Probability

Paolo Bettelini

Contents

1 Probabilità

1.1 Costruzione intuitiva

Esempio Approccio classico alla probabilità

Consideriamo un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6 e per il resto indistinguibili. Vogliamo studiare l'esperimento estrazione di una pallina dall'urna. Voglio studiare quale pallina sia più probabile che venga estratta. Vogliamo quindi mettere un ordinamento sull'insieme degli eventi di questo esperimento. Sia Ω l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento. Sia P_i la probabilità di estrarre il numero $i \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$. In questo caso la scelta naturale è $P_i = \frac{1}{6}$ per tutte le $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Notiamo che $\sum P_i = 1$, cioè la probabilità di estrarre un numero da 1 a 6, cioè in questo caso l'evento certo. Questa viene detta additività della probabilità di eventi disgiunti. Inoltre, la probabilità $P_j = 0$ con $j \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Possiamo anche notare che

$$P_i = \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}} = \frac{|\{i\}|}{|N|}$$

In questo caso i casi elementari $\{i\}$ sono equiprobabili.

Esempio Approccio frequentista alla probabilità

Consideriamo l'esperimento lancio di un dado a 6 facce numerate da 1 a 6. Abbiamo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. In questo caso non è detto che gli eventi o i casi elementari siano equiprobabili. Quindi, per assegnare i P_i potremmo lanciare il dado sperimentalmente.

$$P_i^{(k)} = \frac{N_i^{(k)}}{k}$$

con N_i^k è il numero di volte che esce l'evento i su k lanci. Chiaramente questi valori sono variabili, quindi prendiamo

$$P_i = \lim_{k \to +\infty} P_i^{(k)}$$

per $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se il limite esiste. Notiamo che $P_i^{(k)} \in [0, 1]$ e

$$\sum_{i=1}^{6} P_i^{(k)} = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

e prendendo il limite $k \to +\infty$

$$\sum_{i=1}^{6} P_i = 1$$

In entrambi i casi abbiamo quindi le medesime proprietà ma nella seconda le probabilità non coincidono necessariamente.

Esempio Probabilità soggettiva

Consideriamo un torneo di calcio dove tutti giocano contro tutti, in cui partecipano 6 squadre: (1) R. Madrid, (2) M. City, (3) Bayer Monaco, (4) Atalanta, (5) Porto, (6) Nantes. L'esperimento che consideriamo è quello che studia il vincitore del torneo. Abbiamo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'approccio classico richiede casi elementari equiprobabili, e in questo caso non lo sono. L'approccio frequentista richiede di richiedere un torneo molte volte sotto le stesse condizioni, il che è praticamente impossibile. L'idea alternativa è quindi quella di chiedere a due esperti del settore di assegnare le probabilità in maniera coerente alle osservazioni che abbiamo fatto negli altri due approcci. Il primo esperto scegli per esempio

$$P_1 = \frac{1}{4}, P_2 = \frac{1}{4}, P_3 = \frac{1}{5}, P_4 = \frac{1}{5}, P_5 = \frac{1}{10}, P_6 = 0$$

mentre il secondo

$$P_1 = \frac{11}{27}, P_2 = \frac{1}{3}, P_3 = \frac{1}{9}, P_4 = \frac{2}{27}, P_5 = \frac{1}{27}, P_6 = \frac{1}{27}$$

Chiaramente c'è natura soggettiva.

Definizione Probabilità soggettiva

Si definisce probabilità di un evento la misura del grado di fiducia, cioè un numero reale in $[0, 1]$, che in individuo coerente assegna al verificarsi dell'evento considerato, in base alle sue conoscenze. In altro modo, la probabilità di un evento è quanto un individuo coerente ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se non si verifica.

Ognuno degli approcci ricopre l'approccio precedente. Quello soggettivo è quello più generale.

1.2 Formalizzazione

Definizione Esito

Un *esito* è una qualsiasi asserzione della quale ne si può stabilire la veridicità osservando il risultato dell'esperimento.

Se abbiamo un urna possiamo rappresentare gli eventi come punti su un segmento di punti, cioè tutte le possibili estrazioni. Con due urne posso fare lo stesso con una griglia discreta, e così via.

Definizione Evento

Un *evento* è un insieme di esiti.

Possiamo fare un ponte fra gli operatori della teoria degli insiemi e la logica degli eventi.

Siano A, B due eventi, indicati con i rispettivi insiemi di esiti A e B.

1. La *negazione* di un evento $-A$ corrisponde all'evento associato all'insieme complementare $\Omega \setminus A$.
2. La *somma* logica di due eventi $A + B$, cioè se almeno uno dei due eventi si verificano, corrisponde all'evento associato all'unione insiemistica $A \cup B$.

