



PSCA

Capacidad del Canal

Paola Coves Puelma

Grupo: A3

Tarea: 1

MUIT

Email: paocopue@teleco.upv.es

Asignatura: PSCA – ETSIT UPV

Fecha: 16 de octubre de 2022

Índice

Cuestión 1	1
Solución:	1
Cuestión 2	3
Solución:	3
Apéndice	5

Cuestión 1

Capacidad del canal BSC mediante simulación, en función de la probabilidad de error de bit.

Solución:

Tomando como referencia el canal binario simétrico (BSC), la capacidad del canal se puede calcular de la siguiente forma:

$$C = \max_q I(X, Y) = \max_q H(Y) - H_2(p) \quad (1)$$

Cuando los símbolos son equiprobables, se cumple $q = 0,5$, esto significa que la capacidad ahora se calcula como sigue:

$$\max_q H(Y) = H(Y)|_{q=1/2} = -1/2 \log_2 1/2 - 1/2 \log_2 1/2 = 1 \quad (2a)$$

$$C = \max_q I(X, Y) = 1 - H_2(p) \quad (2b)$$

De esta manera conocemos la probabilidad p , así como el parámetro q y únicamente es necesario realizar el cálculo de la entropía binaria $H_2(p)$ [Ecuación 3](#).

$$H_2(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 1 - p \quad (3)$$

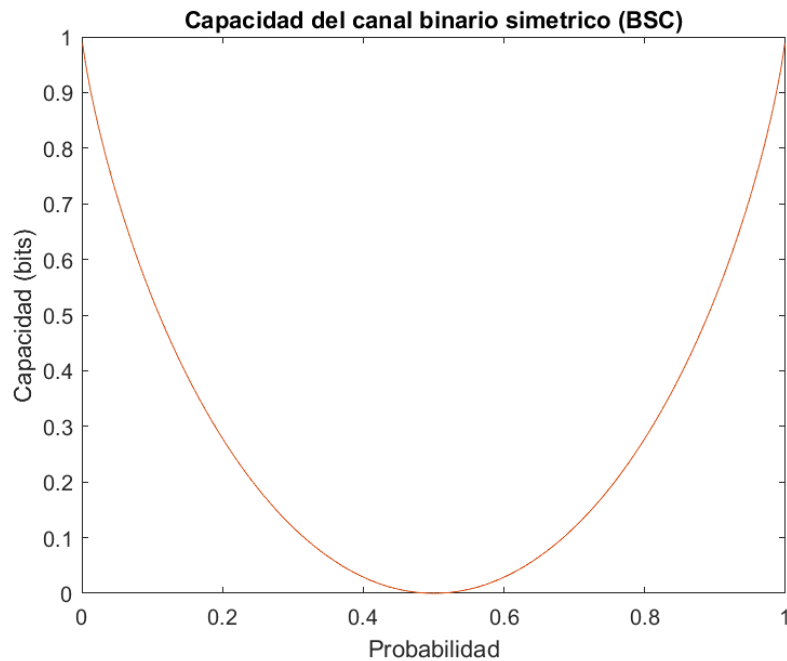


Figura 1: Capacidad del canal binario simétrico (BSC) para símbolos equiprobables.

La [Figura 2](#) muestra la simulación¹ de la capacidad del canal binario simétrico considerando símbolos equiprobables. Puede comprobarse que la simulación es correcta acudiendo

¹Todas las simulaciones han sido realizadas mediante el programa Matlab, y los códigos están detallados en el anexo de la propia memoria

a la explicación teórica de la misma. Se observa que cuando $p = 0,5$ la capacidad es la mínima posible, esto es debido a que se tiene la misma probabilidad de transmitir el símbolo correctamente como de no transmitirlo correctamente. Por otro lado, cuando se tiene $p = 0$ y $p = 1$, se tiene la certeza absoluta de que el bit se transmitió correctamente o no; es decir, se sabe cual fue el símbolo (bit) transmitido.

