

# Analisi II

Paolo Bettelini

## Contents

|                                  |          |
|----------------------------------|----------|
| <b>1 Spazi metrici</b>           | <b>1</b> |
| 1.1 Definizioni                  | 1        |
| 1.2 Successioni in spazi metrici | 6        |
| 1.3 Funzioni                     | 8        |

## 1 Spazi metrici

### 1.1 Definizioni

L'insieme vuoto e l'insieme  $X$  sono aperti e chiusi.

#### Proposition

L'unione di aperti non numerabile è aperta, mentre l'intersezione è aperta solo se finita.

#### Proof

Per dimostrare quest'ultima lo facciamo su due insiemi e il resto è per induzione. Prendiamo un punto nell'intersezione e prendiamo le due bolle dentro gli insiemi centrate nel punto. Siccome hanno lo stesso centro la loro intersezione è sempre una bolla di raggio il minore fra i due.

La metrica discreta può generare una bolla che è un singoletto.

#### Proposition

L'unione di chiusi finiti è chiusa. L'intersezione qualsiasi è chiusa.

Ogni singoletto è chiuso. Per dimostrarlo mostriamo che nel complementare esiste una bolla che non interseca il punto (vero per proprietà di Hausdorff).

Tutti i punti di accumulazione sono dei punti aderenti. Tutti i punti di un sottoinsieme sono aderenti per il sottoinsieme. Ogni punto  $x$  è di accumulazione o è isolato.

Se  $x_0$  è aderente ad  $E$ ,  $x_0$  può essere un punto di  $E$  oppure no. Se  $x_0$  è punto di accumulazione per  $E$ , in ogni bolla centrata in  $x_0$  cadono infiniti punti.

#### Proposition

$E^\circ$  è aperto.  $E$  è aperto se e solo se  $E = E^\circ$ .  $E^\circ$  è il più grande aperto contenuto in  $E$ .  
 $\overline{E}$  è chiuso.  $E$  è chiuso se e solo se  $E = \overline{E}$ . La chiusura di  $E$  è il più piccolo chiuso contenente  $E$ .

#### Proof per l'interno

Dimostriamo che  $E^\circ$  è aperto. Sia  $x_0 \in E^\circ$ . un punto interno ad  $E$ , quindi esiste una bolla centrata in tale punto che è contenuta in  $E$ . Prendiamo un altro punto  $y$  in questa bolla. Possiamo costruire

una inner bolla centrata in  $y$  con un raggio sufficientemente piccolo da rimanere nella bolla più grande. Quindi il punto  $y$  è a sua volta interno, quindi tutta la bolla centrata in  $x_0$  è in  $E^\circ$  e quindi è aperto.

Dimostriamo ora che se  $E$  è aperto allora  $E = E^\circ$  (l'altra implicazione è ovvia). Per fare ciò dimostriamo che  $E^\circ$  è il più grande aperto in  $E$ . Osserviamo che  $E^\circ$  fa parte della famiglia degli aperti di  $X$  contenuti in  $E$ . Sia  $A$  un aperto contenuto in  $E$ . Voglio dimostrare che  $A \subseteq E^\circ$ . Sia  $x_0 \in A$ .  $A$  è unione di bolle quindi esiste un raggio tale che la bolla centrata in  $x_0$  di tale raggio è contenuta in  $A$  che è contenuto in  $E$ . Quindi,  $x_0$  è interno ad  $E$  e  $x_0 \in E^\circ$  e  $A \subseteq E^\circ$ . Supponiamo ora che  $E$  sia aperto. Allora  $E$  fa parte della famiglia degli aperti di  $X$  contenuti in  $E$ . Devo avere  $E \subseteq E^\circ$ . Dato che  $E^\circ \subseteq E$  allora  $E^\circ = E$ .

Dire che un insieme è dentro in un altro significa dire che la sua chiusura coincide con l'insieme. Tipo la chiusura di  $\mathbb{Q}$  è  $\mathbb{R}$  quindi  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .

### Definizione Limitato

Se è contenuto in una bolla

### Definizione Diametro

è il sup della metrica su tutte le coppie.

### Definizione Ricoprimento

Sia  $E$  un sottoinsieme di uno spazio metrico  $X$ . Una famiglia

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è un ricoprimento aperto di  $E$  se

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

### Definizione Sottoricoprimento

Un Sottoricoprimento di

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è una sottofamiglia di  $G_\alpha$  tale che continua a ricoprire. Cioè ne scarto alcuni ma deve comunque rimanere una copertura.

### Definizione Compatto

Uno spazio metrico  $X$  è compatto se ogni ricoprimento aperto di  $E$  ammette un sottoricoprimento finito.

Ogni insieme finito è compatto.

### Teorema

Sia  $X$  uno spazio metrico e  $E$  un sottoinsieme di  $X$  compatto.

