# Isomorfismi di ordine dei numeri razionali

**Relatore:** Marta Morigi
**Candidato:** Paolo De Cecco

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

15 luglio 2020

# Introduzione

## Insieme totalmente ordinato

Un *insieme totalmente ordinato* è una coppia $(A, <)$ dove $A$ è un insieme non vuoto e $<$ è una relazione binaria, detta *relazione d'ordine di $A$*, che soddisfa le proprietà:

1. per ogni $x \in A$, si ha $x \nless x$ (Irriflessività);
2. per ogni $x, y \in A$, si ha che $x < y$ implica $y \nless x$ (Antisimmetria);
3. per ogni $x, y, z \in A$, se $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$ (Transitività);
4. per ogni $x, y \in A$, vale solo una delle proposizioni: (Linearità)

$$x < y, \; x = y, \; y < x$$

## Insieme denso

Un insieme totalmente ordinato $A$ è *denso* se per ogni $x, y \in A$ con $x < y$ esiste $z \in A$ tale che $x < z < y$.

## Insieme senza estremi

Un insieme totalmente ordinato $A$ è *senza estremi* se per ogni $x \in A$ esistono $y, z \in A$ tali che $y < x < z$.

L'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordine naturale è un insieme totalmente ordinato, denso e senza estremi.

### Insieme denso

Un insieme totalmente ordinato $A$ è *denso* se per ogni $x, y \in A$ con $x < y$ esiste $z \in A$ tale che $x < z < y$.

### Insieme senza estremi

Un insieme totalmente ordinato $A$ è *senza estremi* se per ogni $x \in A$ esistono $y, z \in A$ tali che $y < x < z$.

L'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordine naturale è un insieme totalmente ordinato, denso e senza estremi.

## Insieme denso

Un insieme totalmente ordinato $A$ è *denso* se per ogni $x, y \in A$ con $x < y$ esiste $z \in A$ tale che $x < z < y$.

## Insieme senza estremi

Un insieme totalmente ordinato $A$ è *senza estremi* se per ogni $x \in A$ esistono $y, z \in A$ tali che $y < x < z$.

L'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordine naturale è un insieme totalmente ordinato, denso e senza estremi.

# Automorfismi d'ordine

## Isomorfismo d'ordine

Siano $A, B$ due insiemi totalmente ordinati. Un *isomorfismo d'ordine* è una mappa $\varphi : A \to B$ biettiva e tale che per ogni $x, y \in A$

$$x < y \text{ se e solo se } \varphi(x) < \varphi(y)$$

## Famglia degli automorfismi d'ordine

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <) = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \varphi \text{ isomorfismo d'ordine}\}$$

Tale famiglia, dotata dell'operazione di composizione, forma un gruppo.

# Automorfismi d'ordine

## Isomorfismo d'ordine

Siano $A, B$ due insiemi totalmente ordinati. Un *isomorfismo d'ordine* è una mappa $\varphi : A \to B$ biettiva e tale che per ogni $x, y \in A$

$$x < y \text{ se e solo se } \varphi(x) < \varphi(y)$$

## Famglia degli automorfismi d'ordine

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <) = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \varphi \text{ isomorfismo d'ordine}\}$$

Tale famiglia, dotata dell'operazione di composizione, forma un gruppo.

# Automorfismi d'ordine

## Isomorfismo d'ordine

Siano $A, B$ due insiemi totalmente ordinati. Un *isomorfismo d'ordine* è una mappa $\varphi : A \to B$ biettiva e tale che per ogni $x, y \in A$

$$x < y \text{ se e solo se } \varphi(x) < \varphi(y)$$

## Famglia degli automorfismi d'ordine

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <) = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \varphi \text{ isomorfismo d'ordine}\}$$

Tale famiglia, dotata dell'operazione di composizione, forma un gruppo.

## $G$-spazio

Dati un gruppo $G$ e un insieme $\Omega$, si dice che $G$ agisce su $\Omega$, o che $\Omega$ è un $G$-spazio se è dato un morfismo di gruppi

$$\varphi : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$$

Poniamo $\alpha^g = \varphi(g)(\alpha)$.

# Proprietà di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$

**$G$-spazio transitivo**

Sia $\Omega$ un $G$-spazio. Si definisce $\Omega$ un *$G$-spazio transitivo* se per ogni $\alpha, \beta \in \Omega$ esiste $g \in G$ tale che $\alpha^g = \beta$.

