Topologia I

Paolo Bettelini

Contents

1 Topologia

Invarianti: p_0 corrisponde al numero di componenti connesse di uno spazio. Formalmente $\pi_0(X)$ è l'insieme delle componenti connesse di X per archi. Invece, p_1 è il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$, che descrive la struttura dei cammini chiusi fino a omotopia.

Assioma Estensionalità

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$$

Proposition Relazione di aggiunzione

Valgono

$$S \subseteq f^{-1}(T) \iff f(S) \subseteq T$$

Da cui derivano $f(f^{-1})(T) \subseteq T$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere suriettiva. E pure $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere iniettiva.

L'operazione di controimmagine preserva tutte le operazioni insiemistiche.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$X \backslash f^{-1}(T) = f^{-1}(Y \backslash T)$$

L'operazione di immagine preserva in generale solo le unioni.

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

le altre due non valgono necessariamente. Abbiamo solo

$$f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$$

se f non è iniettiva la direzione opposta non vale necessariamente. Infatti potrebbero esistere x, x' tale che $x \in A\backslash B$ e $x' \in B\backslash A$ tali che $f(x) = f(x')$. La medesima logica vale per il complementare.

Proposition Proprietà universale del quoziente

Sia $f\colon X \to Y$ e $\sim$ relazione di equivalenza su X. Sono equivalenti:

1. f è costante sulle classi di equivalenza

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

2. f fattorizza (in modo necessaria unico, essendo π suriettivo) attraverso π, cioè $\exists_{=1}\, g\colon X/_{\sim} \to Y$ tale che $g\circ\pi = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_{\sim} \arrow[ur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Proof

1. $(2) \implies (1)$: $f = g\circ\pi$. Abbiamo

$$x \sim x' \implies \pi(x) = \pi(x') \implies g(\pi(x)) = g(\pi(x'))$$

che sono uguali a $f(x)$ e $f(x')$.

2. $(2) \implies (1)$: Definiamo $g\colon X/_{\sim} \colon Y$ come

$$g([x]) \triangleq f(x)$$

bisogna verificare che sia ben posta. Vogliamo quindi che se $[x] = [x']$ allora $f(x) = f(x')$. Ma ciò è garantito dalla ipotesi.

In $\mathbb{R}^n$.

$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n\cdot d_\infty(x,y)$$

2 08 ottobre 2025 DA METTERE

Esercizio

Le topologie con la proprietà che le intersezioni arbitrari di aperti sono aperti, possono essere caratterizzate esplicitamente. Essi sono esattamente, a meno di omeomorfismo, gli spazi topologici della seguente forma: dato un insieme preordinato $(P,\le)$, la topologia di Alexandroff $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ su $\mathcal{P}$ è la topologia i cui aperti sono i sottoinsiemi $U\subseteq\mathcal{P}$ tale che $\forall p\le q, p\in U \implies q\in U$.

2.1 Generated topology

Proposition

Data una collezione di topologie $\{\tau_i\}_{i\in I}$ su un isieme X. La famiglia

$$\tau = \bigcup_{i\in I} \tau_i$$

è ancora una topologia su X.

Corollario

Sia X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ famiglia fi sottoinsiemi. Esiste la topologia meno fine su X che contiene i sottoinsiemi in S come aperti. Tale topologai viene detta la topologia generata da S.

Definizione Topologia dell'unione disgiunta

Sia $\{X_i \,|\, i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici. Allora lo spazio topologico è definita come

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i$$

Possiamo definire astrattamente la topologia dell'unione disgiunta su $\sqcup X_i$ come a topologia più fine che rende tutte le mappe $\tau_i\colon X_i \to \bigsqcup X_i$ continue.
Alternativamente, possiamo definire la topologia come la topologia generata dalla famiglia di sottoinsiemi dell'insieme $\sqcup X_i$ che sono aperti in qualcuno degli X_i.

Vediamo una caratteristica esplicita di questa topologia

Proposition

Un insieme

$$A \subseteq \bigsqcup_{i\in I} X_i$$

è aperto per la topologia dell'unione disgiunta se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni $i \in I$.

Proof

Definiamo τ come la collezione dei sottoinsiemi dati nella proposizione tale che $A \cap X_i$ è aperto in X_i. Usando il fatto che su X_i abbiamo delle topologia possiamo dimostrare che tale collezione soddisfa gli assiomi di topologia:

1. Siano $A, B \in \tau$. Allora $A \cap X_i$ e $B \cap X_i$ sono entrambi aperti in X_i. Di conseguenza la loro unione è ancora aperta in X_i. Possiamo scrivere

$$(A \cap X_i) \cup (B \cap X_i) = (A \cap B) \cap X_i$$

   che è appunto aperto.

