Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1 Sottoinsiemi finali

Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0\}$$

Proposition

Usando l'assioma indutivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Combinatorica

Il valore $n!$ è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni fa F_n a F_n che sono biettive. Dove $F_n = \{1, 2, 3 \cdots, n\}$.

$$n! = |\{f\colon F_n \to F_n\}|$$

Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è F_1, che contiene solo 1 elemento e $1! = 1$.
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme F_n, aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in $n+1$ posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è $n!(n+1) = (n+1)!$.

La funzione $\sigma(n)$ è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta n elementi). Infatti, le permutazione di n sono $n!$, ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di k oggetti scelti fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero delle funzioni iniettive $f\colon F_k \to F_n$.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di k oggetti scelto fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero di sottoinsiemi di F_n di cardinalità k.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbimao che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme X.

Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$ è equivalente a $x \notin A \cap B$, che è equivalente a $x \notin A$ o $x \notin B$. Allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, e quindi $x \in A^c \cup B^c$.

2.1 Funzione indicatrice

Dati due insiemi E e F, abbiamo $E \neq F \iff 1_E \neq 1_F$.

La notazione y^x indica $\{f : x \to y\}$, cioè tutte le funzioni da x a y.

La funzione $\Xi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ tale che $\Xi(E) = 1_E$ è biettiva. È iniettiva perché sottoinsiemi diversi hanno funzioni caratteristiche diverse, suriettiva perché ogni funzione definisce un insieme diverso (e quindi c'è sempre un insieme che porta in ciascuna funzione). La funzione $f : X \to \{0,1\}$ è pari a $f = 1_E$ per $E = \{x \mid f(x) = 1\}$. Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti.

Quindi, siccome è biettiva le cardinalità coincidono

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = 2^n$$

2.2 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

3 Interi relativi

In $\mathbb{N}$ è definita la funzione $+\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dove $(m,n) \to m+n$.

Abbiamo chiaramente che $(a,b) = (a',b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

Le prorpietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia, $m - n$ è definito solo per $m \geq n$.

Definiamo $\mathbb{Z}$ come l'insieme
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$
Abbiamo allora $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{=1} n' = -n \,|\, n + (-n) = 0$, e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma $+\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists - n \,|\, n + (-n) = 0$$

Per definire gli inversi di tutti i numeri $\neq 0$, si introducono le frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Si dice che due frazioni sono equivalenti $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m}{n}$ se $mn' = m'n$. I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

Abbiamo che
$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \to \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali $\mathbb{Q}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ introdotte. Quindi $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, per cui possiede le operazioni $+$ e $\cdot$ con le prorpietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in $\mathbb{Q}$ si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di $\mathbb{Q}$ ha un ordinamento totale dove $r \leq s$ se e solo se $r - s$ è non-negativa.

In $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento che è compatibile ocn le operazioni $+$ e $\cdot$, cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con $t \in \mathbb{Q}$ e con $t \geq 0$ abbiamo $tr \leq ts$.

Definizione Campo ordinato

Un campo F nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in $\mathbb{Q}$ sono risolvibili.

Teorema Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Proof Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini $r = \frac{m}{n}$, tale che $r^2 = 2$. Abbiamo quindi che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$. Ciô ci dice che m^2 è pari. Allora, 2 è un fattore anche di m (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi m è pari. Di conseguenza, se m è divisibile per 2, allora m^2 è divisibile per 4. Abbiamo quindi $4k = n^2$ e quindi n^2 è divisibile per 2, anche n, contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

4 Definizioni con ordini

4.1 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della prorpietà del sup sono:

- **proprietà archimedea:** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,|\, na > x$ (in realtà vale anche in $\mathbb{Q}$).
- **densità dei razionali nel reali:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dove $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q} \,|\, x < r < y$.

Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \,|\, x^n = y$$

Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che E non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo $x = \sup E$ e mostriamo che $x^n = y$.

- **Non vuoto:** se $y \geq 1$, basta scegliere $x = 1$ in quanto $x^n = 1 \leq y$. Altrimenti, se $y < 1$, poniamo $x = y$ e notiamo che, perché $y < 1$, allora $y^n < y$, e quindi $y \in E$.
- **Limitato superiormente:** E è limitato superiormente, infatti $1 + y$ è un maggiorante di E. Se $z \geq (1 + y)$, poiché la funzione $t \to t^2$ è crescente per $t > 0$, si ha $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$. Sia $x = \sup E$. Dico che $x^n = y$. Dimostro che se suppongo $x^n > y$ allora per k grande
$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$
e quindi $x - \frac{1}{k}$ è ancora un maggiorante di E, contro l'ipotesi impossibile perché x, che è il $\sup E$, è il più piccolo maggiorante. Invece, se $x^n < y$ allora per k grande
$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$
allora $x + \frac{1}{k} \in E$ ed è più grande di x, e x non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che x non può essere nè più grande nè più piccolo, $x^n = y$.
- **Unicità:** notiamo che se $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$.

Possiamo anche mettere $z \geq 0$ così dimostrare che $E \neq \emptyset$ è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che $0 < y < 1 \implies y^n < y$, per $n > 1$. (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

5 Esponenziali

5.1 Potenze ad esponente reale e esponziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni p intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza x^r è quindi ben definita con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = \left(x^{-}1\right)^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1. $\forall x > 0, x^0 = 1$;
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (x^r)^s = x^{rs}$;

Con $r > 0$ posso definire $0^r = 0$ e se $r = \frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) con n dispari posso definire $x^{\frac{m}{n}}$ se $x < 0$.

5.2 Potenze a esponente reale

Se $x = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$. Se $x > 1$ e $r < s$, allora $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = \left(\sqrt[p]{x}\right)^m < \left(\sqrt[p]{x}\right)^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con $a > 1$ e $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad $a < 0$ come

$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

E infinie se $0 < x < 1$

$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

5.3 Esponenziali

Fissata una base $a > 0$ abbiamo poi l'esponenziale che è definita da a^x, $x \in \mathbb{R}$.

Risulta che se $a = 1$, allora la funzione è sempre 1. Se $a > 1$ la funzione è stretta crescente, e strettamente descrescente se $0 < a < 1$.

La funzione è biettiva tra $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$, quindi è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a(x)$.

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g $\ln(x(x-1))$ non is può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2 \log_2 |x|$.

6 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ e vale $x^2 = 0 \iff x = 0$. Quindi l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$. Estendiamo il campo $\mathbb{R}$ costruendo un campo $\mathbb{C}$ che contiene una immagine isomorfa di $\mathbb{R}$ nel quale $z^2 = -1$ ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+ \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in $\mathbb{R}$;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia $0, 0$;
3. l'opposto di (a, b) è $-(a, b)$;

Si può rappresentare $\mathbb{C}$ come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento $(1, 0)$ è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere $z^{-1} = (x, y)$ dove $(a, b)(x, y) = (1, 0)$.

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

6.1 Inclusione dei reali

Ogni number $r \in \mathbb{R}$ può essere identificato con il numero complesso $(r, 0)$. Cosifacendo, l'applicazione $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi(a) = (a, 0)$ preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere $z = (a, b)$ come $a(1, 0) + b(0, 1)$. Se identifichiamo $i = (0, 1)$, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità $i^2 = -1$.

6.2 Operazioni algebriche

Definizione Coniugio

Dato $z = a + bi \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{z} = a - bi$$

Chiaramente, $z + \overline{z} = 2\Re(z)$. Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:** $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$;
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ per $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni numero complesso z,

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

e per ogni numero complesso w

$$\overline{wz} = wz\overline{wz} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare, $|z^n| = |z|^n$.

La disuguaglianza $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

- $|wz| = |w| \cdot |z|$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Da dimostrare: $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.

6.3 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\cos\theta)^{n-k} (\sin\theta)^k$$

7 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $p(z)$, z_0 è una radice di $p(z)$ se esiste un polinomio $q(z)$ con $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$ tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se $p(z)$ è divisibile per $z - z_0$.

La radice z_0 ha moltiplicità $m \geq 1$ se $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.

8 Spazi topologici

Un punto x_0 è isolato in E se $\exists r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$.

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. x_0 è di accumulazione cioè $\forall r > 0$,

$$((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$

2. $\forall r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di E).

Proof

($\Longrightarrow$) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che $\exists r > 0$ tale che $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è finito, e quindi $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ dove $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sono gli elementi di $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$ diversi da x_0. Chiaramente, esiste un $0 < \varepsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \cdots, |x_0 - x_n|\}$. Siccome l'insieme è finito, ε esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione x_0 non è di accumulazione.

($\Longleftarrow$) Trivial.

9 Successioni

Proposition Proprietà dei limiti

1. **Teorema di permanenza del segno:** Se $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$ e $\lambda < \mu$, allora esiste $N \,|\, \forall n \geq N, x_n < y_n$. Infatti, $\forall \lambda < a < b < \mu$, esiste N tale che $\forall n \geq N$, $x_n < a$ e $y_n > a$. Infatti, assumendo $\lambda < \mu$, dati a, b tale che $\lambda < a < b < \mu$, esistono intorni I di λ e J di μ tale che
$$I \subseteq (-\infty, a)$$
e
$$J \subseteq (b, +\infty)$$
Per definizione di limite:
   - $$x_n \to \lambda \implies \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$
   - $$y_n \to \lambda \implies \exists N_2 \,|\, \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

   Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, abbiamo $x_n \in (-\infty, a)$ cioè $x_n < a$ e $y \in (b, +\infty)$, cioè $y_n > b$. Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con
$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$
Infatti, $x_n \to 0$ se e solo se $|x_n| \to 0$
$$\begin{cases} x_n \to 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \to 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$
Poichè
$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \to 0$$
poniamo $y_0 = 0, \forall n$ non vale nè $x_n \geq 0$ nè $x_n \leq 0$ definitivamente.
In particolare, se $y_n \to \mu > 0$, y_n è definitivamente strettamente > 0 cioè esiste N tale che $\forall n \geq N, y_n > 0$ e infatti $\forall b \in (0, \mu)$ esiste N tale che $y_n > b, \forall n \geq N$.
2. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni)**: Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni tale che $x_n \leq y_n$ definitivamente. Se $\exists \lim x_n = \lambda$ e $\exists \lim y_n = \mu$ allora $\lambda \leq \mu$.
3. **Teorema dei carabinieri:** Siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ tre successioni reali con $x_n \leq y_n \leq z_n$ definitivamente, e supponiamo che $x_n \to l$ e $z_n \to l$. Allora, $y_n \to l$.
Se $x_n \to +\infty$ e $z_n \to +\infty$, allora $y_n \to +\infty$.
Se $x_n \to -\infty$ e $z_n \to -\infty$, allora $y_n \to -\infty$.

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè $\lambda > \mu$, per il punto 3 si avrebbe $x_n \geq y_n$ definitivamente.

Proposition

Se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata cioè $\exists m < M$ tale che $m \leq y_n \leq M$, allora $x_n \cdot y_n \to 0$. Infatti,
$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

Proposition

Sono equivalenti:

1. $\exists a, b \,|\, a < b \wedge a \leq x_n \leq b, \forall n$

2. $\exists M > 0 \,|\, |x_n| \leq M, \forall n$

9.1 Aritmetica dei limiti

Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali con $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$ con $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition Addizione

$x_n + y_n \to \lambda + \mu$ dove $\lambda + \mu$. Questa somma è quella usuale se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, altrimenti $\pm\infty + c = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$.

Proof

Nel caso in cui λ, μ sono finiti, $x_n \to \lambda$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $y_n \to \mu$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, |y_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n - y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leqslant |x_n - \lambda| + |y_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione $x_n + y_n \to \lambda + \mu$.
Dimostriamo ora che se $x_n \to +\infty$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n + y_n \to +\infty$. Ricordiamo chde se $y_n \to \mu$ finito allora $\{y_n\}$ è limitata si conclude che vale la tesi nel caso $\lambda = +\infty$ e μ finito.
Infatti, $\{y_n\}$ è limitato quindi esiste K tale che $|y_n| \leq K$ per tutte le n. $x_n \to +\infty$ per definizione $\forall M > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n > M + K$.
Quindi $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + k) - K = M$ (alla pegio tolgo un K).
Il caso $-\infty$ è identico.

Mostriamo ora che $x_n \to +\infty$ e $y_n \to -\infty$, allora $x_n + y_n$ può tendere a $c \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ o oscillare.

Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \to +\infty \\ y_n = -n \to -\infty \end{cases}$$

Allora $x_n + y_n = c \to c$.

La definizione di limite finito è $\forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Proposition

Se so che $x_n \to l$ finito dato $\varepsilon > 0$ posso applicare la definizione di limite a un qualuncuque multiplo di ε e concludere che

$$\exists N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ si trovi $N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$ con c fisso positvo. Allora $x_n \to l$ infatti basta aplicare le condizioni a $\frac{\varepsilon}{c}$.

Proposition Moltiplicazione successioni

Dati $x_n \to \lambda$, $y_n \to \mu$ allora $x_n \cdot y_n \to \lambda \to \mu$ dove $\lambda\mu$ è l'usuale prodotto se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se $c \neq 0$, $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ con le regole dei segni, e $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ con le regole dei segni. Non è definito $0 \cdot \infty$ forma indeterminata del prodotto.

Proof

Supponiamo presi λ, μ finiti per ipotesi $x_n \to \lambda$ fissato $\varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$ e $y_n \to \mu$ fissato $\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$. Se $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$ abbiamo

$$\begin{aligned}|x_n y_n - \lambda\mu| &= |x_n y_n - x_n\mu + x_n\mu - \lambda\mu| \\ &= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\ &\leq N \cdot |y_n - \mu| + |y||x_n - \lambda| \\ &\leq (N + |\mu|)\varepsilon\end{aligned}$$

$x_n \to \lambda$ finito implica che x_n è limitata, cioè $\exists M \mid |x_n| \leq M, \forall n$. Per l'osservazione fatta, questo dimostra che $x_n y_n \to \lambda\mu$.

Proposition Quoziente successioni

Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali tali che $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$. Supponiamo che $y_n \neq 0$ definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se $\mu \neq 0$), cosicché è definitivamente definita la successione $\frac{x_n}{y_n}$. Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\lambda}{\mu}$$

Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\frac{\lambda}{\mu}$ è l'usuale quoziente. Se invece $\lambda = \pm\infty$ e $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\mu = 0^{\pm}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ (forme indeterminate del quoziente) e $\frac{\lambda}{0}$ con 0 senza segno.

Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significatica forma di indecisione, al contrario del denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2 = n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1+\frac{\sin n}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}}{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{2}{n^3}}$$

Il termine $\frac{\sin}{n}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$, e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre, $(1+\frac{1}{n})$ tende a 1 e $\frac{2}{n^3}$ tende a 0.

Nota: Il termine dominante in $\frac{3}{m}+\frac{4}{n^2}$ è $\frac{3}{m}$.

Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia $\{x_n\}$ una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$ (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui x_n è definitivamente monotona crescente e che quindi $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$. Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$: La tesi è che esiste $\exists N_1 > 0 \,|\, \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$. Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum, $\forall \varepsilon > 0$ we have that
  - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
  - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, x_N > \xi - \varepsilon$

  e poiché x_n è monotona crescente, $\forall n \geq N$ abbiamo

  $$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$: La tesi è che $\{x_n\}$ non è limitata superiormente, quindi $\forall M > 0, \exists N_1 \,|\, x_{N_1} > M$ e, ancora per monotonia

  $$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

  e per definzione, $x_n \to +\infty = \sup x_n$.

9.2 Limiti notevoli

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni reali, e supponiamo che $a_n \to A$ e $b_n \to B$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$a_n^\alpha \to A^\alpha$$

dove A^α è la usuale potenza se $A > 0$. Se $\alpha \neq 0$ decisamente e $A = +\infty$ allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

Nota: se $\alpha = 0$ e $a_n > 0$ definitivamente, allora $a_n^\alpha = 1$ definitivamente e $a_n^\alpha \to 1$.

Proposition

Se $A > 0$ allora

$$A^n \to \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

Proof

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1+h) \implies A^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \to +\infty$$

con $h = A - 1$. Se $0 < A < 1$, allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove $\frac{1}{A} > 1$ e $\left(\frac{1}{A}\right)^n \to +\infty$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente $a_n \to A \geq 0$, $b_n \to B$ con $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$a_n^{b_n} \to A^B$$

dove A^B è la solita potenza se $A, B \in \mathbb{R}$ escludendo il caso 0^0.
Se $A > 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = +\infty$.
Se $0 \leq A < 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = 0^+$.
Se $A > 1$ e $B = -\infty$, allora $A^B = 0^+$.
Se $0 \leq A < 1$ e $B = -\infty$, allora $A^{-\infty} = +\infty$.
Non è definito il caso $A = 1$ e $B = \infty$ (1^∞).
Non è definito il caso $A = \infty$ e $B = 0$ (∞^0).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Proposition Successioni di logaritmi

Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con $b_n > 0$ definitivamente e $b_n \to B$, allora

$$\log b_n \to \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

Proposition Velocità delle successioni

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and $\forall A > 1$,

$$\frac{n^\alpha}{A^n} \to 0$$

   (in particolare con α)
2. $\forall a_n \to \infty$ e $\forall \alpha > 0$,

$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \to 0^+$$

3. $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \to 0$$

4. $\forall a_n \to \infty$ e $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \to 0$$

5. $\forall A > 1$,

$$\frac{A^n}{n!} \to 0^+$$

6.

$$\frac{n!}{n^n} \to 0^+$$

Proof

Dimostriamo che con $A > 1$ abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \to 0$$

Scriviamo $A = B^2$ con $B = (1 + h)$ con $h > 0$ da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1+h)^n]^2 \geq (1+hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1+hn)^2} = \frac{n}{n^2(h+\frac{1}{n})^2} \to 0$$

Proof

Dimostriamo che

$$\frac{\log n}{n} \to 0$$

Teorema Numero di Eulero

Siano

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1. a_n è monotona strettamente crescente;
2. b_n è monotona strettamente decrescente;
3. $\forall n, a_n \leq b_n$ quindi a_n è limitata superiormente.