È possibile generalizzare tale proprietà nel seguente modo:

**$G$-spazio $k$-transitivo**

Sia $k \in \mathbb{N}$. Un $G$-spazio è *$k$-transitivo* se, dati due insiemi qualsiasi di $k$ elementi distinti di $\Omega$ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$, esiste $g \in G$ tale che $\alpha_i^g = \beta_i$ per $i = 1, \dots, k$.

# Proprietà di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$

**$G$-spazio transitivo**

Sia $\Omega$ un $G$-spazio. Si definisce $\Omega$ un *$G$-spazio transitivo* se per ogni $\alpha, \beta \in \Omega$ esiste $g \in G$ tale che $\alpha^g = \beta$.

È possibile generalizzare tale proprietà nel seguente modo:

**$G$-spazio $k$-transitivo**

Sia $k \in \mathbb{N}$. Un $G$-spazio è *$k$-transitivo* se, dati due insiemi qualsiasi di $k$ elementi distinti di $\Omega$ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$, esiste $g \in G$ tale che $\alpha_i^g = \beta_i$ per $i = 1, \ldots, k$.

# Proprietà di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$

**$G$-spazio transitivo**

Sia $\Omega$ un $G$-spazio. Si definisce $\Omega$ un *$G$-spazio transitivo* se per ogni $\alpha, \beta \in \Omega$ esiste $g \in G$ tale che $\alpha^g = \beta$.

È possibile generalizzare tale proprietà nel seguente modo:

**$G$-spazio $k$-transitivo**

Sia $k \in \mathbb{N}$. Un $G$-spazio è *$k$-transitivo* se, dati due insiemi qualsiasi di $k$ elementi distinti di $\Omega$ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$, esiste $g \in G$ tale che $\alpha_i^g = \beta_i$ per $i = 1, \ldots, k$.

# Proprietà di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$

**$G$-spazio transitivo**

Sia $\Omega$ un $G$-spazio. Si definisce $\Omega$ un *$G$-spazio transitivo* se per ogni $\alpha, \beta \in \Omega$ esiste $g \in G$ tale che $\alpha^g = \beta$.

È possibile generalizzare tale proprietà nel seguente modo:

**$G$-spazio $k$-transitivo**

Sia $k \in \mathbb{N}$. Un $G$-spazio è *$k$-transitivo* se, dati due insiemi qualsiasi di $k$ elementi distinti di $\Omega$ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$, esiste $g \in G$ tale che $\alpha_i^g = \beta_i$ per $i = 1, \ldots, k$.

### $G$-spazio $k$-omogeneo

Sia $k \in \mathbb{N}$. Un $G$-spazio $\Omega$ è *$k$-omogeneo* se per qualsiasi sottoinsieme $\Gamma, \Delta \subseteq \Omega$ con $|\Gamma| = |\Delta| = k$ si ha $\Gamma^g = \Delta$ per qualche $g \in G$.

Sia $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ e $\Omega = \mathbb{Q}$. Si consideri l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ su $\mathbb{Q}$.

### Teorema

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio $k$-omogeneo per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione del teorema è costruttiva e consiste nella costruzione esplicita di un automorfismo $\varphi$ tale che $\varphi(\Gamma) = \Delta$.

### $G$-spazio $k$-omogeneo

Sia $k \in \mathbb{N}$. Un $G$-spazio $\Omega$ è *$k$-omogeneo* se per qualsiasi sottoinsieme $\Gamma, \Delta \subseteq \Omega$ con $|\Gamma| = |\Delta| = k$ si ha $\Gamma^g = \Delta$ per qualche $g \in G$.

Sia $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ e $\Omega = \mathbb{Q}$. Si consideri l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ su $\mathbb{Q}$.

### Teorema

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio $k$-omogeneo per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione del teorema è costruttiva e consiste nella costruzione esplicita di un automorfismo $\varphi$ tale che $\varphi(\Gamma) = \Delta$.

**$G$-spazio $k$-omogeneo**

Sia $k \in \mathbb{N}$. Un $G$-spazio $\Omega$ è *$k$-omogeneo* se per qualsiasi sottoinsieme $\Gamma, \Delta \subseteq \Omega$ con $|\Gamma| = |\Delta| = k$ si ha $\Gamma^g = \Delta$ per qualche $g \in G$.

Sia $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ e $\Omega = \mathbb{Q}$. Si consideri l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ su $\mathbb{Q}$.

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio $k$-omogeneo per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione del teorema è costruttiva e consiste nella costruzione esplicita di un automorfismo $\varphi$ tale che $\varphi(\Gamma) = \Delta$.

Nelle notazioni precedenti, si ha inoltre:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio transitivo.

Tuttavia:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ non è un $G$-spazio 2-transitivo.

