Topologia I

Paolo Bettelini

Contents

1 Topologia

Invarianti: p_0 corrisponde al numero di componenti connesse di uno spazio. Formalmente $\pi_0(X)$ è l'insieme delle componenti connesse di X per archi. Invece, p_1 è il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$, che descrive la struttura dei cammini chiusi fino a omotopia.

Assioma Estensionalità

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$$

Proposition Relazione di aggiunzione

Valgono

$$S \subseteq f^{-1}(T) \iff f(S) \subseteq T$$

Da cui derivano $f(f^{-1})(T) \subseteq T$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere suriettiva. E pure $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere iniettiva.

L'operazione di controimmagine preserva tutte le operazioni insiemistiche.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$X \backslash f^{-1}(T) = f^{-1}(Y \backslash T)$$

L'operazione di immagine preserva in generale solo le unioni.

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

le altre due non valgono necessariamente. Abbiamo solo

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

se f non è iniettiva la direzione opposta non vale necessariamente. Infatti potrebbero esistere x, x' tale che $x \in A \backslash B$ e $x' \in B \backslash A$ tali che $f(x) = f(x')$. La medesima logica vale per il complementare.

Proposition Proprietà universale del quoziente

Sia $f\colon X \to Y$ e $\sim$ relazione di equivalenza su X. Sono equivalenti:

1. f è costante sulle classi di equivalenza
$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$
2. f fattorizza (in modo necessaria unico, essendo π suriettivo) attraverso π, cioè $\exists_{=1}\, g\colon X/_{\sim} \to Y$ tale che $g \circ \pi = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_{\sim} \arrow[ur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Proof

1. $(2) \implies (1)$: $f = g \circ \pi$. Abbiamo
$$x \sim x' \implies \pi(x) = \pi(x') \implies g(\pi(x)) = g(\pi(x'))$$
che sono uguali a $f(x)$ e $f(x')$.
2. $(2) \implies (1)$: Definiamo $g\colon X/_{\sim} : Y$ come
$$g([x]) \triangleq f(x)$$
bisogna verificare che sia ben posta. Vogliamo quindi che se $[x] = [x']$ allora $f(x) = f(x')$. Ma ciò è garantito dalla ipotesi.

In $\mathbb{R}^n$.
$$d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le d_1(x, y) \le n \cdot d_\infty(x, y)$$

2 08 ottobre 2025 DA METTERE

Esercizio

Le topologie con la proprietà che le intersezioni arbitrari di aperti sono aperti, possono essere caratterizzate esplicitamente. Essi sono esattamente, a meno di omeomorfismo, gli spazi topologici della seguente forma: dato un insieme preordinato $(P, \le)$, la topologia di Alexandrov $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ su $\mathcal{P}$ è la topologia i cui aperti sono i sottoinsiemi $U \subseteq \mathcal{P}$ tale che $\forall p \le q, p \in U \implies q \in U$.

2.1 Generated topology

Proposition

Data una collezione di topologie $\{\tau_i\}_{i \in I}$ su un isieme X. La famiglia
$$\tau = \bigcup_{i \in I} \tau_i$$
è ancora una topologia su X.

Corollario

Sia X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ famiglia fi sottoinsiemi. Esiste la topologia meno fine su X che contiene i sottoinsiemi in S come aperti. Tale topologai viene detta la topologia generata da S.

Definizione Topologia dell'unione disgiunta

Sia $\{X_i \mid i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici. Allora lo spazio topologico è definita come

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i$$

Possiamo definire astrattamente la topologia dell'unione disgiunta su $\sqcup X_i$ come a topologia più fine che rende tutte le mappe $\tau_i \colon X_i \to \bigsqcup X_i$ continue.
Alternativamente, possiamo definire la topologia come la topologia generata dalla famiglia di sottoinsiemi dell'insieme $\sqcup X_i$ che sono aperti in qualcuno degli X_i.

Vediamo una caratteristica esplicita di questa topologia

Proposition

Un insieme

$$A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

è aperto per la topologia dell'unione disgiunta se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni $i \in I$.

Proof

Definiamo τ come la collezione dei sottoinsiemi dati nella proposizione tale che $A \cap X_i$ è aperto in X_i. Usando il fatto che su X_i abbiamo delle topologia possiamo dimostrare che tale collezione soddisfa gli assiomi di topologia:

1. Siano $A, B \in \tau$. Allora $A \cap X_i$ e $B \cap X_i$ sono entrambi aperti in X_i. Di conseguenza la loro unione è ancora aperta in X_i. Possiamo scrivere

   $$(A \cap X_i) \cup (B \cap X_i) = (A \cap A) \cap X_i$$

   che è appunto aperto.

Notiamo che τ contiene tutti i sottoinsiemi che sono aperti in qualche X_i. Infatti, $A \subseteq X_i$ è aperto di X_i, $A \cap X_i = A$ aperto di X_i e $A \cap X_j = \emptyset$ aperto di X_j per $j \neq i$. Quindi τ contiene la topologia dell'unione disgiunta (per definizione di quest'ultima come topologia generate). Viceversa, dato $A \in \tau$ vogliamo mostrare che A è aperto per la topologia dell'unione disgiunta.

$$A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

$$A = A \cap \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) = \bigsqcup_{i \in I} (A \cap X_i)$$

che è una disgiunzione di insiemi aperti

Queste due definizioni sono una un po' il duale dell'altra, da due punti di vista differenti. Da una parte considerando le applicazioni (ci arriviamo come la topologia più fine), mentre l'altro è come se costruissimo la topologia dal basso.

Possiamo verificare che questa è effettivamente la topologia più fine che rende queste mappe continue. In generale, data una famiglia di applicazioni $f_i \colon (X_i, \tau_I) \to y$ si può considerare la topologia più fine che rende le mappe f_i continue. In particolare nel caso di un'unica funzione la topologia più fine che rende

f continua è la topologia detta topologia quoziente indotta da f.