

# Category theory

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1 Categorie</b>	<b>1</b>
1.1 Tipi di categorie . . . . .	1
<b>2 Funtori</b>	<b>2</b>
<b>3 3 Esempi</b>	<b>3</b>
<b>4 Subobject</b>	<b>3</b>
<b>5 15/10/2025</b>	<b>5</b>
<b>6 16 ottobre</b>	<b>6</b>
<b>7 Smallest equivalence relation</b>	<b>8</b>
7.1 Filtered category . . . . .	8
<b>8 Lemma di Yoneda</b>	<b>9</b>
<b>9 Analogia sui prefasci</b>	<b>9</b>
<b>10 Esponenziali</b>	<b>9</b>
<b>11 Heyting algebras</b>	<b>9</b>
<b>12 Subobject classifiers</b>	<b>9</b>

## 1 Categorie

Se un oggetto iniziale esiste in una categoria allora è unico a meno di isomorfismo. Se esistessero due oggetti iniziali  $0$  e  $0'$ , allora ci deve essere un morfismo fra  $0$  e  $0'$  e uno fra  $0$  e  $0'$ . Dalla definizione tale morfismo è isomorfismo. Il duale è il medesimo teorema con l'oggetto terminale.

Studiamo cosa sono gli oggetti iniziali nella categoria Sets. Se consideriamo l'insieme vuoto, vi è una e una sola funzione che colla tale insieme a tutti gli altri. Quindi l'insieme vuoto è l'oggetto iniziale della categoria Sets.

Invece, l'oggetto terminale è il singoletto della categoria Sets. Infatti tutti i singoletti sono isomorfi fra loro.

L'uguaglianza degli insiemi diventa isomorfismo nelle categorie. Possiamo dare un complementare dell'assioma dell'estensionabilità nelle categorie, cioè due oggetti sono uguali se hanno gli stessi elementi generalizzati.

### 1.1 Tipi di categorie

La categoria Set, Top, Gr, Rng, Vect/K, T-mod(Set).

Possiamo costruire la categoria discreta data un insieme, i cui oggetti sono gli elementi e le cui freccie sono solo le identità.

Possiamo fare una categoria da un preordine. Essa ha al massimo un morfismo fra due oggetti distinti. Esercizio: queste categorie sono tutte quelle indotte da un preordine.

Possiamo fare una categoria con un singolo oggetto (monoide).

Possiamo fare un grupoide: una categoria con soli isomorfismi. In particolare se un grupoide ha solo un oggetto allora è un gruppo.

La categoria **Cat** è la categoria di tutte le categorie (piccole) dove i morfismi sono funtori

Mettere l'esempio del funtore duale fra spazi vettoriali. Il doppio duale è una trasformazione naturale.

## 2 Funtori

Date due categorie  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  possiamo definire TODO la categoria  $[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$  dei funtori da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}'$  dove gli oggetti sono i funtori da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}'$ , i morfismi sono le trasformazioni naturali, e la composizione è componente per componente.

### Esercizio

Una trasformazione naturale è un isomorfismo naturale se e solo se tutte le sue componenti sono degli isomorfismi nella categoria d'arrivo.

Dalla definizione  $\alpha$  ammette un inverso nella categoria **Cat**. Cioè due funtori sono naturalmente isomorfi se sono oggetti isomorfi in  $[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ . L'esercizio richiede di costruire una trasformazione naturale inversa e verificare che sia ancora naturale. Quindi esiste  $\alpha'$  tale che  $\alpha \circ \alpha' = 1$  e  $\alpha' \circ \alpha = 1$ . Se nel diagramma della trasformazione naturale invertendo le freccie di  $\alpha$  la commutatività vale ancora, ma nell'altra direzione.

TODO definizione dull and faithful functors and subcategory. Non definiamo una nozione di suriettività fra oggetti in quanto l'uguaglianza fra oggetti non è robusta. Vogliamo non distinguere oggetti essenzialmente uguali. L'uguaglianza diventa l'isomorfismo. Infatti la suriettività essenziale usa un isomorfismo.

Nella definizione del funtore sottocategoria, il funtore è sempre federale, ma non necessariamente full.

### Definizione Category equivalence

TODO Anche qui non usiamo l'uguaglianza ma l'isomorfismo.

### Teorema

Under the axiom of choice a functor is part of an equivalence of categories if and only if it is full, faithful and essentially surjective.

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Trivial check. (Exercise) Non richiede l'assioma della scelta.

( $\Leftarrow$ ) Dobbiamo costruire un funtore  $G$  che sia un inverso. Quindi dobbiamo effettuare delle scelte.