1.  $E$  è limitato;
2.  $E$  è chiuso;
3. Ogni sottoinsieme infinito di  $E$  ha almeno un punto di accumulazione in  $E$ .

**Proof**

1. Consideriamo  $\{B_1(x) \mid x \in E\}$  che è un ricoprimento aperto di  $E$ . Siccome  $E$  è compatto esiste un sottoricoprimento finito aperto di  $E$ , ossia  $x_1, \dots, x_n \in E$  tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_1(x_i)$$

Posto

$$R = 1 + \max_{i=1, \dots, n} d(x_i, x_1)$$

Allora la bolla di raggio  $R$  centrata in  $x_1$  contiene  $E$ , quindi  $E$  è limitato.

2. Supponiamo che non sia chiuso. Allora esiste  $y \in E'$  ma  $y \notin E$ . Vogliamo costruire un ricoprimento aperto di  $E$  che non ammette sottoricoprimento finito. Sia  $r(x) = \frac{1}{2}d(x, y)$  per ogni  $x \in X$ . Se  $x \in E$  allora  $r(x) > 0$  perchè  $y \notin E$ . Abbiamo il ricoprimento

$$\{B_{r(x)}(x) \mid x \in E\}$$

Ma per la compattezza esisterebbe un sottoricoprimento finito, cioè  $x_1, \dots, x_n \in E$  tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r(x_i)}(x_i)$$

Sia ora  $R = \min_{i=1, \dots, n} r(x_i)$ . Allora  $R > 0$  e la bolla  $B_R(y)$  non interseca nessuna delle  $B_{r(x_i)}(x_i)$ , assurdo poiché  $y$  è punto di accumulazione.

3. Sia  $F$  un sottoinsieme infinito di  $E$ . Supponiamo che  $F$  non abbia punti di accumulazione in  $E$ . Allora ogni punto di  $E$  ha una bolla che interseca  $F$  in al più un punto. Queste formano un ricoprimento aperto di  $E$ . Ma se esistesse un sottoricoprimento finito,  $F$  sarebbe finito, assurdo.

**Proposition**

Sia  $E \subseteq X$  compatto. Se  $F \subseteq E$  è chiuso allora  $F$  è compatto.

**Proof**

Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $F$ . Dobbiamo aggiungere degli insiemi aperti per coprire il resto. Siccome  $F$  è chiuso,  $X \setminus F$  è aperto. Quindi  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{X \setminus F\}$  è un ricoprimento aperto di  $E$ . Per la compattezza di  $E$  esiste un sottoricoprimento finito, che escludendo  $X \setminus F$  è un sottoricoprimento finito di  $F$ .

Se  $F \subseteq X$  è chiuso, ed  $E \subseteq X$  è compatto, allora  $F \cap E$  è compatto.

**Teorema Teorema dell'intersezione finita**

Sia  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una famiglia di compatti tale che ogni intersezione finita è non vuota. Allora

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \emptyset$$

**Proof**

Supponiamo che l'intersezione sia vuota. Allora e sia  $E_{\bar{\alpha}}$  un compatto fissato nella famiglia.

$$\begin{aligned} E_{\bar{\alpha}} \cap \left( \bigcap_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_{\alpha} \right) &= \emptyset \\ \implies E_{\bar{\alpha}} &\subseteq \left( \bigcap_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_{\alpha} \right)^c = \bigcup_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_{\alpha}^c \end{aligned}$$

$\{E_{\alpha}^c\}_{\alpha \neq \bar{\alpha}}$  è un ricoprimento aperto di  $E_{\bar{\alpha}}$ . Esistono quindi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq \bar{\alpha}$  tali che

$$\begin{aligned} E_{\bar{\alpha}} &\subseteq \bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}^c = \left( \bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right)^c \\ \implies E_{\bar{\alpha}} \cap \left( \bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right) &= \emptyset \end{aligned}$$

assurdo.

#### Corollario caso particolare

Sia  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una famiglia di compatti tale che

$$E_{n+1} \subseteq E_n$$

Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$$

#### Teorema Teorema di Heine-Borel

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea. Allora  $E$  è compatto se e solo se  $E$  è chiuso e limitato.

#### Lemma

Sia  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una famiglia di intervalli  $I_k = [a_k, b_k]$  tali che  $I_k \supseteq I_{k+1}$ . Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$$

#### Proof

Gli intervalli sono annidati, quindi  $a_k$  è crescente e  $b_k$  è decrescente e  $a_k \leq b_k$ . In particolare  $a_k \leq b_i$ . Consideriamo l'insieme  $E = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .  $E$  è limitato superiormente, e ammette supremum  $x$ . Per definizione  $x \geq a_k$ . Ma  $a_k \leq b_i$  per tutte le  $i$ . Quindi,  $x \leq b_i$  per ogni  $i$ . Allora

$$x \in I_n \implies x \in \bigcap I_k$$

#### Definizione

Siano  $a, b \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i < b_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Un rettangolo chiuso è il prodotto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

che indichiamo con  $[a, b]$ .

