Zur algebraischen Begründung der Graphentheorie. I

Helmut Hasse zum 65. Geburtstag

Von Maria Hasse in Dresden

(Eingegangen am 23. 9. 1963)

In der Theorie der Kategorien spielen Graphen als Erzeugendensysteme allgemeiner Strukturen eine grundlegende Rolle. Die bisherigen Definitionen eines Graphen erweisen sich jedoch als in einer für die Aufdeckung dieser Zusammenhänge ungeeigneten Sprache formuliert.

Man wird versuchen, den Begriff des Graphen in enger Anlehnung an denjenigen der Kategorie (im Sinne von Ehresmann [1]) algebraisch zu fassen. In [2] wurden derartige Definitionen für die verschiedenen Typen von Graphen gegeben und bereits einige Zusammenhänge zwischen Graphen und Kategorien dargelegt.

Ziel dieser und folgender Arbeiten ist es, zunächst die in [2] angegebenen Definitionen und Begriffe zu erweitern und zu präzisieren und danach, auf diesen aufbauend, eine Reihe von Aussagen über Graphen herzuleiten, die in unmittelbarer Beziehung zur Theorie der Kategorien stehen.

Definitionen gerichteter und ungerichteter Graphen

Üblicherweise liegt dem Begriff des Graphen der Mengenbegriff zugrunde. Das bedeutet eine Beschränkung im Hinblick auf diejenigen Strukturen, die über Graphen konstruiert werden. Wir werden daher, um von vornherein die volle Allgemeinheit zu wahren, unter dem Träger eines Graphen stets eine Klasse verstehen.

Definition 1: *Ein gerichteter Graph* $\vec{G} = (G; \alpha, \beta)$ *ist eine algebraische Struktur vom Typ* $\langle 1, 1 \rangle$ *über dem Träger* G *mit den beiden vollständigen einstelligen Verknüpfungen* α *und* β. *Dabei genügen* α *und* β *den folgenden Bedingungen:*

$$\alpha(\alpha(x)) = \beta(\alpha(x)) = \alpha(x); \quad \alpha(\beta(x)) = \beta(\beta(x)) = \beta(x) \quad (x \in G).$$

Bemerkungen: Jedes Element e aus $\alpha(G) \cup \beta(G)$ heißt ein *Eckpunkt* von $\vec{G}$. Nach Definition sind jedem Element x aus G eindeutig zwei Eckpunkte zugeordnet, sein linker Eckpunkt (Anfangspunkt) $\alpha(x)$ und sein rechter Eckpunkt (Endpunkt) $\beta(x)$. Die Klasse aller Eckpunkte von $\vec{G}$ werde mit G_0 bezeichnet[1]).

Zwei Elemente x, y aus G heißen *links-* bzw. *rechtszugehörig*, wenn $\alpha(x) = \alpha(y)$ bzw. $\beta(x) = \beta(y)$ ist. Sind beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, so werden x und y *doppeltzugehörig* genannt.

Definition 2: Ein *doppelt-gerichteter Graph* $\overleftrightarrow{G} = (G; \alpha, \beta, \gamma)$ *ist eine algebraische Struktur vom Typ* $\langle 1, 1, 1\rangle$ *über dem Träger* G *mit den drei vollständigen einstelligen Verknüpfungen* α, β *und* γ. *Die* $\overleftrightarrow{G}$ *unterliegende Struktur vom Typ* $\langle 1, 1\rangle$ *mit den definierenden Operationen* α *und* β *ist ein gerichteter Graph. Die Verknüpfung* γ *genügt den Axiomen:*

$$\alpha(\gamma(x)) = \beta(x), \quad \beta(\gamma(x)) = \alpha(x), \quad \gamma(\gamma(x)) = x \ (x \in G);$$
$$\gamma(e) = e \quad (e \in G_0).$$

Bemerkungen: Die Elemente x aus $G - G_0$ werden sowohl beim gerichteten wie beim doppelt-gerichteten Graphen *Kanten* oder *Schlingen* genannt, je nachdem ob $\alpha(x) \neq \beta(x)$ oder $\alpha(x) = \beta(x)$ ist. Ist x die Kante eines doppelt-gerichteten Graphen, so nennt man die Menge $\{x, \gamma(x)\}$ auch manchmal eine *zweifache Kante*. Das Tripel $(\alpha(x), x, \beta(x))$ werden wir einen *Pfeil von* $\alpha(x)$ *nach* $\beta(x)$ nennen und manchmal auch in der herkömmlichen Bezeichnungsweise eine von $\alpha(x)$ *nach* $\beta(x)$ *gerichtete Kante.*

In Zukunft wollen wir gerichtete Graphen kurz als Graphen, doppeltgerichtete Graphen als d-Graphen bezeichnen. Wenn wir von dem Graphen $\overleftrightarrow{G}$ sprechen, ist stets ein d-Graph gemeint, wie aus dem Doppelpfeil über G hervorgeht.

Definition 3: *Ein ungerichteter Graph* $\bar{G} = (G; \pi)$ *ist eine Klasse* G, *über der eine eindeutige Abbildung* π *von* G *in die Potenzklasse* $P(G)$ *definiert ist. Dabei gilt:*

$$0 < |\pi(x)| \leqq 2; \quad x \in \pi(x) \Rightarrow \pi(x) = \{x\} \quad (x \in G).$$

Bemerkung: Wie bei gerichteten Graphen werden die Elemente von G auch im Falle des ungerichteten Graphen Eckpunkte und Kanten genannt.

Ein ungerichteter Graph ist im üblichen Sinn keine algebraische Struktur, da die Abbildung π aus G herausführt. Ein ungerichteter Graph definiert jedoch bis auf Isomorphie eindeutig einen d-Graphen und umgekehrt.

Wir leiten zunächst aus einem ungerichteten Graphen $\bar{G}$ einen d-Graphen her. Es bezeichne K' eine beliebige zu $K = G - \bigcup_{y \in G} \pi(y)$ äquivalente Klasse mit $G \cap K' = \emptyset$. Bei einer festgewählten Äquivalenz ι von K auf K' sei $\iota(x) = x'$ $(x \in K)$. Jedem Element x aus K werde nun die zweielementige

1) Genauer müßte man $(\vec{G})_0$ schreiben, da es sich um die *Klasse der Eckpunkte des Graphen* $\vec{G}$ handelt.

Menge $\{x, x'\}$ zugeordnet. Es sei α eine eindeutige Abbildung von $G \cup K'$ in G, die $G - K$ elementweise festläßt und für die $\pi(x) = \{\alpha(x), \alpha(x')\}$ bei $x \in K$ gilt. Dann ist $\overleftrightarrow{G \cup K'} = (G \cup K'; \alpha, \beta, \gamma)$ ein d-Graph, wenn man die Verknüpfungen β und γ noch wie folgt festsetzt:

$$\beta(x) := \alpha(x'), \quad \beta(x') := \alpha(x), \quad \beta(e) := e;$$

$$\gamma(x) := x', \quad \gamma(x') := x, \quad \gamma(e) := e$$

bei $x \in K, e \in G - K$.

