Analisi II

Paolo Bettelini

Contents

1 Spazi metrici

1.1 Definizioni

L'insieme vuoto e l'insieme X sono aperti e chiusi.

Proposition

L'unione di aperti non numerabile è aperta, mentre l'intersezione è aperta solo se finita.

Proof

Per dimostrare quest'ultima lo facciamo su due insiemi e il resto è per induzione. Prendiamo un punto nell'interezione e prendiamo le due bolle dentro gli insiemi centrate nel punto. Siccome hanno lo stesso centro la loro intersezione è sempre una bolla di raggio il minore fra i due.

La metrice discreta può generare una bolla che è un singoletto.

Proposition

L'unione di chiusi finiti è chiusa. L'intersezione qualsiasi è chiusa.

Ogni singoletto è chiuso. Per dimostrarlo mostriamo che nel complementare esiste una bolla che non interseca il punto (vero per proprietà di Hausdorff).

Tutti i punti di accumulazione sono dei punti aderenti. Tutti i punti di un sottoinsieme sono aderenti per il sottoinsieme. Ogni punto o è di accumulazione o è isolato.

Se x_0 è aderente ad E, x_0 può essere un punto di E oppure no. Se x_0 è punto di accumulazione per E, in ogni bolla centrata in x_0 cadono inifniti punti.

Proposition

E° è aperto. E è aperto se e solo se $E = E^\circ$. E° è il più grande aperto contenuto in E.
$\overline{E}$ è chiuso. E è chiuso se e solo se $E = \overline{E}$. La chiusura di E è il più piccolo chiuso contenente E.

Proof per l'interno

Dimostriamo che E° è aperto. Sia $x_0 \in E^\circ$. un punto interno ad E, quindi esiste una bolla centrata in tale punto che è contenuta in E. Prendiamo un altro punto y in questa bolla. Possiamo costruire una inner bolla centrata in y con un raggio sufficientemente piccolo da rimanere nella bolla più grande. Quindi il punto y è a sua volta interno, quindi tutta la bolla centrata in x_0 è in E° e quindi è aperto.
Dimostriamo ora che se E è aperto allora $E = E^\circ$ (l'altra implicazione è ovvia). Per fare ciò dimostriamo che E° è il più grande aperto in E. Osserviamo che E° fa parte della famiglia degli aperti di X contenuti in E. Sia A un aperto contenuto in E. VOglio dimostrare che $A \subseteq E^\circ$. Sia $x_0 \in A$. A èunione di bolle quindi esiste unr aggio tale che la bolla centrata in x_0 di tale raggio è contenuta in A che è contenuto in E. Quindi, x_0 è interno ad E e $x_0 \in E^\circ$ e $A \subseteq E^\circ$. Supponiamo ora che E sia aperto. Allora E fa parte della famiglia degli aperti di X contenuti in E. Devo avere $E \subseteq E^\circ$. Dato che $E^\circ \subseteq E$ allora $E^\circ = E$.

Dire che un insieme è dentro in un altro significa dire che la sua chiusura coincide con l'insieme. Tipo la chiusura di Q è R quindi Q è denso in R.

Definizione Limitato

Se è contenuto in una bolla

Definizione Diametro

è il sup della metrica su tutte le coppie.

Definizione Ricoprimento

Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico X. Una famiglia

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è un ricoprimento apert di E se

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Definizione Sottoricoprimento

Un Sottoricoprimento di

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è una sottofamiglia di G_α tale che continua a ricoprire. Cioè ne scarto alcuni ma deve comunque rimanere una copertura.

Definizione Compatto

Uno spazio metrico X è compatto se ogni ricoprimento aperto di E ammette un sottoricoprimento finito.

Ogni insieme finito è compatto.

Teorema

Sia X uno spazio metrico e E un sottoinsieme di X compatto.

1. E è limitato;
2. E è chiuso;
3. Ogni sottoinsieme infinito di E ha almeno un punto di accumulazione in E.

Proof

1. Consideriamo $\{B_1(x) \mid x \in E\}$ che è un ricoprimento aperto di E. Siccome E è compatto esiste un sottoricoprimento finito aperto di E, ossia $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$$
Posto
$$R = 1 + \max_{i=1,\dots,n} d(x_i, x_1)$$
Allora la bolla di raggio R centrata in x_1 contiene E, quindi E è limitato.
2. Supponiamo che non sia chiuso. Allora esiste $y \in E'$ ma $y \notin E$. Vogliamo costruire un ricoprimento aperto di E che non ammette sottoricoprimento finito. Sia $r(x) = \frac{1}{2}d(x, y)$ per ogni $x \in X$. Se $x \in E$ allora $r(x) > 0$ perchè $y \notin E$. Abbiamo il ricoprimento
$$\{B_{r(x)}(x) \mid x \in E\}$$
Ma per la compattezza esisterebbe un sottoricoprimento finito, cioè $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r(x_i)}(x_i)$$
Sia ora $R = \min_{i=1,\dots,n} r(x_i)$. Allora $R > 0$ e la bolla $B_R(y)$ non interseca nessuna delle $B_{r(x_i)}(x_i)$, assurdo poiché y è punto di accumulazione.
3. Sia F un sottoinsieme infinito di E. Supponiamo che F non abbia punti di accumulazione in E. Allora ogni punto di E ha una bolla che interseca F in al più un punto. Queste formano un ricoprimento aperto di E. Ma se esistesse un sottoricoprimento finito, F sarebbe finito, assurdo.

Proposition

Sia $E \subseteq X$ compatto. Se $F \subseteq E$ è chiuso allora F è compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di F. Dobbiamo aggiungere degli insiemi aperti per coprire il resto. Siccome F è chiuso, $X \setminus F$ è aperto. Quindi $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{X \setminus F\}$ è un ricoprimento aperto di E. Per la compattezza di E esiste un sottoricoprimento finito, che escludendo $X \setminus F$ è un sottoricoprimento finito di F.

