Ejercicios OI / 3DVar / 4DVar

Interpolación óptima en el modelo lineal:

Considerar el modelo del oscilador armónico (asumir un dt=0.1 y un Ω^2=2.0 y una condición inicial con x=0 m y v=1 m/s). Generar una simulación de 200 pasos de tiempo que represente la verdadera evolución del sistema. Generar un conjunto de observaciones de la posición y la velocidad a partir de la verdad asumiendo un error observacional Gaussiano aditivo con desviación estándar q de 1 *m* para la posición y 1 *m/s* para la velocidad.

a) Partiendo de una estimación inicial del estado del sistema con x=2 *m* y v=1 *m/s*, realizar una estimación secuencial del estado del sistema utilizando el método de interpolación óptima. Asumir una matriz B diagonal con una desviación estándar de los errores en posición y en velocidad de 1 m y 1 m/s respectivamente.

b) Discuta cómo haría para estimar la forma de la matriz de covarianza B.

b) Estudiar la convergencia de la estimación al verdadero estado del sistema.

c) Es realista asumir que la matriz de covarianza de los errores del pronóstico permanece constante en el tiempo?

d) Considere el caso en el que el modelo es imperfecto. La verdadera evolución del sistema está dada por $x_{k+1} = Mx_k + \varepsilon$ donde ε es un ruido blanco Gaussiano media cero y matriz de covarianza Q = *I*. Repita en este caso el experimento de estimación y compare los resultados obtenidos con los del ítem previo.

Interpolación óptima en el modelo de Lorenz 63:

Considerar el método de interpolación óptima implementado en el modelo de Lorenz 63:

a) Analice el script main_run_oi.py para familizarizarse con la forma en la que se construye el experimento y como se definen los elementos principales que conforman el ciclo de asimilación.

b) Realice un experimento en donde todas las variables son observadas directamente con una frecuencia igual a 8 pasos de tiempo de integración del modelo.

c) A partir de los resultados obtenidos compare la evolución verdadera del sistema, las observaciones, el campo preliminar y el análisis obtenidos. Analice el error cuadrático medio y el sesgo del error del análisis. Se cumplen las hipótesis planteadas en el método de interpolación óptima?

d) Analice la evolución del error del pronóstico y su sesgo. Hasta cuando es predecible el sistema con el método de asimilación utilizado?

La matriz de covarianza de los errores del pronóstico:

Considerando el experimento de interpolación óptima en el modelo de Lorenz 63. Analice la matriz de covarianza de los errores del pronóstico definida por defecto en dicho experimento. Interprete sus componentes.

a) Realice experimentos de asimilación de 1000 ciclos de asimilación cada uno estudiando la sensibilidad de los resultados a diferentes componentes de dicha matriz. Realice experimentos multiplicando la matriz por defecto por un factor alfa con alfa 0.001 y alfa 10. Qué es lo que estamos asumiendo al realizar estos cambios? Interprete los resultados obtenidos en un y otro caso.
b) Utilizando el método “NMC” estime la estructura de la matriz de covarianza. Repita el experimento utilizando la matriz estimada por dicho método.
c) Evalúe cómo cambia la matriz estimada mediante el método “NMC” cuando: disminuye la frecuencia de asimilación, se duplica el error de las observaciones, el modelo numérico no es perfecto y tiene errores de modelo. En cada caso interprete los cambios encontrados.

Observaciones parciales:
En este ejercicio vamos a considerar el caso en el que solo una variable de estado es observada.
a) Considerar el caso en el que y=x(1). Escribir el operador de las observaciones correspondiente. Escribir explícitamente la corrección introducida a partir de las observaciones. Interpretar la corrección obtenida para x(1), x(2) y x(3). Pueden corregirse las variables no observadas? Cómo se transfiere la información de las cantidades observadas a las no-observadas? Repita este análisis pero asumiendo que B es diagonal.
b) Implemente en el modelo de Lorenz 63 el operador de las observaciones encontrado y correr un experimento con 1000 ciclos de asimilación y el método de interpolación óptima. Analizar los resultados obtenidos y comparar con el caso en el que las 3 variables eran observadas simultáneamente.
c) Repetir el experimento anterior, pero para el caso en donde solo x(3) es observada. Compare los resultados obtenidos con el caso anterior y haga una interpretación de los mismos.

Uso de observaciones integrales:
a) Considerar una observación “integral” en donde y= x(1) + x(2) + x(3). Notar que en este caso tenemos una única observación en cada tiempo.
b) Escribir el operador de las observaciones y la corrección introducida por la observación en cada una de las variables. La corrección en las diferentes variables, es la misma? Por qué?
c) Implementar este operador de las observaciones en el modelo de Lorenz 63. Realizar un experimento con 1000 pasos de observación utilizando el método de interpolación óptima. Converge el método? Comparar los resultados con lo encontrado para el caso en el que las 3 variables se observan directamente.