Nun sei umgekehrt ein Graph $\overleftrightarrow{G}$ vorgegeben. R bezeichne die Äquivalenzrelation in G mit:

$$y\,R\,x :\Leftrightarrow (y = x) \vee (y = \gamma(x)) \quad (x \in G).$$

Die $x \in G$ enthaltende Äquivalenzklasse mod R sei mit $\tilde{x}$ angegeben. Dann wird die Klasse der Äquivalenzklassen mod R ein ungerichteter Graph durch Hinzufügung der Abbildung π mit:

$$\pi(\tilde{x}) := \{\{\alpha(x)\}, \{\alpha(\gamma(x))\}\}.$$

Duale Graphen[2])

Jedem Graphen $\vec{G}$ läßt sich in folgender Weise ein dualer Graph $\vec{G}^*$ zuordnen:

Die Träger von $\vec{G}$ und $\vec{G}^*$ stimmen überein, und die Verknüpfungen α^* und β^* sind festgesetzt durch:

$$\alpha^*(x) := \beta(x), \quad \beta^*(x) := \alpha(x) \quad (x \in G).$$

Es sei $\mathfrak{G}_0$ die Klasse aller Graphen. Die an entsprechender Stelle stehenden Operationen in den verschiedenen Graphen von $\mathfrak{G}_0$ denken wir uns im folgenden durch die gleichen Buchstaben α und β bezeichnet. Zu jeder Aussage $\mathfrak{a}$ in der Theorie der Graphen gehört eindeutig eine duale Aussage $\mathfrak{a}^*$, die aus $\mathfrak{a}$ entsteht, wenn man folgende Ersetzungen vornimmt: $\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$.

Ist die Aussage $\mathfrak{a}$ in einem bestimmten Graphen $\vec{G}$ wahr, so ist $\mathfrak{a}^*$ in dem dualen Graphen $\vec{G}^*$ ebenfalls wahr. Weiter gilt stets: $(\mathfrak{a}^*)^* = \mathfrak{a}$.

Eine Aussage $\mathfrak{a}$, die für jeden Graphen $\vec{G}$ aus $\mathfrak{G}_0$ wahr ist, heißt ein Satz in der Theorie der Graphen. Die zu einem Satz in der Theorie der Graphen duale Aussage ist wieder ein Satz in der Theorie der Graphen. Dies folgt sofort aus:

$$(G^*)^* = \vec{G}.$$

---

[2]) Die im folgenden gemachten Aussagen über Graphen gelten zu einem großen Teil für d-Graphen, wenn man die über α und β gemachten Voraussetzungen geeignet auf γ erweitert.

Als unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen ergeben sich folgende Aussagen:

Satz 1. *Für jeden Graphen $\vec{G}$ aus $\mathfrak{G}_0$ gilt:*

$$\alpha(G) = \beta(G) = G_0.$$

Beweis: Wegen $\alpha(x) = \beta(\alpha(x))$ $(x \in G)$ ist $\alpha(G) \subseteqq \beta(G)$. Durch Dualisierung ergibt sich hieraus $\beta(G) \subseteqq \alpha(G)$ und damit die Behauptung.

Satz 2. *Für jeden Graphen $\vec{G}$ aus $\mathfrak{G}_0$ gilt:*

$$\alpha(e) = \beta(e) = e \quad (e \in G_0).$$

Beweis: Aus $e \in G_0$ folgt nach Satz 1 die Existenz mindestens eines Elements x aus G mit $\alpha(x) = e$. Folglich ist:

$$\alpha(e) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha(x) = e.$$

Durch Dualisierung ergibt sich der zweite Teil der Behauptung.

Satz 3. *Bei*

$$H(a, b) := \{x \in G: (\alpha(x) = \beta(a)) \wedge (\beta(x) = \alpha(b))\}$$

gilt:

$$H(a, b) = H(\beta(a), \alpha(b)).$$

Beweis: Es ist:

$$\begin{aligned} H(a, b) &= \{x \in G: (\alpha(x) = \beta(a)) \wedge (\beta(x) = \alpha(b))\} \\ &= \{x \in G: (\alpha(x) = \beta(\beta(a))) \wedge (\beta(x) = \alpha(\alpha(b)))\} \\ &= H(\beta(a), \alpha(b)). \end{aligned}$$

Bemerkungen: Die nicht-leeren Klassen $H(e, e')$ $(e, e' \in G_0)$ sind paarweise elementefremd, und ihre Vereinigung stimmt mit G überein. Ist nämlich a ein Element von G, so ist a Element von $H(\alpha(a), \beta(a))$. Umgekehrt folgt aus $a \in H(e, e')$, daß $e = \alpha(a)$ und $e' = \beta(a)$ ist.

Definition 4: *Es sei $\vec{G}$ ein Graph, O eine mit G_0 gleichmächtige Klasse und ω eine umkehrbar eindeutige Abbildung von G_0 auf O. Dann heißt das Element $\omega(e)$ ein Objekt für e und O eine Klasse von Objekten für $\vec{G}$.*

Beispiele

1. In der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ sei durch die Anordnung der natürlichen Zahlen eine Halbordnungsrelation definiert. Dann ist die Teilmenge G von $M \times M$, die genau die Paare (i, k) mit $i \leqq k$ zu Elementen hat, Träger eines Graphen $(G; \alpha, \beta)$, wenn man festsetzt:

$$\alpha((i, k)) := (i, i), \quad \beta((i, k)) := (k, k) \quad ((i, k) \in G).$$

G_0 ist die Diagonale $\Delta = \{(i, i): i \in M\}$ von $M \times M$. Die Menge $M \times M$ selbst wird zu einem d-Graphen, wenn man sie versieht mit den wie oben erklärten Abbildungen α und β, erweitert auf $M \times M$, und der Abbildung γ, die definiert ist durch:

$$\gamma\,((i,k)) := (k,i) \quad ((i,k) \in M \times M).$$

Wie wir später sehen werden, läßt sich der so konstruierte d-Graph mit dem schlichten BRANDTschen Gruppoid vom Range n identifizieren. Dieser d-Graph werde mit $\overleftrightarrow{G}^{(n)}$ bezeichnet. Eine Objektmenge für $\overleftrightarrow{G}^{(n)}$ ist M. Jeder zu $\overleftrightarrow{G}^{(n)}$ isomorphe Graph heißt ein *vollständiger Graph mit n Eckpunkten.*

2. Die Menge G aller reellen rechteckigen Matrizen A ist Träger eines Graphen $\vec{G} = (G;\alpha,\beta)$ mit:

$$\alpha\,(A_{nm}) := E_n, \quad \beta\,(A_{nm}) := E_m \quad (A_{nm} \in G).$$

Dabei gibt der Index Spalten- und Zeilenzahl der Matrix an, und E_k bezeichnet die k-reihige Einheitsmatrix. G_0 ist die Menge der Einheitsmatrizen. Sowohl die Menge der natürlichen Zahlen wie auch die Menge der endlich dimensionalen reellen linearen Räume sind Objektmengen für $\vec{G}$.