3. Il *prodotto* logico di due eventi $A \cdot B$, cioè se ambo gli avventi si verificano, corrisponde all'evento associato all'intersezione insiemistica $A \cap B$.
4. La *differenza* logica di due eventi $A - B$ corrisponde all'evento associato alla differenza insiemistica $A \setminus B$.
5. La *differenza simmetrica* di due eventi $A \Delta B$ corrisponde all'evento associato alla differenza simmetrica insiemistica $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.
6. L'*implicazione* logica di due eventi $A \implies B$ corrisponde all'evento associato alla relazione di sottoinsieme $A \subseteq B$.
7. L'*equivalenza* fra due eventi $A = B$, cioè $A \implies B$ e $B \implies A$, corrisponde all'uguaglianza insiemistica $A = B$.
8. Due eventi si dicono *incompatibili*, cioè se non possono verificarsi in contemporanea, corrisponde alla condizione che l'intersezione insiemistica sia vuota $A \cap B = \varnothing$.

La teoria degli insiemi non è esattamente la stessa cosa della teoria degli eventi. Per esempio la probabilità condizionata non corrisponde a nessun insieme.

Definizione

Nel caso della probabilità classica con Ω finito, possiamo scegliere l'insieme degli eventi come $\mathcal{P}(\Omega)$ e definire la misura come $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dato da

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

per uno spazio equiprobabile.

Vogliamo espandersi al caso della probabilità soggettiva

Definizione

Sia $\Omega \neq \varnothing$ di cardinalità finita. Chiamiamo *misura di probabilità* su $\mathcal{P}(\Omega)$ una funzione $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tale che

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ disgiunti,
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Chiamiamo *spazio di probabilità con spazio campionato Ω di cardinalità finita* la terna $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Proposition

Sia $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con spazio campionato Ω di cardinalità finita. Allora,

1. per ogni $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. per ogni $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tale che $B \subseteq A$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
3. per ogni $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. *Additività:* $\forall n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ tale che $A_i \cap A_j = 0$ per tutti gli $i \neq j$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$
5. *Subadditività:* $\forall n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Proof

1.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}(A \cup (\Omega \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A)\end{aligned}$$
e quindi $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\Omega - A)$.

2.
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus B)) = 1 - \mathbb{P}\left(\Omega \setminus (A \cap (\Omega \setminus B))\right)$$
dal disegno degli insiemi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \setminus B) &= 1 - \mathbb{P}((\Omega \setminus A) \cup B) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\Omega \setminus A) - \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) + \mathbb{P}((B \cap A \cap B) \cup (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

4. Dimostriamo per induzione. Per $n = 2$ vale per la definizione. Assumiamo che la proposizione sia vera per n e mostriamo il passo successivo
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)\end{aligned}$$

5. Vale lo stesso passo $n = 2$ dello scorso punto
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &\leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)\end{aligned}$$
poi segue per induzione come il punto scorso.

Proposition Formula di inclusione-esclusione

Sia $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con spazio campionato Ω di cardinalità finita. Prendiamo $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ con $n \in \mathbb{N}$. Allora,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ \in\{1,\cdots,n\} \\ i_1 \neq i_2 \cdots i_k}} (-1)^{k+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right)$$

Tutte le possibili intersezione di k elementi pesati da $A_1, \cdots, A_n$.

Proof

Mostriamolo per induzione Il caso $n = 2$ segue dal caso banale dimostrato in precedenza, cioè

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ \in\{1,2\} \\ i_1 \neq \cdots \neq i_k}} (-1)^{k+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right) \\
&= \sum_{i_1 \in \{1,2\}} \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \{1,2\} \\ i_1 \neq i_2}} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}$$

Supponiamo che la formula funzioni per $n - 1$ e dimosriamolo per n. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{n-1} &= \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \\
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A}_{n-1} \cup A_n\right) \\
&\overset{(n=2)}{=} \mathbb{P}(\overline{A}_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}\left(\overline{A}_{n-1} \cap A_n\right)
\end{aligned}$$

Studiamo separamente il primo termine e l'ultimo termine. Nel primo abbiamo

$$\mathbb{P}(\overline{A}_{n-1}) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ \in\{1,\cdots,n-1\} \\ i_1 \neq \cdots \neq i_k}} (-1)^{k+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right)\right)$$

