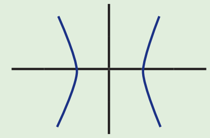
4.2 La hipérbola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < a < c$.

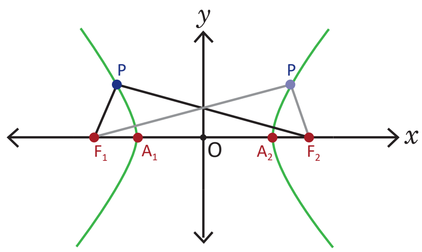
Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una hipérbola**.



Solución

Si el punto P está en la rama izquierda: $d(P, F_2) - d(P,F_1) = 2a$.

Si el punto P está en la rama derecha: $d(P, F_1) - d(P,F_2) = 2a$.



Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

$$d(P, F_2) - d(P,F_1) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a \quad \text{transponiendo,}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \quad \text{simplificando,}$$

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{simplificando,}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Dado que $0 < a < c$, se cumple que $c^2 - a^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = c^2 - a^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Esta igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Dividiendo por a^2b^2 ambos miembros).

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de una hipérbola está dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la hipérbola y tienen coordenadas:

$$F_1\left(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right) \text{ y } F_2\left(\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right).$$

La diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a cada uno de los focos siempre es $2a$.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la hipérbola con focos $F_1(-5, 0)$ y $F_2(5, 0)$ y $a = 3$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 5$ y $a = 3$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$c^2 - a^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Problemas

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

   a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 4$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $a = 2$ c) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 3$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

   a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

Indicador de logro:

4.2 Deduce la ecuación de una hipérbola centrada en el origen dado los focos y el valor de a.

Secuencia:

Una vez que los estudiantes reconocen el lugar geométrico que determina una hipérbola, se puede asociar la ecuación deducida de las condiciones de la definición y asociarla con dicha figura geométrica, esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito:

En la Solución, la relación $b^2 = c^2 - a^2$ está asociada a las condiciones de los cuadrados. En el Ejemplo se presenta la forma de asociar la ecuación de la hipérbola con su definición.

Solución de problemas:

1a) Se tiene que $c = 5$ y $a = 4$ entonces:

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

1b) Se tiene que $c = 3$ y $a = 2$ entonces:

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

1c) Se tiene que $c = 4$ y $a = 3$ entonces:

$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = \left(\sqrt{7}\right)^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

2a) Se tiene que $a^2 = 4^2$ y $b^2 = 3^2$ entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2,$$

por lo tanto, los focos son:

$$F_1(-5, 0),\ F_2(5, 0).$$

2b) Se tiene que $a^2 = 5$ y $b^2 = 4$ entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2,$$

por lo tanto, los focos son:

$$F_1(-3, 0),\ F_2(3, 0).$$

2c) Se tiene que $a^2 = 8$ y $b^2 = 8$ entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2,$$

por lo tanto, los focos son:

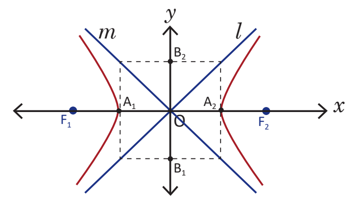
$$F_1(-4, 0),\ F_2(4, 0).$$

4.3 Elementos y propiedades de la hipérbola

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) Determina las coordenadas de los puntos A_1 y A_2.
b) Determina la ecuación de las diagonales del rectángulo que muestra la figura, si $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.



Solución

a) Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, y pertenecen a la hipérbola, se puede evaluar la ecuación de la hipérbola en $y = 0$. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$ y resolviendo:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

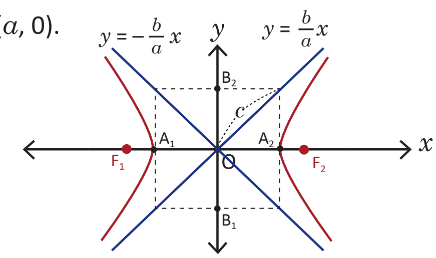
Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$.

b) Para la recta l, dado que pasa por los puntos (a, b) y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = \frac{b}{a}x$.

Para la recta m, dado que pasa por los puntos $(-a, b)$ y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = -\frac{b}{a}x$.

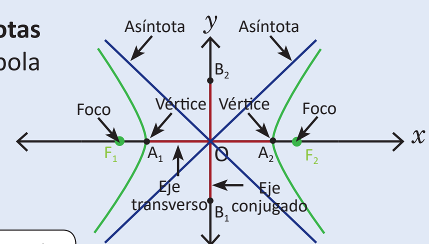


Conclusión

Los puntos A_1 y A_2 de la hipérbola se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$. Además, el punto medio del segmento A_1A_2 se conoce como **centro** de la hipérbola.

Las rectas que tienen ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola, y cumplen que sus gráficas se aproximan a la hipérbola pero nunca la tocan.

El segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola se conoce como **eje transverso**, y el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se conoce como **eje conjugado**.



Para graficar la hipérbola, primero traza las asíntotas y los vértices.

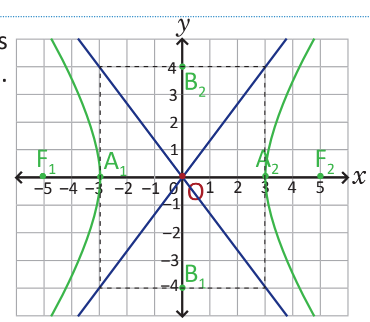
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b, c: $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices: $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ Focos: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$



Al rectángulo formado entre los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2 en ocasiones se le llama **rectángulo asintótico**, y puede utilizarse para trazar las asíntotas de la hipérbola a partir de las diagonales de dicho rectángulo.

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ d) $x^2 - y^2 = 1$

Indicador de logro:

4.3 Identifica los elementos de una hipérbola dada su ecuación para graficarla en el plano cartesiano.

Secuencia:

Una vez establecida la ecuación canónica de la hipérbola, se puede trabajar con los estudiantes los diferentes elementos que la conforman incluyendo las asíntotas, y cómo graficarla en el plano cartesiano a partir de ellos.

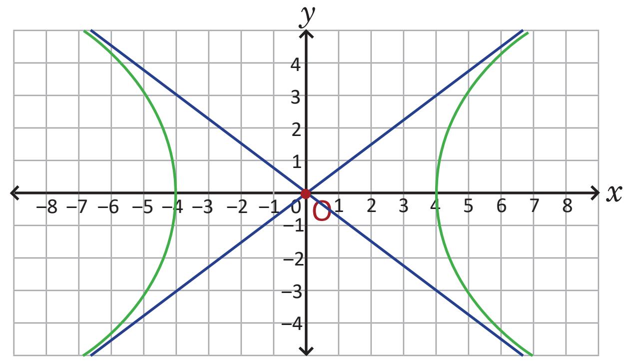
Propósito:

En la Solución se presentan los diferentes elementos que tiene una hipérbola en general, y luego se utiliza el Ejemplo para observar la manera de utilizar estos elementos para graficarla en el plano cartesiano.

Solución de problemas:

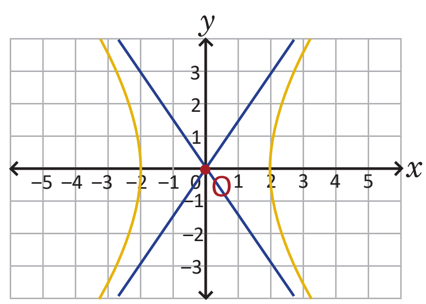
a) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$
Focos $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$
Asíntotas $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$



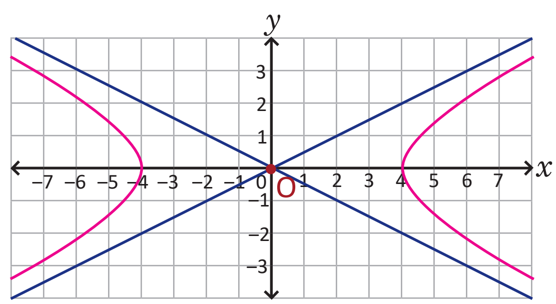
b) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$
Focos $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$
Asíntotas $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$



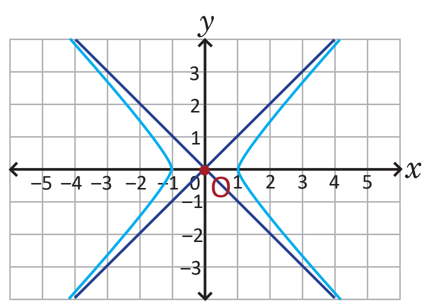
c) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Vértices $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$
Focos $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$
Asíntotas $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$



d) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Vértices $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$
Focos $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$
Asíntotas $y = x$, $y = -x$



Se recomienda no exigir tanta precisión en el bosquejo de la hipérbola, pues para ello sería necesario encontrar otros puntos utilizando su ecuación.

4.4 Desplazamientos paralelos de la hipérbola

Problema inicial

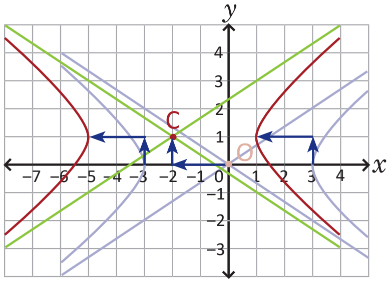
Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Solución

Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ y desplazándola 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Por lo tanto, la gráfica es la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ con centro (–2, 1).



Conclusión

La ecuación de una hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y la variable y por la expresión $y - k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ desplazada –4 unidades horizontalmente y –3 unidades verticalmente.

Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x - (-4)]$, y y por $[y - (-3)]$.

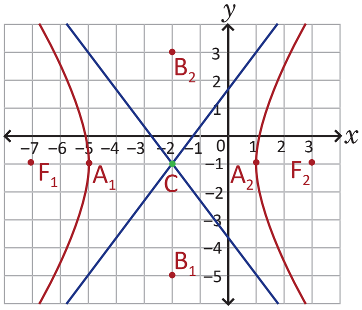
$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta hipérbola es equivalente a $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente, es decir, tiene centro C(–2, –1).

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-5, -1)$, $A_2(1, -1)$
Focos	$F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$	$F_1(-7, -1)$, $F_2(3, -1)$
Asíntotas	$y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$	$y + 1 = \frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, $y + 1 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = 1$
   b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $h = 2$, $k = -4$
   c) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$, $h = -3$, $k = -2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafica en el plano cartesiano.

   a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
   b) $\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$
   c) $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$

Indicador de logro:

4.4 Encuentra y grafica la ecuación de una hipérbola desplazada paralelamente respecto a los ejes de coordenadas.

Secuencia:

Puesto que los estudiantes ya conocen la ecuación de la hipérbola y cómo encontrar los elementos de ella a partir de dicha ecuación, es un momento adecuado para introducir los desplazamientos paralelos en la hipérbola.

Propósito:

En la Solución se espera que los estudiantes apliquen lo que ya conocen sobre desplazamientos paralelos tanto de una gráfica, como de un punto, que se vio en la lección sobre parábola y se siguió aplicando en la de circunferencia y elipse.

Solución de problemas:

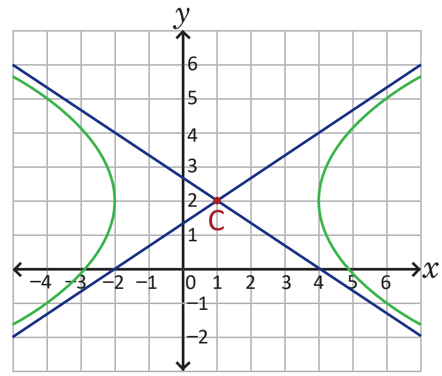
1a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

1b) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{[y-(-4)]^2}{5} = 1$, o bien, $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{5} = 1$.

1c) $\frac{[x-(-3)]^2}{21} - \frac{[y-(-2)]^2}{4} = 1$, o bien, $\frac{(x+3)^2}{21} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

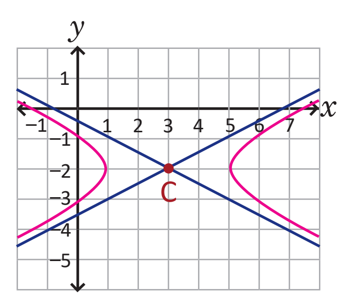
2a)

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-2, 2)$, $A_2(4, 2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$	$F_1(-\sqrt{13}+1, 2)$, $F_2(\sqrt{13}+1, 2)$
Asíntotas	$y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$	$y - 2 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, $y - 2 = -\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$



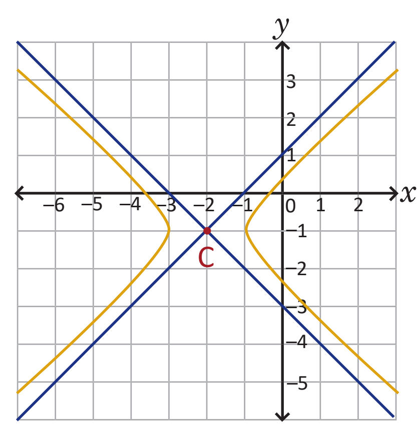
2b)

Ecuación	$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$	$\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$	$A_1(1, -2)$, $A_2(5, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$	$F_1(-\sqrt{5}+3, -2)$, $F_2(\sqrt{5}+3, -2)$
Asíntotas	$y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$	$y - 3 = \frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$, $y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$



2c)

Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(-3, -1)$, $A_2(-1, -1)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2}-2, -1)$, $F_2(\sqrt{2}-2, -1)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y + 1 = (x+2) \Rightarrow y = x + 1$, $y + 1 = -(x+2) \Rightarrow y = -x - 3$



4.5 Ecuación general de la hipérbola

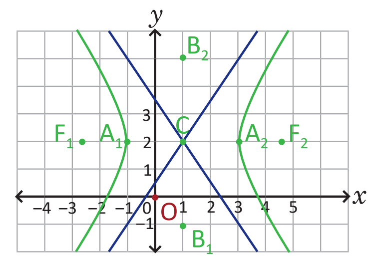
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$
$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) - 43 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$
$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 9 + 16 - 43 = 0 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$
$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y-2)^2}{36} = 1 \quad \text{simplificando,}$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$



Por lo tanto, la gráfica es una hipérbola con centro (1, 2), vértices $A_1(-1, 2)$, $A_2(3, 2)$ y asíntotas

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Conclusión

Una hipérbola puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejándola igualada a 0.

En general, para determinar el centro, los vértices y asíntotas de una hipérbola cuya ecuación sea de la forma $dx^2 - ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresar en la forma

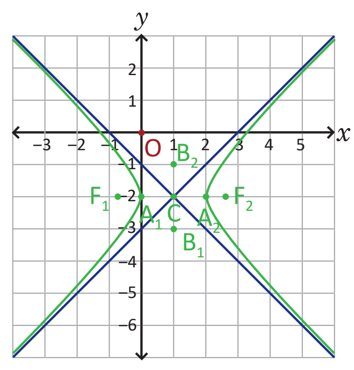
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 - 1 + 4 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$$

Esta hipérbola es equivalente a $x^2 - y^2 = 1$ desplazada 1 unidad horizontalmente y −2 unidades verticalmente, es decir, tiene centro C(1, −2).



Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(0, -2)$, $A_2(2, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2} + 1, -2)$, $F_2(\sqrt{2} + 1, -2)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y = x - 3$, $y = -x - 1$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$
b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$
c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$
e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$
f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

Indicador de logro:

4.5 Determina los elementos de una hipérbola a partir de su ecuación general y traza su gráfica en el plano cartesiano.

Secuencia:

Ahora que los estudiantes ya han aplicado desplazamientos paralelos en la hipérbola, se trabaja con la ecuación general utilizando el procedimiento para completar cuadrados perfectos.

Propósito:

En la clase anterior y en esta quedan ejemplificados los desplazamientos a los 4 cuadrantes del plano cartesiano, para que los estudiantes tengan claridad de los casos.

Solución de problemas:

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

$$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 29 + 16 - 9$$

$$\frac{4(x-2)^2}{36} - \frac{9(y-1)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

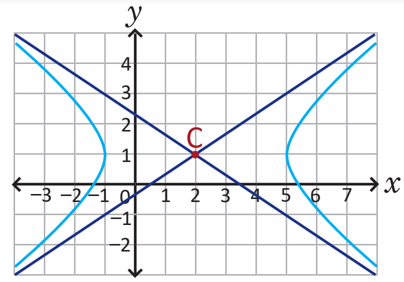
$A_1(-1, 1)$, $A_2(5, 1)$,

$F_1(-\sqrt{13} + 2, 1)$,

$F_2(\sqrt{13} + 2, 1)$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$



b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$

$$25(x-2)^2 - 4(y+2)^2 = 16 + 100 - 16$$

$$\frac{25(x-2)^2}{100} - \frac{4(y+2)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

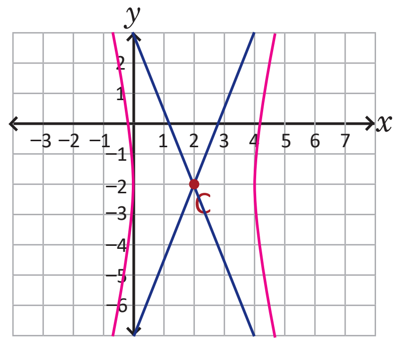
$A_1(0, -2)$, $A_2(4, -2)$,

$F_1(-\sqrt{29} + 2, -2)$,

$F_2(\sqrt{29} + 2, -2)$

$y = \frac{5}{2}x - 7$

$y = -\frac{5}{2}x + 3$



c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$

$$(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 7 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{4(y-1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$$

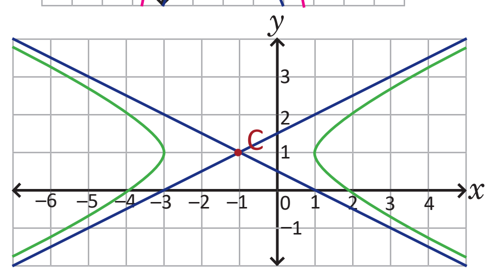
$A_1(-3, 1)$, $A_2(1, 1)$,

$F_1(-\sqrt{5} - 1, 1)$,

$F_2(\sqrt{5} - 1, 1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$

$$16(x+1)^2 - 9(y+3)^2 = 209 + 16 - 81$$

$$\frac{16(x+1)^2}{144} - \frac{9(y+3)^2}{144} = 1$$

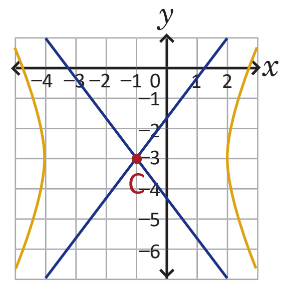
$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$A_1(-4, -3)$, $A_2(2, -3)$,

$F_1(-6, -3)$, $F_2(4, -3)$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$



e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$

$$x^2 - (y+2)^2 = 8 - 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, -2)$, $A_2(2, -2)$,

$F_1(-2\sqrt{2}, -2)$,

$F_2(2\sqrt{2}, -2)$

$y = x - 2$

$y = -x - 2$

f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

$$4(x-1)^2 - 9y^2 = 32 + 4$$

$$\frac{4(x-1)^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, 0)$, $A_2(4, 0)$,

$F_1(-\sqrt{13} + 1, 0)$,

$F_2(\sqrt{13} + 1, 0)$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

4.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

   a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 3$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, y vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$.

