Probability

Paolo Bettelini

Contents

1 Probabilità

1.1 Costruzione intuitiva

Esempio Approccio classico alla probabilità

Consideriamo un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6 e per il resto indistinguibili. Vogliamo studiare l'esperimento estrazione di una pallina dall'urna. Voglio studiare quale pallina sia più probabile che venga estratta. Vogliamo quindi mettere un ordinamento sull'insieme degli eventi di questo esperimento. Sia Ω l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento. Sia P_i la probabilità di estrarre il numero $i \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$. In questo caso la scelta naturale è $P_i = \frac{1}{6}$ per tutte le $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Notiamo che $\sum P_i = 1$, cioè la probabilità di estrarre un numero da 1 a 6, cioè in questo caso l'evento certo. Questa viene detta additività della probabilità di eventi disgiunti. Inoltre, la probabilità $P_j = 0$ con $j \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Possiamo anche notare che

$$P_i = \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}} = \frac{|\{i\}|}{|N|}$$

In questo caso i casi elementari $\{i\}$ sono equiprobabili.

Esempio Approccio frequentista alla probabilità

Consideriamo l'esperimento lancio di un dado a 6 facce numerate da 1 a 6. Abbiamo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. In questo caso non è detto che gli eventi o i casi elementari siano equiprobabili. Quindi, per assegnare i P_i potremmo lanciare il dado sperimentalmente.

$$P_i^{(k)} = \frac{N_i^{(k)}}{k}$$

con N_i^k è il numero di volte che esce l'evento i su k lanci. Chiaramente questi valori sono variabili, quindi prendiamo

$$P_i = \lim_{k \to +\infty} P_i^{(k)}$$

per $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se il limite esiste. Notiamo che $P_i^{(k)} \in [0, 1]$ e

$$\sum_{i=1}^{6} P_i^{(k)} = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

e prendendo il limite $k \to +\infty$

$$\sum_{i=1}^{6} P_i = 1$$

In entrambi i casi abbiamo quindi le medesime proprietà ma nella seconda le probabilità non coincidono necessariamente.

Esempio Probabilità soggettiva

Consideriamo un torneo di calcio dove tutti giocano contro tutti, in cui partecipano 6 squadre: (1) R. Madrid, (2) M. City, (3) Bayer Monaco, (4) Atalanta, (5) Porto, (6) Nantes. L'esperimento che consideriamo è quello che studia il vincitore del torneo. Abbiamo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'approccio classico richiede casi elementari equiprobabili, e in questo caso non lo sono. L'approccio frequentista richiede di richiedere un torneo molte volte sotto le stesse condizioni, il che è praticamente impossibile. L'idea alternativa è quindi quella di chiedere a due esperti del settore di assegnare le probabilità in maniera coerente alle osservazioni che abbiamo fatto negli altri due approcci. Il primo esperto scegli per esempio

$$P_1 = \frac{1}{4}, P_2 = \frac{1}{4}, P_3 = \frac{1}{5}, P_4 = \frac{1}{5}, P_5 = \frac{1}{10}, P_6 = 0$$

mentre il secondo

$$P_1 = \frac{11}{27}, P_2 = \frac{1}{3}, P_3 = \frac{1}{9}, P_4 = \frac{2}{27}, P_5 = \frac{1}{27}, P_6 = \frac{1}{27}$$

Chiaramente c'è natura soggettiva.

Definizione Probabilità soggettiva

Si definisce probabilità di un evento la misura del grado di fiducia, cioè un numero reale in $[0, 1]$, che in individuo coerente assegna al verificarsi dell'evento considerato, in base alle sue conoscenze. In altro modo, la probabilità di un evento è quanto un individuo coerente ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se non si verifica.

Ognuno degli approcci ricopre l'approccio precedente. Quello soggettivo è quello più generale.

1.2 Formalizzazione

Definizione Evento

Un *evento* è una qualsiasi asserzione della quale ne si può stabilire la veridicità osservando il risultato dell'esperimento.

