

Analisi III

Paolo Bettelini

Contents

1	Successione di funzioni	1
2	Serie di funzioni	3
3	Integrazione	4
4	Misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n	22
5	1 aprile	30
6	Equazioni differenziali	39
7	Esercizi	42

1 Successione di funzioni

Definizione Successione di funzioni

Una *successione di funzioni* è una famiglia di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definite su un dominio comune $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione Convergenza in un punto

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione converge in un punto x_0 se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) < \infty$$

Definizione Convergenza puntuale

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge puntualmente* ad una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\forall x \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Quindi la successione converge in ogni punto, ma la velocità di convergenza può dipendere dal punto.

Definizione Convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge uniformemente* ad una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$.

Oppure possiamo dire che la condizione è che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n > N, \|f_n - f\|_{\infty, E} < \varepsilon$$

Dovremmo dire che la differenza

$$|f_n(x) - f| \leq \varepsilon$$

ma siccome ciò deve valere per tutte le x possiamo utilizzare il supremum.

Quindi la velocità di convergenza è la stessa in ogni punto. Ogni cosa che converge uniformemente converge puntualmente.

Definizione Convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione è *uniformemente di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N, \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

A partire da un certo indice, tutte le funzioni della successione sono molto vicine tra loro in modo uniforme su tutto D , indipendentemente dalla funzione limite.

Teorema Convergenza uniforme e convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni. Se la successione è uniformemente di Cauchy allora è uniformemente convergente.

Teorema

Sia $\{f_n\}$ convergente uniformemente a f in E e sia $x_0 \in E$ un punto di accumulazione di E . Supponiamo che esista

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lambda_n$$

per ogni n , allora

1. $\lambda_n \rightarrow \lambda$,
- 2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

Proof

1.

$$|\lambda_n - \lambda_m| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \|f_n - f_m\|_{\infty, E} < \varepsilon$$

dunque è di Cauchy e converge al limite $\lambda_n \rightarrow \lambda$.

2.

$$\begin{aligned} |f(x) - \lambda| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| \\ &\leq \|f - f_n\|_{\infty, E} + |f_n(x) - \lambda_n| \end{aligned}$$

dunque se $\bar{n} = \max\{N_1, N_2\}$

$$|f(x) - \lambda| \leq 2\varepsilon + |f_{\bar{n}}(x) - \lambda_{\bar{n}}| \leq 3\varepsilon$$

quindi

$$f_{\bar{n}}(x) - \lambda_{\bar{n}} \leq \varepsilon$$

Quindi, se abbiamo convergenza uniforme,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \\ &= \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)\end{aligned}$$

possiamo scambiare l'ordine.

Corollario

Se f_n sono continue e $f_n \rightarrow f$, allora f è continua.

Teorema

Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni R-integrabili dove $f_n \rightarrow f$ in $[a, b]$. Allora f è R-integrabile e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Proof

Supponiamo anche che f_n siano continue.

1. f è continua e quindi R-integrabile;
2. mostriamo che vale l'uguale, cioè $\forall m, n \geq N$,

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} dx \leq \varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

(cioè tende a zero) per $n \geq N$.

Teorema

Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

1. $\exists x_0 \in [a, b]$ tale che f_n converge in x_0 ;
2. f'_n converge uniformemente in g a $[a, b]$.

Allora,

1. f_n converge uniformemente a f in $[a, b]$;
2. f è derivabile;
3. $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

2 Serie di funzioni

Definizione Convergenza uniforme

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente ad una funzione $S(x)$ se la successione delle somme parziali

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

converge uniformemente a $S(x)$, ovvero se

$$\sup_{x \in D} |S_N(x) - S(x)| \rightarrow 0$$

per $N \rightarrow \infty$.

È più forte della convergenza puntuale.

Definizione Convergenza totale

Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge *totalmente* su un insieme D se la serie di norme

$$\sum \|f_n\|_{\infty}$$

converge.

Ricordiamo che in generale la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e per $p = \infty$ con f limitata

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

che è un numero siccome f è limitata

Teorema

XXXX. Se ho la convergenza uniforme posso invertire integrale e serie.

3 Integrazione

Teorema Monotone convergence theorem for non-negative measurable functions

Let (X, Σ, μ) be a measurable space and let

$$f_n : X \rightarrow [0; +\infty)$$

be measurable such that $f_n \leq f_{n+1}$. Then,

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X (\lim_n f_n) d\mu$$

Sia per esempio $f_n = \chi_{\{1\}} + \chi_{\{n\}}$. Allora la funzione converge puntualmente in quanto l'1 si sposta sempre più a destra. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = 2 \rightarrow 2$$

Se invece $f_n \geq f_{n+1}$ allora $f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}}$, allora tende a zero. Tuttavia, l'integrale di f_n è infinito in quanto la misura dell'insieme è infinita.

Proof

Abbiamo

$$f_n \leq f_{n+1} \cdots \leq f, \quad f = \lim_n f_n$$

Quindi

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq \int_X f d\mu$$

quindi anche la successione degli integrali è monotona e ammette limite. Il limite sarà sempre più piccolo dell'ultimo valore.

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Facciamo ora il caso \geq . Sia $0 \leq \varphi \leq f$ una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{E_i}, \quad \alpha_i \geq 0$$

e prendiamo $c \in (0, 1)$. Consideriamo gli insiemi

$$A_n = \{f_n \geq c\varphi\}$$

Tali insiemi sono misurabili, in quanto sto moltiplicando una funzione misurabile per una costante e l'insieme $\{f \geq g\}$ è come dire $\{f - g \geq 0\}$. Sappiamo

1. $A_n \subseteq A_{n+1}$ in quanto $c\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$;
2. $\bigcup A_n = X$. Sia $x \in X$. Se $\varphi(x) = 0$ allora è in A_n . Se invece $\varphi(x) > 0$, ma siccome $\varphi \leq f$, e $c < 1$, allora

$$c\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$$

La successione, da un certo posto in poi, è più grande di $c\varphi(x)$ (ne basta uno), quindi $x \in A_n$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} E_i &= E_i \cap X \\ &= E_i \cap \left(\bigcup A_n\right) \\ &= \bigcup_n (E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Quindi $E_i \cap A_n \subseteq E_i \cap A_{n+1}$ è una successione di insiemi che si sta allargando. Quindi, la misura dell'union è il limite.

$$\mu(E_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_i \cap A_n)$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_X f_n d\mu &\geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq c \int_{A_n} \varphi d\mu \\ &= c \int_X \varphi \chi_{A_n} d\mu = c \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Facciamo ora il limite

$$\begin{aligned} \lim_n \int_X f_n d\mu &\geq c \lim_n \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \\ &= c \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i) = c \int_X \varphi d\mu \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \geq c \int_X \varphi d\mu$$

vale per tutti i $c \in (0, 1)$, e allora possiamo usare il supremum

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \geq \int_X \varphi d\mu$$

Non solo vale per ogni c , ma per ogni funzione semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$. In particolare anche per il supremum. Il supremum di questi integrali al variare di tutte le funzioni semplici minori di f è l'integrale di f , cioè la definizione

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$$

Mettendo assieme le due cose otteniamo l'uguaglianza

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Corollario

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$$

Proof

Siccome i termini sono tutti positivi, la successione delle serie parziale è monotona.

Lemma Lemma di Fatou

Sia $f_n: X \rightarrow [0, +\infty)$ misurabili, allora

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$$

(l'integrale esiste sempre)

Proof

Consideriamo

$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k$$

chiaramente $g_n \leq g_{n+1} \rightarrow \liminf f_n$ e sono misurabili. Consideriamo allora l'integrale

$$\lim \int_X g_n d\mu = \int_X \liminf f_n d\mu$$

e per il teorema della convergenza monotona e definizione di \liminf

$$\begin{aligned} \int_X \liminf f_n d\mu &= \lim_n \int_X (\inf_{k \geq n} f_k) d\mu \\ &\leq \liminf \int_X f_n d\mu \end{aligned}$$

Definizione Integrabilità di una funzione positiva

Sia $f: X \rightarrow [0; +\infty)$ misurabile. Allora f è *integrabile* su X se

$$\int_X f d\mu < \infty$$

Diciamo che $f \in L^1(\{X, \Sigma, \mu\})$. Per esempio $\{1/n^2\} \in L^1(\mathbb{N})$ ma $\{1/n\} \notin L^1(\mathbb{N})$

Definizione Integrabilità di una funzione

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Allora f è *integrabile* se f^+ e f^- sono integrabili (che sono entrambe funzioni positive).

Dobbiamo tuttavia definire l'integrale di una funzione di segno arbitraria. Sia allora

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Consideriamo per esempio

$$f = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$$

Allora

$$f^+ = (1, 0, \frac{1}{3}, 0)$$

e

$$f^- = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$$

L'integrale non converge in quanto i due integrali non convergono (le serie divergono per confronto asintotico).

Proposition

Siano $f, g \in L^1$.

1. $\alpha f + \beta g \in L^1$ e

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

Quindi lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale.

- 2.

$$f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

3. $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$. Infatti $f^+ f^- = |f|$ e per la direzione inversa abbiamo $0 \leq f^+ \leq |f|$. Ma se l'integrale del modulo è finito allora lo sarà anche quello di f^+ che è più piccolo. Lo stesso vale per la parte negativa.
4. Se f è misurabile allora lo è anche $|f|$, ma il viceversa non è vero. Per esempio sia $X = \{a, b, c\}$ e $\Sigma = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Sia allora

$$f = \begin{cases} 1 & x = a \vee x = b \\ -1 & x = c \end{cases}$$

Chiaramente $\{f < 0\} = \{c\}$ non è misurabile, ma $|f| = 1$ per tutte le x e le funzioni costanti sono sempre misurabili.

- 5.

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 \left| \int_X (f^+ - f^-) d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \\
 &\leq \left| \int_X f^+ d\mu \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right| \\
 &= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu \\
 &= \int_X (f^+ + f^-) d\mu \\
 &= \int_X |f| d\mu
 \end{aligned}$$

Teorema Teorema della convergenza dominante

Sia $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e sia $f = \lim_n f_n$. Supponiamo che ci sia $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ in X . Allora

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Proof

f_n sono integrabili in quanto $|f_n| \leq g$ che è integrabili, quindi sarà finito anche l'integrale del modulo, e f è integrabile perché ciò vale anche per il limite. Allora $|f - f_n| \leq 2g$ quindi $2g - |f - f_n| \geq 0$. Siccome quest'ultima è una successione positiva posso applicare il lemma di Fatou

$$\int_X \liminf (2g - |f - f_n|) d\mu \leq \liminf \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu$$

Ma per le proprietà dei \liminf possiamo estrarre la costante

$$\begin{aligned}
 \int_X 2g - \lim |f - f_n| &= \int_X 2g \\
 &\leq \liminf \left(\int_X 2g d\mu - \int_X |f - f_n| d\mu \right) \\
 &= \int_X 2g d\mu - \limsup \int_X |f - f_n| d\mu
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 \int_X 2g d\mu &\leq \int_X 2g d\mu - \limsup \int_X |f - f_n| d\mu \\
 \limsup \int_X |f - f_n| d\mu &\leq 0
 \end{aligned}$$

Ma quindi questo limite deve essere ed essere uguale a zero

$$\int_X |f - f_n| d\mu = 0$$

Infine, usando il modulo

$$\lim \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \lim \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

siccome è tutto positivo deve essere

$$\lim \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = 0$$

Se $A \subseteq X$ con A integrabile e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, f è integrabile in A se $f\chi_A$ è integrabile. Chiaramente definiamo

$$\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$$

Quindi per vedere se è integrabile nel sottoinsieme la estendiamo su tutto lo spazio con la funzione caratteristica e integriamo.