Se $F \subseteq X$ è chiuso, ed $E \subseteq X$ è compatto, allora $F \cap E$ è compatto.

Teorema Teorema dell'intersezione finita

Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di compatti tale che ogni intersezione finita è non vuota. Allora
$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \emptyset$$

Proof

Supponiamo che l'intersezione sia vuota. Allora e sia $E_{\overline{\alpha}}$ un compatto fissato nella famiglia.

$$\begin{aligned} E_{\overline{\alpha}} \cap \left(\bigcap_{\alpha \neq \overline{\alpha}} E_\alpha \right) = \emptyset \\ \implies E_{\overline{\alpha}} \subseteq \left(\bigcap_{\alpha \neq \overline{\alpha}} E_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \neq \overline{\alpha}} E_\alpha^c \end{aligned}$$

$\{E_\alpha^c\}_{\alpha \neq \overline{\alpha}}$ è un ricoprimento aperto di $E_{\overline{\alpha}}$. Esistono quindi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq \overline{\alpha}$ tali che

$$\begin{aligned} E_{\overline{\alpha}} \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right)^c \\ \implies E_{\overline{\alpha}} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right) = \emptyset \end{aligned}$$

assurdo.

Corollario caso particolare

Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di compatti tale che

$$E_{n+1} \subseteq E_n$$

Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$$

Teorema Teorema di Heine-Borel

Sia $E \subseteq R^n$ con la metrica euclidea. Allora E è compatto se e solo se E è chiuso e limitato.

Lemma

Sia $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ tali che $I_k \supseteq I_{k+1}$. Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$$

Proof

Gli intervalli sono annidati, quindi a_k è crescente e b_k è decrescente e $a_k \leq b_k$. In particolare $a_k \leq b_i$. Consideriamo l'insieme $E = \{a_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. E è limitato superiormente, e ammette supremum x. Per definizione $x \geq a_k$. Ma $a_k \leq b_i$ per tutte le i. Quindi, $x \leq b_i$ per ogni i. Allora

$$x \in I_n \implies x \in \bigcap I_k$$

Definizione

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Un rettangolo chiuso è il prodotto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

che indichiamo con $[a, b]$.

Lemma

Sia $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di rettangoli chiusi tali che $R_k \supseteq R_{k+1}$ per ogni k. Allora

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k \neq \emptyset$$

Proof

Siccome

$$R_k = I_{k,1} \times I_{k,2} \times \ldots \times I_{k,n}$$

possiamo applicare il primo lemma e quindi

$$\exists y_i \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_{k,i}$$

Il punto $y = (y_1, \ldots, y_n)$ è in ogni R_k.

Lemma Lemma 3

In $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea ogni rettangolo è compatto.

Proof Lemma 3

Sia $R = [a, b]$ un rettangolo e supponiamo che non sia compatto. Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento aperto di R che non ammette sottoricoprimento finito. Vogliamo adesso dimezzare ambo i lati (quindi n tagli). Abbiamo adesso 2^n rettangoli.

$$[a_i, b_i] = [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Il diametro di R è $||b - a||$. Il diametro di ogni rettangolo ottenuto è la metà. Almeno uno di questi rettangoli ha la proprietà di non ammettere sottoricoprimento finito. Lo chiamiamo R_1. Iterando il procedimento otteniamo una successione di rettangoli

$$R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$$

con diametro che tende a zero e che non ammettono sottoricoprimento finito, il diametro di R^k è dato da $\frac{1}{2^k}||b - a||$. Per il lemma precedente esiste $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k$. Siccome $R_k \subseteq R$ per ogni k, $x \in R$. Siccome $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è un ricoprimento di R, esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $x \in G_{\alpha_0}$. G_{α_0} è aperto, quindi esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq G_{\alpha_0}$. Scegliamo k sufficientemente grande tale che $2^{-k}||b - a|| < r$. Ma il diametro di R_k è minore di r, quindi $R_k \subseteq B_r(x)$. Quindi $R_k \subseteq G_{\alpha_0}$, assurdo perchè R_k non ammette sottoricoprimento finito.

Proof Heine-Borel

Dobbiamo dimostrare solo che se E è chiuso e limitato allora è compatto. Siccome E è limitato esiste M tale che $||x|| < M$ per ogni $x \in E$. Quindi,

$$E \subseteq [-M, M] \times [-M, M] \times \ldots \times [-M, M] = R$$

E è un chiuso contenuto in un compatto, quindi è compatto.

Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di $\mathbb{R}^n$ ha almeno un punto di accumulazione.

Proof Teorema di Bolzano-Weierstrass

Definizione Insiemi separati

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A, B \subseteq X$ due sottoinsiemi. Diciamo che A e B sono separati se

$$A \cap \overline{B} = \emptyset \wedge \overline{A} \cap B = \emptyset$$

Devono sicuramente essere disgiunti, ma non basta. Serve che nessun punto di uno dei due insiemi è punto di accumulazione dell'altro.

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subseteq X$. E è connesso se non può essere scritto come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati.

I sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.

Uno spazio metrico è connesso se e solo se l'unico sottoinsieme non vuoto di X che è anche aperto e chiuso è X stesso. (Dimostrazione per esercizio).

R^n con la metrica euclidea è connesso. (Dimostrazione per esercizio non proprio banale).

1.2 Successioni in spazi metrici

Mettere la definizione di convergenza ma con $d(x_m, y) < \varepsilon$. Oppure $x_m \in B_\varepsilon(y)$.

In particolare la successione metrica converge se e solo se $d(x_m, y) \to 0$ secondo la convergenza reale.

Il limite è unico per proprietà di Hausdorff.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subseteq X$ e sia y un punto di accumulazione per E. Allora esiste una successione $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{y\}$ che converge ad y. In particolare, E è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq E$ che converge ad y allora $y \in E$.