Notiamo che τ contiene tutti i sottoinsiemi che sono aperti in qualche X_i. Infatti, $A \subseteq X_i$ è aperto di X_i, $A \cap X_i = A$ aperto di X_i e $A \cap X_j = \varnothing$ aperto di X_j per $j \neq i$. Quindi τ contiene la topologia dell'unione disgiunta (per definizione di quest'ultima come topologia generate). Viceversa, dato $A \in \tau$ vogliamo mostrare che A è aperto per la topologia dell'unione disgiunta.

$$A \subseteq \bigsqcup_{i\in I} X_i$$

$$A = A \cap \left(\bigsqcup_{i\in I} X_i \right) = \bigsqcup_{i\in I} (A \cap X_i)$$

che è una disgiunzione di insiemi aperti

Queste due definizioni sono una un po' il duale dell'altra, da due punti di vista differenti. Da una parte considerando le applicazioni (ci arriviamo come la topologia più fine), mentre l'altro è come se costruissimo la topologia dal basso.

Possiamo verificare che questa è effettivamente la topologia più fine che rende queste mappe continue. In generale, data una famiglia di applicazioni $f_i\colon (X_i, \tau_I) \to y$ si può considerare la topologia più fine che rende le mappe f_i continue. In particolare nel caso di un'unica funzione la topologia più fine che rende f continua è la topologia detta topologia quoziente indotta da f.

Esempio Topologia di Zaniski

Let $\mathbb{K}$ be a field and consider $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Consider the affine space given by the cartesian exponent $\mathbb{K}^n$. For each $f \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ consider

$$D(f) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \cdots, a_n) \neq 0\}$$

the set $\{D(f)\}$ is a basis for the topology of $\mathbb{K}^n$ called Zaniski topology.

Proof Che è una base

Chiaramente $D(0) = \varnothing$ e $D(1) = \mathbb{K}^n$. The latter already proves that the whole space can be expressed as a union. For the intersection, consider

$$D(f) \cap D(g) = \{\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \cdots, a_n) \neq 0 \wedge g(a_1, \cdots, a_n) \neq 0\}\}$$

Siccome un campo è un dominio di integrità la condizione è equivalente a $(f \circ g)(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$ ma ciò è uguale a $D(f \circ g)$. Quindi $\{D(f)\}$ forma una base per una topologia sul dato spazio.

Esercizio

Caratterizzare i chiusi di questa topologia. Quindi generiamo tutti gli aperti e prendiamo i complementari, o usiamo le leggi di de morgan. I chiusi sono generati da un ideale.

TODO anche la dimostrazione che la chiusura è pari ai punti x tali che per ogni U in I(x), U intersection B neq emptyset.

Definizione

Uno spazio topologico si dice T_1 se ogni punto $\{x\}$ (come sottoinsieme dello spazio) è chiuso.

Per esempio la retta euclidea.

Proposition

Sia X uno spazio topologico. Allora X è T_1 se e solo se $\forall x \in X$,

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \{x\}$$

Proof

($\Longrightarrow$) Abbiamo ovviamente l'inclusione $\supseteq$. Viceversa, dimostriamo che

$$\bigcap_{U \in I(x)} U \subseteq \{x\}$$

che è euivalente a dire

$$X \backslash \left(\bigcup_{U \in I(x)} U \right) \geq X \backslash \{x\}$$

Prendiamo quindi un punto $y \in X \backslash \{x\}$ che è come dire $y \neq x$. Siccome lo spazio è T_1, abbiamo che $\{y\}$ è chiuso e quindi il suo complementar e $X \backslash \{x\}$ è un aperto che contiene x in quanto $x \neq y$. Quindi $X \backslash \{y\} \in I(x)$. Ponendo $U = X \backslash \{y\}$ otteniamo quindi che

$$y \in X \backslash U = X \backslash (X \backslash \{y\}) = \{y\}$$

($\Longleftarrow$) Applichiamo la caratterizzazione della chiusura del singoletto, cioè $y \in \overline{\{x\}}$ è come dire che per ogni $U \in I(x)$, $U \cap \{x\} \neq \varnothing$. Ma tutto ciò è equivalente a dire che

$$x \in \bigcap_{U \in I(x)} U = \{y\}$$

che è equivalente a dire che $x = y$. Quindi, $\overline{x} = \{x\}$ e quindi è chiuso.

Definizione Definizione di convesso in $\mathbb{R}^n$

.

Sono proprietà topologiche T_1, proprietà di Hausdorff, connessione, connessione per archi.