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

   a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

   a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $h = 2$, $k = 3$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = -3$, $k = -1$

5. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

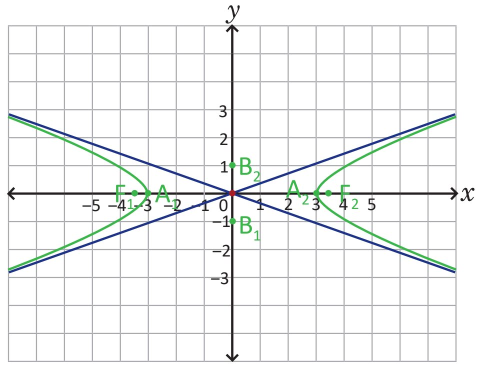
   a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ b) $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

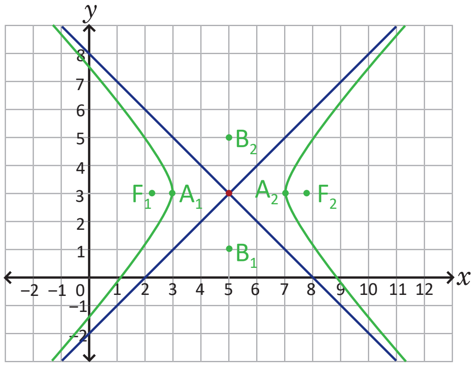
   a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$ b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes gráficas.

   a)



   b)



Indicador de logro:

4.6 Resuelve problemas correspondientes a la hipérbola.

Solución de problemas:

1a) $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

1b) $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

2a) $c^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

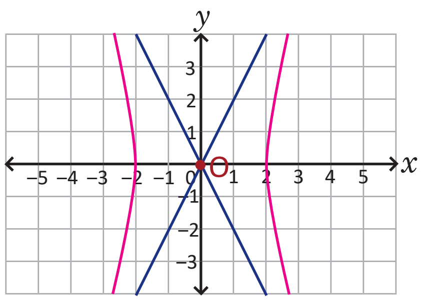
2b) $c^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2$, y los focos son: $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$.

2c) $c^2 = 9 + 4 = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

3a) Vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$

Focos $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$

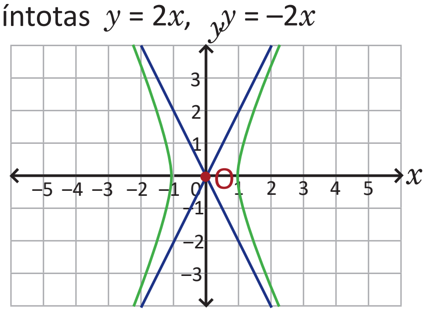
Asíntotas $y = 2x$, $y = -2x$



3b) Vértices $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$

Focos $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$

Asíntotas $y = 2x$, $y = -2x$



4a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.

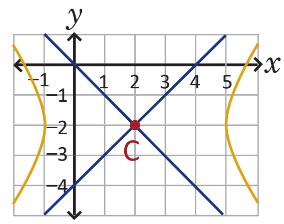
4b) $\frac{[x-(-3)]^2}{9} - \frac{[y-(-1)]^2}{9} = 1$, o bien, $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

5a) $A_1(-1, -2)$, $A_2(5, -2)$,

$F_1(-3\sqrt{2} + 2, -2)$,
$F_2(3\sqrt{2} + 2, -2)$

$y = x - 4$

$y = -x$

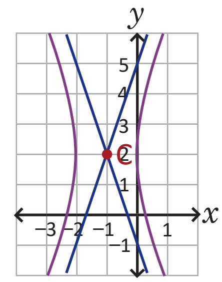


5b) $A_1(-2, 2)$, $A_2(0, 2)$,

$F_1(-\sqrt{10} - 1, 2)$,
$F_2(\sqrt{10} - 1, 2)$

$y = 3x + 5$

$y = -3x - 1$



6a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$

$$(x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 19 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{4(y+1)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-5, -1)$, $A_2(3, -1)$

$F_1(-2\sqrt{5} - 1, -1)$,
$F_2(2\sqrt{5} - 1, -1)$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

6b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

$$9x^2 - (y-3)^2 = 18 - 9$$

$$\frac{9x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$x^2 - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

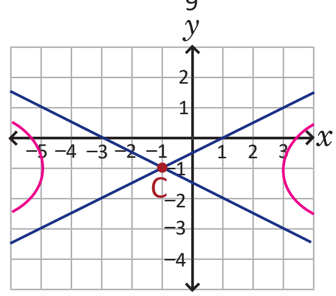
$A_1(-1, 3)$, $A_2(1, 3)$,

$F_1(-\sqrt{10}, 3)$,
$F_2(\sqrt{10}, 3)$

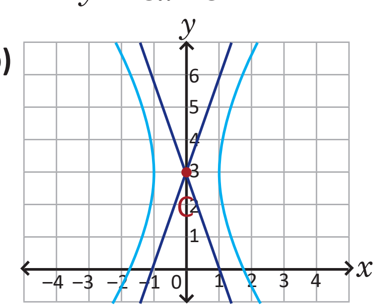
$y = 3x + 3$

$y = -3x + 3$

6a)



6b)



7a) Se identifica que $a = 3$ y $b = 1$, y el centro está en (0, 0), por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{9} - y^2 = 1.$$

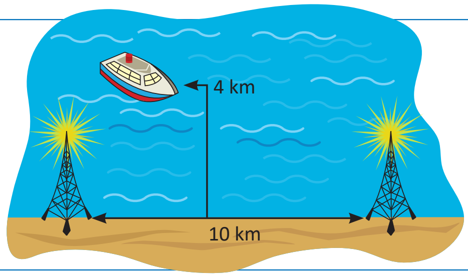
7b) Se identifica que $a = 2$ y $b = 2$, y el centro está en (5, 3), por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

4.7 Aplicaciones de la hipérbola*

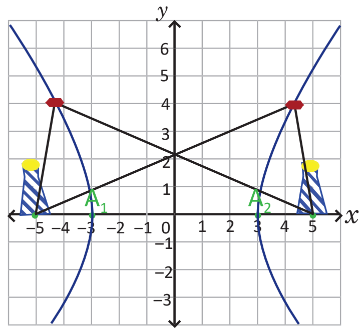
Problema inicial

Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas sobre la costa a 10 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 6 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 4 km de distancia de la costa.



Solución

Considerando la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 6 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce la distancia entre las dos torres (focos), es posible conocer el valor de c, así:



$$|d_2 - d_1| = 2a = 6, \text{ entonces } a = 3,$$
$$2c = 10, \text{ entonces } c = 5,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Para localizar el barco bastará encontrar la coordenada en x cuando $y = 4$:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{4^2}{4^2} = 1 \quad \text{Despejando } x^2.$$

$$x^2 = 2(3^2)$$

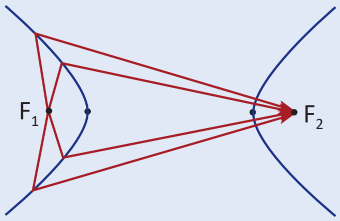
$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

El sistema de navegación ruso CHAYKA y el sistema LORAN utilizan este principio para la localización de navíos, sin embargo poco a poco este tipo de sistemas está siendo reemplazado por la localización GPS.

Conclusión

En una hipérbola los focos cumplen una propiedad reflectora importante: si se toma una línea desde un foco esta, será reflejada por la hipérbola exactamente sobre el otro foco.

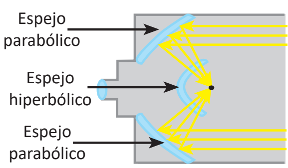
Esta propiedad reflectora parecida a la de la elipse y la parábola hace de las formas hiperbólicas herramientas de aplicación en diversos ámbitos científicos.



Problemas

1. Las señales de un barco recibidas por un sistema CHAYKA cuyas torres están ubicadas sobre la costa a 26 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 10 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 12 km de distancia de la costa.

2. Un telescopio Maksutov-Cassegrain funciona de modo que recibe las señales de luz, y son reflejadas por un espejo parabólico (cortado) hacia el foco, el cual es foco de otro espejo, pero este es hiperbólico como lo muestra la figura. Determina la función del espejo hiperbólico y explica el funcionamiento del telescopio Maksutov-Cassegrain.



Indicador de logro:

4.7 Utiliza las propiedades de los focos y la ecuación de la hipérbola para resolver problemas sobre objetos hiperbólicos.

Secuencia:

Después de abordar los conceptos básicos sobre la hipérbola, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real, basados fundamentalmente en la propiedad reflectora de la hipérbola. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito:

En las soluciones a los Problemas los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para luego resolverlos e interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. Resolviendo como el Problema inicial, se considera la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 10 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce que la distancia entre las dos torres es 26 km (focos), es posible conocer el valor de c, así:

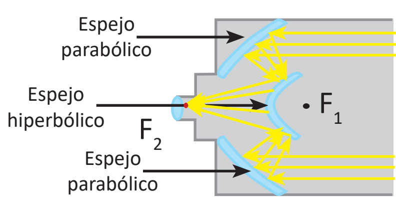
$$|d_2 - d_1| = 2a = 10, \text{ entonces } a = 5,$$
$$2c = 26, \text{ entonces } c = 13,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$.

Para localizar el barco bastará con encontrar la coordenada en x cuando $y = 12$:

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{12^2}{12^2} = 1 \quad \text{despejando } x^2.$$
$$x^2 = 2(5^2)$$
$$x = \pm 5\sqrt{2}$$

2. Para este problema es suficiente con que los estudiantes comprendan que por la propiedad reflectora del foco de la parábola, los rayos de luz captados son reflejados hacia el foco F_1 el cual es compartido por el espejo hiperbólico, cuya propiedad hace reflejar los rayos desde dicho foco F_1 hacia el otro foco F_2 de la hipérbola, el cual en este caso coincide con el ocular del telescopio, en donde se observa lo que capta el telescopio.



1.1 Propiedades de potencias con igual base y exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^2 \times 2^3$ b) $3^6 \div 3^2$ c) $(2^2)^3$

Solución

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{- veces}}$

a^n: a base, n exponente, a^n potencia.

a) $2^2 \times 2^3$

$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{5\text{-veces}}$

$= 2^5$

Se cumple que: $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$.

b) $3^6 \div 3^2$

$3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$

$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}}$ simplificando

$= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\text{- veces}}$

$= 3^4$

Se cumple que: $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$.

c) $(2^2)^3$

$(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$

$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6\text{-veces}}$

$= 2^6$

Se cumple que: $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6$.

Definición

1. Si a y b son números reales, m y n enteros positivos, las reglas para efectuar operaciones con potencias de igual base son:

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$ y $m > n$) c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

   La propiedad del literal b) también se escribe como fracción: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

   Si a es un número real: $a^1 = a$

2. Si a es un número real positivo, entonces:

   a) Si n es par entonces:
   $(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad par de números negativos}} = a^n$

   b) Si n es impar entonces
   $(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad impar de números negativos}} = -a^n$

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $3^6 \times 3^4$ b) $(-3)^2 \times (-3)^4$ c) $(-2)^3 \times (-2)^2$

d) $5^7 \div 5^3$ e) $(-2)^5 \div (-2)^3$ f) $(-3)^8 \div (-3)^5$

g) $(6^5)^2$ h) $(10^4)^3$ i) $[(-3)^3]^5$

Indicador de logro:

1.1 Expresa como potencia, productos y cocientes con igual base y exponente positivo.

Secuencia:

En séptimo grado se estudiaron las potencias con exponentes dos y tres, ahora se expande esta definición para todo exponente natural; se introducirán paso a paso los valores de los exponentes hasta los números reales. En esta clase se establecen las propiedades utilizadas en las operaciones con potencias que tienen la misma base.

Propósito:

En el numeral 2 de la Definición se establece que toda potencia de un número negativo debe expresarse como la potencia de un número positivo de tal manera que el signo quede antes de la potencia, por lo que en la solución de los problemas los estudiantes deben reflejar el uso de esta indicación.

Solución de problemas:

a) $3^6 \times 3^4 = 3^{6+4} = 3^{10}$

b) $(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 3^6$

c) $(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = -2^5$

d) $5^7 \div 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$

e) $(-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = 2^2$

f) $(-3)^8 \div (-3)^5 = (-3)^{8-5} = (-3)^3 = -3^3$

g) $(6^5)^2 = 6^{5\times 2} = 6^{10}$

h) $(10^4)^3 = 10^{4\times 3} = 10^{12}$

i) $[(-3)^3]^5 = (-3)^{3\times 5} = (-3)^{15} = -3^{15}$

1.2 Propiedades de potencias con igual exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^3 \times 3^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Solución

a) $2^3 \times 3^3$

$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$; asociando,

$= \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{\text{3-veces}}$

$= 6^3$

Se cumple que: $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$.

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Del problema anterior se tiene: $6^3 = 2^3 \times 3^3$.

Al dividir ambos miembros de la igualdad por 2^3 se tiene:

$\frac{6^3}{2^3} = \frac{\cancel{2^3} \times 3^3}{\cancel{2^3}} = 3^3$

Se cumple que: $\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$.

Conclusión

- Si a y b son números reales y m es un entero positivo, las reglas para efectuar operaciones de potencias con igual exponente son:

  a) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

  b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (si $b \neq 0$)

- La propiedad b) se expresa como división así:

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

- Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales, entonces:

$$a_1^m \times a_2^m \times \cdots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^m$$

Ejemplo

Expresa el producto $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ como una sola potencia.

a) $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$

Por lo tanto, $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 30^2$.

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $6^{10} \times 4^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7$

c) $(5)^5 \times (-8)^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5$

e) $12^5 \div 6^5$

f) $20^3 \div (-4)^3$

g) $(-24)^4 \div (3)^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4$

Indicador de logro:

1.2 Expresa como potencia productos y cocientes con igual exponente positivo.

Secuencia:

Se establecen las propiedades cuando al multiplicar o dividir potencias se tienen exponentes iguales. Hasta aquí se han estudiado las propiedades que involucran exponentes positivos; de nuevo, se aplican potencias a cantidades positivas y negativas, como en la clase anterior.

Posibles dificultades:

Los estudiantes pueden confundir las propiedades de potencias: el caso cuando tienen igual base con el caso en el que tienen igual exponente, por lo que debe sugerirles que observen qué caso se cumple al trabajar cada problema.

Solución de problemas:

a) $6^{10} \times 4^{10} = (6 \times 4)^{10} = 24^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7 = (-3 \times 6)^7 = (-18)^7 = -18^7$

c) $(5)^5 \times (-8)^5 = (5 \times (-8))^5 = (-40)^5 = -40^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5 = ((-2) \times (-7))^5 = 14^5$

e) $12^5 \div 6^5 = (12 \div 6)^5 = 2^5$

f) $20^3 \div (-4)^3 = (20 \div (-4))^3 = (-5)^3 = -5^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4 = (-24 \div 3)^4 = (-8)^4 = 8^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6 = (-15 \div (-5))^6 = 3^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4 = (-35 \div (-7))^4 = 5^4$

1.3 Exponente cero y exponente negativo*

Problema inicial

Asume que la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ se cumple para todo entero m y n. Efectúa las siguientes divisiones de dos maneras distintas:

a) $6^3 \div 6^3$

b) $3^3 \div 3^7$

Solución

a) $6^3 \div 6^3$

Utilizando las propiedades de la división

$6^3 \div 6^3 = 1$

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$$6^3 \div 6^3 = 6^{3-3} = 6^0$$

Por lo tanto, $6^3 \div 6^3 = 6^0$.

Así 6^0 y 1 representan el mismo número.

b) $3^3 \div 3^7$

Utilizando la simplificación:

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7}$$

$$= \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}$$

$$= \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= \frac{1}{3^4}$$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = \frac{1}{3^4}$.

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$$3^3 \div 3^7 = 3^{3-7} = 3^{-4}$$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = 3^{-4}$

Entonces 3^{-4} y $\frac{1}{3^4}$ representan el mismo número.