Sia

$$e = \lim a_n$$

Allora, $a_n \to e^-$, $b_n \to e^+$ e $e \approx 2.7182818$.

Proof

1. Mostriamo che $\forall n \geq 1, a_n < a_{n-1}$. Per mostrare ciò mostriamo che

$$\forall n \geq 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Per ogni $n \geq 2$ studiamo il rapporto

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} > \frac{1-\frac{1}{n^2}\cdot n}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

2. Mostriamo che $\forall n \geq 1$,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli, per $n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+n\left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

3. Per tutte le n

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$$

Siccome a_n è limitata superiormente e ed è monotina crescente, esiste $\lim a_n = e^-$ Poiché $b_n = a_n + (b_n - a_n)$,

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n} \to 0$$

Quindi $b_n \to e^+$ siccome è decrescente. Siccome $a_n < e < b_n$ si può approssimare scegliendo n sufficientemente grandi.

Proposition

Se a_n è crescente, e b_n è decrescente e $a_n < b_n$ si deduce che $\forall m, n, a_m < b_n$

Corollario

Se $c_n \to +\infty$ allora

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \to e$$

Proof

Siccome vale sempre $[c_n] \leq c_n < [c_n]+1$

$$1+\frac{1}{[c_n]+1} < 1+\frac{1}{c_n} \leq 1+\frac{1}{[c_n]}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{[c_n]+1}\right)^{[c_n]} < \left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]}\left(1+\frac{1}{[c_n]}\right) = e$$

Proposition

Se $|c_n| \to +\infty$, allora

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \to e$$

Proposition

Se $\varepsilon_n \to 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora

$$(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to e$$

Segue dall'ultima proposition con $c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$

Proposition

Se $\varepsilon_n \to 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \frac{(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} \to \alpha$$

Proof

Basta porre $\delta_n = (1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \to 0$ dove chiaramente $\delta_n \neq 0$ definitivamente. Quindi esprimere ε_n in termini di δ_n per concludere.

Esempio Motivazione per non fare i limiti in tal modo

Calcolare il limite di

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}+\log n}}$$

Vogliamo applicare $\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to 1$ con $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})}$. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}+\log n}}$$

e allora

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n^{3/2}+\log n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n^2\left(1+\frac{\log n}{n^{3/2}}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \to 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

9.3 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

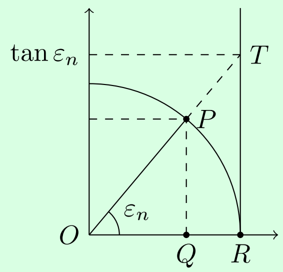
Teorema

Sia $\varepsilon_n \to 0$, allora

1. $\sin\varepsilon_n \to 0$, $\cos\varepsilon_n \to 1$ e $\tan\varepsilon_n \to 0$;
2. Se $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora
$$\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$
e
$$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}$$
e
$$\frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Proof

1. Per la definizione del seno,
$$|\sin\alpha| \leq \min\{1, |\alpha|\}$$
Quindi $|\sin\varepsilon_n| \leq |k_n| \to 0$ e $\cos^2\varepsilon_n = 1 - \sin^2\varepsilon_n \to 1$ da cui $\varepsilon_n \to 1$. Inoltre,
$$\tan\varepsilon_n = \frac{\sin\varepsilon_n}{\cos\varepsilon_n} \to 0$$
2. Sia $\varepsilon_n \to 0$ con $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente. Osserviamo che poiché il seno è dispari,
$$\frac{\sin x}{x}$$
è pari. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo $\forall n, \varepsilon_n > 0$ e poiché $\varepsilon_n \to 0$ posso anche supporre che $\forall n, 0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$. Andiamo a confrontare le aree nella circonferenza trigonometrica.



Per confronto di aree, l'area del triangolo OPQ è minore o uguale dell'area del settore circolare OPR che è minore o uguale del triangolo OTR.
Ricordiamo che l'area del settore circolare di angolo α è data dalla proporzione
$$\frac{\text{Area } S_\alpha}{\text{Area cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$
quindi
$$\text{Area}_{OPR} = \frac{1}{2}\alpha$$
Abbiamo allora che
$$\frac{1}{2}\cos\varepsilon_n \sin\varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tan\varepsilon_n$$
che semplificando diventa
$$\cos\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\sin\varepsilon_n} \leq \frac{1}{\cos\varepsilon_n}$$

Siccome $\cos \varepsilon_n \to 1$ e $\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \to 1$, per il teorema dei carabinieri,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n}$$

Per la tangente abbiamo semplicemente

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)\left(\frac{1}{\cos \varepsilon_n}\right) \to 1$$

E per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} &= \frac{(1-\cos \varepsilon_n)(1+\cos \varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2 \cdot (1+\cos \varepsilon_n)} \\
&= \frac{1-\cos^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{1+\cos \varepsilon_n} \\
&= \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\cos \varepsilon_n} \to \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Proposition

Calcolare il limite della successione

$$a_n = (n+2) \sin \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$

Notiamo che

$$\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \to 0$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}
a_n &= (n+2)\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n \\
&= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \\
&= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{n^2(1+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n})}{n^2} \to 1
\end{aligned}$$

9.4 Proprietà asintotico

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}$ se $a_n \to \infty$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} = n(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n = b_n$. Quindi

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{\sqrt{n}} \to +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies \log a_n \sim \log b_n$ se $a_n \to 1$. Per esempio, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Tuttavia,

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} \to +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \wedge c_n \sim d_n \implies a_n \pm c_n \sim b_n \pm d_n$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} \sim n = b_n$.

Proposition Proprietà dell'o-piccolo

- Se $a_n = o(b_n)$, allora $a_n = \mathcal{O}(b_n)$;

- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = \mathcal{O}(d_n)$, allora $a_n c_n = o(b_n d_n)$. Infatti,

$$\left|\frac{a_n c_n}{b_n d_n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \left|\frac{c_n}{d_n}\right|$$

  che tendono entrambi a zero;
- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(b_n)$, allora $a_n + c_n = o(b_n)$. Infatti,

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{b_n}$$

  che tendono entrambi a zero. Possiamo anche scrivere $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$;

10 Serie numeriche

Esempio

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

La serie ha ragione $q = \frac{1}{10}$ e quindi

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

10.1 Aritmetica delle serie

Le operazioni aritmetiche sulle serie sono giustificate a posteriori; se alla fine vi è una forma di indecisione non erano legali.

Proposition

Un numero decimale può essere espresso come

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

Esempio

Mostriamo che se $x = N, a_1 a_2 \cdots a_k \overline{9}$ dove $a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $a_k < 9$, allora $x = N a_1 a_2 \cdots (a_k + 1)$. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} x &= N + \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 10^{-j} \right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \sum_{h=0}^{\infty} 10^{-h} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + 10^{-k}(a_k + 1) \end{aligned}$$

Ciò può essere esteso ad ogni base.

Corollario
Se $a_n = o(b_n)$ cioè

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0$$

per definizione di limite, fissato $\varepsilon = 1$, esiste n_0 tale che $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$ e quindi si applica il confronto.

Esempio Teorema di condensazione
È possibile applicare il teorema di condensazione alla serie armonica e ottenere che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

che è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{p-1}}$ che converge se e solo se $p > 1$.

Teorema Rapporto di radici
Sia $\sum a_n$ una serie a termini ≥ 0 e supponiamo che una delle due condizioni sia soddisfatta:
1. $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0; +\infty]$;
2. $a_n > 0$ definitivamente e $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = h \in [0; +\infty]$;

Allora se $L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ allora $a_n \to \infty$.

Se $L = 1$ il test è **inclonclusivo**.

La condizione della radice è più potente in quanto implica anche l'altra.

Infatti, con la p-serie armonica il limite tende a 1, il che coincide con il fatto che la serie converge se $p > 1$ e diverge altrimenti.

Corollario
Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \geq 0$. Se

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

oppure se il limite esiste e $a_n \neq 0$ definitivamente, allora se $L < 1$, la serie converge e $a_n \to 0$ e se $L > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

Proof

Consideriamo il primo caso cosicché

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ fissato $\exists N$ tale che

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$$

Se $L < 1$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$ (basta scegliere $\varepsilon = (1 - L)/2$). Dalla disequazione $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ deduciamo che

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n < (L + \varepsilon)^n$$

e poiché $L + \varepsilon < 1$ la serie converge per confronto con la serie geometrica

$$\sum^{\infty} (L + \varepsilon)^n$$

Se $L > 1$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L - \varepsilon > 1$, come per esempio $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$, quindi per $n \geq N$ abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} > (L - \varepsilon) > 1$$

elevando alla n otteniamo $a_n > (L - \varepsilon)^n \to +\infty$ e per confronto $a_n \to +\infty$. In particolare, a_n non tende a zero e la serie diverge per il criterio del termine ennesimo.
Per il secondo caso, $\exists \lim_n \frac{a_{n+1} a_n}{=} L$ come nel caso precedente. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Sappiamo per esempio che $L > 1$ cosicché come nel caso precedente possiamo scegliere ε tale che $L - \varepsilon > 1$ e abbiamo che $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1 > 0$$

$\forall n \geq N$ moltiplicando i termini membro a membro

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_N} = \frac{a_{n+1}}{a_N} \geq (L - \varepsilon)^{n-N+1}$$

Ciascuno di questi è più grande di $L - \varepsilon$. Quindi,

$$a_{n+1} \geq (L - \varepsilon)^{-N+1} \cdot (L - \varepsilon)^n \cdot a_N \to +\infty$$

e per confronto $a_n \to +\infty$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con $A > 0$. Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \to 0$$

Quindi la serie converge, e converge a $e^A - 1$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n\log n} + \left(n+\frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotito. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad e. Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora $(\log n)^n = e^{n\log\log n}$. Allora chiaramente e^{n^2} domincia sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo $n^n = e^{n\log n}$ come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2}\left\{1 + e^{n\log\log(n) - n^2} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2}\right\}}{e^{3n\log n}\left\{1 + e^{-2n\log n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n\log n}\right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n\log n}}$$

Allora

$$e^{n\log\log n - n^2} = e^{-n^2\left\{1 - \frac{\log\log n}{n^2}\right\}} \to \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left(e^{n^2 - 3n\log n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{n\left(1 - \frac{3\log n}{n}\right)} \to \infty > 1$$

Esempio

Studiare il carattere di

$$\sum^{\infty} \frac{n^{n\log n}}{(2n)!}$$

che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che $(2n+2)! = (2n+2)(2n+2)(2n)!$ e $(n+1)\log(n+1) = n\log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)\log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n\log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n\log n} \cdot (n+1)^{n\log(1+1/n) + \log(n+1)}}{n^{n\log n}}\end{aligned}$$

Con

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\log n} \cdot (n+1)^{n\log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$

troviamo

$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n\log(1+1/n)}(n+1)^{\log(n+1)}$$

Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

Esempio
Considera
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$
Il criterio della radice non funziona. Infatti,
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$
Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come
$$\begin{aligned} n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\log\left(n^{\log n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\log n)^2} \to 1 \end{aligned}$$
Allora il limite è $L = 1$, quindi il criterio è inconclusivo. Allora
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a^{\sqrt{n}\log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n}\log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}}\right\}} \end{aligned}$$
L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

Esempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$
che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio $\sum \frac{1}{n^2}$. Il rapporto è dato da
$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2\log n - \sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right\}} \end{aligned}$$
e abbiamo che
$$2\log n - \sqrt{n}\log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{2\log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \to -\infty\right\}$$
e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

10.2 Formula di Stirling

Esempio
Studia il carattere di
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \to 0$$

Quindi la serie converge.
Con radici abbiamo

$$\left[\frac{n^n}{(2n)!}\right]^{1/n} = \frac{n}{\left[(2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n}(1+o(1))\right]^{1/n}}$$
$$= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2}(4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}}(1+o(1))^{\frac{1}{n}}} \to 0$$

E quindi converge

Esempio
Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}+n^n}{(n^2)! + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n\log n} = e^{n^2}\left\{1 + e^{n\log n - n^2}\right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$(n^2)! + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(n^2\right)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2}(1+o(1)) + e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}}(1+o(1)) + e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}}\left\{1 + o(1) + e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2n^2\{\cdots\}}\right\}$$
$$\sim e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}} = \left(n^2\right)^{n^2} e^{-n^2}\sqrt{2\pi n^2}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{\left(n^2\right)^{n^2} e^{-n^2}\sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum b_n$ e

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{e^n}{\left(n^2\right)^n e^{-n}(2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}}$$
$$= \frac{e^{2n}}{n^{2n}(2n)^{1/n} n^{1/n}} \to 0$$

e quindi la serie converge.

10.3 Serie a termini di segno qualunque

Con serie di segno qualunque non è possibile applicare il criterio asintotico.

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa (o in uno spazio metrico) e supponiamo che esista finito il limite $\lim_n a_n = L \in \mathbb{F}$. Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Quindi, se $n, m > N$, allora

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leqslant |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon$$

Definizione Successione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Si dice che $\{a_n\}$ soddisfa la condizione (C) di Cauchy, o più brevemente che è una successione di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n \,|\, \forall n, m \geq M, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per quanto visto sopra, se $a_n \to L$ finito, allora $\{a_n\}$ è di Cauchy.

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Sono equivalenti:

1. $\exists$ finito
$$\lim_n a_n = L$$
2. $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che (1) implica (2). Il converso, vale in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$.

Proposition

Sia

$$\sum^{\infty} a_n$$

una serie reali o complessa e sia $\{S_N\}$ la successione delle sue somme parziali. Per definizione, $\sum a_n$ converge a S se esiste finito $\lim_n S_n \in \mathbb{R}$.

Corollario

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie $\sum a_n$ converga e che la successione delle somme parziali soddisfi le condizioni di Cauchy, scritte in 3 modi equivalenti:

1. $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N, |S_N - S_M| < \varepsilon$$
   equivalentmeente notando che se $n > m$,
   $$S_n - S_m = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{m+1}^{n} a_k$$
2. $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N \quad n > m \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$
   ovvero
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N \quad n \geq m \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

3. **condizione più usata:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall m, n \geq N \wedge \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

con $0 < p \leq 1$ converge ma non assolutamente. La serie converge per $p > 0$.

Lemma disuguaglianza triangolare generalizzata

Sia $\{b_k\}$ una successione, allora

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k|$$

Proof

Per induzione

- il caso base è banale;
-

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) + b_{n+1} \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| + |b_{n+1}|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |b_k| + |b_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |b_k|$$

Proof Teorema fondamentale

Sapendo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

la tesi è che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converga equivalentemente soddisfa le condizionid i Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n \geq m \geq N, \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Per ipotesi $\sum |a_k|$ converge quindi soddisfa la condizione di Cauchy e dato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq m \geq N$

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \varepsilon$$

Ma per il lemma $\forall n \geq m \geq N$,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Quando abbiamo una serie che non ha termini solo positivi, la prima cosa da fare è mettere il modulo e controllare la convergenza assoluta.

Esempio

Considera

$$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$

che non ha termini solo positivi. Allora proviamo a studiare la convergenza assoluta.

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$$

Poiché $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2 \leq +\infty}$ converge (p-serie), allora la serie dei moduli converge assolutamente e quindi converge.

Vale lo stesso procedimento per

$$\sum \frac{\sin n}{n^p}$$

con $p > 1$. Se $p \leq 1$, allora diverge. Ciò segue dal fatto che, per esempio, $|\sin x| > \frac{1}{2}$ se $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo che l'intervallo

$$I_k = \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$$

ha lunghezza $\frac{2\pi}{3} > 1$, quindi conviene un interno n, in realtà 2 interi in quando la lunghezza è maggiore di 2. Allora la serie

$$\sum \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$$

dove n_k è un intero in ognuno di I_k. Ciò è maggiore o uguale di

$$\sum \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

in quanto il valore a denominatore è al minomo $\frac{5}{6}\pi + k\pi$. Allora troviamo un multiplo della serie armonica, che diverge.

Esempio

Considera

$$\sum \frac{-n + (\sin n)n^2 - \log n}{(1+n)^{10/3} - \cos n}$$

allora guardiamo il modulo:

$$|a_n| = \frac{|-n + (\sin n)n^2 - \log n|}{|(1+n)^{10/3} - \cos n|}$$

Maggioriamo rendendo più piccolo il denominatore e più grande il numeratore.

$$|a_n| \leq \frac{n + n^2|\sin n| + |\log n|}{(1+n)^{10/3} - 1}$$

Notiamo che $(1+n)^{10/3} - 1 \geq \frac{1}{2}(1+n)^{10/3} > \frac{1}{2}n^{10/3}$ perché $n = 1$ dà il valore massimo. Quindi

$$|a_n| \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{\log n}{\frac{1}{2}n^{10/3}}$$

Quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 2\sum n^{-\frac{7}{8}} + 2\sum n^{-\frac{4}{3}} + 2\sum_{n=2} \frac{1}{n^{10/3}(\log n)^{-1}}$$
Tutti i termini convergono e quindi la serie converge.

Perché il teorema valga basta che $a_n \geq 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ valgano definitivamente. In tal caso la stima dell'errore vale solo per n sufficientemente grande.

Esempio

Si può applicare il teorema a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$
e notare che la serie converge semplicemente ma non assolutamente per ogni $0 < p \leq 1$.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^4} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché $\forall n \geq 1$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi $p = 2 > 1$ e quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge. Tuttavia, è chiaro che $\forall n, a_{2n+1} < a_{2n+2}$.

Nota: $a_n \sim b_n$ e b_n monotona crescente non implica necessariamente che a_n sia monotona decrescente.

Infatti,

Esempio

Consideriamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. È chiaro che b_n è strettamente monotona decrescente. Inoltre,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ 1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

Verifichiamo allora che

$$a_{2k} > a_{2k-1}$$

Infatti, a_n non può essere definitivamente monotona decrescente in quanto se a_n fosse definitivamente monotona decrescente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

per il teorema di Leibniz sarebbe convergente. Tuttavia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

dove il secondo addendo chiaramente diverge. Allora, la serie di partenza diverge, nonostante il primo addendo converga.