Costruiamo ora una misura su \mathbb{R} (la misura di Lebesgue). Vogliamo che sia invariante per traslazione $\mu(A) = \mu(A + c)$ dove c è una costante. Vorremmo anche che $\mu([b, a]) = b - a$. Tuttavia, non è possibile costruire tale misura su tutto \mathbb{R} . Sia allora $I = (a, b)$ (non cambia se incluso o meno) e denotiamo $l(I) = b - a$. Sia anche $E \subset \mathbb{R}$. Diamo la *misura esterna*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E \subset \bigcup_n I_n \right\}$$

Alcune proprietà di questa ipotetica misura

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\mu^*(\{x\}) = 0$ dove $\{x\} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$;
3. se E numerabile, allora $\mu^*(E) = 0$

$$\begin{aligned} E &\subset \{x_n\} \\ I_n &= \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ E &\subset \bigcup I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon \end{aligned}$$

4. $\mu^*(E + x) = \mu^*(E)$ (invariante per traslazione).
5. subadditività (numerabile)

$$\mu^*\left(\bigcup E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$$

6. $\mu^*(I) = b - a$

Se tutto fosse vero, abbiamo quello che cerchiamo, ma in realtà quando gli insiemi sono disgiunti l'ugualianza non vale, quindi non esiste tale misura.

Vale sempre $\mu^*(I) \leq b - a$ perché c'è l'inf, c'è sempre un ricoprimento. La misura esterna è almeno quel valore, magari più piccolo, vale lo stesso.

Vogliamo mostrare la subadditività (numerabile). Per definizione possiamo prendere E_n come un'unione di intervalli numerati

$$E_n \subseteq \bigcup_k I_k^n$$

quindi, per avvicinarsi alla misura

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Chairamente l'unione di E_n è ricoperta da un'unione di unioni

$$\bigcup E_n \subseteq \bigcup_n \left(\bigcup_k I_k^n \right)$$

E per definizione la misura di tale unione

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup E_n \right) &\leq \sum_n \left(\sum_k l(I_k^n) \right) \\ &\leq \sum_n \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Siccome $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ è una possibile ricopratura, abbiamo

$$\mu^*([a, b]) \leq b - a + 2\varepsilon$$

Ora facciamo il contrario; mostriamo che per ogni ricoprimento $[a, b] \subseteq \bigcup I_n$, la serie di tutte quelle lunghezze è almeno $b - a$. L'insieme $\bigcup I_n$ è compatto e quindi ha un ricoprimento finito. Possiamo estrarre un sottoricoprimento finito che lo ricopre ancora. Quindi possiamo immaginarci

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n$$

Vogliamo mostrare che se i ricoprimenti finiti hanno lunghezza almeno $b - a$, quindi anche quelli infiniti. Siccome usiamo intervalli aperti, vogliamo che gli altri intervalli si sovrappongano per coprire anche gli estremi, che non sono coperti. Impostiamo allora la condizione che $a_1 < a$, $a_2 < b_1$, $a_3 < b_2$. Quindi in generale ci spostiamo verso destra con $a_k - b_{k-1}$. L'ultimo intervallo deve contenere b quindi $b_n > b$. Quindi, dato un ricoprimento qualsiasi, possiamo sempre trovare un sottoricoprimento in questa maniera. Abbiamo allora la sommatoria

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n l(I_k) &= b_n - a_n + b_{n-1} - a_{n-1} + \dots + b_2 - a_2 + b_1 - a_1 \\ &= b_n + (b_{n-1} - a_n) + (b_{n-2} - a_{n-1}) + \dots + (b_1 - a_2) - a_1 \end{aligned}$$

Siccome $a_k - b_{k-1}$, tutte le parentesi sono strettamente positive. Se buttiamo via tali termini ci rimane un valore maggiore di $b_n - a_1$.

$$\sum_{k=1}^n l(I_k) > b_n - a_1 > b - a$$

Abbiamo quindi trovato che $\mu^*([a, b]) = b - a$. Possiamo trovare la misura dell'intervallo aperto facendo

$$\begin{aligned} b - a &= \mu^*([a, b]) = \mu^*((a, b) \cup \{a\} \cup \{b\}) \\ &\leq \mu^*((a, b)) + \mu^*({a}) + \mu^*({b}) \\ &= \mu^*((a, b)) \leq b - a \end{aligned}$$

Definizione Misurabile secondo Lebesgue

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è *misurabile secondo Lebesgue* se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Questa definizione è data dal fatto che vogliamo che la misura si scomponga in due parti disgiunte per tutti gli A , quella che si sovrappone con E e quella che non si sovrappone con E .

Teorema

Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono una σ -algebra.

Proof

Sia \mathcal{M} tale insieme.

1. Notiamo un paio di cose. Se $\mu^*(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}$. Questo è dato dal fatto che

$$\begin{aligned} 0 + \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\leq \mu^*(A) \end{aligned}$$

Quindi anche tutti gli insiemi misurabili hanno misura zero.

2. Abbiamo anche che se $E \in \mathcal{M}$ allora $E^c \in \mathcal{M}$. Questo è dato dalla definizione simmetrica di misura di Lebesgue.
3. Mostriamo che se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, allora $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Per fare ciò mostriamo $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$, e poi usiamo il complementare due volte per tornare al primo caso. Siccome E_2 è misurabile possiamo scomporre

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*((A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2^c)) \end{aligned}$$

il terzo passaggio usa la subadditività per maggiorare. Chiaramente se ciò vale per due insiemi, banalmente vale per n insiemi $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{M}$, e quindi $\bigcup_i E_i \in \mathcal{M}$. Se quindi E_1, E_2, \dots, E_n sono misurabili e sono disgiunti, allora $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k)$$

Per esempio, per $A = \mathbb{R}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k)$$

Per induzione abbiamo $n+1 \implies n$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cup E_n\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cap E_n^c\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k) \end{aligned}$$

Mostriamo ora il caso infinito. Sia $\{E_n\}$ con $E_n \in \mathcal{M}$, allora $\bigcup I_n \in \mathcal{M}$. Sia

$$\begin{aligned} E &= \bigcup E_n = E_1 \cap (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)) \cup \dots \\ &= G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \end{aligned}$$

siccome l'intersezione di insiemi misurabili è misurabile, e i G_i sono una collezione finita di quest'ultimi, allora i G_i sono misurabili. Abbiamo allora $E = \bigcup G_n$ dove $G_n \in \mathcal{M}$ sono

disgiunti. Sia

$$F_n = \bigcup_{k=1}^n G_k$$

Chiaramente $F_n \subseteq E$ e $F_n^c \supseteq E^c$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi questa maggiorazione per ogni n , quindi vale anche per il limite. Il limite delle successioni delle somme parziali è la serie.

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_k (A \cap G_k)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

per la subadditività.

La σ -algebra \mathcal{M} viene detta *σ -algebra di Lebesgue*.

Definizione Misura di Lebesgue

Sia E misurabile secondo Lebesgue. Allora

$$\mu(E) \triangleq \mu^*(E)$$

dove μ^* è la misura esterna.

Dobbiamo assicurarci che data una collezione $\{E_n\}$ misurabili secondo Lebesgue e disgiunti,

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Sicuramente il primo termine è minore o uguale al secondo. Per il maggiore o uguale abbiamo

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \\ &= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \end{aligned}$$

che vale siccome vale la subadditività su insiemi finiti disgiunti. Siccome ciò vale per ogni n , allora vale anche il limite

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

La misura esterna è additiva per un numero finito di insiemi disgiunti, ma non è vero nel caso infinito. La σ -algebra che abbiamo creato è la più grande che gode delle proprietà della misura che vogliamo.

Abbiamo quindi l'algebra $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$. Abbiamo pronta la teoria dell'integrazione per definire l'integrale di Lebesgue. Dobbiamo tuttavia capire quali insiemi sono misurabili.

Proposition

$(a, +\infty)$ è misurabile.

Proof

Abbiamo

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a])$$

e $A \subseteq \bigcup I_n$ Siano

$$I_n^- = I_n \cap (-\infty, a], \quad I_n^+ = I_n \cap (a, +\infty)$$

ovviamente valgono

$$I_n = I_n^- \cup I_n^+, \quad I_n^- \cap I_n^+ = \emptyset$$

quindi $l(I_n) = l(I_n^-) + l(I_n^+)$. Inoltre

$$A \cap (-\infty, a] \subseteq \bigcup I_n^-, \quad A \cap (a, +\infty) \subseteq \bigcup I_n^+$$

E per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a]) &\leq \sum_n l(I_n^+) + \sum_n l(I_n^-) \\ &= \sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi tutti anche gli intervalli sono misurabili. Anche $[a, b)$ è misurabile in quanto

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty \right) \cap (-\infty, b)$$

e $(-\infty, b)$ è misurabile in quanto è il complemento di

$$[b, +\infty) = \bigcap \left(b - \frac{1}{n}, +\infty \right)$$

In generale $(a, b) \in \mathcal{M}$. Se A è aperto allora è misurabile. \mathbb{R} con la misura di Lebesgue è uno spazio di misura completo.

Proposition

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto. Allora A è unione numerabile di intervalli disgiunti.

Quindi sono misurabili (non serve nemmeno che siano disgiunti).

Proof

Sia $x \in A$ e consideriamo

$$I_x = \left\{ \bigcup I \mid x \in I \right\} \subseteq A$$

chiaramente I_x è un intervallo, il più grande intervallo contenente x . Se $I_x = A$, allora abbiamo finito altrimenti $I_x \subset A$ e consideriamo dunque $y \in A \setminus I_x$ e I_y . Chiaramente $I_x \cap I_y = \emptyset$. Adesso abbiamo altri due casi, o $I_x \cup I_y = A$, e allora abbiamo scritto l'aperto come unione di intervalli

disgiunti, oppure c'è $z \in A \setminus (I_y \cup I_x)$. Considerando I_z possiamo fare lo stesso ragionamento. Possiamo andare avanti finché non ho consumato tutti i punti di A . Dobbiamo tuttavia mostrare che $A = \bigcup I_{x_i}$ è unione numerabile. Per fare ciò consideriamo tutti i razionali $\{r_n\}$ che stanno in A . Ognuno dei I_{x_i} deve contenere almeno un razionale, ma siccome i razionali sono numerabili, ci sarebbero intervalli I_{x_i} senza razionali, che è impossibile.

Assioma della scelta

Sia \mathcal{F} una collezione di sottoinsieme di X esiste una funzione di scelta $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow X$ tale che $\forall G \in \mathcal{F}, \varphi(G) \in G$.

Vediamo ora un insieme che non è misurabile usando l'assioma della scelta. In \mathbb{R} con la misura di Lebesgue, sia $X = [0, 1)$ e definiamo

$$x \overset{\circ}{+} y = \begin{cases} x + y & x + y < 1 \\ x + y - 1 & x + y \geq 1 \end{cases}$$

per $x, y \in X$. Usiamo la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Indichiamo con P tutti gli elementi che estraiamo con la funzione della scelta dalle classi di equivalenza, cioè i rappresentanti delle varie classi. Consideriamo ora i razionali $\{r_n\}$ di $[0, 1)$ e sia

$$P_n \triangleq P \overset{\circ}{+} r_n$$

Abbiamo alcune proprietà:

1. $n \neq m \implies P_n \cap P_m = \emptyset$. Se $z \in P_n \cap P_m$, allora $z = p \overset{\circ}{+} r_n = q \overset{\circ}{+} r_m$. Quindi $p - q = r_m - r_n$, ma quindi $p - q$ è razionale, e quindi sono nella stessa classe di equivalenza, contro l'ipotesi che sono di classi distinte.
- 2.

$$\bigcup P_n = [0, 1)$$

Chiaramente $\bigcup P_n \subseteq [0, 1)$. Sia ora $x \in [0, 1)$ e mostriamo che appartiene ad un certo P_n . Ovviamente $x \in [x]_{\sim} = [p]_{\sim}$, quindi $p - x \in \mathbb{Q}$.