Definición

a) **El exponente cero.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ entonces:

$$a^0 = 1.$$

b) **El exponente negativo.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ y n un número entero positivo entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Con esta definición las propiedades de exponentes positivos se aplican también a los exponentes negativos y cero. Si a y b son reales, m y n enteros:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Problemas

1. Escribe las siguientes fracciones como una potencia con exponente negativo:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{(-5)^5}$ d) $\frac{1}{10^8}$

2. Escribe las siguientes potencias con exponente negativo como fracciones:

a) 2^{-7} b) 3^{-5} c) 5^{-1} d) 7^{-2}

Indicador de logro:

1.3 Expresa potencias con exponentes negativos como fracciones con exponente positivo y viceversa.

Secuencia:

Se introduce la potencia con exponente negativo o cero, esto permite llevar las propiedades de los exponentes naturales hacia los exponentes enteros. Si el desarrollo del Problema inicial es muy difícil para los estudiantes debe desarrollarlo el docente.

Propósito:

En el Problema inicial se plantea la posibilidad de aplicar la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ donde m y n son enteros, que tiene sentido al ser una asignación única ($a^m \div a^n \longrightarrow a^{m-n}$). Esto permitirá desarrollar en la Solución el cociente de manera habitual y desarrollarlo con exponentes.

Solución de problemas:

1a) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

1b) $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

1c) $\frac{1}{(-5)^5} = (-5)^{-5}$

1d) $\frac{1}{10^8} = 10^{-8}$

2a) $2^{-7} = \frac{1}{2^7}$

2b) $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$

2c) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

2d) $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$

Si los estudiantes terminan rápido, invítelos a desarrollar el problema 1, literales del a) al j) del Practica lo aprendido de esta lección.

1.4 Raíz n-ésima de un número real

Problema inicial

Determina un valor real de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^3 = 27$ b) $x^4 = 625$

Solución

a) La descomposición prima de 27 es:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$27 = 3^3$

Por lo tanto $x = 3$, es solución de la ecuación.

Así, a 3 se le denomina la raíz cúbica de 27 y se denota por $3 = \sqrt[3]{27}$.

b) La descomposición prima de 625 es:

$$\begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$625 = 5^4$

Por lo tanto, $x = 5$ es solución de la ecuación.

A 5 se le denomina la raíz cuarta de 625: $5 = \sqrt[4]{625}$.

También $x = -5$, es solución de la ecuación.

A -5 se le denomina raíz cuarta negativa de 625:
$-5 = -\sqrt[4]{625}$

Definición

Sea n un entero positivo, un número b que cumple la condición $b^n = a$ es llamado **raíz n-ésima** de a.

Al trabajar con raíces n-ésimas de números reales se distinguen dos casos:

1. Si n es impar, a cada número real a le corresponde una única raíz n-ésima y se denota por $\sqrt[n]{a}$.
2. Si n es par, a cada número real positivo a le corresponden dos raíces n-ésima reales, una positiva $\sqrt[n]{a}$ y una negativa $-\sqrt[n]{a}$.

Si se cumple una de las siguientes condiciones n es impar o n es par y $a > 0$ entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$.

índice ← $\sqrt[n]{a}$ → radical

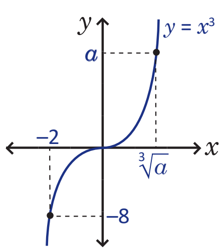
radicando

Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a$.
Si $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Si n es un entero positivo entonces $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ejemplo

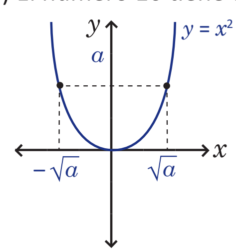
a) El número -8 tiene una única raíz cúbica:



$-8 = (-2)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2.$

Todo número real a tiene una única raíz cúbica $\sqrt[3]{a}$.

b) El número 16 tiene dos raíces cuadradas:



$\sqrt{16} = 4$ y $-\sqrt{16} = -4$

Todo número real positivo a tiene dos raíces cuadradas $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Problemas

Expresa las siguientes igualdades utilizando la notación de raíz n-ésima.

a) $2^3 = 8$ b) $(-5)^3 = -125$ c) $3^4 = 81$ d) $(-7)^4 = 2401$

e) $6^2 = 36$ f) $(-2)^5 = -32$ g) $(-4)^5 = -1024$ h) $5^5 = 3125$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

Indicador de logro:

1.4 Escribe potencias de números como raíces n-ésimas.

Secuencia:

La definición de raíz n-ésima de un número real generaliza la definición de raíz cuadrada, vista en noveno grado, para un entero positivo n. Se utilizan únicamente las raíces n-ésimas reales.

Propósito:

En la Definición, la raíz n-ésima de a donde n es par tiene el mismo tratamiento que para el de la raíz cuadrada: las raíces n-ésimas son las soluciones reales de la ecuación $b^n = a$, la raíz n-ésima positiva se denota por $\sqrt[n]{a}$ y la negativa por $-\sqrt[n]{a}$, que es el opuesto aditivo de $\sqrt[n]{a}$.

Solución de problemas:

a) $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

b) $(-5)^3 = -125 \Rightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$

c) $3^4 = 81 \Rightarrow \sqrt[4]{81} = 3$

d) $(-7)^4 = 2\,401 \Rightarrow -\sqrt[4]{2\,401} = -7$

e) $6^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$

f) $(-2)^5 = -32 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} = -2$

g) $(-4)^5 = -1\,024 \Rightarrow \sqrt[5]{-1\,024} = -4$

h) $5^5 = 3\,125 \Rightarrow \sqrt[5]{3\,125} = 5$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$

l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

En los literales d) y k) se debe tener cuidado de escribir el signo negativo antes del radical ya que la base de la potencia hace referencia a la raíz negativa del número.

1.5 Expresión de números sin el símbolo radical

Problema inicial

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por tres.

Solución

a) $\sqrt[3]{729}$

$729 = 3^6$ se descompone 729,

$= 3^3 \times 3^3$ se reescribe como producto de potencias de índice 3,

$= (3 \times 3)^3$ al utilizar propiedades de potencia,

$= 9^3$.

Es decir, al elevar 9 al cubo se obtiene 729.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{729} = 9$.

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$\frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$ se descomponen 16 y 81,

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$ al utilizar propiedades de potencia,

entonces al elevar $\frac{2}{3}$ a la cuarta se obtiene $\frac{16}{81}$.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$.

Conclusión

Para escribir sin radical el número real $\sqrt[n]{a}$ realiza lo siguiente: Ejemplo: $\sqrt[3]{1728}$

1. Escribe la descomposición prima de a, si el radicando es una fracción se descompone el numerador y el denominador. → $1728 = 2^6 \times 3^3$
2. Expresa la descomposición como producto de potencias con exponente n. → $1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$
3. Utiliza la propiedad de producto o división de potencias con el mismo exponente. → $1728 = (2 \times 2 \times 3)^3 = 12^3$
4. Se obtiene una expresión de la forma $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$. → $\sqrt[3]{1728} = 12$

Si n es un entero impar y a un número real entonces $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Si n es par, las raíces n-ésimas de números negativos no son números reales.

Problemas

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[7]{128}$ d) $\sqrt[5]{100\,000}$

e) $\sqrt[3]{-216}$ f) $\sqrt[4]{256}$ g) $\sqrt[3]{\frac{512}{343}}$ h) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

Indicador de logro:

1.5 Calcula raíces n-ésimas descomponiendo el radicando en factores primos.

Secuencia:

En esta clase se expresa la raíz n-ésima exacta de un número real de forma simplificada, es decir, sin el símbolo radical; a partir de aquí se efectúa la simplificación de raíces, sin embargo, no se contempla aún la distribución del radical sobre los factores, si no que se utiliza la propiedad de la distribución del exponente sobre los factores y la definición misma de raíz n-ésima. La distribución del radical se abordará en la siguiente clase.

Propósito:

La expresión $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, donde n es impar, que se muestra en la Conclusión será util en aquellos problemas cuando el radicando tiene signo negativo; de esta manera se traslada el problema a calcular la raíz n-ésima de un número positivo.

Solución de problemas:

a) $16 = 2^4$
$\Rightarrow \sqrt[4]{16} = 2$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

b) $243 = 3^5$
$\Rightarrow \sqrt[5]{243} = 3$

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

En la solución de cada literal se espera el uso de la descomposición en factores primos y la definición de raíz n-ésima.

c) $128 = 2^7 \Rightarrow \sqrt[7]{128} = 2$

d) $100\,000 = 2^5 \times 5^5$
$\Rightarrow 100\,000 = (2 \times 5)^5$
$\Rightarrow 100\,000 = 10^5$
$\Rightarrow \sqrt[5]{100\,000} = 10$

e) $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216}$
$216 = 2^3 \times 3^3$
$\Rightarrow 216 = (2 \times 3)^3$
$\Rightarrow 216 = 6^3$
$\Rightarrow \sqrt[3]{216} = 6$
$\Rightarrow \sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -6$

f) $256 = 2^4 \times 2^4$
$\Rightarrow 256 = (2 \times 2)^4$
$\Rightarrow 256 = 4^4$
$\Rightarrow \sqrt[4]{256} = 4$

g) $512 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \Rightarrow 512 = (2 \times 2 \times 2)^3 \Rightarrow 512 = 8^3$
$343 = 7^3$

$$\Rightarrow \frac{512}{343} = \frac{8^3}{7^3}$$
$$\Rightarrow \frac{512}{343} = \left(\frac{8}{7}\right)^3$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{512}{343}} = \frac{8}{7}$$

h) $64 = 2^6$ y $729 = 3^6$

$$\Rightarrow \frac{64}{729} = \frac{2^6}{3^6}$$
$$\Rightarrow \frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$
$$\Rightarrow \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$$

1.6 Operaciones con raíces n-ésimas

Problema inicial

Utiliza la definición de raíz n-ésima para expresar con un solo radical las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$ b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

Solución

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$

$(\sqrt[3]{6})^3 = 6$ y $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$(\sqrt[3]{6})^3 \times (\sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ se multiplican miembro a miembro las igualdades anteriores,

$(\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{6 \times 20}$ se expresa la potencia como raíz cúbica,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$ se efectúa el producto.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$.

b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$

$(\sqrt[4]{96})^4 = 96$ y $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$ se utiliza la definición de raíz cuarta,

$(\sqrt[4]{96})^4 \div (\sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ se divide miembro a miembro,

$(\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{96 \div 3}$ se expresa la potencia como raíz cuarta ($\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} > 0$),

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$ se efectúa la división.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2 = \sqrt[3]{128}$ se utiliza la definición de raíz cuadrada,

$\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2\right]^3 = (\sqrt[3]{128})^3 = 128$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^{2 \times 3} = 128$ al aplicar propiedades de potencia,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^6 = 128$ se efectúa el producto,

$\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$ se expresa la potencia como raíz sexta $\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}} > 0\right)$.

Por lo tanto, $\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$.

Conclusión

Para efectuar:		Se tiene que:		Escribiendo como raíz n-ésima:
a) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b})^n = a\times b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\times b}$
b) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b})^n = a\div b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\div b}$
c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$\Rightarrow$	$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m\times n} = a$	$\Rightarrow$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$

Para simplificar una raíz n-ésima se utiliza la propiedad de la multiplicación:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n\times b} &= \sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b}\\ &= a\sqrt[n]{b}\end{aligned}$$

Si $a_1, a_2, \dots, a_m$ son números reales entonces:
$\sqrt[n]{a_1}\times\sqrt[n]{a_2}\times\cdots\times\sqrt[n]{a_m} = \sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_m}$

La propiedad b) también se utiliza así:

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Simplificar una raíz es expresarla con un radicando menor al inicial.

Simplificar a la mínima expresión es simplificar el radicando al menor valor posible.

Después de efectuar una operación con radicales siempre debe simplificarse a la mínima expresión.

Ejemplo

1. Simplifica los resultados del Problema inicial.

a) $\sqrt[3]{120}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{120} &= \sqrt[3]{2^3\times 3\times 5}\\ &= 2\sqrt[3]{3\times 5}\\ &= 2\sqrt[3]{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$.

b) $\sqrt[4]{32}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{32} &= \sqrt[4]{2^4\times 2}\\ &= 2\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$.

c) $\sqrt[6]{128}$

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{128} &= \sqrt[6]{2^6\times 2}\\ &= 2\sqrt[6]{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$.

2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[8]{4}\times\sqrt[8]{8}\times\sqrt[8]{2}\times\sqrt[8]{4}$

$$\begin{aligned}\sqrt[8]{4}\times\sqrt[8]{8}\times\sqrt[8]{2}\times\sqrt[8]{4} &= \sqrt[8]{4\times 8\times 2\times 4}\\ &= \sqrt[8]{2^2\times 2^3\times 2\times 2^2}\\ &= \sqrt[8]{2^8}\\ &= 2\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} &= \sqrt[3]{\frac{108}{4}}\\ &= \sqrt[3]{27}\\ &= \sqrt[3]{3^3}\\ &= 3\end{aligned}$$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica a la mínima expresión tu respuesta.

a) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{10}$ b) $-\sqrt[4]{75}\times\sqrt[4]{50}$ c) $-\sqrt[5]{45}\times(-\sqrt[5]{81})$

d) $\sqrt[3]{320}\div\sqrt[3]{10}$ e) $\sqrt[3]{486}\div(-\sqrt[3]{6}\,)$ f) $-\sqrt[4]{192}\div(-\sqrt[4]{6}\,)$

g) $\sqrt{\sqrt{80}}$ h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}}$ i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

Indicador de logro:

1.6 Determina el producto, cociente y raíz de raíces simplificando los resultados a su mínima expresión.

Secuencia:

Se estudian las operaciones con raíces n-ésimas a partir de la definición; en este caso la multiplicación y división, así como la raíz de una raíz; además, se deja por sentado el concepto de simplificación a partir de la multiplicación de raíces.

Propósito:

En el Problema inicial se dejan indicadas las raíces, pues se simplificarán hasta el Ejemplo, una vez que ya se ha tratado la distribución del radical sobre los factores para simplificar. En la Solución se debe utilizar la definición de raíz n-ésima y las propiedades de potencia. En el Ejemplo, la descomposición en factores se utiliza de tal modo que los exponentes sean igual al índice de la raíz.

Solución de problemas:

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{4 \times 10} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5}$

b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50} = -\sqrt[4]{75 \times 50} = -\sqrt[4]{2 \times 3 \times 5^4} = -5\sqrt[4]{6}$

c) $-\sqrt[5]{45} \times (-\sqrt[5]{81}) = \sqrt[5]{45 \times 81} = \sqrt[5]{3^5 \times 3 \times 5} = 3\sqrt[5]{15}$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{320 \div 10} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6}\,) = -\sqrt[3]{486 \div 6} = -\sqrt[3]{81} = -\sqrt[3]{3^3 \times 3} = -3\sqrt[3]{3}$

Las divisiones pueden calcularse utilizando fracciones y simplificándolas, esto para facilitar los cálculos.

f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6}\,) = \sqrt[4]{192 \div 6} = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt{80}} = \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5}$

h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}} = -\sqrt[6]{640} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2 \times 5} = -2\sqrt[6]{10}$

i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}} = -\sqrt[3]{\sqrt{256}} = -\sqrt[6]{256} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2^2} = -2\sqrt[6]{4}$

1.7 Suma, resta y potencia de raíces n-ésimas

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

Dos raíces pueden sumarse o restarse si son semejantes es decir, el índice y el radicando son el mismo.

Solución

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

Simplificando a la mínima expresión:

$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}$ y $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}$

$=2\sqrt[3]{2}$ $\quad$ $=3\sqrt[3]{2}$

Se efectúa la suma de raíces semejantes:

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}$$
$$=5\sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=5\sqrt[3]{2}$.

b) $(\sqrt[6]{4}\,)^3$

Se descompone la potencia como producto:

$$(\sqrt[6]{4}\,)^3=\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}$$
$$=\sqrt[6]{4\times 4\times 4}$$
$$=\sqrt[6]{4^3}$$ se expresa como potencia

Simplificando: $\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$.

Por lo tanto, $(\sqrt[6]{4}\,)^3=2$.

Conclusión

1. Los pasos para realizar suma o resta de raíces n-ésimas son:
   - Simplificar las raíces a la mínima expresión.
   - Sumar o restar raíces semejantes.

2. La potencia de una raíz real cumple $(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\cdots\times\sqrt[n]{a}}_{m\text{-veces}}$

   Utilizando las propiedades de raíz n-ésima: $(\sqrt[n]{a}\,)^m=\sqrt[n]{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{-veces}}}$

   Reescribiendo como potencia el radicando: $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}}$

El número $\sqrt[n]{a}$ no es real, si n es par y a negativo.

Por ejemplo:
$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[6]{-2}$, no son números reales.

Problemas

1. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$ b) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{512}$ c) $\sqrt[4]{80}+\sqrt[4]{405}$ d) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}$

e) $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}$ f) $\sqrt[3]{576}-\sqrt[3]{72}$ g) $\sqrt[3]{486}-\sqrt[3]{144}$ h) $\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{48}$

i) $(\sqrt[5]{27})^2$ j) $(\sqrt[6]{8})^5$ k) $(\sqrt[3]{25})^2$ l) $(\sqrt[4]{27})^3$

2. Para demostrar que $2=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$, realiza los siguientes pasos:

   a) Demuestra que $(1+\sqrt{3})^3=10+6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

   b) Demuestra que $(-1+\sqrt{3})^3=-10+6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

   c) Efectúa la resta de las raíces cúbicas de los literales anteriores y concluye.

Unidad 4

Indicador de logro:

1.7 Suma y resta raíces semejantes y simplifica la potencia de una raíz escribiendo los resultados en su mínima expresión.

Secuencia:

Ahora se estudia la suma, resta y potencia de raíces n-ésimas. Si el índice es mayor que el exponente la simplificación no se efectúa aún.

