1. Considere la función $f(x) = e^{x^2-1}$ .

(a) (5 pts.) Aproxime $f'(1)$ con las fórmulas centrada y hacia atrás de 2 pts. usando $h = 0.5$.

(b) (5 pts.) Encuentre un límite superior del error numérico para cada aproximación.

$$E_{Centrada}(x) = \frac{h^2}{6}|f'''(c)| \qquad E_{Atras}(x) = \frac{h}{2}|f''(c)|$$

(c) (5 pts.) Calcule cada error numérico y compruebe que se encuentra dentro del límite superior.

a) $f_B'(a) \approx \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h}$ $\quad E_2 = Kh \quad$ (hacia atrás)

$E_2 = \dfrac{h}{2}$

$\dfrac{1 - (1 - 0.5)}{0.5} = 1$

$f_c'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ $\quad E_3 = K h^2 \quad$ (centrada)

$E_3 = \dfrac{h}{4}$

$\dfrac{(1+0.5) - (1-0.5)}{2(0.5)} = 1$

b y c) $E_{centrada} = \dfrac{h^2}{6}|f'''(c)|$

$= \dfrac{(0.5)^2}{6}|f'''(c)|$

$= \dfrac{1}{24}|f'''(c)|$

$= \dfrac{1}{24}(1) = 0.04$

$E_{atras} = \dfrac{h}{2}|f''(c)|$

$= \dfrac{0.5}{2}|f''(c)|$

$= \dfrac{1}{4}|f''(c)|$

$= \dfrac{1}{4}(1) = 0.25$

$\lim\limits_{h \to 0} E = \lim\limits_{h\to 0} (h^2) = \lim\limits_{h \to 0} (0.25) = 0.25$

$\lim\limits_{h \to 0} E = \lim\limits_{h\to 0} (h^1) = \lim\limits_{h \to 0} (0.5) = 0.5$

2. Considere la función $y = 2x^3 - 6x^2 + 3x$ en $x = 2$.

(a) (05 pts.) Aproxime $g'(2)$ usando la diferencia hacia adelante y centrada con $h_1 = 0.2$.

(b) (05 pts.) Aproxime $g'(2)$ usando la diferencia hacia adelante y centrada con $h_1 = 0.1$. Encuentre el error numérico y el error porcentual.

(c) (10 pts.) Calcule los errores para cada valor de $h$ y el orden observado de convergencia para cada caso. Explique cuál método proporciona la respuestas más exactas.

$$p = \frac{\log(E_1/E_2)}{\log(h_1/h_2)}$$

a) Hacia adelante $f'_F(a) \simeq \dfrac{f(a+h)+f(a)}{h} = \dfrac{(2+0.2)+2}{0.2} = 21$

$E_1 = k_1 h \rightarrow E_1 = \dfrac{k}{5}$

Centrada $f'_B(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \dfrac{(2+0.2)-(2-0.2)}{2(0.2)} = 1$

$E_3 = k_3 h^2 \rightarrow E_3 = \dfrac{k}{25}$

b) Hacia adelante $f'_F(a) \simeq \dfrac{f(a+h)+f(a)}{h} = \dfrac{(2+0.1)+2}{0.1} = 41$

$E_1 = k_1 h \rightarrow E_1 = \dfrac{k}{10}$

$E_{adelante} = \dfrac{h}{2}|f''(c)| = \dfrac{0.1}{2}|f''(c)| = \dfrac{1}{20}|f''(c)| = \dfrac{1}{20}(2) = 0.1$

$E_{numérico} = \dfrac{0.1}{41} = 2.439 * 10^{-3}$

Error porcentual $= 0.24\ \%$

$p = \log(E_1/E_2) / \log(h_1/h_2)$

Centrada $f'_B(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \dfrac{(2+0.1)-(2-0.1)}{2(0.1)} = 1$

$E_3 = k_3 h^2 \rightarrow E_3 = \dfrac{k}{100}$

$E\ centrada = \dfrac{h^2}{6}|f'''(c)| = \dfrac{(0.1)^2}{6}|f'''(c)| = \dfrac{1}{600}|f'''(c)| = \dfrac{1}{600}(2) = 0.003$

$E_{numérico} = \dfrac{0.01}{1} = 0.01$

$E_{porcentual} = 1\ \%$

c) Hacia adelante

$$p = \frac{\log(0.2/0.1)}{\log(0.2/0.1)} = 1$$

Centrada

$$p = \frac{\log(0.4/0.01)}{\log(0.2/0.1)} = 5.32$$

* Los errores de h están calculados en el inciso B

* Es mejor utilizar el error hacia adelante.

3. Considere la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3 - e^{-x})\, dx$ .

(a) (05 pts.) Aproxime el valor de la integral con la regla del Trapecio y de Simpson.

(b) (10 pts.) Determine un límite superior del error numérico para cada regla.
¿Cuál regla proporciona la mejor aproximación del valor de la integral?

a) Trapecio

$h = b - a = 1 - (-1) = 2$

$\int_{-1}^{1} 3 - e^{-x}\, dx \Rightarrow -\int_{1}^{-1} -3 + e^{\mu}\, d\mu \Rightarrow \int_{-1}^{1} 3\, d\mu = 6$

$\int_{-1}^{1} e^{\mu}\, d\mu = e - e^{-1}$

$\int_{-1}^{1} 3 - e^{-x}\, dx = 6 + e - e^{-1} \approx 8.35$

Simpson

$h = (b-a)/2 = (1-(-1))/2 = 1$

$IS = (h/3) * (f(a) + 4f(a+h) + f(a+2*h))$

$= 1/3 * (3 - e^{-(-1)} + 4(3 - e^{\cancel{-(-1+1)}\,1}) + 3 - e^{-(-1+2)}$

$= 1/3 * (3 - e + 8 + 3 - e^{-1})$

$= 1/3 * (14 - e(1 + e^{-2})) = \dfrac{14 - e(1+e^{-2})}{3} \approx 3.63$

b) $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}(f(-1) + f(1))$

$= \frac{1}{\cancel{2}} * \cancel{2} * (3 - e^{-(-1)} + 3 - e^{-1})$

$= 3 - e + 3 - e^{-1} \Rightarrow 6 - e(1 + e^{-2}) \approx 2.91$

Error Trapecio $= |2.91 - 8.35| = 5.44$

Error porcentual $= |2.91 - 8.35 / 8.35| * 100 = 65.14\,\%$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2))$

$= \frac{1}{3}(3 - \cancel{e^{-(0)}}\,1 + 4(3 - e^{-(1)}) + 3 - e^{-2})$

$= \frac{1}{3}(3 + 12 + 3 - 1 - e^{-1} - e^{-2})$

$= \frac{1}{3}(17 - e^{-1} - e^{-2}) \approx 5.49$

Error Simpson $= |5.49 - 8.35| = 2.85$

Error porcentual $= (2.85/8.35) * 100 = 34.14\,\%$

* La regla de Simpson proporciona la mejor aproximación.