Per l'ultimo termine usiamo il passo $n-1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{A}_{n-1} \cap A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right] \cap A_n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j-1}^{n-1} (A_j \cap A_n)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ \in\{1,\cdots,n-1\} \\ i_1\neq\cdots\neq i_k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} (A_{i_r} \cap A_n)\right) \\
&= -\sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_k \\ \in\{1,\cdots,n\} \\ i_1\neq\cdots\neq i_k \\ \exists j\in\{1,\cdots,k\} \\ \mid i_j=n}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right)
\end{aligned}$$

Combinando tuto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= \mathbb{P}(\overline{A}_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(\overline{A}_{n-1} \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_n) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_k \\ \in\{1,\cdots,n\} \\ i_1\neq\cdots\neq i_k \\ \exists j\in\{1,\cdots,k\} \\ \mid i_j=n}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ \in\{1,\cdots,n-1\} \\ i_1\neq\cdots\neq ik}} (-1)^{k+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ \in\{1,\cdots,n\} \\ i_1\neq\cdots\neq i_k}} (-1)^{k+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right)
\end{aligned}$$

Andiamo a rappresentare il nostro spazio M. D. P con un vettore. Sia $N \in \mathbb{N}$ e $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$. Notiamo che dato $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ possiamo sempre rappresentarlo come

$$A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}\}$$

con $k \in \{1, \cdots, N\}$ e $i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, N\}$ con $i_1 \neq \cdots \neq i_k$. Da questo segue che

$$A = \bigsqcup_{r=1}^{k} \{\omega_{i_r}\}$$

Quindi per l'additività di una generica M.D.P $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vale

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{r=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_{i_r}\})$$

Abbiamo quindi scritto la misura di un insieme $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ come la somma delle misure dei singoletti che lo compongono. Ricordiamo che

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\omega_i) = 1$$

Proposition

Sia $\Omega \neq \varnothing$ con $|\Omega| = N$ finito. I seguenti 3 insiemi sono in corrispondenza biunivoca

1. $$S_N \triangleq \left\{ (P_1, \cdots, P_N) \in [0,1]^N \mid \sum_{i=1}^{N} P_i = 1 \right\}$$

   $$K_{N-1} \triangleq \left\{ (P_1, \cdots, P_{N_1}) \in [0,1]^{N-1} \mid \sum_{i=1}^{N-1} P_i \leq 1 \right\}$$

2. $$M(\Omega) \triangleq \{\mathbb{P} \text{ M. D. P su } (\Omega, \mathcal{P}(\Omega))\}$$

Proof

Per la corrispodnenza fra S_n a K_{N-1} prendo la funzione $f\colon K_{N-1} \to S_N$ data da

$$f(P_1, \cdots, P_{N_1}) \triangleq \left(P_1, \cdots, P_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{N-1} P_i \right)$$

Dimostrazione per esercizio. Dimostriamo che $M(\Omega)$ e S_N sono in corrispondenza biunivoca. Prendiamo $g\colon M(\Omega) \to S_N$ come

$$g(\mathbb{P}) \triangleq (\mathbb{P}(\{\omega_1\}), \cdots, \mathbb{P}(\{\omega_N\}))$$

Notiamo che per definizione di misura di probabilità, tutti i termini $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) \in [0,1]$ per tutte le $i \in \{1, \cdots, N\}$, e

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

quindi $g(\mathbb{P}) \in S_n$ ed è ben definita. La suriettività è data dal fatto che dato $(P_1, \cdots, P_N) \in S_N$ basta prendere $\mathbb{P} \in M(\Omega)$ tale che $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) \triangleq P_i$. Per l'iniettività prendiamo $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in M(\Omega)$ tali che $g(\mathbb{P}_1) = g(\mathbb{P}_2)$, cioè $\mathbb{P}_1(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}_2(\{\omega_i\})$. Ma sono uguali in quanto dato $A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}_1(A) = \sum_{r=1}^{k} \mathbb{P}_1(\{\omega_{i_r}\}) = \sum_{r=1}^{k} \mathbb{P}_2(\{\omega_{i_r}\}) = \mathbb{P}_2(A)$$

Per questa corrispodnenza biunivoca sono essenziali il possesso di un sottoinsieme di elementi di $\mathcal{P}(\Omega)$ che genera (tramite unioni ed intersezioni) tutto $\mathcal{P}(\Omega)$, e pure l'additività (o caso generale sigma additività per il caso infinito). È importante notare che una funzione generica $\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ non è univocamente determinata dal valore che assume sui singoletti.