Propósito:

El Problema inicial y los Problemas se desarrollan de tal manera que puedan efectuarse operaciones entre raíces semejantes. En la Conclusión, en el numeral 2 se debe enteder que la igualdad es valida siempre que $\sqrt[n]{a}$ esté bien definida.

Solución de problemas:

En algunos casos, como el literal b, también puede utilizar la distribución del exponente sobre la base en el radicando o utilizar la descomposición en primos convenientemente:

$$\sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} = \sqrt[4]{(2 \times 2)^4 \times 2} = \sqrt[4]{4^4 \times 2} = 4\sqrt[4]{2}$$

1a) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$

1b) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} + \sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2} + 2 \times 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[4]{2} = 6\sqrt[4]{2}$

1c) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} + \sqrt[4]{3^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5} + 3\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$

1d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} + \sqrt[3]{3^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$

1e) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2^2 \times 5^3} - \sqrt[3]{2^2 \times 3^3} = 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

1f) $\sqrt[3]{576} - \sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 3^2} = 2 \times 2\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 4\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9}$

1g) $\sqrt[3]{486} - \sqrt[3]{144} = \sqrt[3]{2 \times 3^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3^2} = 3\sqrt[3]{18} - 2\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{18}$

1h) $\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} - \sqrt[4]{2^4 \times 3} = 3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

1i) $(\sqrt[5]{27})^2 = \sqrt[5]{27^2} = \sqrt[5]{(3^3)^2} = \sqrt[5]{3^{3 \times 2}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^5 \times 3} = 3\sqrt[5]{3}$

1j) $(\sqrt[6]{8})^5 = \sqrt[6]{8^5} = \sqrt[6]{(2^3)^5} = \sqrt[6]{2^{3 \times 5}} = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt[6]{2^6 \times 2^6 \times 2^3} = 2 \times 2\sqrt[6]{2^3} = 4\sqrt[6]{8}$

1k) $(\sqrt[3]{25})^2 = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{(5^2)^2} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = 5\sqrt[3]{5}$

1l) $(\sqrt[4]{27})^3 = \sqrt[4]{27^3} = \sqrt[4]{(3^3)^3} = \sqrt[4]{3^9} = \sqrt[4]{3^4 \times 3^4 \times 3} = 3 \times 3\sqrt[4]{3} = 9\sqrt[4]{3}$

2a) $(1 + \sqrt{3})^3 = 1^3 + 3(1)^2(\sqrt{3}) + 3(1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 3(3) + \sqrt{3^3} = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + \sqrt{3^2 \times 3}$

$= 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3}$

Entonces, $1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$.

2b) $(-1 + \sqrt{3})^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2(\sqrt{3}) + 3(-1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = -1 + 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} = -10 + 6\sqrt{3}$

Entonces, $-1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$.

2c) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - (-1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}) = 2$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 2$.

1.8 Exponente racional

Problema inicial

1. Simplifica las siguientes expresiones, escribe tu respuesta como una potencia.
   a) $\sqrt{2^6}$
   b) $\sqrt[3]{2^{12}}$

2. Demuestra que $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$.

Recuerda que para todo número real a positivo: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ y $\sqrt[n]{a^n} = a$

Solución

1. a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2}$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 2^3$

Por lo tanto, $\sqrt{2^6} = 2^3$.

Se observa que $3 = \dfrac{6}{2}$ $\xrightarrow{}$ exponente, $\xrightarrow{}$ índice

b) $\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^4$.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$.

Se observa que $4 = \dfrac{12}{3}$ $\xrightarrow{}$ exponente, $\xrightarrow{}$ índice

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4}}$ por propiedades de raíces n-ésimas,

$= \sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^2}}$ al aplicar propiedades de potencia,

$= \sqrt[3]{2^2}$ se utiliza que $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Por lo tanto, $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$. Observa que $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ $\xrightarrow{}$ exponente, $\xrightarrow{}$ índice

Definición

Si a es un número real positivo, m y n son números enteros y n es positivo, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Una potencia con exponente racional $\dfrac{m}{n}$ es la raíz n-ésima de una potencia m-ésima.

Además, si r es un entero positivo se cumple que $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$, por lo que es válida la simplificación de exponentes racionales, para todo $a > 0$:

$$a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Problemas

1. Escribe las siguientes raíces como potencias con exponente fraccionario, simplifica si se puede.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{3^2}$

e) $\sqrt[4]{5^2}$ f) $\sqrt[5]{2^{10}}$ g) $\sqrt[5]{6^3}$ h) $\sqrt[6]{5^2}$

2. Escribe las siguientes potencias fraccionarias como raíces de una potencia.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{5}{2}}$ c) $2^{\frac{5}{2}}$ d) $7^{\frac{3}{8}}$

e) $12^{\frac{3}{7}}$ f) $11^{\frac{7}{2}}$ g) $9^{\frac{5}{3}}$ h) $10^{\frac{1}{4}}$

Indicador de logro:

1.8 Utiliza exponentes racionales para representar raíces n-ésimas de un número y viceversa.

Secuencia:

En esta clase se realiza la extensión de los valores que pueden ir en el exponente: desde los enteros hacia los racionales, utilizando la definición de exponente racional como la raíz n-ésima de un número real.

Propósito:

En el Problema inicial se plantean dos situaciones: la primera es para inducir que el exponente puede ser una fracción y la segunda para ejemplificar la posibilidad de efectuar la simplificación en el exponente, por lo que es pertinente hacer la observación planteada en la Solución.

Solución de problemas:

1a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

1b) $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

1c) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

1d) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

1e) $\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

1f) $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$

1g) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}}$

1h) $\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$

2a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

2b) $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} = 9\sqrt{3}$

2c) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$

2d) $7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{7^3}$

2e) $12^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{12^3}$

2f) $11^{\frac{7}{2}} = \sqrt{11^7} = 11^3\sqrt{11}$

2g) $9^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{9^5} = 27\sqrt{3}$

2h) $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$

1.9 Propiedades de los exponentes racionales

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones expresando tu respuesta como potencia con exponente racional.

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}$ b) $3^{\frac{8}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$ c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$ e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}}$

Solución

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3}$

$= \sqrt[4]{2^8}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2$

Por lo tanto, $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2$. Observa que: $2^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = 2^2$.

b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^{10}} \div \sqrt[3]{3^1}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^{10} \div 3^1}$

$= \sqrt[3]{3^9}$

$= 3^{\frac{9}{3}}$

$= 3^3$

Por lo tanto, $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^3$. Se observa que: $3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} = 3^3$.

c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{8^2})^{\frac{1}{2}}$ se escribe como raíz cúbica,

$= \sqrt[2]{\sqrt[3]{8^2}}$ se escribe como raíz cuadrada,

$= \sqrt[6]{8^2}$

$= 8^{\frac{2}{6}}$

$= 8^{\frac{1}{3}}$

Por lo tanto $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$. Se observa que: $8^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$.

d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{9^2}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^2 \times 9^2}$

$= \sqrt[3]{(3 \times 9)^2}$

$= \sqrt[3]{27^2}$

$= 27^{\frac{2}{3}}$

Por lo tanto $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

Observa que: $(3 \times 9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{32^3} \div \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{32^3 \div 2^3}$

$= \sqrt[4]{(32 \div 2)^3}$

$= \sqrt[4]{16^3}$

$= 16^{\frac{3}{4}}$

Por lo tanto $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$. Se observa que: $(32 \div 2)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$.

Conclusión

1. Las propiedades con exponentes enteros se aplican también a los exponentes racionales. Si a y b son números reales positivos, m y n son números racionales, entonces:

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. Para simplificar una potencia racional se debe verificar que la base sea la menor posible.

Ejemplo

Simplifica las respuestas de los literales c), d) y e) del problema inicial.

c) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{\cancel{3}\times 1}{\cancel{3}}} = 2$ d) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3}\times 2}{\cancel{3}}} = 3^2$ e) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{\cancel{4}\times 3}{\cancel{4}}} = 2^3$

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}}$ b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}}$ c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}}$ d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27$

e) $(9^{\frac{9}{7}})^{\frac{7}{6}}$ f) $(8^{\frac{10}{9}})^{\frac{3}{2}}$ g) $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}}$ h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

Indicador de logro:

1.9 Aplica las propiedades de los exponentes, combinando exponentes racionales y enteros.

Secuencia:

Se realizan las operaciones entre potencias cuyos exponentes son racionales, de manera análoga a como se realizaron con exponentes enteros, esto permitirá posteriormente efectuar operaciones entre raíces cuyo índice es distinto. Además, para simplificar se debe revisar si la potencia tiene la menor base posible.

Propósito:

En la Solución del Problema inicial se debe utilizar la definición del exponente racional. La observación realizada en cada literal es para mostrar la utilidad de las propiedades que permiten desarrollar la operación en menos pasos y sin utilizar explícitamente la definición.

Solución de problemas:

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}} = 2^{\frac{7}{5}+\frac{8}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3$

b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}} = 9^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{2}{10}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{5}{10}} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3$

c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}} = 25^{1-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27 = 27^{\frac{5}{3}-1} = 27^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\times\frac{2}{3}} = 3^2$

e) $\left(9^{\frac{9}{7}}\right)^{\frac{7}{6}} = 9^{\frac{9}{7}\times\frac{7}{6}} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\times\frac{3}{2}} = 3^3$

f) $\left(8^{\frac{10}{9}}\right)^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{10}{9}\times\frac{3}{2}} = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3\times\frac{5}{3}} = 2^5$

g) *Forma 1:* $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (16 \times 4)^{\frac{5}{6}} = (2^4 \times 2^2)^{\frac{5}{6}} = (2^6)^{\frac{5}{6}} = 2^{6\times\frac{5}{6}} = 2^5$

Forma 2: $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (2^4)^{\frac{5}{6}} \times (2^2)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{20}{6}} \times 2^{\frac{10}{6}} = 2^{\frac{30}{6}} = 2^5$

h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = (98 \div 2)^{\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^{2\times\frac{1}{2}} = 7$

También se pueden reescribir las potencias con la menor base posible antes de efectuar las operaciones.

1.10 Operaciones con raíces de distinto índice

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

Solución

Se escribe cada raíz como exponente racional:

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^1\\ &= 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3$.

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} &= 9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{6}{12}}\\ &= 9^{\frac{1}{2}}\\ &= (3^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{simplificando}\\ &= 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} = 3$.

Conclusión

Para operar raíces con distinto índice, se realizan los siguientes pasos:
1. Cada raíz se escribe como potencia con exponente racional.
2. Se efectúan las operaciones utilizando propiedades de exponentes racionales.
3. Se simplifica el resultado.

Ejemplo

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} &= \sqrt{2^5} \times \sqrt[3]{2^2} \div \sqrt[6]{2}\\ &= 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{18}{6}}\\ &= 2^3\\ &= 8\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} = 8$.

b) $\sqrt{3} \div \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \div \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{4}{6}}\\ &= 3^{\frac{2}{3}} \qquad \text{no se puede simplificar,}\\ &= \sqrt[3]{3^2} \qquad \text{se escribe como raíz,}\\ &= \sqrt[3]{9}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \div \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{9}$.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8}$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5}$

Indicador de logro:

1.10 Aplica las propiedades de los exponentes racionales para realizar operaciones de raíces con distinto índice.

Secuencia:

La utilidad de los exponentes racionales se muestra en esta clase al efectuar operaciones entre raíces con diferente índice.

Propósito:

Dado que las operaciones se indican con raíces n-ésimas entonces la respuesta se expresa como una raíz, como se muestra en el Ejemplo b).

Solución de problemas:

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8} = 8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}} \div 8^{\frac{1}{12}} = 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 8^{\frac{6}{12}+\frac{3}{12}-\frac{1}{12}} = 8^{\frac{8}{12}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32} = 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{1}{12}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{15}{12}} = 2^{\frac{5}{4}}$
$= \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3} = 243^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = (3^5)^{\frac{1}{2}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{18}{6}} = 3^3 = 27$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5} = 25^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = (5^2)^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

Si la potencia que aparece en el radicando tiene un exponente mayor que 2, puede dejarla expresada sin efectuarla, como en b).

En d) también se puede efectuar la simplificación escribiendo la fracción impropia como un entero más una fracción propia:

$$2^{\frac{5}{4}} = 2^{1+\frac{1}{4}} = 2 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}.$$

Además, no es necesario simplificar el exponente de $2^{\frac{2}{4}}$ porque debe reescribirse como fracción equivalente con exponente 12.

1.11 Practica lo aprendido

1. Efectúa las siguientes operaciones, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $5^6 \times 5^5$ b) $(-4) \times (-4)^2$ c) $2^6 \times 2^{-3}$ d) $3^{-7} \times 3^7$

e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2}$ f) $3^9 \div 3^6$ g) $2 \div 2^4$ h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3}$

i) $4^{-5} \div 4^3$ j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2}$ k) $(4^2)^3$ l) $[(-3)^2]^{-3}$

m) $(2^{-4})^3$ n) $(6^{-1})^{-1}$ o) $(5^{-2})^{-2}$ p) $[(-2)^{-3}]^{-5}$

2. Realiza los siguientes ejercicios, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $3^4 \times 5^4$ b) $2^{-6} \times 3^{-6}$ c) $(-4)^2 \times 8^2$ d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3}$

e) $9^5 \div 3^5$ f) $16^{-2} \div (-2)^{-2}$ g) $(-35)^7 \div 5^7$ h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4}$

3. Realiza las siguientes operaciones simplificando tu respuesta:

a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24}$ b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5}$

e) $\sqrt{\sqrt{324}}$ f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$ g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4}$ h) $(\sqrt[3]{24})^2$

4. Simplifica las siguientes raíces:

Escribe cada raíz como potencia racional.

a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[6]{9}$ c) $\sqrt[6]{27}$ d) $\sqrt[6]{16}$

5. Efectúa las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta a la mínima expresión:

a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9}$ b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2}$ c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2}$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$ b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

Exponente irracional

El número $\sqrt{2}$ es irracional, por lo que su valor solo es aproximable: $\sqrt{2} = 1.414213...$

Considera la siguiente sucesión de potencias racionales:
$3^1 = 3$, $3^{1.4} = 4.655536...$, $3^{1.41} = 4.706965...$, $3^{1.414} = 4.727695...$, $3^{1.4142} = 4.728733...$

La sucesión se aproxima al número real 4.728804...
Los exponentes de la sucesión se aproximan al valor $\sqrt{2}$. Por lo que, se dirá que la sucesión se aproxima al valor $3^{\sqrt{2}}$.

De esta forma, si x es un número irracional y $a > 0$, es posible definir la potencia a^x siguiendo el proceso anterior.

Por lo tanto, la potencia a^x está definida para todo número real x y $a > 0$. Las propiedades vistas anteriormente se generalizan para todo exponente real. Si a y b son números reales positivos, r y s números reales:

a) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ c) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ d) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Unidad 4

101

Indicador de logro:

1.11 Resuelve problemas utilizando potencias y raíces n-ésimas.

Solución de problemas:

1a) $5^6 \times 5^5 = 5^{6+5} = 5^{11}$

1b) $(-4) \times (-4)^2 = (-4)^{1+2} = (-4)^3 = -4^3$

1c) $2^6 \times 2^{-3} = 2^{6+(-3)} = 2^{6-3} = 2^3$

1d) $3^{-7} \times 3^7 = 3^{-7+7} = 3^0 = 1$

1e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2} = (-6)^{-1+(-2)} = (-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{6^3}$

1f) $3^9 \div 3^6 = 3^{9-6} = 3^3$

1g) $2 \div 2^4 = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

1h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3} = (-5)^{2-(-3)} = (-5)^{2+3} = (-5)^5 = -5^5$

1i) $4^{-5} \div 4^3 = 4^{-5-3} = 4^{-8} = \frac{1}{4^8}$

1j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2} = (-2)^{-3-(-2)} = (-2)^{-3+2} = (-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

1k) $(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$

1l) $[(-3)^2]^{-3} = (-3)^{2\times(-3)} = (-3)^{-6} = \frac{1}{(-3)^6} = \frac{1}{3^6}$

1m) $(2^{-4})^3 = 2^{-4\times 3} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}}$

1n) $(6^{-1})^{-1} = 6^{(-1)\times(-1)} = 6$

1o) $(5^{-2})^{-2} = 5^{-2\times(-2)} = 5^4$

1p) $((-2)^{-3})^{-5} = (-2)^{-3\times(-5)} = (-2)^{15} = -2^{15}$

2a) $3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4$

2b) $2^{-6} \times 3^{-6} = (2 \times 3)^{-6} = 6^{-6} = \frac{1}{6^6}$

2c) $(-4)^2 \times 8^2 = (-4 \times 8)^2 = (-32)^2 = 32^2$

2d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3} = (-6 \times (-5))^{-3} = 30^{-3} = \frac{1}{30^3}$

2e) $9^5 \div 3^5 = (9 \div 3)^5 = 3^5$

2f) $16^{-2} \div (-2)^{-2} = (16 \div (-2))^{-2} = (-8)^{-2} = \frac{1}{(-8)^2} = \frac{1}{8^2}$

2g) $(-35)^7 \div 5^7 = (-35 \div 5)^7 = (-7)^7 = -7^7$

2h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4} = (-18 \div (-3))^{-4} = 6^{-4} = \frac{1}{6^4}$

3a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24} = \sqrt[5]{12 \times 24} = \sqrt[5]{2^5 \times 3^2} = 2\sqrt[5]{3^2} = 2\sqrt[5]{9}$

3b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{-20 \times 25} = \sqrt[3]{-2^2 \times 5^3} = -5\sqrt[3]{4}$

3c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48 \div 6} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{80 \div (-5)} = \sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{2^3 \times 2} = -2\sqrt[3]{2}$

3e) $\sqrt{\sqrt{324}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$

3f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} + \sqrt[3]{3^3 \times 7} = 2\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7}$

3g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^2} - \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$
$= 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

3h) $(\sqrt[3]{24})^2 = \sqrt[3]{24^2} = \sqrt[3]{(2^3 \times 3)^2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 3^2} = 4\sqrt[3]{9}$

4a) $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

4b) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$

4c) $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

4d) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[3]{4}$

5a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{5}{12}}$
$= 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

5b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} = 4$

5c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[6]{3}$

5d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

6a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$
$= \sqrt[3]{8} - \cancel{\sqrt[3]{12}} + \cancel{\sqrt[3]{18}} + \cancel{\sqrt[3]{12}} - \cancel{\sqrt[3]{18}} + \sqrt[3]{27}$
$= \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3^3} = 2 + 3 = 5$

6b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = -1$

La definición de exponente irracional presentada en el recuadro de información adicional completa la posibilidad de utilizar cualquier exponente real, así es posible definir la función exponencial como una función real.