**Lemma**

Sia  $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una famiglia di rettangoli chiusi tali che  $R_k \supseteq R_{k+1}$  per ogni  $k$ . Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k \neq \emptyset$$

**Proof**

Siccome

$$R_k = I_{k,1} \times I_{k,2} \times \dots \times I_{k,n}$$

possiamo applicare il primo lemma e quindi

$$\exists y_i \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_{k,i}$$

Il punto  $y = (y_1, \dots, y_n)$  è in ogni  $R_k$ .

**Lemma Lemma 3**

In  $\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea ogni rettangolo è compatto.

**Proof Lemma 3**

Sia  $R = [a, b]$  un rettangolo e supponiamo che non sia compatto. Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $R$  che non ammette sottoricoprimento finito. Vogliamo adesso dimezzare ambo i lati (quindi  $n$  tagli). Abbiamo adesso  $2^n$  rettangoli.

$$[a_i, b_i] = [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Il diametro di  $R$  è  $\|b - a\|$ . Il diametro di ogni rettangolo ottenuto è la metà. Almeno uno di questi rettangoli ha la proprietà di non ammettere sottoricoprimento finito. Lo chiamiamo  $R_1$ . Iterando il procedimento otteniamo una successione di rettangoli

$$R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$$

con diametro che tende a zero e che non ammettono sottoricoprimento finito, il diametro di  $R^k$  è dato da  $\frac{1}{2^k} \|b - a\|$ . Per il lemma precedente esiste  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k$ . Siccome  $R_k \subseteq R$  per ogni  $k$ ,  $x \in R$ . Siccome  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  è un ricoprimento di  $R$ , esiste  $\alpha_0 \in A$  tale che  $x \in G_{\alpha_0}$ .  $G_{\alpha_0}$  è aperto, quindi esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \subseteq G_{\alpha_0}$ . Scegliamo  $k$  sufficientemente grande tale che  $2^{-k} \|b - a\| < r$ . Ma il diametro di  $R_k$  è minore di  $r$ , quindi  $R_k \subseteq B_r(x)$ . Quindi  $R_k \subseteq G_{\alpha_0}$ , assurdo perchè  $R_k$  non ammette sottoricoprimento finito.

**Proof Heine-Borel**

Dobbiamo dimostrare solo che se  $E$  è chiuso e limitato allora è compatto. Siccome  $E$  è limitato esiste  $M$  tale che  $\|x\| < M$  per ogni  $x \in E$ . Quindi,

$$E \subseteq [-M, M] \times [-M, M] \times \dots \times [-M, M] = R$$

$E$  è un chiuso contenuto in un compatto, quindi è compatto.

**Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass**

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di  $\mathbb{R}^n$  ha almeno un punto di accumulazione.

### Proof Teorema di Bolzano-Weierstrass

#### Definizione Insiemi separati

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A, B \subseteq X$  due sottoinsiemi. Diciamo che  $A$  e  $B$  sono separati se

$$A \cap \overline{B} = \emptyset \wedge \overline{A} \cap B = \emptyset$$

Devono sicuramente essere disgiunti, ma non basta. Serve che nessun punto di uno dei due insiemi è punto di accumulazione dell'altro.

#### Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $E \subseteq X$ .  $E$  è connesso se non può essere scritto come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati.

I sottoinsiemi connessi di  $\mathbb{R}$  sono tutti e soli gli intervalli.

Uno spazio metrico è connesso se e solo se l'unico sottoinsieme non vuoto di  $X$  che è anche aperto e chiuso è  $X$  stesso. (Dimostrazione per esercizio).

$\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea è connesso. (Dimostrazione per esercizio non proprio banale).

## 1.2 Successioni in spazi metrici

Mettere la definizione di convergenza ma con  $d(x_m, y) < \varepsilon$ . Oppure  $x_m \in B_\varepsilon(y)$ .

In particolare la successione metrica converge se e solo se  $d(x_m, y) \rightarrow 0$  secondo la convergenza reale.

Il limite è unico per proprietà di Hausdorff.

#### Proposition

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $E \subseteq X$  e sia  $y$  un punto di accumulazione per  $E$ . Allora esiste una successione  $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{y\}$  che converge ad  $y$ . In particolare,  $E$  è chiuso se e solo se per ogni successione  $\{x_n\} \subseteq E$  che converge ad  $y$  allora  $y \in E$ .

#### Proof

Dato che  $y \in E'$ ,  $\forall x_m \in \mathbb{N}$ , esiste  $x_m$  tale che  $x_m \in B_{\frac{1}{m}}(y) \cap E$  e  $x_m \neq y$ . La successione così costruita converge ad  $y$ . Infatti,  $d(x_m, y) < \frac{1}{m} \rightarrow 0$ .