2 Indipendenza e condizionamento

3 Temp analisi III

Teorema Criterio di Cauchy

Una successione di funzioni $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f\colon S \to \mathbb{R}$ in S se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$\forall m, n > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in S$$

Proof

($\Longrightarrow$) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di convergenza uniforme, esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $n > N$ e $x \in S$. Quindi,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Mostriamo la convergenza uniforme. Fissiamo $x \in S$. Allora, per la condizione soddisfatta, $\{f_n(x)\}$ è una successione numerica che verifica il criterio di Cauchy. Di conseguenza, esiste f_x tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_x$$

per ogni $x \in S$ siccome l'ipotesi vale per tutte le x. Definiamo $f\colon S \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) \triangleq f_x$$

Per iptoesi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

per tutte le $m, n > N$ e $x \in S$. Prendendo il limite con $m \to \infty$, per definizione di f, otteniamo

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

per tutte le$m, n > N$ e $x \in S$.

Vediamo ora come si comporta la convergenza uniforme rispetto alle proprietà studiate precedentemente.

Definizione Limitatezza successione di funzioni

Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ è *limitata* in S se $\forall n \in \mathbb{N}, \exists r_n > 0$ tale che $|f_n(x) \leq M_n$.

Definizione Equilimitatezza successione di funzioni

Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ è *equilimitata* in S se $\exists M > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) \leq M$.

Equilimitato implica limitato.

Proposition

Sia $\{f_n\}$ convergente uniformemente a f in S con $f\colon S \to \mathbb{R}$. Se f_n è limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora f è limitata in S e $\{f_n\}$ è equilimitata.

Proof
Per la definizione di convergenza uniforme, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N, x \in S$$

Fissiamo arbitrariamente $\varepsilon = 1$ e prendiamo $N_1 = N(1)$, che verifica la defiinzionoe di convergenza uniforme con $\varepsilon = 1$. Allora,

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq |f(x) - f_{N_1}(x)| + |f_{N_1}(x)| \\ &\leq 1 + |f_{N_1}(x)| \leq 1 + M_{N_1}\end{aligned}$$

dove $M_{N_1} > 0$ tale che $|f_{N_1}(x)| \leq M_{N_1}$ per ogni $x \in S$, siccome è limitata. Siccome N_1 è fissato, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per $x \in S$. Proviamo ora la equilimitatezza di $\{f_n\}$ in S. Abbiamo visto che

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + M$$

Ma per ipotesi sappiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste M_n tale che $|f_n(x)| < M_n$ per ogni $x \in S$. Allora definiamo $M' = \max\{M_1, \cdots, M_{N_1}, 1 + M\}$, vale che

$$|f_n(x)| \leq M', \quad \forall x \in S, \forall n \in \mathbb{N}$$

Non vale il viceversa.

Esempio L'equilimitatezza non implica nemmeno la convergenza puntuale.
Consideriamo $f_n(x) = \sin(nx)$, che ovviamente è equilimitata da $M = 1$. Tuttavia, non converge puntualmente in $S = [0, 2\pi]$. Basta prendere $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & n = 1 + 4k \\ 0 & n = 2k \\ -1 & n = 3 + 4k \end{cases}$$

Non vale nemmeno un analogo di Bolzano Weierstrass.

Esempio L'equilimitatezza non implica un analogo di Bolzano Weierstrass con convergenza puntuale.
Consideriamo $f_n(x) = \sin(nx)$, che ovviamente è equilimitata da $M = 1$. Supponiamo che esista una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente con $n_k \to \infty$ per $k \to \infty$. Definisco

$$g_k(x) = \left(f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right)^2 = (\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x))^2$$

è immediato verificare che g_k converge puntualmente a zero in S, poiché $\{f_{n_k}\}$ converge in S. Inoltre, $|g_k| \leq 4$. Per il teorema della convergenza dominata, che vedremo in futuro, vale

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} g_k(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \lim_{k\to\infty} g_k(x)\, dx = 0$$

Tuttavia, abbiamo che $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} g_k(x)\, dx = \int_0^{2\pi} (\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x))^2\, dx = 2\pi$$

che è assurdo .

Esercizio

Dimostrare che per ogni i, j naturali vale

$$\int_0^{2\pi} \sin(ix)\sin(jx)\,dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi & i = j \end{cases}$$

Studiamo ora la continuità e la convergenza uniforme.