- se $x > p$ allora $x - p = r_{\bar{n}} \in [0, 1)$, quindi $x = p + r_{\bar{n}}$ o in altre parole $x \in P_{\bar{n}}$
- se $x < p$ allora $x - p + 1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ e $x - p + 1 = r_{\hat{n}} \in [0, 1) = x = p + r_{\hat{n}} - 1 = p \overset{\circ}{+} r_{\hat{n}}$

Supponiamo ora che P sia misurabile, e quindi P_n è misurabile. Allora $\mu(P) = \mu(P_n)$

$$\begin{aligned} 1 = \mu([0, 1)) &= \mu\left(\bigcup P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P) \end{aligned}$$

quindi la serie di termini costanti o è zero, o diverge, il che è assurdo. Quindi l'insieme non è misurabile.

Ricordiamo che una funzione è misurabile quando $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}$. La funzione $1_{\mathbb{Q}}$ è misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}} d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0$$

Teorema

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrabile. Allora

1. f è misurabile secondo Lebesgue;

2. f è Lebesgue-integrabile;
- 3.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mu$$

Proof

Sia f misurabile. Vogliamo vedere se

$$\int_{[a,b]} |f| d\mu < \infty$$

Ma

$$\int_{[a,b]} |f| d\mu \leq \int_{[a,b]} M d\mu = M(b-a)$$

Siccome f è R-integrabile, sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$, esiste una partizione P di $[a, b]$ tale che

$$|S(f, P) - s(f, P)| < \varepsilon$$

TODO: usare i simboli di integrale superiore e inferiore. Ricordiamo che

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

Prendiamo

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^n m_i 1_{(x_{i-1}, x_i]}$$

e

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^n M_i 1_{(x_{i-1}, x_i]}$$

Una prende l'inf e l'altra prende il sup, quindi $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$. Allora

$$S(f, P) = \int_{[a,b]} \varphi_2 d\mu, \quad s(f, P) = \int_{[a,b]} \varphi_1 d\mu$$

Quindi possiamo rimpiazzare la condizione con gli integrali di Lebesgue

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_2 d\mu - \int_{[a,b]} \varphi_1 d\mu \right| < \varepsilon$$

Al posto di ε prendiamo $1/n$. Per ogni n ci saranno le funzioni semplici $\varphi_1^n \leq f \leq \varphi_2^n$. Possiamo anche fare in modo che $\varphi_1^n \leq \varphi_1^{n+1} \leq f \leq \varphi_2^{n+1} \leq \varphi_2^n$. Chiaramente $\{\varphi_1^n\}$ e $\{\varphi_2^n\}$ sono monotone e quindi convergono a $\bar{\varphi}_1$ e $\bar{\varphi}_2$, quindi $\bar{\varphi}_1 \leq f \leq \bar{\varphi}_2$. Vale sempre che $|\varphi_1^n|, |\varphi_2^n| \leq M$ sono limitate da qualche costante, ma allora possiamo applicare il teorema della convergenza dominante

$$\int_{[a,b]} (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1) d\mu = 0$$

ma quindi siccome l'integranda $\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$ è non negativa, allora deve essere quasi ovunque uguale a zero, oppure che le due sono uguali quasi ovunque, e siccome $\bar{\varphi}_1 \leq f \leq \bar{\varphi}_2$, allora $\bar{\varphi}_2 = f = \bar{\varphi}_1$

quasi ovunque. Allora, siccome \mathcal{M} è completa, f è misurabile. Il terzo punto è immediato in quanto l'integrale rimane monotono e quindi

$$\int_{[a,b]} \bar{\varphi}_1 d\mu \leq \int_{[a,b]} f d\mu \leq \int_{[a,b]} \bar{\varphi}_2 d\mu$$

ma il primo è uguale all'ultimo. Per definizione di integrale di Riemann,

$$\int_{[a,b]} \bar{\varphi}_2 d\mu$$

è l'integrale di Riemann di f , e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mu$$

Teorema

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ misurabile tale che f sia R-integrabile in $[a, c]$ per $c > a$. Allora,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx = \int_{[a, +\infty)} f d\mu$$

L'ipotesi garantisce che l'integrale esiste per ogni c . Siccome la funzione è positiva, l'integrale è monotono crescente (potrebbe essere $+\infty$). Quindi, nel caso dell'integrale di Lebesgue non è necessario usare il limite per estendere l'integrale nell'intervallo illimitato, a differenza dell'integrale di Riemann.

Proof

Consideriamo una generica successione $c_n \rightarrow \infty$ e consideriamo

$$f_n(x) = f(x)1_{[a, c_n]}$$

Chiaramente $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ è monotona crescente. Inoltre, $f_n \rightarrow f$ in $[a, +\infty)$. Usiamo il teorema della convergenza monotona che si dice

$$\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu &= \lim_n \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a, c_n]} d\mu \\ &= \lim \int_{[a, c_n]} f d\mu \\ &= \lim \int_a^{c_n} f d\mu \\ &= \lim \int_a^{c_n} f(x) dx \\ &= \lim \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a, +\infty)} d\mu \\ &= \int_{[a, +\infty)} f d\mu \end{aligned}$$

Esempio

La funzione

$$\frac{\cos \pi x}{x} \notin L^1((1, +\infty))$$

Una funzione è integrabile secondo Lebesgue se e solo se lo è il suo modulo. Possiamo anche utilizzare il fatto che

$$\int_{\bigcup E_n} f d\mu = \sum_n \int_{E_n} f d\mu$$

per insiemi E_n disgiunti se f è positiva, come in questo caso. Consideriamo quindi

$$[1, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k+1)$$

che sono disgiunti. E quindi

$$\begin{aligned} \int_{[1, +\infty)} \frac{|\cos \pi x|}{x} d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k, k+1)} \frac{|\cos \pi x|}{x} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{k+1} dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 |\cos \pi x| dx = +\infty \end{aligned}$$

che diverge. Questa funzione non è integrabile secondo Lebesgue ma lo è secondo Riemann.

Esempio

Studiare, al variare di α , quando

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin \pi x}{(\ln x) \ln(1 + \sqrt{x})} \in L^1((0, +\infty))$$

Abbiamo dei problemi in $x = 0, 1, +\infty$. In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{C}{x^{-\alpha - \frac{1}{2}} \ln x}$$

quindi è integrabile per $\alpha > -3/2$. In un intorno di 1 abbiamo

$$f \sim C \frac{\pi x}{\ln x}$$

che ha limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} Cx \cos(\pi x) = 0$$

quindi la nostra funzione è sempre integrabile in un intorno di 1. In un intorno di infinito abbiamo la maggiorazione

$$|f| \leq \frac{Cx^\alpha}{\ln^2(x)}$$

siccome per x grande togliamo il $+1$. Quindi la funzione è del tipo

$$\frac{C}{x^{-\alpha} \ln^2 x}$$

che è integrabile per $\alpha \leq -1$. Quindi la funzione è integrabile per $-3/2 < \alpha \leq -1$. Dobbiamo tuttavia capire che cosa succede se $\alpha \leq -1$, siccome abbiamo usato una maggiorazione. Dividiamo l'integrale in diversi integrali secondo il periodo

$$\begin{aligned} \int_{a=2}^{+\infty} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x) \ln(1 + \sqrt{x})} dx &= \sum_{k=2}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x) \ln(1 + \sqrt{x})} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{-\alpha} \ln(k+1) \ln(1 + \sqrt{k+1})} \int_0^1 |\sin \pi x| dx \end{aligned}$$

dove $a = 2$ è quasi arbitrario. Della parte periodica sappiamo che l'integrale è costante, del resto della funzione abbiamo preso il minimo. Cominciamo guardando $-1 \leq \alpha \leq 0$. Il termine ora ha forma

$$\frac{1}{k^{-\alpha} \ln^2 k}$$

allora diverge per $\alpha > -1$. In conclusione, la funzione è integrabile se e solo se

$$-\frac{3}{2} < \alpha \leq -1$$

Quindi per $\alpha \leq -1$ abbiamo fatto una maggiorazione, mentre per il resto abbiamo fatto una minorazione.

Esempio

Studiare quando

$$f(x) = \frac{\sin^2 x^2}{x^\alpha} \in L^1((0, +\infty))$$

al variare di α . Abbiamo problemi in $x = 0, +\infty$. In un intorno di 0 abbiamo

$$f \sim \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

quindi è integrabile per $\alpha < 5$. In un intorno di infinito notiamo che

$$f \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

quindi è integrabile se $\alpha > 1$. Dobbiamo tuttavia studiare il caso $\alpha \leq 1$. Dobbiamo cambiare la variabile in maniera tale da fare diventare la funzione periodica $x^2 = t$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} dt &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} dt \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k+1)\pi]^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^\pi \sin^2 t dt \end{aligned}$$

che non è integrabile $\frac{\alpha+2}{2} \leq 1 \iff \alpha \leq 1$. Quindi, $f \in L^1((0, +\infty))$ se e solo se $1 < \alpha < 5$.

Esempio

Studiare quando

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}} \in L^1((0, +\infty))$$

al variare di α . Abbiamo problemi ad infinito ed sicuramente illimitata in quanto il seno si annulla periodicamente. Tuttavia, i punti critici periodici dipendono solo da

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\alpha}}$$

che è integrabile per $\alpha > -2/3$. Guardiamo ora cosa succede in un intorno di $k\pi$

$$\frac{1}{|x - k\pi|^\alpha} \sim f \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

Dobbiamo fare uno sviluppo per studiare il seno negli intorni di $k\pi$.

$$\sin(x) = 0 \pm (x - k\pi) + o((x - k\pi))$$

quindi si comporta come

$$\frac{1}{|x - k\pi|^{1/3}}$$

che è integrabile. Quindi, non ci sono problemi di integrabilità in tali punti per quel pezzo della funzione. In un intorno di infinito

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f| d\mu &\geq \int_\pi^\infty |f| d\mu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{(k\pi)^\alpha}{1+(k\pi)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} dx \end{aligned}$$

quindi il carattere è lo stesso di

$$\frac{1}{k^{2-\alpha}}$$

che diverge per $\alpha \geq 1$. Analogamente minoriamo

$$\leq \sum_{k=1}^\infty \frac{((k+1)\pi)^\alpha}{1+\pi^2(k+1)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$

che converge per $\alpha < 1$. Quindi, $f \in L^1 \iff -2/3 < \alpha < 1$.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} dx$$

Calcoliamo il limite (per $x > 0$) delle funzioni che stiamo integrando

$$\lim_n \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e^{-2x} & x > 1 \end{cases}$$

il caso $x = 1$ non ci interessa in quanto per ciò che concerne l'integrale un singolo punto è irrilevante. Vogliamo applicare il teorema di convergenza dominante. Vogliamo trovare una maggiorante integrabile g . Per $x \in (0, 1)$ possiamo usare

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq e^x + 1$$

Invece, per $x \in (1, +\infty)$

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq \frac{e^x}{x^n e^{2x}} + \frac{x^n}{x^n e^{2x}} = \frac{e^{-x}}{x^n} + e^{-2x} \leq e^{-x} + e^{-2x}$$

Quindi,

$$f_n \leq \begin{cases} e^x + 1 & x \in (0, 1) \\ e^{-2x} + e^{-x} & x > 1 \end{cases}$$

allora il limite degli integrali è l'integrale del limite

Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} dt$$

Il problema è l'intervallo di integrazione, ma possiamo sistemarlo

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} dt = \lim_n \int_0^\infty \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} 1_{[0,n]} dt$$

Il limite è dato da

$$\lim_n f_n(t) = \begin{cases} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Quindi per dimostrare che l'integrare è nullo dobbiamo trovare una maggiorante integrabile. Potrei maggiorare con una costante

$$\frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} \leq \frac{C}{t^2 \sqrt{1+t^3}}$$

che tuttavia non è integrabile quando t è piccolo. Consideriamo allora il termine

$$\frac{n^2}{t^2} e^{-n/t} = y^2 e^{-y}$$

con $y = n/t$. Di tale funziona, controlliamo se è veramente limitata superiormente, ha un massimo

$$2ye^{-y} - y^2 e^{-y} = ye^{-y}(2 - y)$$

Quindi è sempre limitata da $4e^{-2}$

$$\left(\frac{n^2}{t^2} e^{-n/t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \leq \frac{4e^{-2}}{\sqrt{1+t^3}}$$

che è integrabile sia in zero che in infinito.