Implementación de 3DVar en el modelo lineal:

Retomar el método de interpolación óptima implementado en el modelo del oscilador. Implementar el método 3DVar a partir de este ejemplo.
Son equivalentes los métodos de interpolación óptima y 3DVar en este caso? Hay algún caso en el que no valga la equivalencia entre ambos? Discutir.
Discuta las posibles ventajas de 3DVar frente a interpolación óptima. Discuta de qué manera se puede reducir el costo computacional asociado a 3DVar.
Cuando los modelos tienen dimensiones grandes, como se resuelve la inversión de la matriz de covarianza de los errores del pronóstico (B)?

3DVar en el modelo de Lorenz 63:
Considerar el método 3DVar implementado en el modelo de Lorenz 63:
a) Analice el script main_run_3DVar.py para familizarizarse con la forma en la que se construye el experimento y como se definen los elementos principales que conforman el ciclo de asimilación.
b) Realice un experimento en donde todas las variables son observadas directamente con una frecuencia igual a 8 pasos de tiempo de integración del modelo.
c) A partir de los resultados obtenidos compare la evolución verdadera del sistema, las observaciones, el campo preliminar y el análisis obtenidos. Analice el error cuadrático medio y el sesgo del error del análisis. Compare los resultados obtenidos con el método de interpolación óptima.

Optimización del 3DVar (opcional):
Explore algunas de las siguientes posibilidades en el contexto del modelo de Lorenz de 3 variables.
-Precondicionamiento de la matriz de covarianza.
-Gradientes conjugados para la minimización
-Método de Newton para la minimización de la función de costo.

Interpolación óptima y 3DVar con observaciones no lineales:

Considerar el modelo de Lorenz63 con el siguiente operador de las observaciones
y(1) = x(1)**3 / 1000
y(2) = x(2)**3 / 1000
y(3) = x(3)**3 / 1000
(forward_operator_nonlinear)
Verificar que su tangente lineal (forward_operator_nonlinear_tl) se encuentra bien calculado.

a) Utilizando la siguiente matriz de covarianza para los errores del pronóstico

```
P=8.0*np.array([[0.6 , 0.5 , 0.0 ],[0.5 , 0.6 , 0.0 ],[0.0 , 0.0 , 1.0 ]])
```
realice un experimento de 1000 ciclos de asimilación con el método de interpolación óptima. Analice los resultados y compárelos con el caso del operador lineal en donde las variables del sistema eran observadas directamente. Discuta los resultados obtenidos (tenga en cuenta que los errores observacionales son los mismos que los utilizados en el experimento en donde las variables estaban observadas directamente).

b) Utilizando la misma matriz de covarianza del ejemplo anterior, repetir el experimento con el método 3DVar. Comparar los resultados obtenidos con ambas metodologías.

4DVar con un modelo lineal (opcional):

Considere el ejemplo del oscilador lineal utilizado en ejercicios anteriores. Considere una ventana de asimilación de 100 pasos de asimilación (comenzando con el primer paso) y considere una B igual a la identidad.
Implementar el método de 4DVar sobre la ventana de 100 pasos de tiempo. Analizar los resultados. Por qué decimos que 4DVar es un “smoother” y no un filtro?
Comparar la solución obtenida con OI / 3DVar y 4DVar. Cual es más precisa? Por qué?
En este caso lineal conviene tomar ventanas largas o pequeñas?

4DVar con el modelo de Lorenz 63:

Considerar el método de 4DVar implementado con el modelo de Lorenz 63. Analizar los scripts y discutir la forma en la que está implementado el método.
Realizar un experimento de 1000 pasos de asimilación utilizando este método considerando observaciones en todas las variables de estado.
Comparar los resultados obtenidos con el método 3DVar / OI. Interpretar estos resultados.
Discutir qué ventaja tendría extender la ventana de asimilación (dejando fija la frecuencia de asimilación en el caso del 4DVar?). Que limita en la práctica la ventaja de extender dicha ventana?
Discuta qué métodos se aplican en la práctica para reducir el costo computacional asociado al 4DVar? Cómo afectan dichos métodos a la minimización de la función de costo?
Estudiar la sensibilidad del 4DVar a la frecuencia de la asimilación (probar asimilando datos cada 8 pasos de tiempo y cada 16 pasos de tiempo). Comparar la sensibilidad con la obtenida para el método 3DVar. Cual de los dos métodos es más sensible a la reducción de la frecuencia de las observaciones? Analizar este resultado.