Proof

Dato che $y \in E'$, $\forall x_m \in \mathbb{N}$, esiste x_m tale che $x_m \in B_{\frac{1}{m}}(y) \cap E$ e $x_m \neq y$. La successione così costruita converge ad y. Infatti, $d(x_m, y) < \frac{1}{m} \to 0$.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione convergente in X. Una condizione necessaria per la convergenza è che ogni sottosuccesione converga allo stesso limite. La condizione sufficiente è che ogni sottosuccessione ammetta una sottosuccessione che converge allo stesso limite.

Definizione Compattezza sequenziale

Uno spazio metrico X è sequenzialmente compatto se ogni successione in X a valori in E ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di E.

Proposition Equivalenza compattezza

E is compact is and only if E is sequentially compact.

Questa c'è solo negli spazi metrici.

Proof

($\Longrightarrow$) Sia $\{x_n\}$ una successione in E. Consideriamo $F = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Se F è finito, esiste un elemento che compare infiniti volte e la successione costante converge a tale elemento. Se F è infinito, per la compattezza F ammette un punto di accumulazione, $y \in E$. Costruiamo una sottosuccessione che converga ad y. Scegliamo x_m tale che $d(x_m, y) < 1$. Scegliamo x_{m_2} tale che $d(x_{m_2}, y) < \frac{1}{2}$ e $m_2 > m_1$, e così via. La sottosuccessione così costruita converge ad y in quanto $d(x_{m_k}, y) < \frac{1}{k} \to 0$.

($\Longleftarrow$) XXX

Ogni successione convergente è di Cauchy.

Per esempio con la metrica discreta una successione è convergente se e solo se è definitamente costante, che è equivalente ad essere di Cauchy, quindi è completo.

Nel caso dei razionali nei reali con metrica euclidea, consideriamo la radice di due che è un punto di accumulazione per i razionali. Esiste una successione di razionali che converge a radice di due, quindi è di Cauchy. Ma essa non può convergere in Q, altrimenti convergerebbe anche in R e avrebbe due limiti. Tuttavia è una successione di Cauchy in Q perché è convergente in R e quindi è di Cauchy in R. (La condizione è la medesima). Quindi Q non è completo.

Definizione Spazio completo

Uno spazio metrico (X, d) è completo se ogni successione di Cauchy in X converge ad un punto di X.

Teorema

R^n con la metrica euclidea è completo.

Proof

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in R^n. Scriviamo $E_n = \{x_k \,|\, k \geq n\}$. Notiamo che $E_n \supseteq E_{n+1}$. Ponendo la chiusura $\overline{E_n} \supseteq \overline{E_{n+1}}$. Inoltre, E_n è limitato e $\text{diam}E_n \to 0$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $m, n \geq N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Notiamo inoltre che

$$\text{diam}E_n = \sup\{d(x_m, x_k)\} < \varepsilon$$

Dimostrazione per esercizio vale che $\text{diam}F = \text{diam}\overline{F}$. Quindi, $\text{diam}\overline{E_n} \to 0$. Adesso $\{\overline{E_n}\}$ è una successione di compatti in quanto chiusi e limitati, annidati. Quindi

$$E \triangleq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset$$

Siccome $\text{diam}E = 0$ o è vuoto o contiene un solo punto, quindi contiene un solo punto $E = \{y\}$. Mostriamo che $x_n \to y$. Abbiamo $d(x_n, y) \leq \text{diam}\overline{E_n} \to 0$.

Teorema

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora X è completo.

Proof

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X. Siccome è compatto è compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge ad un punto $y \in X$. Mostriamo che $x_n \to y$. Dato

$\varepsilon > 0$ esiste N_0 tale che per ogni $m, n \geq N_0$ $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per la convergenza di $\{x_{n_k}\}$ esiste K tale che per ogni $k \geq K$ $d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Scegliamo $\overline{N} = \max\{N_0, n_K\}$. Allora per ogni $n \geq \overline{N}$ si ha

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Sia X uno spazio metrico completo, $Y \subseteq X$. Y è completo se e solo se Y è chiuso in X.

Teorema

E sequenzialmente comaptto implica E compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di E. Esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in E$ esiste $\overline{\alpha}$ tale che $B_\delta(x) \subseteq G_{\overline{\alpha}}$.

1. *claim 1:* $\forall m \in \mathbb{N}$, esiste x_m tale che $B_{1/m}(x_m)$ non è sottoinsieme di G_α per tutte le α. $\{x_m\}$ è una successione in E e quindi posso estrarre una sottosuccessione convrgente $x_{m_k} \to p \in E$. Esiste $\hat{\alpha}$ tale che $p \in G_{\hat{\alpha}}$. $G_{\hat{\alpha}}$ è aperto e quindi esiste una $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(p) \in G_{\hat{\alpha}}$. Ma $x_{m_k} \to p$ quindi con k sufficientemente grande

$$B_{1/m_k}(x_{m_k}) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$$

   che è assurdo lightning.
2. *claim 2:* E è contenuto nel'unione di un numero finito di bolle di raggio δ centrate in punto di E. Per assurdo, sia $x_1 \in E$. Sicuramente $B_\delta(x_1)$ non ricopre E quindi esiste $x_2 \in E \backslash B_\delta(x_1)$. Ma assieme $B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2)$ non ricoprono E, quindi esiste un $x_3 \in E \backslash (B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2))$ e così via. La successione $\{x_m\}$ deve ammettere una sottosuccessione convergente. Ma $d(x_i, x_j) \geq \delta$ se $i \neq j$ quindi la sucessione $\{x_m\}$ non è di Cauchy Lightning. Quindi $E \subseteq B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \cdots$.

In realtà abbiamo mostrato anche la terza.

Teorema

Sia X uno spazio metrico. Sono equivalenti:
1. X è compatto;
2. X è sequenzialmente compatto;
3. *limit point compact:* ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione.

Solo negli spazi metrici.