Teorema Scambio del limite

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni uniformemente convergente ad f in S con $f\colon S \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in S$ punto di accumulazione tale che

$$\exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora, vale che

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Proof

Fissiamo $x_0 \in S$ punto di accumulazione e definiamo

$$A_n \triangleq \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

per $n \in \mathbb{N}$. Per il criterio di Cauchy, siccome abbiamo convergenza uniforme, esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

per tutte le $m, n > N$ e $x \in S$. La funzione $x \to |x|$ è continua quindi se facciamo tendere $x \to x_0$ nell'ultima espressione, otteniamo

$$|A_m - A_n| < \varepsilon$$

per tutte le $m, n > N$ e $x \in S$. Di conseguenza, $\{A_n\}$ è una successione numerica che verifica il criterio di Cauchy. Quindi, converge e definiamo

$$A \triangleq \lim_{n\to\infty} A_n$$

Quindi la parte sinistra di

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ha un senso. Ci manca da dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Cioè, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x)$ tale che $|f(x) - A| < \epsilon$ per ogni $x \in S \setminus \{x_0\}$ tale che $|x - x_0| < \delta$. Sappiamo che f_n converge uniformemente a f quindi esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N, x \in S$$

Inoltre, sappiamo che A_n converge ad A per $n \to +\infty$, e quindi esiste $N_2\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_0\right)$ naturale tale che

$$|A_m - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq N_2$$

Per definizione, sappiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \triangleq \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

quindi fissato $M > \max\{N_1, N_2\}$, esiste $\overline{\delta}(M, x_0, \varepsilon)$ tale che

$$|f_M(x) - A_M| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in S \setminus \{x_0\} \,|\, |x - x_0| < \overline{\delta}$$

Combinando tutto, otteniamo che

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - A_M| + |A_M - A| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

per tutte le $x \in S \setminus \{x_0\}$ tale che $|x - x_0| < \overline{\delta}$.

Notiamo che se $\{f_n\}$ converge a f, $x_0 \in S$ punto di accumulazione tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

e analogamente per $-\infty$. Avremmo potuto unificare il tutto con gli intorni della retta reale estesa.

Se richiediamo che $f_n(x)$ siano continue allora il limite per $x \to x_0$ è precisamente $f_n(x_0)$, e quindi da questo teorema otteniamo immediatamente il corollario.

Corollario

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue uniformemente convergente ad f in S con $f \colon S \to \mathbb{R}$. Allora f è continua su S e $\forall x_0 \in S$ punto di accumulazione vale

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to \infty} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x_0)$$

Proof

per esercizio dimostrarla usando la continuità per successioni. Ora la dimostriamo con la definizione classica. Dobbimo mostrare che per ogni $x_0 \in S$, la funzione f è continua in x_0, cioè $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in S \,|\, |x - x_0| < \delta$$

Fissiamo $x_0 \in S$ e $\varepsilon > 0$. Visto che f_n converge uniformemente ad f, esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ naturale tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N, \forall x \in S$$

Fissiamo $n_0 > N$. Per ipotesi, f_{n_0} è continua in x_0, quindi esiste $\overline{\delta}\left(x_0, n_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ tale che

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in S \,|\, |x - x_0| \leq \overline{\delta}$$

Combinando il tutto otteniamo che $\forall x \in S$ tale che $|x - x_0| < \overline{\delta}$ vale

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi scegliendo $\delta = \overline{\delta}$ viene verifica la definizione di continuità in x_0 per f.

Esempio Convergenza puntuale non implica convergenza uniforme

Prendiamo $S = [0, 1]$ come dominio e $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ converge puntualmente a $f(x) = 0$ ma non in maniera uniforme.

Teorema Teorema del dini (un altro)

Supponiamo di avere un compatto $S = K$ compatto. Prendiamo

1. $\{f_n\}$ successione di funzioni continue su K;
2. $\{f_n\}$ converge puntualmente a $f \colon K \to \mathbb{R}$ continua;
3. $\{f_n\}$ successione monotona non crescente, cioè

Allora, $\{f_n\}$ converge uniformemente in K a f.

Proof

Definiamo $g_n \triangleq f_n - f$. Notiamo che, dalle ipotesi, valgono:

1. $g_n \to g$ puntualmente con $g = 0$;
2. $g_n \colon K \to \mathbb{R}$ continua per tutte le $n \in \mathbb{N}$;
3. $\{g_n\}$ monotona non crescente

Inoltre, notiamo che se dimostriamo che g_n converge uniformemente a g, allora abbiamo finito. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Definiamo

$$K_n \triangleq \{x \in K \mid |g_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

cioè dove non è verificata la definizione di convergenza uniforme. Siccome $x \to |g_n(x)|$ è continua, abbiamo che K_n è chiuso e $K_n \subseteq K$. Siccome è un sottoinsieme chiuso di un compatto, è compatto. Inoltre dalla monotonia di $\{g_n\}$ sono annidati $K_{n+1} \subseteq K_n$. Prendiamo $x \in K$. Per ipotesi, $g_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza, esiste $N(x) \in \mathbb{N}$ tale che $x \notin K_n$ $\forall n \geq N$. Quindi,

$$x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$$

Possiamo ripetere il medesimo ragionamento per tutte le $x \in K$ quindi otteniamo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$$

Sappiamo che l'intersezione numerabile di compatti annidati è non vuota (topologia citare il teorema). Quindi se l'intersezione è vuota, almeno uno deve essere vuota (contronominale). Per definizione di K_n, esiste un vale che

$$|g_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K \setminus K_n = K \setminus \varnothing = K$$

per ogni $n > N$.

