

Termodinamica

Paolo Bettelini

Contents

1 Termodinamica

1

1 Termodinamica

Nello scritto potrebbe esserci la domanda sulla trasformazione adiabatica di un gas perfetto.

La teoria cinetica dei gas è un modello microscopico classico di un gas perfetto. È il più semplice modello statistico che mette in relazione le proprietà termodinamiche di un gas all'equilibrio con le proprietà microscopiche delle molecole del gas. Le ipotesi semplificatrici sono:

1. il gas è formato da un numero grande di molecole N in continuo movimento (molto disordinato);

$$N \sim N_A = 6 \cdot 10^{23}$$

2. Le molecole del gas sono trattate come puntiformi, prive di struttura interna, e soggette alla meccanica Newtoniana.
3. le molecole in moto nel gas subiscono urti tra loro e con le pareti del contenitore con urti perfettamente elastici (si conserva quindi l'energia cinetica). Tra un urto e quello successivo le molecole non interagiscono e si muovono di rettilineo uniforme.
4. La distribuzione spaziale delle molecole è uniforme (mediante) e la loro velocità non hanno una direzione preferenziale (si ha cioè una distribuzione isotropa della velocità molecolari). Queste condizioni sono sicuramente soddisfatte in condizione di equilibrio termodinamico.
5. Le dimensioni delle molecole sono trascurabili rispetto alla media che separa le molecole \iff il volume V occupato dal gas (il volume del contenitore del gas). Per pressioni non eccessive tale condizione è soddisfatta (sono le condizioni in cui vale l'uguaglianza di stato di un gas perfetto).

Consideriamo N particelle puntiformi (la molecola del gas) racchiuse in un contenitore cubico di lato L dove i lati del cubo sono paralleli agli assi dello spazio. Consideriamo la parete 1. Si vuole valutare la forza media esercitata dalle molecole sul tale parete attraverso gli urti. Consideriamo una singola molecola i -esima che si schianta nel punto $x = L$ con velocità \vec{v}_i . Dopo l'urto si inverte solamente la componente x della velocità e il modulo rimane invariato. Sia $\delta\vec{q}$ la quantità di moto.

$$\begin{aligned}\Delta\vec{q} &= m\vec{v}_f - m\vec{v}_i \\ &= m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \\ &= -2mv_{x,i}\hat{x}, i\end{aligned}$$

Dopo l'urto, per tornare sulla parete 1 la molecola impiega

$$\Delta t = \frac{2L}{v_{x,i}}$$

per tornare sulla parete. Invertendo tale dato troviamo anche la frequenza degli urti. Stiamo ignorando urti fra le molecole, ma possiamo giustificarlo dicendo che se due molecole di scontrano mediante è come

se si scambiassero i ruoli. In un intervallo di tempo $[t_A, t_B]$ si hanno $\frac{t_B - t_A}{\Delta t}$ urti con la parete 1. Siccome la quantità di moto si conserva la parete riceve dalla molecole

$$\begin{aligned}\Delta \vec{q}_p &= -\frac{t_B - t_A}{\Delta t} \Delta \vec{q} \\ &= (t_B - t_A) m \frac{(\vec{v}_{x,i})^2}{L} \hat{x}\end{aligned}$$

quantità di moto. Per trovare la pressione usiamo il teorema dell'impulso

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \vec{q}_p}{dt} &= \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}_p dt \\ &= \frac{1}{t_B - t_A} \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}_p dt (t_B - t_A) \\ &\triangleq \vec{F}_m (t_B - t_A)\end{aligned}$$

dove \vec{F}_m è la forza media sulla parete (1) della particelle i -esima. Quindi

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &\triangleq \frac{1}{t_B - t_A} \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}_p dt \\ &= \frac{\Delta \vec{q}_p}{t_B - t_A} \\ &= m \frac{(\vec{v}_{x,i})^2}{L} \hat{x}\end{aligned}$$

Per ottenere la forza totale (macroscopica) devo sommare il contributo di tutte le particelle, per questo abbiamo usato la media.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_{i=1}^N m \frac{(\vec{v}_{x,i})^2}{L} \hat{x} \\ &= \frac{M}{L} N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{x,i})^2 \right) \hat{x} \\ &= \frac{m}{L} N \overline{v_x^2} \hat{x}\end{aligned}$$

dove

$$\overline{v_x^2} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{x,i})^2$$

è il valore medio del quadrato della component x della velocità molecolare. Per determinare queste medie è necessario conoscere la distribuzione delle velocità molecolari; indicheremo con $f_x(v_x)$ la distribuzione di probabilità (PDF). In uno stato di equilibrio termodinamico $f_x(v_x)$ non dipende dal tempo. Inoltre, siamo nell'ipotesi di isotropia della velocità. Le distribuzioni delle altre componenti sono analoghe e uguali. Abbiamo anche

$$f(-v_x) = f(v_x)$$

Chiaramente il valore

$$\int_{v'_x}^{v''_x} f(v_x) dv_x$$

è la probabilità di trovare v_x in $[v'_x, v''_x]$. La funzione f permette di valutare i diversi momenti. Il momento di ordine n è

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) v_x^n dv_x$$

(il momento di ordine 1 è la media). La media, come tutti i momenti dispari, è zero, siccome la funzione è dispari.

$$\overline{v_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) v_x dv_x = 0$$

l'integranda è una funzione pari per una funzione dispari. Quindi il prodotto è dispari e la media è nulla.