1.3 Funzioni

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ due spazi metrici e sia $E \subseteq X_1$. Sia $f\colon E \to X_2$ e $p \in E'$. Diciamo che $l \in X_2$ è limite di $f(x)$ per $x \to p$ e diciamo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, x \in E \wedge 0 < d_1(x_1, p) < \delta \implies d_2(f(x), l) < \varepsilon$$

Equivalentemente $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f((B_\delta(p) \cap E) \backslash \{p\}) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

Proposition

Sia $f\colon E \subseteq X_1 \to X_2$. Allora $f(x) \to l$ per $x \to p$ se e solo se $f(x_n) = l$ per ogni successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in E$e $x_n \neq p$ per tutte le n e $x_n \to p$.

Valgono i medesimi teoremi tipo l'unicità del limite e i teoremi di permanenza del segno, confronto etc.

Proposition

Sia $f\colon E \subseteq X \to \mathbb{R}^n$ per $n > 1$. Allora

$$f(x) \to l \iff f_i(x) \to l_i$$

per $x \to p$.

Proof Sketch

Conderiamo la norma per tutte le i

$$|f_i(x) - l_i| \leq ||f(x) - l|| \leq \sum_k |f_k(x) - l_k|$$

Definizione Continuità

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ due spazi metrici, $f\colon E \subseteq X_1 \to X_2$, $p \in E$. Diciamo che f è *continua* in p se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in E \cap B_\delta(p) \implies f(x) \in B_\varepsilon((f(p)))$$

Euivalentemente $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in E$ e $d_1(x, p) < \delta$ implica che $d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Oppure ancora $(f(B_\delta(p) \cap E)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$.

Se p è un punto isolato di E allora $\exists r > 0$ tale che $B_r(p) \cap E = \{p\}$. Scegliendo $\delta \leq r$ la definizione di continuità è automaticamente soddisfatta. Se p non è i solato, allora è un punto di accumulazione per E. In questo caso f è continua in p e vale che $f(x) \to f(p)$ per $x \to p$.

Proposition

f è continua in p se e solo se

$$\lim_{x \to p} f(x_n) = f(p)$$

per ogni successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in E$ per tutte le n e $x_n \to p$.

Definizione

Sia $f\colon E \subseteq X_1 \to X_2$. Diciamo che f è continua nell'insieme E se f è continua in ogni punto di E.

Proposition

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e sia $f\colon X_1 \to X_2$. Allora f è continua in X se e solo se $f^{-1}(V)$ è aperto in X_1 per tutti i V aperti in X_2.

Proof

($\Longrightarrow$) Sia V un aperto di X_2. Se $f^{-1}(V) = \emptyset$ in questo caso abbiamo finito. Altrimenti, sia $p \in f^{-1}(V)$, cioè $f(p) \in V$. Essendo V aperto, riesco a trovare

$$B_\varepsilon(f(p)) \in V$$

Ma f è continua quindi riesco anche a trovare $\delta > 0$ tale che

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

Quindi $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$ quindi p è un punto interno a $f^{-1}(V)$. Per l'arbitrarietà di p segue che $f^{-1}(V)$ è aperto.

($\Longleftarrow$) Sia $p \in X$ e dimostriamo che f è continua in p. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. $B_\varepsilon(f(p))$ è un aperto di X_2. $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ è un aperto di X_1 e $p \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$$

cioè

$$f(B_\varepsilon(p)) \subset B_\varepsilon(f(p))$$

che è la definizione di continuità.

Siccome $f^{-1}(E^c) = \left(f^{-1}(E)\right)^c$ allora f è continua se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X_1 per ogni chiuso in $C \in X_2$. Molto utile.

In generale le funzioni continue non mandano aperti in aperti. Per esempio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $x \to x^2$. Abbiamo che

$$f((-1,1)) = [0,1)$$

Definizione Funzione aperta

Una funzione viene detta *aperta* se $f(U)$ è aperto in X_2 per tutti gli insiemi U aperto om X_1. Analogamente funzione chiusa.

Sia $f\colon (X,d) \to \mathbb{R}^n$ con $n > 1$ è continua se e solo se tutte le sue componenti sono continue.

Proposition

Siano $(X_1,d_1),(X_2,d_2)$ spazi metrici, $f\colon X_1 \to X_2$ una funzione continua. Se X_1 è compatto, allora $f(X_1)$ è compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento aperto di $f(X_1)$. Consideriamo $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ che sono degli aperti. Queste preimmagini sono un ricoprimento di X_1, che è compatto e quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito $f^{-1}(G_{\alpha_1}),\cdots,f^{-1}(G_{\alpha_n})$. Vogliamo mostrare che $\{G_{\alpha_1},\cdots,G_{\alpha_n}\}$ sono un ricoprimento di $f(X_1)$.

$$f(X_1) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f\left(f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

Teorema Teorema di Weierstrass

Sia (X,d) uno spazio metrico compatto e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, $\exists x_1, x_2 \in X$ tali che

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \quad \forall x \in X$$

cioè f possiede massimo e minimo assoluto.

Proof Teorema di Weierstrass

$f(X)$ è compatto in $\mathbb{R}$, quindi è chiuso e limitato. Siccome limitato, $f(X)$ ammette infimum e supremum reali. Siccome $\inf f(x)$ e $\sup f(x)$ appartengono a $\overline{f(x)}$ e $f(x)$ è chiuso, appartengono allora ad $f(X)$ e quindi sono massimi e minimi.

Teorema Teorema da compatto ad Hausdorff

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici con X_1 compatto e $f\colon X_1 \to X_2$ continua. Allora, f è chiusa.

In realtà questo funziona con domini compatti e codomini di Hausdorff.

Proof Teorema da compatto ad Hausdorff

Sia C un chiuso di X_1. Voglio dimostrare che $f(C)$ è un chiuso di X_2. Sappiamo che C è chiuso in un compatto, quindi è compatto. La funzione è continua e quindi $f(C)$ è compatto. Siccome i compatti sono chiusi allora è chiuso.