3. Es sei R eine reflexive binäre Relation in einer Menge M. Dann ist, wenn α bzw. β diejenigen Abbildungen bedeuten, die dem Element (x,y) aus R das Element (x,x) bzw. (y,y) aus R zuordnen, das Tripel $(R;\alpha,\beta)$ ein Graph. Ist R speziell eine symmetrische Relation, so läßt sich der obige Graph zu einem d-Graphen erweitern, indem man noch die Abbildung γ mit:

$$\gamma\,((x,y)) := (y,x) \quad ((x,y) \in R)$$

als definierende Operation hinzunimmt.

4. In der Klasse $\mathfrak{M}_0$ aller Mengen bezeichne $\mathfrak{B}\,(M,M')$ $(M,M'' \in \mathfrak{M}_0)$ die Menge aller binären Relationen zwischen der Menge M und der Menge M'. $\mathfrak{B}\,(M,M')$ ist also die Menge $P\,(M \times M')$ aller Untermengen von $M \times M'$. Dann ist

$$G = \{(M,R,M') \colon (M,M' \in \mathfrak{M}_0) \wedge (R \in \mathfrak{B}\,(M,M'))\}$$

mit den beiden folgendermaßen definierten Verknüpfungen α und β:

$$\alpha\colon (M,R,M') \to (M,E_M,M),\ \beta\colon (M,R,M') \to (M',E_{M'},M')$$

ein Graph. Dabei bezeichnet E_M bzw. $E_{M'}$ die Gleichheitsrelation in M bzw. M'. Für diesen Graphen ist beispielsweise $\mathfrak{M}_0$ eine Klasse von Objekten.

Graphen und Kategorien

Definition 5: *Eine Kategorie $\vec{C}^{\cdot} = (C;\alpha,\beta,\varphi)$ ist eine algebraische Struktur vom Typ $\langle 1,1,2\rangle$ mit dem Träger C, den beiden einstelligen Verknüpfungen α und β und der binären Verknüpfung φ. Dabei genügen α, β und φ den folgenden Axiomen, wenn wir statt $\varphi\,(x,y)$ bei $(x,y) \in W$ — dem sogenannten Wirkungsbereich von φ — $x\,y$ schreiben*[3]).

[3]) Für $(x, y) \in W$ lies: „$x\,y$ ist definiert" oder „$x\,y$ existiert". Die angegebene Definition der Kategorie ist mit den üblichen Definitionen äquivalent (siehe [3]).

K I: *Die Verknüpfungen* α *und* β *sind vollständig, d. h. die Wirkungsbereiche von* α *und* β *stimmen mit der Klasse* C *überein.*
Für den Wirkungsbereich W *von* φ *gilt:*

$$W = \{(x, y) \in C \times C : \beta(x) = \alpha(y)\}.$$

K II: $\beta(\alpha(x)) = \alpha(x), \quad \alpha(\beta(x)) = \beta(x) \quad (x \in C).$

K III: *Bei* $(x, y) \in W$ *gilt:*

$$\alpha(x\,y) = \alpha(x), \quad \beta(x\,y) = \beta(y).$$

K IV: *Bei* $(x, y) \in W, \quad (y, z) \in W, \quad (x, y\,z) \in W, \quad (x\,y, z) \in W$ *ist:*

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z).$$

K V: $\alpha(x)\,x = x, \quad x\,\beta(x) = x \quad (x \in C).$

Bemerkungen: Unter Beachtung von K III und K V ergibt sich:

$$\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x), \quad \beta(\beta(x)) = \beta(x) \quad (x \in C).$$

Jedem Element $x \in C$ sind eindeutig zwei *Einheiten* zugeordnet, seine *Linkseinheit* $\alpha(x)$ und seine *Rechtseinheit* $\beta(x)$. Die Klasse aller Einheiten in $\vec{C}^{\cdot}$ werde mit C_0 bezeichnet.

Offensichtlich ist durch jede Kategorie $\vec{C}^{\cdot}$ eindeutig ein Graph bestimmt als die $\vec{C}^{\cdot}$ unterliegende algebraische Struktur vom Typ $\langle 1, 1\rangle$. Dieser werde sinngemäß mit $\vec{C}$ bezeichnet.

Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in der zu jedem Element x ein Element x^{-1} existiert mit $x\,x^{-1} = \alpha(x)$ und $x^{-1}x = \beta(x)$. Ein Gruppoid läßt sich demnach auch als eine Struktur vom Typ $\langle 1, 1, 1, 2\rangle$ auffassen, wenn man als dritte vollständige einstellige Verknüpfung noch die Abbildung γ mit $\gamma(x) = x^{-1}\,(x \in C)$ hinzunimmt. In diesem Sinne wollen wir ein Gruppoid mit $\overleftrightarrow{C}^{\cdot}$ bezeichnen. Jedes Gruppoid bestimmt eindeutig einen d-Graphen als unterliegende Struktur vom Typ $\langle 1, 1, 1\rangle$; dieser werde mit $\overleftrightarrow{C}$ bezeichnet.

Freie Kategorien über Graphen

Im folgenden soll gezeigt werden, daß auch umgekehrt jeder Graph eindeutig eine Kategorie bestimmt. Es sei $\vec{G}$ ein beliebiger Graph, e_i und e_k zwei Eckpunkte von $\vec{G}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Kanten von $\vec{G}$ mit

$$\alpha(x_{\nu+1}) = \beta(x_\nu)$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ und $\alpha(x_1) = e_i, \beta(x_n) = e_k$. Die aus diesen Elementen gebildete Folge:

$$w = (e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, e_k)$$

wird ein *Weg über* $\vec{G}$ genannt.

Die Anzahl n der von den Eckpunkten verschiedenen Elemente dieses Weges heißt seine *Länge*. Die Vorschrift, die einem Weg w seine Länge zuordnet, sei mit Λ bezeichnet:

$$\Lambda: (e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, e_k) \to n.$$

Wege der Länge 0, also Wege der Form (e, e') sollen *Einheitswege* und Wege der Länge 1, d. h. Wege der Form $(\alpha(x), x, \beta(x))$ *Elementarwege* heißen. Elementarwege und Pfeile bedeuten demnach dasselbe. Der zur Kante x des Graphen gehörige Elementarweg werde in Zukunft stets mit $\vec{x}$ bezeichnet.

Zwei Wege werden gleich genannt, wenn sie elementweise übereinstimmen.

