Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TITOLO DELLA TESI

Relatrice:
Chiar.ma Dott.ssa
MARTA MORIGI

Presentata da:
PAOLO DE CECCO

Sessione
Anno Accademico 2020-21

Capitolo 1

Automorfismi d'ordine di $\mathbb{Q}$

In questo primo capitolo si introduce l'insieme degli automorfismi d'ordine dei razionali attraverso una definizione basata sulle nozioni di insieme totalmente ordinato e di morfismo di insiemi. In seguito si analizzano le proprietà dell'insieme, che con l'operazione di composizione assume una struttura di gruppo, a partire dalla sua azione sull'insieme dai razionali.

1.1 Isomorfismi d'ordine

Definizione 1.1 (Insieme totalmente ordinato)**.** Un insieme totalmente ordinato è una coppia $(A, <)$ dove A è un insieme non vuoto e $<$ è una relazione binaria che soddisfa le proprietà:

1. per ogni $x \in A$, si ha $x \not< x$ (Irriflessività);
2. per ogni $x, y \in A$, si ha che $x < y$ implica $y \not< x$ (Antisimmetria);
3. per ogni $x, y, z \in A$, se $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$ (Transitività);
4. per ogni $x, y \in A$, vale solo una delle proprietà: $x < y, x = y, y < x$ (Linearità).

Osservazione 1.2. La coppia $(\mathbb{Q}, <)$, dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali e $<$ è l'ordine naturale su $\mathbb{Q}$, è un insieme totalmente ordinato.

In realtà si possono definire due ulteriori proprietà delle quali gode l'insieme $(\mathbb{Q}, <)$ che sono l'essere *denso* e *senza estremi*.

Definizione 1.3 (Insieme denso)**.** Un insieme totalmente ordinato è *denso* se per $x, y \in A$ con $x < y$, esiste $z \in A$ tale che $x < z < y$.

Definizione 1.4 (Insieme senza estremi)**.** Un insieme totalmente ordinato è *senza estremi* se per $x \in A$ esistono $y, z \in A$ tali che $y < x < z$.

È facile intuire che le funzioni che conservano l'ordine hanno una certa importanza nella trattazione degli insiemi totalmente ordinati. Si dà quindi la definzione di una particolare famiglia di queste funzioni: gli isomorfismi d'ordine.

Definizione 1.5 (Isomorfismo d'ordine)**.** Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ due insiemi totalmente ordinati. Un *isomorfismo d'ordine* è una mappa $\varphi : A \to B$ biettiva e tale che per ogni $x, y \in A, x <_A y$ se e solo se $\varphi(x) <_B \varphi(y)$.

A questo punto si possiedono tutti gli strumenti necessari per definire l'insieme $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$.

Definizione 1.6. La famiglia degli automorfismi d'ordine dell'insieme dei numeri nazionali è l'insieme

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <) = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \varphi \text{ isomorfismo d'ordine}\}$$

Osservazione 1.7. L'insieme $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ dotato dell'operazione di composizione è un gruppo. Infatti:

- per ogni $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, $f \circ g$ è biettiva e $f(g(x)) < f(g(y)) \Leftrightarrow g(x) < g(y) \Leftrightarrow x < y$, quindi $f \circ g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$.
- $Id_{\mathbb{Q}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ ed è l'elemento neutro del gruppo.
- se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ allora f^{-1} è biettiva e $f^{-1}(x) < f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) < f(f^{-1}(y)) \Leftrightarrow x < y$, quindi $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$.

[introduzione al capitolo successivo sull'azione di gruppi]

1.2 Azione di gruppi

[A parole cosa sono le azioni di gruppi]

Definizione 1.8 (Azione di gruppi)**.** Siano G un gruppo e Ω un insieme. Un azione di G su Ω è una mappa:

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times G & \to & \Omega \\ (\omega, g) & \mapsto & \omega^g \end{array}$$

tale che:

1. per ogni $g, h \in G$ e $\omega \in \Omega$ si ha $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$.
2. per ogni $\omega \in \Omega$ si ha $\omega^1 = \omega$ dove 1 è l'elemento neutro del gruppo G.