Por otro lado en caso de considerar símbolos no equiprobables se deberá acudir a la [Ecuación 1](#), sin embargo ya se ha visto el cálculo de la entropía binaria $H_2(p)$, por lo que se procede con el desarrollo de $H(Y)$.

$$H(Y) = -P(Y = 1) \log_2(P(Y = 1)) - P(Y = 0) \log_2(P(Y = 0)) \quad (4a)$$

$$P(Y = 1) = p + q - 2qp \quad (4b)$$

$$P(Y = 0) = 1 - p - q + 2qp \quad (4c)$$

De esta manera realizando el proceso descrito para diferentes valores de q frente a probabilidad, se puede obtener la capacidad del canal binario simétrico para símbolos no equiprobables, mediante simulación. El resultado se muestra en la [Figura 2](#), donde cada línea representa la capacidad frente a la probabilidad de error de bit, para un valor distinto de q .

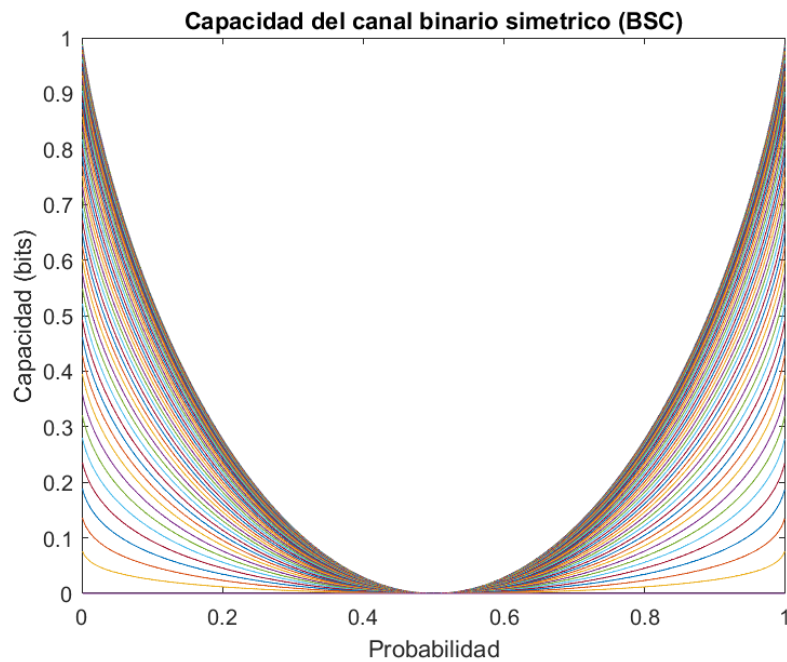


Figura 2: Capacidad del canal binario simétrico (BSC) para distintos valores de q .

Cuestión 2

Capacidad del canal BEC mediante simulación, en función de la probabilidad de borrado.

Solución:

Para el cálculo de la capacidad del canal binario borrador se parte de la misma definición descrita en la [Ecuación 1](#). Por lo que se sigue cumpliendo $q = 0,5$ cuando los símbolos son equiprobables, sin embargo el cálculo de la capacidad final para el canal BEC varía, lógicamente.

$$\max_q H(Y) = H(Y)|_{q=1/2} \quad (5a)$$

$$H(Y)|_{q=1/2} = -(1 - \epsilon) \log_2 (1 - \epsilon) + (1 - \epsilon) - \epsilon \log_2 (\epsilon) = (1 - \epsilon) + H_2(\epsilon) \quad (5b)$$

$$C = (1 - \epsilon) + H_2(\epsilon) - H_2(\epsilon) = 1 - \epsilon \quad (5c)$$

Las ecuaciones anteriores nos ofrecen el resultado que se muestra en la [Figura 3](#). La capacidad se evalúa para diferentes valores de probabilidad de borrado y como puede verse, la capacidad es una función decreciente para un valor creciente de ϵ .