Satz 4.[4]) *Die Klasse der Wege w über einem gegebenen Graphen $\vec{G}$ wird eine Kategorie, wenn man sie mit den wie folgt definierten Verknüpfungen α, β und φ versieht:*

$$\alpha(w_{ik}) = \alpha(e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, e_k) := (e_i, e_i),$$

$$\beta(w_{ik}) = \beta(e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, e_k) := (e_k, e_k);$$

$$(w_{ik}, w_{k'l}) \in W : \Leftrightarrow \beta(w_{ik}) = \alpha(w_{k'l}) \Leftrightarrow e_k = e_{k'},$$

$$(e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, e_k)\,(e_k, y_1, y_2, \ldots, y_m, e_l):$$

$$= (e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, e_l).$$

Es gilt stets:

$$\Lambda(w_{ik}\, w_{kl}) = \Lambda(w_{ik}) + \Lambda(w_{kl}).$$

Definition 6. *Die in Satz 4 angegebene Kategorie wird die freie Kategorie über $\vec{G}$ genannt und mit $\overrightarrow{F_{\vec{G}}^{\cdot}}$ oder auch kurz, wenn Verwechslungen bezüglich des sie erzeugenden Graphen ausgeschlossen sind, mit $\vec{F}^{\cdot}$ bezeichnet.*

Satz 5. *Die Zuordnung:*

$$I : e \to (e, e), \quad x \to \vec{x}\ (e \in G_0, x \in G - G_0)$$

ist eine eineindeutige Abbildung von G in $F_{\vec{G}}$, für die gilt:

$$I(\alpha(x)) = \alpha(I(x)),\ I(\beta(x)) = \beta(I(x)) \qquad (x \in G).$$

$I(G)$ ist ein Erzeugendensystem der Kategorie $\vec{F}^{\cdot}$, d. h. die kleinste $I(G)$ umfassende Teilkategorie von $\overrightarrow{F_{\vec{G}}^{\cdot}}$ stimmt mit $\overrightarrow{F_{\vec{G}}^{\cdot}}$ überein[5]).

Bemerkungen: Die Klasse G_0 ist eine Klasse von Objekten für die Kategorie $\overrightarrow{F_{\vec{G}}^{\cdot}}$ bei $\omega((e, e)) = e \qquad (e \in G_0)$.

---

[4]) Der Beweis dieses Satzes befindet sich in [2].

[5]) Genauer ist I eine umkehrbar eindeutige kovariante Abbildung von dem Graphen $\vec{G}$ in dem Graphen $\overrightarrow{F_{\vec{G}}}$ (siehe Def. 13).

Wir werden daher im folgenden die Einheit (e, e) von $\vec{F}^{\bullet}$ mit dem Eckpunkt e von $\vec{G}$ identifizieren.

Jeder von einem Einheitsweg verschiedene Weg $w \in F$ läßt sich eindeutig als Produkt von Elementarwegen darstellen:

$$\begin{aligned} w &= (e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, e_k) \\ &= (e_i, x_1, \beta(x_1))\,(\alpha(x_2), x_2, \beta(x_2)) \cdots (\alpha(x_n), x_n, e_k) \\ &= \vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_n . \end{aligned}$$

Die Kategorie $\vec{F}^{\bullet}$ enthält, abgesehen von den Einheiten, keine invertierbaren Elemente (additive Eigenschaft von Λ), und es treten wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit in Elementarwege keine nicht-trivialen Relationen auf.

Wie man unschwer beweist, ist die freie Kategorie über einem Graphen eine freie partielle Algebra [4, 5] mit der zugehörigen primitiven Klasse:

$$\begin{aligned} \Pi = \{&\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z), \quad \beta(\alpha(x)) = \alpha(x), \\ &\alpha(\beta(x)) = \beta(x), \quad \varphi(x, \beta(x)) = x, \quad \varphi(\alpha(x), x) = x, \\ &\alpha(\varphi(x, y)) = \alpha(x), \quad \beta(\varphi(x, y)) = \beta(y)\}. \end{aligned}$$

In der Theorie der Kategorien spielt der Begriff des Funktors eine große Rolle.

Definition 7. *Ein Funktor Φ von einer Kategorie $\vec{C}_1^{\bullet}$ in eine Kategorie $\vec{C}_2^{\bullet}$ ist eine eindeutige Abbildung von C_1 in C_2, die mit den Verknüpfungen α, β und φ verträglich ist:*

$$\begin{aligned} &\Phi(\alpha(x)) = \alpha(\Phi(x)), \quad \Phi(\beta(x)) = \beta(\Phi(x)) \quad (x \in C_1), \\ &\Phi(x\, y) = \Phi(x)\, \Phi(y) \quad \text{bei} \quad (x, y) \in W. \end{aligned}$$

Satz 6. *Die Abbildung Λ, die jedem Weg w in einer freien Kategorie $\vec{F}^{\bullet}$ seine Länge zuordnet:*

$$\Lambda(e_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, e_k) = n$$

ist ein Funktor von $\vec{F}^{\bullet}$ in die additive Halbgruppe[6]) *der nicht-negativen ganzen Zahlen.*

Beweis. Die Abbildung Λ ist nach Definition eindeutig. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} &\Lambda(\alpha(w_{ik})) = \Lambda(e_i, e_i) = 0 = \alpha(n) = \alpha(\Lambda(w_{ik})), \\ &\Lambda(\beta(w_{ik})) = \Lambda(e_k, e_k) = 0 = \beta(n) = \beta(\Lambda(w_{ik})), \\ &\Lambda(w_{ik}\, w_{kl}) = n + m = \Lambda(w_{ik}) + \Lambda(w_{kl}). \end{aligned}$$

Bemerkung. Die zu Λ gehörige Funktoräquivalenz $R = R_\Lambda$ mit

$$w_1 R w_2 :\Leftrightarrow \Lambda(w_1) = \Lambda(w_2) \qquad (w_1, w_2 \in F)$$

[6]) Wir sehen hier eine Halbgruppe als algebraische Struktur vom Typ $\langle 1, 1, 2\rangle$ an, und zwar als eine Kategorie mit nur einer Einheit, in unserem Falle der Zahl 0.

bewirkt eine Zerlegung von F in Klassen von Wegen gleicher Länge. Diese seien mit $F_0, F_1, F_2, \ldots$ bezeichnet. Dabei ist F_0 – wie schon durch die Benennung ausgedrückt – die Klasse der Einheitswege und F_1 die Klasse der Elementarwege von $\vec{F}^{\cdot}$.

Gilt für jeden Weg w einer freien Kategorie $\vec{F}^{\cdot}: \Lambda(w) \leqq n$, und existiert mindestens ein Weg w_0 mit $\Lambda(w_0) = n$, so heißt n die *Länge der freien Kategorie*; im anderen Falle sagen wir, die freie Kategorie sei von *unendlicher* Länge. Genau dann, wenn die Länge von $\vec{F}^{\cdot}$ unendlich ist, ist die Faktorstruktur von $\vec{F}^{\cdot}$ nach der vorstehenden Äquivalenzrelation R eine Kategorie, nämlich die additive Halbgruppe der nicht-negativen ganzen Zahlen (bis auf Isomorphie). In Zukunft wurde die Länge von $\vec{F}^{\cdot}$ mit $\Lambda_{\vec{F}^{\cdot}}$ bezeichnet.