Lo spazio di probabilità è una misura $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ dove \mathcal{B} è la misura generata dagli aperti (di Borel), quindi $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ in quanto gli aperti sono nelle σ -algebra di Lebesgue. Si può mostrare che la misura di Lebesgue è strettamente contenuta in \mathcal{M} ma è più complicato. La misura ha la proprietà che $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$. Se prendiamo $x \in \mathbb{R}$, $\delta_x(\mathbb{R}) = 1$ (misura di Dirac).

Costruiamo una funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tale che

$$F_{\mathbb{P}}(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Se prendiamo $\mathbb{P} = \delta_x$, allora F_{δ_x} vale 1 per $x \geq 1$, altrimenti 0.

Prendiamo ora $\mathbb{P} = \mu(A \cap [0, 1])$ che viene chiamata la misura di Lebesgue concentrata in 1. Scriviamo

$$F_{\mathbb{P}}(x) = \mu((-\infty, x] \cap [0, 1])$$

fino a zero, la funzione è nulla in quanto l'intersezione è vuota. La funzione è 1 per $x \geq 1$ e una retta in $[0, 1]$. Tale funzioni ha delle proprietà molto importanti:

1. $x < y \implies F(x) \leq F(y)$
- 2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Per dimostrare che il limite tende ad 1 prendiamo una successione $x_n \rightarrow \infty$ e consideriamo gli intervalli $I_n = (-\infty, x_n]$. Abbiamo che $I_n \subseteq I_{n+1}$ e

$$\bigcup I_n = \mathbb{R}$$

quindi la probabilità (misura) dell'unione è data dal limite

$$\mathbb{P}\left(\bigcup I_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(I_n) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \lim_n F(x_n) = 1$$

3. *continua da destra*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

Una funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ che soddisfa (1), (2), (3) è detta una funzione di distribuzione (anche funzione di ripartizione della probabilità \mathbb{P}). Sia dunque F una tale funzione. Allora esiste una probabilità \mathbb{P} su \mathbb{R} tale che $F = F_{\mathbb{P}}$, cioè partendo da \mathbb{P} posso ritrovare la stessa F . Quindi, avere una probabilità o una funzione di distribuzione è la stessa cosa. Per costruire tale probabilità prendiamo intervalli $I = (a, b]$ e diciamo che la lunghezza di tale intervallo relativa alla funzione la calcolo così:

$$l_F(I) = F(b) - F(a)$$

e poi costruiamo

$$\mu_F^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l_F(I_n), E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è F -misurabile se

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \mu_F^*(A) = \mu_F^*(A \cap E) + \mu_F^*(A \cap E^c)$$

esattamente come prima. Se E è F -misurabile allora definiamo

$$\mu_F(E) = \mu_F^*(E)$$

che in realtà è una probabilità, la cui funzione di distribuzione è quella da cui siamo partiti.

4 Misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n

Consideriamo ora un insieme della forma (che chiamiamo per semplicità rettangolo)

$$J = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definiamo l'area come

$$\text{area}_n(J) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Consideriamo quindi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e definiamo la misura n-dimensionale

$$\mu_n^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{area}_n(J_h), E \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} J_h \right\}$$

Analogamente abbiamo le:

1. Proprietà di μ_n^*
2. Definizione di insieme misurabile
3. Gli insiemi misurabili sono una σ -algebra.
4. Tale σ -algebra contiene gli aperti.
5. Se $E \in \mathcal{M}_n$, allora definiamo

$$\mu_n(E) = \mu_n^*(E)$$

che è la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n

è la stessa cosa ma siamo partiti dall'area piuttosto che dalla lunghezza. Quindi, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ è l'oggetto con cui abbiamo a che fare, e abbiamo quindi la teoria dell'integrazione.

Una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, cioè una funzione integrabile in \mathbb{R}^n .

Per calcolare un integrale n -dimensionale, vogliamo ricondurci al caso unidimensionale. Abbiamo allora il

Teorema Teorema di Fubini

Sia $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e integrabile.

1. $f_x(y): \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^k$.
- 2.

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_x(y) d\mu_{n-k}(y)$$

è definita quasi ovunque, è integrabile in \mathbb{R}^k .

- 3.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^k} G(x) d\mu_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x, y) d\mu_{n-k}(y) \right) d\mu_k(x) \end{aligned}$$

bisogna tuttavia capire quando la funzione è integrabile.

Teorema Teorema di Tonelli

Sia $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow [0, +\infty)$ misurabile. Allora

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_x(y) d\mu_{n-k}(y)$$

(che potrebbe assumere valore infinito) è misurabile in \mathbb{R}^k e

$$\int_{\mathbb{R}^k} G(x) d\mu_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n$$

È importante notare che la funzione debba essere positiva. Esempio con i quadratini ± 1 , gli integrali unidimensionali fanno zero ma l'integrale bidimensionale non è integrabile. Se prendiamo il valore assoluto, gli integrali unidimensionali fanno 2, e l'integrale doppio diverge a $+\infty$, che è corretto nel caso di $|f|$.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{\ln(e^{xt} + 1)}{tx(t^2 + e^{1/x})} dt$$

Per trattare il caso continuo basta considerare qualsiasi successione $x_n \rightarrow +\infty$ e calcolare

$$\lim_n \int_1^\infty \frac{\ln(e^{x_n t} + 1)}{tx_n(t^2 + e^{1/x_n})} \chi_{[1, x_n]} dt$$

Calcoliamo il limite quando t è fissato

$$f_n(t) \rightarrow \frac{1}{t^2 + 1}$$

in quanto $t > 0$. Quindi, l'integrale è pari a

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1 + t^2}$$

Osserviamo che $\ln(e^{xt} + 1) \leq \ln(e^{xt} + e^{xt}) = xt + \ln(2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(e^{xt} + 1)}{xt(t^2 + e^{1/x})} &\leq \frac{xt + \ln 2}{xt(1 + t^2)} = \frac{1 + \frac{\ln 2}{xt}}{1 + t^2} \\ &\leq \frac{2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

che è integrabile

Esercizio

Dopo aver mostrato che esiste $C > 0$ tale che

$$\frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

per $x \in (0, 1)$, calcolare

$$\lim_n \int_0^1 \frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} dx$$

La maggiorazione è integrabile in un intorno di zero e quindi l'integrale è uguale a

$$\int_0^1 \left(\lim_n \frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

Per dimostrare la maggioranza vogliamo

$$\frac{n^3 x \sqrt{x}}{(1 + nx)^n} \leq C$$

quindi verifichiamo che abbia un massimo studiando quindi la funzione

$$g_n(x) = \frac{x \sqrt{x}}{(1 + nx)^n}$$

Abbiamo che $g_n(0) = 0$ e $g_n(1) = \frac{1}{(1+n)^n}$. Calcoliamo la derivata del numeratore per vedere dove si annulla

$$\frac{d}{dx}(g'_n(x) \cdot (1 + nx)^n) = \sqrt{x}(1 + nx)^{n-1} \left[\frac{3}{2}(1 + nx) - n^2 x \right]$$

la derivata di annulla in

$$x = \frac{3}{2n^2 - 3n} \rightarrow 0$$

quindi vi è un massimo e

$$\frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} \leq \frac{n^3 \left(\frac{3}{2n^2 - 3n} \right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{3}{2n - 3} \right)^n} \leq \lim \dots$$

il denominatore ammette limite (di forma esponenziale) e pure il numeratore, quindi ammette limite ed è quella la costante.

Esercizio

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2}$$

1. Determinare per quali α la serie converge in \mathbb{R} : Abbiamo che

$$\frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2} \sim \frac{C}{n^{2-\alpha}}$$

quindi converge per $\alpha < 1$.

2. Determinare per quali α la somma è integrabile in \mathbb{R} : Notiamo che le funzioni sono dispari, quindi se prendiamo il modulo otteniamo una funzione pari. Possiamo quindi considerare $x \geq 0$. Per il teorema della convergenza monotona (di funzioni positive) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

che converge se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio

Consideriamo

$$\sum \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2}$$

Mostrare che converge uniformemente in \mathbb{R} (non fatto qui). Mostriamo che $S \in L^1(\mathbb{R})$. Notiamo che il termine è una funzione dispari, quindi anche S , e l'integrabilità è simmetrica. Quindi dobbiamo studiare

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2} dx &= \sum \int_0^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^{\infty} x e^{-nx^2} dx \\ &= \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

siccome la funzione è positiva e le somma parziali sono positive possiamo scambiare integrale e serie. Quindi, la serie converge in quanto è maggiorata da una serie convergente.

Esercizio

Studiare

$$\sum \ln(1 + x^{2n})$$

iniziamo con la convergenza puntuale. Essa converge in $E = (-1, 1)$. Studiamo ora l'integrabilità.

I termini e la somma sono funzioni pari positivi.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum \ln(1+x^{2n}) dx &= \sum \int_0^1 1+x^{2n} dx \\ &\leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

siccome $\ln(1+t) \leq t$. Ciò non ci porta da nessuna parte, ma possiamo aggiustarsi. Proviamo a maggiorare con la retta che congiunge 0 e $\ln 2$. Inoltre il grafico è concavo, tutte le secanti stanno sotto. $\ln(1+t) \geq \ln 2 t$ in $(0, 1)$.

$$\sum \int_0^1 1+x^{2n} dx \geq \frac{\ln 2}{2n+1}$$

che diverge e quindi la somma non è integrabile.

Esercizio

Sia

$$f(x, y) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$$

e

$$E = \{x^6 + y^4 < 1\}$$

Determinare per quali α vale $f \in L^1(E)$, ovviamente rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale. Possiamo notare che l'insieme è limitata in un cerchio unitario. Se la funzione è limitata e l'insieme, come in questo caso, ha misura finita, allora è integrabile. Dobbiamo controllare se la funzione è integrabile, in tal caso potremmo applicare il Teorema di Fubini. Tuttavia, grazie al teorema di Tonelli, la funzione è positiva e misurabile e quindi l'integrabile è pari alla decomposizione dei due integrali successivi, che hanno valore finito se è integrabile.

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_E d\mu_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_E(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_{E_x}(y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_A \left(\int_{E_x} f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

Chiamiamo la x -sezione $E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\}$. Siccome E_x è spesso vuoto (fuori dall'area), definiamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid E_x \neq \emptyset\}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_E \frac{1}{(1-x)^\alpha} d\mu_2 &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt[4]{1-x^6}}^{\sqrt[4]{1-x^6}} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt[6]{1-y^4}}^{\sqrt[6]{1-y^4}} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx \right) dy\end{aligned}$$

Ma i problemi sono vicino a 1, il resto della funzione è continua e non ci serve per studiare l'integrabilità

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt[6]{1-y^4}} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1-x^6}}{(1-x^6)^\alpha} dx$$

In un intorno sinistro di 1 l'integranda è

$$\frac{\sqrt[4]{1-x^6}}{(1-x^6)^\alpha} \sim \frac{C}{(1-x)^\beta}$$

e in questo caso

$$\beta = \alpha - 1/4$$

siccome

$$1-x^6 = (1-x^3)(1+x^3) = (1-x)(1+x+x^2)(1+x^3) \sim 6(1-x)$$

Quindi la funzione è integrabile per $\alpha < 5/4$.