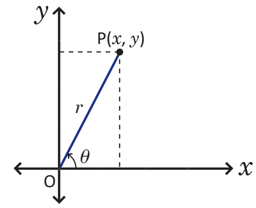
Lección 3 Funciones trigonométricas

3.1 Razones trigonométricas de cualquier ángulo (repaso)

Problema inicial

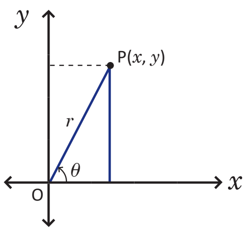
1. Se tiene la gráfica del ángulo θ, O es el origen, $\overline{\text{OP}}$ es el lado terminal del ángulo θ dibujado en posición estándar, r es la longitud del segmento $\overline{\text{OP}}$. Escribe las razones trigonométricas del ángulo θ.

2. ¿Las razones trigonométricas dependen del valor de r?

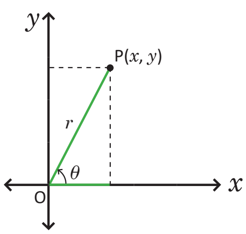


Solución

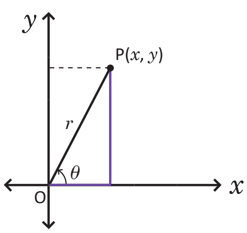
1.



$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$



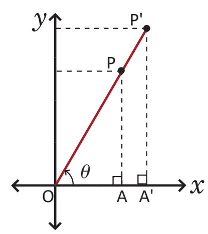
$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$



$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

siempre que $x \neq 0$

2. Se elige otro punto P'(x', y') tal que $\overline{\text{OP}'}$ es también lado terminal de θ, como muestra la figura:



Se cumple que P es un punto del segmento $\overline{\text{OP}'}$.

Sea A la proyección de P en el eje x y A' la proyección de P' en el eje x.

Se cumple que ΔPOA ~ ΔP'OA', por criterio AA de semejanza de triángulos.

Si $r' = \overline{\text{OP}'}$, entonces de la semejanza se tiene que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y'}{r'}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x'}{r'}$ y $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y'}{x'}$.

Por lo tanto, las razones no dependen del valor de r.

Conclusión

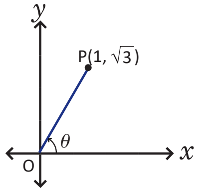
1. Las razones trigonométricas no dependen de la longitud del segmento $\overline{\text{OP}}$.
2. Las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ.
3. Al ángulo θ le corresponde un único valor de sen θ, un único valor de cos θ y un único valor de tan θ.
4. Las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ son funciones del ángulo θ.

De ahora en adelante se llamarán **funciones trigonométricas** a las razones seno, coseno y tangente.

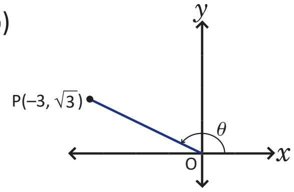
Problemas

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo θ a partir del punto P(x, y).

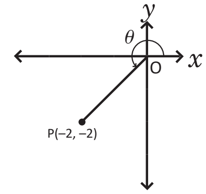
a)



b)



c)



2. Comprueba que el punto P'(cos θ, sen θ) pertenece al segmento $\overline{\text{OP}}$ en cada literal del problema 1.

Indicador de logro:

3.1 Calcula las razones trigonométricas de un ángulo determinado por un punto P en el plano cartesiano.

Secuencia:

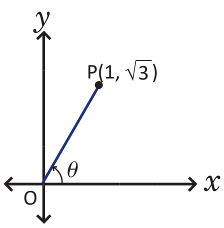
Ya se estudiaron las razones trigonométricas de un ángulo, para esta clase se establecen como funciones trigonométricas bajo la noción de correspondencia.

Propósito:

Al desarrollar el Problema inicial se probará que las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo y no de la longitud del segmento que corresponde al lado final.

Solución de problemas:

1a)



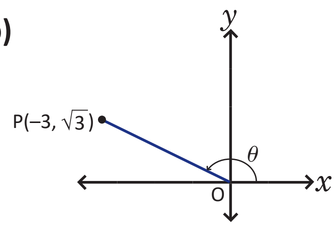
$r = \mathrm{OP} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$

$\tan \theta = \sqrt{3}$

1b)



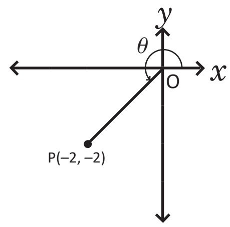
$r = \mathrm{OP} = 2\sqrt{3}$

$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$

$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1c)



$r = \mathrm{OP} = 2\sqrt{2}$

$\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan \theta = 1$

2a) recta: $y = \sqrt{3}x$

$\mathrm{P}'(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2b) recta: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\mathrm{P}'(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2c) recta: $y = x$

$\mathrm{P}'(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

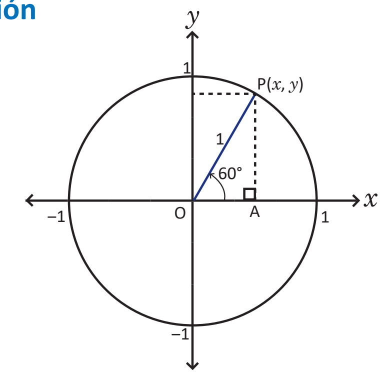
3.2 Círculo trigonométrico

Problema inicial

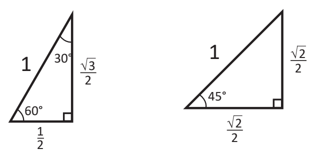
1. Dibuja en el plano cartesiano una circunferencia centrada en el origen y de radio 1. Representa el ángulo de 60° tomando como lado terminal un radio de la circunferencia.
2. Determina las coordenadas del punto P(x, y), que es la intersección de la circunferencia con el lado terminal del ángulo.

Solución

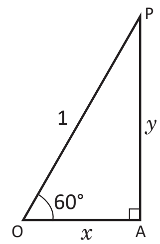
1.



Los triángulos notables a utilizar en los ángulos de referencia en el Círculo trigonométrico son:



2. En la figura se forma el triángulo rectángulo POA, P es el punto P(x, y), O es el origen y A es la proyección de P sobre el eje x.



Utilizando razones trigonométricas:
sen 60° = $\frac{y}{1} = y$ y cos 60° = $\frac{x}{1} = x$

Por lo que se tiene:
y = sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y x = cos 60° = $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

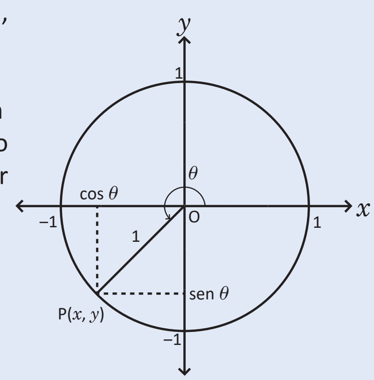
Conclusión

1. Se denomina **Círculo trigonométrico (CT)** a la circunferencia de radio 1, centrada en el origen O.

2. Las coordenadas de un punto P(x, y) en el círculo trigonométrico están determinadas por el ángulo θ dibujado en posición estándar con lado terminal $\overline{OP}$. Por definición de las razones trigonométricas de cualquier ángulo se tiene sen $\theta = \frac{y}{1} = y$ y cos $\theta = \frac{x}{1} = x$.

   Por lo tanto, P(x, y) = P(cos θ, sen θ).

3. Para todo ángulo θ es posible determinar los valores de cos θ y sen θ como coordenadas de un punto en el CT.



Problemas

1. Para cada valor de θ grafica el punto P(cos θ, sen θ) en el CT. Dibuja un círculo por cada literal.
   a) θ = 120°, θ = 210° b) θ = 30°, θ = 300° c) θ = 45°, θ = 135°
   d) θ = –45°, θ = –135° e) θ = 360°, θ = 405° f) θ = 495°, θ = 540°

2. Obtén el seno y coseno de los siguientes ángulos utilizando el círculo trigonométrico.
   a) θ = 0° b) θ = 90° c) θ = 180° d) θ = 270°

Utiliza el hecho que P(cos θ, sen θ) = P(x, y).

Indicador de logro:

3.2 Grafica en el círculo trigonométrico el punto P(cos θ, sen θ) para un ángulo θ dado.

Secuencia:

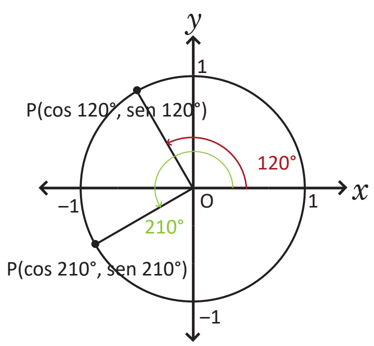
En la clase anterior se vio que las razones trigonométricas no dependen de la longitud del lado terminal de un ángulo dado, por lo que se introduce el círculo trigonométrico (círculo de radio 1 centrado en el origen) por medio del cual se describirán características de las funciones trigonométricas. Se recuerda a los estudiantes los triángulos notables para facilitar el cálculo de las razones de 30°, 45° y 60°.

Propósito:

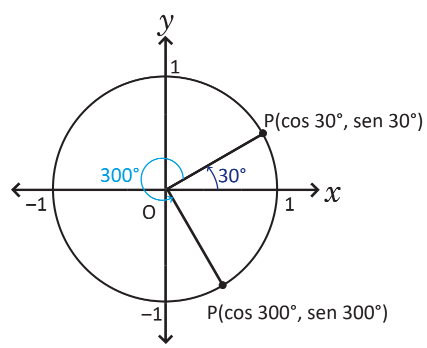
El Problema inicial permite al estudiante visualizar la posición en el plano de los valores del seno y coseno de un ángulo. En el numeral 1 de los Problemas el estudiante debe ubicar el ángulo con un transportador para luego señalar el punto solicitado, en el numeral 2 el estudiante debe reconocer las coordenadas de los puntos correspondientes a los ángulos dados.

Solución de problemas:

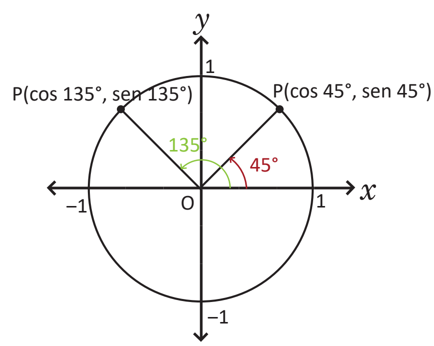
1a) $\theta = 120°$, $\theta = 210°$



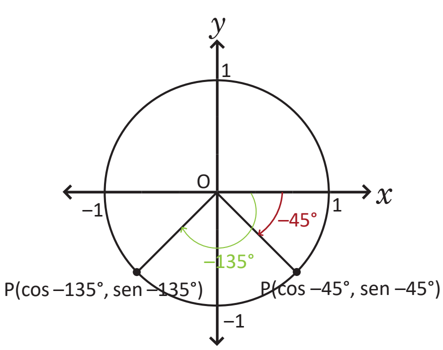
1b) $\theta = 30°$, $\theta = 300°$



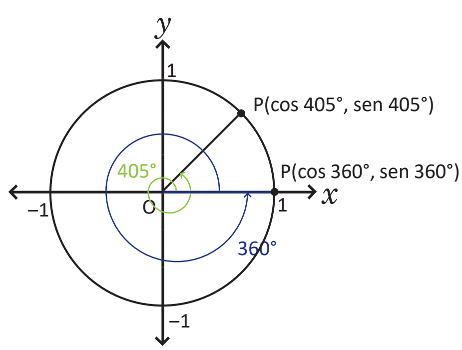
1c) $\theta = 45°$, $\theta = 135°$



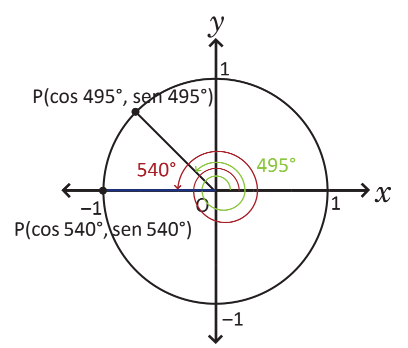
1d) $\theta = -45°$, $\theta = -135°$

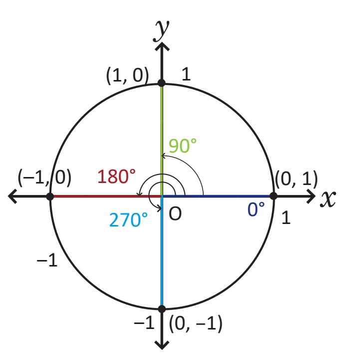


1e) $\theta = 360°$, $\theta = 405°$



1f) $\theta = 495°$, $\theta = 540°$





2a) P(cos 0°, sen 0°) = P(1, 0)
⇒ cos 0° = 1 y sen 0° = 0

2b) P(cos 90°, sen 90°) = P(0, 1)
⇒ cos 90° = 0 y sen 90° = 1

2c) P(cos 180°, sen 180°) = P(–1, 0)
⇒ cos 180° = –1 y sen 180° = 0

2d) P(cos 270°, sen 270°) = P(0, –1)
⇒ cos 270° = 0 y sen 270° = –1

3.3 Periodicidad de las funciones seno y coseno en el círculo trigonométrico

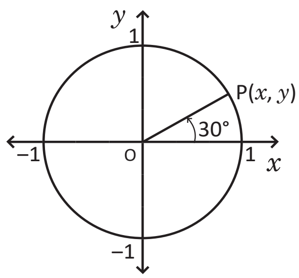
Problema inicial

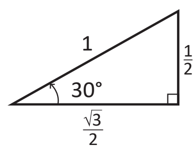
Grafica los siguientes puntos en el CT y determina sus coordenadas:

a) P(cos 30°, sen 30°) b) P(cos 390°, sen 390°)

Solución

a)

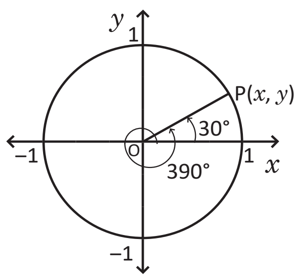




sen 30° = $\frac{1}{2}$ cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, P(cos 30°, sen 30°) = P$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b)



Se descompone el ángulo 390° = 30° + 360°.

El ángulo de referencia es 30°, así se tiene que

sen 390° = sen 30° = $\frac{1}{2}$ y cos 390° = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, P(cos 390°, sen 390°) = P$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

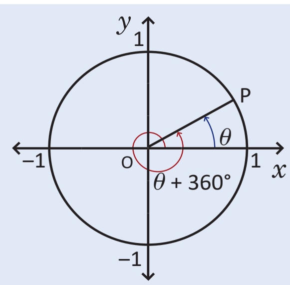
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera y sea $\alpha = \theta + 360°$. Se cumple que al dibujar los ángulos θ y α, en posición estándar, tienen el mismo lado terminal en el CT.

Así se cumple que P(cos θ, sen θ) = P(cos(θ + 360°), sen(θ + 360°)).

Una función f es **periódica** si existe un valor t tal que para todo x se cumple que $f(x) = f(x + t)$. Por lo que las funciones seno y coseno son periódicas pues cumplen las siguientes propiedades:

cos(θ ± 360°) = cos θ sen(θ ± 360°) = sen θ



Ejemplo

Determina el valor de sen(–330°).

sen(–330°) = sen(–330° + 360°) = sen(30°) = $\frac{1}{2}$, aplicando la periodicidad.

Por lo tanto, sen(–330°) = $\frac{1}{2}$.

Problemas

1. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores:

a) sen 405° b) cos 420° c) sen(–300°)

d) cos(–675°) e) sen 1080° f) cos 630°

g) sen(–900°) h) cos(–630°) i) sen 540°

2. Utiliza las fórmulas del seno y coseno de una suma para demostrar las siguientes propiedades:

a) cos(θ + 360°) = cos θ b) sen(θ + 360°) = sen θ

cos($\alpha + \beta$) = cos α cos β – sen α sen β
sen($\alpha + \beta$) = sen α cos β + cos α sen β

Indicador de logro:

3.3 Utiliza la periodicidad para evaluar las funciones seno y coseno en ángulos mayores a 360° y menores a 0°.

Secuencia:

Ahora se utiliza el círculo trigonométrico para observar la periodicidad de las funciones trigonométricas seno y coseno por lo que es necesario que los estudiantes recuerden las razones de los ángulos 30°, 45° y 60°; se puede hacer referencia a la clase anterior.

Propósito:

En el Problema inicial se observa la periodicidad para un ángulo particular utilizando el recurso del círculo trigonométrico, en los Problemas se probará por medio de la fórmula de suma de ángulos.