In den Anwendungen ordnet man häufig den einzelnen Kanten eines Graphen $\vec{G}$ eine nicht-negative reelle Zahl als deren „Kapazität" zu, die i. a. genau wie Λ additive Eigenschaft besitzt. Genau handelt es sich dabei um einen Funktor Γ von der freien Kategorie $\overrightarrow{F_{\vec{G}}}^{\cdot}$ in die additive Halbgruppe der nicht-negativen Zahlen: $\Gamma(w_{ik}) = c_{ik}$.

Definition 8. *Es sei $\vec{C}^{\cdot}$ eine Kategorie. Dann heißt ein Element x^* aus C, $x^* \notin C_0$, ein Primelement von $\vec{C}^{\cdot}$, wenn gilt:*

$$x^* = x_1 x_2 \Rightarrow ((x_1 = x^*) \wedge (x_2 = \beta(x^*))$$
$$\vee ((x_1 = \alpha(x^*) \wedge (x_2 = x^*)).$$

Mit dieser Definition läßt sich der folgende in [2] bewiesene Satz aussprechen:

Satz 7. *Ist jedes Element x einer Kategorie $\vec{C}^{\cdot}$ mit $x \notin C_0$ eindeutig in Primelemente zerlegbar, so ist $\vec{C}^{\cdot}$ die freie Kategorie über einem Graphen $\vec{G}$. Dieser ist bestimmt durch die Vorschrift, daß seine Eckpunkte den Einheiten von $\vec{C}^{\cdot}$ und seine Kanten den Primelementen von $\vec{C}^{\cdot}$ entsprechen.*

Bemerkung. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß eine Kategorie $\vec{C}^{\cdot}$ dann und nur dann die freie Kategorie über einem Graphen ist, wenn jedes Element aus $C - C_0$ eine eindeutige Zerlegung in Primelemente zuläßt. Diese Primelemente bilden dann ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\vec{C}^{\cdot}$.

Demnach gilt offenbar:

Satz 8. *Es sei $\vec{F}^{\cdot}$ die freie Kategorie über einem Graphen $\vec{G}$. Dann ist $\overrightarrow{F'}^{\cdot} = (F - F_1;\ \alpha, \beta, \varphi)$ eine Unterkategorie von $\vec{F}^{\cdot}$, die erzeugt wird von den Elementen der Klasse $F_0 \cup F_2 \cup F_3$. Diese ist bei $\Lambda_{\vec{F}^{\cdot}} \geqq 6$ nicht frei.*

Dabei ist zu beachten, daß sich beispielsweise jeder Weg der Länge 6 sowohl als Produkt von zwei Wegen der Länge 3 wie auch als Produkt von drei Wegen der Länge 2 darstellbar ist.

Ist $\overleftrightarrow{G}$ ein d-Graph, so läßt sich, wie ebenfalls in [2] gezeigt wird, aus der freien Kategorie über dem $\overleftrightarrow{G}$ unterliegenden Graphen $\vec{G}$ durch Quotientenbildung ein eindeutig bestimmtes Gruppoid gewinnen, das wir das freie Gruppoid über $\overleftrightarrow{G}$ nennen und mit $\overleftrightarrow{F}_{\overleftrightarrow{G}}^{\bullet}$ oder kurz mit $\overleftrightarrow{F}^{\bullet}$ bezeichnen.

Dieses wird in der folgenden Weise konstruiert: Ist

$$\vec{x} = (\alpha(x), x, \beta(x))$$

ein Elementarweg in $\vec{F}_{\vec{G}}^{\bullet}$, so werde der Weg $\overleftarrow{x} = (\beta(x), \gamma(x), \alpha(x))$ der *zu* $\vec{x}$ *entgegengesetzt gerichtete Elementarweg* genannt.

Es sei R die wie folgt definierte binäre Relation in F:

$$wRw' :\Leftrightarrow (w = \vec{x}\overleftarrow{x}) \wedge (w' = \alpha(\vec{x})),$$

und es sei $\mathfrak{K}$ die Klasse aller Kongruenzrelationen in der Kategorie $\vec{F}^{\bullet}$. Der Durchschnitt aller Kongruenzrelationen in $\vec{F}^{\bullet}$, die R enthalten, werde mit S bezeichnet:

$$S = \bigcap_{(K \in \mathfrak{K}) \wedge (R \subseteqq K)} K.$$

Dann ist das freie Gruppoid über dem d-Graphen $\overleftrightarrow{G}$ definiert als das Gruppoid $(F/S;\ \alpha, \beta, \gamma, \varphi)$, wobei α, β, γ und φ folgendermaßen erklärt sind:

$$\alpha(\bar{w}) := \overline{\alpha(w)}, \quad \beta(\bar{w}) := \overline{\beta(w)}, \quad \gamma(\bar{w}) := \overline{\gamma(w)};$$

$$\varphi(\bar{w}_1, \bar{w}_2) = \bar{w}_1 \bar{w}_2 := \overline{w_1 w_2} \quad \text{bei} \quad \beta(\bar{w}_1) = \alpha(\bar{w}_2).$$

Dabei bezeichnet $\bar{w}$ die w enthaltende Äquivalenzklasse mod S und $\gamma(w)$ bei $w = \vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_n$ den Weg $\overleftarrow{x}_n \overleftarrow{x}_{n-1} \ldots \overleftarrow{x}_1$.

B e m e r k u n g e n. Genau wie im Fall der freien Kategorie läßt sich zeigen, daß auch das so definierte freie Gruppoid über dem erzeugenden Graphen $\overleftrightarrow{G}$ eine freie partielle Algebra ist mit der zugehörigen primitiven Klasse:

$$\Pi^* = \Pi \cup \{\varphi(x, \gamma(x)) = \alpha(x), \quad \varphi(\gamma(x), x) = \beta(x), \\ \gamma(\gamma(x)) = x\}.$$

Nach [2] gelten die folgenden Aussagen: Jede Kategorie ist isomorph zu einer Faktorkategorie einer freien Kategorie. – Jede vollständige Teilkategorie einer freien Kategorie ist frei. Dabei heißt eine Teilkategorie $\vec{C}'^{\bullet}$ einer Kategorie $\vec{C}^{\bullet}$ vollständig, wenn mit $e, e' \in C_0'$ gilt: $H(e, e') \subseteqq C'$. – Jedes Teilgruppoid eines freien Gruppoids ist frei.

Teilgraphen

Wir führen Teilgraphen als Teilstrukturen von Graphen im Sinne der Algebra ein.

D e f i n i t i o n 9. *Ein Teilgraph* $\vec{G}'$ *bzw. d-Teilgraph* $\overleftrightarrow{G}'$ *eines Graphen* $\vec{G}$ *bzw. d-Graphen* $\overleftrightarrow{G}$ *ist eine bzgl.* α, β *bzw.* α, β, γ *abgeschlossene Teilklasse* G'

von G mit den Beschränkungen von α und β bzw. α, β und γ auf G' als definierenden Operationen.