Questa nozione ci dice che usando AC possiamo definire un quasi-inverso, che non è unico. Ma in generale i funtori per cui devo eseguire una scelta non sono particolarmente interessanti.

Dato un funtore  $F$  possiamo considerare  $\text{End}(F)$  che è il monoide delle trasformazioni naturali da  $F$  a  $F$ . In particolare, comprende gli automorfismi e quindi il gruppo  $\text{Aut}(F)$ . Nel contesto degli insiemi mancano le componenti, che sono i morfismi (a parte l'identità). Quindi questo contetto diventa banale.

Mettere i 3 esempi di functor categories. La composizione della functor category è componente per componente

$$F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$$

$(\alpha * \beta)(a) = \beta(c) \circ \alpha(a)$

### 3 3 Esempi

Esempio 2: Chiamiamo  $X$  l'insieme. Visto che  $\tau$  è un endomorfismo di  $X$ , prendiamo il prodotto cartesiano e otteniamo una azione sinistra. Se volessimo l'azione destra potremmo prendere il duale del monoide.

La condizione di naturalezza corrisponde con la condizione che  $f$  sia una funzione equivariante, cioè rispetta l'azione (M-equivariante).

$$m *' f(*) = f(m * x)$$

cioè è compatibile con le due azioni, di  $M$  su  $X$  e di  $M$  su  $Y$ .

Quindi la categoria studiata è la categoria delle azioni sinistre su insiemi e delle mappe M-equivariante fra loro.

Esempio 3: Non abbiamo condizioni di naturalità nel senso che escludiamo le identità che sono banali. Le trasformazioni naturali corrispondono a famiglie di funzioni

#### Definizione Slice category

La composizione è data dai morphism  $h: a \rightarrow b$  tale che il diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h} & b \\ f \swarrow & & \searrow g \\ c & & \end{array}$$

#### Esercizio

Show that for any set  $I$ , set slice category  $\mathbf{Sets}/I$  is equivalent to the category  $[I, \mathbf{Set}]$  (which is the disjoint union).

Partiamo da una collezione di insiemi indicizzata e la mando nell'unione disgiunta degli  $A_i$  per formare la mappa canonica invertibile:  $(x, i) \rightarrow i$  e nell'altra direzione, partendo da un insieme  $A$  con  $f: A \rightarrow I$ , associo la controimmagine (che in questo caso posso fare in generale). Quindi prendo le fibre  $\{f^{-1}(i) \mid i \in I\}$ . Dobbiamo verificare i dettagli.

C'è un equivalenza fra le categorie indicizzate e la nozione di fibrazione (che sono dei funtori). Il risultato che forma ciò è Grothendieck's equivalence between indexed categories and fibrations. Le indexed categories generalizzano i funtori  $I \rightarrow \mathbf{Sets}$ , dove  $I$  viene sostituita dalla categoria delle categorie piccole, e i funtori dagli pseudofuntori. Le fibrazioni generalizzano gli oggetti si  $\mathbf{Sets}/I$ .

### 4 Subobject

è la generalizzazione categorica dei sottoinsiemi. Anche qua il triangolo con i due monomorfismi e il morfismo sopra deve commutare. Ciò è equivalente (piccola verifica esercizio) al fatto che siano isomorfe come oggetti nelle categoria slice.

Dobbiamo considerare le classi di equivalenza altrimenti non riusciamo ad identificare...

Dualizzando i monomorfismi otteniamo gli epimorfismi e quindi dualizzando otteniamo i quozienti (su un categoria che deve essere esatta).

**Definizione** Balanced category

A category is said to be balanced if epi and mono => iso.

## 5 15/10/2025

### Oggetti iniziali in Set:

The singleton  $1_{\text{Set}} = \{\ast\}$  satisfies a universal property: for any  $C$  set there exist a unique arrow  $C \rightarrow 1_{\text{Set}}$ .

$$\begin{array}{c} 1_{\text{Set}} \\ \uparrow \\ \exists! \\ C \end{array}$$

### Oggetti terminali in Set:

Dually, the empty set  $\emptyset$  satisfies the following universal property:

$$\begin{array}{c} \emptyset \\ \downarrow \\ \exists! \\ C \end{array}$$

**Kernel in vector spaces in Set:** Per semplicità usiamo set. Possiamo generare il kernel come l'egualizzatore prendendo  $g = 0$

$$\text{Eq}(f, g) = \{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$$

Quindi  $\text{Eq}(f, g) \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}} W$  Suppose  $h: C \rightarrow V$  is an arrow such that  $f \circ h = g \circ h$ . Then,

there exists exactly one arrow (factorization)  $h': C \rightarrow \text{Eq}(f, g)$  such that  $i \circ h' = h$ . Quindi,  $\forall c \in C$ ,

$$h(c) \in \text{Eq}(f, g) \iff f(h(c)) = g(h(c))$$

Se prendiamo una altra mappa che soddisfa tale proprietà universale allora essa è necessariamente isomorfa a  $i$ .