Esempio Stima errore teorema Leibniz

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

con un errore minore di 10^{-3}. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

La serie converge assolutamente per il criterio della radice e per il criterio del rapporto. La serie è a termini alterni, $a_n \to 0$ e $a_{n+1} < a_n$, quindi vale la condizione per il teorema di Leibniz. Per l'errore abbiamo

$$\forall N, |E_N| = |S - S_n| < \frac{1}{(N+1)!}$$

Se noi imponiamo che $\frac{1}{(N+1)!} < 10^{-3}$ certamente $|E_N| < 10^{-3}$. Dobbiamo usare almeno $N = 6$ per ottenere $(N+1)! = 5040 > 1000$. Allora,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{6!} = S_6$$

che ha un errore minore o uguale di $\frac{1}{6!}$.

Esempio

Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

la serie ha termini alterni con $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Controlliamo la convergenza assoluta:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

e

$$\sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

in quanto $p = \frac{1}{2} \leq 1$ e quindi non converge assolutamente. Vogliamo ora usare il teorema di Leibniz. Le condizioni sono soddisfatte in quanto $a_n \geq 0$ e $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Verifichiamo esplicitamente

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n-1}}{n+2} \\ &= \frac{\sqrt{n}(n+1) - (n+1)^{3/2}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Studiamo allora quando il numeratore è maggiore di zero.

$$\sqrt{n}(n+2) \geq (n+1)^{3/2}$$

Siccome i termini sono tutti positivi, possiamo fare il quadrato

$$\begin{aligned} n(n+2)^2 \geq (n+1)^3 &= n^3 + 4n^2 + 4n \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

che è sempre vero. Alternativamente, potremmo fare il limite con $n \to \infty$ del numeratore

$$\sqrt{n}(n+2) - (n+1)^{3/2} = n^{3/2}\left\{1 - \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2}\right\}$$

Abbiamo che

$$\frac{2}{n} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} = \frac{2}{n} - \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1\right\}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \sim (1 + \varepsilon_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha\varepsilon_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} - \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1\right\} &= \frac{2}{n} - \frac{3}{2}\frac{1}{n}(1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{3}{2}\frac{1}{n}o(1) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}o(1) \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + o(1)\right\} \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Adesso, per permanenza del segno, il fatto che il numeratore tenda ad infinito, implica che sia maggiore di zero definitivamente. Allora, possiamo utilizzare il teorema di Leibniz. Alternativamente, se non risuciamo a mostrare che i termini siano decrescente, abbiamo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

e b_n è decrescente. Allora, scriviamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\sqrt{n}n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Cosifacendo, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{i} nfty(-1)^n a_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Se non ci sono forme di intedeterminazione nel membro di destra,

$$\sum^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge semplicemente ma non assolutamente per il teorema di Leibniz. La seconda serie

$$\sum(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ha modulo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)-\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{n^{3/2}(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\sum(-1)^n a_n$$

converge come somma di

$$\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che converge semplicemente ma non assolutamente e

$$\sum(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

che converge assolutamente e la convergenza non può essere assoluta perché se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergano assolutamente allora $\sum(a_n+b_n)$ converge assolutamente. Infatti,

$$\sum|a_n-b_n| \leq \sum(|a_n|+|b_n|) = \sum|a_n| + \sum|b_n| < +\infty$$

10.4 Serie con parametri

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n+1}\left(x^2-x-2\right)^2$$

Controlliamo la positività

$$x^2-x-2 \geq 0$$

per $x \leq -1 \vee x \geq 2$, altrimenti i termini sono alterni. Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio di radice/rapporto

$$\left|\frac{\log n}{n+1}(x^2-x-2)\right|^{1/n} = \frac{(\log n)^{1/n}}{[n(1+1/n)]^{1/n}}$$

Scriviamo che $(\log n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log\log n} \to 1$ e $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ (limite notevole) e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Quindi $|x^2-x-2| = L$ e se $L<1$, la serie converge assolutamente, se $L>1$ il modulo del termine generale diverge e la serie non converge e diverge dove è a termini non-negativi. Dobbiamo allora risolvere la disequazione $L<1$

$$|x^2-x-2| < 1$$

Siccome $|t| < a \iff -a < t < a$ scriviamo che ciò è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 1 \\ x^2 - x - 2 > -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima sono

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

mentre della seconda

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Allora abbiamo che la serie converge assolutamente in $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Se $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la serie non converge (presumibilmente oscilla ma bisognerebbe mostrarlo). Invece, se $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ la serie non converge ed è a termini positivi, quindi diverge necessariamente. Manca ancora il caso per cui $L = 1$. In tale caso, $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ oppure $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Nel caso in cui $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ sappiamo che $x^2 - x - 2 = 1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

con

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} = \frac{\log n}{n(1+1/n)} \sim \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(\log n)^{-1}}$$

che è quindi una p-q serie con $p = 1$ e $q > 1$, quindi la serie diverge. Invece, se $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo che $x^2 - x - 2 = -1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$$

che non converge assolutamente (caso di prima). Tuttavia,

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} \sim \frac{\log n}{n} \to 0$$

Controlliamo ora i criteri per il teorema di Leibniz: verifichiamo se $a - a_{n+1} \geq 0$ definitivamente

$$\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)\log n - (n+1)\log(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

il numeratore è dato da

$$\begin{aligned}(n+2)\log n - (n+1)\left[\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] &= \log n - (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\sim \log n - (n+1)\frac{1}{n} \to +\infty - 1 \to \infty\end{aligned}$$

siccome $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ con $\varepsilon \to 0$. Quindi, per la permanenza del segno il numeratore è definitivamente non-negativo. Valgono quindi le condizioni per il teorema di Leibniz, e quindi la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n$$

La serie è a termini non-negativi quando $x - 1 < 0$ cioè $x < 1$. Studiamo allora la convergenza assoluta

$$\sum \left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|$$

applichiamo il criterio della radice n-esima

$$\left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|^{1/n} = \frac{2\left(1 + \frac{\log n}{2^n}\right)^{1/n}}{n^{1/n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1(/n)}} \cdot \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} \to \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = L$$

Se $L < 1$, la serie converge assolutamente. Se $L > 1$, il modulo del termine generale diverge, e quindi la serie non converge e infatti diverge dove è a termini di segno non-negativo. Se $L = 1$ il test è inconclusivo. Abbiamo allora

$$L = \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} < 1 \iff 2|x-1| < \sqrt{x^2+4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) &< x^2 + 4 \\ 3x^2 - 8x &< 0 \\ x(3x-8) &< 0 \end{aligned}$$

allora la soluzione è $0 < x < \frac{8}{3}$. In questo intervallo, la serie converge assolutamente. Se $x < 0$ o $x > \frac{8}{3}$ la serie non converge. Poiché è a termini positivi per $x \le 1$ se $x < 0$ la serie diverge. Per $x > \frac{8}{3}$ la serie non converge e nient'altro si può dire senza ulteriore studio. Se $x = 0$ o $x = \frac{8}{3}$ abbiamo $L = 1$ e il criterio è inane. Per tali valori,

$$\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = 1$$

poiché

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

è negativo in $x = 0$ e positivo in $x = \frac{8}{3}$, concludiamo che per $x = 0$,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = -\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$

Invece, per $x = \frac{8}{3}$ abbiamo che

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = +\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$

Nel caso $x = 0$ la serie è a termini positivi e

$$a_n = \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \to 1$$

e la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Nel caso $x = \frac{8}{3}$ la serie è

$$\sum (-1)^n a_n$$

che non converge assolutamente. Vorremmo usare il teorema di Leibniz. La successione a_n è decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{\log n}{2^n (n + \sqrt{n})} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + n} + \sum (-1)^n \frac{\log n}{2^n (n + \sqrt{n})}$$

la prima serie converge sicuramente per Leibniz. La seconda serie, poiché $\frac{\log n}{n+\sqrt{n}} \to 0$, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2^n} \frac{\log n}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$$

definitivamente, e $\sum \frac{1}{2^n}$ converge in quanto è una serie geometrica. Quindi, la seconda serie converge assolutamente e concludiamo che la serie assegnata converge per $x = \frac{8}{3}$.

Teorema Teorema di Dirichlet

Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

be a series where:

1. $a_n \geq 0$;
2. $a_n \to 0$;
3. $a_n \geq a_{n+1}$;
4. Let

$$\sum_{k=1}^{n} b_k$$

there exist M such that $\forall n, |B_n| \leq M$

Then, the series converges.

Dimostrazione per lode.

Il teorema di Leibniz è quindi un corollario di questo teorema.

Proposition Prodotto di serie secondo Cauchy

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con rispettiva somme parziali A_N e B_N, vogliamo definire una serie prodotto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ con somme parziali C_N in modo che se $A_N \to A$ e $B_N \to N$, allora $C_N \to AB$. Per trovare la forma di questa serie consideriamo

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) = a_0 b_0 + x(a_0 b_1 + a_1 b_0) + x^2 (a_0 b_2 + a_1 b_1 a_2 b_0) + \cdots$$

Definiamo quindi il prodotto di serie secondo Cauchy con

$$c_n = \sum_{k=0}^{N} a_k b_{n-k}$$

Teorema Teorema di Mertens

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti rispettivamente con somma A e B e supponiamo che almeno una delle due converga assolutamente. Allora, la serie prodotto converge a AB.

Dimostrazione per lode. È importante che almeno una delle deu deve convergere assolutamente.

Mostriamo che $e^x e^y = e^{x+y}$ usando il prodotto secondo Cauchy delle espansioni di Taylor.

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j \cdot y^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= e^{x+y} \end{aligned}$$

L'espansione di Taylor ci permette di estendere la funzione esponenziale ai valori complessi.

10.5 Teorema delle permutazioni di Riemann

TODO: esempi

Definizione Convergenza incondizionale

Una serie è incondizionatamente convergente se ogni serie permutata ha la stessa somma.

Teorema

Sia consideri la serie $\sum a_n$:

1. Se $a_n \geq 0$ allora ogni permutazione $\sum a_{\sigma(n)}$ ha lo stesso carattere e la stessa somma;
2. Se $\sum |a_n| < +\infty$ allora $\sum |a_{\sigma(n)}| < +\infty$ e ha la stessa somma.
3. Teorema di Riemann: se $\sum a_n$ converge solo semplicemente, allora:
   (a) $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, esiste una serie permutata con valore λ;
   (b) esiste una permutazione σ tale che $\sum a_{\sigma(n)}$ oscilla.

Corollario

Una serie numerica è incondizionatamente convergente se e solo se è assolutamente convergente.

Proof Punto I

Sia $a_n \geq 0$ e sia σ una permutazione di $\mathbb{N}$ arbitraria e consideriamo la serie permutata $\sum a_{\sigma(n)}$ e sia

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} a_n \qquad B_N = \sum_{k=1}^{N} b_n$$

Notiamo che per ogni n esiste N tale che

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(N)\} \subseteq \{1, 2, \cdots, N\}$$

Cosicché

$$B_N = \sum_{k=1}^{N} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{k=1}^{N} a_k = A_N \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Passando limite otteniamo

$$\lim B_N = B = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(n)} \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Notando che, se σ^{-1} è la permutazione inversa, per ogni n

$$a_n = a_{\sigma^{-1}(n)}$$

lo stesso ragionamento mostra che

$$A = \sum a_n \leq B = \sum a_{\sigma(n)}$$

e quindi vale $A = B$.

Punto II lode.

Proof Teorema di Riemann (dimostrazione concettuale)

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie convergente solamente semplicemente e poniamo

$$\forall n, p_n = \begin{cases} a_n & a_n > 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} a_n & a_n < 0 \\ 0 & a_n \geq 0 \end{cases}$$

Cosicché $\forall n, a_n = p_q - q_n$ e $|a_n| = p_n + q_n$. Poiché $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n = +\infty$ mentre $\sum a_n = \sum (p_n - q_n)$ converge, deve essere che sia $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$ (devono divergere entrambe). Se solo una divergesse, spezzandola la serie avrebbe una parte che converge e una che diverge, quindi la differenza divergerebe, ma la differenza deve convergere. Siccome $a_n \to 0$ allora $p_n \to 0$ e $q_n \to 0$. Siccome entrambe le serie divergono, io posso creare una permutazione per giungere a qualsiasi cosa. Supponiamo che il primo termine sia 0. Possiamo definire p_n e q_n tale che la somma sale sopra uno e scende sotto meno uno, all'inifnito e oscillando. Oppure, posso farla oscillare ma avvicinandosi sempre di più a 0, e quindi il valore sarebbe zero.

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

che converge assolutamente per $p > 1$. Vogliamo studiare la convergenza semplice per $0 < p \leq 1$. Notiamo che se $p \leq 0$, allora il termine non tende a zero e la serie non converge. Applochiamo il teorema di Dirichlet con $b_n = \sin n$ e $a_n = \frac{1}{n^p}$. Per applicare il teorema bisogna verificare che la successione $\{b_n\}$ ha somme parziali limitate. Allora,

$$B_N = \sum_{k=1}^{n} \sin k$$

che è limitato se la consideriamo come serie geometrica con l'identità di Eulero.

11 Successioni, sottosuccessioni e topologia

Teorema Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$. Sono equivalenti

1. $\{x_n\} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$;
2. per ogni successione $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{n_k}\} \to \lambda$;
3. da ogni sotto successione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ si può generare una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\} \to \lambda$.

Proof Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

1. $(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{2})$: dimostriamo che il primo punto implica il secondo. Supponiamo che $x_n \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Per definizione di limite per ogni intorno I di λ di raggio $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$. Sia ora $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione. Poiché n_k è strettamente crescente $\forall k, n_k \geq k$. Quindi se $k \geq N$, $n_k \geq N$ da cui $x_{n_k} \in I$ e per definizione $\{x_{n_k}\} \to \lambda$ con $k \to \infty$.
2. $(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{3})$: il secondo punto implica il terzo: se $x_{h_k} \to \lambda$ per quanto appena visto ogni sua sottosuccessione tende a λ e quindi il punto vale.
3. $(\mathbf{3}) \implies (\mathbf{1})$: dimostriamo ora che il terzo punto implica il primo. Se per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\}$ tale che $\{x_{n_{k_j}}\} \to \lambda$ abbiamo $\{x_n\} \to \lambda$. Dimostriamo la contronominale. Dimostriamo quindi che se $\{x_n\}$ non tende a λ, allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che nessuna sua sottosuccessione tende a λ. Il fatto che $\{x_n\}$ non tenda a λ, per negazione della definizione è $\exists I_0(\lambda)$, $\forall N \exists n \geq N$ tale che $x_n \notin I_0$. Costruiamo tale sottosuccessione. Scegliamo $N = 1$. Per il primo punto, $\exists n_1 \geq 1 \,|\, x_{n_1} \notin I_0$. Sia poi $N = n_1 + 1$. Per il primo punto, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 \,|\, x_{n_2} \notin I_0$. Iterando il procedimento si ottiene una successione n_k tale che $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ e $x_{n_k} \notin I_0$ per tutte le k. Poiché $\{x_{n_k}\} \notin I_0$, nessuna sua sottosuccessione può tendere a I_0.

Corollario

Sia $\{x_n\}$ una successione. Allora:

1. se $\exists \{x_{n_k}\} \,|\, x_{n_k}$ non ha limite, allora $\{x_n\}$ non ha limite;
2. se $\exists \{x_{n_k}\}$ e $\{x_{n_j}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \to \lambda$ e $\{x_{n_j}\} \to \mu$ con $\lambda \neq \mu$ allora $\{x_n\}$ non ha limite;
3. se $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$ tendono allo stesso limite λ, allora $\{x_n\} \to \lambda$ (o suddividendo in qualsiasi altra partizione disgiunta).

Teorema Punti di chiusura e successioni

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Sono equivalenti:
   (a) x_0 è punto di accumulazione per E;
   (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \to x_0$;
2. Sono equivalenti:
   (a) $x_0 \in \overline{E}$;
   (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $x_n \to x_0$.

Proof

1. $(\mathbf{1.a}) \implies (\mathbf{1.b})$: supponiamo che x_0 sia di accumulazione. Per definizione $\forall I$ intorno di x_0, esiste $x \in I \cap E$ con $x \neq x_0$. In particulare,

$$\forall I_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}\right), \exists x_n \neq x_0 \,|\, x_n \in E \cap I_n$$

cioè $x_n \in E$ e $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$ che per il teorema dei carabinieri converge a x_0.

2. $(\mathbf{1.b}) \implies (\mathbf{1.a})$: supponiamo che

$$\exists\{x_n\} \subseteq E \,|\, \forall n, x_n \neq x_0 \wedge x_n \to x_0$$

Allora per ogni intorno I di x_0, esiste N tale che $\forall n \geq N$, $x_n \in (I \cap E) \backslash \{x_0\}$ e per definizione x_0 è di accumulazione.
3. $(\mathbf{2.a}) \implies (\mathbf{2.b})$: Siccome $x_0 \in \overline{E}$ si presentano due casi:
   (a) $x_0 \in E$: basta porre $\forall n, x_n = x_0$ e $\{x_n\} \subseteq E$ quindi $x_0 \to x_0$;
   (b) $x_0 \notin E$: ciò implica che $x_0 \in E'$ e per il primo punto $\exists\{x_0\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \to x_0$.
4. $(\mathbf{2.b}) \implies (\mathbf{2.a})$: esercizio.

Teorema Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e siano $\lambda = \inf E$ e $\mu = \sup E$. Allora, esistono successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq E$ tale che $\{x_n\} \to \lambda^+$ e $\{y_n\} \to \mu^-$.

Proof Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso dell'inf. Dobbiamo considerare due casi distinti:
1. $\lambda > -\infty$: per definizione di $\lambda = \inf E$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \,|\, \lambda \leq x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$$

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ si trovs quindi $x_n \in E$ tale che $\lambda \leq x_n < \lambda + \frac{1}{n}$. Per il teorema dei carabinieri, $x_n \to \lambda^+$.
2. $\lambda = -\infty$: per definizione E non è limitato inferiormente. Quindi, $\forall n, -n$ non è minorante e per tanto $\forall n, \exists x_n \in E$ con $x_n < -n$. Allora, chiaramente $x_n \to -\infty$ per confronto.