Esercizio

Studiare l'integrabilità al variare di α di

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^\alpha)(1-y^2)}$$

in

$$E = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0 < 1 - x^2\}$$

che è l'intersezione del primo quadrante con $1 - x^2$. La funzione ha dei problemi vicino a $y = 1$ e nell'origine. La scomposizione degli integrali deve rappresentare tali problemi, quindi usiamo una y -sezione.

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu_2 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} \frac{1}{y^\alpha + x^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2} \cdot \frac{1}{y^{\alpha/2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-y}}{y^{\alpha/2}}\right) dy\end{aligned}$$

In un intorno di zero

$$f \sim \frac{C}{y^{\alpha/2}}$$

quindi deve essere $\alpha < 2$. In un intorno di uno

$$f \sim \frac{\sqrt{1-y}}{(1-y^2)} \sim \frac{C}{y^{1/2}}$$

quindi è integrabile per ogni α .

Esercizio

Studiando per quali $\alpha > 0$

$$f(x, y) = \left(\frac{\sin x}{y} \right)^2$$

è integrabile in

$$E = \{(x, y) \mid x > 0, y > x^\alpha\}$$

I problemi sono per $y \rightarrow 0$ e verso infinito. Integrando la funzione rispetto ad entrambe le variabili.

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu_2 &= \int_0^\infty \int_{x^\alpha}^\infty \left(\frac{\sin x}{y} \right)^2 dy \, dx \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{\sin^2(x)}{y} \right]_{x^\alpha}^\infty dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx \end{aligned}$$

In un intorno di zero

$$\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

ed è quindi integrabile per $\alpha < 3$. In un intorno di infinito

$$\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha > 1$. Per gli altri casi notiamo

$$\begin{aligned} \int_\pi^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\pi(k+1))^\alpha} \int_0^\pi \sin^2(x) dx \end{aligned}$$

che diverge per $\alpha \leq 1$. Alternativamente possiamo partire dall'integrale opposto,

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu_2 &= \int_0^\infty \int_0^{y^{1/\alpha}} \left(\frac{\sin x}{y} \right)^2 dx \, dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{2} y^{1/\alpha} - \frac{1}{4} \sin(2y^{1/\alpha}) \right) dy \end{aligned}$$

In un intorno di infinito è integrabile per $2 - 1/\alpha > 1$ quindi $\alpha > 1$. In un intorno di zero, per guardare l'asintotico, dobbiamo prendere due termini dell'espansione del seno per evitare cancellazione diretta. Quindi alla fine è integrabile per $2 - 3/\alpha < 1$ quindi per $\alpha < 3$. In entrambi i casi è integrabile per $\alpha \in (1, 3)$.

Esercizio

Studiando per quali α

$$f(x, y) = \frac{y^\alpha}{\sqrt{|1-y|} \cdot |x^2 - y^2|}$$

è integrabile in

$$E = \left\{ (x, y) \mid x > 0, 0 < y < \min \left(x^3, \frac{1}{x} \right) \right\}$$

I due moduli sono inutili, il secondo perché l'insieme è sempre sotto la bisettrice. Abbiamo problemi in infinito, $y \rightarrow 1$ e nell'origine. Per integrare dobbiamo dividere l'insieme in due partizioni disgiunte separate per $x = 1$.

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu_2 &= \int_0^1 \int_{y^{1/3}}^{\frac{1}{y}} \frac{y^\alpha}{\sqrt{1-y} \cdot (x^2 - y^2)} dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^\alpha}{\sqrt{1-y}} \cdot \frac{1}{2y} \left(\ln \left(\frac{\frac{1}{y} - y}{\frac{1}{y} + y} \right) - \ln \left(\frac{y^{1/3} - y}{y^{1/3} + y} \right) \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2y^{1-\alpha} \sqrt{1-y}} \ln \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \cdot \frac{y^{1/3} + y}{y^{1/3} - y} \right) dy \end{aligned}$$

In un intorno destro di zero, l'unico punto critico è la seconda frazione del logaritmo. Avremo un confronto asintotico a

$$\sim \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left(\frac{y^{1/3} + y}{y^{1/3} - y} \right) = \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left(\frac{1 + y^{2/3}}{1 - y^{2/3}} \right)$$

Aggiungiamo e togliamo uno al logaritmo nella seguente maniera

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left(\frac{1 - y^{2/3} + 2y^{2/3}}{1 - y^{2/3}} \right) &= \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left(1 + \frac{2y^{2/3}}{1 - y^{2/3}} \right) \\ &\sim \frac{C}{y^{1-2/3-\alpha}} \end{aligned}$$

che è integrabile per $\alpha > -2/3$. In un intorno di 1 abbiamo

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{1-y}} \ln \left(\frac{1-y^2}{y^{1/3}-y} \right)$$

Calcoliamo il limite con l'Hôpital

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{1-y^2}{y^{1/3}-y} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 1} -\frac{2y}{\frac{1}{3}y^{-2/3}-1} = 3$$

Quindi

$$f \sim \frac{C}{(1-y)^{1/2}}$$

che è integrabile per ogni α .

Esercizio

Studia per quali valori di α

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} dt$$

è integrabile in $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_x^{2x} \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} dt \right) dx \\ &= \int_E \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} d\mu_2(x, t) \end{aligned}$$

Siccome la funzione è una successione positiva, per il teorema di Tonelli possiamo scambiare l'ordine di integrazione. Studiamo allora l'insieme E per invertire gli integrali. L'insieme è un cono (fra x e $2x$)

$$\begin{aligned} \int_E \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} d\mu_2(x, t) &= \int_0^\infty \int_{y/2}^y \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} dx dt \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-xt^2}}{t^{\alpha+2}} \right]_{t/2}^t dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+2}} (e^{-t^3/2} - e^{-t^3}) dt \end{aligned}$$

In un intorno di infinito, gli esponenziali si avvicinano a zero più velocemente di ogni potenza, quindi è integrabile per ogni α . In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{1}{t^{\alpha+2}} e^{-t^3/2} (1 - e^{-t^3/2}) \sim \frac{C}{t^{\alpha-1}}$$

quindi è integrabile per $\alpha < 2$.

5 1 aprile

Definizione di spazio metrico, bolle, insiemi aperti, convergenza, successione di Cauchy, spazi metrici completi (per esempio i razionali e $(0, 1)$ sono non completi), insieme limitato.

Spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$. Ogni spazio vettoriale normato è uno spazio metrico dato $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definizione di punto interno, di accumulazione, di frontiera, aperti, chiusi, chiusura di un insieme, punto isolato.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Sono equivalenti:

1. Da ogni successione in K esistono una sottosuccessione convergente ad un punto di K .
Quindi data $\{A_i\}_{i \in I}$ qualsiasi, anche innumerabile, dove A_i sono aperti e

$$\bigcup A_i \supseteq K$$

Allora esistono A_1, A_2, \dots, A_n tali che

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \supseteq K$$

2. Da ogni ricoprimento di K mediante aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito.
3. K è compatto.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Se K è compatto, allora K è chiuso e limitato. Se $\{K_n\}$ è una successione non vuota di compatti tale che

$$K_n \supseteq K_{n+1}$$

Allora

$$\bigcap K_n \neq \emptyset$$

Se $X = \mathbb{R}^n$ con la norma euclidea, allora K chiuso e limitato implica K compatto. In generale non vale. Per la seconda per esempio di insiemi non vuoti non compatti la cui intersezione è vuota abbiamo $[n, \infty)$.

Proof Dimostrazione della seconda

Abbiamo che $x_n \in K_N$ per ogni $n \geq N$. Allora il limite di tale sottosuccessione sta in K_N , in quanto K_N è compatto, e quindi $x \in K_N$ che è vero $\forall N$. Ma questa è la definizione di intersezione, quindi sta nell'intersezione, e quindi non è vuoto.

Definizione Totalmente limitato

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che A è *totalmente limitato* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

in X tale che

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

Osserviamo che

1. per ogni $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ della definizione possono essere presi in A . Supponiamo infatti di avere

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon/2}(x_i)$$

possiamo supporre che

$$A \cap B_{\varepsilon/2}(x_i) \neq \emptyset$$

in quanto le bolle ricoprono A . Quindi, esiste un punto $a_i \in A$ tale che

$$a_i \in B_{\varepsilon/2}(x_i)$$

cioè la distanza $d(a_i, x_i) < \varepsilon/2$. Abbiamo quindi

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(a_i)$$

in quanto queste bolle sono il doppio più grandi e contengono per forza quelle di prima, quindi i punti possono essere scelti in A .

2. Se A è totalmente limitato, allora A è limitato. Infatti possono prendere una bolla centrata su qualsiasi x_i che ha come raggio la somma di tutti i raggi.
3. Se $A \subseteq B$ e B è totalmente limitato, allora A è totalmente limitato.
4. prendiamo $\{x_i\}$ in X che sia di Cauchy. Allora $S = \{x_n\}$ formato dalle immagini di tale successione è totalmente limitato. Se S è finito ciò è banale, prendo una bolla di qualsiasi raggio per ogni punto. Se S è infinito, da un certo punto in poi tutti i punti sono arbitrariamente vicini, quindi in uno di quei punti facciamo una bolla di ε e in quelli prima faccio un numero finito di bolle per ricoprirlo.

Teorema

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. A è totalmente limitato se e solo se da ogni successione in A si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy.

Proof Dimostrazione di un verso

Sia A non totalmente limitato. Mostriamo che posso costruire una sottosuccessione che non è di Cauchy. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\forall \{x_1, \dots, x_n\} \in A$, esiste un elemento di $a \in A$ tale che non è contenuto nella bolla

$$d(a, x_j) \geq \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Scegliamo quindi $\{x_1\}$ ed esiste allora $x_2 \in A$ tale che $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Prendiamo come insieme $\{x_1, x_2\}$. Esiste $x_3 \in A$ tale che $d(x_1, x_3), d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Continuiamo tale processo e otteniamo la successione $\{x_n\}$ dove

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

Chiaramente, tale successione non ha sottosuccessione di Cauchy.

Proposition

Se K è compatto è totalmente limitato.

Possiamo sempre estrarre una sottosuccessione che converge ad un punto di K che è sicuramente di Cauchy.

Sia (X, d) uno spazio metrico con X compatto. Sia

$$\mathcal{C}(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$$

dove f sono continue, che è quindi uno spazio vettoriale. Le funzioni continue quando X è compatto hanno delle proprietà importanti:

1. f è limitata
2. f ha massimo e minimo assoluto. Esiste quindi m tale che $f(m) \geq f(x)$ per $x \in X$. Abbiamo due casi

$$\sup_{x \in X} f(x) = \begin{cases} \infty \\ M \end{cases}$$

Nel secondo caso abbiamo quindi $M \geq f(x)$ e $M - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon)$. Siccome X è compatto abbiamo sottosuccessioni convergenti, costruiamo quindi una sottosuccessione che converge al punto di massimo, quindi tale che

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n)$$

Estraiamo una sottosuccessione $\{x_{n_i}\} \rightarrow m \in X$. Allora, $f(x_{n_i}) \rightarrow f(m) \leq M$ e $M - \frac{1}{n} \rightarrow M$.

3. f è uniformemente continua.

Lo spazio dato è uno spazio vettoriale normale rispetto alla norma infinita, dove il sup è un massimo in quando f è continua. Quindi, data $\{f_n\}$

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

significa che

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

che è equivalente a scrivere

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

per tutte le $x \in X$. In questo spazio la convergenza in norma è quindi pari alla convergenza uniforme.

Inoltre, se $\{f_n\}$ è uniformemente di Cauchy, allora è uniformemente convergente. Quindi \mathcal{C} è uno spazio vettoriale normato completo, anche detto di Banach.

