Analisi III

Paolo Bettelini

Contents

1 Successione di funzioni

Definizione Successione di funzioni

Una *successione di funzioni* è una famiglia di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite su un dominio comune $f_n\colon D\to\mathbb{R}$.

Definizione Convergenza in un punto

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione converge in un punto x_0 se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) < \infty$$

Definizione Convergenza puntuale

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge puntualmente* ad una funzione $f\colon D\to\mathbb{R}$ se

$$\forall x\in D,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Quindi la successione converge in ogni punto, ma la velocità di convergenza può dipenderere dal punto.

Definizione Convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge uniformemente* ad una funzione $f\colon D\to\mathbb{R}$ se

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

per $n\to\infty$.

Oppure possiamo dire che la condizione è che

$$\forall\varepsilon>0, \exists N \mid \forall n>N, ||f_n - f||_{\infty,E} < \varepsilon$$

Dovremmo dire che la differenza

$$|f_n(x) - f| \leq \varepsilon$$

ma siccome ciò deve valere per tutte le x possiamo utilizzare il supremum.

Quindi la velocità di convergenza è la stessa in ogni punto. Ogni cosa che converge uniformemente converge puntualmente.

Definizione Convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione è *uniformemente di Cauchy* se

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n, m > N, \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

A partire da un certo indice, tutte le funzioni della successione sono molto vicine tra loro in modo uniforme su tutto D, indipendentemente dalla funzione limite.

Teorema Convergenza uniforme e convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. Se la successione è uniformemente di Cauchy allora è uniformemente convergente.

Teorema

Sia $\{f_n\}$ convergente uniformemente a f in E e sia $x_0 \in E$ un punto di accumulazione di E. Supponiamo che esista

$$\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lambda_n$$

per ogni n, allora

1. $\lambda_n \to \lambda$,
2. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$$

Proof

1. $$|\lambda_n - \lambda_m| = \lim_{x\to x_0} |f_n(x) - f_n(x)| \leq \lim_{x\to x_0} ||f_n - f_m||_{\infty,E} < \varepsilon$$

   dunque è di Cauchy e converge al limite $\lambda_n \to \lambda$.
2. $$\begin{aligned} |f(x) - \lambda| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| \\ &\leq ||f - f_n||_{\infty,E} + |f_n(x) - \lambda_n| \end{aligned}$$

   dunque se $\overline{n} = \max\{N_1, N_2\}$

   $$|f(x) - \lambda| \leq 2\varepsilon + |f_{\overline{n}}(x) - \lambda_{\overline{n}}| \leq 3\varepsilon$$

   quindi

   $$f_{\overline{n}}(x) - \lambda_{\overline{n}} \leq \varepsilon$$

Quindi, se abbiamo convergenza uniforme,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right) \\ &= \lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) \end{aligned}$$

possiamo scambiare l'ordine.

Corollario

Se f_n sono continue e $f_n \to f$, allora f è continua.

Teorema

Sia $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni R-integrabili dove $f_n \to f$ in $[a,b]$. Allora f è R-integrabile e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Proof

Supponiamo anche che f_n siano continue.

1. f è continua e quindi R-integrabile;
2. mostriamo che vale l'uguale, cioè $\forall m, n \geq N$,

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx$$
$$\leq \int_a^b ||f_n - f||_{\infty,[a,b]}\,dx \leq \varepsilon(b-a)$$

   (cioè tende a zero) per $n \geq N$.

Teorema

Sia $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

1. $\exists x_0 \in [a,b]$ tale che f_n converge in x_0;
2. f_n' converge uniformemente in g a $[a,b]$.

Allora,

1. f_n converge uniformemente a f in $[a,b]$;
2. f è derivabile;
3. $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

2 Serie di funzioni

Definizione Convergenza uniforme

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente* ad una funzione $S(x)$ se la successione delle somme parziali

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converge uniformemente a $S(x)$, ovvero se

$$\sup_{x\in D} |S_N(x) - S(x)| \to 0$$

per $N \to \infty$.

È più forte della convergenza puntuale.

Definizione Convergenza totale

Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge totalmente* su un insieme D se la serie di norme

$$\sum ||f_n||_\infty$$

converge.

Ricordiamo che in generale la norma

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e per $p = \infty$ con f limitata

$$||f||_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

che è un numero siccome f è limitata

Teorema

XXXX. Se ho la convergenza uniforme posso invertire integrale e serie.

3 Integrazione

Teorema Monotone convergence theorem for non-negative measurable functions

Let (X, Σ, μ) be a measurable space and let

$$f_n \colon X \to [0; +\infty)$$

be measurable such that $f_n \leq f_{n+1}$. Then,

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\lim_n f_n) \, d\mu$$

Sia per esempio $f_n = \chi_{\{1\}} + \chi_{\{n\}}$. Allora la funzione converge puntualmente in quanto l'1 si sposta sempre più a destra. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = 2 \to 2$$

Se invece $f_n \geq f_{n+1}$ allora $f_n = \chi_{\{n,n+1,\cdots\}}$, allora tende a zero. Tuttavia, l'integrale di f_n è infinito in quanto la misura dell'insieme è infinita.

Proof

Abbiamo

$$f_n \leq f_{n+1} \cdots \leq f, \quad f = \lim_n f_n$$

Quindi

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

quindi anchde la successione degli integrali è monotona e ammette limite. Il limite sarà sempre più piccolo dell'ultimo valore.