Corollario

Sia $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ continua, X_1 compatto e f biunivoca. Allora, f^{-1} è continua.

Proof

Dobbiamo mostrare che $(f^{-1})^{-1}(C)$ è chiuso per ogni C chiuso di X_2. Ma questo coincide con $f(C)$ che è chiusa per il teroema da compatto ad Hausdorff.

Teorema

Sia $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ continua e sia $E \subseteq X$ connesso. Allora $f(E)$ è connesso.

Proof

Supponiamo che $f(E)$ non sia connesso. Esistono quindi due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e separati tali che

$$f(E) = A \cup B$$

Poniamo $F = f^{-1}(A) \cap E$ e $G = f^{-1}(B) \cap E$. Sicuramente $F, G \neq \emptyset$ e $E = F \cup G$. Vogliamo mostrare che E e G sono separati. Siccome $A \subseteq \overline{A}$ vale anche $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{\overline{A}})$. L'applicazione f è continua e la chiusura di A è un chiuso. Quindi la preimmagine del chiuso $\overline{A}$ è un chiuso. Consideriamo ora

$$\overline{F} \subseteq \overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$$

perché f è continua se $\overline{A}$ è chiuso. Quindi $\overline{F} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ che implica $f(\overline{F}) \subseteq \overline{A}$. D'altro canto $f(G) \subseteq B$ e $\overline{A} \cap B \neq 0$, e quindi $\overline{F} \cap G \neq 0$ perché altrimenti vi sarebbe un elemento sia in $\overline{A}$ che in B. Dovrebbe essere $f(x) \in \overline{A}$ e $f(x) \in B$ lightinng. Analogamente si dimostra che $F \cap \overline{G} = \emptyset$ cioè abbiamo scritto E come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati. Ma E è connesso lightning.

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f\colon X_1 \to X_2$. Allora f è uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x, y \in X_1$

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Teorema Theorema di Heine-Cantor

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ continua e X_1 compatto. Alorra, f è uniformemente continua.

La dimostrazione è la medesima rispetto al caso banale.

Definizione Funzione di Lipschitz

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici, $f\colon X_1 \to X_2$. Diciamo che f è *lipschitz-continua* o *lipschitziana* se $\exists \alpha > 0$ tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha d_1(x, y)$$

per tutte le $x, y \in X_1$.

Proposition

Se f è Lipschitz-continua, allora è uniformemente continua.

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$. Diciamo che f è una *contrazione* se $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(X_1, X_2)$ con $\alpha < 1$.

Se il supremum è finito, allora questa è la miglior costante di Lipschitz (in generale)

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Esempio

Consideriamo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$. Non è di lipschitz inquanto non è uniformemente continua. Per mostrarlo possiamo dire

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|$$

Se restringessimo il dominio di questa funzione ad un intervallo limitato, allora sarebbe di Lipschitz, per il supremum.

Proposition

Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Allora, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(I, \mathbb{R})$ se e solo se $|f'(x)| \leq \alpha$ per tutte le x.

Proof

($\Longrightarrow$) Cominciamo con

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \\ &= \lim_{t\to 0}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|} \\ &\leq \lim_{t\to 0}\frac{\alpha|x+t-x|}{|t|} = \alpha\end{aligned}$$

Possiamo togliere il limite dal modulo in quanto il modulo è una funzione continua.

($\Longleftarrow$) Per il teorema di Lagrange esiste $\theta \in (\min\{x,y\}, \max\{x,y\})$

$$\begin{aligned}f(x)-f(y) &= f'(\theta)(x-y) \\ |f(x)-f(y)| &= |f'(\theta)|\cdot|x-y| \\ &\leq \alpha|x-y|\end{aligned}$$

Esercizio

Per quali $a \leq b$ la funzione $f(t) = 1+t-\arctan(t)$ è una contradizione in $[a,b]$. Stabiliamo quindi se la derivata è limitata

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

notiamo quindi che $0 \leq f'(t) \leq 1$. Quindi è sicuramente lipschitziana. Notiamo allora che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'(t)| = 1 = \alpha$$

Quindi per far sì che $\alpha < 1$ dobbiamo limitare il dominio ad un intervallo limitato. Quindi $-\infty < a \leq b < \infty$. Porta l'intervallo $[a,b]$ in sè? Siccome la funzione è crescente porta intervalli a intervalli di estremi $f(a)$ e $f(b)$. Mi basta quindi imporre che $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$. Abbiamo quindi

$$\begin{cases}1+a-\arctan a \geq a \\ 1+b-\arctan b \leq b\end{cases} = \begin{cases}\arctan a \leq 1 \\ \arctan b \geq 1\end{cases}$$

e quindi $a \leq \tan 1 \leq b$. Notiamo che $f(\tan 1) = \tan 1$ quindi è un punto fisso per il teorema delle contrazioni.

Esempio

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = v \cdot x$. Dobbiamo studiare $|f(x)-f(y) = |v\cdot x - v\cdot y|$ usando la bilinearità del prodotto scalare ottengo $|v\cdot(x-y)|$. Per Cacuhy-Schwarz

$$|v\cdot(x-y)| \leq ||v||\cdot||x-y||$$

che è quindi di Lipschitz.

Teorema Teorema di Banach-Cacciopoli o delle contrazioni

Sia (X,d) uno spazio metrico completo e sia $f\colon X \to X$ una contrazione. Allora $\exists_{=1}\, x \in X$ tale che $f(x) = x$.

Le ipotesi sono necessarie. Togliamo per esempio la completezza e consideriamo quindi $X = (0, +\infty)$ con la contrazione $f(x) = x/2$. Questa contrazione non ha punti fissi. Togliamo invece l'ipotesi che sia una contrazione. Richiediamo solamente che sia una contrazione debole, cioè

$$d_2(f(x), f(y)) \leq f_1(x, y)$$

Consideriamo $X = [0, +\infty)$ e prendiamo $f(t) = t + e^{-t}$. La derivata è $f'(t) = 1 - e^{-t}$ che è nulla nell'origine e poi tende ad 1 dal sotto. Chiaramente non ci sono punti fissi in quanto $f(t) = t$ è come dire $e^{-t} = 0$.