Se G agisce su Ω, allora Ω è detto G-spazio .

Si riporta, a titolo di esempio, una famosa azione di gruppi.

Esempio 1.9 (Rappresentazione di Cayley)**.** Sia G un gruppo e sia $\Omega := G$. Si definisce un'azione di G su se stesso attraverso la moltiplicazione destra, cioè ponendo $\omega^g := \omega g$, dove $\omega, \omega g \in \Omega$ e $g \in G$.
È possibile verificare che quella ottenuta è un azione di gruppo indipendentemente dalla scelta di G: infatti per ogni $\omega \in \Omega$ e $g, h \in G$ si ha che $wg \in \Omega$ (in quanto $\Omega = G$) e quindi $(\omega^g)^h = \omega^{gh} = \omega gh \in \Omega$. Inoltre $\omega^1 = \omega 1 = \omega$. Tale azione di gruppo è detta *rappresentazione di Cayley.*

Definizione 1.10 (Orbita di un elemento)**.** Sia Ω un G-spazio . L'*orbita* di un elemento $\omega \in \Omega$ è l'insieme

$$\omega^G := \{\omega^g \mid g \in G\}$$

Osservazione 1.11. In ogni G-spazio Ω si può definire in questo modo una nuova relazione binaria per la quale due elementi sono in relazione se e solo se stanno nella stessa orbita:

$$\alpha \sim \beta \text{ se e solo se esiste } g \in G \text{ tale che } \alpha^g = \beta \tag{1.1}$$

Il seguente teorema mostra che tale relazione è di equivalenza. Le classi di equivalenza sono dette orbite di G su Ω.

Teorema 1.12. *Ogni G-spazio Ω si esprime in modo unico come unione disgiunta di orbite. Equivalentemente la relazione binaria* (1.1) *è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. In primo luogo si mostra che per ogni $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha^G \cap \beta^G \neq \emptyset$ implica $\alpha^G = \beta^G$. Supponiamo $\gamma \in \alpha^G \cap \beta^G$. Allora $\gamma = \alpha^{g_1} = \beta^{g_2}$ per qualche $g_1, g_2 \in G$. In tal caso $\alpha = \beta^{g_2 g_1^{-1}}$, cioè $\alpha \in \beta^G$ e quindi $\alpha^G \subseteq \beta^G$. Analogamente è valida l'inclusione inversa. Allora $\alpha^G = \beta^G$.
Si dimostra ora la seconda parte del teorema. Sia $\sim$ la relazione (1.1). Allora valgono le seguenti proprietà:

- $\alpha \sim \alpha$ poichè $\alpha = \alpha^1$.
- Se $\alpha \sim \beta$ allora $a^{g_1} = \beta$. Se $g_1 \in G$ allora $g_1^{-1} \in G$, perciò $\alpha = \beta^{g_1^{-1}}$ e cioè $\beta \sim \alpha$.
- Se $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$ allora $\beta = \alpha^{g_1}$ e $\gamma = \beta^{g_2}$, cioè $\gamma = (\alpha^{g_1})^{g_2} = \alpha^{g_1 g_2}$, quindi $\alpha \sim \gamma$.

Dunque $\sim$ è una relazione di equivalenza.
Viceversa se $\sim$ è una relazione di equivalenza che formalizza lo "stare nella stessa orbita" allora la proprietà transitiva assicura che le orbite siano tra loro disgiunte. La proprietà riflessiva assicura che ogni elemento stia almeno in un'orbita. $\square$

Questo teorema permette di vedere che le orbite degli elementi di Ω formano una partizione dello spazio indotta dall'azione di G. In realtà si può fare molto di più: infatti a partire da un gruppo G è possibile costruire da zero un nuovo spazio aggiungendo, volta per volta, un elemento α e la sua relativa orbita. Se l'elemento è già comparso in un altra orbita, allora le orbite coincidono. Per il teorema uno spazio costruito in questo modo è un G-spazio .

Nella prossima sezione andiamo a studiare un particolare caso di G-spazi, gli spazi transitivi.