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato sup (e inferiormente). Allora:
1. $\sup E = \mu \in \overline{E}$ e $\inf E = \lambda \in \overline{E}$;
2. se E è limitato superiormente (o inferiormente), allora E ammette massimo (o minimo).

Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{x_n\}$ una successione limitata in $\mathbb{R}$. Allora, da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Proof Dimostrazione 1

Si danno due casi:
1. $\{x_n\}$ assume infinite volte lo stesso valore x_0. Allora $\{n_k\}$ è la successione tale che $x_{n_k} = x_0$ banalmente $\{x_{n_k}\} \to x_0$.
2. $\{x_n\}$ non assume infinite volte lo stesso valore, quindi assume infiniti valori distinti. Poiché $\{x_n\}$ è limitata esiste un intervallo $I_0 = [a; b]$ tale che $x_n \in I_0$. Consideriamo il punto medio $m_0 = \frac{a+b}{2}$ e i due sottointervalli $[a; m_0]$ e $[m_0; b]$. Almeno uno dei due intervalli deve contenere infiniti valori. Scegliamo allora quest'ultimo come $I_1 = [a_0, b_0]$ e iteriamo. Consideriamo quindi gli intervalli I_n dove chiaramente

$$I_{n+1} \subseteq I_n \text{ and } l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n) = \frac{1}{2^n}l(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$$

e costruiamo la sottosuccessione nella seguente maniera: sia n_1 il primo n tale che $x_n \in T_1$. Consideriamo I_2 che contiene infiniti valori della successione. Allora n_2 è il primo $n > n_1$

tale che $x_{n_2} \in I_2$, e così via. Allora la sottosuccessione converge per l'assioma di continuità. Dato $\varepsilon > 0$ si scelga j tale che $\frac{b-a}{j} \leq \varepsilon$ e si conclude che $\forall k \geq j$, $|x_0 x_{n_k}| \leq \frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$ e per definizione $x_{n_k} \to x_0$.

Lemma Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una successione reale. Allora da tale successione si può estrarre una sottosuccessione monotona.

Proof Dimostrazione 2

Per il lemma di Polya, da $\{x_n\}$ estraggo una sottosuccesione monotona $\{x_{n_k}\}$ che quindi ha limite λ. Poiché $\{x_{n_k}\}$ è limitata, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proof Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una qualunque successione reale e sia $S = \{n \,|\, \forall m \geq n, x_m \geq x_n\}$ un insieme di indici. Si presentano due casi mutualmente exclusivi

1. S è infinito. Allora S ha forma $\{n_1, n_2, \cdots\}$. Per definizione di S, per ogni k abbiamo $\forall m \geq n, x_{n_k} \leq x_m$. In particolare $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$ e $\{x_{n_k}\}$ è monotona crescente.
2. S è finito (eventualmente vuoto) esiste una N tale che $\forall n \geq N$, $n \notin S$. Sia $n_1 = N \notin S$ per definizione di S esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} < x_{n_1}$ con $n_2 \notin S$ perdefinizione $\exists n_3 < n_2$ tale che $x_{n_3} < x_{n_2}$. Iterando troviamo una sottosuccessione x_{n_k} strettamente decrescente.

Teorema Equivalenza convergenza e Cauchy

Una successione $\{x_n\}$ reale converge se e esolo se è di Cauchy.

Lemma

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Allora:

1. la successione è limitata;
2. se $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \to L$, allora $\{x_n\} \to L$.

Proof Dimostrazione del lemma

1. Per definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = 1$, esiste N tale che $\forall n, m \geq N$, si ha $|x_n - x_m| < \varepsilon$. In particolare, $\forall n \neq N$ (con $m = N$), si ha che
$$|x_n - x_N| < 1$$
da cui
$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < |x_N| + 1, \quad \forall n \neq N$$
e quindi posto $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, |x_N|+1\}$ risulta quindi $\forall n, |x_n| \leq M$ e quindi $\{x_n\}$ è limitata.
2. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy e supponiamo che esista $\{x_{n_k}\}$ sottosuccessione di $\{x_n\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \to L$. La tesi è che $x_n \to L$. Per ipotesi, fissati $\varepsilon > 0$,
$$\exists N \,|\, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$
($\{x_n\}$) è di Cauchy
$$\exists K \,|\, \forall k \geq K, |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$
($\{x_{n_k}\} \to L$). Sia quindi $n \geq N$ e fissiamo $k \geq \max\{K, N\}$ cosicché $k \geq N \implies n_k \geq k \geq N$. Pertanto, vale $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$. Quindi
$$\forall n \geq N, |x_n - L| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_l} - L)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| \leq 2\varepsilon$$

e quindi per definizione $x_n \to L$.

Proof Equivalenza convergenza e Cauchy

La successione $\{x_n\}$ è limitata per il lemma. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge a $L \in \mathbb{R}$. Per il secondo punto del lemma, $x_n \to L$ e quindi converge.

La definizione di una successione di Cauchy è la stessa nei complessi e anche quella di convergenza. Vale sempre il medesimo teorema.

In particolare, mostriamo che se è di Cauchy, allora converge. Notiamo che, dato un numero complesso w banalmente

$$\begin{cases} |\Re w| \\ |\Im w| \end{cases} \leq |w| \leq |\Re w| + |\Im w|$$

Mostrimao che $z_n \to \alpha$ se e solo se $\Re z_n \to \Re\alpha$ e $\Im z_n \to \Im\alpha$. Infatti,

$$\begin{cases} |\Re z_n - \Re\alpha| \\ |\Im z_n - \Im\alpha| \end{cases} \leq |z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re\alpha| + |\Im z_1 - \Im\alpha|$$

poiché $z_n \to \alpha$ se e solo se $|z_n - \alpha| \to 0$, le dis di sind ice che se $z_n \to \alpha$ allora $\Re z_n \to \Re\alpha$ e $\Im z_n \to \Im\alpha$. Viceversa se $\Re z_n \to \Re\alpha$ e $\Im z_n \to \Im\alpha$ allora

$$|z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re\alpha| + |\Im z_n - \Im\alpha| \to 0$$

cosicché $|z_n - \alpha| \to 0$ e $z_n \to \infty$. Analogamente, $\{z_n\}$ è di Cauchy se e solo se $\{\Re z_n\}$ e $\{\Im z_n\}$ sono di Cauchy. Siccome entrambe queste successioni sono di Cauchy nei reali, allora convergono. Quindi

$$\Re z_n \to \alpha \in \mathbb{R} \land \Im z_n \to \beta \in \mathbb{R} \implies z_n = \Re z_n + i\Im z_n \to \alpha + i\beta$$

Anche nei complessi le serie sono analoghe. Una serie converge se se la successione delle sue somme parziali converge. La serie diverge se il suo modulo tende a infinito. Se il limite delle somme parziali non esiste, la serie è oscillante.

La medesima convergenza e successione di Cauchy si estende a tutti gli spazi metrici.
Importante: in uno spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy, ma non necessariamente il contrario.

Per esempio, in $(\mathbb{Q}, |r - s|)$ la successione $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $r_n \to \sqrt{2}$. Allora, questa successione è di Cauchy nei reali e anche nei razionali, in quanto la metrica è la stessa. Tuttavia, la successione non converge nello spazio metrico dato.

Definizione Spazio metrico completo

Uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni di Cauchy convergono.

12 Limiti

12.1 Proprietà dei limiti

Proposition Permanenza del segno e monotonia del limite

Siano $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia ξ un punto di accumulazione esteso di E, e supponiamo

$$\exists \lim_{x\to\xi} f(x) = \lambda \wedge \exists \lim_{x\to\xi} g(x) = \mu$$

1. Se $\lambda \leq \mu$, allora $\forall c$ tale che $\lambda < c < \mu$ esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$, allora $f(x) < c$ e $g(x) > c$
2. se esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$, abbiamo

$$f(x) \leq g(x) \implies \lambda \leq \mu$$

Dal primo punto segue in particolare che $f(x) < g(x)$ in $J \cap E \backslash \{\xi\}$, e se $f(x) \equiv 0$, $f(x) \to 0 = \lambda$ e concludiamo che se $g(x) \to \mu > 0$ per $x \to \xi$ esiste un intorno J di ξ tale che $g(x) > 0$ in $(J \cap E)\backslash\{\xi\}$ (permanenza del segno).

Proof Permanenza del segno e monotonia del limite

1. Per ipotesi $\lambda < c < \mu$ esistono due intorni I_λ di λ e I_μ di μ tale che I_λ è tutto a sinsitra di c e I_μ è tutto a destra di c. Per definizione di limite, esiste un intorno $J_1(\xi)$ di ξ tale che $\forall x \in E \cap J_1, x \neq \xi, f(x) \in I_\lambda$ e $\forall x \in E \cap J_2, x \neq \xi, g(x) \in I_\mu$ (ossia $f(x) \to \lambda$ e $g(x) \to \mu$). Quindi $\forall x \in E \cap [J_1 \cap J_2], x \neq \xi$ abbiamo $f(x) < c < g(x)$.
2. Esercizio: contronominale.

Proposition Limitatezza

Se $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ per $x \to \xi$ allora usnado la definizione di limite con $J = (L-1, L+1)$ si trova un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi, L-1 < f(x) < L+1$ e in particolare f è limitata nell'intorno puntato $J\backslash\{\xi\}$ di ξ.

12.2 Aritmetica dei limiti

Proposition Aritmetica dei limiti

Siano $f, g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso di E e supponiamo che $f(x) \to \lambda$, $g(x) \to \mu$ per $x \to \xi$. Allora:

1. $$\exists \lim_{x\to\xi} f(x) \pm g(x) = \lambda \pm \mu$$
   purché non si presenti forma $\infty - \infty$.
2. $$\exists \lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lambda\mu$$
   purché nons i presenti forma $0 \cdot \infty$.
3. se $\mu \neq 0$ cosicché $g(x) \neq 0$ in un intorno puntato di E (per la permanenza del segno) allora
   $$\exists \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\mu}$$
   purché non si presenti forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se $g(x) \neq 0$ in un intorno puntato di ξ e $g(x) \to 0^\pm$, allora
   $$\exists \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{0^\pm} = \pm\infty$$

(il segno è dato dalla regola dei segni) purché $\lambda \neq 0$.

Proof

Mostriamo che $f(x)g(x) \to \lambda\mu$ se non si presenta forma $0 \cdot \infty$. Sia infatti $\{x_n\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq \xi$ e $x_n \to \xi$, allora $f(x_n) \to \lambda$ e $f(x_n) \to \mu$ implica che $f(x_n)g(x_n) \to \lambda\mu$ purché non si presenti forma $0 \cdot \infty$.

In modo analogo si estendono tutte le formule di calcolo per i limiti viste per i limiti di successione. Per esempio,

$$f(x)^{g(x)} \to \lambda^{\mu}$$

purché non si presenti forma 1^{∞} e ∞^{0}. mel caso in cui $f(x) \to 0^+$ cosicché $f(x) > 0$ in un intorno puntato la forma indeterminata relativa è 0^0 $((0^+)^{\mu} = 0)$ trane per $\mu = 0$.

Teorema Cambiamento di variabile nei limiti

Siano $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso per E dove $f(x) \to \lambda$ per $x \to \xi$, $g(x)\colon F \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e λ un punto di accumulazione esteso dove $g(y) \to \mu$ per $y \to \lambda$, e supponiamo infine che ξ sia di accumulazione esteso per

$$f^{-1}(F) = \text{C.E. di } g \circ f$$

e

$$\text{C.E. di } (g \circ f) = \{x \in E \mid f(x) \in F\} = f^{-1}(F)$$

Allora, $g(f(x)) \to \mu$ per $x \to \xi$ in $f^{-1}(F)$. Si può scrivere tale relazione come

$$\lim_{x \to \xi} g(f(x)) = \lim_{y \to \lambda} g(y)$$

pongo

$$y = f(x) \to \lambda$$

per $x \to \xi$.

le relazioni dilimiti pe rle successioni conducono alle corrispondenti di limite per le funzioni. Se $\forall \varepsilon_n \to 0, \varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, abbiamo le analoghe con x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \to 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\alpha} - 1}{x} \to \alpha$$

12.3 Continuità

Teorema Continuità e continuità per successione

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Sono equivalenti:

1. f è continua in x_0;
2. *continuità per successioni:* $\forall \{x_n\} E \mid x_n \to x_0, f(x_n) \to f(x_0)$.

Proof Continuità e continuità per successione

Esercizio. Se x_0 non è di accumulazione (è isolato), la successione deve essere definitivamente pari a x_0.

($\Longrightarrow$) TODO

($\Longleftarrow$) TODO

La continuità è equivalente alla continuità per successione in ogni spazio metrico.

Proposition Proprietà delle funzioni continue

Siano $f, g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ continue in x_0.

1. supponiamo che $f(x_0) < g(x_0)$, allora per tutte le c tali che $f(x_0) < c < g(x_0)$, esiste un intorno J di x_0 tale che
$$\forall x \in J \cap E, f(x) < c < g(x)$$
Se x_0 è isolato, la tesi è banale. Altrimenti, usiamo il teorema della permanenza del segno dei limiti. Troviamo quindi un intorno dove la condizione vale necessariamente ovunque tranne nel punto x_0, ma nel punto x_0 la tesi vale per ipotesi.
2. esistono M e J intorno di x_0 tale che
$$\forall x \in E \cap J, |f(x)| \leq M$$
Chiaramente se il limite è finito, allora esiste un intorno puntato dove la funzione è limitata. Siccome la tesi vale anche per il punto stesso, vale la tesi.

Proposition Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Siano $f, g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ continue in x_0.

1. $f(x) \pm g(x)$ è continua in x_0;
2. $f(x)g(x)$ è continua in x_0;
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continuità in x_0 per $g(x) \neq 0$.

Proof Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Se il punto non è di accumulazione tali proprietà sono banali. Altrimenti, seguono dalle proprietà dei limiti. Nel caso della divisione distinguiamo $g(x)$ positivo e negativo.

Tali proprietà sono analoghe per la continuità destra e sinistra.

Definizione Continuità intervallo

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è continua in E se è continua in ogni punto di E.

Teorema Composizione delle funzioni continue

Siano $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in E$ e $g\colon F \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $y_0 = f(x_0) \in F$. Then, the composite function

$$g \circ f \colon f^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

is continuous x_0.

13 Limiti e discontinuità di funzioni monotone

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ monotona crescente su I, e sia x_0 intorno a I. Allora esistono finiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x>x_0} f$$

In particolare, f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

e se f non è continua in x_0 allora x_0 è una discontinuità di salto.

Un analogo risultato vale per funzioni monotone decrescenti, e si può ricavare osservando che f è monotona decrescente se e solo se $-f$ è monotona crescente.

Proof

Dimostra che esiste

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) \le f(x_0)$$

Per monotonia, per ogni $x_1 < x < x_0$ abbiamo

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

da cui

$$\forall x_1 < x_0, f(x_1) \le \sup_{x<x_0} f(x) \le f(x_0)$$

Per definizione di supremum,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon < x_0 \,|\, f(x_\varepsilon) > \sup_{x<x_0} f(x) - \varepsilon$$

Per monotonia concludiamo che $\forall x_\varepsilon < x < x_0$ vale quindi

$$\sup_{x<x_0} f(x) - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le f(x) \le \sup_{x<x_0} f(x)$$

Quindi, posto $\delta = x_0 - x_\varepsilon$ vale che per tutte le x tali che $x_0 - \delta < x < x_0$ abbiamo

$$\sup_{x<x_0} f - \varepsilon < f(x) < \sup_{x<x_0} f(x)$$

e per definizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sup_{x<x_0} f$$

Corollario

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ monotona. Allora, l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile.

Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo che f sia monotona crescente e siano x_1 e x_2 due punti di discontinuità. Consideriamo x', x'' e x''' come punti negli intervalli definiti da x_1 e x_2. Dal teorema precedente

$$f(x') \leq \lim_{x \to x_1^-} \leq f(x_1) \leq \lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq f(x'') \leq \lim_{x \to x_2^-} \leq f(x_2) \leq \lim_{x \to x_2^+} f(x) \leq f(x''')$$

e poiché per ipotesi f è discontinua in x_1, x_2 almeno una delle disuguaglianza in rosso o in blu sono strette. Questo dice che gli intervalli di salto

$$\lim_{x \to x_1^-} f, \lim_{x \to x_1^+} f$$

e

$$\lim_{x \to x_2^-} f, \lim_{x \to x_2^+} f$$

sono disgiunti. Dissando un razionale in ciascuno degli intervalli di salto corrispondente ai punti di discontinuità in f si stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra

$$D = \{x \in I \mid f \text{ è discontinua in } x\}$$

e un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Poichè $\mathbb{Q}$ è numerabile, D è al più numerabile.

13.1 Compattezza

Quindi i punti di massimo forte sono al più numerabile, mentre quelli deboli non sono necessariamente numerabile.

Definizione Compattezza di successioni nei reali

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che K è compatto per successioni se

$$\forall \{x_n\} \subseteq K$$

esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$, cioè da ogni successione di punti di K si può estrarre una sottosuccesione convergente a un punto di K.

Se K è finito allora è compatto per successioni (un insieme finito è chiuso in quanto non contiene punti di accumulazione).