Data una coppia di razionali distinti $\{p, q\}$ con $p < q$, non esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi(p) = q$ e $\varphi(q) = p$.

Nelle notazioni precedenti, si ha inoltre:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio transitivo.

Tuttavia:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ non è un $G$-spazio 2-transitivo.

Data una coppia di razionali distinti $\{p, q\}$ con $p < q$, non esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi(p) = q$ e $\varphi(q) = p$.

Nelle notazioni precedenti, si ha inoltre:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio transitivo.

Tuttavia:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ non è un $G$-spazio 2-transitivo.

Data una coppia di razionali distinti $\{p, q\}$ con $p < q$, non esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi(p) = q$ e $\varphi(q) = p$.

Nelle notazioni precedenti, si ha inoltre:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio transitivo.

Tuttavia:

**Teorema**

$\mathbb{Q}$ non è un $G$-spazio 2-transitivo.

Data una coppia di razionali distinti $\{p, q\}$ con $p < q$, non esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi(p) = q$ e $\varphi(q) = p$.

# Primitività

Sia $\Omega$ un $G$-spazio transitivo.

**Blocco di un $G$-spazio**

Sia $\Delta \subseteq \Omega$ con $\Delta \neq \emptyset$. Allora $\Delta$ è un *blocco* se per ogni $g \in G$, $\Delta \cap \Delta^g \neq \emptyset$ implica $\Delta = \Delta^g$.

In un $G$-spazio transitivo $\Omega$, i singoletti e $\Omega$ stesso sono sempre dei blocchi. Tali blocchi sono detti *banali*.

**$G$-spazio primitivo**

$\Omega$ è un $G$-spazio *primitivo* se ogni blocco di $\Omega$ è banale.

# Primitività

Sia $\Omega$ un $G$-spazio transitivo.

**Blocco di un $G$-spazio**

Sia $\Delta \subseteq \Omega$ con $\Delta \neq \emptyset$. Allora $\Delta$ è un *blocco* se per ogni $g \in G$, $\Delta \cap \Delta^g \neq \emptyset$ implica $\Delta = \Delta^g$.

In un $G$-spazio transitivo $\Omega$, i singoletti e $\Omega$ stesso sono sempre dei blocchi. Tali blocchi sono detti *banali*.

**$G$-spazio primitivo**

$\Omega$ è un $G$-spazio *primitivo* se ogni blocco di $\Omega$ è banale.

# Primitività

Sia $\Omega$ un $G$-spazio transitivo.

**Blocco di un $G$-spazio**

Sia $\Delta \subseteq \Omega$ con $\Delta \neq \emptyset$. Allora $\Delta$ è un *blocco* se per ogni $g \in G$, $\Delta \cap \Delta^g \neq \emptyset$ implica $\Delta = \Delta^g$.

In un $G$-spazio transitivo $\Omega$, i singoletti e $\Omega$ stesso sono sempre dei blocchi. Tali blocchi sono detti *banali*.

**$G$-spazio primitivo**

$\Omega$ è un $G$-spazio *primitivo* se ogni blocco di $\Omega$ è banale.

# Primitività

Sia $\Omega$ un $G$-spazio transitivo.

**Blocco di un $G$-spazio**

Sia $\Delta \subseteq \Omega$ con $\Delta \neq \emptyset$. Allora $\Delta$ è un *blocco* se per ogni $g \in G$, $\Delta \cap \Delta^g \neq \emptyset$ implica $\Delta = \Delta^g$.

In un $G$-spazio transitivo $\Omega$, i singoletti e $\Omega$ stesso sono sempre dei blocchi. Tali blocchi sono detti *banali*.

**$G$-spazio primitivo**

$\Omega$ è un $G$-spazio *primitivo* se ogni blocco di $\Omega$ è banale.

**Teorema**

Un $G$-spazio 2-omogeneo è primitivo.

Per quanto già mostrato:

**Corollario**

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio primitivo.

**Teorema**

Un $G$-spazio 2-omogeneo è primitivo.

Per quanto già mostrato:

**Corollario**

$\mathbb{Q}$ è un $G$-spazio primitivo.

# Teorema di Cantor

**Teorema di Cantor**

Per ogni insieme $A$ numerabile, totalmente ordinato, denso e senza estremi esiste un isomorfismo d'ordine $\varphi : \mathbb{Q} \to A$.

Per la dimostrazione sono state fornite due diverse argomentazioni:

**Going forth** **Back and forth**

# Teorema di Cantor

**Teorema di Cantor**

Per ogni insieme $A$ numerabile, totalmente ordinato, denso e senza estremi esiste un isomorfismo d'ordine $\varphi : \mathbb{Q} \to A$.