1.3 Spazi transitivi

Definizione 1.13 (Spazio transitivo)**.** Sia Ω un G-spazio . Diciamo che G *agisce transitivamente* su Ω o che Ω è un *G-spazio transitivo* se $\alpha^G := \Omega$ per ogni $\alpha \in \Omega$.

Chiaramente un G-spazio transitivo è costituito da una sola orbita. Vediamo ora un paio di esempi sugli spazi transitivi che saranno utili in seguito.

Esempio 1.14. Sia G un gruppo che agisce su se stesso tramite la rappresentazione di Cayley. Tale azione è chiaramente transitiva in quanto per ogni $\alpha \in G$ e per ogni $g \in G$ si ha $\alpha^g = \alpha g \in G$.
Più in generale, preso H un sottogruppo di G, consideriamo Ω l'insieme delle classi laterali destre di H. Tale insieme è un G-spazio transitivo in quanto per ogni α e β in Ω si ha che $\alpha^{-1}\beta \in G$ e quindi $H\beta = (H\alpha)^{\alpha^{-1}\beta}$. La rappresentazione di Cayley è un caso particolare per $H = \{1\}$.

Esempio 1.15. Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $G = GL(2, \mathbb{R})$. L'azione di $GL(2, \mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^2$ non è transitiva. Infatti l'origine di $\mathbb{R}^2$ non può essere mandata in elementi non nulli di $\mathbb{R}^2$ tramite una matrice non singolare.
D'altra parte, tutti gli altri elementi di $\mathbb{R}^2$ giacciono in una unica orbita: basta osservare innanzitutto che le matrici associate ad una rotazione di centro l'origine e angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ e le omotetie di parametro $\lambda \neq 0$ stanno tutte in $GL(2, \mathbb{R})$. Inoltre per ogni $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ non nulli, posso sempre trovare la matrice che manda (x, y) in (u, v) componendo una rotazione con una omotetia. Dunque in $\mathbb{R}^2$ visto come $GL(2, \mathbb{R})$-spazio ci sono esattamente due orbite:$\{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Definizione 1.16 (G-morfismo)**.** Siano Ω e Ω' due G-spazi. Una mappa $\varphi : \Omega \to \Omega'$ è un G-morfismo se per ogni $\omega \in \Omega$ e $g \in G$:

$$\varphi(\omega^g) = (\varphi(\omega))^g$$

Se φ è biettiva allora è detta G-isomorfismo.

Definizione 1.17 (Stabilizzatore di un punto)**.** Sia Ω un G-spazio . Per ogni $\alpha \in \Omega$ si definisce *stabilizzatore di* α in G l'insieme

$$G_\alpha := \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$$

Osservazione 1.18. G_α è un sottogruppo di G.

Lemma 1.19. *Se* $g, h \in G$ *si ha*

$$G_\alpha g = G_\alpha h \textit{ se e solo se } \alpha^g = \alpha^h$$

Dimostrazione. $G_\alpha g = G_\alpha h$ se e solo se $gh^{-1} \in G_\alpha$ se e solo se $\alpha^{gh^{-1}} = \alpha$ se e solo se $\alpha^g = \alpha^h$ $\square$

Teorema 1.20. *Sia* Ω *un* G*-spazio transitivo. Allora* Ω *è* G*-isomorfo al* G*-spazio delle classi laterali destre di* G_α *per ogni* $\alpha \in \Omega$*.*

Osservazione 1.21. Si è già osservato nell'Esempio 1.14 che l'insieme delle classi laterali destre di un sottogruppo di G è sempre un G-spazio transitivo.

Dimostrazione. Si definisca una funzione $\theta : \Omega \to \{G_\alpha a \mid a \in G\}$ tale che $\theta(\omega) = G_\alpha g$ dove $g \in G$ in modo tale che $\omega = \alpha^g$. Si osservi che g esiste in quanto Ω è transitivo, inoltre θ è ben definita per il Lemma 1.19. Sempre per il lemma si ha che θ è iniettiva: infatti se $\omega_1 = \alpha^g$ e $\omega_2 = \alpha^h$, allora $G_\alpha g = G_\alpha h$ solo se $\alpha^g = \alpha^h$ solo se $\omega_1 = \omega_2$. Per definizione θ è anche suriettiva (Dato g, allora $\alpha^g = \omega$). Quindi θ è una biezione.
Rimane da mostrare che θ è un G-morfismo. Per ogni $\omega \in \Omega$ sia $h \in G$ tale che $\alpha^h = \omega$. Allora per ogni $g \in G$ si ha