3 Lezione del 23

L'operazione di controimmagine fra le topologia presenta tutte le operazioni insiemistiche. Sezione sugli invarianti topologici? (Sposando anche la definizione di quest'ultima).

Lemma

Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo. Allora, per ogni sottospazio $S \subseteq X$, la restrizione di f a S è un omeomorfismo.

Proof

Un omeomorfismo è un coperazione continua biettica con inverso continua. Inoltre vi è la proprietà universale della topologia di sottospazio.

Esempio

L'intervallo $(0,1)$ e $[0,1)$ non sono omeomorfi.

Proof

Supponiamo che esiste un tale omeomorfismo $f\colon [0,1) \to (0,1)$. Abbiamo che $f(0) \in (0,1)$. Prendiamo $S = [0,1)\backslash\{0\} = (0,1)$. Then, f restricted to S is a homeomorphism from S to

$$f(S) = (0,1)\backslash\{f(0)\} = (0, f(0)) \sqcup (f(0), 1)$$

But $(0,1)$ is connected and $f(S)$ is not, which is absurd.

Esempio

Sia $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste x tale che $f(x) = f(-x)$, in particolare non è iniettiva.

Proof

Sia $g\colon S^n \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = f(x) - f(-x)$. Chiaramente g è continua. Chiaramente $g(x) = 0$ se e solo se $f(x) = f(-x)$. S^n è connesso per archi e quindi connesso. Allora $g(S^n)$ è connesso nei reali, ovvero è un intervallo. Let $y \in S^n$. Then, $g(y), g(-y) \in g(S^n)$. Consider

$$\frac{1}{2}g(y) + \frac{1}{2}g(-y) \in g(S)$$

Then

$$\frac{1}{2}\left(f(y) - f(-y)\right) + \frac{1}{2}\left(f(-y) - f(y)\right) = 0$$

Corollario

Aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$ per $n > 1$.

Proof

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ contiene al suo interno un sottospazio omeomorfo a S^{n-1}. Suppose that there is a homeomorphism $f\colon A \to f(A)$ where A is open in $\mathbb{R}^n$ and $f(A)$ is open in $\mathbb{R}$. La reistrizione di f ad un sottospazio $B \cong S^{n-1}$ è ancora un omeomorfismo. Ma dal risultato precedente non può esistere una tale applicazione biettiva, assurdo.

Lemma

Sia $f\colon X \to Y$ un applicazione continua e suriettiva verso Y connesso e $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ connesso. Allora, se f è aperta oppure chiusa, X è connesso.

Proof

Supponiamo che f sia aperta senza perdita di generalità. Prendiamo A_1, A_2 aperti non vuoti di X tale che $X = A_1 \cup A_2$. Vogliamo mostrare che sono disgiunti. Abbiamo che $Y = f(X) = f(A_1) \cup f(A_2)$. Siccome Y è connesso, la loro intersezione non può essere vuota. Abbiamo quindi almeno un punto $y \in A_1 \cap A_2$. Consideriamo

$$f^{-1}(y) \cap A_1 \neq \varnothing \qquad f^{-1}(y) \cap A_2 \neq \varnothing$$

Per ipotesi

$$f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y) \cap A_2)$$

è aperto. Quindi

$$(f^{-1}(y) \cap A_1) \cap (f^{-1}(y) \cap A_2) \neq \varnothing$$

quindi $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

Teorema

Siano X, Y due spazi topologici coneessi. Allora, $X \times Y$ è connesso.

Proof

Applichiamo il lemma. Prendiamo $p : X \times Y \to Y$ una delle due proiezioni. Applichiamo il lemma. P è aperta (dai risultato sulla topologia prodotto). Inoltre P è continua e suriettiva (se l'insieme X non è vuoto, in tal caso il risultato è banale). Consideriamo la fibra $p^{-1}(y) = X \times \{y\}$ che è omeomorfo ad X, che è connesso. Quindi le ipotesi sono soddisfatte e $Y \times X$ è connesso.

Lo stesso vale per la connessione per archi.

Proof

Siano X, Y connessi per archi. Allora, $X \times Y$ è connesso per archi.

Proof

Mostriamo che ogni coppia di punti è collegata da un cammino. Siano quindi $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Siccome X è connesso per archi, esiste un cammino $\alpha\colon I \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = x'$. Analogamente $\beta(0) = y$ e $\beta(1) = y'$. Per la proprietà universale del prodotto con I come vertice, esiste un cammino (unico) che fattorizza il diagramma tale che i due triangoli commutino mediante le proiezioni. Quindi $(\alpha, \beta)\colon I \to X \times Y$ dato da $(\alpha, \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$.