#### Proposition

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $\{x_n\}$  una successione convergente in  $X$ . Una condizione necessaria per la convergenza è che ogni sottosuccessione converga allo stesso limite. La condizione sufficiente è che ogni sottosuccessione ammetta una sottosuccessione che converge allo stesso limite.

#### Definizione Compattezza sequenziale

Uno spazio metrico  $X$  è sequenzialmente compatto se ogni successione in  $X$  a valori in  $E$  ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di  $E$ .

#### Proposition Equivalenza compattezza

$E$  is compact if and only if  $E$  is sequentially compact.

Questa c'è solo negli spazi metrici.

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Sia  $\{x_n\}$  una successione in  $E$ . Consideriamo  $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Se  $F$  è finito, esiste un elemento che compare infiniti volte e la successione costante converge a tale elemento. Se  $F$  è infinito, per la compattezza  $F$  ammette un punto di accumulazione,  $y \in E$ . Costruiamo una sottosuccessione che converga ad  $y$ . Scegliamo  $x_{m_1}$  tale che  $d(x_{m_1}, y) < 1$ . Scegliamo  $x_{m_2}$  tale che  $d(x_{m_2}, y) < \frac{1}{2}$  e  $m_2 > m_1$ , e così via. La sottosuccessione così costruita converge ad  $y$  in quanto  $d(x_{m_k}, y) < \frac{1}{k} \rightarrow 0$ .

( $\Leftarrow$ ) XXX

Ogni successione convergente è di Cauchy.

Per esempio con la metrica discreta una successione è convergente se e solo se è definitamente costante, che è equivalente ad essere di Cauchy, quindi è completo.

Nel caso dei razionali nei reali con metrica euclidea, consideriamo la radice di due che è un punto di accumulazione per i razionali. Esiste una successione di razionali che converge a radice di due, quindi è di Cauchy. Ma essa non può convergere in  $\mathbb{Q}$ , altrimenti convergerebbe anche in  $\mathbb{R}$  e avrebbe due limiti. Tuttavia è una successione di Cauchy in  $\mathbb{Q}$  perché è convergente in  $\mathbb{R}$  e quindi è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . (La condizione è la medesima). Quindi  $\mathbb{Q}$  non è completo.

### Definizione Spazio completo

Uno spazio metrico  $(X, d)$  è completo se ogni successione di Cauchy in  $X$  converge ad un punto di  $X$ .

### Teorema

$\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea è completo.

### Proof

Sia  $\{x_n\}$  una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$ . Scriviamo  $E_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ . Notiamo che  $E_n \supseteq E_{n+1}$ . Ponendo la chiusura  $\overline{E_n} \supseteq \overline{E_{n+1}}$ . Inoltre,  $E_n$  è limitato e  $\text{diam} E_n \rightarrow 0$ . Infatti, dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che per ogni  $m, n \geq N$   $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ . Notiamo inoltre che

$$\text{diam} E_n = \sup\{d(x_m, x_k)\} < \varepsilon$$

Dimostrazione per esercizio vale che  $\text{diam} F = \text{diam} \overline{F}$ . Quindi,  $\text{diam} \overline{E_n} \rightarrow 0$ . Adesso  $\{\overline{E_n}\}$  è una successione di compatti in quanto chiusi e limitati, annidati. Quindi

$$E \triangleq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset$$

Siccome  $\text{diam} E = 0$  o è vuoto o contiene un solo punto, quindi contiene un solo punto  $E = \{y\}$ . Mostriamo che  $x_n \rightarrow y$ . Abbiamo  $d(x_n, y) \leq \text{diam} \overline{E_n} \rightarrow 0$ .

### Teorema

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto. Allora  $X$  è completo.

### Proof

Sia  $\{x_n\}$  una successione di Cauchy in  $X$ . Siccome è compatto è compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  che converge ad un punto  $y \in X$ . Mostriamo che  $x_n \rightarrow y$ . Dato

$\varepsilon > 0$  esiste  $N_0$  tale che per ogni  $m, n \geq N_0$   $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Per la convergenza di  $\{x_{n_k}\}$  esiste  $K$  tale che per ogni  $k \geq K$   $d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Scegliamo  $\bar{N} = \max\{N_0, n_K\}$ . Allora per ogni  $n \geq \bar{N}$  si ha

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Sia  $X$  uno spazio metrico completo,  $Y \subseteq X$ .  $Y$  è completo se e solo se  $Y$  è chiuso in  $X$ .

### Teorema

$E$  sequenzialmente compatto implica  $E$  compatto.

### Proof

Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $E$ . Esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall x \in E$  esiste  $\bar{\alpha}$  tale che  $B_\delta(x) \subseteq G_{\bar{\alpha}}$ .