$$\theta(\omega^g) = \theta(\alpha^{hg}) = G_\alpha hg = (\theta(\omega))^g$$

$\square$

Per un G-spazio di almeno k elementi, la nozione di transitività può essere estesa prendendo al posto dei singoli elementi del G-spazio i sottoinsiemi di cardinalità fissata k. In questo modo si ottengono ulteriori proprietà del G-spazio.

Definizione 1.22 (Spazio k-transitivo)**.** Sia $k \in \mathbb{N}$. Un G-spazio è *k-transitivo* (o l'azione di G su Ω è k-transitiva) se per due insiemi qualsiasi di k elementi distinti di Ω $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ esiste $g \in G$ tale che $\alpha_i^g = \beta_i$ per $i = 1, \dots, k$.

Osservazione 1.23. Un G-spazio 1-transitivo è semplicemente uno spazio transitivo.
Un G-spazio k-transitivo è $(k-1)$-transitivo poichè per due insiemi qualsiasi di $k-1$ elementi distinti di Ω si aggiunge a ciascuno dei due insiemi un elemento di Ω distinto dagli altri e si conclude con la k-transitività.

Il seguente controesempio mostra che uno spazio transitivo non necessariamente è uno spazio 2-transitivo.

Esempio 1.24 (Azione di $GL(2,\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$)**.** Nell'Esempio 1.15 si è visto che l'azione di $GL(2,\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ è transitiva.
Tuttavia questa azione non è 2-transitiva in quanto non esiste una matrice in $GL(2,\mathbb{R})$ che mandi contemporaneamente l'elemento $(x,0)$ in se stesso e l'elemento $(0,y)$ (con $y \neq x$) in $(y,0)$.

Infine introduciamo un indebolimento delle nozioni di transitività e k-transitività.

Definizione 1.25 (Spazio k-omogeneo)**.** Sia $k \in \mathbb{N}$. Un G-spazio Ω è *k-omogeneo* se per qualsiasi $\Gamma, \Delta \subseteq \Omega$ con $|\Gamma| = |\Delta| = k$ si ha $\Gamma^g = \Delta$ per qualche $g \in G$.

Osservazione 1.26. Un G-spazio 1-omogeneo è transitivo. Come per la transitività, un G-spazio k-omogeneo è $(k-1)$-omogeneo.

Osservazione 1.27. Chiedere la k-transitività è una richiesta più forte rispetto alla k-omogeneità: infatti entrambe le definizioni vengono date per insiemi di cardinalità k, ma nella k-transitività la scelta di $g \in G$ dipende anche dall'ordine degli elementi nei due insiemi, cosa che non è richiesta nella k-omogeneità.
In pratica la nozione di k-transitività di un G-spazio può essere vista come la proprietà per cui date due qualsiasi n-uple ordinate di elementi di Ω esiste una $g \in G$ che manda un'ennupla nell'altra.

1.4 Prime proprietà di Aut$(\mathbb{Q}, <)$

Teorema 1.28. *L'azione di Aut$(\mathbb{Q}, <)$ su $\mathbb{Q}$ è k-omogenea per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Siano Γ, Δ due sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Q}$ di cardinalità k. Costruiamo esplicitamente φ un automorfismo d'ordine di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi(\Gamma) = \Delta$.
Numeriamo gli elementi di Γ e Δ in base al loro ordine naturale, siano quindi:

$$\Gamma = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ con } x_1 < x_2 < \ldots < x_n,$$