Proof

Cominciamo mostrando l'esistenza del punto fisso. Sia $x_0 \in X$ un punto fissato e consideriamo la successione $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Mostriamo che $\{x_n\}$ è di Cauchy, quindi siccome lo spazio è completo converge. Dobbiamo mostrare che $d(x_n, x_m)$ tende a zero quando n, m crescono. Consideriamo inizialmente

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x - n - 1)) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

   Calcoliamo ora la distanza generica e usiamo la disuguaglianza triangolare ripetutamente per ogni step

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, d_n) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+k-i}, d_{n+k-i-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i} \\ &= \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i-1} \\ &= \alpha^n \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \to 0 \end{aligned}$$

   Per sbarazzarci di k (siccome vogliamo k arbitrario e il ε nella definizione di Cauchy deve essere uniforme rispetto ad esso) maggioriamo la somma parziale della serie geometrica con il valore della serie geometrica. Siccome $0 < \alpha < 1$ il termine non esplode e la serie geometrica converge.
2. Detto x il limite di $\{x_n\}$ mostriamo che è un punto fisso di f. Consideriamo il limite per $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)$$

   perché f è continua.

Mostriamo ora l'unicità del punto. Supponiamo che x, y siano due punti fissi. Vogliamo mostrare che $d(x, y) = 0$. Abbiamo

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)(1 - \alpha)d(x, y) \qquad\qquad \leq 0$$

siccome $1 - \alpha > 0$ ciò succede solo se $d(x, y) = 0$.

Abbiamo notato che

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

Con $k \to \infty$ otteniamo

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

quindi tende al punto fisso in maniera esponenziale.

Denotiamo $f^n = f \circ f \cdots f$. Se f è una contrazione, una qualsiasi sua iterazione è anch'essa una contrazione.

$$d(f(f(x)), f(f(y))) \leq \alpha d(f(x), f(y)) \leq \alpha^2 d(x, y)$$

Per induzione segue il resto. In generale la costante è α^n. Ci chiediamo se nel caso in cui f non sia una contrazione, una sua iterata lo possa essere.

Esempio

Per esempio $f(x) = \cos x$, che non è una contrazione in quanto il supremum della derivata è 1. Invece, $\cos(\cos(x))$ ha derivata

$$\sin(\cos(x)) \cdot \sin$$

Il suo modulo è dato da

$$|\sin(\cos(x))| \cdot |\sin x| \leq \sin(1) < 1$$

Il secondo termine può solamente essere maggiorato da 1, mentre il secondo, siccome $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, può essere maggiorato da $\sin 1$. Quindi è una contrazione.
Con questo possiamo per esempio mostrare che il coseno ha un punto fisso, siccome una sua iterata è una contrazione.

Corollario Indebolimento del teorema delle contrazioni: teorema delle iterate contrazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f\colon X \to X$ un'applicazione tale che $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che f^n sia una contrazione. Allora $\exists_{=1}\, x \in X$ tale che $f(x) = x$.

Proof

Mostriamo che i punti fissi di f (che sono uno solo) sono i punti fissi di f^n. Sia x un punto fisso di f. Allora $f^n(x) = f(f(\cdots(x)) = f(x) = x$. Quindi tutti i punti fissi di f sono anche punti fissi di f^n. Sia ora x tale che $f^n(x) = x$. Componendo otteniamo

$$f(f^n(x)) = f(x)$$
$$f^n(f(x)) = f(x)$$

quindi $f(x)$ è un punto fisso di f^n, ma siccome f è una contrazione ha solo un punto fisso, quindi coincidono $f(x) = x$. Quindi tutti i punti fissi di f^n sono anche punti fissi di f.

Parametrizziamo ora la funzione

Consideriamo $T\colon X \times Y \to X$ come operatore parametrizzato dai valori di Y. Fissato y imponiamo che $T(-, y) : X \to X$ sia una contrazione. Per tutte le y esiste un solo $x \in X$ tale che $T(x, y) = x$. Data la dipendenza funzionale $x = \varphi(y)$ vogliamo capire come il punto fisso dipende dal parametro. In particolare, vogliamo mostrare che φ è continua sotto alcune ipotesi.

Teorema di dipendenza del punto tfisso del parametro

Sia X uno spazio metrico completo e sia Y uno spazio metrico (topologico). Sia $T\colon X \times Y \to X$ tale che $\exists \alpha < 1$ tale che $\forall y \in Y$, $T(-, y)$ è in $\mathrm{Lip}_\alpha(X)$. (α deve essere uniforme rispetto a y). Sia $y_0 \in Y$ tale che $\forall x \in X$, $T(x, y)$ sia continua in y_0. Allora f è continua in y_0.

Proof

Vogliamo mostrare che $d(f(y), f(y_0)) \to 0$ se $y \to y_0$. Vogliamo stimare $d(f(y), f(y_0))$ con $f(y) = T(f(y), y)$. Sia $x = f(y)$ e $f(y_0) = x_0$. Allora

$$d(f(y), f(y_0)) = d(T(x, y), T(x_0, y_0))$$

Usando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} d(T(f(y_0), y_0)) &\le d(T(f(y), y), T(f(y_0), y)) + d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \\ &\le \alpha d(f(y), f(y_0)) + d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \\ (1-\alpha) d(f(y), f(y_0)) &\le d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \to 0 \end{aligned}$$

La costante è positiva e indipendente da y. La funzione $T(f(y_0), -)$ è continua in y.

Lemma Sugli spazi normati

$$||y|| - ||x||| \le ||y - x||$$

Proof

Sia $y = x + (y - x)$. Allora

$$||y|| = ||x + (y - x)|| \le ||x|| + ||y - x||$$

Scambiando i ruoli di x e y si ottiene la proposizione.