Esempio

Consideriamo $S = (0, 1]$ e

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}$$

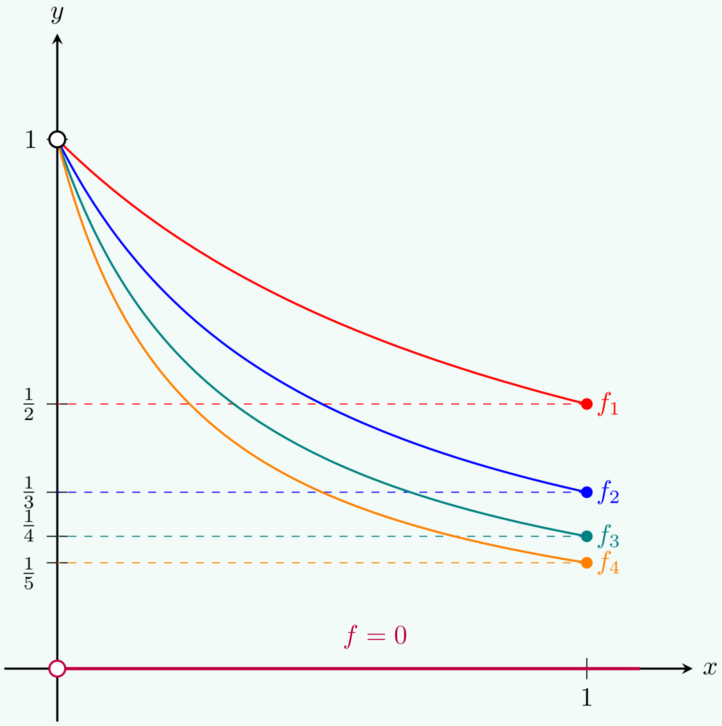
È facile verificare che $f_n \to f$ puntualmente con $f = 0$. Non possiamo applicare il teorema in quanto il dominio non è compatto. Infatti, preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$, comunque io prenda $N \in \mathbb{N}$ per soddisfare la definizione, troov sempre un $x \in S$ tale che $x \in K_n$ con $n > N$. Devo trovare $x \in S$ tale che

$|f_N(x)| > \frac{1}{2}$

$$|f_N(x)| = \frac{1}{nx+1} > \frac{1}{2}$$

$$Nx + 1 < 2 \implies x < \frac{1}{N}$$

Quindi se mi avvicino a 0 trovo sempre un x che rende falsa la definizione di convergenza uniforme.



Anche se prendessimo $S = [0, 1]$, cioè la chiusura per avere un compatto, non funzionerebbe comunque per mancanza di continuità.

Alternatively, we can say that the condition is

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n > N, ||f_n - f||_{\infty,E} < \varepsilon$$

We should say that the difference

$$|f_n(x) - f| \leq \varepsilon$$

but since this must hold for all x, we can use the supremum. Questo è come dire che il limite della successione

$$\lim_n \left(\sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Proposition Criteri convrgenza uniforme

Supponiamo che esista una successione $\{g_n\}$ e $C > 0$ tale che

$$\sup_{x \in S} |f_n(x) - f_m(x)| \leq C \cdot \sup_{x \in S |g_n(x) - g_m(x)} |$$

Allora se $\{g_n\}$ converge uniformemente, anche $\{f_n\}$ converge uniformemente. Viceversa, se troviamo una successione di punti $\{x_n\} \subseteq S$ tali che

$$\lim_n |f_n(x_n) - f(x_n)| > 0$$

Allora
$$\sup_{x\in S}|f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(x_n)-f(x_n)|$$
cioè il supremum è sicuramente maggiore dell'espressione valutata in un singolo punto. In questo caso $\{f_n\}$ non converge uniformemente.

Definizione Spazio funzioni continue limitate

$$C_b(S) = \{f\colon S \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua e limitata}\}$$

Su questo spazio abbiamo la norma
$$||f||_\infty \triangleq \sup_{x\in S}|f(x)|$$
Notiamo che $||f_n - f||_\infty$ non è altro che la distanza d_∞ indotta dalla $||\cdot||_\infty$ sullo spazio $C_b(S)$, dove $d_\infty(g,f) = ||f-g||_\infty$.