Se abbiamo un urna possiamo rappresentare gli eventi come punti su un segmento di punti, cioè tutte le possibili estrazioni. Con due urne posso fare lo stesso con una griglia discreta, e così via.

2 Temp analisi III

Teorema Criterio di Cauchy

Una successione di funzioni $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f\colon S \to \mathbb{R}$ in S se e solo se $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$\forall m, n > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in S$$

Proof

($\Longrightarrow$) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di convergenza uniforme, esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $n > N$ e $x \in S$. Quindi,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Mostriamo la convergenza uniforme. Fissiamo $x \in S$. Allora, per la condizione soddisfatta, $\{f_n(x)\}$ è una successione numerica che verifica il criterio di Cauchy. Di conseguenza, esiste f_x tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_x$$

per ogni $x \in S$ siccome l'ipotesi vale per tutte le x. Definiamo $f\colon S \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) \triangleq f_x$$

Per iptoesi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

per tutte le $m, n > N$ e $x \in S$. Prendendo il limite con $m \to \infty$, per definizione di f, otteniamo

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

per tutte le$m, n > N$ e $x \in S$.

Vediamo ora come si comporta la convergenza uniforme rispetto alle proprietà studiate precedentemente.

Definizione Limitatezza successione di funzioni

Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ è *limitata* in S se $\forall n \in \mathbb{N}, \exists r_n > 0$ tale che $|f_n(x) \leq M_n$.

Definizione Equilimitatezza successione di funzioni

Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ è *equilimitata* in S se $\exists M > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) \leq M$.

Equilimitato implica limitato.

Proposition

Sia $\{f_n\}$ convergente uniformemente a f in S con $f\colon S \to \mathbb{R}$. Se f_n è limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora f è limitata in S e $\{f_n\}$ è equilimitata.

Proof

Per la definizione di convergenza uniforme, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N, x \in S$$

Fissiamo arbitrariamente $\varepsilon = 1$ e prendiamo $N_1 = N(1)$, che verifica la defiinzionoe di convergenza uniforme con $\varepsilon = 1$. Allora,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f_{N_1}(x)| + |f_{N_1}(x)| \\ &\leq 1 + |f_{N_1}(x)| \leq 1 + M_{N_1} \end{aligned}$$

dove $M_{N_1} > 0$ tale che $|f_{N_1}(x)| \leq M_{N_1}$ per ogni $x \in S$, siccome è limitata. Siccome N_1 è fissato, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per $x \in S$. Proviamo ora la equilimitatezza di $\{f_n\}$ in S. Abbiamo visto che

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + M$$

Ma per ipotesi sappiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste M_n tale che $|f_n(x)| < M_n$ per ogni $x \in S$. Allora definiamo $M' = \max\{M_1, \cdots, M_{N_1}, 1 + M\}$, vale che

$$|f_n(x)| \leq M', \quad \forall x \in S, \forall n \in \mathbb{N}$$

Non vale il viceversa.

Esempio L'equilimitatezza non implica nemmeno la convergenza puntuale.

Consideriamo $f_n(x) = \sin(nx)$, che ovviamente è equilimitata da $M = 1$. Tuttavia, non converge puntualmente in $S = [0, 2\pi]$. Basta prendere $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & n = 1 + 4k \\ 0 & n = 2k \\ -1 & n = 3 + 4k \end{cases}$$

Non vale nemmeno un analogo di Bolzano Weierstrass.

Esempio L'equilimitatezza non implica un analogo di Bolzano Weierstrass con convergenza puntuale.

Consideriamo $f_n(x) = \sin(nx)$, che ovviamente è equilimitata da $M = 1$. Supponiamo che esista una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente con $n_k \to \infty$ per $k \to \infty$. Definisco

$$g_k(x) = \left(f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right)^2 = (\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x))^2$$

è immediato verificare che g_k converge puntualmente a zero in S, poiché $\{f_{n_k}\}$ converge in S. Inoltre, $|g_k| \leq 4$. Per il teorema della convergenza dominata, che vedremo in futuro, vale

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{2\pi} g_k(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \lim_{k \to \infty} g_k(x)\, dx = 0$$

Tuttavia, abbiamo che $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} g_k(x)\, dx = \int_0^{2\pi} (\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x))^2\, dx = 2\pi$$

che è assurdo .