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

Facciamo ora il caso $\geq$. Sia $0 \leq \varphi \leq f$ una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad \alpha_i \geq 0$$

e prendiamo $c \in (0,1)$. Considegliamo gli insiemi

$$A_n = \{f_n \geq c\varphi\}$$

Tali insiemi sono misurabili, in quanto sto moltiplicando una funzione misurabile per una costante e l'insieme $\{f \geq g\}$ è come dire $\{f - g \geq 0\}$. Sappiamo

1. $A_n \in A_{n+1}$ in quanto $c\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$;
2. $\bigcup A_n = X$. Sia $x \in X$. Se $\varphi(x) = 0$ allora è in A_n. Se invece $\varphi(x) > 0$, ma siccome $\varphi \leq f$, e $c < 1$, allora

$$c\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$$

La succesione, da un certo posto in poi, è più grande di $c\varphi(x)$ (ne basta uno), quindi $x \in A_n$.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} E_i &= E_i \cap X \\ &= E_i \cap (\bigcup A_n) \\ &= \bigcup_n (E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Quindi $E_i \cap A_n \subseteq E_i \cap A_{n+1}$ è una successione di insiemi che si sta allargando. Quindi, la misura dell'union è il limite.

$$\mu(E_i) = \lim_{n \to \infty} E_i \cap A_n$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu &\geq c \int_{A_n} \varphi \, d\mu \\ &= c \int_X \varphi \chi_{A_n} \, d\mu = c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Facciamo ora il limite

$$\begin{aligned} \lim_n \int_X f_n \, d\mu &\geq c \lim_n \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \\ &= c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i) = c \int_X \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X \varphi \, d\mu$$

vale per tutti i $c \in (0,1)$, e allora possiamo usare il supremum

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \varphi \, d\mu$$

Non solo vale per ogni c, ma per ogni funzione semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$. In particolare anche per il supremum. Il supremum di questi integrali al variare di tutte le funzioni semplici minori di f è l'integrale di f, cioè la definizione

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu$$

Mettendo assieme le due cose otteniamo l'uguaglianza

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Corollario

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu$$

Proof

Siccome i termini sono tutti positivi, la successione delle serie parziale è monotona.

Lemma Lemma di Fatou

Sia $f_n\colon X \to [0,+\infty)$ misurabili, allora

$$\int_X \liminf f_n\,d\mu \le \liminf \int_X f_n\,d\mu$$

(l'integrale esiste sempre)

Proof

Consideriamo

$$g_n = \inf_{k\ge n} f_k$$

chiaramente $g_n \le g_{n+1} \to \liminf f_n$ e sono misurabili. Consideriamo allora l'integrale

$$\lim \int_X g_n\,d\mu = \int_X \liminf f_n\,d\mu$$

e per il teorema della convergenza monotona e definizione di lim inf

$$\begin{aligned}\int_X \liminf f_n\,d\mu &= \lim_n \int_X (\inf_n k \ge n f_k)\,d\mu \\ &\le \liminf \int_X f_n\,d\mu\end{aligned}$$

Definizione Integrabilità di una funzione positiva

Sia $f\colon X \to [0;+\infty)$ misurabile. Allora f è *integrabile* su X se

$$\int_X f\,d\mu \le \infty$$

Diciamo che $f \in L^1(\{X,\Sigma,\mu\})$. Per esempio $\{1/n^2\} \in L^1(\mathbb{N})$ ma $\{1/n\} \notin L^1(\mathbb{N})$

Definizione Integrabilità di una funzione

Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile. Allora f è *integrabile* se f^+ e f^- sono integrabili (che sono entrambe funzioni positive).

Dobbiamo tuttavia definire l'integrale di una funzione di segno arbitraria. Sia allora

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu$$

Consideriamo per esempio

$$f = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$$

Allora

$$f^+ = (1, 0, \frac{1}{3}, 0)$$

e

$$f^- = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$$

L'integrale non converge in quanto i due integrali non convergono (le serie divergono per confronto asintotico).

Proposition

Siano $f, g \in L^1$.

1. $\alpha f + \beta b \in L^1$ e
$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$
Quindi lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale.
2. $$f \leq g \implies \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$$
3. $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$. Infatti $f^+ f^- = |f|$ e per la direzione inserva abbiamo $0 \leq f^+ \leq |f|$. Ma se l'integrale del modulo è finito allora lo sarà anche quello di f^+ che è più piccolo. Lo stesso vale per la parte negativa.
4. Se f è misurabile allora lo è anche $|f|$, ma il viceversa non è vero. Per esempio sia $X = \{a, b, c\}$ e $\Sigma = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Sia allora
$$f = \begin{cases} 1 & x = a \vee x = b \\ -1 & x = c \end{cases}$$
Chiaramente $\{f < 0\} = \{c\}$ non è misurabile, ma $|f| = 1$ per tutte le x e le funzioni costanti sono sempre misurabili.
5. $$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$
Infatti
$$\begin{aligned} \left| \int_X (f^+ - f^-)\, d\mu \right| &= \left| \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f^+\, d\mu \right| + \left| \int_X f^-\, d\mu \right| \\ &= \int_X f^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu \\ &= \int_X (f^+ + f^-)\, d\mu \\ &= \int_X |f|\, d\mu \end{aligned}$$

Teorema Teorema della convergenza dominante

Sia $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $f = \lim_n f_n$. Supponiamo che ci sia $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ in X. Allora

$$\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Proof

f_n sono integrabili in quanto $|f_n| \leq g$ che è integrabili, quindi sarà finito anche l'integrale del modulo, e f è integrabile perché ciò vale anche per il limite. Allora $|f - f_n| \leq 2g$ quindi $2g - |f - f_n| \geq 0$. Siccome quest'ultima è una successione positiva posso applicare il lemma di Fatou

$$\int_X \liminf(2g - |f - f_n|)\, d\mu \leq \liminf \int_X (2g - |f - f_n|)\, d\mu$$