Solución de problemas:

1a) $\operatorname{sen} 405° = \operatorname{sen}(45° + 360°)$
$= \operatorname{sen} 45°$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

1b) $\cos 420° = \cos(60° + 360°)$
$= \cos 60°$
$= \frac{1}{2}$

1c) $\operatorname{sen}(-300°) = \operatorname{sen}(-300° + 360°)$
$= \operatorname{sen} 60°$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

1d) $\cos(-675°) = \operatorname{sen}(-675° + 360° \times 2)$
$= \operatorname{sen} 45°$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

1e) $\operatorname{sen} 1\,080° = \operatorname{sen}(3(360°)) = 0$

1f) $\cos 630° = \cos 270° = 0$

1g) $\operatorname{sen}(-900°) = \operatorname{sen} 180° = 0$

1h) $\cos(-630°) = \cos(-630° + 360° \times 2)$
$= \cos 90°$
$= 0$

1i) $\operatorname{sen} 540° = \operatorname{sen} 180° = 0$

2a) $\cos(\theta + 360°) = \cos\theta \cos 360° - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 360°$
$= \cos\theta$

2b) $\operatorname{sen}(\theta + 360°) = \operatorname{sen}\theta \cos 360° + \cos\theta \operatorname{sen} 360°$
$= \operatorname{sen}\theta$

3.4 Periodicidad de la tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Para cada uno de los ángulos:

1. $\theta = 30°$
2. $\theta = -30°$

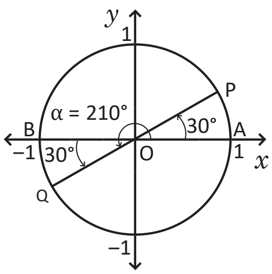
P'$(-x, -y)$ es el punto simétrico de P(x, y) respecto al origen.

Realiza lo siguiente:

a) Grafica el punto Q simétrico al punto P(cos θ, sen θ) respecto al origen y escribe sus coordenadas.
b) Determina el ángulo α en posición estándar que corresponde al punto Q.
c) Cálcula el valor de tan α.

Solución

1.

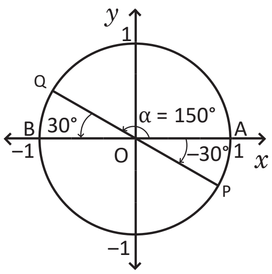


a) Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ hasta cortar nuevamente al CT. Este punto de corte es Q pues $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$. Sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢BOQ = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° + 30° = 210°.

c) Se tiene el punto Q(–cos 30°, –sen 30°), entonces:
$\tan 210° = \frac{-\text{sen } 30°}{-\cos 30°} = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.



a) Se grafica el punto Q y sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P, respecto al origen.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢QOB = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° – 30° = 150°.

c) Se tiene el punto Q(cos(–30°), –sen(–30°)), entonces:
$\tan 150° = \frac{-\text{sen}(-30°)}{-\cos(-30°)} = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

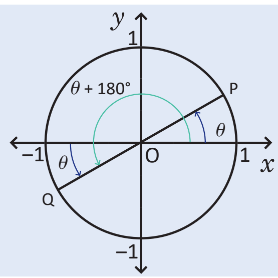
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera, entonces:

$$Q(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) = Q(-\cos\theta, -\text{sen } \theta).$$

Así, $\tan(\theta + 180°) = \frac{-\text{sen } \theta}{-\cos\theta} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.

Por lo tanto, la propiedad de **periodicidad** de la tangente está dada por la expresión: $\tan(\theta \pm 180°) = \tan\theta$.



Problemas

1. Utiliza la periodicidad de la función tangente para calcular los siguientes valores:

a) tan 225°
b) tan 210°
c) tan 240°
d) tan 180°
e) tan(–150°)
f) tan(–135°)
g) tan(–120°)
h) tan(–300°)

2. Utiliza la fórmula de la tangente de una suma para demostrar la propiedad $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Unidad 5

Indicador de logro:

3.4 Utiliza la periodicidad para calcular la tangente de ángulos mayores a 180° y menores a 0°.

Secuencia:

Utilizando el círculo trigonométrico se observa ahora la periodicidad de la tangente para un ángulo dado, en este punto se marca una de las diferencias entre las funciones seno y coseno y la función tangente.

Propósito:

En el Problema inicial para establecer la periodicidad de la función tangente se hace la relación entre la simetría respecto al origen para dos puntos en el círculo trigonométrico y los ángulos correspondientes a dichos puntos.

Solución de problemas:

1a) $\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1$

1b) $\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1c) $\tan 240° = \tan 60° = \sqrt{3}$

1d) $\tan 180° = \tan 0° = 0$

1e) $\tan(-150°) = \tan(-150° + 180°) = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1f) $\tan(-135°) = \tan(-135° + 180°) = \tan 45° = 1$

1g) $\tan(-120°) = \tan(-120° + 180°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

1h) $\tan(-300°) = \tan(-300° + 2(180°)) = \tan 60° = \sqrt{3}$

2. $\tan(\theta + 180°) = \frac{\tan\theta + \tan 180°}{1 - \tan\theta \tan 180°} = \frac{\tan\theta + 0}{1 - (\tan\theta)(0)} = \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$

En el problema 1 a) se descompone el ángulo como suma de dos ángulos, uno de los cuales debe ser 180°, otra forma en que puede realizarse es calcular la tangente del ángulo restándole 180°. En los literales e) al h) se suma 180°, o un múltiplo de este, hasta obtener un ángulo cuya tangente es conocida.

Los estudiantes pueden referirse a los triángulos notables de la clase 3.2 de esta unidad.

3.5 Función seno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función y = sen θ.

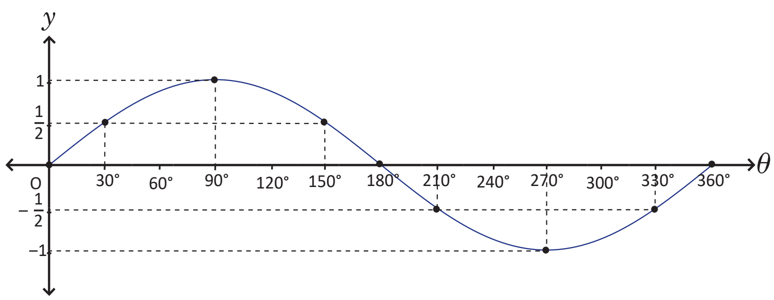
θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	300°	360°
sen θ									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

1.

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0

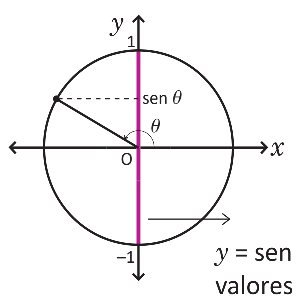


2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo.

Por lo tanto, el dominio de la función y = sen θ es $\mathbb{R}$.

Rango. Del CT se tiene que el valor del seno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo [−1, 1].

Por lo tanto, el rango de la función y = sen θ es [−1, 1].



y = sen θ toma valores en [−1, 1]

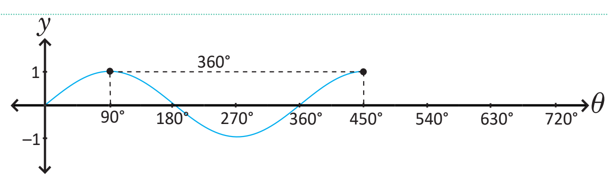
Conclusión

La función $f(\theta)$ = sen θ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = [-1, 1]$.

La función $f(\theta)$ = sen θ es una función periódica, es decir, existe un valor α tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ para todo valor de θ. Se llama **periodo** de la función f al valor más pequeño $\alpha > 0$ tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$. El periodo de la función seno es 360°. En general se cumple que sen $(\theta + 360°n)$ = sen θ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función seno graficada en el intervalo [0°, 450°]. Utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta)$ = sen θ, en el intervalo [−360°, 0°].

Indicador de logro:

3.5 Grafica la función seno utilizando la periodicidad.

Secuencia:

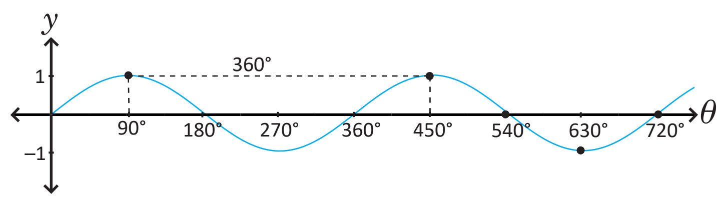
Se dibuja la gráfica de la función seno por medio de la ubicación de puntos en el plano y se estudian además su dominio y rango.

Propósito:

Los valores de los ángulos utilizados en la tabla permitirá ubicar puntos en el plano fácilmente. En los Problemas se debe utilizar la periodicidad para completar o dibujar las gráficas. El estudiante debe ser capaz de reconocer que la gráfica se "repite" en cada intervalo de 360°.

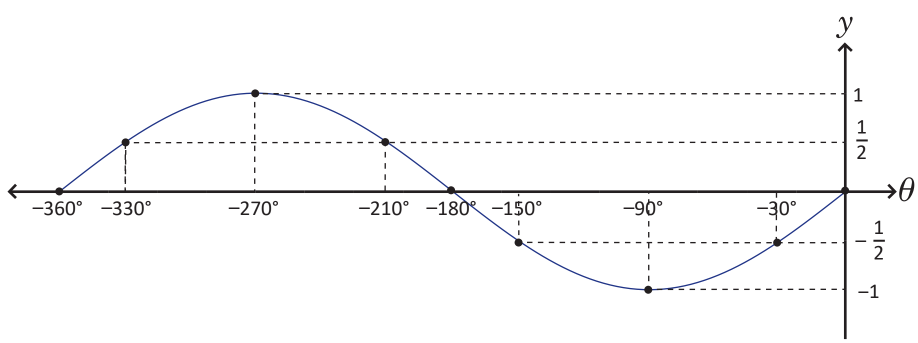
Solución de problemas:

1.



Para gráficar funciones trigonométricas se sugiere marcar el eje x cada 30°, 45° o 60°.

2.



3.6 Función coseno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función $y = \cos\theta$.

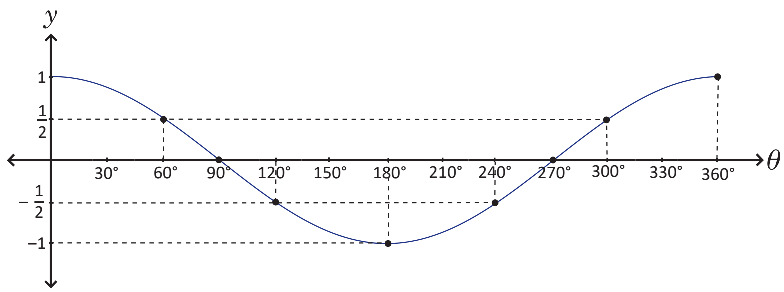
θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

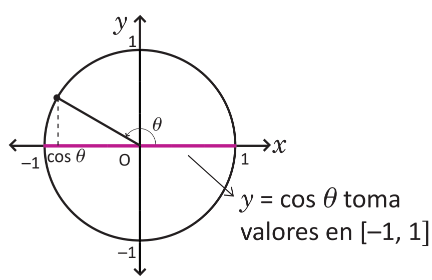
1.

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo. Por lo tanto, el dominio de la función $y = \cos\theta$ es $\mathbb{R}$.

   Rango. Del CT se tiene que el valor del coseno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, el rango de la función $y = \cos\theta$ es $[-1, 1]$.



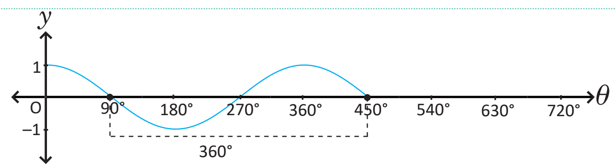
Conclusión

La función $f(\theta) = \cos\theta$ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = [-1, 1]$.

La función $f(\theta) = \cos\theta$ es una función periódica. El periodo de la función coseno es 360°. En general se cumple que $\cos(\theta + 360°n) = \cos\theta$ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función coseno graficada en el intervalo [0°, 450°], utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta) = \cos\theta$, en el intervalo $[-360°, 0°]$.

Indicador de logro:

3.6 Grafica la función coseno utilizando la periodicidad.

Secuencia:

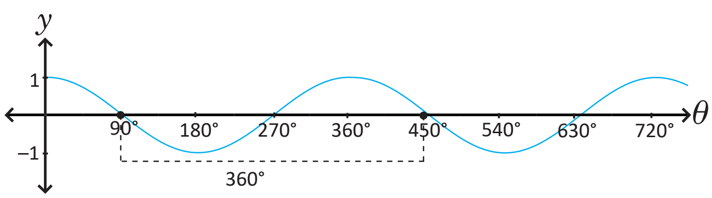
De igual forma que la función seno, se gráfica la función coseno por medio de la ubicación de puntos en el plano y se estudian además su dominio y rango.

Propósito:

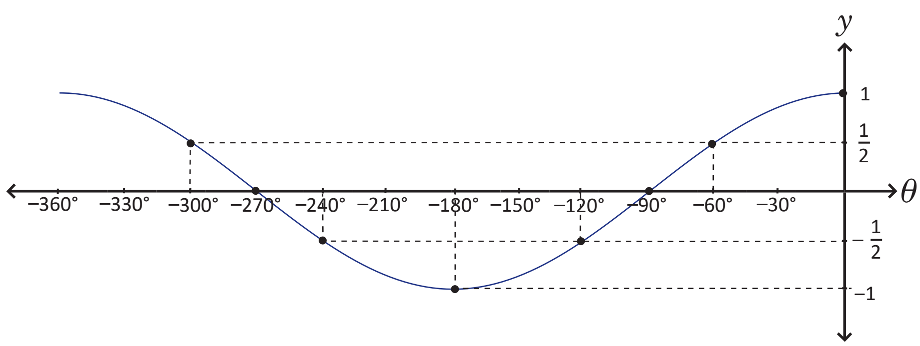
Ya que se ha dibujado la función seno, se seguirá un proceso similar para graficar la función coseno. Se debe observar la similitud y la diferencia entre ambas funciones observando sus gráficas.

Solución de problemas:

1.



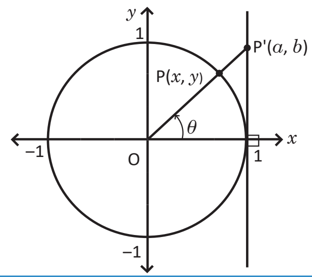
2.



3.7 La tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Se traza la recta $x = 1$ y se dibuja un ángulo θ con lado terminal $\overline{OP}$, donde P(x, y) es un punto en el CT. Luego el segmento OP se prolonga hasta el punto P' que está en la recta $x = 1$.



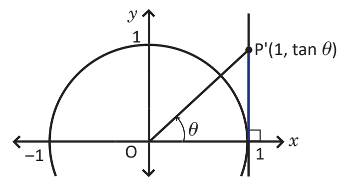
1. Determina las coordenadas del punto P'(a, b) en función de θ.

2. ¿Para cuáles valores de θ, la función $y = \tan \theta$ no está definida?

Solución

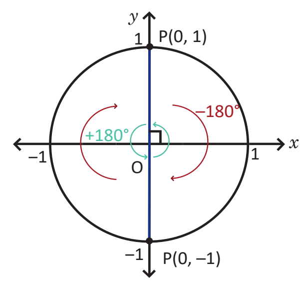
1. Se tiene que $a = 1$, ya que P' es un punto de la recta $x = 1$.
   Utilizando la definición de tangente se tiene que $\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} = b$.

   Por lo tanto, P'(a, b) = P'$(1, \tan \theta)$.



2. Como $\tan \theta = \frac{y}{x}$, no está definida si $x = 0$. Este valor corresponde a los ángulos $\theta = 90°$ y $\theta = 270°$, cuyos puntos en el CT son (0, 1) y (0, –1) respectivamente.

   También $x = 0$, si se suma o resta 180° de estos ángulos. Por lo tanto, todos estos valores se pueden escribir así: $90° + 180°n$, donde n es un número entero.

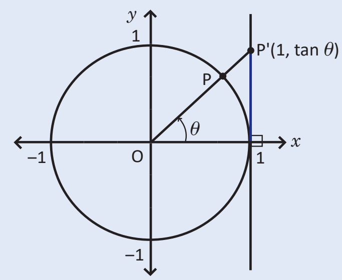


Conclusión

La tangente de un ángulo θ puede representarse en el círculo trigonométrico de la siguiente manera:

1. Se dibuja el punto P correspondiente al ángulo θ en el CT.
2. Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ (O es el origen) hasta cortar a la recta $x = 1$.
3. Se llama P' al punto de corte. La coordenada en y de P' es igual a $\tan \theta$.

La función $\tan \theta$ no está definida para aquellos ángulos de la forma:
$\theta = 90° + 180°n$ donde n es un número entero.



Problemas

Representa el valor de la tangente de los siguientes ángulos, utilizando la figura de la conclusión:

a) $\theta = 30°$ b) $\theta = 60°$ c) $\theta = 135°$

d) $\theta = –45°$ e) $\theta = –120°$ f) $\theta = –150°$

Indicador de logro:

3.7 Representa el valor de la tangente de un ángulo utilizando el círculo trigonométrico.

Secuencia:

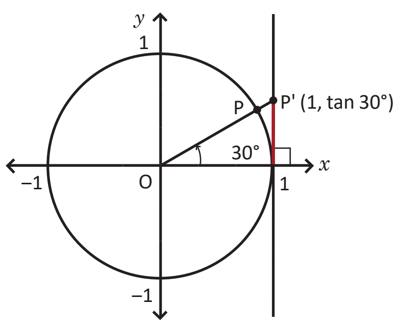
Se ha visto la representación por coordenadas de las razones seno y coseno de un ángulo en el círculo trigonométrico, ahora se representa la tangente para un ángulo dado como la coordenada de un punto en la recta $x = 1$.