Ciò mostra che la norma è lipschitz continua.

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, ma non il viceversa.

Definizione Spazio di Banach

Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo rispetto alla norma.

Definizione Equivalenza di norme

Diciamo che due norme $|| \cdot ||, | \cdot |$ sono equivalenti se $\exists 0 < \alpha \le \beta$ tale che

$$\alpha |x| \le ||x|| \le \beta |x|, \quad \forall x \in X$$

Questa è una relazione di equivalenza.

Teorema Equivalenza di norme reali
Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.

Proof
Basta mostrare che una norma $||\cdot||$ questa è equivalente alla $||\cdot||_2$. Dobbiamo trovare α, β tale che

$$\alpha||x||_2 \leq ||x|| \leq \beta||x||_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Consideriamo la base canonica $\{e_1, \cdots, e_n\}$ che è finito-dimensionale e quindi $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

$$\begin{aligned} ||x|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right|\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_1| \cdot ||e_i|| \\ &\leq \left(n \max \bigcup_{i=1}^n \{||e_i||\}\right)\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right) \\ &\leq \left(n \max \bigcup_{i=1}^n \{||e_i||\}\right) ||x||_1 \leq \underbrace{\left(n \max \bigcup_{i=1}^n \{||e_i||\}\right)}_{\beta} ||x||_2 \end{aligned}$$

Questo ci dice anche che $||\cdot||$ è continua rispetto alla topologia indotta da $||\cdot||_2$, e pure lipschitziana. Dobbiamo ora dimostrare l'altra metà della disuguaglianza e trovare α. Poniamo α in funzione dei vettori

$$\alpha = \inf_{||x||_2=1} ||x||$$

Mostriamo che $\alpha > 0$. Una volta fatto questo, possiam ottenere che la definizione di α dice che $||x||_2 = 1 \implies ||x|| \geq \alpha$. Voglio dimostrare che $||x|| \geq \alpha||x||_2$ per tutte le $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x = 0$ la disuguaglianza è soddisfstta. Altrimnti, normalizziamo $z = x/||x||_2$. Usando l'omogeneità assoluta

$$||z||_2 = \left|\left|\frac{x}{||x||_2}\right|\right| = \frac{1}{||x||_2}||x||_2 \implies ||z||_2 = 1$$

Quindi $||z|| \geq \alpha$ and furthermore

$$\left|\left|\frac{x}{||x||_2}\right|\right| \geq \alpha \implies ||x|| \geq \alpha||x||_2$$

We now need to show that α is positive. Siccome le normi sono non-negative, alla peggio sono nulle. In realtà α è un minimo

$$\alpha = \min_{||x||_2=1} ||x||$$

since the norm is continuous with the respect to the topology induced by $||\cdot||_2$. The set over which we are taking the minimum is clearly closed and bounded. Siccome siamo nella topologia reale con norma euclidea è quindi anche compatto. Per Weierstrass, α è un minimo. Quindi deve essere $\alpha > 0$. Se fosse $\alpha = 0$ allora esisterebbe $\hat{x}$ tale che $||\hat{x}||_2 = 1$ e $||\hat{x}|| = 0$, che è assurdo lightning.

2 Operatori lineari fra spazi vettoriali

Lo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Studiamo la continuità degli operatori lineari in spazi normati.

Proposition

Ogni $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è continua rispetto alla topologia indotta dalla norma (qualsiasi visto che sono equivalenti in $\mathbb{R}^n$).

Proof

1. Mostriamo che la continuità dell'operatore in un singolo punto, come l'origine, implica la continuità di A in tutto $\mathbb{R}^n$. Questo è un fatto generale. Abbiamo quindi che se $\{x_n\} \to 0$ allora $\{Ax_n\} \to A0 = 0$. La continuità generale è data dal fatto che se $\{y_n\} \to x$ allora $\{Ay_n\} \to Ax$. Ma $\{Ay_n\} \to Ax$ se e solo se $\{Ay_m - Ax\} \to 0$ cioè $\{A(y_m - x)\} \to 0$ e per linearità $\{y_m - x\}$ è una successione che tende a zero, quindi A è continuo ovunque. Inoltre, per la continuità uniforme possiamo msotrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che
$$||y - x|| < \delta \implies ||Ay - Ax|| < \varepsilon$$
Ma $||Ay - Ax|| = ||A(x - y)||$. Poniamo quindi $z = y - x$. Dobbiamo mostrare che se $||z|| < \delta$ allora $||Az|| < \varepsilon$. Ma questa è la continuità nell'origine che stiamo presupponendo.
2. Mostriamo ora la continuità nell'origine. Usiamo il fatto che $\mathbb{R}^n$ ha dimensione finita. Sia $x = (x_1, \cdots, x_n)$ secondo la base canonica $(e_1, \cdots, e_n)$. Calcolo usando la disuguaglianza triangolare
$$\begin{aligned} ||Ax|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i A e_i\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot ||Ae_i|| \\ &\leq C \sum_{i=1}^{n} |x_i|_1, \quad C = \max \bigcup_{i=1}^{n} \{||Ae_i||\} \end{aligned}$$
Ciò dimostra quindi che la funzione è Lipschitz-continua.

Nel passo secondo abbiamo usato il fatto che lo spazio fosse finitamente generato (il dominio). In generale, con $A\colon X \to Y$ è un operatore lineare fra spazi normati qualunque, on è detto che A sia continuo.