Definizione Spazio di Banach

Uno *spazio di Banach* è uno spazio vettoriale normato completo.

In tale spazio la bolla

$$B = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

è chiusa, limitata ma non compatta.

Nel caso $\mathcal{C}([0, 1])$ consideriamo la successioni di funzioni (a triangolo con tutto il resto nullo) dove il triangolo si sposta verso 1 e sono disgiunti, e la base sempre più piccola. Questa è una successione nella bolla in quanto il fatto che la norma infinita sia 1 implica che le funzioni stiano fra -1 e 1 . Se prendiamo la differenza di due f_n e f_m abbiamo un triangolo sopra e uno sotto. La norma di tale differenza è sempre 1

$$\|f_n - f_m\|_\infty = 1$$

quindi tale successione non è di Cauchy. Quindi non è nemmeno totalmente limitato.

Esercizio

Per quali α

$$F(x) = \int_{x+1}^{e^x} \frac{y \log y}{(y^2 - 1)^\alpha} dy \in L^1((0, +\infty))$$

Siccome $x > 1$ e pure e^x il logaritmo è positivo. Pure il denominatore è positivo e quindi l'integrabile è positivo. Controlliamo quindi l'integrabilità

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(x) dx &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{x+1}^{e^x} \frac{y \log y}{(y^2 - 1)^\alpha} dy \right) dx \\ &= \int_A \frac{y \log y}{(y^2 - 1)^\alpha} \mu_2 \end{aligned}$$

L'insieme A ha la forma dell'area fra le due curve $x + 1$ e e^x . Invertendo l'integrale otteniamo

$$\int_1^\infty \int_{\log y}^{y-1} \frac{y \log y}{(y^2 - 1)^\alpha} dx dy = \int_1^\infty \frac{y \log y}{(y^2 - 1)^\alpha} (y - 1 - \log y) dy$$

In un intorno di infinito abbiamo

$$g \sim \frac{1}{y^{2\alpha-2}}$$

quindi è integrabile per $\alpha > 3/2$. In un intorno di 1 abbiamo il termine $y^2 - 1$ che tende a zero come $y - 1$ in quanto $y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1)$. Il termine della parentesi tende a zero come $(y - 1) - (y - 1)$ e quindi come $(y^2 + 1)/2$ per evitare cancellazione diretta.

$$g \sim \frac{C}{(y - 1)^{\alpha-3}}$$

che converge per $\alpha < 4$.

Esercizio

Determinare l'integrabilità di

$$f = \frac{z}{\sqrt{x}(1 - 2y)}$$

è integrabile in

$$E = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + 2y + z^2 < 1\}$$

Abbiamo una prima idea di scomposizione

$$\int_E f d\mu_3 = \int_A \left(\int_{E_2} f dx dy \right) dz$$

Siccome l'insieme E è simmetrico rispetto a z allora l'integrale è zero, dobbiamo tuttavia guardare se è integrabile. In ogni caso basta integrarlo con z fra 0 e 1. Sia A l'insieme dove l'integrale non è vuoto. Integriamo allora solo dove la sezione non è nulla, cioè per $0 < z < 1$. Chiamiamo E^+ tale insieme

$$\begin{aligned} \int_{E^+} f d\mu_3 &= \int_0^1 \left(\int_{E_2} \frac{z dx dy}{\sqrt{x}(1 - 2x)} \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z^2} \int_0^{\frac{1-x-z^2}{2}} f dy dx \right) dz \end{aligned}$$

Dobbiamo ora scegliere un ordine di integrazione facile

$$\begin{aligned} \int_{E^+} f d\mu_3 &= \int_A \int_{E_x} f dy dz dx \\ \int_{E^+} f d\mu_3 &= \int_A \int_{E_{(x,y)}} f dz dx dy \end{aligned}$$

Scegliamo quest'ultimo. Abbiamo la $x - y$ -sezione che sono

$$\begin{aligned} E_{(x,y)} &= \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in E^+\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \mid 0 < z < \sqrt{1 - x - 2y}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \mid E_{(x,y)} \neq \emptyset\} \\ &= \{(x, y) \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge x + 2y < 1\} \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$\int_A \frac{1 - x - 2y}{\sqrt{x}(1 - 2x)} dx dy$$

Definizione Sottoinsieme equicontinuo

Un sottoinsieme $\mathcal{F}(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{R}\} \subseteq C(K)$ del sottospazio normato delle funzioni continue su spazio metrico K è detto *equicontinuo* se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in K, d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$$

Analogamente,

Definizione Sottoinsieme equilipschitziano

Un sottoinsieme $\mathcal{F}(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{R}\} \subseteq C(K)$ del sottospazio normato delle funzioni continue su spazio metrico K è detto *equilipschitziano* se $\exists M > 0$ tale che

$$\forall x, y \in K, |f(x) - f(y)| \leq M d(x, y), \forall f \in \mathcal{F}$$

Proposition

Se \mathcal{F} è equilipschitziano, allora è equicontinuo.

Esempio

Fra due spazi di Banach X, Y , $T: X \rightarrow Y$ è equilipschitziano se esiste M tale che

$$\|T_x - T_y\|_Y \leq M \|x - y\|_X$$

Esempio

Le funzioni $f_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

è un insieme equilipschitziano. Infatti $f'_n = \cos(nx)$ e quindi $|f'_n| \leq 1$, e quindi

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{\sin(ny)}{n} \right| \leq |x - y|$$

Teorema Teorema di Ascoli - Arzelà

Sia $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ chiuso e limitato su un compatto metrico, non vuoto. Allora \mathcal{F} è compatto se e solo se è equicontinuo.

Proof Teorema di Ascoli - Arzelà

(\Rightarrow) \mathcal{F} è compatto, quindi è totalmente limitato. Quindi, $\forall \varepsilon > 0, \exists \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ dove $f_i \in \mathcal{F}$ tale che

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(f_i)$$

Le funzioni f_i sono tutte uniformemente continue, quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0$ tale che per $d(x, y) < \delta_i$ allora

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

per $x, y \in K$. Se prendiamo il più piccolo dei delta

$$\delta = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\delta_i\}$$

allora vale per tutti, quindi $\forall \varepsilon > 0$ se $d(x, y) < \delta$ vale

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

$f \in \mathcal{F}$ e quindi appartiene almeno ad una bolla, quindi $\exists f_j$ tale che

$$\|f - f_j\|_\infty < \varepsilon$$

Quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

(\Leftarrow) \mathcal{F} è equicontinuo. Vogliamo mostrare che data $\{f_n\}$ in \mathcal{F} allora esiste una sottosuccessione convergente (in maniera uniforme) ad un elemento di \mathcal{F} . Basta mostrare che $\{f_n\}$ abbia una sottosuccessione di Cauchy in quanto:

1. implica che la sottosuccessione converge;
2. il limite è in \mathcal{F} perché è chiuso.

Sia quindi una successione $\{f_n\}$ in \mathcal{F} . Siccome K è compatto, è totalmente limitato, quindi $\forall \varepsilon > 0$ esistono $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(k_i)$$

Mostriamo ora che $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione puntualmente convergente in $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$. Vediamo che siccome \mathcal{F} è limitata per una qualche M

$$|f_n(k_1)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M$$

Come tutte le successioni limitate, contiene una sottosuccessione convergente f_n^1 su k_1 . Adesso guardiamo

$$|f_n^1(k_2)| \leq M$$

che quindi contiene una sottosuccessione convergente f_n^2 su k_2 , ma converge anche in k_1 . L'ultimo passaggio è la sottosuccessione $f_n^m = g_n$ converge per tutti i k_i , in quanto sottosuccessione di tutti i precedenti. Dalle ipotesi $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $d(x, y) < \delta$ allora

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

per tutte le $f \in \mathcal{F}$. Allora $\exists \{k_1, \dots, k_m\}$ tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_\delta(k_i)$$

dove abbiamo scelto δ come ε . Il fatto che g_n converga su k_1, k_2, \dots, k_m significa che $\forall \varepsilon > 0$ esiste N_j tale che

$$\forall n, m \geq N_j, |g_n(k_j) - g_m(k_j)| < \varepsilon$$

Prendiamo allora il più grande di tutti

$$N = \max_{i=1,2,\dots,N} \{N_j\}$$

che vale per tutti quindi

$$\forall n, m \geq N, |g_n(k_j) - g_m(k_j)| < \varepsilon$$

Esiste un certo k_j tale che $d(x, k_j) < \delta$ per la bolla. Adesso scriviamo

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(k_j)| + |g_n(k_j) - g_m(k_j)| + |g_m(k_j) - g_m(x)| \\ &= 3\varepsilon \end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo sono piccoli per definizione di equicontinuità, mentre quello in mezzo perché g_n converge per tutti i k_i . Siccome questo vale (per N sufficiente grande) per ogni $x \in K$, e quindi

$$\|g_n - g_m\|_\infty < 3\varepsilon$$

che è la successione uniformemente di Cauchy.

Esempio

Consideriamo $C([0, 1])$ e $f_n(x) = x^n$, converge puntualmente a

$$\begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ma per converge uniformemente il limite dovrebbe essere continuo, e quindi non converge uniformemente in quanto tutte le sottosuccessioni convergono alla stessa funzione.

6 Equazioni differenziali

Definizione Equazione differenziale di primo ordine in forma normale

Una equazione differenziale del primo ordine in forma normale è

$$y' = f(x, y)$$

con $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dove A è aperto, f continua.

Una soluzione di tale equazione è una coppia (φ, I) dove I è un intervallo e $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. $(t, \varphi(t)) \in A$ per $t \in I$;
2. $\varphi \in C^1(I)$;
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ per $t \in I$.

Un problema di Cauchy ha forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con una condizione iniziale $(x_0, y_0) \in A$ tale che valgano le 3 precedenti condizioni e, ulteriormente, $\varphi(x_0) = y_0$.

Definizione

Diciamo che f definita come sopra è *lipschitziana in y uniformemente rispetto ad x nel punto (x_0, y_0)* se $\exists L > 0$ ed esiste un intorno $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ e un intorno $J_\beta = [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

per ogni $y_1, y_2 \in J_\beta$ e per ogni $x_1, x_2 \in I_\alpha$.

Teorema Teorema fondamentale

Se f è lipschitziana in (x_0, y_0) allora esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy.

Con unicità si intende che date due soluzioni, per esempio $(e^x, [-1, -1])$ e $(e^x, [-2, -2])$, dove sono definite entrambe (cioè l'intersezione) in tali punti devono coincidere.

Per dimostrarlo usiamo l'operatore

$$T_\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

Basta derivare questa espressione per mostrare l'equivalenza con il problema di Cauchy al punto fisso. La parte di destra è derivabile in quanto la è una funzione integrale di una funzione continua f .

Teorema Teorema di Peano

Ogni problema di Cauchy ha almeno una soluzione.

Notiamo che avere più soluzioni significa che siano diverse dove sono entrambe definite.

Definizione Compattezza relativa

Uno spazio $D \subseteq$ metrico è relativamente compatto se la sua chiusura è compatta.

Teorema Teorema di Schauder

Sia X uno spazio di Banach e prendiamo $C \subseteq X$ chiuso, limitato, non vuoto, convesso. Diciamo che un operatore $T: C \rightarrow C$ è compatto se l'immagine $T(C)$ è relativamente compatta. Se T è continua e compatta allora T ha almeno un punto fisso.

Applichiamo questo teorema all'operatore integrale per mostrare l'esistenza di un punto fisso.