Ma per le proprietà dei lim inf possiamo estrarre la costante

$$\begin{aligned}\int_X 2g - \lim |f - f_n| = \int_X 2g& \\ &\leq \liminf \left(\int_X 2g\, d\mu - \int_X |f - f_n|\, d\mu \right) \\ &= \int_X 2g\, d\mu - \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_X 2g\, d\mu \leq \int_X 2g\, d\mu - \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu \\ \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu \leq 0\end{aligned}$$

Ma quindi questo limite deve essere ed essere uguale a zero

$$\int_X |f - f_n|\, d\mu = 0$$

Infine, usando il modulo

$$\lim \left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \leq \lim \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

siccome è tutto positivo deve essere

$$\lim \left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| = 0$$

Se $A \subseteq X$ con A integrabile e $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, f è integrabile in A se $f\chi_A$ è integrabile. Chiaramente definiamo

$$\int_A f\, d\mu = \int_X f\chi_A\, d\mu$$

Quindi per vedere se è integrabile nel sottoinsieme la estendiamo su tutto lo spazio con la funzione caratteristica e integriamo.

Costruiamo ora una misura su R (la misura di Lebesuge). Vogliamo che sia invariante per traslazione $\mu(A) = \mu(A + c)$ dove c è una costante. Vorremmo anche che $\mu([b, a]) = b - a$. Tuttavia, non è possibile costruire tale misura su tutto $\mathbb{R}$. Sia allora $I = (a, b)$ (non cambia se incluso o meno) e denotiamo $l(I) = b - a$. Sia anche $E \subset \mathbb{R}$. Diamo la *misura esterna*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \,|\, E \subset \bigcup_n I_n \right\}$$

Alcune proprietà di questa ipotetica misura

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;

2. $\mu^*(\{x\}) = 0$ dove $\{x\} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$;
3. se E numerabile, allora $\mu^*(E) = 0$

$$E \subset \{x_n\}$$

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$E \subset \bigcup I_n$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon \end{aligned}$$

4. $\mu^*(E + x) = \mu^*(E)$ (invariante per traslazione).
5. subadditività (numerabile)

$$\mu^* \left(\bigcup E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$$

6. $\mu^*(I) = b - a$

Se tutto fosse vero, abbiamo quello che cerchiamo, ma in realtà quando gli insiemi sono disgiunti l'ugualgianza non vale, quindi non esiste tale misura.

Vale sempre $\mu^*(I) \leq b - a$ perché c'è l'inf, c'è sempre un ricoprimento. La misura esterna è almeno quel valore, magari più piccolo, vale lo stesso.

Vogliamo mostrare la subadditività (numerabile). Per definizione possiamo prendere E_n come un'unione di intervalli numerati

$$E_n \subseteq \bigcup_k I_k^n$$

quindi, per avvicinarsi alla misura

$$\sum_{k=1} l(I_k^n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Chairamente l'unione di E_n è ricoperta da un unione di unioni

$$\bigcup E_n \subseteq \bigcup_n \left(\bigcup_k I_k^n\right)$$

E per definizione la misura di tale unione

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup E_n\right) &\leq \sum_n \left(\sum_k l(I_k^n)\right) \\ &\leq \sum_n \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Siccome $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ è una possibile ricopritura, abbiamo

$$\mu^*([b, a]) \leq b - a + 2\varepsilon$$

Ora facciamo il contrario; mostriamo che per ogni ricoprimento $[a, b] \subseteq \bigcup I_n$, la serie di tutte quelle lunghezze è almeno $b - a$. L'insieme $\bigcup I_n$ è compatto e quindi ha un ricoprimento finito. Possiamo estrarre un sottoricoprimento finito che lo ricopre ancora. Quindi possiamo immaginarci

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$$

Vogliamo mostrare che se i ricoprimenti finiti hanno lunghezza almeno $b - a$, quindi anche quelli infiniti. Siccome usiamo intervalli aperti, vogliamo che gli altri intervalli si sovrappongano per coprire anche gli estremi, che non sono coperti. Impostiamo allora la condizione che $a_1 < a$, $a_2 < b_1$, $a_3 < b_2$. Quindi in generale ci spostiamo verso destra con $a_k - b_{k-1}$. L'ultimo intervallo deve contenere b quindi $b_n > b$. Quindi, dato un ricoprimento qualsiasi, possiamo sempre trovare un sottoricoprimento in questa maniera. Abbiamo allora la sommatoria

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} l(I_k) &= b_n - a_n + b_{n-1} - a_{n-1} + \cdots + b_2 - a_2 + b_1 - a_1 \\ &= b_n + (b_{n-1} - a_n) + (b_{n-2} - a_{n-1}) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1\end{aligned}$$

Siccome $a_k - b_{k-1}$, tutte le parentesi sono strettamente positive. Se buttiamo via tali termini ci rimane un valore maggiore di $b_n - a_1$.

$$\sum_{k=1}^{n} l(I_k) > b_n - a_1 > b - a$$

Abbiamo quindi trovato che $\mu^*([a, b]) = b - a$. Possiamo trovare la misura dell'intervallo aperto facendo

$$\begin{aligned}b - a = \mu^*([a, b]) &= \mu^*\left((a, b) \cup \{a\} \cup \{b\}\right) \\ &\leq \mu^*\left((a, b)\right) + \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\}) \\ &= \mu^*\left((a, b)\right) \leq b - a\end{aligned}$$

Definizione Misurabile secondo Lebesgue

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è *misurabile secondo Lebesgue* se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Questa definizione è data dal fatto che vogliamo che la misura si scomponga in due parti disgiunte per tutti gli A, quella che si sovrappone con E e quella che non si sovrappone con E.

Teorema

Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono una σ-algebra.

Proof

Sia $\mathcal{M}$ tale insieme.