$$\Delta = \{y_1, \ldots, y_n\} \text{ con } y_1 < y_2 < \ldots < y_n.$$

Siano ora $A_0, \ldots, A_n$ degli intevalli, con $A_0 := (-\infty, x_1)$, $A_n := (x_n, +\infty)$ e $A_i := (x_i, x_{i+1})$ per $i = 1, \ldots, n-1$; analogamente siano $B_0, \ldots, B_n$ degli intevalli dove $B_0 := (-\infty, y_1)$, $B_n := (y_n, +\infty)$ e $B_i := (y_i, y_{i+1})$ per $i = 1, \ldots, n-1$.
Definiamo delle mappe $f_i : A_i \to B_i$ per $i = 0, 1, \ldots, n$ tali che:

$$f_0 : x \mapsto (x - x_1) + y_1$$

$$f_i : x \mapsto \frac{y_{i+1} - y_1}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i$$

$$f_n : x \mapsto (x - x_n) + y_n$$

Sia allora $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che:

$$\varphi(x_i) = y_i \text{ per } i = 0, \ldots, k$$

$$\varphi\,|_{A_i}(x) = f_i \text{ per } i = 0, \ldots, k$$

Tale φ è un automorfismo d'ordine e $\varphi(\Gamma) = \Delta$. □

Corollario 1.29. *L'azione di Aut$(\mathbb{Q}, <)$ su $\mathbb{Q}$ è transitiva.*

Dimostrazione. É un immediata conseguenza dell'Osservazione 1.26. □

Proposizione 1.30. *L'azione di Aut$(\mathbb{Q}, <)$ su $\mathbb{Q}$ non è 2-transitiva.*

Dimostrazione. Se l'azione fosse 2-transitiva, dati due numeri razionali distinti $\{p, q\}$ con $p < q$, dovrebbe esistere φ un automorfismo di $\mathbb{Q}$ che mandi p in q e allo stesso tempo q in p. Tale automorfismo non conserva l'ordine in quanto $q = \varphi(p) \not< \varphi(q) = p$. □

Capitolo 2

Primitività e grafo orbitale di Aut$(\mathbb{Q}, <)$

[In questo secondo capitolo introduciamo due nuovi concetti che ci permettono di analizzare più a fondo l'azione degli automorfismi]

2.1 Primitività di Aut$(\mathbb{Q}, <)$

[Introduciamo la nozione di primitività]

Definizione 2.1 (Blocco di un G-spazio transitivo)**.** Sia Ω un G-spazio transitivo e sia $\Delta \subseteq \Omega$ con $\Delta \neq \emptyset$. Allora Δ è un *blocco* se per ogni $g \in G$, $\Delta \cap \Delta^g = \emptyset$ implica $\Delta = \Delta^g$.

Osservazione 2.2. In un G-spazio transitivo lo spazio stesso e i singoletti sono sempre dei blocchi. I blocchi di questo tipo sono detti *banali*.

Definizione 2.3 (Spazio primitivo)**.** Sia Ω un G-spazio transitivo. Ω è un G-spazio *primitivo* se ogni blocco di Ω è banale.

Per i G-spazi primitivi in generale vale il seguente risultato:

Proposizione 2.4. *Un G-spazio 2-omogeneo è primitivo.*

Dimostrazione. Sia Δ un blocco di Ω. Se $|\Delta| = 1$ allora è un blocco banale.
Siano $\alpha, \beta \in \Omega$ tali che $\{\alpha, \beta\} \subseteq \Delta$. Poichè Ω è 2-omogeneo, allora per ogni $\gamma \in \Omega$ esiste $g \in G$ tale che $\{\alpha, \beta\}^g = \{\alpha, \gamma\}$. Dunque $\{\alpha, \gamma\} \subseteq \Delta^g$. Siccome $\alpha \in \Delta \cap \Delta^g$, allora $\Delta = \Delta^g$ e quindi $\gamma \in \Delta$. Poichè la scelta di γ è arbitraria, allora $\Delta = \Omega$. $\square$

Nel capitolo precedente è stato già mostrato che Aut$(\mathbb{Q}, <)$ è 2-omogeneo, dunque il seguente corollario è un'immediata conseguenza della proposizione.

Corollario 2.5. *L'azione di Aut$(\mathbb{Q}, <)$ su $\mathbb{Q}$ è primitiva.*

2.2 Grafo orbitale di Aut$(\mathbb{Q}, <)$