Un ulteriore generalizzazione è detta Pullbacks o prodotto fibrati.

Consideriamo due insiemi  $A, B$  che vivono al di sopra di  $D$  mediante mappe  $h, k$ . Allora viene usata la notazione

$$A \times_D B = \{(a, b) \in A \times B \mid h(a) = k(b)\}$$

e quindi il diagramma commuta  $\begin{array}{ccc} A \times_D B & \xrightarrow{p} & A \\ q \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{k} & D \end{array}$  La proprietà universale di questo prodotto è data da: per ogni  $C$  tale che  $h \circ g = k \circ g$ , esiste un unico  $\xi$  tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{f} & & & \\ \swarrow h & \nearrow \exists! \xi & & & \\ & A \times_D B & \xrightarrow{p} & A & \\ & \downarrow q & & \downarrow h & \\ & B & \xrightarrow{k} & D & \end{array}$$

Prendendo  $D = 1_{\text{Set}}$  otteniamo l'usuale prodotto cartesiano.

Prendendo il duale di questa costruzione troviamo il Pushout chde permette di trattare il caso di unioni che non sono disgiunte. This is an object  $X$  together with arrows  $J_A, J_B$  such that for any object  $C$  with arrows  $f, g$  such that  $f \circ i_A = g \circ i_B$ , there exist a unique arrow  $\xi$  such that  $\chi \circ J_A = f$  and  $\chi \circ J_B = g$

$$\begin{array}{ccccc}
D & \xrightarrow{i_A} & A & & \\
i_B \downarrow & & \downarrow J_a & & \\
B & \xrightarrow{J_b} & X & \xrightarrow{f} & C \\
& & \searrow g & \exists! \xi \searrow & \\
& & & & C
\end{array}$$

Nel caso  $D = \emptyset$  possiamo prendere l'unione disgiunta. Se  $D$  non è vuoto come costruiamo  $X$ ? Possiamo prendere un quoziente dell'unione disgiunta secondo la relazione generata da le coppie  $(i_A(d), i_B(d))$  for  $d \in D$ . Questo fa sì che elementi non appaiano molteplici volte. Esercizio: verificare i dettagli.

Nel caso particolare in cui l'unione non è disgiunta abbiamo  $D = A \cap B$  e  $i_{A,B}$  sono le inclusioni di  $A \cap B$

$$\begin{array}{ccc}
A \cap B & \hookrightarrow & A \\
\text{in } A \text{ e } B. \text{ In tal caso abbiamo} & \downarrow & \text{Given } d \in D, i_A(d) = i_B(d) \text{ e } J_A \text{ e } J_B \text{ li mandano negli} \\
& B &
\end{array}$$

stessi elementi di  $X$ , per la commutatività.

### Quozienti:

Consideriamo un insieme  $X$  e una relazione di equivalenza  $R \subseteq X \times X$ . Consideriamo la proiezione canonica

$$\pi_R: X \rightarrow X/R$$

$$\begin{array}{ccc}
& X & \\
p \nearrow & \uparrow \pi_1 & \\
R & \xrightarrow{\quad} & X \times X \\
q \searrow & \downarrow \pi_2 & \\
& X &
\end{array}$$

quindi Consider the following diagram: for any  $C$  and  $h$  such that  $h \circ p = h \circ q$  there exists a unique  $\xi$  such that the diagram commutes ( $\xi \circ \pi_R = h$ )

$$\begin{array}{ccccc}
R & \xrightarrow[p]{q} & X & \xrightarrow{\pi_R} & X/R \\
& & \searrow h & \downarrow \exists! \xi & \\
& & C & &
\end{array}$$

For a function

$h: X \rightarrow C$  to factor through the quotient map  $\pi_R$  the following condition is necessary and sufficient (well-defined):  $\forall (x, x') \in R, h(x) = h(x')$ , which can also be stated  $h \circ p = h \circ q$  (which removes the element dependency). Questo è il duale della proprietà universale dell'egualizzatore.