Definizione Componente connessa

Sia X spazio topologico. Un sottospazio C di X si dice una componente connessa se soddisfa le seguenti:

1. C è un sottospazio connesso
2. se $C \subseteq A$ e A è connesso allora $C = A$.

Esempio

Sia X uno spazio e $C \subseteq X$. Se C è sottospazio aperto, chhiuso, connesso e non vuoto, allora è componente connessa. Ciò è dato dal fatto che C è anche chiuso e aperto in A.

Lemma

Sia Y un sottospazio connesso di X. Sia W un sottospazio tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora W è connesso.

Proof

Sia $Z \subseteq W$ aperto, chiuso e non vuoto. Consideriamo $Z \cap Y$. Questo è aperto e chiuso di Y per "transitività" della topologia di sottospazio, (cioè se abbiamo una successione di spazi possiamo indurre la topologia di sottospazi in un colpo solo oppure a step). Sappiamo che

$$\overline{Y} = \{x \in X \,|\, \text{for every open } A \text{ of } X \text{ where } x \in A, A \cap Y \neq \varnothing\}$$

Siccome $Z \neq \varnothing$ è aperto in W, $Z = A \cap W$ per qualche A aperto di X. Quindi, $\forall x \in Z \subseteq A$, $A \cap Y \neq \varnothing$ (e quindi possono prendere un $x \in Z$). Siccome Y è connesso, deduciamo che $Z \cap Y = Y$. Infatti quest'ultima intersezione è aperta e chiusa in Y per definizione di topologia di sottospazio e l'intersezione non è vuota. Quindi, $Y \subseteq Z$. Consideriamo la chiusura (in W) di entrambi $\overline{Y} \subseteq \overline{Z}$. Quindi la chiusura in W è pari a $\overline{Y} \cap W$ e l'altro $\overline{Z} = Z$ siccome Z è chiuso in W per ipotesi. Quindi $\overline{Y} \subseteq Z$. Siccome $Z \subseteq W$, abbiamo $W = Z$.

Lemma

Sia x un punto di uno spazio topologico X e sia $\{Z_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazio connessi di X tali che $x \in Z_i$. Allora, $\bigcup_i Z_i$ è un sottospazio connesso.

Proof

Sia

$$W = \bigcup_{i=1} Z_i$$

Dato $A \subseteq W$ aperto, chiuso e non vuoto, vogliamo mostrare che $A = W$. Per ogni $i \in I$, andiamo a considerare $A \cap Z_i$ che è un aperto e chiuso di Z_i per definizione di sottospazio. Siccome Z_1 è connesso, $A \cap Z_i = \varnothing$ oppure $A \cap Z_i = Z_i$. Quest'ultimo è equivalente a dire che $Z_i \subseteq A$. Supponiamo $A \neq \varnothing$. Quindi

$$A = \bigcup_{i \in I} Z_i \cap Z_i$$

Allora esiste almeno un $i \in I$ tale che $A \cap Z_i \neq \varnothing$, cioè $Z_i \subseteq A$. Dato il punto x come nelle ipotesi del lemma, abbiamo $x \in Z_i$. Segue quindi che $x \in A$. Allora $x \in Z_i \cap A$ per ogni $i \in I$. Per ipotesi$x \in Z_i$ per tutte le i. Quindi, $Z_i \cap A \neq \varnothing \iff Z_i \subseteq A$, allora

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq A$$

cioè $A = W$.

Corollario

Siano A, B due sottospazi connessi di uno spazio topologico. Allora, se $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cup B$ è connesso.

Proof

Applichiamo il lemma al caso della famiglia $\{A, B\}$.

Lemma

Sia $x \in X$ un punto di uno spazio topologico X. Denotiamo $C(x)$ l'unione di tutti i sottospazi connessi di X ch contengono il punto x. Allora $C(x)$ è una componente connessa di X contenente il punto x.

Proof

1. $C(x)$ è connesso per il lemma;
2. $C(x) \subseteq A$ con A connesso. $\{x\}$ è un sottospazio connesso di X contenente x. Per definizione $\{x\} \in C(x)$. Abbiamo allroa che $x \in C(x) \subseteq A$ e quindi $x \in A$. Ma A è connesso, quindi $A \subseteq C(x)$. Allora $A = C(x)$.

Teorema

Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse. Ogni componente connessa è chiusa e ogni punto è contenuto in una e una sola componente connessa.