1. *claim 1:*  $\forall m \in \mathbb{N}$ , esiste  $x_m$  tale che  $B_{1/m}(x_m)$  non è sottoinsieme di  $G_\alpha$  per tutte le  $\alpha$ .  $\{x_m\}$  è una successione in  $E$  e quindi posso estrarre una sottosuccessione convergente  $x_{m_k} \rightarrow p \in E$ . Esiste  $\hat{\alpha}$  tale che  $p \in G_{\hat{\alpha}}$ .  $G_{\hat{\alpha}}$  è aperto e quindi esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$ . Ma  $x_{m_k} \rightarrow p$  quindi con  $k$  sufficientemente grande

$$B_{1/m_k}(x_{m_k}) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$$

che è assurdo lightning.

2. *claim 2:*  $E$  è contenuto nell'unione di un numero finito di bolle di raggio  $\delta$  centrate in punto di  $E$ . Per assurdo, sia  $x_1 \in E$ . Sicuramente  $B_\delta(x_1)$  non ricopre  $E$  quindi esiste  $x_2 \in E \setminus B_\delta(x_1)$ . Ma assieme  $B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2)$  non ricoprono  $E$ , quindi esiste un  $x_3 \in E \setminus (B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2))$  e così via. La successione  $\{x_m\}$  deve ammettere una sottosuccessione convergente. Ma  $d(x_i, x_j) \geq \delta$  se  $i \neq j$  quindi la successione  $\{x_m\}$  non è di Cauchy Lightning. Quindi  $E \subseteq B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \dots$ .

In realtà abbiamo mostrato anche la terza.

### Teorema

Sia  $X$  uno spazio metrico. Sono equivalenti:

1.  $X$  è compatto;
2.  $X$  è sequenzialmente compatto;
3. *limit point compact:* ogni sottoinsieme infinito di  $X$  ha almeno un punto di accumulazione.

Solo negli spazi metrici.

## 1.3 Funzioni

### Definizione

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  due spazi metrici e sia  $E \subseteq X_1$ . Sia  $f: E \rightarrow X_2$  e  $p \in E'$ . Diciamo che  $l \in X_2$  è limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow p$  e diciamo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in E \wedge 0 < d_1(x, p) < \delta \implies d_2(f(x), l) < \varepsilon$$

Equivalentemente  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f((B_\delta(p) \cap E) \setminus \{p\}) \subseteq B_\varepsilon(l)$$



**Proposition**

Sia  $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ . Allora  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow p$  se e solo se  $f(x_n) = l$  per ogni successione  $\{x_n\}$  tale che  $x_n \in E$  e  $x_n \neq p$  per tutte le  $n$  e  $x_n \rightarrow p$ .

Valgono i medesimi teoremi tipo l'unicità del limite e i teoremi di permanenza del segno, confronto etc.

**Proposition**

Sia  $f: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}^n$  per  $n > 1$ . Allora

$$f(x) \rightarrow l \iff f_i(x) \rightarrow l_i$$

per  $x \rightarrow p$ .

**Proof Sketch**

Conderiamo la norma per tutte le  $i$

$$|f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\| \leq \sum_k |f_k(x) - l_k|$$

**Definizione Continuità**

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  due spazi metrici,  $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2, p \in E$ . Diciamo che  $f$  è *continua* in  $p$  se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\forall x \in E \cap B_\delta(p) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$$

Euivalentemente  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $x \in E$  e  $d_1(x, p) < \delta$  implica che  $d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon$ . Oppure ancora  $(f(B_\delta(p) \cap E)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$ .

Se  $p$  è un punto isolato di  $E$  allora  $\exists r > 0$  tale che  $B_r(p) \cap E = \{p\}$ . Scegliendo  $\delta \leq r$  la definizione di continuità è automaticamente soddisfatta. Se  $p$  non è isolato, allora è un punto di accumulazione per  $E$ . In questo caso  $f$  è continua in  $p$  e vale che  $f(x) \rightarrow f(p)$  per  $x \rightarrow p$ .

**Proposition**

$f$  è continua in  $p$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x_n) = f(p)$$

per ogni successione  $\{x_n\}$  tale che  $x_n \in E$  per tutte le  $n$  e  $x_n \rightarrow p$ .

**Definizione**

Sia  $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ . Diciamo che  $f$  è continua nell'insieme  $E$  se  $f$  è continua in ogni punto di  $E$ .

**Proposition**

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e sia  $f: X_1 \rightarrow X_2$ . Allora  $f$  è continua in  $X$  se e solo se  $f^{-1}(V)$  è aperto in  $X_1$  per tutti i  $V$  aperti in  $X_2$ .

**Proof**

( $\Rightarrow$ ) Sia  $V$  un aperto di  $X_2$ . Se  $f^{-1}(V) = \emptyset$  in questo caso abbiamo finito. Altrimenti, sia  $p \in f^{-1}(V)$ , cioè  $f(p) \in V$ . Essendo  $V$  aperto, riesco a trovare

$$B_\varepsilon(f(p)) \subseteq V$$

Ma  $f$  è continua quindi riesco anche a trovare  $\delta > 0$  tale che

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

Quindi  $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$  quindi  $p$  è un punto interno a  $f^{-1}(V)$ . Per l'arbitrarietà di  $p$  segue che  $f^{-1}(V)$  è aperto.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $p \in X$  e dimostriamo che  $f$  è continua in  $p$ . Sia  $\varepsilon > 0$  fissato.  $B_\varepsilon(f(p))$  è un aperto di  $X_2$ .  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$  è un aperto di  $X_1$  e  $p \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$  e quindi esiste  $\delta > 0$  tale che

$$B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$$

cioè

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

che è la definizione di continuità.