Propósito:

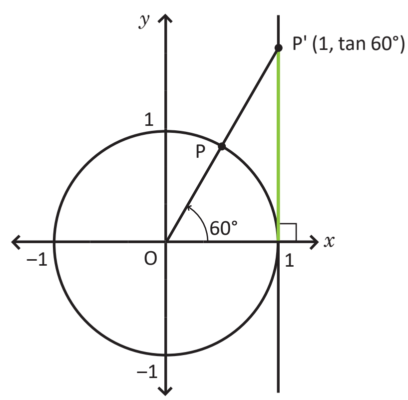
El Problema inicial permite al estudiante reconocer el valor de la tangente de un ángulo como la coordenada en y del punto P' de la figura dada y quedará definido de manera implícita el dominio de esta función.

Solución de problemas:

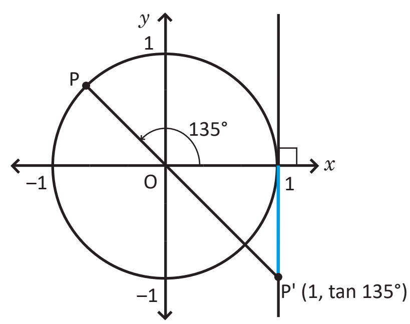
a) $\theta = 30°$



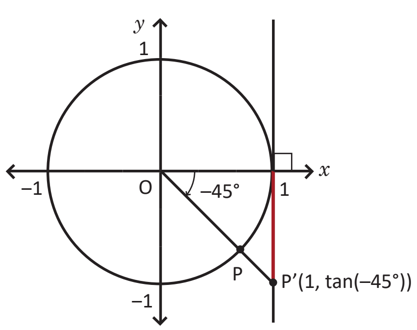
b) $\theta = 60°$



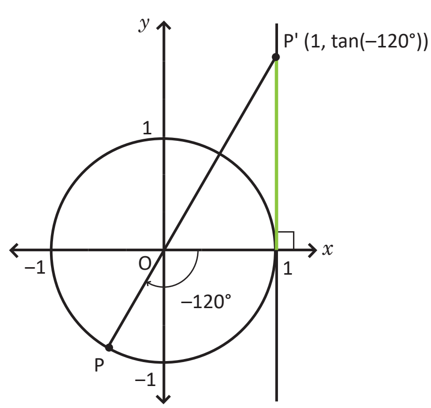
c) $\theta = 135°$



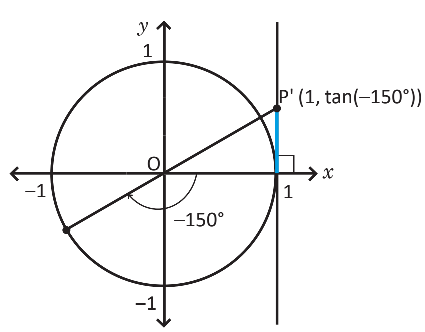
d) $\theta = –45°$



e) $\theta = –120°$



f) $\theta = –150°$



3.8 Gráfica de la función tangente

Problema inicial

1. ¿Qué sucede con el valor de tan θ, si θ toma valores cercanos a 90° y –90°? Utiliza las siguientes tablas.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ					

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ					

2. Completa la siguiente tabla y grafica la función y = tan θ en el intervalo]–90°, 90°[.

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ							

3. Determina el dominio de la función y = tan θ.
4. ¿Cuál es el rango de la función y = tan θ?

Solución

1. Para ángulos cercanos a 90°.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ	28.6...	57.2...	114.5...	572.9...	5 729.5...

El valor de tan θ se vuelve cada vez mayor cuando θ toma valores muy cercanos a 90°.

Para ángulos cercanos a –90°.

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ	–28.6...	–57.2...	–114.5...	–572.9...	–5 729.5...

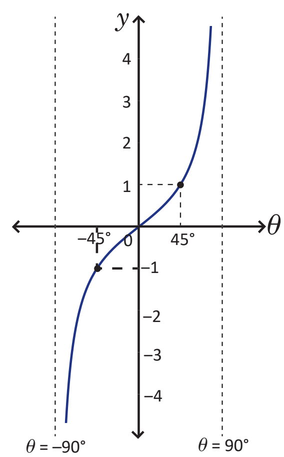
El valor de tan θ se vuelve cada vez menor cuando θ toma valores muy cercanos a –90°.

Se observa que θ = 90° y θ = –90° son asíntotas verticales.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ	–1.7...	–1	–0.5...	0	0.5...	–1	1.7...

Al graficar se obtiene la figura de la derecha.



3. En la clase anterior se vio que la función y = tan θ, no está definida para los valores θ = 90° + 180°n, con n entero. Por lo tanto, el dominio es: $\mathbb{R}$ – {90° + 180° n | n es entero}.

4. A partir de la gráfica se obtiene que el rango de y = tan θ es $\mathbb{R}$.

Conclusión

La función $f(\theta)$ = tan θ tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ – {90° + 180°n | n es entero} y su rango es $\mathbb{R}$. Además, las rectas θ = 90° + 180°n, donde n es un número entero, son asíntotas verticales de la gráfica de la función tangente.

La función $f(\theta)$ = tan θ es una función periódica. El periodo de la función tangente es 180°, y por tanto, en general, tan (θ + 180°n) = tan θ para todo n entero.

Problemas

Utiliza la periodicidad de la tangente para graficar la función $f(\theta)$ = tan θ en el intervalo]–270°, 270°[.

Indicador de logro:

3.8 Grafica la función tangente utilizando la periodicidad.

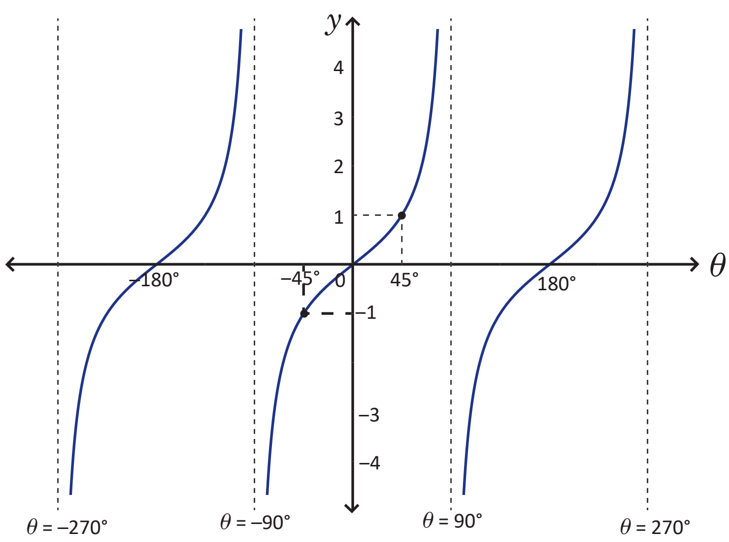
Secuencia:

Ahora se gráfica la función tangente y se describen sus características; en clases anteriores se estableció la diferencia respecto a la periodicidad de las funciones seno y coseno.

Propósito:

El Problema inicial describe algunas características de la función tangente como las asíntotas que posee, así como su dominio, que se obtiene con lo visto en la clase anterior, y el rango, que se obtiene a partir de la observación de la gráfica.

Solución de problemas:



3.9 Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = 2sen θ en el intervalo [0°, 360°].

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ					
2sen θ					

2. a) Grafica la función $g_1(\theta)$ = cos θ en el intervalo [0°, 360°] luego, grafica $g_2(\theta)$ = cos 2θ en el intervalo [0°, 180°], utiliza la siguiente tabla.

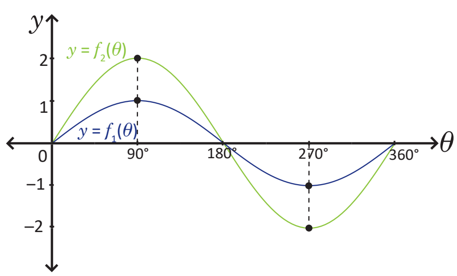
θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ					
cos 2θ					

b) Comprueba que $g_2(\theta + 180°) = g_2(\theta)$ y completa la gráfica hasta el ángulo 360°.

Solución

1. Completando la tabla.

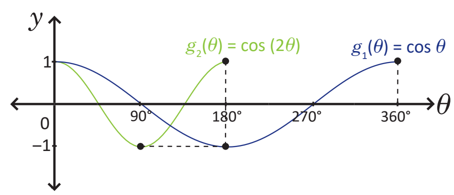
θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ	0	1	0	–1	0
2sen θ	0	2	0	–2	0



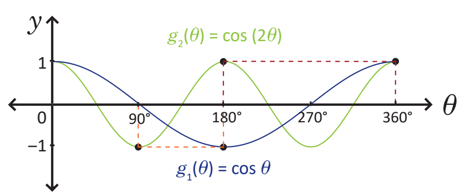
Cada punto de $f_2(\theta)$ = 2sen θ se obtiene multiplicando por 2 la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

2. a) Completando la tabla.

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0°	90°	180°	270°	360°
cos 2θ	1	0	–1	0	1



b) $g_2(\theta + 180°) = \cos(2\theta + 360°) = \cos 2\theta = g_2(\theta)$



Cada punto de la gráfica de $g_2(\theta)$ = cos 2θ se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ la coordenada en θ de los puntos de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Definición

Se llama **amplitud** de la función trigonométrica $f(\theta)$ = A sen θ al valor |A| y es el máximo valor que puede tomar la función. En este caso, el rango de la función es [–|A|, |A|]. Esta función se obtiene multiplicando por A todas las coordenadas en y de la función sen θ.

La función $f(\theta)$ = sen Bθ, donde B es un número real diferente de 0, cumple que

sen (Bθ + 360°) = sen Bθ ⇔ sen B$\left(\theta + \frac{360°}{B}\right)$ = sen Bθ ⇔ $f\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = f(\theta)$.

Así, el **periodo** de la función $f(\theta)$ = sen Bθ es $\frac{360°}{|B|}$ (se utiliza |B|, porque el periodo es positivo).

Estas definiciones también se aplican a las funciones $f(\theta)$ = Acos θ y $f(\theta)$ = cos Bθ.

Problemas

Grafica, en el intervalo [0, 360°], las siguientes funciones utilizando la amplitud y periodicidad.

a) $f(\theta)$ = 3sen θ b) $f(\theta)$ = –2cos θ c) $f(\theta)$ = sen 3θ d) $f(\theta)$ = cos $\frac{\theta}{2}$

Indicador de logro:

3.9 Grafica funciones trigonométricas del tipo y = Asen θ y y = sen Bθ.

Secuencia:

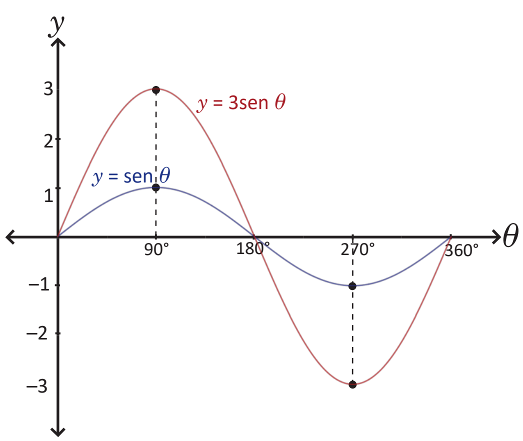
En primer año se estudió el comportamiento de varias funciones en las que la variable o la función misma son multiplicadas por un número real. Ahora, se estudia el efecto que tiene esto en las funciones trigonométricas en relación al periodo y el rango.

Propósito:

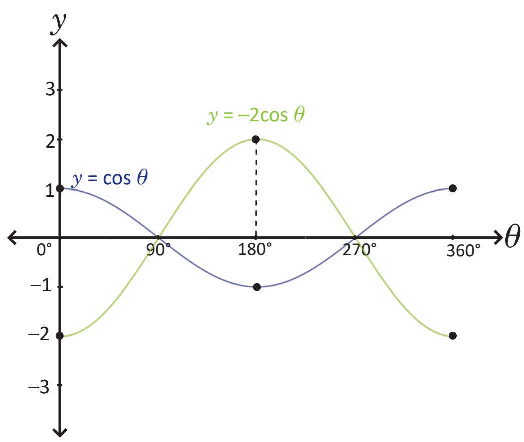
Así como se estudiaron los desplazamientos se grafican las funciones ubicando puntos en el plano y se realiza una comparación entre estas para observar cómo cambia el periodo y la amplitud. En los Problemas debe verificarse la utilización de la Conclusión.

Solución de problemas:

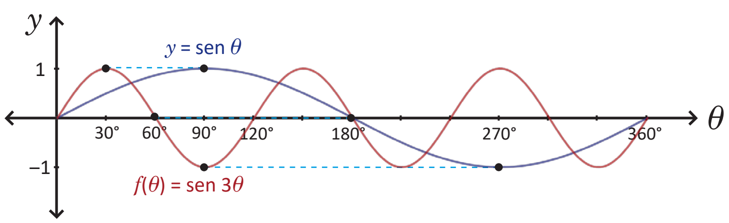
a) $f(\theta)$ = 3sen θ



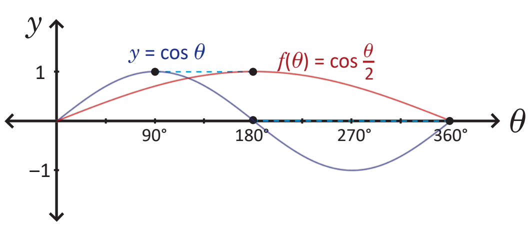
b) $f(\theta)$ = –2cos θ



c) $f(\theta)$ = sen 3θ



d) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$



El estudiante también puede presentar su gráfica sin dibujar la función base.

3.10 Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En cada literal grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen θ + 1; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ + 1						

b) $g_1(\theta)$ = sen θ y $g_2(\theta)$ = sen θ – 1; [0°, 450°]

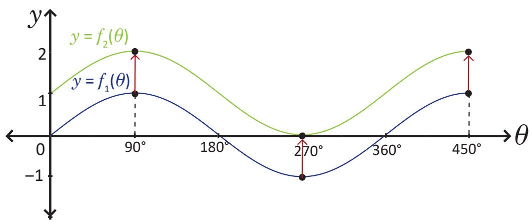
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1						

Solución

Observa que las funciones sen(θ + 1°) y sen θ + 1 son distintas.

a) Se completa la tabla.

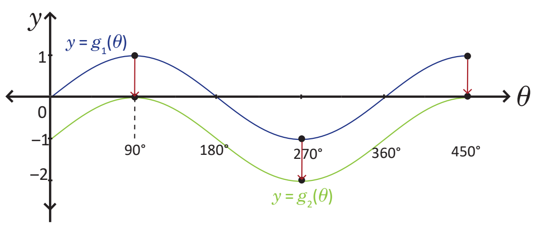
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen (θ) + 1	1	2	1	0	1	2



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen θ + 1 es un desplazamiento de 1 unidad hacia arriba de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1	–1	0	–1	–2	–1	0



Cada punto de $g_2(\theta)$ = sen θ – 1 es un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = sen θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de la función sen θ.

- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Dada la función $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ con dominio $\mathbb{R}$, su rango es el intervalo $[-1 + k, 1 + k]$.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos $\theta + k$ como desplazamiento vertical de la función cos θ.

En general la gráfica de $f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de la gráfica de $f(x)$: hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos θ + 1

b) $f(\theta)$ = sen θ + 2

c) $f(\theta)$ = cos θ – 2

d) $f(\theta)$ = sen θ – 3

Unidad 5

Indicador de logro:

3.10 Grafica funciones trigonométricas del tipo y = sen $\theta + k$.

Secuencia:

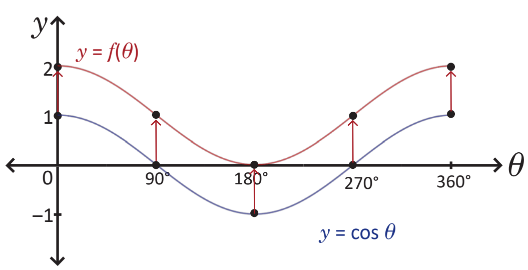
En esta clase se grafican aquellas funciones que son desplazamientos verticales de la función seno y coseno y se describe también el rango de la función desplazada.

Posibles dificultades:

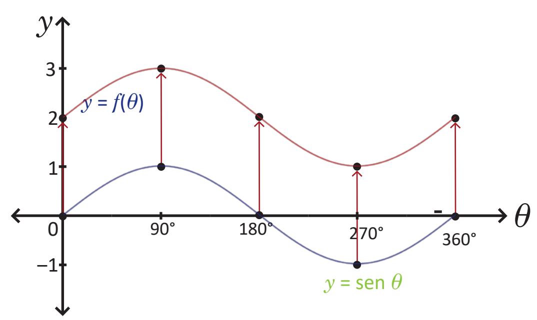
Se debe tener claro que el valor de k se suma después de calcular el valor de sen θ, en esto radica el hecho de que la función y = sen $\theta + k$, se puede graficar como un desplazamiento vertical.