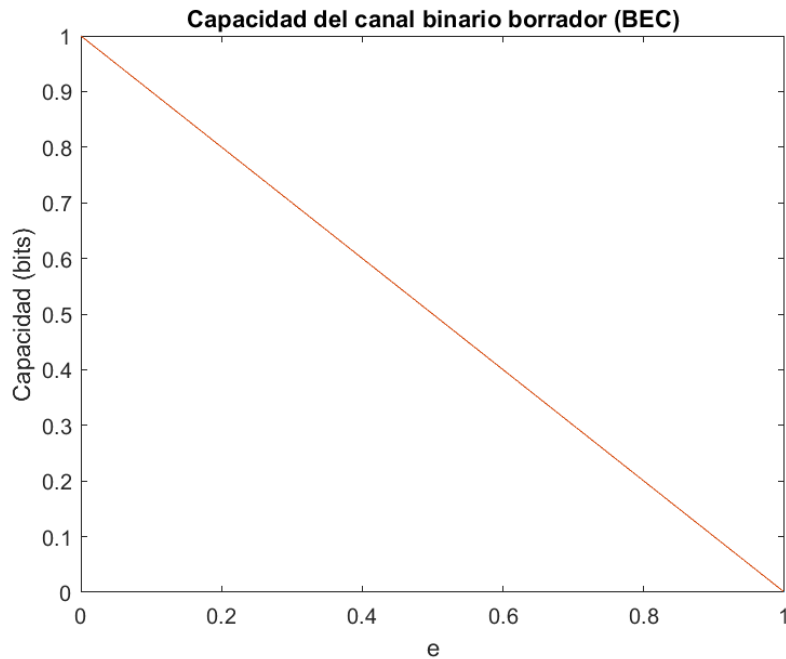


Figura 3: Capacidad del canal binario borrador (BEC) para símbolos equiprobables.

Como en el caso del canal binario simétrico, se procederá a continuación al análisis para un caso de símbolos no equiprobables. Cuando tratamos con símbolos no equiprobables hallar la capacidad del canal varía del siguiente modo:

$$H(Y) = -P(Y = 1) \log_2 (P(Y = 1)) - P(Y = ?) \log_2 (P(Y = ?)) - P(Y = 0) \log_2 (P(Y = 0)) \quad (6)$$

$$P(Y = 1) = q(1 - \epsilon) \quad (7a)$$

$$P(Y = 0) = (1 - q)(1 - \epsilon) \quad (7b)$$

$$P(Y = ?) = \epsilon \quad (7c)$$

Con esta información ya es posible realizar la simulación mediante software. En la [Figura 4](#) se observa la capacidad del canal en cuestión, en función de la probabilidad de borrado ϵ . En esta al igual que en el caso anterior cada línea representa la capacidad frente a la probabilidad de borrado, para un valor distinto de q .

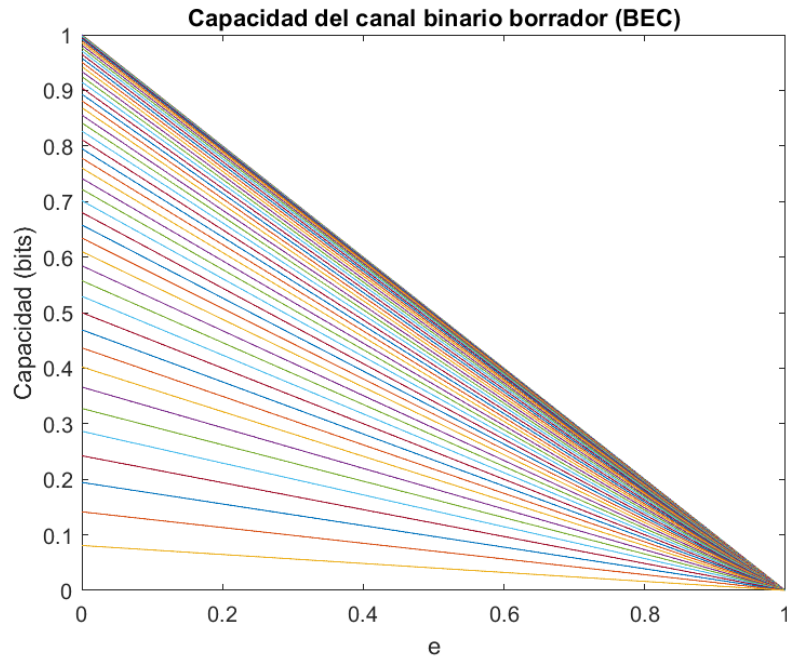


Figura 4: Capacidad del canal binario borrador (BEC) para distintos valores de q .