Abbiamo dimostrato complessivamente che $C_b(S)$ è uno spazio completo.

Teorema

$C_b(S)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma infinito.

Proof

Consideriamo una successione $\{f_n\}$ nello spazio $C_b(S)$ di Cauchy, cioè
$$\lim_{m,n} d_\infty(f_n, f_m) = \lim_{m,n} ||f_n - f_m||_\infty = 0$$
Vogliamo verificare che esiste quindi $f \in C_b(S)$ tale che
$$\lim_n d_\infty(f_n, f) = \lim_n ||f_n - f|| = 0$$
Ma questo seguente dai risultati precedente e dalle definizioni equivalenti di convergenza uniforme. Infatti, il criterio di Cauchy implica che esista $f\colon S \to \mathbb{R}$ tale che f_n converge uniformemente a f in S. Inoltre, per ipotesi f_n continua e limitata. Quindi, f è pure continua e limitata su S, cioè $f \in C_b(S)$.

Teorema Stone-Weierstrass

Sia $S = K$ compatto. Allora $\forall f \in C_b(K)$, esiste $\{P_n\}$ successione di polinomi $\mathbb{R}[x]$ (anche complessi) tali che $P_n \to f$ uniformemente in K. In altre parole, se consideriamo $P(K)$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali, abbiamo che $P(K)$ è denso in $C_b(K)$ rispetto alla topologia indotta dalla norma infinito.

3.1 Teorem di Ascoli-Arzelà

Il seguente teorema è un analogo di Bolzano-Weierstrass, ma bisogna aggiungere una condizione. Cerchiamo delle condizioni sulla nostra successione di funzioni che garantisca che si possa estrarre una sottosuccessione convergente. Oltre all'equilimitatezza ci serve l'equicontinuità.

Definizione Equicontinuità

Diciamo che la successione $\{f_n\}$ è *equicontinua* su S, se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $|x-y| < \delta$ per $x, y \in S$, allora

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

per $n \in \mathbb{N}$.

Quindi è una sorta di continuità uniforme L'equicontinuità implica che f_n sia uniformemente continua su S, ma non il contrario, cioè se tutti le f_n sono uniformemente continue il δ dell'uniforme continuità delle f_n potrebbe dipendere da n.

Proposition

Se tutte le f_n sono lipschitziane su S, un criterio di equicontinuità è che esista $L > 0$ indipendente da n che verifica la definizione di lipschitzianità per ogni f_n.

Proof

Abbiamo

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x - y|$$

e prendiamo $\delta < \varepsilon/L$.

In particolare se f_n è $\mathcal{C}^1$, allora è sufficiente che $\{f'_n\}$ sia equilimitata per garantire l'equilipschizianità, come in analisi I.

Proposition

Sia $S = K$ compatto e $\{f_n\}$ successione di funzioni continue su K tali che f_n converge uniformemente a f in K con $f\colon K \to \mathbb{R}$. Allora, $\{f_n\}$ è equicontinua.

Proof

Notiamo che, visto che K è compatto, questa proposizione si lega con il fatto che se f_n continua su un compatto, quindi limitata, allora $\{f_n\}$ equilimitata poiché converge uniformemente. Vogliamo mostrare che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x, y \in K$ quando $|x - y| < \delta$ vale

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$

Per la definizione di convergenza uniforme esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ naturale tale che per ogni $n \geq N$ e $x \in K$ vale

$$|f_n(x) - f(y)| < \varepsilon$$

inoltre, f è limite unifome di funzioni continue, quindi è continua. Siccome è continua su un compatto, è uniformemente continua. Di conseguenza esiste $\delta_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

per tutte le $x, y \in K$ ove $|x - y| < \delta_0$. Combinando tutto otteniamo che $\forall n > N$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Però per dimostrare l'equicontinuità dobbiamo trovare un δ che vada bene anche per $f_1, \cdots, f_N$. Anche loro sono continue su un compatto quindi uniformemente continue. Di conseguenza, esistono $\delta_i(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

per ogni $x, y \in K$ dove $|x - y| < \delta_i$. Possiamo quindi prendere $\min\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_N\}$.

Lemma Lemma di Ascoli-Arzelà

Sia $S = K$ compatto e $\{f_n\}$ una successione di funzioni equicontinua su K che converge puntualmente ad $f\colon S \to \mathbb{R}$ in K. Allora, $\{f_n\}$ converge uniformemente a f.

Quindi f è pure continua.