Per la dimostrazione sono state fornite due diverse argomentazioni:

**Going forth**

**Back and forth**

# Teorema di Cantor

## Teorema di Cantor

Per ogni insieme $A$ numerabile, totalmente ordinato, denso e senza estremi esiste un isomorfismo d'ordine $\varphi : \mathbb{Q} \to A$.

Per la dimostrazione sono state fornite due diverse argomentazioni:

**Going forth** **Back and forth**

Differenze principali tra le due argomentazioni:

- In *going forth* ad ogni passo viene fissata l'immagine di ciascun elemento di $\mathbb{Q}$ tramite $\varphi$.
- In *back and forth* ad ogni passo dispari viene fissata l'immagine tramite $\varphi$ di un elemento di $\mathbb{Q}$ e ad ogni passo pari viene fissata la controimmagine di un elemento di $A$.

La seguente proposizione può essere dimostrata solo con una tecnica di tipo *back and forth*:

**Proposizione**

Sia $A$ un sottoinsieme denso di $\mathbb{Q}$ tale che il suo complementare sia ancora un sottoinsieme denso. Allora esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi|_A$ è un automorfismo d'ordine di $A$.

Differenze principali tra le due argomentazioni:

- In *going forth* ad ogni passo viene fissata l'immagine di ciascun elemento di $\mathbb{Q}$ tramite $\varphi$.
- In *back and forth* ad ogni passo dispari viene fissata l'immagine tramite $\varphi$ di un elemento di $\mathbb{Q}$ e ad ogni passo pari viene fissata la controimmagine di un elemento di $A$.

La seguente proposizione può essere dimostrata solo con una tecnica di tipo *back and forth*:

**Proposizione**

Sia $A$ un sottoinsieme denso di $\mathbb{Q}$ tale che il suo complementare sia ancora un sottoinsieme denso. Allora esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi|_A$ è un automorfismo d'ordine di $A$.

Differenze principali tra le due argomentazioni:

- In *going forth* ad ogni passo viene fissata l'immagine di ciascun elemento di $\mathbb{Q}$ tramite $\varphi$.
- In *back and forth* ad ogni passo dispari viene fissata l'immagine tramite $\varphi$ di un elemento di $\mathbb{Q}$ e ad ogni passo pari viene fissata la controimmagine di un elemento di $A$.

La seguente proposizione può essere dimostrata solo con una tecnica di tipo *back and forth*:

**Proposizione**

Sia $A$ un sottoinsieme denso di $\mathbb{Q}$ tale che il suo complementare sia ancora un sottoinsieme denso. Allora esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi|_A$ è un automorfismo d'ordine di $A$.

Differenze principali tra le due argomentazioni:

- In *going forth* ad ogni passo viene fissata l'immagine di ciascun elemento di $\mathbb{Q}$ tramite $\varphi$.
- In *back and forth* ad ogni passo dispari viene fissata l'immagine tramite $\varphi$ di un elemento di $\mathbb{Q}$ e ad ogni passo pari viene fissata la controimmagine di un elemento di $A$.

La seguente proposizione può essere dimostrata solo con una tecnica di tipo *back and forth*:

**Proposizione**

Sia $A$ un sottoinsieme denso di $\mathbb{Q}$ tale che il suo complementare sia ancora un sottoinsieme denso. Allora esiste un automorfismo d'ordine $\varphi$ di $\mathbb{Q}$ tale che $\varphi|_A$ è un automorfismo d'ordine di $A$.

Il Teorema di Cantor non è generalizzabile ad insiemi non numerabili, infatti:

**Proposizione**

Non esiste un isomorfismo d'ordine tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

# Cardinalità di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$

**$\mathbb{Z}$-sequenza**

Una $\mathbb{Z}$-sequenza in $\mathbb{Q}$ è una sequenza $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ di razionali tali che $\xi_n < \xi_{n+1}$ per ogni $n$ e tale che $\xi_n \to \pm\infty$ per $n \to \pm\infty$.

Determiniamo la cardinalità dell'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$:

**Teorema**

L'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$ ha cardinalità maggiore o uguale a $2^{\aleph_0}$.

# Cardinalità di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$

**$\mathbb{Z}$-sequenza**

Una $\mathbb{Z}$-sequenza in $\mathbb{Q}$ è una sequenza $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ di razionali tali che $\xi_n < \xi_{n+1}$ per ogni $n$ e tale che $\xi_n \to \pm\infty$ per $n \to \pm\infty$.