G' ist genau dann die Trägerklasse eines Teilgraphen von $\vec{G}$ bzw. d-Teilgraphen von $\overleftrightarrow{G}$, wenn gilt:

$$x \in G' \Rightarrow (\alpha(x) \in G'_0) \wedge (\beta(x) \in G'_0)$$

bzw.:

$$x \in G' \Rightarrow (\alpha(x) \in G'_0) \wedge (\beta(x) \in G'_0) \wedge (\gamma(x) \in G').$$

Dabei sind α, β bzw. α, β und γ die definierenden Operationen von $\vec{G}$ bzw. $\overleftrightarrow{G}$.

Neben den soeben erklärten Teilstrukturen betrachten wir auch Teilgraphen eines d-Graphen und d-Teilgraphen eines Graphen. Der letztere Fall liegt vor, wenn sich eine umkehrbar eindeutige Abbildung γ von G' – dem Träger des Teilgraphen – auf sich definieren läßt mit:

$$\alpha(\gamma(x)) = \beta(x), \quad \beta(\gamma(x)) = \alpha(x), \quad \gamma(\gamma(x)) = x \qquad (x \in G');$$
$$\gamma(e) = e \qquad (e \in G'_0).$$

G' wird dann – für sich betrachtet – zu einem d-Graphen, wenn man die Beschränkungen von α und β auf G' als definierende Operationen neben γ ansieht.

Der Durchschnitt einer Familie von Teilgraphen eines Graphen $\vec{G}$ ist ebenfalls ein Teilgraph von $\vec{G}$.

Ein Teilgraph $\vec{G}'$ von $\vec{G}$ heißt ein *eigentlicher Teilgraph*, wenn zusätzlich gefordert wird: $G'_0 \subset G' \subset G$.
Bei $G'_0 = G_0$ nennen wir $\vec{G}'$ speziell einen *Untergraphen* von $\vec{G}$. Schließlich werde $\vec{G}'$ ein *vollständiger Teilgraph* von $\vec{G}$ genannt, wenn für je zwei Elemente $e, e' \in G'_0$ stets gilt: $H(e, e') \subseteqq G'$.

Zyklen, Kreise und Bäume

Abweichend von den üblichen Definitionen erklären wir Zyklen, Kreise und Bäume als spezielle Teilstrukturen von d-Graphen. Man kann sie jedoch auch unabhängig von einem d-Graphen als Obergraphen betrachten.

Definition 10. *Ein Zyklus $\vec{Z}$ ist ein endlicher Teilgraph eines d-Graphen $\overleftrightarrow{G}$, für den gilt: Zu jedem Element e aus Z_0 existieren genau zwei Elemente x, x' aus Z mit $\alpha(x) = \alpha(x') = e$ oder $\beta(x) = \alpha(x') = e$ oder $\beta(x) = \beta(x') = e$. Gibt es insbesondere zu jedem $e \in Z_0$ zwei Elemente x, x' aus $\vec{Z}$ mit $\beta(x) = \alpha(x') = e$, so heißt $\vec{Z}$ ein orientierter Zyklus. – Der zu $\vec{Z}$ antiisomorphe Teilgraph $\overleftarrow{Z}$ heißt der zu $\vec{Z}$ entgegengesetzt gerichtete Zyklus*[7]). *– Die Vereinigung $\overleftrightarrow{K} = \vec{Z} \cup \overleftarrow{Z}$ wird ein Kreis genannt.*

[7]) Es ist $\overleftarrow{Z} = \gamma(\vec{Z})$.

Definition 11. *Ein Baum $\overleftrightarrow{B}$ ist ein kreisfreier Graph.*

Satz 9. *Das freie Gruppoid über einem Baum ist ein schlichtes* BRANDT*sches Gruppoid (d. h.: $|H(e, e')| = 1$ für je zwei Elemente e, e' aus $(F_{\overleftrightarrow{B}})_0$). Jedes schlichte* BRANDT*sche Gruppoid ist isomorph zu dem freien Gruppoid über einem Baum*

Beweis. Offensichtlich ist das freie Gruppoid über einem Baum ein schlichtes BRANDTsches Gruppoid. Es sei nun umgekehrt $\overleftrightarrow{C}^{\bullet}$ ein schlichtes BRANDTsches Gruppoid. $\overleftrightarrow{C}^{\bullet}$ bestimmt eindeutig einen Baum $\overleftrightarrow{B}$, dessen Eckpunkte die Einheiten von $\overleftrightarrow{C}^{\bullet}$ sind und dessen Kanten eindeutig bestimmt sind durch die Bedingung: Die Eckpunkte der Kanten x_k sind die den Einheiten von $\overleftrightarrow{C}^{\bullet}$ entsprechenden Eckpunkte e und e_k von $\overleftrightarrow{B}$ mit festem e und variablem e_k $(e_k \neq e)$. Dabei wird vorausgesetzt, daß k eine Indexmenge I für $C_0 - \{e\}$ und damit auch für $B_0 - \{e\}$ durchläuft. Das freie Gruppoid über $\overleftrightarrow{B}$ ist zu $\overleftrightarrow{C}^{\bullet}$ isomorph.

Satz 10. *Es sei $\vec{Z}$ ein orientierter Zyklus, $\vec{F}^{\bullet}$ die freie Kategorie über $\vec{Z}$ und R die wie folgt definierte Äquivalenzrelation in F:*

$$wRw' :\Leftrightarrow (\alpha(w) = \alpha(w')) \wedge (\beta(w) = \beta(w')).$$

Dann ist $\overrightarrow{(F/R)}^{\bullet}$ ein schlichtes BRANDT*sches Gruppoid, aufgefaßt als invertierbare Kategorie, d. h. als Struktur vom Typ $\langle 1, 1, 2\rangle$.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

Kovariante und kontravariante Abbildungen

Wir betrachten im folgenden Abbildungen eines Graphen $\vec{G}$ $(\overleftrightarrow{G})$ in einen Graphen $\vec{G}'$ $(\overleftrightarrow{G}')$:

Definition 12. *Eine kovariante Abbildung Ψ von einem Graphen $\vec{G}$ $(\overleftrightarrow{G})$ in einen Graphen $\vec{G}'$ $(\overleftrightarrow{G}')$ ist eine homomorphe Abbildung von $\vec{G}$ $(\overleftrightarrow{G})$ in $\vec{G}'$ $(\overleftrightarrow{G}')$, d. h. Ψ ist eine Abbildung von G in G' mit:*

$$\Psi(\alpha(x)) = \alpha(\Psi(x)), \qquad \Psi(\beta(x)) = \beta(\Psi(x))$$

und im Falle eines d-Graphen:

$$\Psi(\gamma(x)) = \gamma(\Psi(x)) \qquad (x \in G).$$

Ψ (G) ist die Trägerklasse eines Teilgraphen (d-Teilgraphen) von $\vec{G}'$ $(\overleftrightarrow{G}')$. Die homomorphe Abbildung Ψ ist demnach bis auf Isomorphismen die Beschränkung der homomorphen Abbildung Φ von $\overrightarrow{F_{\vec{G}}}^{\bullet}$ in $\overrightarrow{F_{\vec{G}'}}^{\bullet}$ $(\overleftrightarrow{F_{\overleftrightarrow{G}}}^{\bullet}$ in $\overleftrightarrow{F_{\overleftrightarrow{G}'}}^{\bullet})$ auf den $\vec{G}$ umkehrbar eindeutig zugeordneten Teilgraphen $\vec{T}$ von $\vec{F}$ (s. Satz 5).