Teorema Teorema di Heine Borel

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$, allora sono equivalenti:

1. K è compatto per successioni
2. K è chiuso e limitato.

Proof Teorema di Heine Borel

- (2) $\implies$ (1). Consideriamo $\{x_n\} \subseteq K$. Siccome K è limitata, $\{x_n\}$ è limitata. Quindi, per Bolzano-Weierstrass esiste $\exists \{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to \overline{x}$. Poiché $\{x_{n_k}\} \subseteq K$ e $x_{n_k} \to \overline{x}$ per la caratterizzazione dei punti di chiusura $\overline{x} \in \overline{K} = K$ perché K è chiuso, quindi $x_{n_k} \to \overline{x} \in K$ e K è compatto.
- (1) $\implies$ (2).
  - K **è chiuso**: Sia $\overline{x} \in \overline{K}$. Per il teorema di caratterizzazione di $\overline{K}$, esiste $\{x_n\} \subseteq K$ tale che $x_n \to \overline{x}$. Poiché K è compatto, esiste $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Ma $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ e quindi $x_{n_k} \to \overline{x}$ e per uincitià del limite $\overline{x} = x_0 \in K$ e K è chiuso.
  - K **è limitato**: Mostriamo che $\mu = \sup K < +\infty$. Abbiamo dimostrato che $\exists \{x_n\} \subseteq K$ tale che $x_n \to \mu$. Ma K è compatto cosicché esista $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Per unicità $= x_0 0 n K$ e quindi μ è finito.

Corollario Teorema di Wierstrass

Se K è compatto per successioni, allora esiste $\min\{K\}$ e $\max\{K\}$.

Siccome il supremum e l'infimum appartenogno a K (dalla dimostrazione).

Teorema Teorema di Heine-Cantor

Sia $f\colon K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora, $f(K)$ è compatto.

Proof Teorema di Heine-Cantor

Data $\{y_n\} \subseteq f(K)$, dobbiamo dimostrare che esiste $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$ tale che $y_{n_k} \to y \in f(K)$. Per definizione, $y_n \in f(K)$ quindi esiste $x_n \in K$ tale che $f(x_n) = y_n$. La successione $\{x_n\}$ è contenuta in K compatto. Esiste $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Ma è continua su K e quindi in x_0. Quindi per il teorema su continuità e continuità per successione, abbiamo che

$$x_{n_k} \to x_0 \implies f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to f(x_0) = y_0 \in f(K)$$

e quindi $f(K)$ è compatto.

Corollario Teorema di Wierstrass

Sia $f\colon K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora f è limitata ed assume massimo e minimo.

Teorema Teorema degli zeri

Sia $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora, esiste $c \in [a;b]$ tale che $f(c) = 0$.

Proof Teorema degli zeri

Senza perdita di generalità, supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Definiamo l'insieme

$$E = \{x \mid \forall t \in [a,x], f(t) < 0\}$$

Notiamo che $a \in E \neq \emptyset$. Sia $c = \sup E$. La tesi è che $f(c) = 0$. Notiamo che $c > a$ in quanto $f(a) < 0$ e f continuano implicano, per il teorema di permamenza del segno, che $f(t) < 0$ in $[a; a+\delta)$ per qualche $\delta > 0$. Analogamente, $c < b$ siccome $f(b) > 0$ ed esiste δ_1 tale che $f(t) > 0$ in $(b-\delta; b)$ e quindi $c < b$. Mostriamo che $f(c) = 0$ facendo vedere che non può essere nè $f(c) < 0$ nè $f(c) > 0$. Infatti, se fosse $f(c) < 0$, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(t) < 0$ per $t \in (c-\delta, c+\delta)$. D'altra parte, per definizione di $c = \sup\{x \mid f(t) < 0, t \in [0,x]\}$ esisterebbe $x_0 \in E$ tale che $c - \delta < x_0 < c$. Quindi si avrebbe $f(t) < 0$ in $[a, x_0]$ e in $(c-\delta; c+\delta)$. Quindi, $f(t) < 0$ in $[a; c+\delta]$ e c non è maggiorante di E $\lightning$. Se invece fosse $f(c) > 0$ per lo stesso motivo esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(t) > 0$ per $t \in (c-\delta; c+\delta)$ e quindi $\forall x_0 \in (c-\delta; c+\delta), f(x_0) > 0$ e quindi c non è più piccolo maggiorante di E $\lightning$.

Esempio

Dimostriamo che la funzione $f(x) = x - \cos x$ ha un (e un solo) zero in $(0; \frac{\pi}{2})$ e determinarlo con un errore minore di 10^{-2}. La funzione è continua nell'intervallo $[0; \frac{\pi}{]}2$ e $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$. Per cui, per il teorema degli zeri esiste uno zero c in tale intervallo. Lo zero è unico in quanto è strettamente crescente, per la derivata $f'(x) = 1 + \sin x$. Calcoliamo $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.078 > 0$. Quindi, $c \in (0; \frac{\pi}{4})$. Se si approssima c con il punto medio dell'intervallo, quindi $c = \frac{\pi}{8}$, l'errore è al massimo $E = \frac{\pi}{8}$. Consideriamo poi $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{8} - \cos(\frac{\pi}{8}) = -0.53 < 0$. Quindi, c si trova in $(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4})$. Allora prendiamo la media $c = \frac{3\pi}{16}$, e l'errore è al massimo $E = \frac{\pi}{16}$. Iteriamo il processino fino a quando $E < 10^{-2}$.

Teorema Teorema dei valori intermedi di Darboux

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua su I. Vi sono due versioni:

1. Se $I = [a; b]$, allora f assume tutti i valori fra $f(a)$ e $f(b)$;
2. Se I è arbitrario, finito o infinito, aperto o chiuso o semiaperto, allora $\forall \xi$ con
$$\inf_I f < l < \sup_I f$$
esiste $c \in I$ tale che $f(c) = \xi$.

Proof Teorema dei valori intermedi di Darboux

1. Se $a = b$ il teorema è banale. Senza perdita di generalità, supponiamo ora che $f(a) < f(b)$, e sia $f(a) < l < f(b)$. Consideriamo la funzione ausiliaria $g\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - l$. Notiamo che g è continua in $[a; b]$, $g(a) = f(a) - l < 0$ e $g(b) = f(b) - l > 0$ quindi per il teorema degli zeri, $\exists\, c \in [a, b] \mid g(c) = f(c) - l = 0$. Quindi, $f(c) = l$.
2. Sia $\inf_I f < l < \sup_I f$. Per definizione di infimum, esiste $a \in I$ tale che
$$\inf_I f < f(a) < l$$
e, analogamente, esiste $b \in I$ tale che
$$l < f(b) < \sup_I f$$
Se $a < b$, applicando il punto primo all'intervallo $[a; b]$, si deduce che esiste $c \in (a; b) \subseteq I$ tale che $f(c) = l$. Se, invece, $a > b$ si considera l'intervallo $[b; a]$ e si conclude in maniera analoga.

Corollario

Se f è continua su I intervallo, allora $f(I)$ è un intervallo.

Combinando il teorema di Weierstrass con il teorema dei valori intermedi, otteniamo che se f è continua in $[a; b]$, allora $f([a; b]) = [m; M]$ con $m = \min_I f$ e $M = \max_I f$.

I teoremi degli zeri e dei valori intermedi, valgono per funzioni continue su intervalli.

Variazione del teorema di Weierstrass quando non valgono tutte le premesse:
Sia $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ o $x \to +\infty$. Allora f è limitata inferiormente e ammette min assolito.

Per dimostrarlo sia $x_0 \in (0, +\infty)$ e sia $M = f(x_0) + 1$. Per definizione di limite esistono $d < x_0$ e $R > x_0$ tale che $\forall x \in (0; \delta) \cup (R, +\infty), f(x) > M$. f è continua su $[\delta; R]$ chiuso e limitato. Quind è limitata inferiormente su $[\delta, R]$ e assume minimo assoluto $m = f(x_1)$ con $x_1 \in [\delta, R]$ cioè $f(x) \geq m = f(x_1)$ per tutte le $x \in [\delta, R]$. In particolare, $m = f(x_1) \leq f(x_0) < M$. Se $x \in [\delta, R], f(x) \geq f(x_1) = m$. Se $x \in (0, \delta) \cup (R, +\infty)$, $f(x) > M > m = f(x_1)$. Quindi, $m = f(x_1)$ è il min assoluto di f in $(0, +\infty)$.

13.2 Continuità uniforme

Definizione Continuità uniforme

Una funzione f si dice *uniformemente continua* in E se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che $\forall x_0 \in E$ e $\forall x \in E$, per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Quindi il valore δ è indipendente dal punto.

Lemma

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora f non è uniformemente continua in E se esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ e successioni $\{x_0\}, \{x'_n\}$ tale che $|x_n - x'_n| \to 0$ e $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \overline{\varepsilon}$.

Proof

Abbiamo che f non è uniformemente continua se $\exists \overline{\varepsilon} > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ esistono $x_\delta e x'_\delta \in E$ con $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \overline{\varepsilon}$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n}$ si ottengono successioni $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ in E tale che $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \to 0$ e $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \overline{\varepsilon}$.

La funzione $\sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[0, +\infty]$.

Teorema Teorema di Heine-Cantor

Sia $f\colon K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora f è uniformemente continua su K. In particolare, $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ continua, è uniformemente continua.

Proof

Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Per il lemma, esistono $\overline{\varepsilon} > 0$ e successioni $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ in K tale che $|x_n - x'_n| \to 0$ e $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \overline{\varepsilon} > 0$. Siccome K è compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Poiché $x'_{n_k} = x_{n_k} + (x'_{n_k} - x_{n_k}) \to x_0$ e poiché f è continua in x_0, per l'equivalenza fra continuità e continuità per successioni, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$. Quindi, $\overline{\varepsilon} \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \to 0$, ma dovrebbe essere sempre maggiore o uguale a $\overline{\varepsilon}$ ↯.

Definizione Funzione Lipschiziana

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice *Lipschiziana* se esiste $L > 0$ tale che $\forall x, x' \in I$,

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

Se $L = 1$ si dice espansiva. Se $L < 1$ si dice contrazione.

Definizione Funzione Hölderiana

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice *Hölderiana* di esponente $\alpha \in (0, 1]$ se esiste $M > 0$ tale che $\forall x, x' \in I$,

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha$$

Proposition

Tutte le funzioni α-Hölderiane, sono uniformemente continue.

Proof

Consideriamo $f\colon I \to \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha, \qquad M > 0$$

Quindi dato $\varepsilon > 0$ se $M|x - x'|^\alpha$ con $M > 0$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$ se $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ purché $M|x - x'|^\alpha < \varepsilon$, cioè

$$|x - x'| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/d} = d$$

Proposition Proprietà di funzioni uniformemente continue

Siano $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ uniformemente continue. Allora

1. $f + g$ è uniformemente continue. Per dimostrarlo basta considerare $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$;
2. se f e g sono anche entrambe limitate su I, allora fg è uniformemente continua;
3. se $\frac{1}{f}$ è definitiva è uniformemente continua.
4. se $f \colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continue, allora $\forall E_1 \subseteq E$, f è uniformemente continua su E_1.

Teorema

Se $f \colon I \to \mathbb{R}$ è continua su I e uniformemente continua in $I \cap (-\infty, c)$ e $I \cap (c, +\infty)$, allora è uniformemente continua su tutto I.

Proof

Dato $\varepsilon > 0$ bisogna trovare δ tale che $\forall x_1, x_2 \in I$ se $|x_2 - x_1| < \delta$ allora vale $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. Poiché f è uniformemente continua su $I \cap (-\infty, c)$ e $I \cap (c, +\infty)$, esistono $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in I \cap (-\infty, c)$ con $|x_2 - x_1| < \delta$ si ha $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ e analogamente δ_2. Poiché f è continua in c, $\exists \delta_3$ tale che $\forall x \in I$ con $|x - c| < \delta_3$, abbiamo $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi se $x_1 < c < x_2$ e $|x_2 - x_1| < \delta$, allora la distanza $|c - x_1| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$ e $|x_2 - c| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$. E quindi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x)| + f(c) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Allora posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ si ha la tesi.

Proposition

Siano $f, g \colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dove f è continua nel dominio e g è uniformemente continua nel dominio e $f \sim g$ per $x \to \infty$. Allora, f è uniformemente continua nel dominio. In particolare, se f è continua su $[A, +\infty)$ e

$$\exists \lim_{x \to \infty} f(x)$$

allora f è uniformemente continua.

Per dimostrarlo, stimiamo la differenza fra $|f(x_1) - f(x_2)|$ per x molto grande intercalando la funzione g. Troviamo quindi che il δ che va bene per g va bene anche per f.

Proposition

Se $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua nel dominio, allora esistono finiti

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Per dimostriamo mostriamo che $f(x)$ soddisfa la condizione di Cauchy per x che tende ad a^+ o b^- (cosa che deriva naturalmente dalla definizione di continuità uniforme).

Se una funzione è continua e invertibile, ciò non implica necessariamente che l'inversa sia continua.

Lemma Lemma 1

Sia $f \colon I\mathbb{R}$ continua e invertibile su I intervallo. Allora, f è strettamente monotona.

Proof Lemma 1

Supponiamo per assurdo che non sia strettamente monotona. Esistono quindi $x_1 < x_2 < x_3$ in

I. Quindi (uguaglianze non strette), o $f(x_1) = f(x_2)$ oppure $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) \geq f(x_3)$ o viceversa (o prima cresce e poi decresce o viceversa o rimane uguale). Chiaramente, se vale una di questi casi (tutti i casi), f non è iniettiva e quindi non invertibile. Se invece valgono le disuguaglianza stretta, allora per il teorema dei valori intermedi, applicato agli intervalli $[x_1; x_2]$ e $[x_2; x_3]$ si trova che

$$\forall \max\{f(x_1), f(x_3)\} \leq \xi < f(x_2)$$

esistono almeno 2 valori di x tali che $f(x) = \xi$. Quindi, la funzione non è iniettiva.

Lemma Lemma 2

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ monotona su I intervallo. Se $f(I)$ è un intervallo, allora f è continua.

Proof Lemma 2

Assumiamo che $x_0 \in I$ sia un punto di discontinuità di f. Allora, sarebbe una discontinuità di salto, e $f(I)$ non sarebbe un intervallo.

Teorema Continuità dell'inversa

Sia $f\colon I\mathbb{R}$ continua e invertibile su I che è un intervallo. Allora, f^{-1} è continua.

Proof Continuità dell'inversa

Per il Lemma 1 f è strettamente monontona. Quindi, $f^{-1}\colon f(I) \to I$ è strettamente monotona. Per il teorema dei valori intermedi $f(I)$ è un intervallo e $f^{-1}\colon f(I) \to I$ è monotona definita su un intervallo e la sua immagine è l'intervallo I. Per il Lemma 2, f^{-1} è continua.

14 Derivate

Definizione Derivabilità

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se esistono finito il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione Retta tangente

La retta tangente è definita come

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Nel caso esistano i limiti finiti da destra o sinistra si dirà che la funzione è derivabile da destra o sinistra nel punto.

Proposition

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e x_0 interno ad I. Se f è derivabile rispettivamente da destra, da sinistra, in x_0, allora f è continua rispettivamente da destra, da sinistra, in x_0.

Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo per esempio che che f sia derivabile da destra in x_0 cioè esiste finito

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_+ f(x_0)$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = D_+ f(x_0) \cdot 0 = 0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

e f è continua da destra in x_0.

Proposition Proprietà aritmetiche della derivabilità

Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile (rispettivamente da sinistra o destra) in x_0 interno ad I. Allora:

1. $f \pm g$ è derivabile in x_0 e vale che
$$D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$$
2. $\forall c \in \mathbb{R}$, cf è derivabile in x_0 e vale
$$D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ è derivabile in x_0 e vale
$$D(af + gb)(x_0) = aDf(x_0) + bDg(x_0)$$
4. fg è derivabile in x_0 e vale
$$(fg)'(x_0) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$
che si chiama Formula di Leibniz

5. $g(x_0) \neq 0$ allora $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 cosicché $\frac{f}{g}$ sia derivabile in un intorno di x_0 è derivabile in x_0 e vale
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proof Proprietà aritmetiche della derivabilità

1. esercizio;
2. segue dal 3;
3. calcoliamo
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$
Per ipotesi, il primo termine tende a $f'(x_0)$ mentre l'ultimo $g'(x_0)$. L'altro termine $g(x)$ tende a $g(x_0)$ perché $x \to x_0$ e g è derivabile in x_0 (il fatto che sia derivabile, implica che sia continua), e l'altro termine analogo. Quindi, vale la tesi.
4. Poiché per ipotesi $g(x_0) \neq 0$ e g è continua in x_0 perché è in derivabie $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 per permanenza del segno. Calcoliamo
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)\end{aligned}$$
Come prima otteniamo la tesi siccome g derivabile implica g continua.

Proposition Derivata della tangente

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

per $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$.

14.1 Condizioni equivalenti alla derivabilità

Teorema

Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ e x_0 interno ad I. Sono equivalenti:

1. f è derivabile in x_0 e $Df(x_0) = \lambda \in \mathbb{R}$
2. *differenziaiblità in* x_0
$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + r(x)$$
dove $r(x) = o(x - x_0)$.

Notiamo che (2) dice che, se approssimiamo f con l'equazione della retta tangente al grafico, l'errore $r(x)$ tende a zero più velocemente di $x - x_0$. La reta tangente è l'unica per la quale l'errore tende a zero più velocemente di $x - x_0$. La differenziaiblità è quindi la proprieté di poter essere approssimata bene con una funzione affine.

Proof

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - Df(x_0)\right](x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x - x_0) + r(x) \end{aligned}$$

e chiaramente f è derivabile in x_0 con derivata se e solo se

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \lambda \iff \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda\right] \to 0$$

se e solo se

$$r(x) = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda\right] \to 0$$

è tale che

$$\frac{r(x)}{x - x_0} \to 0$$

Corollario

Se f è derivabile in x_0 allora, $\forall m$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = Df(x_0) - m = 0 \iff m = Df(x_0)$$

Quindi, la retta tangente è precisamente quella che approssima meglio la funzione attorno ad x_0.

Teorema Formula di derivazione della funzione composta

Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I e $g\colon J \to \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 = f(x_0)$ interno a J. Allora, $Dg(f(x))$ è derivabile in x_0 e vale la formula

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Proof Formula di derivazione della funzione composta

Dobbiamo dimostrare che esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x - 0} = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$$

Introduciamo una funzione ausiliaria $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(y) \triangleq \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 = f(x_0) \\ Dg(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

e notiamo che, per definizione di derivata

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = Dg(y_0)$$

Osserviamo ora che $\forall x \in I$ vale l'uguaglianza

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Infatti, se $f(x) = f(x_0)$ allora il primo membro è nullo e così per il secondo. Se invece $f(x) \neq f(x_0)$ allora

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Per $x \to x_0$ abbiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to Df(x_0)$$

e $f(x) \to f(x_0) = y_0$ perché f derivabile implica f continua, e quindi

$$\varphi(f(x)) \to \varphi(y_0) = Dg(y_0) = Dg(y_0)$$

da cui otteniamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che porta alla tesi.