1. Notiamo un paio di cose. Se $\mu^*(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}$. Questo è dato dal fatto che

$$\begin{aligned}0 + \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\leq \mu^*(A)\end{aligned}$$

   Quindi anche tutti gli insiemi misurabili hanno misura zero.
2. Abbiamo anche che se $E \in \mathcal{M}$ allora $E^C \in \mathcal{M}$. Questo è dato dalla definizione simmetrica di misura di Lebesgue.
3. Mostriamo che se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, allora $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Per fare ciò mostriamo $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$, e poi usiamo il complementare due volte per tornare al primo caso. Siccome E_2 è misurabile

possiamo scomporre

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap E_1^c)\\ &= \mu^*(A\cap E_1\cap E_2)+\mu^*(A\cap E_1\cap E_2^c)+\mu^*(A\cap E_1^c)\\ &\geq \mu^*(A\cap (E_1\cap E_2))+\mu^*((A\cap E_1\cap E_2^c)\cup A\cap E_1^c)\\ &= \mu^*(A\cap (E_1\cap E_2))+\mu^*(A\cap (E_1\cap E_2^c))\end{aligned}$$

il terzo passaggio usa la subadditività per maggiorare. Chiaramente se ciò vale per due insiemi, banalmente vale per n insiemi $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{M}$, e quindi $\bigcup_i E_i \in \mathcal{M}$. Se quindi $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sono misurabili e sono disgiunti, allora $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right)=\sum_{k=1}^n \mu^*(A\cap E_k)$$

Per esempio, per $A=\mathbb{R}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)=\sum_{k=1}^n \mu^*(E_k)$$

Per induzione abbiamo $n+1 \implies n$

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) &= \mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\cup E_n\right)+\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\cap E_n^c\right)\\ &= \mu^*(A\cap E_n)+\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right)\\ &= \mu^*\left(A\cap E_n\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\mu^*(A\cap E_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k)\end{aligned}$$

Mostriamo ora il caso infinito. Sia $\{E_n\}$ con $E_n \in \mathcal{M}$, allora $\bigcup I_n \in \mathcal{M}$. Sia

$$\begin{aligned}E=\bigcup E_n &= E_1\cap(E_2\backslash E_1)\cup(E_3\backslash(E_1\cup E_2))\cup\cdots\\ &= G_1\cup G_2\cup G_3\cup\cdots\end{aligned}$$

siccome l'intersezione di insiemi misurabili è misurabile, e i G_i sono una collezione finita di quest'ultimi, allora i G_i sono misurabili. Abbiamo allora $E=\bigcup G_n$ dove $G_n \in \mathcal{M}$ sono disgiunti. Sia

$$F_n=\bigcup_{k=1}^n G_k$$

Chiaramente $F_n \subseteq E$ e $F_n^c \supseteq E^c$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A\cap F_n)+\mu^*(A\cap F_n^c)\\ &\geq \mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right)\right)+\mu^*(A\cap E^c)\\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*\left(A\cap G_k\right)+\mu^*(A\cap E^c)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi questa maggiorazione per ogni n, quindi vale anche per il limite. Il limite delle successioni delle somme parziali è la serie.

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(A \cap E^c)\\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_k^{\infty}(A \cap G_k)\right) + \mu^*(A \cap E^c)\\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\end{aligned}$$

per la subadditività.

La σ-algebra $\mathcal{M}$ viene detta *σ-algebra di Lebesgue*.

Definizione Misura di Lebesgue

Sia E misurabile secondo Lebesgue. Allora

$$\mu(E) \triangleq \mu^*(E)$$

dove μ^* è la misura esterna.

Dobbiamo assicurarsi che data una collezione $\{E_n\}$ misurabili secondo Lebesgue e disgiunti,

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Sicuramente il primo termine è minore o uguale al secondo. Per il maggiore o uguale abbiamo

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup^{\infty} E_n\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\\ &= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)\end{aligned}$$

che vale siccome vale la subadditività su insiemi finiti disgiunti. Sicocme ciò vale per ogni n, allora vale anche il limite

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

La misura esterna è additiva per un numero finiti di insiemi disgiunti, ma non è vero nel caso infinito. La σ-algebra che abbiamo creato è la più grande che gode delle proprietà della misura che vogliamo.

Abbiamo quindi l'algebra $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$. Abbiamo pronta la teoria dell'integrazione per definire l'integrale di Legesbue. Dobbiamo tuttavia capire quali insiemi sono misurabili.

Proposition

$(a, +\infty)$ è misurabile.

Proof

Abbiamo

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a])$$

e $A \subseteq \bigcup I_n$ Siano

$$I_n^- = I_n \cap (-\infty, a], \quad I_n^+ = I_n \cap (a, +\infty)$$

ovviamente valgono

$$I_n = I_n^- \cup I_n^+, \quad I_n^- \cap I_n^+ = \emptyset$$

quindi $l(I_n) = l(I_n^-) + l(I_n^+)$. Inoltre

$$A \cap (-\infty, a] \subseteq \bigcup I_n^-, \quad A \cap (a, +\infty) \subseteq \bigcup I_n^+$$

E per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a]) &\leq \sum_n l(I_n^+) + \sum_n l(I_n^-) \\ &= \sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi tutti anche gli intervalli sono misurabili. Anche $[a, b)$ è misurabile in quanto

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty \right) \cap (-\infty, b)$$

e $(-\infty, b)$ è misurabile in quanto è il complemento di

$$[b, +\infty) = \bigcap (b - \frac{1}{n}, +\infty)$$

In generale $(a, b) \in \mathcal{M}$. Se A è aperto allora è misurabile. $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue è uno spazio di misura completo.

Proposition

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto. Allora A è unione numerabile di intervalli disgiunti.

Quindi sono misurabili (non serve nemmeno che siano disgiunti).