## 6 16 ottobre

Any category  $\mathcal{C}$  has an underlying oriented graph  $U(\mathcal{C})$  which forgets the composition law for morphisms. It is natural to define a diagram in  $\mathcal{C}$  as morphisms of graphs  $G \rightarrow U(\mathcal{C})$  where  $G$  is a graph specifying the form of the diagram.

**Categorie libera su un grafo.** We can construct a minimal category starting from a graph. The objects are the same as the graph, and the morphisms need to be chosen such that they compose. We can define such composition as the concatenation of morphisms with compatible domains and codomains. This is the free category  $F(G)$  on  $G$  which satisfies the following universal property: for any category  $\mathcal{C}$  we have the graph morphisms  $G \rightarrow U(\mathcal{C})$  and functors  $F(G) \rightarrow \mathcal{C}$ .  $F(G)$  is constructed by taking as objects those of  $G$  and as arrows the finite lists of arrows in  $G$  with composable domains and codomains; the composition law is given by list concatenation.

This construction allows us to define the notion of diagram in the language of category theory itself, without loss of generality.

### Definizione

A diagram  $D$  in a category  $\mathcal{C}$  is a functor  $D: J \rightarrow \mathcal{C}$ , where  $J$  is a category defining the "shape" of the diagram  $D$ .

This means that a functor  $F: J \rightarrow C$  can be thought as a diagram in  $C$  of shape  $J$ .

### Definizione Cono

A cone with vertex  $c$  over a diagram  $D: J \rightarrow C$  is a collection of morphisms  $\{\lambda_j: c \rightarrow D(j)\}$  for all  $j \in J$  such that  $D(\xi) \cdot \lambda_{J_1} = \lambda_{J_2}$

$$J_1 \xrightarrow{\xi} J_2$$

$$\begin{array}{ccc} D(J_1) & \xrightarrow{D(\xi)} & D(J_2) \\ \lambda_{J_1} \uparrow & \nearrow & \\ c & & \end{array}$$

Ci deve essere una freccia sola per ogni oggetto caratterizzante nel diagramma.

### Definizione Limit

A limit of a diagram  $D: J \rightarrow C$  is a cone over  $D$  which is universal, i.e. such that any cover over  $D$  factors uniquely through it.

$$\begin{array}{ccccc} D(J_1) & \xleftarrow{l_{J_1}} & \lim(D) & \xrightarrow{l_{J_2}} & D(J_2) \\ \swarrow \lambda_{J_1} & & \uparrow \exists! & & \searrow \lambda_{J_2} \\ c & & & & \end{array}$$

This means that there exists for any cone  $\{\lambda_j: c \rightarrow D(j)\}$  over  $D$ , a unique arrow  $\xi: c \rightarrow \lim D$  such that all the triangles commute.

### Definizione Complete category

A category  $C$  is said to be complete if every diagram  $D: J \rightarrow C$  where  $J$  is a small category.

### Definizione Colimite

The dual notion of the notion of limit is called colimit.

Cioè un colimite di un diagramma  $D: J \rightarrow C$  è esattamente il limite del diagramma  $D^{op}: J^{op} \rightarrow C^{op}$ .

Exercise: esplicita la proprietà universale di colimite. Exercise: mostra che quest'ultima si specializza in nelle due proprietà universali dell'unione disgiunta, pushout e quotient.

Il cono viene formalmente definito nelle slide. Il diagramma a quadrato della naturalità collassa perché una freccia è l'identità, cioè il funtore delta c manda tutte le frecce in quella identitaria. (Lezione 16 ottobre mostra il quadrato che diventa degenere).

Esercizio: mostra che se il limite di un diagramma esiste, allora è unico a meno di isomorfismo. (The proof method is the same already used in the articular cases of the product and equalizer). La stessa dimostrazione vale per i colimiti.

L'immagine di un cono è un cono ma non necessariamente universale. Quindi un funtore non preserva i limiti.

Exercise: Show that the universal property of the limit specializes to the universal properties of the pullback (or fibered product) and of the equalizer.

**Come definire a,b del teorema slide Limits in Set:** Abbiamo

$$a, b: \prod_{i \in \text{Ob}(I)} H(i) \rightarrow \prod_{\substack{u: i \rightarrow j \\ J \in \text{Ob}(I)}}$$

usiamo due strade per definire a e b con la composizione, che non danno appunto necessariamente il medesimo risultato. Da una parte ho  $H(i)(x_i)$  e dall'altra ho  $x_j$ .

Exercise: show that  $\text{Eq}(a, b)$  satisfies the universal property  $\lim H$ . Visto che abbiamo fissato  $H$  vale per tutti. Il cono è quello l'eq in quello nelle slide.