Teorema Derivata di funzione inversa

Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I e invertibile in I con $f^{-1} \colon f(I) \to I$. Supponiamo che:

1. $Df(x_0) \neq 0$;
2. f^{-1} sia continua in $y_0 = f(x_0)$.

Allora, f^{-1} è derivabile in x_0 e vale

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)} = \frac{1}{Df(f^{-1}(y_0))}$$

Osserviamo che se f è continua e invertibile su I allora f^{-1} è continua su $f(I)$ e quindi il secondo puntato è automaticamente garantito.

Proof Derivata di funzione inversa

Studiamo il limite

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Allora posto $f^{-1}(y) = x$ e $f^{-1}(y_0) = x_0$, abbiamo $f(x) = y$ e $f(x_0) = y$ e per la continuità di f^{-1} in y_0 se $y \to y_0$, allora $f^{-1}(y) = x \to f^{y_0} = x_0$. Allora, possiamo applicare il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} &= \lim_{x \to x_0} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{Df(x_0)}\end{aligned}$$

Notiamo le seguenti:

$$
\begin{aligned}
D \arcsin(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y \in (-1;1) \\
D \arccos(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
D \arctan(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
D \sinh(x) &= \cosh(x) \\
D \cosh(x) &= \sinh(x) \\
D \tanh(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1-\tanh^2(x) \end{cases} \\
D \sinh^{-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
D \cosh^{-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
D \tanh^{-1}(x) &= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

14.2 Punti di singolarità

Definizione Punto singolare

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua in I dove f non è derivabile in $c \in I$. Allora, c è un *punto singolare* per f.

Possiamo parzialmente classificare tali punti:

1. esistono finite le derivate destre e sinistre nel punto ma diverse, allora c è un punto angoloso;
2. esistono infinite le derivate destre e sinistre. La funzione non è derivabile ma diciamo comunque che $Df(c) = \pm\infty$ e che c è un punto a tangente verticale.
3. esistono infinite le derivate destre e sinistre ma con segno opposto. Allora c è un punto di cuspide.

Le varie formule di derivazione, forniscono condizioni sufficiente per la derivabilità delle derivate, ma se le ipotesi non sono rispettate, è necessario studiare direttamente il limite.

Per esempio, $x^{1/3}$ e $x^{4/5}$ non sono derivabili in $x = 0$, ma il loro prodotto è derivabile in $x = 0$.

Studiando il limite incrementale di $|x|^\alpha$ troviamo che il rapporto incrementale è dato da

$$
\begin{cases}
0 & \alpha > 1 \\
+1 & \alpha = 1 \wedge x \to 0^+ \\
-1 & \alpha = 1 \wedge x \to 0^- \\
+\infty & 0 < \alpha < 1 \wedge x \to 0^+ \\
-\infty & 0 < \alpha < 1 \wedge x \to 0^-
\end{cases}
$$

Quindi la funzione è derivabile solo in $\alpha > 1$. Per $\alpha = 1$ abbiamo un punto angoloso, e per $0 < \alpha < 1$ abbiamo un punto di cuspide.

Esercizio Studiare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} = f_+(x) & x > 0 \\ a \ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + e^{b\cos(x)-1} = f_-(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di derivabilità $f_+(x)$ è derivabile per $x > 0$ e quindi f è derivabile per $x > 0$. La funzione f_- è anch'essa derivabile per $x < 1$, in particolare per $x \leq 0$. Quindi, manca da studiare il punto $x = 0$. La continuità deve valere

$$\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

l limite è dato da

$$\lim_{x \to 0^-} = f_-(0) = e^{b-1}$$

n quanto f_- è continua. Quindi, f è sempre continua a sinistra. L'altro limite è dato da

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}\frac{x^2}{x} + e^{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\ln(x)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{2}x^2 \ln(x)} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$x^2 \ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^2} \to 0$$

Quindi, il secondo limite è 1. Allora f è continua se e solo se $1 = e^{b-1}$, quindi $b = 1$. Poiché la derivabilità implica la continuità, deve essere $b = 1$. Inoltre devono esistere finite $D_-f(0) = D_+f(0)$, quindi

$$D_-f(0) = D_-(f_-)(0) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \frac{f_-(x) - f_-(0)}{x-0} = -a \\ Df_-(0) = -a \end{cases}$$

e quella sinsitra

$$D_+f(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f_+(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Concludiamo allora che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $b = 1$ e $a = -\frac{1}{2}$. In tal caso $f'(0) = \frac{1}{2}$. Se $b = 1$ e $a \neq \frac{1}{2}$, f è continua ma non derivabile e $x = 0$ abbiamo un punto angoloso.

14.3 Massimi e minimi

Definizione Massimo locale o relativo

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora x_0 è un *punto di massimo locale o relativo* debole se esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutte le $x \in I \cap E$. Il punto x_0 dice dice *punto di massimo locale o relativo* forte se esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) < f(x_0)$ per tutte le $x \in I \cap E$ con $x \neq x_0$.

Se x_0 è tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutte le $x \in E$ di dice punto di massimo globale o assoluto, e debole se $f(x) < f(x_0)$ con $x \neq x_0$. Analogamente per i punti di minimo locale e assoluti, forti e deboli.

Un punto può essere contemporaneamente minimo e massimo locale debole. Tuttavia, è incompatibile essere minimo locale forte e massimo locale debole e viceversa. Inoltre, la forza implica la debolezza.

Definizione

Un punto x_0 si dice estremamente debole/forte se è un minimo o massimo debole/forte.

Teorema Teorema di Fermat

Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che $x_0 \in I$ sia un punto estremanete per f (locale/globale debole/forte) e supponiamo

1. x_0 è interno ad I;
2. f è derivabile in x_0.

Allora $f'(x_0) = 0$.

Proof Teorema di Fermat

Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo relativo debole. Per definizione, esiste un intorno J di x_0 tale che $\forall x \in J \cap I, f(x) \geq f(x_0)$. Poiché x_0 è interno prendendo un J più piccolo possiamo supporre che $J \subseteq I$. Consideriamo allora il rapporto incrementale per $x \in J \subseteq I$ e $x \neq x_0$. Abbiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & x > x_0 \\ \leq 0 & x < x_0 \end{cases}$$

In questo passaggio è essentiale che x_0 sia un punto interno. Facendo tendere $x \to x_0^+$ e rispettivamente $x \to x_0^-$ e utilizzando il teroema di monotonia del limite otteniamo che

$$D_-f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \lim_{x \to x_0} \leq 0$$

e

$$D_+f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \lim_{x \to x_0} \geq 0$$

Poiché f è derivabile, $D_+(x_0) = D_-f(x_0) = f'(x_0)$ e quindi $f'(x_0) = 0$.

Definizione Punto critico o stazionario

Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Allora x_0 è un *punto critico o stazionario* se $f'(x_0) = 0$.

Corollario

Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora, gli eventuali punti estremanti di f in I vanno ricercati tra:

- i punti interni stazionari;
- i punti interni dove f non è derivabile (cioè è punti singolari);
- gli estremi di I che appartengono a I.

Esercizio Tra tutti i contenitori cilindrici di volume fissato V, trovare quello che ha superficie minima.

Abbiamo che

$$V = r^2\pi h$$

e

$$S = 2r^2\pi h + 2r\pi h$$

Vogliamo minimizzare S con V costante. Troviamo $h = \frac{V}{\pi r^2}$, e allora

$$\frac{S}{2} = \pi r^2 + \frac{V}{r}$$

I vincoli sono $r > 0$. Minimizziamo allora $f(r) = \frac{S}{2}$. La funzione è derivabile e quindi continua in $(0, +\infty)$. Notiamo che $f(r) \to \infty$ per $x \to 0^+$ e $x \to \infty$. Per estensione del teorema di Weierstrass al caso di funzioni definite su intervalli aperti che tendono ad infinito agli estremi, esiste un minimo assoluto in tale intervallo. Poiché f è derivabile in $(0, +\infty)$, tale minimo è assunto in un punto stazionario, per il teorema di Fermat. Abbiamo

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r^2}(2\pi r^3 - V)$$

Risolviamo quindi $f'(r) = 0$ e quindi

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/2}$$

Vi è un unico punto stazionario nell'intervallo, e quindi questo è il minimo assoluto.

Teorema Teorema di Rolle

Sia $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia:
1. continua in $[a,b]$;
2. derivabile in (a,b);
3. $f(a) = f(b)$.

Allora, esiste almeno un $c \in (a;b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Proof Teorema di Rolle

Poiché f è continua in $[a;b]$ chiuso e limitato, per Weierstrass ammette minimo m e massimo M assoluti in $[a,b]$. Per definizione, $\forall x \in [a,b], m \leq f(x) \leq M$ Consideriamo due casi:
- $m = M$, allora f è costante e $f'(c) = 0$ per ogni c in $[a,b]$;
- $m < M$, allora se x_m e X_M sono i punti dove f assume minimo e massimo rispettivamente, cioè $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$ poiché $f(a) = f(b)$ e $m < M$ almeno uno dei due punti deve essere interno. Tale punto è estremamente interno dove f è derivabile. Quindi per Fermat, $f'(c) = 0$.

Le ipotesi di Rolle sono strettamente necessarie. Se manca la derivabilità il controesempio è $|x|$. Se manca la continuità l'esempio è

$$\begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Teorema Teorema di Lagrange

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dove
1. continua in $[a,b]$;
2. derivabile in (a,b);

Allora, esite $c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La retta tangente esiste sempre in quanto la funzione è derivabile.

Proof Teorema di Lagrange

Vogliamo applicare il teorema di Rolle, ma la condizione che $f(a) = f(b)$. Allora, sottraiamo ad f la della corda

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$

che è una funzione affine. Tale funzione è continua in $[a,b)$, in quanto viene mantenuta la derivabilità, è quindi anche derivabile, e $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Allora, per il teorema di Rolle, esiste $c \in (a,b)$

tale che

$$\varphi(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

da cui $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Notiamo che Rolle è un casino particle di Lagrange. Infatti, le due sono equivalenti, e le condizioni sono strettamente necessarie.

Teorema Teorema di Cauchy dei valori intermedi

Siano $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dove

1. f, g siano continue in $[a, b]$;
2. f, g siano derivabili in $[a, b]$.

Allora, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

In particolare, se $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ cosicché $g(a) = g(b)$ per Rolle, allora dividendo si ottiene

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Se $g(x) = x$, allora l'espressione dats diventa

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$$

e quindi Lagrange è un caso particolare di Cauchy.

Proof Teorema di Cauchy dei valori intermedi

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

Allora φ è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) come combinazione lineare di funzioni con queste proprietà- Inoltre, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Quindi, per il teorema di Rolle, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\varphi'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$$

da cui la tesi.

Come funzione ausiliaria si sarebbe potuta scegliere, più in generale, una combinazione lineare di f e g tale che $\varphi(a) = \varphi(b)$

In sintesi abbiamo che siccome il teorema di Cauchy implica quello di Rolle, allora i 3 teoremi sono tutti equivalenti.

14.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema

Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ con I intervallo e derivabile nell'interno $\overset{\circ}{I}$. Allora:

1. f è costante su I se e solo se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$;
2. f è monotona crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$, e analogamente decrescente,
3. Se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$, allora f è strettamente crescente in I. Nota che il fatto che f sia strettamente crescente in $\overset{\circ}{I}$ non implica che $f'(x) > 0$ in $\overset{\circ}{I}$. Per esempio, $f(x)x^3$ si annulla

in un punto solo.

4. Posto $Z = \{x \in \overset{\circ}{I} \mid f'(x) = 0\}$, allora f è strettamente crescente in I se e solo se:
   (a) $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$;
   (b) Z non ha punti interni (non contiene intervalli).

Proof

Poiché f è derivabile in $\overset{\circ}{I}$ e continua in I, $\forall a < b \in I$, f è continua in $[a, b] \subseteq I$ e f è derivabile in $(a, b) \in \overset{\circ}{I}$. Per Lagrange, risulta quindi che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

1. è chiaro che se f è costante in I, $\forall x \in I, f'(x) = 0$ in particolare $\forall x \in \overset{\circ}{I}$. Viceversa, supponiamo che $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$. Per quanto detto sopra $\forall a < b \in I, \exists c$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$$

   cioè $\forall a < b \in I$ risulta $f(a) = f(b)$ e f è quindi costante.
2. supponiamo che f sia monotona crescente in I e sia x_0 interno ad I. Allora, $\forall x > x_0$, $x \in I$, risulta che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

   da cui facendo tendere x a x_0^+ e usando la monotonia del limite, si deduce che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_+ f(x_0) = f'(x_0)$$

   in quanto la funzione è derivabile. Viceversa, se $\forall x, f'(x) \geq 0$ allora $\forall a < b \in I$ dalla conclusione di Lagrange segue che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0$$

   da cui $f(b) \geq f(a)$, e quindi f è monotona crescente.
3. Se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$ dal ragionamento fatto nel precedente punti, deduciamo che $\forall a < b \in I, f(a) < f(b)$ e quindi f è strettamente crescente.
4. Supponiamo che f sia strettamente crescente, per il secondo punto abbiamo che è $\forall \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$. Se Z contenesse un intervallo (a, b), allora per il primo punto f sarebbe costante in (a, b), equindi non monotona crescente $\lightning$. Viceversa, f è monotona crescente, e Z non contiene intervalli. Supponiamo che f non sia strettamente crescente, esistono $a < b \in I$ tale che $f(a) \geq f(b)$ ma poiché f è monotona crescente, $f(a) = f(b)$, e quindi in tale intervallo è costante. Quindi, $(a, b) \in Z$, contro l'ipotesi $\lightning$.

Teorema

Sia $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $(a, b]$ e derivabile in (a, b). Supponiamo

$$\exists \lim_{x \to b^-} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lambda$$

In particolare, se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile da sinistra i b e

$$D_- f(b) = \lambda \lim_{x \to b^-} f'(b)$$

Vale lo stesso per $[a, b)$ continua in $[a, b)$ e derivabile in (a, b) con il limite da sinistra e per $I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \backslash \{c\}$ per il quale esiste

$$\lim_{x \to c} f'(x)$$

Proof

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Per ogni $x \in (a, b)$, f è continua in $[x, b)$ ed è derivabile in (x, b) quindi soddisfa le ipotesi del Teorema di lagrange ed esiste c_x tale che

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(c_x), \quad x < c_x < b$$

Per $x \to b^-$, $c_x \to b^-$ e quindi $f'(c_x) \to \lambda$ da cui

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lambda = \lim_{x \to b^-} f'(x)$$

nel caso considerato se $\lambda \in \mathbb{R}$, non solo la derivata sinistra esiste finita, ma $f'(x)$ risulta continua da sinistra. In particolare il teorema fornisce una condizione solo sufficiente per la derivabilità: se il limite della derivata esiste, finito o infinito, allora esiste anche il limite del rapporto incrementale e i due limiti sono uguali. Ma, può accadere che esista

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

ma non

$$\lim_{x \to b^-} f'(x)$$

Esempio

Verificare per quali valori di $\alpha > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$. f è continua per ogni $\alpha > 0$ per il teorema dei due carabinieri. Infatti, $|f(x)| \leq |x|^\alpha \to 0 = f(0)$ per $x \to 0$. Il rapporto è dato da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x|^{\alpha - 1} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \cos \frac{1}{x} \to \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \nexists & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Per ogni α, f è derivabile in $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ e

$$f'(x) = D[|x|^\alpha \cos \frac{1}{x}] = |x|^{\alpha - 2} \left\{ \alpha |x| \text{sgn} x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right\}$$

Quindi $f'(0)$ esiste per $\alpha > 1$, f' è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 2$.

Teorema Teorema di de L'Hôpital

Siano $f, g\colon (a, \xi) \to \mathbb{R}$ con $\xi \leq +\infty$ e supponiamo che f, g siano derivabili in (a, ξ), che g, g' siano diverse da zero in (a, ξ), che o $f, g \to 0$ per $x \to \xi^-$, o $g(x) \to \pm\infty$ e che

$$\exists \lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Analogamente per limiti destri e bilaterali

Proof

Consideriamo il caso in cui $\xi = b \in \mathbb{R}$ e $f, g \to 0$ per $x \to b$. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vogliamo applicare il teorema di Cauchy: osserviamo che poiché $f(x), g(x) \to 0$, posto $f(b) = g(b) = 0$ risulta che la funzione così estese sono

1. continue in $(a, b]$;
2. derivabili in (a, b)

e inoltre per ipotesi $g'(x), g(x) \neq 0$ in (a, b) e valgono le ipotesi del teorema di Cauchy. $[x, b]$ per ogni $x \in (a, b)$. Quindi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$$

e per Cauchy esiste $c_x \in (x, b)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Per $x \to b^-$, $c_x \to b^-$ e per ipotesi

$$\frac{f(c_x)}{g(c_x)} \to \lambda$$

cosicché

$$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

14.5 Derivate di ordine superiore

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto $x \in (a,b)$. Così è definita $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Se f' è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ si dice che f è derivabile 2 volte in x_0 e si pone

$$f''(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = (f')'(x_0)$$

Notiamo che affinché una funzione f sia doppiamente derivabile in I, dobbiamo avere:

- esiste un intorno I_1 di x_0 tale che f è derivabile in tutti i punti di I_1;
- la funzione $f'\colon I_1 \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0.

Le derivate di ordine successive vengono definite iterativamente in maniera analoga: $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in x_0 se esiste un intorno I_1 di x_0 tale che le derivate di ordine $k \le n-1$ esistano in I_1 e la derivata di ordine $n-1$ è derivabile in x_0.