Solución de problemas:

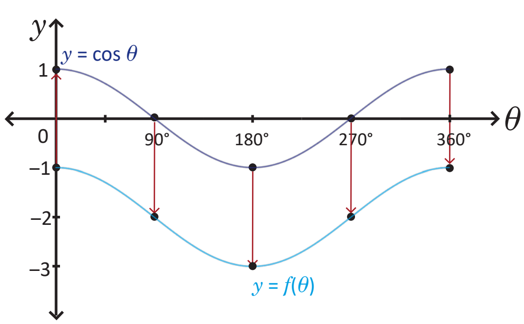
a) $f(\theta)$ = cos θ + 1



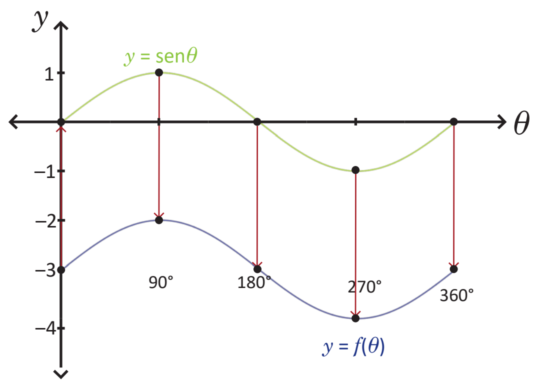
b) $f(\theta)$ = sen θ + 2



c) $f(\theta)$ = cos θ – 2



d) $f(\theta)$ = sen θ – 3



3.11 Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En los siguientes literales grafica las funciones en un mismo plano cartesiano, en el intervalo dado.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$; [0°,450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ						
sen$(\theta - 90°)$						

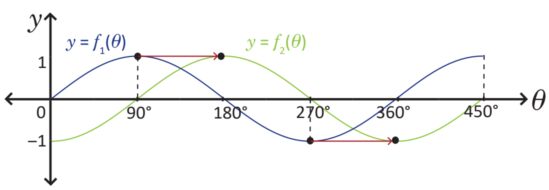
b) $g_1(\theta) = \cos\theta$ y $g_2(\theta) = \cos(\theta + 90°)$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
cos θ							
cos$(\theta + 90°)$							

Solución

a) Se completa la tabla.

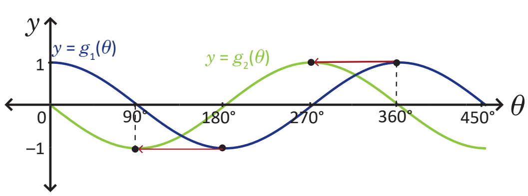
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ	0	1	0	–1	0	1
sen$(\theta - 90°)$	–1	0	1	0	–1	0



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la derecha de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
cos θ	1	0	–1	0	1	0
cos$(\theta + 90°)$	0	–1	0	1	0	–1



Cada punto de $g_2(\theta) = \cos(\theta + 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la izquierda de un punto de la gráfica de $g_1(\theta) = \cos\theta$.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen$(\theta - \alpha)$ es un desplazamiento horizontal de α unidades de la gráfica de sen θ.

- Si $\alpha > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $\alpha < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta) = \cos(\theta - \alpha)$ como desplazamiento de la función cos θ.

En general, la gráfica de $f(x - h)$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la gráfica de $f(x)$:

- Hacia la derecha si $h > 0$.
- Hacia la izquierda si $h < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta) = \cos(\theta - 45°)$

b) $f(\theta) = \cos(\theta - 90°)$

c) $f(\theta)$ = sen$(\theta - (-30°))$

d) $f(\theta)$ = sen$(\theta + 90°)$

Indicador de logro:

3.11 Grafica funciones trigonométricas del tipo $y = \text{sen}(\theta - \alpha)$.

Secuencia:

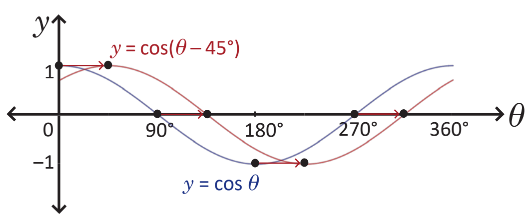
Ahora se grafican las funciones que son desplazamientos horizontales de alguna de las funciones seno o coseno. Hasta aquí se han tratado por separado los desplazamientos, el periodo y la amplitud.

Propósito:

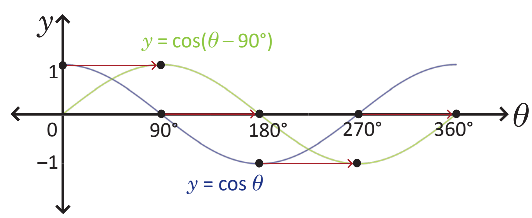
El estudiante debe ser capaz de dibujar la función seno y coseno como gráfica auxilar para luego dibujar la gráfica desplazada. Dependiendo del dominio que tenga el estudiante podrá dibujar la gráfica sin necesidad de la auxiliar.

Solución de problemas:

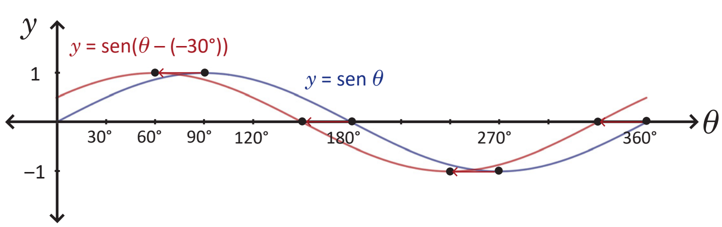
a) $f(\theta) = \cos(\theta - 45°)$



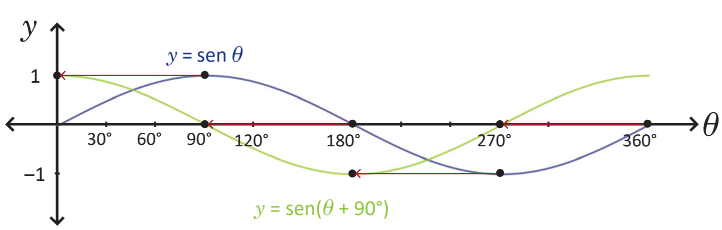
b) $f(\theta) = \cos(\theta - 90°)$



c) $f(\theta) = \text{sen}(\theta - (-30°))$



d) $f(\theta) = \text{sen}(\theta + 90°)$



3.12 Forma general de las funciones trigonométricas

Problema inicial

Grafica la función $f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°)$ en el intervalo [0°, 360°] realizando los siguientes pasos:

1. Considera las funciones $f_1(\theta) = \text{sen}\,3\theta$, $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°)$ y completa la Tabla 1.
2. Completa la Tabla 2.
3. Grafica en el mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$, en el intervalo [0, 120°].
4. Utiliza la periodicidad para completar la gráfica de $f_2(\theta)$ hasta el intervalo [0°, 360°].
5. Grafica en otro plano cartesiano las funciones $f_2(\theta)$ y $f(\theta)$. Utiliza la Tabla 2.

Tabla 1

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$					
$f_2(\theta)$					

Tabla 2

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$					
$f(\theta)$					

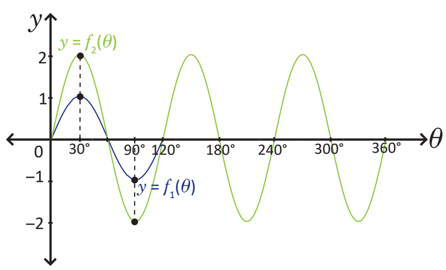
Observa que
$f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.

Solución

1. Se completa la tabla 1.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$	0	1	0	–1	0
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0

3 y 4. Se grafican las funciones f_1 y f_2.

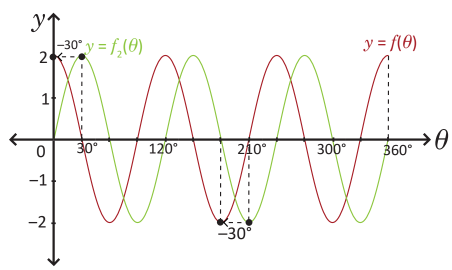


El periodo de f_1 es $\frac{360°}{3} = 120°$.

2. Se completa la tabla 2.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0
$f(\theta)$	2	0	–2	0	2

5. Se grafican las funciones
$f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.



La gráfica de $f(\theta)$ es un desplazamiento de 30° hacia la izquierda de la gráfica de $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$.

Conclusión

Una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, tiene las siguientes características:

1. Tiene amplitud $|A|$, por lo que su rango es $[-|A|, |A|]$.
2. Tiene periodo $\frac{360°}{|B|}$ y es un desplazamiento horizontal de α unidades respecto a la función $A\text{sen}\,B\theta$.

Para graficar una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$ se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se grafica la función $\text{sen}\,B\theta$ en el intervalo $\left[0, \frac{360°}{|B|}\right]$.
2. Se grafica la función $A\text{sen}\,B\theta$ y se utiliza la periodicidad para completar el intervalo en el que se graficará.
3. Se efectúa el desplazamiento horizontal de α unidades para obtener $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$.

Problemas

Grafica cada función, en el intervalo [0, 360°] utilizando los desplazamientos, amplitud y periodo:

a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$ b) $f(\theta) = 3\cos\,2(\theta + 45°)$ c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°)$

Unidad 5

Indicador de logro:

3.12 Grafica las funciones trigonométricas del tipo $y = \text{A}\operatorname{sen} \text{B}(\theta - \alpha)$.

Secuencia:

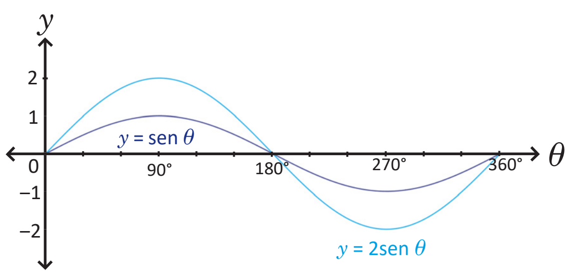
En esta clase se grafican las funciones trigonométricas en las que es necesario identificar amplitud, el periodo y desplazamientos verticales u horizontales.

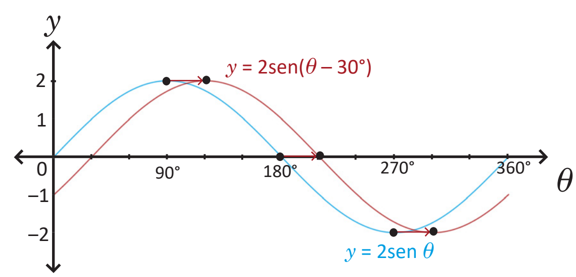
Propósito:

En la Solución se han utilizado dos dibujos con el fin de no saturar la gráfica, cada estudiante evaluará si este proceso le es factible. En el caso que dibujen todas las gráficas en un mismo plano debe resaltarse con color la gráfica de la función dada.

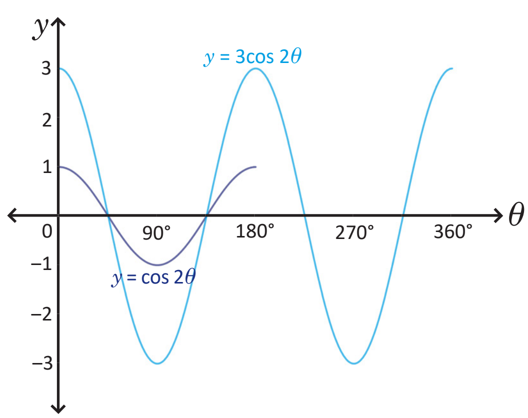
Solución de problemas:

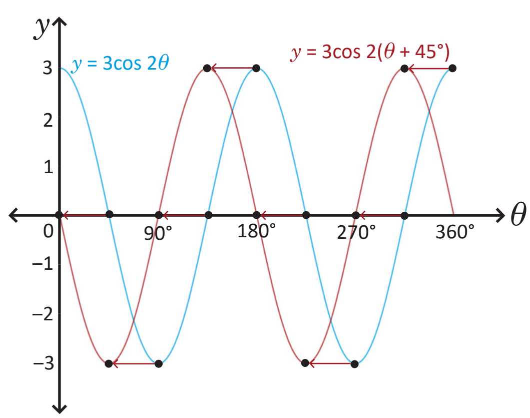
a) $f(\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta - 30°)$





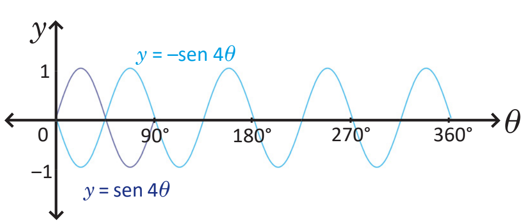
b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$

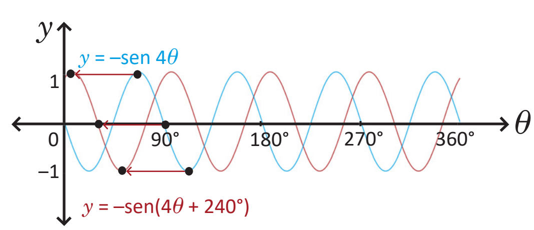




En b) se puede graficar la función que se obtiene aplicando identidades trigonométricas.
$f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°) = 3\operatorname{sen}(2\theta + 90°) = -3\operatorname{sen} 2\theta$

c) $f(\theta) = -\operatorname{sen}(4\theta + 240°) = -\operatorname{sen} 4(\theta + 60°) = -\operatorname{sen} 4(\theta - (-60°))$





El literal c) se puede graficar hasta 180° y utilizar marcas en el eje x cada 30° para visualizar el desplazamiento de 60° a la izquierda utilizando dos cuadrados del cuaderno.

3.13 Sistema circular de ángulos

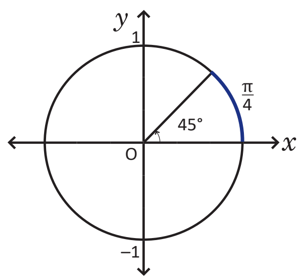
Problema inicial

1. Encuentra la longitud del arco del CT cuyo ángulo central es 45°.
2. Encuentra el ángulo central del CT cuya longitud es $\frac{\pi}{6}$.

En una circunferencia de radio r, la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ está dado por $2\pi r\frac{\theta}{360^\circ}$.

Solución

1. El radio del CT es $r = 1$. La longitud del arco subtendido por el ángulo de 45° está dado por: $2\pi(1)\frac{45^\circ}{360^\circ} = \cancel{2}^{1}\pi\,\frac{1}{\cancel{8}_{4}}$.
   Por lo tanto, la longitud del arco es $\frac{\pi}{4}$.



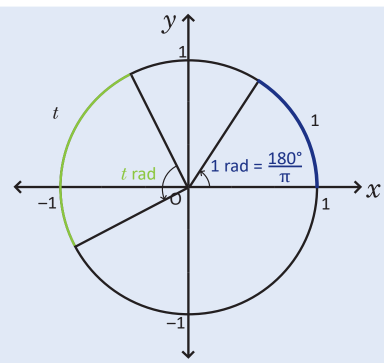
2. Sea α el ángulo central tal que $2\pi\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$.
   Se despeja $\alpha = \frac{\pi}{6}\left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right) = 30^\circ$.
   Por lo tanto, el ángulo que subtiende un arco de longitud $\frac{\pi}{6}$ es 30°.

Definición

En el círculo trigonométrico se define: **1 radián** como el ángulo que subtiende un arco de longitud 1.

Así t **radianes** es el ángulo que subtiende un arco de longitud t y se representa como t rad (o solo t).

El ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360^\circ$, subtiende un arco de longitud $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$, entonces el ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360^\circ$, tiene un valor de $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$ rad.



Esta definición se extiende a cualquier ángulo de la siguiente manera: si θ es un ángulo cualquiera, entonces su valor en radianes está dado por

$$\frac{\theta}{180^\circ}\pi \text{ rad}.$$

Si se tiene la medida de un ángulo t en radianes, su valor θ en grados está dado por $\theta = \frac{180^\circ}{\pi}t$.

El sistema en el que se escriben los ángulos en grados se denomina **sistema sexagesimal de ángulos**.

Ejemplo

a) Expresar en radianes el ángulo 120°.

$$120^\circ = \frac{120^\circ}{180^\circ}\pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Escribe en grados el valor de $\frac{\pi}{5}$.

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{5}\right) = 36^\circ$$

Problemas

1. Se tienen los siguientes ángulos en grados, determina su valor en radianes:

a) 60°	b) 15°	c) 10°	d) 270°
e) 135°	f) 150°	g) 210°	h) 315°

2. Se tiene los siguientes ángulos en radianes, determina su valor en grados:

a) 2π rad	b) π rad	c) $\frac{\pi}{2}$ rad	d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) 1 rad	f) $\frac{2\pi}{9}$ rad	g) $\frac{5\pi}{4}$ rad	h) $\frac{9\pi}{5}$ rad

Indicador de logro:

3.13 Convierte ángulos del sistema sexagesimal al sistema circular y viceversa.

Secuencia:

El estudio de las funciones trigonométricas se ha realizado utilizando los valores de los ángulos en el sistema sexagesimal, pues el estudiante está acostumbrado a este sistema con el cual se ha trabajado desde la educación básica, además se facilita la construcción de las gráficas ya que se evita el uso de fracciones. La introducción del sistema circular o radial se realiza en esta clase.

Propósito:

En esta clase se relaciona la longitud de un arco de círculo con el ángulo escrito en grados, de esta forma se introduce el radián y se explica la conversión de valores en el sistema sexagesimal y el radial.

Solución de problemas:

1a) $60° = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

1b) $15° = \frac{15°}{180°}\pi = \frac{\pi}{12}$ rad

1c) $10° = \frac{\pi}{18}$ rad

1d) $270° = \frac{3\pi}{2}$ rad

1e) $135° = \frac{3\pi}{4}$ rad

1f) $150° = \frac{5\pi}{6}$ rad

1g) $210° = \frac{7\pi}{6}$ rad

1h) $315° = \frac{7\pi}{4}$ rad

2a) 2π rad $= 2\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 360°$

2b) π rad $= 180°$

2c) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

2d) $\frac{5\pi}{12}$ rad $= 75°$

2e) 1 rad $= \frac{180°}{\pi} = 57.29577...°$

2f) $\frac{2\pi}{9}$ rad $= 40°$

2g) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= 225°$

2h) $\frac{9\pi}{5}$ rad $= 324°$