Proof

Sia $x \in A$ e consideriamo

$$I_x = \left\{ \bigcup I \mid x \in I \right\} \subseteq A$$

chiaramente I_x è un intervallo, il più grande intervallo contenente x. Se $I_x = A$, allora abbiamo finito altrimenti $I_x \subset A$ e consideriamo dunque $y \in A \backslash I_x$ e I_y. Chiaramente $I_x \cap I_y = \emptyset$. Adesso abbiamo altri due casi, o $I_x \cup I_y = A$, e allora abbiamo scritto l'aperto come unione di intervalli disgiunti, oppure c'è $z \in A \backslash (I_y \cup I_x)$. Considerando I_z possiamo fare lo stesso ragionamento. Possiamo andare avanti finché non ho consumato tutti i punti di A. Dobbiamo tuttavia mostrare che $A = \bigcup I_{x_i}$ è unione numerabile. Per fare ciò consideriamo tutti i razionali $\{r_n\}$ che stanno in A. Ognuno dei I_{x_i} deve contenere almeno un razionale, ma siccome i razionali sono numerabili, ci sarebbero intervalli I_{x_i} senza razionali, che è impossibile.

Assioma Assioma della scelta

Sia $\mathcal{F}$ una collezione di sottoinsieme di X esiste una funzione di scelta $\varphi \colon \mathcal{F} \to X$ tale che $\forall G \in \mathcal{F}, \varphi(G) \in G$.

Vediamo ora un insieme che non è misurabile usando l'assioma della scelta. In $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue, sia $X = [0, 1)$ e definiamo

$$x \overset{\circ}{+} y = \begin{cases} x + y & x + y < 1 \\ x + y - 1 & x + y \geq 1 \end{cases}$$

per $x, y \in X$. Usiamo la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Indichiamo con P tutti gli elementi che estraiamo con la funzione della scelta dalle classi di equivalenza, cioè i rappresentanti delle varie classi. Consideriamo ora i razionali $\{r_n\}$ di $[0, 1)$ e sia

$$P_n \triangleq P \overset{\circ}{+} r_n$$

Abbiamo alcune proprietà:

1. $n \neq m \implies P_n \cap P_m = \emptyset$. Se $z \in P_n \cap P_m$, allora $z = p \overset{\circ}{+} r_n = q \overset{\circ}{+} r_m$. Quindi $p - q = r_m - r_n$, ma quindi $p - q$ è razionale, e quindi sono nella stessa classe di equivalenza, contro l'ipotesi che sono di classi distinte.
2. $$\bigcup P_n = [0, 1)$$
   Chiaramente $\bigcup P_n \subseteq [0, 1)$. Sia ora $x \in [0, 1)$ e mostriamo che appartiene ad un certo P_n. Ovviamente $x \in [x]_\sim = [p]_\sim$, quindi $p - x \in \mathbb{Q}$.
   - se $x > p$ allora $x - p = r_{\overline{n}} \in [0, 1)$, quindi $x = p + r_{\overline{n}}$ o in altre parole $x \in {}_{r_{\overline{n}}}$
   - se $x < p$ allora $x - p + 1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ e $x - p + 1 = r_{\hat{n}} \in [0, 1) = x = p + r_{\hat{n}} - 1 = p \overset{\circ}{+} r_{\hat{n}}$

Supponiamo ora che P sia misurabile, e quindi P_n è misurabile. Allora $\mu(P) = \mu(P_n)$

$$\begin{aligned} 1 = \mu([0, 1)) = \mu\left(\bigcup P_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P) \end{aligned}$$

quindi la serie di termini costanti o è zero, o diverge, il che è assurdo. Quindi l'insieme non è misurabile.

Ricordiamo che una funzione è misurabile quando $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}$. La funzione $1_\mathbb{Q}$ è misurabile e

$$\int_\mathbb{R} 1_\mathbb{Q} \, d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0$$

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile. Allora
1. f è misurabile secondo Lebesgue;
2. f è Lebesgue-integrabile;
3. $$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

Proof

Sia f misurabile. Vogliamo vedere se

$$\int_{[a,b]} |f| \, d\mu < \infty$$

Ma

$$\int_{[a,b]} |f| \, d\mu \leq \int_{[a,b]} M \, d\mu = M(b-a)$$

Siccome f è R-integrabile, sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$, esiste una partizione P di $[a,b]$ tale che

$$|S(f,P) - s(f,P)| < \varepsilon$$

TODO: usare i simboli di integrale superiore e inferiore. Ricordiamo che

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Prendiamo

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i 1_{(x_{i-1},x_i)}$$

e

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{n} M_i 1_{(x_{i-1},x_i)}$$

Una prende l'inf e l'altra prende il sup, quindi $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$. Allora

$$S(f,P) = \int_{[a,b]} \varphi_2 \, d\mu, \quad s(f,P) = \int_{[a,b]} \varphi_1 \, d\mu$$

Quindi possiamo rimpiazzare la condizione con gli integrali di Lebesgue

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_2 \, d\mu - \int_{[a,b]} \varphi_1 \, d\mu \right| < \varepsilon$$

Al posto di ε prendiamo $1/n$. Per ogni n ci saranno le funzioni semplici $\varphi_1^n \leq f \leq \varphi_2^n$. Possiamo anche fare in modo che $\varphi_1^n \leq \varphi_1^{n+1} \leq f \leq \varphi_2^{n+1} \leq \varphi_2^n$. Chiaramente $\{\varphi_1^n\}$ e $\{\varphi_2^n\}$ sono monotone e quindi convergono a $\overline{\varphi}_1$ e $\overline{\varphi}_2$, quindi $\overline{\varphi}_1 \leq f \leq \overline{\varphi}_2$. Vale sempre che $|\varphi_1^n|, |\varphi_2^n| \leq M$ sono limitate da qualche costante, ma allora possiamo applicare il teorema della convergenza dominante

$$\int_{[a,b]} (\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1) \, d\mu = 0$$