Proposition Proprietà delle funzioni derivabili n-volte

Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ derivabili n volte in $x_0 \in I$. Allora,

1. $f \pm g$ è derivabile n volte in x_0 e

$$D^n(f \pm g)(x_0) = D^n f(x_0) \pm D^n g(x_0)$$

2. fg è derivabile n volte in x_0 e vale la formula di Leibniz

$$D^n(fg)(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(x_0) \cdot D^{n-k} g(x_0)$$

3. se $g(x_0) \neq 0$ ($g(x_0) \neq 0$ in un intorno), allora f/g è derivabile n volte in x_0

Proposition Derivabilità della funzione composta

Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in I$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $y_0 = f(x_0) \in J$. Allora, $g \circ f\colon f^{-1}(J) \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in x_0.

Proposition Derivabilità della funzione inversa

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ invertibile e derivabile n volte in x_0, e supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$. Allora, f^{-1} è derivabile n volte in $y_0 = f(x_0)$.

Proposition Serie di MacLaurin dell'esponenziale

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})
\end{aligned}$$

Proposition Serie di MacLaurin del seno

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{2k+1}\sin(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + o(x^{2n+3})\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}\end{aligned}$$

Proposition Serie di MacLaurin del coseno

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \\ O(x^{2n+2}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $\log(1-x)$

Abbiamo che

$$D^k \log(1-x) = -(k-1)!(1-x)^{-k}$$

Allora

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k!} + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $\log(1+x)$

Abbiamo che

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $(1+x)^\alpha$

Notiamo che se $\alpha = n$, allora è un polinomio di grado n, quindi lui stesso è il suo Polinomio di Taylor

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k}$$

Altrimenti,

$$D^k(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

e allora

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

con i coefficienti binomiali generalizzati.

Esempio Espansione di MacLaurin del seno iperbolico

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}$$

Esempio Espansione di MacLaurin del coseno iperbolico

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + XX$$

Esercizio

Verificare per induzione che per ogni k,

$$D^k e^{-\frac{1}{x^2}} = P_k(x) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

con $x \neq 0$, dove P_k è un polinomio di grado minore o uguale a k in $\frac{1}{x^3}$. Dedurre inoltre che per tutte le k,

$$\lim_{x\to 0} D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0 = D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)(0)$$

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ in C^∞ e sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

la sue serie di Taylor in x_0. Poiché è infinitamente differenziabile, soddisfa le ipotesi di Teorema di Taylor per tutte le n e quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Notiamo che $P_n(x)$ è la somma parziale della serie di Taylor.

Teorema

La serie di Taylor di f calcolata in x converge a $f(x)$ se e solo se $R_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$.

Tale uguaglianza vale per le funzioni viste. Per e^x abbiamo il resto in forma di Lagrange

$$R(x) = \frac{D^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove ξ è compreso fra 0 e x. Abbiamo allora

$$R(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

in ogni caso $e^\xi \leq \max\{e^\xi, 1\} \leq e^{|x|}$ Quindi,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0$$

per gerarchia degli infiniti. Quindi, e^x è pari alla sue serie di MacLaurin.

Per il seno abbiamo

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(D^{2n+2}\sin)(\xi)}{(2n+2)!}$$

e siccome le derivate pari del seno sono o il seno o il seno negativo, abbiamo

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|\pm\sin(\xi)|}{(2n+2)!}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0$$

14.6 Classificazione punti stazionari

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in x_0 interno ad I e supponiamo che $f'(x_0) = 0$, quindi x_0 è stazionario:

1. se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo forte;
2. se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo forte;
3. se x_0 è un punto di minimo relativo (debole o forte) allora $f''(x_0) \geq 0$;
4. se x_0 è un punto di massimo relativo (debole o forte) allora $f''(x_0) \leq 0$;

Proof

Per la formula di Taylor al secondo ordine centrata in x_0 abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

e poiché $f'(x_0) = 0$, risulta che

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \\ &= (x-x_0)^2\left\{\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right\}, \quad \forall x \neq x_0 \end{aligned}$$

Per definizione l'ultimo termine tende a zero per $x \to 0$, quindi prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{4}|f''(x_0)| > 0$ nel caso (1) o (2) dalla definizione di limiti risulta che

$$\exists \delta > 0 \,|\, \forall x \,|\, 0 < |x - x_0| < \delta$$

abbiamo

$$\left|\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right| < \frac{1}{4}|f''(x_0)|$$

Consideriamo il primo caso senza perdita di generalità, quindi $f''(x_0) > 0$ risulta quindi che

$$-\frac{1}{4}f''(x_0) < \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0)$$

da cui

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}f''(x_0)$$

Sostituendo in una vecchia equazione otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x-x_0)^2\left\{\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right\} \\ &\geq \frac{1}{4}f''(x_0)(x-x_0)^2 > 0, \quad \forall 0 < |x-x_0| < \delta \end{aligned}$$

e x_0 è punto di minimo relativo forte.
Il caso in cui $f''(x_0) < 0$ segue notando che

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0) < 0$$

Per la seconda parte del teorema consideriamo x_0 come punto di minimo relativo (forte o debole). Sappiamo che $f'(x_0) = 0$ per Fermat e inoltre deve essere $f''(x_0) \geq 0$ perché altrimenti x_0 sarebbe punto di massimo relativo forte e quindi non potrebbe essere punto di minimo relativo. Analogamente per l'ultimo punto.

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 interno ad I con

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Allora

1. Se n è dispari, x_0 non è estremante;
2. Se n è pari, x_0 è un estremante e più precisamente:
   (a) è un minimo relativo forte se $f^{(n)}(x_0) > 0$;
   (b) è un massimo relativo forte se $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Teorema Teorema di Darboux per le funzioni derivate

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in I

1. se $I = [a,b] \wedge f'(a)f'(b) < 0$ allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$;
2. $$\forall l \mid \inf_I f' < l < \sup_I f', \exists c \in (a,b) \mid f'(c) = l$$

Nota che non occorre supporre che la derivata sia continua (in tal caso sarebbe ovvio).

Proof

1. la funzione parte scendendo e termina salendo (senza perdita di generalità). Per definizione

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0$$

Per permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

in $a, a+\delta$ cioè $f(x) < f(a)$ in $(a, a+\delta)$ e f non può assumere minimo in $x = a$. Analogamente si verifica che $f(x) - f(b) < 0$ in $(b-\delta, b)$ e quindi f non può assumere minimo in $x = b$. Ma f è derivabile, e quindi continua in $[a,b]$ e per Weierstrass assume minimo assoluto in un punto $c \in [a,b]$ che è quindi interno. Per Fermat $f'(c) = 0$.

14.7 Convessità

Una funzione si dice convessa se il suo grafico giace sempre sotto quelle delle corde secanti (strettamente o meno).

Definizione Funzione convessa

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è (strettamente) convessa in I se $\forall x_1 < x_2 \in I$ vale (una delle seguenti)

1. $\forall x$ tale che $x_1 < x < x_2$, vale
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
2. $\forall x$ tale che $x_1 < x < x_2$, vale
$$f(x) < f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_1}$$
3. notando che
$$\forall x_1 \leq x \leq x_2, \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$
e ponendo
$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in (0, 1), \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda$$
e risolvendo la prima rispetto ad x si trova $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ e quindi la condizione diventa
$$\forall \lambda \in (0, 1), f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

o minore o uguale per la convessità semplice.

Notiamo infatti che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \end{cases}$$
è l'equazione parametrica che passa per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

La convessità esprime il fatto che la regione
$$E_f = \{(x, y) \mid x \in I \wedge y \geq f(x)\}$$
detta *epigrafico*, è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$.

Infatti, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall x, y \in C$, l'insieme del segmento
$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subseteq C$$

Definizione Funzione concava

Una funzione è concava se $-f$ è convessa.

Convesso è come dire concava verso l'alto, e concava è concava verso il basso.

Proposition

Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Allora

1. se f, g sono convesse e $\alpha, \beta \geq 0$, allora $\alpha f + \beta g$ è convessa ed è strettamente convessa se almeno una delle due lo è e il corrispondente coefficiente è strettamente positivo;
2. le funzioni lineari affini (polinomi di primo grado) sono le uniche funzioni che sono sia concave che convesse (non strettamente);
3. f è (strettamente) convessa se e solo se $f(x) + ac + b$ lo è.

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Sono equivalenti:

1. f è convesso (rispettivamente strettamente converssa);
2. $\forall x_1 < x_0 < x_2$
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
3. $\forall x_0 \in I$, il coefficiente angolare
$$F_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
è una funzione monotona crescente (rispettivamente strettamente crescente) in $I \backslash \{x_0\}$.

Proof

1. (1) $\implies$ (2): osserviamo che per ipotesi f è convessa in I se $\forall x_1 < x_2$ e $\forall x_0$ tale che $x_1 < x_0 < x_2$ vale la disuglianza 2 nella definizione
$$f(x_0) \leq f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$
Poiché
$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$
possiamo riscrivere la disequazione nella forma
$$\left\{\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}\right\} f(x_0) \leq f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$
Quindi rearranging
$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}[f(x_0) - f(x_1)] \leq \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}[f(x_2) - f(x_0)]$$
e dividendo otteniamo la seconda condizione.
2. (2) $\implies$ (1): supponiamo chde f non sia convessa (strettamente convessa). Allora esistono punti $x_1 < x_0 < x_2$ tale che
$$f(x_0) > f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$
Gli stessi conti fatti sopra, mostrano che per i punti selezionati non vale la disuglianza (2) ovvero non vale il minore stretto (vale il maggiore uguale).
3. (2) $\implies$ (3): slides;
4. (3) $\implies$ (2): ovvio.

La convessità non implica la continuità. Vi è solamente un unico controesempio: quello di una funzione concava dove gli estremi dell'intervalli sono punti distaccati più in alto dei punti vicini.

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ convessa su I intervallo.

1. $\forall x_0$ interno ad I, esistono finite $D_- f(x_0) \leq D_+ f(x)$. In particolare ciò implica che f è continua in x_0;
2. $\forall x_1 < x_2$ interni ad I si ha
$$D_-(x_1) \leq D_+ f(x_1) \leq D_- f(x_0) \leq D_+ f(x_2)$$

Inoltre, se f è strettamente convessa, $D_+f(x_1) < D_-f(x_2)$.

3. $\forall x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ interni ad I

$$D_+f(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq D_-f(x_4)$$

In particolare, f è Lipschiziana in $[x_1, x_4]$.

Proof

1. segue direttamente dal punto (3) del teorema (1). Infatti, il rapporto incrementale centrato in x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è una funzione monotona crescente di x. Quindi, $\forall x_1 < x < x_0 < x' < x_2$ con x_1, x_2 interni, vale

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

facendo tendere $x \to x_0^-$, $x' \to x_0^+$, i limiti dei rapporti incrementali esistono per monotonia e si conclude che esistono

$$D_-f(x_0) \leq D_+f(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

2.,3. si ottengono con considerazioni simili. (bisogna considerare 5 punti)

Corollario

Se f è convessa (rispettivamente strettamente convessa) in I e derivabile allora $f'(x)$ è monotona crescente (rispettivamente monotona crescente)

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in I aperto. Allora f è (strettamente) convessa se e solo se $\forall x_0 \in I$ e $\forall x \in I$ per $x \neq x_0$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Proof

($\Longrightarrow$) Supponiamo che f sia (strettamente) convessa- Quindi dal un teorema precedente, $\forall x_1 < x_0 < x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Dalla disuglianza destra si ricava

$$\forall x_2 > x_0, f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

e da quella sinistra si deduce che

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

e qiomdo vale la tesi. Se f è strettamente convessa valgono le disuglianze strette nell'ultima disuglianza, e quindi lo stesso vale per quella prima.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che valga

$$\forall x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

con $x \neq x_0$. Allora gli stessi conti mostrano che per $x_2 > x_1$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \implies \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq f'(x_0)$$

e analogamente per $x_1 < x_0$ si ha

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$$

Quindi

$$\forall x_1 < x_0 < x_2, \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

e f è strettamente (strettamente) convessa per un vecchio teorema.

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in I aperto. Allora

1. f è (strettamente) convessa in I se e solo se f' è (strettamente) monotona crescente.
2. se f è derivabile 2 volte in I, f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$ in I. Se $f'' > 0$, allora f è strettamente convessa.

Proof

1. ($\Longrightarrow$) Sappiamo già che f (strettamente) convessa implica f' monotona crescente.

   ($\Longleftarrow$) Supponiamo che f' sia (strettamente) monotona crescente.
   Mostriamo che vale una vecchia condizione, cioè $\forall x_0 \in I$ e $\forall x \neq x_0$,

   $$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

   Per il teorema di Lagrange $\forall x \neq x_0$, esiste ξ compreso tra x_0 e x tale che

   $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

   Sia $x > x_0$ allora $\xi > x_0$ e poiché f' è monotona (strettamente) crescente otteniamo

   $$f'(\xi) \geq f'(x_0)$$

   e quindi

   $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f'(x_0) \geq 0$$

   Analogamente se $x < x_0$ allora $\xi < x_0$ cosicché $f'(\xi) \leq f'(x_0)$ e $x - x_0 < 0$.
   Come prima,

   $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
2. (2) segue da (1) perché se f è derivabile 2 volte allora f è monotona crescente se e solo se $f'' \geq 0$ e $f'' > 0$ implica f' strettamente monotona

Definizione

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua su I e sia c tale che f è convessa per $x < c$ e concava per $x > c$ o viceversa. Allora, c è un *punto di flesso*.

Teorema

Sia f derivabile 1 volta in I e supponiamo che

1. $x = c$ sia un punto di flesso per f;
2. f sia derivabile 2 volte in $x = c$.

Allora, $f''(c) = 0$.

Infatti, poiché $x = c$ è di flesso, f è convessa (concava) in un intorno sinistro di c, e concava (convessa) in un intorno destro di f, è monotona crescente (decrescente) per $x < c$ e monotona decrescente (crescente) per $x > c$ è un punto estremanete per f'. Per il teorema di Fermat, $(f')'(c) = f''(c) = 0$.

14.8 Asintoti

14.9 Studio di funzioni

Esercizio

Dimostrare che se f è continua, periodica e non costante, ammette un minimo periodo positivo. La funzione di Dirichlet è periodica di ogni razionale, quindi non ha un periodo minimo.

15 Integrali

15.1 Integrazione di Riemann

15.2 Funzione gradini

Teorema Classi di funzioni integrabili

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ con I intervallo limitato

1. se $I = [a, b]$ e f è
   (a) monotona su I;
   (b) continua su I;
   allora f è limitata su I (o perché è monotona e quindi compresa fra $f(b)$ e $f(a)$, o perché è continua su un chiuso limitato per Weierstrass) ed è integrabile su $I = [a, b]$;
2. se $I = [a, b]$ e f è limitata in I e
   (a) monotona su I;
   (b) conotinua su I;
   allora f è Riemann integrabile. (Questo punto contiene anche quello precedente).
3. se I è un intervallo limitato e f è limitata e continua eccetto che in un numero finito di punti, allora f è integrabile
4. se I è un intervallo, f è limitata su I, e l'insieme
$$B = \{x \in I \mid f \text{ non è continua in } x\}$$
   ha un numero finito di punti di accumulazione, allora f è Riemann integrabile su I.

In effetti si dimostra che $f\colon I \to \mathbb{R}$ limitata su I limitato è Riemann integrabile se e solo se l'insieme B ha misura di Lebesgue nulla. Cioè $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\{I_n\}$ successione di intervalli aperti tale che
$$B \subseteq \bigcup_n I_n \wedge \sum_n \ell(I_n) < \varepsilon$$

Proof

1. (a) Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$. I punti x_k hanno forma $a + k\frac{b-a}{n}$ con $0 \le k \le n$. La partizione di $[a, b]$ è data da $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ con $0 < k < n$. Per ogni k siano
$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$
   e siano per ogni n
$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \chi_{I_k}$$
   e
$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \chi_{I_k}$$
   cosicché φ_n e ψ_n sono a scala, $\varphi_n \le f \le \psi_n$ su $I = [a, b]$ e
$$\int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{b-a}{n}$$
   e rispettivamente
$$\int_I \psi_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{b-a}{n}$$

Dal teorema CNS per l'integrabilità risulta che se

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\frac{b-a}{n} \to 0$$

allora f è Riemann integrabile su I.
Sia f monotona in $I = [a, b]$. Senza perdita di generalità supponiamo che f sia monotona crescente (altrimenti applichiamo a $-f$ e l'opposto di una funzione integrabile è integrabile). Cosicché

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_{k-1})$$

e

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_k)$$

(qua sup e inf corrispondono a max e min siccome è monotona). Sostituendo ciò nell'equazione CNS dell'integrabilità abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right] \\ &= \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right] \to 0\end{aligned}$$

per $n \to \infty$.

(b) Sia f continua su $[a, b]$. Mostriamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\frac{b-a}{n} \to 0$$

facendo vedere che $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che $\forall n \geq N$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

Usiamo la definizione di limite per $n \to \infty$. Poiché f è continua su $[a, b]$ chiuso e limitato, f è uniformemente continua su $[a, b]$, e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x, x' \in [a, b]$ con $|x - x'| < \varepsilon$ si ha che $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. In questo caso sostituiamo ε con $\frac{\varepsilon}{b-a}$. L'idea è quella di stimare $M_k - m_k$. La distanza fra i punti dove assumono il massimo M_k e il minimo m_k non può essere maggiore della lunghezza dell'intervallo. Sia allora n tale che $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Per ogni k, f è continua su $[x_{k-1}, x_k]$ chiuso e limitato, e quindi per Weierstrass $\exists x_k, x'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tale che

$$M_k = \max_{[x_{k-a}, x_k]} f = f(x'_k) \qquad m_k = \min_{[x_{k-a}, x_k]} f = f(x_k)$$

cosicché

$$M_k - m_k = f(x'_k) - f(x_k) = |f(x'_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

poiché $|x'_k - x_k| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$. Quindi, sostituendo questo nella solita disuguaglianza otteniamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) < \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

2. (a) Sia $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ limitata e monotona. Per monotonia, esiste

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

che è finito in quanto f è limitata. Posto $\overline{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ L & x = b \end{cases}$$

$\overline{f}$ è monotona su $[a,b]$ e quindi ivi integrabile e quindi $\overline{f} = f$ è integrabile nel sottoinsieme $[a,b)$.