Siccome  $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$  allora  $f$  è continua se e solo se  $f^{-1}(C)$  è chiuso in  $X_1$  per ogni chiuso in  $C \in X_2$ . Molto utile.

In generale le funzioni continue non mandano aperti in aperti. Per esempio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $x \rightarrow x^2$ . Abbiamo che

$$f((-1, 1)) = [0, 1)$$

### **Definizione Funzione aperta**

Una funzione viene detta *aperta* se  $f(U)$  è aperto in  $X_2$  per tutti gli insiemi  $U$  aperto om  $X_1$ . Analogamente funzione chiusa.

Sia  $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$  è continua se e solo se tutte le sue componenti sono continue.

### **Proposition**

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici,  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una funzione continua. Se  $X_1$  è compatto, allora  $f(X_1)$  è compatto.

### **Proof**

Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $f(X_1)$ . Consideriamo  $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  che sono degli aperti. Queste preimmagini sono un ricoprimento di  $X_1$ , che è compatto e quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito  $f^{-1}(G_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(G_{\alpha_n})$ . Vogliamo mostrare che  $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$  sono un ricoprimento di  $f(X_1)$ .

$$f(X_1) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(G_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

### **Teorema Teorema di Weierstrass**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora,  $\exists x_1, x_2 \in X$  tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in X$$

cioè  $f$  possiede massimo e minimo assoluto.

### Proof Teorema di Weierstrass

$f(X)$  è compatto in  $\mathbb{R}$ , quindi è chiuso e limitato. Siccome  $f(X)$  ammette infimum e supremum reali. Siccome  $\inf f(x)$  e  $\sup f(x)$  appartengono a  $\overline{f(X)}$  e  $f(X)$  è chiuso, appartengono allora ad  $f(X)$  e quindi sono massimi e minimi.

### Teorema Teorema da compatto ad Hausdorff

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici con  $X_1$  compatto e  $f: X_1 \rightarrow X_2$  continua. Allora,  $f$  è chiusa.

In realtà questo funziona con domini compatti e codomini di Hausdorff.

### Proof Teorema da compatto ad Hausdorff

Sia  $C$  un chiuso di  $X_1$ . Voglio dimostrare che  $f(C)$  è un chiuso di  $X_2$ . Sappiamo che  $C$  è chiuso in un compatto, quindi è compatto. La funzione è continua e quindi  $f(C)$  è compatto. Siccome i compatti sono chiusi allora è chiuso.

### Corollario

Sia  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  continua,  $X_1$  compatto e  $f$  biunivoca. Allora,  $f^{-1}$  è continua.

### Proof

Dobbiamo mostrare che  $(f^{-1})^{-1}(C)$  è chiuso per ogni  $C$  chiuso di  $X_2$ . Ma questo coincide con  $f(C)$  che è chiusa per il teorema da compatto ad Hausdorff.

### Teorema

Sia  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  continua e sia  $E \subseteq X$  connesso. Allora  $f(E)$  è connesso.

### Proof

Supponiamo che  $f(E)$  non sia connesso. Esistono quindi due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e separati tali che

$$f(E) = A \cup B$$

Poniamo  $F = f^{-1}(A) \cap E$  e  $G = f^{-1}(B) \cap E$ . Sicuramente  $F, G \neq \emptyset$  e  $E = F \cup G$ . Vogliamo mostrare che  $F$  e  $G$  sono separati. Siccome  $A \subseteq \overline{A}$  vale anche  $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ . L'applicazione  $f$  è continua e la chiusura di  $A$  è un chiuso. Quindi la preimmagine del chiuso  $\overline{A}$  è un chiuso. Consideriamo ora

$$\overline{F} \subseteq \overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$$

perché  $f$  è continua se  $\overline{A}$  è chiuso. Quindi  $\overline{F} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$  che implica  $f(\overline{F}) \subseteq \overline{A}$ . D'altro canto  $f(G) \subseteq B$  e  $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ , e quindi  $\overline{F} \cap G \neq \emptyset$  perché altrimenti vi sarebbe un elemento sia in  $\overline{A}$  che in  $B$ . Dovrebbe essere  $f(x) \in \overline{A}$  e  $f(x) \in B$  lightning. Analogamente si dimostra che  $F \cap \overline{G} = \emptyset$  cioè abbiamo scritto  $E$  come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati. Ma  $E$  è connesso lightning.