ma quindi siccome l'integranda $\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1$ è non negativa, allora deve essere quasi ovunque uguale a zero, oppure che le due sono uguali quasi ovunque, e siccome $\overline{\varphi}_1 \leq f \leq \overline{\varphi}_2$, allora $\overline{\varphi}_2 = f = \overline{\varphi}_1$ quasi ovunque. Allora, siccome $\mathcal{M}$ è completa, f è misurabile. Il terzo punto è immediato in quanto l'integrale rimane monotono e quindi

$$\int_{[a,b]} \overline{\varphi}_1 \, d\mu \leq \int_{[a,b]} f \, d\mu \int_{[a,b]} \overline{\varphi}_2 \, d\mu$$

ma il primo è uguale all'ultimo. Per definizione di integrale di Riemann,

$$\int_{[a,b]} \overline{\varphi}_2 \, d\mu$$

è l'integrale di Riemann di f, e quindi

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

Teorema

Sia $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ misurabile tale che f sia R-integrabile in $[a,c]$ per $c > a$. Allora,

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dc = \int_{[a,+\infty)} f\,d\mu$$

L'ipotesi garantisce che l'integrale esiste per ogni c. Siccome la funzione è positiva, l'integrale è monotono crescente (potrebbe essere $+\infty$). Quindi, nel caso dell'integrale di Lebesgue non è necessario usare il limite per estendere l'integrale nell'intervallo illimitato, a differenza dell'integrale di Riemann.

Proof

Consideriamo una generica successione $c_n \to \infty$ e consideriamo

$$f_n(x) = f(x) 1_{[a,c_n]}$$

Chiaramente $0 \le f_n \le f_{n+1}$ è monotona crescente. Inoltre, $f_n \to f$ in $[a,+\infty)$. Usiamo il teorema della convergenza monotona che si dice

$$\lim \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu &= \lim_n \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a,c_n]}\,d\mu \\
&= \lim \int_{[a,c_n]} f\,d\mu \\
&= \lim \int_a^{c_n} f\,d\mu \\
&= \lim \int_a^{c_n} f(x)\,dx \\
&= \lim \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a,+\infty)}\,d\mu \\
&= \int_{[a,+\infty)} d\mu
\end{aligned}$$

Esempio

La funzione
$$\frac{\cos \pi x}{x} \notin L^1((1,+\infty))$$
Una funzione è integrabile secondo Lebesgue se e solo se lo è il suo modulo. Possiamo anche utilizzare il fatto che
$$\int_{\bigcup E_n} f\, d\mu = \sum_n \int_{E_n} f\, d\mu$$
per insiemi E_n disgiunti se f è positiva, come in questo caso. Consideriamo quindi
$$[1,+\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k+1)$$
che sono disgiunti. E quindi
$$\begin{aligned}
\int_{[1,+\infty)} \frac{|\cos \pi x|}{x}\, d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k,k+1)} \frac{|\cos \pi x|}{x}\, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{x}\, dx \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{k+1}\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 |\cos \pi x|\, dx = +\infty
\end{aligned}$$
che diverge. Questa funzione non è integrabile secondo Lebesgue ma lo è secondo Riemann.

Esempio

Studiare, al variare di α, quando
$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin \pi x}{(\ln x)\ln(1+\sqrt{x})} \in L^1((0,+\infty))$$
Abbiamo dei problemi in $x = 0, 1, +\infty$. In un intorno di zero abbiamo
$$f \sim \frac{C}{x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \ln x}$$
quindi è integrabile per $\alpha > -3/2$. In un intorno di 1 abbiamo
$$f \sim C \frac{\sim \pi x}{\ln x}$$
che è ha limite
$$\lim_{x\to 1} Cx\cos(\pi x) = 0$$
quindi la nostra funzione è sempre integrabile in un intorno di 1. In un intorno di infinito abbiamo la maggiorazione
$$|f| \leq \frac{Cx^\alpha}{\ln^2(x)}$$
siccome per x grande togliamo il $+1$. Quindi la funzione è del tipo
$$\frac{C}{x^{-\alpha} \ln^2 x}$$

che è integrabile per $\alpha \leq -1$. Quindi la funzione è integrabile per $-3/2 < \alpha \leq -1$. Dobbiamo tuttavia capire che cosa succede se $\alpha \leq -1$, siccome abbiamo usato una maggiorazione. Dividiamo l'integrale in diversi integrali secondo il periodo

$$\int_{a=2}^{+\infty} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x)\ln(1+\sqrt{x})}\, dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x)\ln(1+\sqrt{x})}\, dx$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{-\alpha} \ln(k+1)\ln(1+\sqrt{k+1})} \int_{0}^{1} |\sin \pi x|\, dx$$

dove $a = 2$ è quasi arbitrario. Della parte periodica sappiamo che l'integrale è costante, del resto della funzione abbiamo preso il minimo. Cominciamo guardando $-1 \leq \alpha \leq 0$. Il termine ora ha forma

$$\frac{1}{k^{-\alpha} \ln^2 k}$$

allora diverge per $a > -1$. In conclusione, la funzione è integrabile se e solo se

$$-\frac{3}{2} < \alpha \leq -1$$

Quindi per $\alpha \leq -1$ abbiamo fatto una maggiorazione, mentre per il resto abbiamo fatto una minorazione.

Esempio

Studiare quando

$$f(x) = \frac{\sin^2 x^2}{x^\alpha} \in L^1((0,+\infty))$$

al variare di α. Abbiamo problemi in $x = 0, +\infty$. In un intorno di 0 abbiamo

$$f \sim \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

quindi è integrabile per $\alpha < 5$. In un intorno di infinito notiamo che

$$f \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

quindi è integrabile se $\alpha > 1$. Dobbiamo tuttavia studiare il caso $\alpha \leq 1$. Dobbiamo cambiare la variabile in maniera tale da fare diventare la funzione periodica $x^2 = t$. Allora,

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\, dt \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\, dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k+1)\pi]^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt$$

che non è integrabile $\frac{\alpha+2}{2} \leq 1 \iff \alpha \leq 1$. Quindi, $f \in L^1((0,+\infty))$ se e solo se $1 < \alpha < 5$.