Proof

Siccome $x \in C(x)$,

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Sia C componente connessa. Da un risultato precedente, sappiamo che $\overline{C}$ è ancora un connesso. Tuttavia $C \subseteq \overline{C}$ e per la seconda condizione nella definizione di componente connessa, ci deve essere uguaglianza. Siano C, D componenti connesse. Supponiamo che non siano disgiunte. Abbiamo che $C \cup D$ è connesso in quanto unione dei connessi

$$C, D \subseteq C \cup D$$

Ciò implica che $C = C \cup D$ e $D = C \cup D$. Allora $C = D$

Questo teorema giustifica la seguente definizione.

Definizione

Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Allora $C(x)$ è detta la componente connessa.

Definizione Compattezza

Definizione Dato X spazio topologico, il $\pi_0(X)$ è definito come l'insieme delle componenti connesse per archi di X.

Teorema

Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione contonua. Allora se X è compatto, $f(X)$ è compatto come sottospazio di Y.

Proof

Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di Y tale che

$$f(X) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Allora

$$X = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A)$$

cioè unione di aperti di X siccome f è continua. Siccome X è compatto, esistono $A_1, \cdots, A_n$ tali che $X = f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n)$. Applicando f otteniamo

$$f(X) = f(f^{-1}(A_1)) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(A_n))$$

e quindi $f(X) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ che è un ricoprimento finito.

Proposition

Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Proof

Sia X compatto e C chiuso in X. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti tali che

$$C \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Notiamo che $C = (X \backslash C) \cup \bigcup A$, dove il primo termine è aperto in quanto complementare di un chiuso. Essendo X compatto, esistono $A_1, \cdots, A_n$ tali che

$$X = (X \backslash C) \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

quindi

$$C = C \cap X = (C \cap (X \backslash C)) \cup \bigcup (A_i \cap C)$$

ma il primo termine è l'insieme vuoto quindi $C \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Proposition

Unione finita di sottospazi compatti è compatta.

Proof

Sia X spazio topologico e $K_1, \cdots, K_n$ sottospazi compatti di X. Sia

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

Vogliamo dimostrare che K è compatto. Siccome i K_i sono compatti, possiamo estrarre dei sottoricoprimenti finiti da essi. Ma l'unione di questi sottoricoprimenti finiti è un sotoricoprimento finito, in quanto unioni finite di sottoinsiemi finiti sono sottoinsiemi finiti.

Teorema

L'intervallo unitario è compatto rispetto alla topologia euclidea reale.

Proof

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$. Quindi

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Definiamo il sottoinsieme $X \subseteq [0,\infty)$ come seguente:

$$X = \{t \in [0,+\infty) \,|\, [0,t] \text{ is contained in a finite union of open sets in } \mathcal{A}\}$$

La tesi equivalente a dire che $1 \in X$. Note that $X \neq \varnothing$ as $0 \in X$. Questo è dato dal fatto che $0 \in [0,1] \subseteq \bigcup A$. Consideriamo ora il supremum di X. Abbiamo due possibilità, o $\sup X > 1$ oppure $\sup X \leq 1$. Nel secondo caso esiste quindi $t \in X$ tale che $1 < t < \sup X$, quindi $[0,t]$ è un sottoinsieme di un unione finita di aperti di $\mathcal{A}$. In particolare $[0,1]$ è uno di questi quindi vale alla tesi. Supponiamo invece l'altro caso dove $b = \sup x > 1$. Se $b \leq 1$ allora $b \in [0,1]$, quindi esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $b \in A$ ($b \geq 0$ in quanto $0 \in X$). Essendo A aperto per la topologia euclidea reale, esiste $\delta > 0$ tale che $(b-\delta, b+\delta) \subseteq A$. D'altra parte, essendo b il supremum, esiste $t \in X$ tale che $t \in (b-\delta, b+\delta)$. Siccome $t \in X$, per definizione di X,

$$[0,t] \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

Per ogni h tale che $0 \leq h < \delta$,

$$[0, b+h] = [0,t] \cup [t, b+h]$$

Il primo termine è in $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ mentre il secondo è in $A \in \mathcal{A}$. Questo contraddice il fatto che b sia il supremum, in quanto ciò implicherebbe che $b+h \in X$.

Quindi $\mathbb{R}$ e $[0,1]$ non sono omeomorfi.

Corollario

Un sottospazio reale è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Proof

($\Longrightarrow$) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Mostriamo che è limitato. Consideriamo il ricoprimento aperto $\{(-n,n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ che ricopre $\mathbb{R}$. Allora,

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n,n)$$

Essendo A compatto, è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Quindi, $A \subseteq [-N,N]$ per qualche $N > 0$, quindi è limitato. Mostriamo ora che A è chiuso, in particolare mostriamo che $\overline{A} \subseteq A$. Quindi se $X \backslash A \subseteq X \backslash \overline{A}$, ovvero che se $p \notin A$ allora $p \notin \overline{A}$. Se $p \notin A$ abbiamo una funzione continua da $A \subseteq \mathbb{R} \backslash \{p\}$ in $\mathbb{R}$ data da $f(x) = 1/(x-p)$. Se f è continua, siccome A è compatto, allora $f(A)$ è compatto, quindi anche limitato come dimostratosi prima. Questo implica chiaramente che $p \notin A$.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}$ sia chiuso e limitato. Siccome è limitato, $A \subseteq [-a,a]$ per qualche $a \geq 0$. Ma $[-a,a]$ è omeomofo a $[0,1]$ quindi è compatto.