Determiniamo la cardinalità dell'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$:

**Teorema**

L'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$ ha cardinalità maggiore o uguale a $2^{\aleph_0}$.

Se $A$ è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Z}$ e $\xi_A = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la $\mathbb{Z}$-sequenza tale che:

$$\xi_n = \begin{cases} n & \text{se } n \in A \\ n - \frac{1}{2} & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Allora la mappa $A \mapsto \xi_A$ è iniettiva.

Se $A$ è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Z}$ e $\xi_A = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la $\mathbb{Z}$-sequenza tale che:

$$\xi_n = \begin{cases} n & \text{se } n \in A \\ n - \frac{1}{2} & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Allora la mappa $A \mapsto \xi_A$ è iniettiva.

Se $A$ è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Z}$ e $\xi_A = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la $\mathbb{Z}$-sequenza tale che:

$$\xi_n = \begin{cases} n & \text{se } n \in A \\ n - \frac{1}{2} & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Allora la mappa $A \mapsto \xi_A$ è iniettiva.

### Proposizione

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ agisce transitivamente sull'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$.

Si fissi una $\mathbb{Z}$-sequenza $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si scelga a piacere una seconda $\mathbb{Z}$-sequenza $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Si considerino in $\mathbb{R}$ gli intervalli $[\xi_n, \xi_{n+1})$ e $[\eta_n, \eta_{n+1})$ al variare di $n$. L'unica trasformazione lineare crescente da $[\xi_n, \xi_{n+1})$ a $[\eta_n, \eta_{n+1})$ è un isomorfismo d'ordine e in particolare lo è anche la sua restrizione $\varphi_n$ a $\mathbb{Q}$.

**Proposizione**

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ agisce transitivamente sull'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$.

Si fissi una $\mathbb{Z}$-sequenza $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si scelga a piacere una seconda $\mathbb{Z}$-sequenza $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Si considerino in $\mathbb{R}$ gli intervalli $[\xi_n, \xi_{n+1})$ e $[\eta_n, \eta_{n+1})$ al variare di $n$. L'unica trasformazione lineare crescente da $[\xi_n, \xi_{n+1})$ a $[\eta_n, \eta_{n+1})$ è un isomorfismo d'ordine e in particolare lo è anche la sua restrizione $\varphi_n$ a $\mathbb{Q}$.

## Proposizione

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ agisce transitivamente sull'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$.

Si fissi una $\mathbb{Z}$-sequenza $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si scelga a piacere una seconda $\mathbb{Z}$-sequenza $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Si considerino in $\mathbb{R}$ gli intervalli $[\xi_n, \xi_{n+1})$ e $[\eta_n, \eta_{n+1})$ al variare di $n$. L'unica trasformazione lineare crescente da $[\xi_n, \xi_{n+1})$ a $[\eta_n, \eta_{n+1})$ è un isomorfismo d'ordine e in particolare lo è anche la sua restrizione $\varphi_n$ a $\mathbb{Q}$.

## Proposizione

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ agisce transitivamente sull'insieme delle $\mathbb{Z}$-sequenze in $\mathbb{Q}$.

Si fissi una $\mathbb{Z}$-sequenza $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si scelga a piacere una seconda $\mathbb{Z}$-sequenza $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Si considerino in $\mathbb{R}$ gli intervalli $[\xi_n, \xi_{n+1})$ e $[\eta_n, \eta_{n+1})$ al variare di $n$. L'unica trasformazione lineare crescente da $[\xi_n, \xi_{n+1})$ a $[\eta_n, \eta_{n+1})$ è un isomorfismo d'ordine e in particolare lo è anche la sua restrizione $\varphi_n$ a $\mathbb{Q}$.

Definiamo $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che $g|_{[\xi_n, \xi_{n+1})} = \varphi_n$.

Si ha $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$.

**Teorema**

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ ha cardinalità $2^{\aleph_0}$.

Definiamo $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che $g|_{[\xi_n, \xi_{n+1})} = \varphi_n$.

Si ha $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$.

**Teorema**

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ ha cardinalità $2^{\aleph_0}$.

Definiamo $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che $g|_{[\xi_n, \xi_{n+1})} = \varphi_n$.

Si ha $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$.

**Teorema**

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ ha cardinalità $2^{\aleph_0}$.

*Grazie per l'attenzione!*

# Indice

1 Automorfismi d'ordine
- Introduzione
- Proprietà della famiglia degli automorfismi d'ordine
- Primitività

2 Teorema di Cantor
- Teorema di Cantor
- Cardinalità della famiglia degli automorsfimi d'ordine dei razionali