Proof

Per il criterio di Cauchy, ci basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ naturale tale che

$$\forall m, n > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in K$$

Dall'equicontinuità, $\exists \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$ tale che $\forall x, y \in K$ e $i \in \mathbb{N}$

$$|x - y| < \delta \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

Visto che K è compatto, esistono $x_1, \cdots, x_N \in K$ tale che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_\delta(x_j)$$

Visto che $\{f_n\}$ converge puntualmente, in K per il criterio di Cauchy per successioni numeriche, $\forall J \in \{1, \cdots, N\}$ esiste $N_J\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_j\right)$ naturale tale che

$$|f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

per tutte le $m, n > N_J$. Prendiamo $\overline{N} = \max\{N_1, \cdots, N_N\}$. Combinando tutto

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)| + |f_n(x_i) - f_m(x_i)|$$

dove $x_i \in K$ tale che $x \in B_\delta(x_i)$, che esiste sempre. Quindi, $|x - x_i| < \delta$ e di conseguenza

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Teorema Ascoli-Arzelà

Prendiamo $S = K$ compatto e consideriamo $\{f_n\}$ successione di funzioni

1. equicontinua su K;
2. equilimitata su K;

Allora, esiste una sottosuccessione uniformemente convergente in K.

Proof Ascoli-Arzelà

Per il lemma ci basta mostrare che esiste una sottosuccessione che converge puntualmente. Prendimo $r_1 \in K \cap \mathbb{Q}$. Consideriamo la successione $\{f_n(r_1)\}$. Grazie all'equilimitatezza essa è limitata, e quindi per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}(r_1)\}$ convergente. Denotiamo per comodità $f_n^1 \triangleq f_{n_k}$. Ripetiamo il ragionamento prendendo $r_2 \in K \cap \mathbb{Q}$ diverso da r_1 e consideriamo la successione $\{f_n^1(r_2)\}_{n \in J}$ con $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito. Per lo stesso ragionamento di prima estratto una sottosuccessione convergente $\{f_{n_k}^2(r_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$ e denotiamo $f_n^2 \triangleq f_{n_k}^1$. Ripetiamo il processo all'infinito e quindi otteniamo una famiglia di sottosuccessioni

$$\{f_n\} \supseteq \{f_n^1\} \supseteq \{f_n^3\} \cdots$$

Consideriamo la diagonale del seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
f_1^1 \arrow[dr] & f_2^1 & f_3^1 & f_4^1 & \cdots \\
f_1^2 & f_2^2 \arrow[dr] & f_3^2 & f_4^2 & \cdots \\
f_1^3 & f_2^3 & f_3^3 \arrow[dr] & f_4^3 & \cdots \\
f_1^4 & f_2^4 & f_3^4 & f_4^4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Impostiamo $g_k = f_k^k$. Per costruzione $\forall x \in K \cap \mathbb{Q}$ vale che $\{g_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge per come abbiamo costruito le f_k^k. Dobbiamo dimostrare che questa successione converga su tutto K. Visto che $\{g_k\}$ è contenuta in $\{f_n\}$ allora è equicontinua, quindi esiste per ogni $\varepsilon > 0$ un $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ tale che

$$|g_k(x) - g_k(y)| < \varepsilon$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x, y \in K$ quando $|x - y| < \delta$. Ma per tutte le $x \in K$ esiste $x_0 \in K \cap \mathbb{Q}$ tale che $|x - x_0| < \delta$. Inoltre per il criterio di Cauchy per successioni numeriche esiste $N\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_0\right)$ tale che

$$|g_n(x_0) - g_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n, m \geq N$$

Combinando il tutto ottengo che

$$
\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_m(x)| + |g_m(x_0) - g_m(x)| + |g_m(x_0) - g_m(x_0)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

per tutte le $n, m > N$, visto che $|x - x_0| < \delta$. L'epsilon dipende da x ma noi vogliamo la convergenza puntuale.

Esempio

Questo teorema ha ipotesi molto forti, ma il risultato è tuttavia banale- Anche in casi "buoni" non è scontato poter estrarre una sottosuccssione convergente. Prendiamo $S = K = [0, 1]$ come dominio e

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}$$

È facile notare che questa converge puntualmente ad $f = 1$. Inoltre $|f_n(x)| \leq 1$ e $f_n(1/n) = 1$. Se esistesse una sottosuccessione $\{f_n\}$ dovrebbe convergere ad f, tuttavia

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_{n_k} - f| = \sup_{x \in [0,1]} |f_{n_k}(x)| > f_{n_k}(\frac{1}{n_k}) > 1$$

che è assurdo perché il sup è sempre maggiore o uguale della funzione valutata in un punto.