Esempio

Studiare quando
$$f(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}} \in L^1((0,+\infty))$$
al variare di α. Abbiamo problemi ad infinito ed sicuramente illimitata in quanto il seno si annulla periodicamente. Tuttavia, i punti critici periodici dipendono solo da
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$
In un intorno di zero abbiamo
$$f \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\alpha}}$$
che è integrabile per $\alpha > -2/3$. Guardiamo ora cosa succede in un intorno di $k\pi$
$$\frac{1}{|x-k\pi|^\alpha} \sim f \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$$
Dobbiamo fare uno sviluppo per studiare il seno negli intorni di $k\pi$.
$$\sin(x) = 0 \pm (x-k\pi) + o((x-k\pi))$$
quindi si comporta come
$$\frac{1}{|x-k\pi|^{1/3}}$$
che è integrabile. Quindi, non ci sono problemi di integrabilità in tali punti per quel pezzo della funzione. In un intorno di infinito
$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f|\, d\mu &\geq \int_\pi^\infty |f|\, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}}\, dx \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{(k\pi)^\alpha}{1+(k\pi)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx \end{aligned}$$
quindi il carattere è lo stesso di
$$\frac{1}{k^{2-\alpha}}$$
che diverge per $\alpha \geq 1$. Analogamente minoriamo
$$\leq \sum_{k=1}^\infty \frac{((k+1)\pi)^\alpha}{1+\pi^2(k+1)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$$
che converge per $\alpha < 1$. Quindi, $f \in L^1 \iff -2/3 < \alpha < 1$.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}}\, dx$$

Calcoliamo il limite (per $x > 0$) delle funzioni che stiamo integrando

$$\lim_n \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} = \begin{cases} e^x 0 < x < 1 \\ e^{-2x} \end{cases}$$

il caso $x = 1$ non ci interessa in quanto per ciò che concerne l'integrale un singolo punto è irrilevante. Vogliamo applicare il teorema di convergenza dominante. Vogliamo trovare una maggiorante integrabile g. Per $x \in (0, 1)$ possiamo usare

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq e^x + 1$$

Invece, per $x \in (1, +\infty)$

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq \frac{e^x}{x^n e^{2x}} + \frac{x^n}{x^n e^{2x}} = \frac{e^- x}{x^n} + e^{-2x} \leq e^{-x} + e^{-2x}$$

Quindi,

$$f_n \leq \begin{cases} e^x + 1 & x \in (0, 1) \\ e^{-2x} + e^{-x} & x > 1 \end{cases}$$

allora il limite degli integrali è l'integrale del limite

Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}}\, dt$$

Il problema è l'intervallo di integazione, ma possiamo sistemarlo

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}}\, dt = \lim_n \int_0^\infty \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}} 1_{[0,n]}\, dt$$

Il limite è dato da

$$\lim_n f_n(t) = \begin{cases} \to 0 \end{cases}$$

Quindi per dimostrare che l'integrare è nullo dobbiamo trovare una maggiorante integrabile. Potrei maggiorare con una constante

$$\frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}} \leq \frac{C}{t^2 \sqrt{1 + t^3}}$$

che tuttavia non è integrabile quando t è piccolo. Consideriamo allora il termine

$$\frac{n^2}{t^2} e^{-n/t} = y^2 e^{-y}$$

con $y = n/t$. Di tale funziona, controlliamo se è veramente limitata superiormente, ha un massimo

$$2ye^{-y} - y^2 e^{-y} = ye^{-y}(2 - y)$$

Quindi è sempre limitata da $4e^{-2}$

$$\left(\frac{n^2}{t^2}e^{-n/t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \leq \frac{4e^{-2}}{\sqrt{1+t^3}}$$

che è integrabile sia in zero che in infinito.

4 Esercizi

Esercizio Successioni 1

Per $x > -1$ studia la successione

$$f_n(x) = \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}}$$

- **convergenza puntuale:** controlliamo la convergenza puntuale in $E = (0, +\infty)$. Fissato $x > 0$ studiamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} = 0 = f(x)$$

- **convergenza uniforme:** controlliamo la convergenza uniforme in E. Abbiamo

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right|$$

sostituendo $t = n/x$ otteniamo una funzione simile all'integranda della funzione gamma, che ha un massimo M

$$\begin{aligned} \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right| &\leq M \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{1}{n\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{M}{n\varepsilon} \to 0 \end{aligned}$$

Chiaramente il sup si ottiene con il denominatore più piccolo, quindi un ε molto vicino a 0.

- **integrabilità:** mostriamo che $f_n \in L^1$.

$$\int_0^\infty |f_n(x)|\, dx = \int_0^\infty \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right| dx$$

In un intorno di $+\infty$ abbiamo

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^{5/2}}$$

siccome $\frac{5}{2} > 1$ la funzione è integrabile a infinito. In un intorno di 0^+ maggioriamo

$$f_n(x) \leq \frac{M}{n\sqrt{1+x}} \sim \frac{M}{n}$$

quindi è integrabile per confronto e confronto asintotico.