Proof Teorema di Peano

Notiamo che $I_\alpha \times J_\beta \subseteq A$ è un rettangolo compatto. Siccome la funzione è continua in A sul rettangolo è anche uniformemente continua. Il massimo è

$$M = \sup_{(x,y) \in I_\alpha \times J_\beta} |f(x,y)|$$

quindi è limitata. Inoltre è uniformemente continua, quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I_\alpha \times J_\beta$

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

oppure qualsiasi norma e quindi sono equivalenti. Scegliamo ora

$$0 \leq \delta \leq \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\}$$

e consideriamo $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e

$$\begin{aligned} C &= \{\varphi \in \mathcal{C}(I_\delta) \mid \|\varphi - y_0\|_\infty \leq \beta\} \\ &= B_\beta(y_0) \end{aligned}$$

y_0 diventa la funzione costante. Quindi tutte le funzioni la cui distanza da y_0 è minore di β . Tale insieme è chiuso, limitato, convesso, e non vuoto. La concessità è data dal fatto che stiamo trattando una bolla in uno spazio normato, quindi (con bolle centrate in zero)

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \leq r$$

Abbiamo ora la mappa $T: C \rightarrow \mathcal{C}(I_\delta)$ tale che dato $\varphi \in C$ vale

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

1. $T: C \rightarrow C$. Infatti

$$|T\varphi(x) - y_0| \leq \dots \leq \beta$$

2. T è uniformemente continua, quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty < \delta \implies \|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_\infty < \varepsilon$$

Abbiamo

$$\|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| dt \right|$$

Il modulo dentro l'integrale è perché non sappiamo se x è prima o dopo x_0 . Prendendo $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \bar{\delta}$ dove tale delta è quello dell'inizio allora vale $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ per tutte le $x \in I_\delta$ che implica

$$|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon |x - x_0| < \varepsilon \delta$$

quindi è uniformemente continua.

3. $T(C)$ è relativamente compatto. Notiamo che tale immagine è sicuramente limitata, ma è anche equicontinuo. Possiamo trovare una sottosuccessione di Cauchy convergente a una funzione in $\overline{T(C)}$, che è quindi compatto. Mostriamo quindi che è equicontinuo. Quindi, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in I_\delta$ per $|x_1 - x_2| < \eta$

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall g \in T(C)$$

$$|T\varphi(x_1) - T\varphi(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall \varphi \in T(C)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, \varphi(t)) dt - \int_{x_0}^{x_2} f(t, \varphi(t)) dt \right| &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t, \varphi(t))| dt \\ &\leq M|x_2 - x_1| = M\eta = \varepsilon \end{aligned}$$

prendendo $\eta = \varepsilon/M$

Possiamo quindi applicare il teorema di Schauder, quindi T ha almeno un punto fisso $\bar{\varphi} \in \mathcal{C}(I_\delta)$ tale che $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ e quindi esiste una soluzione di Cauchy.

Dobbiamo ora verificare l'unicità.

7 Esercizi

Esercizio Successioni 1

Per $x > -1$ studia la successione

$$f_n(x) = \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}}$$

- **convergenza puntuale:** controlliamo la convergenza puntuale in $E = (0, +\infty)$. Fissato $x > 0$ studiamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} = 0 = f(x)$$

- **convergenza uniforme:** controlliamo la convergenza uniforme in E . Abbiamo

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right|$$

sostituendo $t = n/x$ otteniamo una funzione simile all'integranda della funzione gamma, che ha un massimo M

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right| &\leq M \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{1}{n\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{M}{n\varepsilon} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Chiaramente il sup si ottiene con il denominatore più piccolo, quindi un ε molto vicino a 0.

- **integrabilità:** mostriamo che $f_n \in L^1$.

$$\int_0^\infty |f_n(x)| dx = \int_0^\infty \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right| dx$$

In un intorno di $+\infty$ abbiamo

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^{5/2}}$$

siccome $\frac{5}{2} > 1$ la funzione è integrabile a infinito. In un intorno di 0^+ maggioriamo

$$f_n(x) \leq \frac{M}{n\sqrt{1+x}} \sim \frac{M}{n}$$

quindi è integrabile per confronto e confronto asintotico.

Esercizio Successioni 1

Data la successione

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x}$$

studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

1. **convergenza puntuale:** studiamo la convergenza puntuale in $(0, +\infty)$. Fissato $x > 0$ abbiamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **convergenza uniforme:** studiamo la convergenza uniforme in $(0, +\infty)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty, E} &= \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} \right| \\ &\leq \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| n^\alpha x e^{n^2 x} \right| \end{aligned}$$

siccome $\arctan(x) \leq x$. Studiamo la derivata della funzione maggiorante $g_n(x)$.

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= n^\alpha e^{-n^2 x} - n^\alpha x e^{-n^2 x} n^2 \\ &= n^\alpha e^{-n^2 x} (1 - xn^2) \end{aligned}$$

Per studiare il segno abbiamo

$$1 - n^2 x \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{n^2}$$

che è un punto di massimo. Chiaramente $g_n(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$, e siccome è sempre positiva, siamo sicuri che tale valore è un punto di massimo. Il massimo vale

$$g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$

Quindi, la norma infinito è sempre minore di

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} \leq \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$

che tende a zero solo quando $\alpha < 2$ (condizione sufficiente ma non necessaria). Cerchiamo ora un limite dal basso

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty, E} &\geq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) e^{-1} \\ &\sim n^{\alpha-2} e^{-1} \end{aligned}$$

che non tende a zero. Quindi la convergenza è uniforme per $\alpha < 2$.

Esercizio Successioni 3

Data la successione

$$f_n(x) = n \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right)$$

1. **stabilire in che insieme vi è convergenza puntuale:** fissato x calcoliamo

$$\lim_n f_n = \lim_n n \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) = x^2$$

in quanto la parentesi è asintotica all'esponente. Allora l'insieme di convergenza puntuale è $E = \mathbb{R}$.

2. **stabilire se la convergenza è uniforme in tale insieme:** fissato x abbiamo

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| n \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) - x^2 \right| = \sup_{x \in (0, +\infty)} |g_n(x)|$$

Studiamo la derivata di $g_n(x)$

$$g'_n(x) = n e^{\frac{x^2}{n}} \frac{2x}{n} - 2x = 2x \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right)$$

Il segno della derivata è lo stesso di x , e $x = 0$ è un punto di minimo.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = \pm\infty$$

quindi non è limitata e la convergenza non è assoluta.

3. **stabilire se la convergenza è uniforme in un intervallo limitato:** sia $[a, b]$ tale intervallo. Dalla forma della funzione, il sup è o in $x = a$ o in $x = b$, quindi

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} \leq \max\{|f(a) - f(b)|, |f(b) - f(a)|\}$$

supponiamo che sia in a

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \left| n \left(e^{\frac{a^2}{n}} - 1 \right) - a^2 \right|$$

per risolvere il limite facciamo un'espansione di MacLaurin fino al secondo ordine

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \left| \frac{a^4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right| \rightarrow 0$$

Quindi, la convergenza è uniforme in un intervallo limitato.

Esercizio Serie 1

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2 + x^2}$$

verifica la convergenza uniforme in \mathbb{R} . Cominciamo studiando la convergenza totale che è più forte, quindi la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x e^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2 + x^2} \right|$$

con $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ otteniamo la forma $f(t) = t e^{-t^2}$ che ha grafico noto, e un massimo M e minimo

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq M \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + x^2} = \frac{M}{n^{3/2}}$$

in quanto il supremum è per $x = 0$. Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge. Quindi la serie converge totalmente e quindi converge anche in maniera uniforme su tutto \mathbb{R} .

Esercizio Serie 2

Conderiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right)$$

1. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo convergenza puntuale: Fissato x , notiamo che per convergere il termine n -esimo deve tendere a zero. Quindi,

$$\lim_n \arctan \left(\frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right) \rightarrow 0$$

se e solo se $\alpha < 2$ (condizione necessaria). Usiamo il criterio del confronto asintotico: l'argomento dell'arcotangente tende a zero e quindi è asintotica al suo argomento. La serie

$$\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

converge se e solo se $\alpha < 1$. Quindi, la serie converge puntualmente per $\alpha < 1$.

2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo convergenza uniforme: è necessario $\alpha < 1$. Cominciamo studiando la convergenza totale, che è più forte. Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \arctan \left(\frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right) \right|$$

Studiamo la derivata del termine

$$f'_n(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right)^2} = -\frac{2xn^\alpha}{n^{2\alpha} + n^2 + x^{2^2}} \geq 0 \iff x \leq 0$$

quindi $x = 0$ è un punto di massimo. Infatti, gli estremi sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) \rightarrow 0$$

Quindi la forma è data da

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = f_n(0) = \arctan(n^{\alpha-2})$$

La serie è quindi a termini positivi e usiamo il confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n^{\alpha-2})$$

che converge se e solo se $\alpha < 1$. Quindi abbiamo convergenza uniforme per $\alpha < 1$. Siccome la convergenza puntuale è per $\alpha < 1$, non vi sono altri α per cui vi è convergenza assoluta.

Esercizio Serie 3

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^{\alpha}+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

1. Valutare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ vi è convergenza puntuale in \mathbb{R} . Studiamo la condizione necessaria di convergenza. Il numeratore tende a zero se e solo se $\alpha > 0$. In tal caso la funzione è assolutamente asintotica a

$$|f_n(x)| \sim \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$

E la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$

converge se e solo se $\alpha > 3/2$ per confronto asintotico. Per $x < 0$, basta notare che $\arctan(t)$ è simmetrica rispetto all'origine, il che implica convergenza puntuale per $\alpha > 3/2$.

2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la somma della serie è continua in \mathbb{R} . Dobbiamo utilizzare il teorema. Dobbiamo trovare per quali α converge totale per applicare il teorema che dice che se f_n è continua in E , allora la sua serie converge uniformemente a $S(x)$ in E e $S(x)$ è continua. Studiamo la convergenza totale in $E = [-a, a]$, $a > 0$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\infty, [-a, a]} &= \sup_{x \in [-a, a]} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^{\alpha}+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &\leq \sup_{x \in [-a, a]} \frac{|x|}{n^{\alpha}+1} 2\sqrt{n} = \frac{2a\sqrt{n}}{n^{\alpha}+1} \sim \frac{C}{n^{\alpha-1/2}} \end{aligned}$$

in quanto $\arctan(t) \leq t$. Ciò implica che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{\alpha-1/2}}$$

che converge se e solo se $\alpha > 3/2$. Quindi per confronto la serie converge totalmente, e quindi uniformemente per $\alpha > 3/2$. Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale e la serie converge puntualmente per $\alpha > 3/2$, abbiamo convergenza uniformemente se e solo se $\alpha > 3/2$. Poiché f_n è continua e la serie converge uniformemente in $[-a, a]$, la serie risulta continua in tale intervallo. Poiché a è arbitrario, possiamo amplificarlo e la serie è continua su tutto \mathbb{R} .

Esercizio

Sia

$$f_n(x) = \int_x^{x+n} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt$$

Studiamo la convergenza puntuale in $x \in (0, \infty)$. Abbiamo problemi per $t \rightarrow 0$ e $t \rightarrow +\infty$. Nel limite abbiamo

$$\int_x^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt$$

Il primo problema accade solo se $0 \in [x, x+n]$. In infinito abbiamo

$$\frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \sim \frac{C}{t^\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha > 1$. In un intorno di zero abbiamo

$$\frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \sim t^{2-\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha < 3$. Quindi converge puntualmente per $\alpha \in (1, 3)$ Per guardare la convergenza uniforme abbiamo

$$\begin{aligned} \sup |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_x^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt - \int_x^{x+n} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt \right| \\ &= \left| \int_{x+n}^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt \right| \\ &\leq \int_{x+n}^\infty \left| \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \right| dt \\ &= \int_{x+n}^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt \\ &\leq \frac{\pi}{2} \int_{x+n}^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt \\ &= \frac{\pi - (x+n)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Abbiamo tolto il valore assoluto perché l'intervallo è definitivamente positivo. La stima dell'errore è uniforme quindi la convergenza è uniforme. Studiamo ora per quali α , il limite di f_n è integrabile in $(0, +\infty)$. Osserviamo che $f_n \geq 0$ e siccome l'intervallo di integrazione cresce, abbiamo che $f_n \leq f_{n+1}$. Applichiamo allora il teorema della convergenza monotona, e

$$\lim_n \int_x^{x+n} f_n d\mu = \int f$$

che è integrabile per $\alpha \in (1, 3)$.