## 7 Smallest equivalence relation

Vogliamo trovare la relazione di equivalenza generata da una relazione data (definizione). Sia  $R$  una relazione (non necessariamente di equivalenza) in  $X$ . Vogliamo trovare la più piccola relazione che contiene  $R$ . Potremmo prendere l'intersezione di tutte le relazioni che contengono  $R$ , ma non è pratico.

Vogliamo forzare le proprietà della relazione di equivalenza, prendiamo quindi

$$R' = R \cup \{(x, x) \mid x \in X\} \cup \{(x, x') \mid (x', x) \in R\}$$

questa aggiunge la riflessività e simmetria. Per la transitività definiamo  $R''$  tale che  $(x, x') \in R''$  se e solo se esiste una successione finita che connette  $x$  e  $x'$  in  $R'$ .

### 7.1 Filtered category

Nella definizione è come richiedere che esista un cocono (non per forza il limite, solo il cocono). Tipo per l'oggetto iniziale era il limite del diagramma vuoto quindi un cocono.

#### Lemma

Una categoria è filtrata se e solo se ammette un cocono per tutti i diagrammi finiti (oggetti finiti e morfismi finiti). È proprio la definizione.

#### Proof

Sia  $D: J \rightarrow I$  un diagramma finito, quindi  $J$  è finita. Possiamo costruire un cocono di forma coprodotto on all the object  $D(i)$ . And then we can coequalize and obtain for every arrow  $u: i \rightarrow j$  a "coequalizing arrow"  $D(u): D(i) \rightarrow D(j)$ . By the definition of filtered category we can find arrows such that it commutes. Applying this for every arrow of  $J$  we obtain a cocone on  $D$ . Thus, on every finite diagram we can have a cocone constructed as such.

## 8 Lemma di Yoneda

Il lemma di Yoneda mette in relazioni le trasformazioni lineari (livello 2) con i funtori che sono elementi di un insieme. Questa è una biezione fra insiemi.

Dal diagramma di naturalezza con il caso particolare possiamo trovare che  $\alpha_d(f) = Ff(\alpha_C(1_C))$  quindi da quel singolo elemento posso ricostruire la trasformazione.

Se facciamo variare  $F$  e  $c$  (variabilità in due componenti), al posto che una biezione fra insiemi possiamo riscrivere il teorema a livello di funtori, cioè come un isomorfismo naturale fra funtori.

### Esempio Nota da mettere nella trasformazioni naturali

Per mostrare la naturalità di  $A \times B$  basta mostrarla per ogni componente.

Nella dimostrazione che l'embedding di Yoneda è full e faithful BISOGNA dimostrare anche che la biezione indotta dall'embedding coincide con la mappa sovradefinita.

La pagina 28 (fact) è un corollario del lemma di Yoneda.

## 9 Analogia sui prefasci

Come negli insiemi possiamo rappresentare le funzioni dai singleton

$$\text{Hom}(\{\ast\}, X) \cong X$$

facciamo la stessa cosa con i prefasci usando i funtori rappresentabili. Questo è precisamente il lemma di Yoneda.

## 10 Esponenziali

Quando costruisco gli esponenziali dei prefasci, l'isomorfismo fra gli omomorfismi deve valere per tutti gli  $Z$ . In particolare, scelgo  $Z = y(c)$ . Applichiamo il lemma di Yoneda e otteniamo quindi la definizione di esponenziale che siamo obbligati ad adottare. Dobbiamo comunque verificare che questa cosa funzioni (è condizione necessaria ma non è detto che sia sufficiente). Dobbiamo mostrare che forma un prefascio. Dobbiamo poi verificare che vi è la corrispondenza biunivoca per ogni  $R$ .

Dopo aver trovato la biezione fra  $C \rightarrow Q^P$  e

$$\text{Hom}_{C/c}(C \times P, C \times Q)$$

notiamo che i due funtori fra  $C$  e  $C/c$  e quello forgetful da  $C/c$  a  $C$  sono in aggiunzione.

## 11 Heyting algebras

Nella definizione, il simbolo  $x \implies y$  è come dire  $y^x$ . Infatti, la condizione data del se e solo se è precisamente l'aggiunzione dell'esponenziale.

Si dice pseudocomplemento perché soddisfa che  $x \wedge \neg x = 0$  but not necessarily  $x \vee \neg x = 1$ .

## 12 Subobject classifiers

La freccia di appartenenza è una generalizzazione di quella classica  $\in : A \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}$ . L'esponenziale  $\Omega^A$  è come l'insieme delle parti, infatti  $\mathcal{P}(A) = \{0, 1\}^A$ .