Man beachte, daß bei dieser Definition – wie üblich in der Graphentheorie – ein Eckpunkt von $\vec{G}$ stets in einen Eckpunkt von $\vec{G'}$ abgebildet wird und die Inzidenzbeziehungen von $\vec{G}$ sich in $\vec{G'}$ widerspiegeln. Dagegen ist es bei dieser Definition möglich, daß eine Kante von $\vec{G}$ in einen Eckpunkt von $\vec{G'}$ übergeht. Wir werden später diejenigen Abbildungen aussondern, bei denen Eckpunkte ausschließlich als Bilder von Eckpunkten auftreten

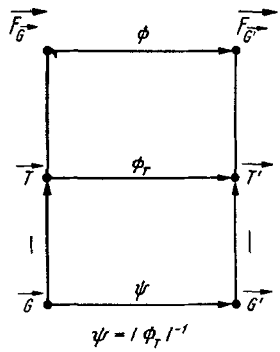


Abb. 1

Definition 13. *Eine kontravariante Abbildung Ψ von einem Graphen $\vec{G}$ in einen Graphen $\vec{G'}$ ist eine eindeutige Abbildung von G in G' mit den Eigenschaften:*

$$\Psi(\alpha(x)) = \beta(\Psi(x)), \quad \Psi(\beta(x)) = \alpha(\Psi(x)) \qquad (x \in G).$$

Wir bezeichnen wie üblich eine umkehrbar eindeutige kovariante Abbildung von $\vec{G}$ auf $\vec{G'}$ als eine isomorphe Abbildung und eine umkehrbar eindeutige kontravariante Abbildung von $\vec{G}$ auf $\vec{G'}$ als eine anti-isomorphe Abbildung von $\vec{G}$ auf $\vec{G'}$. So ist z. B. die Identitätsabbildung von G eine anti-isomorphe Abbildung von $\vec{G}$ auf $\vec{G^*}$.

Satz 11. *Die Klasse der geordneten Tripel $(\vec{G}, \Psi, \vec{G'})$, wo $\vec{G}$ und $\vec{G'}$ Elemente von $\mathfrak{G}_0$ sind und Ψ eine kovariante Abbildung von $\vec{G}$ in $\vec{G'}$ bedeutet, ist eine Kategorie, wenn man sie versieht mit den wie folgt definierten Verknüpfungen α, β und φ:*

$$\alpha(\vec{G}, \Psi, \vec{G'}) := (\vec{G}, Id_G, \vec{G}), \quad \beta(\vec{G}, \Psi, \vec{G'}) := (\vec{G'}, Id_{G'}, \vec{G'}),$$
$$\varphi((\vec{G}, \Psi, \vec{G}), (\vec{G'}, \Psi', \vec{G''})) := (\vec{G}, \Psi\Psi', \vec{G''}) \quad \text{bei} \quad \vec{G} = \vec{G'}.$$

Diese wird mit $\vec{\mathfrak{G}^\bullet}$ bezeichnet. $\mathfrak{G}_0$ ist eine Klasse von Objekten für $\vec{\mathfrak{G}^\bullet}$.

Definition 14. *Eine verallgemeinerte kovariante Abbildung Ψ von einem Graphen $\vec{G}$ in einen Graphen $\vec{G'}$ ist eine mehrdeutige Abbildung von G in G', die jedem $x \in G$ eine nicht-leere Klasse $\Psi(x)$ von Elementen aus G' derart zuordnet, daß die folgende Bedingung erfüllt ist: $\Psi(e) \subseteqq G'_0 \quad (e \in G_0)$.*

Satz 12. *Es sei Ψ eine kovariante Abbildung von einem Graphen $\vec{G}$ in einen Graphen $\vec{G'}$ derart, daß $\overset{-1}{\Psi}$ eine verallgemeinerte kovariante Abbildung des Graphen $\overrightarrow{\Psi(G)}$ auf $\vec{G}$ ist. Dann ist das Urbild eines Eckpunktes von $\vec{G'}$ bei $\overset{-1}{\Psi}$ stets ein Eckpunkt von $\vec{G}$.*

Beweis. Gilt $\Psi(x) = e' \in G'_0$ für ein $x \in G$, so folgt: $x \in \overset{-1}{\Psi}(e')$, d. h. $x \in G_0$.

Wir wollen in Zukunft einen Graphen *schlicht* nennen, wenn für je zwei Eckpunkte e, e' des Graphen stets gilt: $|H(e, e')| \leqq 1$.

Diese Bezeichnung ist unabhängig davon, ob der Graph gerichtet oder doppeltgerichtet ist.

Des weiteren werden wir im folgenden von der Tatsache Gebrauch machen, daß ein ungerichteter Graph $\bar{G}$ eindeutig einen d-Graphen $\overleftrightarrow{G}$ bestimmt und umgekehrt. Wir werden solche Graphen als einander zugehörig bezeichnen. Ein ungerichteter Graph $\bar{G}$ heißt schlicht, wenn der zugehörige d-Graph schlicht ist.

Definition 15. *Ein schlichter ungerichteter Graph $\bar{G}$ heißt r-fach färbbar, wenn sich eine kovariante Abbildung Ψ von dem ihm zugehörigen d-Graphen $\overleftrightarrow{G}$ in den vollständigen Graphen mit r Eckpunkten $\overleftrightarrow{G^{(r)}}$ angeben läßt, die G_0 auf $(G^{(r)})_0$ und $G - G_0$ in $G^{(r)} - (G^{(r)})_0$ abbildet. – Das ist genau dann der Fall, wenn $\overset{-1}{\Psi}$ eine verallgemeinerte kovariante Abbildung von $\overleftrightarrow{\Psi(G)}$ auf $\overleftrightarrow{G}$ ist. Die Zahl r heißt eine Färbungszahl des Graphen.*[8])

O. B. d. A. nehmen wir im folgenden an, daß $\bar{G}$ zusammenhängend ist. Andernfalls bestimmt man die Färbungszahl für jede einzelne Komponente $\bar{G}_\iota$ unabhängig und bezeichnet als Färbungszahl von $\bar{G} = \sum_{\iota \in I} \bar{G}_\iota$ die Zahl $r = \operatorname{Max}_{\iota \in I} r_\iota$, wenn $\bar{G}_\iota$ r_ι-fach färbbar ist.

Wie in [2, S. 260] gezeigt wird, läßt sich von einem ungerichteten Graphen stets ein gerichteter Graph ableiten. Ist $\bar{G}$ speziell ein endlicher Graph mit m Kanten, so ist diese Konstruktion auf genau 2^m verschiedene Arten möglich, indem man sämtlichen Kanten von $\bar{G}$ unabhängig voneinander jeweils eine Orientierung gibt.

