$= e^x(y\cos y + x\sin y) \tag{2.13}$$

因此 $v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + C$。于是

$$u + iv = e^x x\cos y - e^x y\sin y + ie^x(y\cos y + x\sin y) + iC \tag{2.14}$$

$$= e^x(x\cos y - y\sin y + iy\cos y + ix\sin y) + iC \tag{2.15}$$

$$= e^x(x+iy)(\cos y + i\sin y) + iC \tag{2.16}$$

$$= ze^z + iC\ . \tag{2.17}$$

其中 $C \in \mathbb{R}$。

3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z}dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z}dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R > 0$，逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R > 0$，逆时针方向)。

答：利用参数积分计算积分。令 $z = re^{i\theta}$, 于是沿着积分曲线有 $dz = rie^{i\theta}d\theta$，

$$I(C) = \int_C \bar{z}dz = \int_C re^{-i\theta}rie^{i\theta}d\theta = (r^2)\big|_{r=R} i\int d\theta\ . \tag{3.1}$$

于是有

$$I(C_1) = i\int_0^{\pi} d\theta = \pi iR^2, \qquad I(C_2) = i\int_{-\pi}^{0} d\theta = i\pi R^2\ . \tag{3.2}$$

2. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z})dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z,\bar{z})d\bar{z}dz\ , \tag{3.3}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

答：对于题目所述的复变函数，我们可以先对 f 复积分作实部虚部分解（如果直接对 f 用格林公式，没有实虚分解，也算对），并分别利用格林公式，

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z})dz = \int_{\partial G}(udx - vdy) + i\int_{\partial G}(vdx + udy) \tag{3.4}$$

$$= -\int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)dxdy + i\int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy\ . \tag{3.5}$$

又注意到

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\ , \tag{3.6}$$

因此代入 $d\bar{z}dz = 2idxdy$，有

$$\partial_{\bar{z}} f d\bar{z}dz = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)2idxdy + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)2idxdy \tag{3.7}$$

$$= i\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy - \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dxdy\ . \tag{3.8}$$

比较 $\int_G \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}dz$ 与上面结果可得目标结果。

4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z}dz\ . \tag{4.1}$$

答：由于 $\sin(\cos z)$ 在全平面解析，我们可以利用 Cauchy 积分公式

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z}dz = 2\pi i \sin(\cos z)|_{z=0} = 2\pi i \sin(1)\ . \tag{4.2}$$

1. 计算围道积分

$$\oint_C \Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n \frac{dz}{z}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\ \}. \tag{4.3}$$

答:

$$\Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k \frac{1}{z^{n-k}} = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{z^{n-2k}}\ . \tag{4.4}$$

因此

$$\oint_C \Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^n \oint_C C_n^k \frac{1}{z^{n-2k+1}}dz\ . \tag{4.5}$$

只有当 $n-2k+1=1$ 才有非零积分值，即此时 $n=2k$，即 n 是偶数。积分值为

$$2\pi i C_n^k = 2\pi i C_{2k}^k \ . \tag{4.6}$$

也可以用高阶导数公式来做。

$$\oint \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \int (z^2+1)^n \frac{1}{z^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=0} (z^2+1)^n \tag{4.7}$$

$$= 2\pi i \frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=0} \sum_{m=0}^{n} C_n^m z^{2m} \ . \tag{4.8}$$

注意到

$$\frac{d^k}{dz^k}\Big|_{z=0} z^\ell = \ell! \delta_{k\ell} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ \ell!, & k = \ell \end{cases} , \tag{4.9}$$

因此

$$2\pi i \frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=0} \sum_{m=0}^{n} C_n^m z^{2m} = 2\pi i \sum_{m=0}^{n} C_n^m \delta_{n,2m} = 2\pi i C_n^{n/2} \quad \text{if } n \in \mathbb{Z}_{\text{even}}, \quad \text{and } 0 \text{ if } n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \ . \tag{4.10}$$

2. 计算围道积分, $n=1,2,3,\ldots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} \ , \qquad C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\ \} \ . \tag{4.11}$$

答：由高阶导数公式，可以得到

$$= \frac{2\pi i}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} [(e^z)^{(n)}]_{z=0} = \frac{2\pi i}{n!} \ . \tag{4.12}$$

也可以用泰勒展开

$$\oint \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} = \oint \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{z^m}{z^n} \frac{1}{z} dz \tag{4.13}$$

由于只有 $1/z$ 会对积分有贡献，因此只有 $m=n$ 会有贡献，

$$\oint \sum_m \frac{1}{m!} \frac{z^m}{z^n} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \frac{1}{n!} \ . \tag{4.14}$$

也可以用实函数泰勒展开

$$\oint \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} = \oint \frac{e^z \bar{z}^{n+1}}{z^n \bar{z}^n} \frac{dz}{z\bar{z}} = \oint e^z \bar{z}^{n+1} dz = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta} (\cos\theta - i\sin\theta)^{n+1} i(\cos\theta + i\sin\theta) d\theta \tag{4.15}$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i\cos\theta} (\cos\theta - i\sin\theta)^n d\theta \ , \tag{4.16}$$

其中用到 $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = 1$。于是

$$
\begin{aligned}
& i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i\cos\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)^n d\theta && (4.17)\\
= & \, i\int_0^{2\pi} \sum_{k,\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\ell!}\cos^k\theta(i\sin\theta)^\ell(\cos\theta - i\sin\theta)^n d\theta && (4.18)\\
= & \, i\int_0^{2\pi} \sum_{K=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!(K-k)!}\cos^k\theta(i\sin\theta)^{(K-k)}(\cos\theta - i\sin\theta)^n d\theta && (4.19)\\
= & \, i\int_0^{2\pi} \left[\sum_{K=0}^{+\infty}\frac{1}{K!}\sum_{k=0}^{K} \frac{K!}{k!(K-k)!}\cos^k\theta(i\sin\theta)^{(K-k)}\right](\cos\theta - i\sin\theta)^n d\theta && (4.20)\\
= & \, i\int_0^{2\pi} \left[\sum_{K=0}^{+\infty}\frac{1}{K!}(\cos\theta + i\sin\theta)^K\right](\cos\theta - i\sin\theta)^n d\theta\ . && (4.21)
\end{aligned}
$$

积分时，只有 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的零次方项有贡献，因为

$$
\int_0^{2\pi} \cos^m\theta\sin^n\theta d\theta = 0, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}\ ,\ \text{unless}\ m, n = 0\ . \tag{4.22}
$$

于是只有 $K = n$ 才有贡献，此时积分函数为 $(n!)^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n = 1/n!$，因此

$$
\int = 2\pi i\frac{1}{n!}\ . \tag{4.23}
$$