Esercizio

Calcoliamo

$$\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n e^{2x}} dx$$

Abbiamo che

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{1+e^2} & x = 0 \\ \frac{x}{e^{2x}} & x > 1 \end{cases}$$

Per $0 < x \leq 1$

$$f_n(x) \leq 2$$

che è integrabile nella parte limitata del dominio $(0, 1)$. Per $x > 1$ abbiamo

$$f_n(x) \leq \frac{1+x^{n+1}}{x^n e^{2x}} \leq \frac{2x^{n+1}}{x^n e^{2x}} = \frac{2x}{e^{2x}}$$

Usiamo quindi la convergenza dominata

$$\begin{aligned} \lim_n \int_0^{+\infty} f_n dx &= \int_0^{+\infty} \lim_n f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}} dx \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$f(x) = \frac{x^\alpha (1 - \cos^4(\pi x))}{\ln(x) \ln(1 + \sqrt{x})}$$

in $(0, +\infty)$. Usiamo il confronto asintotico in un intorno di zero

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha \cdot 4 \cdot \left(\frac{\pi^2 x^2}{2}\right)}{\ln(x) \ln 2} = C \frac{x^{\alpha+3/2}}{\ln x}$$

che è integrabile per $\alpha > -5/2$. Se $x \rightarrow 1$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{4 \frac{(x-1)^2}{2}}{(x-1) \ln 2} = \frac{2}{\ln 2} (x-1)$$

che è integrabile. Per $x \rightarrow \infty$

$$f(x) \leq \frac{2x^\alpha}{\ln x \ln(1 + \sqrt{x})} \sim 4 \frac{x^\alpha}{\ln^2(x)}$$

che è integrabile per $\alpha \leq 1$. Quindi, la funzione è integrabile per

$$-\frac{5}{2} < x \leq -1$$

Esercizio

Sia $\alpha > 0$ e

$$E_\alpha = \{0 < x < 1 \wedge 1 < y < x^{-\alpha}\}$$

quindi

$$|E_\alpha| = \int_0^1 \int_1^{x^{-\alpha}} dy dx$$

che è finito se e solo se $\alpha < 1$. Data $f(x, y) = \arctan(x/y)$ calcolare

$$\int_{E_\alpha} f(x, y) dx dy$$

Possiamo applicare il teorema di Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha} f(x, y) dx dy &= \int_1^\infty \int_0^{y^{-1/\alpha}} \arctan(x/y) dx dy \\ &= \int_1^\infty \int_0^{y^{-1/\alpha-1}} \arctan(z)y dz dy \\ &= \int_1^{+\infty} y \left(y^{-1/\alpha-1} \arctan(y^{-1/\alpha-1}) - \frac{1}{2} \ln(y^{-2/\alpha-2} + 1) \right) dy \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $z = x/y$. Per $y \rightarrow \infty$, il primo termine

$$y^{-1/\alpha} \arctan(y^{-1/\alpha-1}) \sim y^{-1/\alpha} y^{-1/\alpha-1} = y^{-1-2/\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha > 0$. Per il secondo termine abbiamo

$$y \frac{1}{2} \ln(y^{-2/\alpha-2} + 1) \sim y^{-2/\alpha-1}$$

che è integrabile per ogni $\alpha > 0$. Quindi f è integrabile per $\alpha > 0$.

Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$f(x, y, z) = \frac{\arctan(z)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

nell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < x^2 + y^2 < 1\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Usiamo le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Il determinante della Jacobiana è ρ . Abbiamo quindi la condizione $0 < z < \rho^2$. Per la condizione su ρ notiamo che $0 < \rho^2 < 1$ se e solo se $0 < \rho < 1$. L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\rho^2} \frac{\arctan(z)}{(x^2 + y^2)^\alpha} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} \int_0^{\rho^2} \arctan z \, dz \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} \left[\rho^2 \arctan \rho^2 - \frac{1}{2} \log(1 + z^2) \right]_0^{\rho^2} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{\arctan \rho^2}{\rho^{2\alpha-3}} d\rho - \pi \int_0^1 \frac{\log(1 + \rho^4)}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \end{aligned}$$

In un intorno di zero l'integranda del primo integrale è asintotica a

$$\frac{\arctan \rho^2}{\rho^{2\alpha-3}} \sim \frac{1}{\rho^{2\alpha-5}}$$

che è quindi integrabile se e solo se $\alpha < 3$. Per la seconda integranda, la funzione è asintotica a

$$\frac{\log(1 + \rho^4)}{\rho^{2\alpha-1}} \sim \frac{1}{\rho^{2\alpha-5}}$$

che è come prima. Quindi. È importante notare che grazie alle costanti davanti agli integrali si evita cancellazione diretta. La funzione è integrabile per $\alpha < 3$.

Esercizio

Usando il cambio di variabili $x = \sqrt{\rho \cos \theta}$ e $y = \rho \sin \theta$ determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{(1 + x^4 + y^2)^\alpha}$$

è integrabile in \mathbb{R}^2 e calcolare il valore di tale integrale. La funzione è dispari quindi ci restringiamo al primo quadrante. L'integrale è quindi zero dove esiste. Calcoliamo ora $|\det J\varphi|$. Abbiamo

$$\varphi: \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{\rho \cos \theta} \\ \rho \sin \theta \end{bmatrix}$$

Quindi

$$J\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$|\det J\varphi| = \frac{\rho \cos^2 \theta}{2\sqrt{\rho \cos \theta}} + \frac{\rho \sin^2 \theta}{2\sqrt{\rho \cos \theta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\cos \theta}}$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\rho \cos \theta}}{(1 + \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)^\alpha} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\cos \theta}} d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^\alpha} d\rho d\theta \end{aligned}$$

L'integrale esterno è indipendente e vale quindi $\pi/2$. Per l'integrazione abbiamo problemi in infinito, dove l'integranda è asintotica a

$$\frac{\rho}{(1 + \rho^2)^\alpha} \sim \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}}$$

che è integrabile per $\alpha > 1$.

Esercizio

Calcolare, giustificando la risposta

$$\lim_n \int_{E_n} \log^2 \left(\frac{y}{x} \right) d\mu_2$$

dove

$$E_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n} < xy < 2 \wedge 1 < \frac{y}{x} < 2 \right\}$$

Notiamo che $E_n \subseteq E_{n+1}$ e in termini di funzioni indicatrici $\chi_{E_n} \leq \chi_{E_{n+1}}$ che è quindi monotona crescente. Chiaramente

$$\lim_n \chi_{E_n} = \chi_E$$

dove

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < xy < 2 \wedge 1 < \frac{y}{x} < 2 \right\}$$

Applichiamo quindi il teorema di convergenza monotona

$$\begin{aligned} \lim_n \int_{E_n} \log^2 \left(\frac{y}{x} \right) d\mu_2 &= \lim_n \int_{\mathbb{R}^2} \log^2 \left(\frac{y}{x} \right) \chi_{E_n} d\mu_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \lim_n \log^2 \left(\frac{y}{x} \right) \chi_{E_n} d\mu_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \log^2 \left(\frac{y}{x} \right) \chi_E d\mu_2 \\ &= 2 \int_{E^+} \log^2 \left(\frac{y}{x} \right) d\mu_2 \end{aligned}$$

Cambiamo la variabile $t = xy$ e $u = y/x$. Per calcolare il determinante ci interessa la trasformazione inversa $y = ux$ e $t = ux^2$ che implica $x = \sqrt{t/u}$ e $y = u\sqrt{t/u} = \sqrt{ut}$. Quindi

$$\varphi: \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{t}{u}} \\ \sqrt{ut} \end{bmatrix}$$

la Jacobiana è

$$J\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{u} \frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{u}}} & \frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{u}}} \left(-\frac{z}{u^2} \right) \\ u \frac{1}{2\sqrt{ut}} & t \frac{1}{2\sqrt{ut}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{tu}} & -\frac{\sqrt{t}}{2u^{3/2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{t}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{u}} \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$|\det J\varphi| = \frac{1}{4u} + \frac{1}{4u} = \frac{1}{2u}$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_{E^+} \log \left(\frac{y}{z} \right) d\mu_2 &= \int_0^2 \int_1^2 \log^2(u) \frac{1}{2u} du dt \\ &= \frac{\log^3(2)}{3} \end{aligned}$$

e quindi il limite iniziale è pari al doppio

$$\frac{2}{3} \log^3 2$$

Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} dm(y)$$

Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione è integrabile in $(0, +\infty)$. Per invertire l'ordine di integrazione con il teorema di Tonelli dobbiamo spezzare gli integrali in due insiemi.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{x^2}^{x^4} \frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} dm(y) dx &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} \frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} dx dy + \int_1^\infty \int_{\sqrt[4]{y}}^{\sqrt{y}} \frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} (y^{1/4} - y^{1/2}) dy + \int_1^\infty \frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} (y^{1/2} - y^{1/4}) dy \end{aligned}$$

In un intorno di zero abbiamo

$$\frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} (y^{1/2} - y^{1/4}) \sim \frac{y^{\alpha+1/4}}{y^2} = \frac{1}{y^{7/4-\alpha}}$$

quindi è integrabile per $\alpha > 3/4$. Invece, in un intorno di infinito abbiamo

$$\frac{y^\alpha}{(1+y^3) \arctan^2(y)} (y^{1/2} - y^{1/4}) \sim \frac{1}{y^{5/3-\alpha}}$$

che è integrabile per $\alpha < 3/2$.

Esercizio

Valutare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \int_{x^2}^x \frac{e^{-y} x^\alpha}{(1-t) \log(1+t)} dt$$

è integrabile in

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \wedge y > 0\}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{e^{-y} x^\alpha}{(1-t) \log(1+t)} dt dx dy &= \left(\int_0^\infty e^{-y} dy \right) \left(\int_0^1 \int_x^{x^2} \frac{x^\alpha}{(1-t) \log(1+t)} dt dx \right) \\ &= \int_0^1 \int_t^{\sqrt{t}} \frac{x^\alpha}{(1-t) \log(1+t)} dx dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}} - t^{\alpha+1}}{(1-t) \log(1+t)} \frac{1}{\alpha+1} dt \end{aligned}$$

Abbiamo escluso il caso $\alpha = -1$ per l'integrazione. In un intorno di 1 l'integranda è asintotica a

$$\frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}} - t^{\alpha+1}}{(1-t) \log(1+t)} \frac{1}{\alpha+1} \sim C \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}} (1 - t^{\frac{\alpha+1}{2}})}{1-t} \sim C \frac{1 - (1-x)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x} \sim C$$

con $x = 1 - t$. Quindi è sempre integrabile in un intorno di 1. Invece, in un intorno di zero l'integranda

$$\frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}} - t^{\alpha+1}}{(1-t) \log(1+t)} \frac{1}{\alpha+1} \sim \begin{cases} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{t} & \alpha > -1 \\ \frac{t^{\alpha+1}}{t} & \alpha < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{t^{1-\frac{\alpha+1}{2}}} & \alpha > -1 \\ \frac{1}{t^{-\alpha}} & \alpha < -1 \end{cases}$$

Quindi è integrabile per $\alpha > -1$. Nel caso $\alpha = -1$ l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{-1/2 \log t}{(1-t) \log(1+t)} dt$$

che non è integrabile in un intorno di zero. Quindi $f(x, y)$ è integrabile in E se e solo se $\alpha > -1$.