Proposition

Un sottospazio K di uno spazio topologico X è compatto (per la topologia di sottospazio) se e solo se per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tali che

$$K \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

esistono $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$K \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$$

Proof

K è compatto per la topologia di sottospazio ogni ricoprimento aperto $\mathcal{B}$ di K ammette un sottoricoprimento finito dove $\forall B \in \mathcal{B}$ con $B = K \cap A$ con A aperto di X vale

$$K = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \iff K \subseteq \bigcup_{A \cap K \in \mathcal{B}} A$$

con A aperto. Quindi $K = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ se e solo se $K \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$, dove per ogni $i = 1, 2, \cdots, n$, $B_i \subseteq A_i \cap K$.

Notiamo che ogni insieme finito è compatto per qualunque topologia.

Corollario Teorema di Weierstrass

Sia X uno spazio topologico compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ un applicazione continua. Allora f ammette massimo e minimo.

Proof

Siccome f è continua ed X è compatto, $f(X)$ è compatto nei reali. Ma allora è chiuso e limitato, quindi se consideriamo infimum e supremum sono sicuramente numeri reali. Dalla definizione di chiusura, infimum e supremum stanno sempre nella chiusura. Ma visto che $f(X)$ è chiuso, choincide con la sua chiusura, quindi infimum e supremum stanno nell'insieme stesso, quindi corrispondono a massimo e minimo.

Proposition

Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio topologico X. Supponiamo che ogni ricoprimento aperto di X formato da elementi in $\mathcal{B}$ ammetta un sottoricoprimento finito. Allora, X è compatto.

Proof

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Vogliamo dimostrare che da questo ricoprimento si può estrarre un sottoricoprimento finito. Per ogni $A \in \mathcal{A}$, consideriamo $\mathcal{B}_A = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq A\}$. Chiaramente per definizione di base, $A = \bigcup \mathcal{B}_A$. Quindi

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$$

quindi esistono $B_1 \in \mathcal{B}_{A_1}, \cdots$ tale che

$$X = B_1 \cup \cdots \cup B_n$$

Teorema

Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione chiusa, Y spazio compatto, le fibre $f^{-1}(y)$ compatte. Allora, X è compatto.

Proof

Dato $A \subseteq X$ consideriamo $A' \subseteq Y$ definito come seguente:

$$A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}$$

Mostriamo alcune proprietà:

1. $Y \backslash Y' = f(X \backslash A)$: abbiamo che

$$\begin{aligned} Y \backslash Y' &= \{y \in Y \mid \neg(f^{-1}(y) \subseteq A)\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in f^{-1}(y) \mid x \notin A\} \\ &= f(X \backslash A) \end{aligned}$$

2. $f^{-1}(A') \subseteq A$ sia $x \in f^{-1}(A')$. Quindi dire che $f(x) \in A'$ è come dire $f^{-1}(f(x)) \subseteq A$.

Mostriamo che se A è aperto in X allora A' è aperto in Y. A' è aperto in Y se e solo se $Y \backslash Y'$ è chiuso in Y. Ma $Y \backslash A' = f(X \backslash A)$ è chiuso in quanto immagine di un chiuso. Prendiamo quindi $\mathcal{A}$ come ricoprimento aperto di X. Definiamo $\mathcal{B}$ come la famiglia dei sottoinsiemi di X esprimibili come unioni finite di aperti in A. Consideriamo la famiglia $\mathcal{B}' = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$. Mostriamo che questa famiglia è un ricoprimento (aperto) di Y. Dato $y \in y$, consideriamo $f^{-1}(y)$ che è compatto per ipotesi.

$$f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

quindi $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ per qualche A_i. Ponendo $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ abbiamo per definizione di $\mathcal{B}'$ che $y \in \mathcal{B}'$. La compattezza di Y implica quindi che esistano $B_1', \cdots, B_n'$ tali che $Y = B_1' \cup \cdots \cup B_n'$ e quindi

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(B_1') \cup \cdots \cup f^{-1}(B_n')$$

Usando la seconda proprietà dimostrata prima, troviamo

$$X = B_1 \cup \cdots \cup B_n$$

visto che sono tutte unione finite di aperti in $\mathcal{A}$, allora X è esprimibile come unione finita di aperti in $\mathcal{A}$.