### Definizione

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e  $f: X_1 \rightarrow X_2$ . Allora  $f$  è uniformemente continua se  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall x, y \in X_1$

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

### Teorema Theorema di Heine-Cantor

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  continua e  $X_1$  compatto. Allora,  $f$  è uniformemente continua.

La dimostrazione è la medesima rispetto al caso banale.

### Definizione Funzione di Lipschitz

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici,  $f: X_1 \rightarrow X_2$ . Diciamo che  $f$  è *lipschitz-continua* o *lipschitziana* se  $\exists \alpha > 0$  tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha d_1(x, y)$$

per tutte le  $x, y \in X_1$ .

### Proposition

Se  $f$  è Lipschitz-continua, allora è uniformemente continua.

### Definizione

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ . Diciamo che  $f$  è una *contrazione* se  $f \in \text{Lip}_\alpha(X_1, X_2)$  con  $\alpha < 1$ .

Se il supremum è finito, allora questa è la miglior costante di Lipschitz (in generale)

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

### Esempio

Consideriamo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = x^2$ . Non è di lipschitz in quanto non è uniformemente continua. Per mostrarlo possiamo dire

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|$$

Se restringessimo il dominio di questa funzione ad un intervallo limitato, allora sarebbe di Lipschitz, per il supremum.

### Proposition

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile. Allora,  $f \in \text{Lip}_\alpha(I, \mathbb{R})$  se e solo se  $|f'(x)| \leq \alpha$  per tutte le  $x$ .

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Cominciamo con

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} \\&\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha|x+t-x|}{|t|} = \alpha\end{aligned}$$

Possiamo togliere il limite dal modulo in quanto il modulo è una funzione continua.

( $\Leftarrow$ ) Per il teorema di Lagrange esiste  $\theta \in (\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$

$$\begin{aligned}f(x) - f(y) &= f'(\theta)(x - y) \\|f(x) - f(y)| &= |f'(\theta)| \cdot |x - y| \\&\leq \alpha|x - y|\end{aligned}$$

### Esercizio

Per quali  $a \leq b$  la funzione  $f(t) = 1 + t - \arctan(t)$  è una contrazione in  $[a, b]$ . Stabiliamo quindi se la derivata è limitata

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

notiamo quindi che  $0 \leq f'(t) \leq 1$ . Quindi è sicuramente lipschitziana. Notiamo allora che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'(t)| = 1 = \alpha$$

Quindi per far sì che  $\alpha < 1$  dobbiamo limitare il dominio ad un intervallo limitato. Quindi  $-\infty < a \leq b < \infty$ . Porta l'intervallo  $[a, b]$  in sé? Siccome la funzione è crescente porta intervalli a intervalli di estremi  $f(a)$  e  $f(b)$ . Mi basta quindi imporre che  $f(a) \geq a$  e  $f(b) \leq b$ . Abbiamo quindi

$$\begin{cases} 1 + a - \arctan a \geq a \\ 1 + b - \arctan b \leq b \end{cases} = \begin{cases} \arctan a \leq 1 \\ \arctan b \geq 1 \end{cases}$$

e quindi  $a \leq \tan 1 \leq b$ . Notiamo che  $f(\tan 1) = \tan 1$  quindi è un punto fisso per il teorema delle contrazioni.

### Esempio

Sia  $v \in \mathbb{R}^n$  e consideriamo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = v \cdot x$ . Dobbiamo studiare  $|f(x) - f(y)| = |v \cdot x - v \cdot y|$  usando la bilinearità del prodotto scalare ottengo  $|v \cdot (x - y)|$ . Per Cacuchy-Schwarz

$$|v \cdot (x - y)| \leq \|v\| \cdot \|x - y\|$$

che è quindi di Lipschitz.

### Teorema Teorema di Banach-Cacciopoli o delle contrazioni

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $f: X \rightarrow X$  una contrazione. Allora  $\exists_{=1} x \in X$  tale che  $f(x) = x$ .

Le ipotesi sono necessarie. Togliamo per esempio la completezza e consideriamo quindi  $X = (0, +\infty)$  con la contrazione  $f(x) = x/2$ . Questa contrazione non ha punti fissi. Togliamo invece l'ipotesi che sia una contrazione. Richiediamo solamente che sia una contrazione debole, cioè

$$d_2(f(x), f(y)) \leq f_1(x, y)$$

Consideriamo  $X = [0, +\infty)$  e prendiamo  $f(t) = t + e^{-t}$ . La derivata è  $f'(t) = 1 - e^{-t}$  che è nulla nell'origine e poi tende ad 1 dal sotto. Chiaramente non ci sono punti fissi in quanto  $f(t) = t$  è come dire  $e^{-t} = 0$ .