Esercizio Successioni 1

Data la successione
$$f_n(x) = n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x}$$
studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

1. **convergenza puntuale:** studiamo la convergenza puntuale in $(0, +\infty)$. Fissato $x > 0$ abbiamo
$$\lim_n f_n(x) = \lim_n n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
2. **convergenza uniforme:** studiamo la convergenza uniforme in $(0, +\infty)$. Abbiamo
$$\begin{aligned} ||f_n - f||_{\infty,E} &= \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} \right| \\ &\leq \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| n^\alpha x e^{n^2 x} \right| \end{aligned}$$
siccome $\arctan(x) \leq x$. Studiamo la derivata della funzione maggiorante $g_n(x)$.
$$\begin{aligned} g_n'(x) &= n^\alpha e^{-n^2 x} - n^\alpha x e^{-n^2 x} n^2 \\ &= n^\alpha e^{-n^2 x}(1 - xn^2) \end{aligned}$$
Per studiare il segno abbiamo
$$1 - n^2 x \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{n^2}$$
che è un punto di massimo. Chiaramente $g_n(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} g_n(x)$, e siccome è sempre positiva, siamo sicuri che tale valore è un punto di massimo. Il massimo vale
$$g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$
Quindi, la norma infinito è sempre minore di
$$||f_n - f||_{\infty,E} \leq \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$
che tende a zero solo quando $\alpha < 2$ (condizione sufficiente ma non necessaria). Cerchiamo ora un limite dal basso
$$\begin{aligned} ||f_n - f||_{\infty,E} \geq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) &= n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) e^{-1} \\ &\sim n^{\alpha-2} e^{-1} \end{aligned}$$
che non tende a zero. Quindi la convergenza è uniforme per $\alpha < 2$.

Esercizio Successioni 3

Data la successione

$$f_n(x) = n\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)$$

1. **stabilire in che insieme vi è convergenza puntuale:** fissato x calcoliamo

$$\lim_n f_n = \lim_n n\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) = x^2$$

in quanto la parentesi è asintotica all'esponente. Allora l'insieme di convergenza puntuale è $E = \mathbb{R}$.

2. **stabilire se la convergenza è uniforme in tale insieme:** fissato x abbiamo

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|n\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) - x^2\right| = \sup_{x\in(0,+\infty)} |g_n(x)|$$

Studiamo la derivata di $g_n(x)$

$$g_n'(x) = ne^{\frac{x^2}{n}}\frac{2x}{n} - 2x = 2x\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)$$

Il segno della derivata è lo stesso di x, e $x = 0$ è un punto di minimo.

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = \pm\infty$$

quindi non è limitata e la convergenza non è assoluta.

3. **stabilire se la convergenza è uniforme in un intervallo limitato:** sia $[a, b]$ tale intervallo. Dalla forma della funzione, il sup è o in $x = a$ o in $x = b$, quindi

$$||f_n - f||_{\infty,E} \leq \max\{|f(a) - f(b)|, |f(b) - f(a)|\}$$

supponiamo che sia in a

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \left|n\left(e^{\frac{a^2}{n}} - 1\right) - a^2\right|$$

per risolvere il limite facciamo un espansione di MacLaurin fino al secondo ordine

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \left|\frac{a^4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right| \to 0$$

Quindi, la convergenza è uniforme in un intervallo limitato.

Esercizio Serie 1

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2+x^2}$$

verifica la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$. Cominciamo studiando la convergenza totale che è più forte, quindi la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{xe^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2+x^2} \right|$$

con $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ otteniamo la forma $f(t) = te^{-t^2}$ che ha grafico noto, e un massimo M e minimo

$$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leq M \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\sqrt{n}}{n^2+x^2} = \frac{M}{n^{3/2}}$$

in quanto il supremum è per $x = 0$. Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge. Quindi la serie converge totalmente e quindi converge anche in maniera uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio Serie 2

Conderiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right)$$

1. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo convergenza puntuale: Fissato x, notiamo che per convergere il termine n-esimo deve tendere a zero. Quindi,

   $$\lim_n \arctan\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right) \to 0$$

   se e solo se $\alpha < 2$ (condizione necessaria). Usiamo il criterio del confronto asintotico: l'argomento dell'arcotangente tende a zero e quindi è asintotica al suo argomento. La serie

   $$\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

   converge se e solo se $\alpha < 1$. Quindi, la serie converge puntualmente per $\alpha < 1$.
2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo convergenza uniforme: è necessario $\alpha - 1$. Cominciamo studiando la convergenza totale, che è più forte. Abbiamo

   $$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \arctan\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right)\right|$$

   Studiamo la derivata del termine

   $$f_n'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right)^2} = -\frac{2xn^\alpha}{n^{2\alpha}+n^2+x^{2^2}} \geq 0 \iff x \leq 0$$

   quindi $x = 0$ è un punto di massimo. Infatti, gli estremi sono

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) \to 0$$

Quindi la forma è data da

$$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = f_n(0) = \arctan(n^{\alpha-2})$$

La serie è quindi a termini positivi e usiamo il confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n^{\alpha-2})$$

che converge se e solo se $\alpha < 1$. Quindi abbiamo convergenza uniforme per $\alpha < 1$. Siccome la convergenza puntuale è per $\alpha < 1$, non vi sono altri α per cui vi è convergenza assoluta.

Esercizio Serie 3

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^\alpha+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

1. Valutare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ vi è convergenza puntuale in $\mathbb{R}$. Studiamo la condizione necessaria di convergenza. Il numeratore tende a zero se e solo se $\alpha > 0$. In tal caso la funzione è assolutamente asintotica a
$$|f_n(x)| \sim \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$
E la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$
TODO: non finito ci manda le note lei :)
2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la somma della serie è continua in $\mathbb{R}$. Dobbiamo utilizzare il teorema. Dobbiamo trovare per quali α converge totale per applicare il teorema. Mimimimi mi mi mi mi mi. Prendiamo $E = [-a, a]$, $\alpha > 0$. Abbiamo allora
$$\begin{aligned} ||f_n||_{\infty,[-a,a]} &= \sup_{x\in[-a,a]} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^\alpha+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &\leq \cdots \end{aligned}$$