Apéndice

Código de Matlab

Para el canal binario simétrico, primeramente se crea un vector que corresponde a la probabilidad (la cual va de 0 a 1). Seguidamente y como dice la [Ecuación 3](#) calculamos la entropía binaria, empleando `.*` para realizar el cálculo vectorial con p . Una vez calculada la entropía solo resta obtener la capacidad del canal BSC como se describe en la [Ecuación 5](#); la gráfica de la capacidad obtenida corresponderá entonces a la capacidad para símbolos equiprobables.

Al considerar símbolos no equiprobables, habrá que calcular las probabilidades y entropía descritas en la [Ecuación 4](#). Para ello se crea una variable denominada C_q (que inicialmente está vacía) que almacenará en un vector la capacidad obtenida para distintas q . A continuación, se crea un `for` que abarcará todos los posibles valores de q (0 a 1) y dentro se programarán las ecuaciones comentadas junto a la capacidad. La capacidad C_q se obtiene concatenando la capacidad después de cada iteración. Por último sobre la gráfica inicial se superponen los nuevos resultados.

Listing 1: Tarea 1 – Capacidad del canal BSC.

```

1  %% //////////////////////////////////////////canal BSC↔
   %% //////////////////////////////////////////
2
3  %probabilidad de simbolo
4  p = [0:0.001:1];
5
6  %entropia H (binaria)
7  H=-p.*log2(p)-(1-p).*log2(1-p);
8
9  %capacidad
10 C=1-H;
11
12 figure(1)
13 plot(p,C)
14 title("Capacidad del canal binario simetrico (BSC)")
15 ylabel("Capacidad (bits)")
16 xlabel("Probabilidad")
17
18 % para simbolos no equiprobables
19
20 Cq = [];
21
22 for q=0:0.01:1
23     PY1 = p + q - 2.*q.*p;
24     PY0 = 1 - p -q + 2*q*p;
25
26     HY = -PY1.*log2(PY1)-PY0.*log2(PY0);
27
28     cq = HY-H;
29     Cq = [Cq ;cq];
30 end

```

```

31
32 hold on
33
34 plot(p,Cq)

```

Para el caso de un canal binario borrador, se sigue un procedimiento similar, en el que primeramente se crea un vector con los posibles valores de la probabilidad de borrado (0 a 1); con los suficientes puntos para realizar una buena simulación. En este caso también se crea una variable vacía para almacenar la capacidad para distintos valores de q , denominada en este caso C_{ne} . Dentro del *for*, que recorre los valores de q , se programan las correspondientes Ecuación 7 y Ecuación 6 junto con la capacidad Ecuación 1.

Realizado esto, se tienen todos los parámetros necesarios. Por lo que se calcula la capacidad para símbolos equiprobables y se superponen los resultados con las capacidades para símbolos no equiprobables.

Listing 2: Tarea 1 – Capacidad del canal BEC.

```

1  %% //////////////////////////////////////canal BEC↔
   %% //////////////////////////////////////
2
3  e = [0:0.001:1];
4  C_ne = [];
5
6  for q=0:0.01:1
7      PY1 = q.*(1-e);
8      PY2 = (1-q).*(1-e);
9      PYint = e;
10
11     H2_e = -(1-e).*log2(1-e)-e.*log2(e);
12     HY = -PY1.*log2(PY1)-PY2.*log2(PY2)-PYint.*log2(PYint);
13
14     c_ne = HY-H2_e;
15     C_ne = [C_ne;c_ne];
16 end
17
18
19 %capacidad
20 C = 1-e;
21
22 figure(2)
23 plot(e,C)
24 title("Capacidad del canal binario borrador (BEC)")
25 ylabel("Capacidad (bits)")
26 xlabel("e")
27
28 %no equiprobables
29
30 hold on
31 plot(e,C_ne)

```