Esercizio

Dimostrare che per ogni i, j naturali vale

$$\int_0^{2\pi} \sin(ix)\sin(jx)\,dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi & i = j \end{cases}$$

Studiamo ora la continuità e la convergenza uniforme.

Teorema Scambio del limite

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni uniformemente convergente ad f in S con $f\colon S \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in S$ punto di accumulazione tale che

$$\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora, vale che

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Proof

Fissiamo $x_0 \in S$ punto di accumulazione e definiamo

$$A_n \triangleq \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

per $n \in \mathbb{N}$. Per il criterio di Cauchy, siccome abbiamo convergenza uniforme, esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

per tutte le $m, n > N$ e $x \in S$. La funzione $x \to |x|$ è continua quindi se facciamo tendere $x \to x_0$ nell'ultima espressione, otteniamo

$$|A_m - A_n| < \varepsilon$$

per tutte le $m, n > N$ e $x \in S$. Di conseguenza, $\{A_n\}$ è una successione numerica che verifica il criterio di Cauchy. Quindi, converge e definiamo

$$A \triangleq \lim_{n\to\infty} A_n$$

Quindi la parte sinistra di

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ha un senso. Ci manca da dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Cioè, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta(\varepsilon, x)$ tale che $|f(x) - A| < \epsilon$ per ogni $x \in S \setminus \{x_0\}$ tale che $|x - x_0| < \delta$. Sappiamo che f_n converge uniformemente a f quindi esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N, x \in S$$

Inoltre, sappiamo che A_n converge ad A per $n \to +\infty$, e quindi esiste $N_2\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_0\right)$ naturale tale che

$$|A_m - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq N_2$$

Per definizione, sappiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \triangleq \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

quindi fissato $M > \max\{N_1, N_2\}$, esiste $\overline{\delta}(M, x_0, \varepsilon)$ tale che

$$|f_M(x) - A_M| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in S \setminus \{x_0\} \,|\, |x - x_0| < \overline{\delta}$$

Combinando tutto, otteniamo che

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - A_M| + |A_M - A| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

per tutte le $x \in S \setminus \{x_0\}$ tale che $|x - x_0| < \overline{\delta}$.

Notiamo che se $\{f_n\}$ converge a f, $x_0 \in S$ punto di accumulazione tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

e analogamente per $-\infty$. Avremmo potuto unificare il tutto con gli intorni della retta reale estesa.

Se richiediamo che $f_n(x)$ siano continue allora il limite per $x \to x_0$ è precisamente $f_n(x_0)$, e quindi da questo teorema otteniamo immediatamente il corollario.

Corollario

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue uniformemente convergente ad f in S con $f\colon S \to \mathbb{R}$. Allora f è continua su S e $\forall x_0 \in S$ punto di accumulazione vale

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to \infty} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x_0)$$

Proof

per esercizio dimostrarla usando la continuità per successioni. Ora la dimostriamo con la definizione classica. Dobbimo mostrare che per ogni $x_0 \in S$, la funzione f è continua in x_0, cioè $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in S \,|\, |x - x_0| < \delta$$

Fissiamo $x_0 \in S$ e $\varepsilon > 0$. Visto che f_n converge uniformemente ad f, esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N, \forall x \in S$$

Fissiamo $n_0 > N$. Per ipotesi, f_{n_0} è continua in x_0, quindi esiste $\overline{\delta}\left(x_0, n_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ tale che

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in S \,|\, |x - x_0| \leq \overline{\delta}$$

Combinando il tutto otteniamo che $\forall x \in S$ tale che $|x - x_0| < \overline{\delta}$ vale

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi scegliendo $\delta = \overline{\delta}$ viene verifica la definizione di continuità in x_0 per f.