Satz 13. *Ein schlichter ungerichteter Graph $\bar{G}$ ist genau dann r-fach färbbar, wenn es unter den aus $\bar{G}$ abgeleiteten gerichteten Graphen mindestens einen mit $\vec{G}$ bezeichneten gibt, der die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *$\vec{G}$ besitzt einen Untergraphen $\vec{U}$ derart, daß $\vec{G}$ ein Untergraph des der freien Kategorie $\vec{F}^{\bullet}$ über $\vec{U}$ unterliegenden Graphen $\vec{F}$ ist. Die Elemente von F sind dabei mit den entsprechenden Elementen von G zu identifizieren.*
2. *Es ist $\Lambda_{\vec{F}^{\bullet}} = r - 1$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, der Graph $\bar{G}$ sei r-fach färbbar. Dann existiert nach Definition 15 eine kovariante Abbildung Ψ von dem $\bar{G}$ zugehörigen d-Graphen $\overleftrightarrow{G}$ in den vollständigen Graphen $\overleftrightarrow{G^{(r)}}$ mit den Eckpunkten $1, 2, \ldots, r$ (s. Beispiel 1). Da weiter nach Definition 15 die Urbilder der Eckpunkte von $\overleftrightarrow{G^{(r)}}$ bei Ψ ihrerseits Eckpunkte von $\overleftrightarrow{G}$ sind, so bestimmt die Beschränkung Ψ_0 von Ψ auf G_0 die Abbildung Ψ bereits eindeutig.

Die durch Ψ_0 erklärte Abbildungsäquivalenz R_{Ψ_0} induziert in G_0 eine Klasseneinteilung. Die Äquivalenzklassen mod R_{Ψ_0} nennen wir *Farben*,

[8]) Die kleinste unter allen Färbungszahlen heißt die chromatische Zahl.

und zwar heiße genauer die Klasse:

$$K_\varrho = \{e \in G_0 \colon \Psi_0(e) = \varrho\}$$

die ϱ^{te} Farbe ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Jedes Element $e \in K_\varrho$ wird ein *Eckpunkt der Farbe* ϱ genannt.

Der Graph $\vec{U}$ wird auf die folgende Art konstruiert: Wir betrachten denjenigen Untergraphen $\overleftrightarrow{G'}$ von $\overleftrightarrow{G}$, für den gilt:

$$x \in G' - G_0 \colon \Leftrightarrow ((\pi(x) = \{e_i, e_k\}) \wedge (e_i \in K_\varrho) \wedge (e_k \in K_\sigma) \\ \wedge (\varrho < \sigma) \Rightarrow \sigma = \varrho + 1 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, r - 1)).$$

Weiter erklären wir zwei eindeutige Abbildungen α, β von G' in $G'_0 = G_0$:

$$\alpha(x) \colon = e_i, \quad \beta(x) \colon = e_k \qquad (x \in G', \pi(x) = \{e_i, e_k\}, \\ \Psi_0(e_i) \leqq \Psi_0(e_k)).$$

Dann ist $(G'; \alpha, \beta)$ ein gerichteter Graph. Über diesem bilden wir die freie Kategorie $\vec{F}^{\bullet}$. Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es gibt unter den aus $\bar{G}$ abgeleiteten gerichteten Graphen einen Graphen $\vec{G}$, der – bis auf Isomorphie – ein Untergraph des der freien Kategorie $\vec{F}^{\bullet}$ über $(G'; \alpha, \beta)$ unterliegenden Graphen $\vec{F}$ ist. Dann setzen wir $\vec{U} = (G'; \alpha, \beta)$.

b) Gibt es Kanten x von $\bar{G}$ mit $\pi(x) = \{e_i, e_k\}$, $\Psi_0(e_i) = \varrho$,

$$\Psi_0(e_k) = \sigma, \quad \varrho < \sigma,$$

für die in $\vec{F}$ gilt: $|H(e_i, e_k)| = \emptyset$, so werden diese Kanten zu G' hinzugenommen und die Abbildungen α und β erweitert durch die Forderung:

$$\alpha(x) \colon = e_i, \quad \beta(x) \colon = e_k.$$

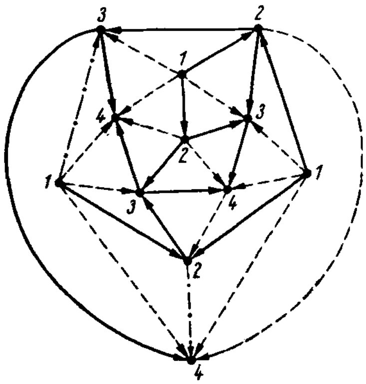
Die so erweiterte Klasse G' werde mit $\tilde{G}'$ bezeichnet. Dann setzen wir $\vec{U} = (\tilde{G}'; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, wo $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ die entsprechenden Erweiterungen von α und β sind.

So ist durch die freie Kategorie $\overrightarrow{F_{\vec{U}}^{\bullet}}$ eindeutig eine Orientierung sämtlicher Kanten von $\bar{G}$ festgelegt, d. h. es existiert genau ein gerichteter Graph $\vec{G}$, der zu einem Untergraphen von $\overrightarrow{F_{\vec{U}}}$ isomorph ist.

Nun sei umgekehrt $\vec{G}$ ein aus $\bar{G}$ abgeleiteter gerichteter Graph, der die Voraussetzungen des Satzes 13 erfüllt. Dann läßt sich folgendermaßen eine eindeutige Abbildung Ψ_0 von G_0 in $(G^{(r)})_0$ angeben:

$$\Psi_0(e) = \varrho \colon \Leftrightarrow \underset{\substack{w \in F_{\vec{U}} \\ \beta(w) = e}}{\operatorname{Max}} \Lambda(w) = \varrho - 1.$$

Da es nach Voraussetzung mindestens einen Weg der Länge $r - 1$ gibt und da wegen $\Lambda_{\vec{F}^{\bullet}} = r - 1$ kein Weg einer Länge $\geqq r$ auftritt, so ist $\bar{G}$ genau r-fach färbbar.



Als Beispiel dafür, daß der im Beweis unter b) angegebene Fall tatsächlich auftritt, ist nebenstehend das 4fach gefärbte Netz des Dodekaeders angegeben. Der Graph (G'; α, β) ist fett ausgezogen; die in diesem Falle zu G' hinzuzunehmenden Kanten sind strich-punktiert. Es läßt sich leicht zeigen, daß man bei keiner 4fach-Färbung des Dodekaedernetzes ohne eine solche „Zusatzkante" auskommt.

Literatur

[1] C. Ehresmann, Gattungen von lokalen Strukturen. J.-Ber. Deutsch. Math. Vereinigg. **60**, 49–77 (1957).

[2] M. Hasse, Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide. Diese Nachr. **22**, 255–270 (1960).

[3] —, Über die Erzeugung von Kategorien aus Halbgruppen. Wiss. Z. Dresden **12** (1963).

[4] P. J. Higgins, Algebras with a Scheme of Operators. Diese Nachr. **27**, 115–132 (1963/64).

[5] A. G. Kurosch, Vorlesungen über allgemeine Algebra. Leipzig 1964.