3.1 Verso la compattificazione di Alexandroff

Proposition

Siano $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico ambiente. Allora,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$$

Proof

K_n è chiuso in K_1 in quanto $K_n = K_n \cap K_1$ e K_n è chiuso nello spazio ambiente. Quindi i complementari $K_1 \backslash K_n$ è aperto. Supponiamo che l'intersezione sia vuota

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \varnothing$$

Ciò è equivalente a dire che

$$K_1 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \right) = K_1 \setminus \varnothing$$
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (K_1 \setminus K_n) = K_1$$

quindi i sottoinsieme $\{K_1 \setminus K_n\}$ formerebbero un ricoprimento aperto di K_1, dal quale, essendo K_1 compatto, si dovrebbe poter estrarre un sottoricoprimento finito $\{K_1 \setminus K_{J_1}, \cdots, K_1 \setminus K_{J_n}\}$. Avremmo quindi che

$$K_1 = \bigcup K_1 \setminus K_{J_i}$$
$$K_1 = \bigcap K_{J_i} = \varnothing$$
$$K_1 = K_{\max\{J_i\}}$$

che è assurdo in quanto tutti i K sono non-vuoti per ipotesi.

Proposition

Siano X, Y spazi topologici e A, B sottospazi rispettivamente di X, Y. Allora $A \times B$ è sottospazio di $X \times Y$.
Sullo spazio $A \times B$ possiamo definire due topologie: la topoloia prodotto, considerando A e B come spazi topologici secondo le topologie di sottospazio indotte dalle topologie madri, oppure la topologia di sottospazio indotta dalla topologia prodotto su $X \times Y$. In realtà, sono uguali.

Proof

Considerando $A \times B$ con la topologia di sottospazio, abbiamo che una sua base è data dia sottoinsieme della forma
$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$$
Il primo termine è aperto della base standard per $X \times Y$, gli ultimi due sono aperti generici di A, B per la topologia di sottospazio. Le due topoloigie coincidono, avendo una stessa base.
Possiamo dimostrarlo con le proprietà universali delle topologie di prodotto e delle topologie di sottospazio. La topologia prodotto è la topologia meno fine su $A \times B$ che rende le due proiezioni $\pi_A \colon A \times B \to A$ e $\pi_B \colon A \times B \to B$ continue. la topologia di sottospazio su $A \times B$ è la topologia meno fine che rende l'inclusione $1 \colon A \times B \hookrightarrow X \times Y$ continue. DISEGNO. Sia J una topologia su $A \times B$. $i \colon (A \times B, J) \to X \times Y$ è continua se e solo se $\pi_X \circ i$ e $\pi_Y \circ i$ sono continue. Ma $\pi_X \circ i = i_A \circ \pi_A$ e $\pi_Y \circ i = i_B \circ \pi_B$. La proprietà universale della topologia di sottospazio ciò è equivalente a richiedere che le due proiezioni π_A, π_B siano continue. Quindi le due topologie coincidono.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, hook, "i_A"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, hook, "i"] & B \arrow[d, hook, "i_B"] \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"'] \arrow[r, "\pi_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Teorema teorema di Wallace

Let X, Y spazi topologici e $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sottospazi compatti con la topologia indotta e W un aperto di $X \times Y$ tale che $A \times B \subseteq W$. Allora, esistono degli aperti U di X e V di Y tali che

$$A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge (U \times V \subseteq W)$$

Proof

Dimostriamo dapprima il caso particolare del teorema per $A = \{a\}$. Quindi $\{a\} \times B \subseteq W$. Ciò significa che $(a, b) \in W$ per ogni $b \in B$. Siccome W è un aperto di $X \times Y$, sappiamo che una base della topologia prodotto p data dai prodotti $U \times V$ dove U è aperto di X e V è aperto di Y, quindi esistono U_b di X e V_b di Y tali che $(a, b) in U_b \times V_b \subseteq W$. Quindi $\{V_b\}$ definiscono un ricoprimento aperto del sottospazio B. per ipotesi, B è compatto, quindi possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$B \subseteq \bigcup V_{b_i}$$

quindi a questo punto poniamo $V = \bigcup V_{b_i}$ e $U = \bigcap U_{b_i}$. Allora se $A \subseteq U$, cioè $\{a\} \subseteq U$, è come dire che $a \in U$ cioè $a \in \bigcup b_i$. Inoltre

$$\begin{aligned} U \times V &= U \times \bigcup B_{b_i} \\ &= \bigcup (U \times V_{b_i}) \end{aligned}$$