### Proof

Cominciamo mostrando l'esistenza del punto fisso. Sia  $x_0 \in X$  un punto fissato e consideriamo la successione  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

1. Mostriamo che  $\{x_n\}$  è di Cauchy, quindi siccome lo spazio è completo converge. Dobbiamo mostrare che  $d(x_n, x_m)$  tende a zero quando  $n, m$  crescono. Consideriamo inizialmente

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la distanza generica e usiamo la disuguaglianza triangolare ripetutamente per ogni step

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+k-i}, x_{n+k-i-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i} \\ &= \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{k-i-1} \\ &= \alpha^n \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Per sbarazzarci di  $k$  (siccome vogliamo  $k$  arbitrario e il  $\varepsilon$  nella definizione di Cauchy deve essere uniforme rispetto ad esso) maggioriamo la somma parziale della serie geometrica con il valore della serie geometrica. Siccome  $0 < \alpha < 1$  il termine non esplode e la serie geometrica converge.

2. Detto  $x$  il limite di  $\{x_n\}$  mostriamo che è un punto fisso di  $f$ . Consideriamo il limite per  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x)$$

perché  $f$  è continua.

Mostriamo ora l'unicità del punto. Supponiamo che  $x, y$  siano due punti fissi. Vogliamo mostrare che  $d(x, y) = 0$ . Abbiamo

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)(1 - \alpha) d(x, y) \leq 0$$

siccome  $1 - \alpha > 0$  ciò succede solo se  $d(x, y) = 0$ .

Abbiamo notato che

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

Con  $k \rightarrow \infty$  otteniamo

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

quindi tende al punto fisso in maniera esponenziale.

Denotiamo  $f^n = f \circ f \cdots f$ . Se  $f$  è una contrazione, una qualsiasi sua iterazione è anch'essa una contrazione.

$$d(f(f(x)), f(f(y))) \leq \alpha d(f(x), f(y)) \leq \alpha^2 d(x, y)$$

Per induzione segue il resto. In generale la costante è  $\alpha^n$ . Ci chiediamo se nel caso in cui  $f$  non sia una contrazione, una sua iterata lo possa essere.

### Esempio

Per esempio  $f(x) = \cos x$ , che non è una contrazione in quanto il supremum della derivata è 1. Invece,  $\cos(\cos(x))$  ha derivata

$$\sin(\cos(x)) \cdot \sin$$

Il suo modulo è dato da

$$|\sin(\cos(x))| \cdot |\sin x| \leq \sin(1) < 1$$

Il secondo termine può solamente essere maggiorato da 1, mentre il secondo, siccome  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ , può essere maggiorato da  $\sin 1$ . Quindi è una contrazione.

Con questo possiamo per esempio mostrare che il coseno ha un punto fisso, siccome una sua iterata è una contrazione.

### Corollario Indebolimento del teorema delle contrazioni: teorema delle iterate contrazioni

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $f: X \rightarrow X$  un'applicazione tale che  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $f^n$  sia una contrazione. Allora  $\exists_{=1} x \in X$  tale che  $f(x) = x$ .

### Proof

Mostriamo che i punti fissi di  $f$  (che sono uno solo) sono i punti fissi di  $f^n$ . Sia  $x$  un punto fisso di  $f$ . Allora  $f^n(x) = f(f(\cdots(x))) = f(x) = x$ . Quindi tutti i punti fissi di  $f$  sono anche punti fissi di  $f^n$ . Sia ora  $x$  tale che  $f^n(x) = x$ . Componendo otteniamo

$$f(f^n(x)) = f(x)$$

$$f^n(f(x)) = f(x)$$

quindi  $f(x)$  è un punto fisso di  $f^n$ , ma siccome  $f$  è una contrazione ha solo un punto fisso, quindi coincidono  $f(x) = x$ . Quindi tutti i punti fissi di  $f^n$  sono anche punti fissi di  $f$ .

Parametrizziamo ora la funzione

Consideriamo  $T: X \times Y \rightarrow X$  come operatore parametrizzato dai valori di  $Y$ . Fissato  $y$  imponiamo che  $T(-, y): X \rightarrow X$  sia una contrazione. Per tutte le  $y$  esiste un solo  $x \in X$  tale che  $T(x, y) = x$ . Data la dipendenza funzionale  $x = \varphi(y)$  vogliamo capire come il punto fisso dipende dal parametro. In particolare, vogliamo mostrare che  $\varphi$  è continua sotto alcune ipotesi.

### Teorema di dipendenza del punto fisso del parametro

Sia  $X$  uno spazio metrico completo e sia  $Y$  uno spazio metrico (topologico). Sia  $T: X \times Y \rightarrow X$  tale che  $\exists \alpha < 1$  tale che  $\forall y \in Y$ ,  $T(-, y)$  è in  $\text{Lip}_\alpha(X)$ . ( $\alpha$  deve essere uniforme rispetto a  $y$ ). Sia  $y_0 \in Y$  tale che  $\forall x \in X$ ,  $T(x, y)$  sia continua in  $y_0$ . Allora  $f$  è continua in  $y_0$ .

### Proof todo