Computazione I

Paolo Bettelini

Contents

1 Floating points

L'insieme dei floating point è

$$f(\beta, t, m, M) = \{0, \text{NaN}, \pm\infty\} \cup \left\{ x = \text{sign}(x) \cdot \beta^e \sum_{i=1}^{t} y_i \beta^{-i} \;\middle|\; t, y_i, m, M \in \mathbb{N}, y_1 \neq 0, -m \leq e \leq M \right\}$$

Stimiamo ora l'errore relativo

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $\tilde{x} \in f(\beta, t, m, M)$ è la sua rappresentazione migliore in un calcolatore. Consideriamo $x > 0$. Chiaramente, se $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, allora $|x - \tilde{x}| = 0$. Altrimenti, $x \in [a, b]$ dove $a, b \in f$ e sono consecutivi in f. Quindi

$$|x - \tilde{x}| \leq \frac{b - a}{2}$$

Abbiamo allora

$$a = \beta^e \sum_{i=1}^{t} y_i \beta^{-i}$$

e

$$b = \beta^e \left(\sum_{i=1}^{t} y_i \beta^{-i} + \beta^{-t} \right) = a + \beta^{e-t}$$

Quindi la differenza è data da

$$|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2} \beta^{e-t}$$

Dobbiamo ora minorare l'elemento normalizzante

$$|x| = \beta^e \sum_{i=1}^{\infty} y_i \beta^{-i} \geq \beta^e \cdot y_1 \beta^{-1} \geq \beta^{e-1}$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{|x|} \leq \beta^{1-e}$$

Combinando i due risultati otteniamo

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \beta^{e-t} \beta^{1-e} = \frac{1}{2} \beta^{1-t} \triangleq u$$

Allora u è la precisione macchina.

2 Approssimazione di zeri di funzioni

Sia $f \in C_{[a,b]}$ tale che $f(\alpha) = 0$. Vogliamo approssimare α numericamente.

3 Metodo di bisezione

Possiamo applicare ricorsivamente il teorema degli zeri, quindi bisezione. In questo caso la velocità è indipendente da f ma solo dipendente dalla grandezza dell'intervallo. Terminiamo l'algoritmo quando $|b-a| < \varepsilon$ che è la mia tolleranza. L'errore relativo è $|x-\alpha| < \varepsilon|\alpha|$. Per trovare il numero di operazioni abbiamo

$$|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b_2 - a_1|, \cdots, |b_i - a_i| = \frac{1}{2^i}|b_i - a_i|$$

Quindi servono

$$\lceil \log 2 \left(\frac{|b-a|}{\varepsilon} \right) \rceil$$

Il pro di questo metodo è quindi una convergenza globale ma come contro abbiamo una convergenza lenta se l'intervallo è grande.

4 Metodo di iterazione funzionale

Si definiscono metodi numerici per generare la successione $\{x_k\}$ tale che possibilmente

$$\lim_k x_k = \alpha$$

Si andranno a definire iterazioni funzionali della forma

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

con un x_0 dato. Vogliamo convertire $f(x) = 0$ in un'equazione di punto fisso $x = g(x)$, e poi si definisce l'iterazione. L'iterazione funzionale deve tuttavia convergere. Quindi, data g sufficientemente regolare tale che $\alpha = g(\alpha)$ e definito lo schema di iterazione $x_{k+1} = g(x_k)$ con x_0 dato, si vogliono definire condizioni necessarie e/o sufficienti per la convergenza

$$\lim_k x_k = \alpha$$

La condizione necessaria è

Lemma

Sia $g \in C([a,b])$ tale che $x_0 \in [a,b]$ e $x_{k+1} = g(x_k) \in [a,b]$ e

$$\lim_k x_k = \alpha$$

allora $\alpha = g(\alpha)$.

Proof

$$\alpha = \lim_k x_k = \lim_k x_k + 1 = \lim_k g(x_k)$$

La condizione sufficiente è il teorema delle contrazioni.