che sono tutti termini in U_{b_i} che sono in W. Quindi U, V soddisfano le condizioni del teorema. Adesso, mostriamo il caso generale. Sia $A \subseteq X$ un compatto arbitrario. $\forall a \in A$ esistono aperti U_a di X e V_a di Y tali che $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ e $\{a\} \times B \subseteq W$ per il caso particolare del teorema appena dimostrato. Similarmente a prima, osservimo che $\{U_a\}$ è un ricoprimento aperto di A, e quindi siccome A è compatto, esiste un sottoricoprimento finito

$$A \subseteq \bigcup U_{a_i}$$

Quindi poniamo $U = \bigcup U_{a_i}$ e $V = \bigcap V_{a_i}$. Quindi $A \subseteq U, B \subseteq V$ in quanto $B \subseteq V_a$ per ogni a. Quindi sarà anche contenuto nell'intersezione. Inoltre

$$U \times V = \bigcup U_{a_i} \times V_{a_i} \subseteq W$$

Corollario

Ogni sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Proof

Sia X spazio di Hausdorff e $K \subseteq X$ compatto. Vogliamo mostrare che K è chiuso, quindi che $X \setminus K$ è aperto. Dire che è aperto è come richiedere che sia intorno di ciascun suo punto. Quindi $\forall x \in X \setminus K$ tale che $x \notin K$ esiste U tale che $x \in U$ e $U \subseteq X \setminus K$, con U, K disgiunti. Ricordiamo che X è di Hausdorff se e solo se $\Delta X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$. Applichiamo il teorema di Wallace prendendo $A = \{x\}$ e $B = K$, che sono compatto in quanto finito e compatto per ipotesi rispettivamente. $W = (X \times X) \setminus \Delta x$ aperto in quanto ΔX è chiusa. $A \times B \subseteq W$ cioè $\{x\} \times K \subseteq W$ e $x \notin K$. Deduciamo quindi dal teorema di Wallace che esistono aperti U di X e V di Y tali che $\{x\} \subseteq U$, che è come dire $x \in U$, e $K \subseteq V$. Inoltre $U \times K \subseteq U \times V \subseteq W = (X \times X) \setminus \Delta X$. Quindi $U \cap K = \varnothing$.

Corollario

Siano X, Y spazi topologici. Se X è compatto allora la poiezione $p \colon X \times Y \to Y$ è chiusa. Inoltre, Se X e Y sono compatti allora $X \times Y$ è compatto. Mettere enumerate.

Proof

1. Sia $C \subseteq X \times Y$ chiuso. Vogliamo mostrare che $p(C)$ è chiuso in Y, cioè che $Y \setminus p(C)$ è aperto, cioè è un intorno di ogni suo punto, quindi $\forall y \notin p(C)$ esiste un intorno di Y disgiunto da

$p(C)$. Applichiamo il teorema di Wallacde prendendo $A = X$, $B = \{y\}$ e $W = (X \times Y) \setminus C$ aperto (in quanto C è chiuso). Allora $A \times B = X \times \{y\} \subseteq W = (X \times Y) \setminus C$. Ciò è equivalente a $a \notin p(C)$ che è l'insieme di tutte le $y \in Y$ tale che esiste $x \in X$ con $(x, y) \in C$. Il teorema di Wallace fornisce quindi un aperto V intorno di y interamento contenuto in $Y \setminus p(C)$. Quindi $B = \{y\} \subseteq B$ e

$$X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus C \iff V \subseteq Y \setminus p(C)$$

2. Ricordiamo il risultato che dice che data una mappa chiusa che va in un compatto, e le sue fibre sono compatte allora il dominio è compatto. Nel nostro caso la mappa è la prozeione, che è chiusa per il punto precedente. Le fibre sono

$$p^{-1}(y) \cong X$$

in quanto $X \times \{y\} \cong X$, che è compatto per ipotesi. Segue per induzione che prodotti finiti di spazi compatti sono compatti.

Corollario

Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto (con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$), se e solo se esso è chiuso e limitato (quindi incluso in un ipercubo).

4 Esercizi 21 ottobre

Esercizio

Siano f, g omeomorfismi, allora la loro composizione (se esiste) è un omomorfismo e l'inverso è un omomorfismo. Quindi $\mathrm{Omeo}(X)$ è un gruppo. Siano X, Y, Z spazi tali che $f\colon Y \to Z$ e $g\colon X \to Y$. Per definizione l'inverso è un omeomorfismo. Siccome $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ se gli inversi sono omeomorfismo allora è un omeomorfismo. Quindi è un gruppo.