(b) sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ limitata e continua. Per dimsotrare che f è integrabile su $[a,b)$, costruiamo una funziona a scala sopra e sotto. $\forall \varepsilon > 0$ costruiamo $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala tale che $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Osserviamo che f è continua su $[a, b-\delta]$ per tutti $\delta > 0$. Per il punto precedente f è quindi integrabile su $[a, b-\delta]$ per tutte $\delta > 0$. Ci rimane allora da considerare l'intervallo $[b-\delta, b)$. Per ipotesi f è limitata su $[a,b]$, quindi $\exists M$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per tutte le $x \in [a,b]$. Scegliamo δ tale che

$$2M\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

poiché f è integrabile su $[a, b-\delta]$, dato ε esistono funzioni a scala (che scegliamo costanti) $\varphi'_\varepsilon, \psi'_\varepsilon$ tale che $\varphi'_\varepsilon \leq f \leq \psi'_\varepsilon$ su $[a, b-\delta]$ e

$$0 \leq \int\limits_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int\limits_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiamo allora

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} \varphi'_\varepsilon & x \in [a, b-\delta] \\ -M & x \in [b-\delta, b) \end{cases}$$

e

$$\psi_\varepsilon = \begin{cases} \psi'_\varepsilon & x \in [a, b-\delta] \\ M & x \in [b-\delta, b) \end{cases}$$

Siccome $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ sono a scala, $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ in $[a,b]$ e

$$\begin{aligned} 0 \leq \int\limits_{[a,b)} \psi_\varepsilon - \int\limits_{[a,b)} \varphi_\varepsilon &= \left(\int\limits_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int\limits_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) \\ &+ \left(\int\limits_{[b-\delta,b)} M - \int\limits_{[b-\delta,b)} (-M) \right) \\ &= \left(\int\limits_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int\limits_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) + 2M\delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Si deduce facilmente che se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è limitata e continua allora è Riemann integrabile (al posto che il ragionamento solo a destra lo faccio da ambo le parti) e quindi se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è limitata e continua eccetto che in $c \in (a,b)$, poiché $(a,b) = (a,c) \cup \{c\} \cup (c,b)$ e f è integrabile su ciascuno dei 3 sottointervalli f è integrabile su (a,b). In generale, con molteplici punti mancanti, si fa lo stesso procedimento isolandoli.
4. Esercizio: nell'intorno

Corollario

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ limitata su I limitato e supponiamo che esista una partizione $\{I_k\}_{k=1}^n$ tale che f è o continua o monotona in ciascun I_k. Allora f è integrabile su I.

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile su (a,b). Allora, comunque essa venga estesa a $[a,b]$ rimane integrabile e l'integrale ha lo stesso valore siccome

$$\int_{\{a\}} f = 0$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_a^b f$$

senza ambiguità. Osserviamo poi che dalla proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione, l'integrale si può spezzare.

Definizione

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrabile su I (quindi I è limitato e f è limitata su I). Allora $\forall a,b \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{(a,b)} f & a < b \\ 0 & a = b \\ -\int_b^a f & b < a \end{cases}$$

Definizione

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo limitato di I. Fissato $a \in I$ definiamo la *funzione integrale* di f centrata in a

$$F_a(x) = \int_a^x f = \begin{cases} \int_{(a,x)} f & a < x \\ 0 & a = x \\ -\int_{(x,a)} & a > x \end{cases}$$

Lemma

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo di I e siano $a,b,c \in I$. Allora,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proof

La dimostrazione si fa a casi e ne diamo solo due. Se $a < c < b$ il risultato segue dall'additività rispetto all'insieme di integrazione. Supponiamo $a < b < c$. Allora, sempre per l'additività rispetto all'insieme di integrazione

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

da cui

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Corollario

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile nel senso di Riemann su ogni sottointervallo limitato. Fissati $a \in I$ sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Allora,

1. F è Lipschitziana su ogni sottointervallo limitato che contiene a (non possiamo dire che sia Lipschitziana su tutto). Infati se $a \in [\alpha, \beta] \subseteq I$ applichiamo il punto 1 del teorema a tale intervallo. In particolare, F è continua su tutto I, in quanto Lipschitziana su tutti i sottointervalli;
2. Se f è continua in $x_0 \in I$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$;
3. se f è continua in I, F è una primitiva di f in I;
4. se G è una primtiiva di f in I, $\forall x \in I$

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Corollario Formula di derivazione delle funzioni integrali

Sia $f\colon J \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo limitato di J e siano $\alpha, \beta\colon I \to J$ continue. Definiamo

$$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y)\,dy$$

che è ben posto. Allora:

1. H è continua su I.
2. Se f è continua su J e α, β sono derivabili in I, H è derivabile in I e vale

$$H'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Proof

Scelto $y_0 \in J$, possiamo scrivere, $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{y_0} f(y)\,dy + \int_{y_0}^{\beta(x)} f(y)\,dy \\ &= F(\beta(x)) - F(\alpha(x)) \end{aligned}$$

dove

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(t)\,dt$$

è la funzione integrale di f centrata in y_0.

1. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, F è continua su J e quindi H è continua come composizione di funzioni continue.

2. Se f è continua in J, F è derivabile in J con $F'(y) = f(y)$ e se inoltre α, β sono derivabili dal teormea di derivazione delle funzioni composte, H è derivabile e

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) \\ &= f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \end{aligned}$$

Corollario Dimostrazione alternativa del punto 3 del TFCI

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$. Allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f in $[a,b]$.

Proof Dimostrazione alternativa del punto 3 del TFCI

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Poiché f è continua in $[a,b]$. Quindi se $h > 0$, f è continua in $[x, x+h]$ e per il teorema della media integrale esiste $c_x \in [x, x+h]$ tale che

$$f(c_x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

se $h \to 0^+$, $c_x \to x^+$ e poiché f è continua

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(c_x) = f(x)$$

Se $h < 0$ si scrive

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt$$

15.3 Integrali impropri

Ricordiamo che l'integale di Riemann è definito per funzioni limitate su internelli limitati.

Definizione integrale improprio

Sia $f\colon [a,\xi) \to \mathbb{R}$ con $\xi \leq +\infty$ e f possibilmente illimitata in un intorno (sinistro) di ξ. Supponiamo che f sia Riemann integrabile su $[a,b]$. (Per esempio f è continua su $[a,\xi]$). Se esistono finito o infinito

$$I - \int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{b\to\xi^-} \int\limits_a^b f(t)\,dt$$

tale limite si dice integrale improprio/generalizzato di f su $[a,\xi)$ Se tale limitie è finito diciamo che f è integrabile in senso improprio, e il suo integrale improprio converge. Se tale limite è infinito diciamo che l'integrale improprio diverge a $\pm\infty$. Se il limite non esiste diciamo che l'integrale non è definito.

Dobbiamo verificare che il nuovo integrale improprio coincida con quello classico nel caso in cui $\xi < +\infty$ e f è integrabile su $[a,\xi)$

$$R - \int\limits_a^b f(t)\,dt = I - \int\limits_a^b f(t)\,dt$$

Notiamo che f integrabile su $[a,\xi)$ implica che sia integrabile su $[a,\xi]$ comunque determiniamo $f(\xi)$. Inoltre,

$$\int_{[a,\xi)} f(t)\,dt = \int_{[a,\xi]} f(t)\,dt$$

Possiamo supporre quindi che f sia integrabile sull'intervallo chiuso. Per il TFCI la funzione integrale

$$F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt$$

è continua su $[a,\xi]$. In particolare,

$$F(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)\,dx = \lim_{b\to\xi^-} F(b) = \lim_{b\to\xi^-} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Il primo termine $F(\xi)$ è quello di Riemann e l'ultimo è quello improprio, quindi coincide con quello di Riemann quando esiste.

Analogamente si definisce l'integrale improprio sull'intorno destro. Sia ora $f\colon (\eta,\xi)\colon \mathbb{R}$ con $-\infty \leq \eta < \xi \leq +\infty$ possibilmente illimitata in un intorno (destro) di η e (sinistro) di ξ e supponiamo che f sia integrabile su $[a,b]$ per ogni $\eta < a < b < \xi$. Fissiamo ora un punto $c \in (\eta,\xi)$ e definiamo

$$\int\limits_\eta^\xi f(t)\,dt = \int\limits_\eta^c f(t)\,dt + \int\limits_c^\xi f(t)\,dt$$

purché ambo esistano e non si presentino forma di indecisione $+\infty - \infty$. La definizione ha senso se non dipende da c. Osserviamo infatti che a secondo membro la definizione non dipende da c:

1. $\forall c, c' \in (\eta,\xi)$ vale

$$\begin{aligned}\int\limits_c^\xi f(t)\,dt &= \lim_{b\to\xi^-}\left(\int\limits_c^{c'} f(t)\,dt + \int\limits_{c'}^b f(t)\,dt\right)\\ &= \int\limits_c^{c'} f(t)\,dt + \int\limits_{c'}^b f(t)\,dt\end{aligned}$$

   che esiste e solo se il limite esiste.

2. analogamente

$$\int_c^\eta f(x)\,dx = \lim_{a\to\eta^+}\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{a\to\eta^+}\left(\int_a^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^{c} f(t)\,dt\right)$$
$$= \int_a^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^{c} f(t)\,dt$$

Sommando otteniamo

$$\int_\eta^c f(t)\,dt + \int_c^\eta f(t)\,dt = \int_a^{c'} f(t)\,dt + \int_c^{c} f(t)\,dt + \int_c^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^{\xi} f(t)\,dt$$

che si semplifica e quindi è indipendente da c.

Infine, se $f\colon (\eta,\xi)\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni itnervallo limitato contenuto in $(\eta,\xi)\backslash\{x_0\}$ e possibilmente illimitata in un intorno di x_0

$$\int_I f(x)\,dx = \int_\eta^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx$$

Proposition Proprietà integrali impropri

Siano $f, g\colon [a,\xi) \to \mathbb{R}$ integrabile in senso improprio. Allora

1. $\alpha f + \beta g$ è integrabile e vale la regola così scontata che non la scrivo.
2. **non** è vero che il prodotto fg è necessariamente integrabile. (E.g. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ su $(0,1)$ è integrabile ma non $f^2(x)$).
3. *monotonia:* se $f \leq g$, allora l'integrale di f è minore o uguale dell'integrale di g. (Basta che gli integrali esistano, non cè bisogno che siano integrabili).
4. *additività*;
5. **non** vale che $|f|$ è necessariamente integrabile in senso improprio. Tuttavia,

$$\int_a^\xi |f(t)|\, dt$$

è sempre definito ed è maggiore o uguale del modulo dell'integrale.

Teorema

Sia $f\colon [a,\xi) \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a,b]$ per tutte le $b \in (a,\xi)$ e supponiamo che $f(x) \geq 0$ su $[a,b]$. Allora,

$$\int_a^\xi f(x)\, dx = \lim_{b\to\xi^-} \int_a^b f(x)\, dx$$

esiste sempre, finito o infinito.

Proof

Basta notare che la funzione integrale

$$F(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

è monotona crescente, e le funzioni monotone crescenti ammettono sempre limite.

Teorema Esistenza integrale improprio

Sia $f\colon [a,\xi) \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a,b]$ per $a < b < \xi$ e $f(x) \geq 0$ definitivamente in $[a,\xi]$. Allora,

$$\int_a^\xi f(t)\, dt = \lim_{b\to\xi^-} \int_a^b f(t)\, dt$$

exists finite or infinite.

Proof Esistenza integrale improprio

Infatti la funzione $F(x)$ è monotona crescente.

Teorema Teorema di confronto / confronto asintotico

Siano $f, g\colon [a,\xi] \to \mathbb{R}$ integrabili su $[a,b]$ per $a < b < \xi$ e non-negative su $[a,\xi)$.

1. se $f(x) \leq g(x)$ su $[a, \xi]$. Allora,

$$\int_a^\xi f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt$$

che esistono. In particolare se g è integrabile in senso improprio allora lo è anche $f(x)$.
2. se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to \xi^-$, allora $f(x)$ è integrabile in senso improprio se e solo se $g(x)$ è integrabile.
3. se $f(x) = O(g(x))$ per $x \to \xi^-$, allora se

$$\int_a^\xi g(t)\,dt < +\infty \implies \int_a^\xi f(t)\,dt$$

Proof Teorema di confronto / confronto asintotico

1. per $0 \leq f(x) \leq g(x)$ su $[a, \xi)$ cosicché per $a < b < \xi$ risulta, per monotonia dell'integrale

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$

e la conclusione segue passando al limite per $b \to \xi^-$.
2. Preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ si deduce che esiste $c \in [a, \xi)$ tale che

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

in (c, ξ). Cioè

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x), \quad c < x < \xi$$

Quindi integrando tra c e b con $c < b < \xi$ ottenaimo

$$\frac{1}{2}\int_c^b g(x)\,dx \leq \int_c^b f(x)\,dx \leq \frac{3}{2}\int_c^b g(x)\,dx$$

e passando al limite

$$\frac{1}{2}\int_c^\xi g(x)\,dx \leq \int_c^\xi f(x)\,dx \leq \frac{3}{2}\int_c^\xi g(x)\,dx$$

Quindi

$$\int_c^\xi f(x)\,dx$$

è finito se e solo se tale è Quindi

$$\int_c^\xi g(x)\,dx$$

e la conclusione segue dal fatto che

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\xi f(x)\,dx$$

e analogamente per g.

3. come sopra esiste $c \in [a, \xi)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$$

su (c, ξ) cioè $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$ su (c, ξ) e come sopra

$$\int_c^\xi f(x)\,dx \leq M \int_c^\xi g(x)\,dx$$

Le conclusioni circa il carattere degli integrali nel teorema precedente valgono se si assume che le ipotesi valgano solo definitivamente in $[a, \xi)$.

TODO: mettere convergenza integrale da 1 a infinito di x^-p da usare per i confronti

Esempio

$$\int_e^\infty \frac{1}{x^p(\log x)^q}\,dx$$

converge se e solo se $p > 1$ con q arbitrario, oppure $p = 1 \wedge q > 1$.

Teorema Criterio integrale di convergenza

Sia $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ monotona decrescente (e quindi integrabile su $[1, b]$ per ogni $b > 1$) e non-negativa, cosicché

$$\int_1^\infty f(t)\,dt$$

esista finito o infinito. Allora,

$$\int_1^\infty f(t)\,dt < +\infty \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) < +\infty$$

Proof Criterio integrale di convergenza

Consideriamo gli intervalli di estremi interi di $f(x)$. Siccome

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(t)\,dt$$

esiste, $\forall b_n \to \infty$,

$$\int_1^{b_n} f(t)\,dt \to \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(t)\,dt = \int_1^\infty f(t)\,dt$$

Quindi basta mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)\,dt$$

esiste finito se e solo se

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < +\infty$$

Per ogni n scriviamo

$$\int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx$$

Per tutte le k abbiamo

$$f(k+1) = \int\limits_{k}^{k+1} f(k+1)\,dx \le \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \le \int\limits_{k}^{k+1} f(k-1)\,dx = f(k)$$

Sostituendo nella sommatoria otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \le \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$
$$\sum_{h=2}^{n} f(h) \le \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Facendo tendere n ad infinito si ottiene la tesi.

Definizione

Sia $f\colon [a,\xi) \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a,b]$ per $a < b < \xi$. Si dice che f è *assolutamente integrabile* se $|f|$ è integrabile su $[a,\xi)$ cioè se

$$\int\limits_{a}^{\xi} |f(t)|\,dt < +\infty$$

Teorema

Sia $f\colon [a,\xi) \to \mathbb{R}$ assolutamente integrabile $[a,b]$. Allora f è integrabile su $[a,\xi]$ e vale

$$\left| \int\limits_{a}^{\xi} f(t)\,dt \right| \le \int\limits_{a}^{\xi} |f(t)|\,dt$$

Proof

Posto

$$F(b) = \int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt$$

la tesi è che

$$\lim_{b\to\xi^-} F(b)$$

esiste finito e che

$$|\lim_{b\to\xi^-} F(b)| \le \lim_{b\to\xi^-} \int\limits_{1}^{b} |f(t)|\,dt$$

Ricordiamo che esiste finito il limite se e solo se la condizione di Cauchy è soddisfatta per $x \to \xi^-$. Quindi per tutte le $\varepsilon > 0$ esiste un intorno sinistro di ξ

$$I^- \begin{cases} I^- = (\xi - \delta, \xi) & \xi \text{ finito} \\ I^- = (M, +\infty) & \xi \text{ infinito} \end{cases}$$

tale che per tutte le $x, x' \in I \backslash \{\xi\}$,

$$|g(x) - g(x')| < \varepsilon$$

Per ipotesi

$$\int_a^\xi |f(t)|\, dt = \lim_{b \to \xi^-} \int_a^b |f(t)|\, dt = \lim_{b \to \xi^-} G(b)$$

è finito. Quindi, $G(b)$ soddisfa la condizione di Cauchy e dato $\varepsilon > 0$ esiste I^- tale che $\forall x, x' \in I^-$

$$|G(x) - G(x')| < \varepsilon$$

Supponendo senza perdita di generalità che $x < x'$ abbiamo quindi

$$\left| \int_a^{x'} |f(t)|\, dt - \int_a^{x} |f(t)|\, dt \right| < \varepsilon$$

Questo è precisamente

$$\int_x^{x'} |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

Ma allora,

$$\left| \int_x^{x'} f(t)\, dt \right| = |F(x') - F(x)| \leq \int_x^{x'} |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

Quindi, F soddisfa la condizione di Cauchy e esiste finito

$$\lim_{b \to \xi^-} F(b) = \int_a^\xi f(t)\, dt$$

Poiché

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

per $b \to \xi^-$ si ottiene la disuglianza

$$\left| \int_a^\xi f(t)\, dt \right| \leq \int_a^\xi |f(t)|\, dt$$