Esempio Controesempio

Consideriamo lo spazio delle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitate, in $\mathcal{C}^1$ e con derivata limitata $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R})$. Come secondo spazio prendiamo delle funzioni continue e limitate $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{BC}(\mathbb{R})$. Consideriamo quindi l'operatore della derivata $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{BC}(\mathbb{R})$. Siccome questi non sono spazi finitamente generati, dobbiamo scegliere delle norme. Scegliamo come norma sia nel dominio che nel codominio $||\cdot||_\infty$, che ha senso siccome le funzioni sono limitate. Mostriamo quindi che l'operatore lineare non è continuo. Scegliamo l'origine. Vogliamo quindi trovare $\{f_n\} \to 0$ ma tale che $\{f'_n\}$ non tende a zero. Per farlo prendiamo una funzione oscillante che si schiaccia sull'ascisse, e quindi la sua derivata non si schiaccia come la funzione. Prendiamo
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$
Abbiamo la norma
$$||f||_\infty = \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}|\sin(nx)| = \frac{1}{n}$$
Mentre la norma della derivata
$$||f'||_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |\cos(nx)| = 1$$

Andiamo a definire una norma speciale su questo spazio, la norma operatoriale.

Definizione Norma operatoriale

$$||A||_* = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||$$

Proposition

Norma operatoriale è una norma.

Mostriamo che la norma è ben definita, e che questo è un numero reale. Infatti, $||A||_* < +\infty$, siccome l'insieme del supremum è chiuso e limitato e, quindi, compatto, e la funzione è continua allora il supremum è un massimo. Mostriamo che il massimo si ottiene sulla frontiera della bolla.

Proof

Mostriamo le due disuguaglianze. Il fatto che $||A||_* \geq \max ||Ax||$ è banale, infatti $\{x \,|\, ||x|| = 1\}$ è un sottoinsieme di $\{x \,|\, ||x|| \leq 1\}$. D'altra parte se il massimo è ottenuto per $x = 0$ allora il max è 0 e quindi $Ax = 0$ sempre, e la disuguaglianza è banalmente soddisfatta. Supponiamo ora che il massimo sia ottenuto in un punto non nullo $\hat{x}$, possiamo normalizzare e ottenere norma unitaria.

$$||A\hat{x}|| = \left|\left|A\left(||\hat{x}||\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right| = \left|\left|||\hat{x}||A\left(\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right| = ||\hat{x}||\left|\left|A\left(\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right| \leq \left|\left|A\left(\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right|$$

$$||A||_* = \max_{||x||=1||Ax||} = |A\hat{x}| \leq \left|\left|A\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right|\right| \leq \max_{||x||=1} ||Ax||$$

Quindi il valore può essere calcolato solo sulla buccia in quanto lì viene raggiunto il massimo.

Proposition Stima fondamentale

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$||Ax||_* \leq ||A|| \cdot ||x||$$

Proof

Se $||x|| = 1$ vale $||Ax|| \leq ||A||$ perché per la proprietà precedente,

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

Se $x = 0$, la disuguaglianza vale. Altrimenti, normalizziamo x per ritrovarci sulla frontiera.

$$||A||_* \geq \left|\left|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| = \frac{1}{||x||}||Ax||$$

moltiplicando entrmambi i membri epr $||x||$ si ottiene la tesi.

In realtà questa costante è la migliore.

Proposition

Se $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $||Ax|| \leq \alpha ||x||$ per tutte le $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$||A||_* \leq \alpha$$

In realtà questo risultato vale anche se supponiamo che $||Ax|| \leq \alpha||x||$ solo per x tale che $||x|| \leq 1$ oppure tale che $||x|| = \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Proof
Supponiamo di avere una stima del tipo $||Ax|| \leq \alpha||x||$ per tutte le x. Sappiamo che

$$||A||_* = \max_{||x||=1} ||Ax|| \leq \alpha \max_{||x||\leq 1} ||x|| = \alpha$$

che è quindi chiaramente 1.

La medesima dimostrazione funziona supponendo che $||Ax|| \leq \alpha||x||$ per tutte le $||x|| \leq 1$. Se invece sappiamo che $||Ax|| \leq \alpha||x||$ solo per gli x tale che $||x|| = \varepsilon$, allora è sufficiente normalizzare (per esercizio).

Proof La norma operatoriale è una norma

1. *annullamento:* Supponiamo che $||A||_* = 0$. Devo mostrare che $A = 0$. Siccome la norma è nulla,
$$\max_{||x||\leq 1} ||Ax|| = 0 \implies ||Ax|| = 0, \quad \forall x \,|\, ||x|| \leq 1$$
e quindi anche per tutti le altre x visto che possiamo normalizzare. Quindi, $Ax = 0$.
2. *positiva omogeneità:*
$$||\lambda A||_* = \max_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \max_{||x||=1} |\lambda||Ax| = |\lambda| \max_{||x||=1} ||Ax|| = |\lambda|||A||_*$$
3. *disuguaglianza triangolare:*
$$\begin{aligned} ||(A+B)x|| &= ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \\ &\leq ||A||_*||x|| + ||B||_*||x| = ||x||\,(||A||_* + ||B||_*) \end{aligned}$$
Per la proposizion precedente, $||A+B||_*$ è la più piccola costante per cui vale una disuguaglianza di questo tipo.

La norma operatoriale è scelta tale precisamente per la stima.

Teorema
$(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), ||\cdot||)$ è uno spazio di Banach.

Proof
Siccome questo spazio è finito dimensionale è isomorfismo allo spazio $\mathbb{R}^{m\times n}$ che è completo per esempio rispetto alla norma seconda. Tuttavia, dimostramolo con le successioni di Cauchy. Cosideriamo quindi una successione di operatori lineari. Per tutte le $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che $\forall m, n > N_\varepsilon$ tale che
$$||A_m - A - n|| < \varepsilon$$
cioè per tutte le x
$$||(A_n - A_n)x|| \leq \varepsilon(x)$$
Questo vuole dire che per x fissato la successione $\{A_n x\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Siccome $\mathbb{R}^n$ è completo, la successione converge. Chiamiamo il limite di tale successione Ax. Verifichiamo che in questo modo abbiamo definito un operatore lineare $x \to Ax$. Sappiamo che A_n è lineare per ogni n, quindi $A_n(x+y) = A_n x + A_n y$. Sappiamo che $A(x+y)$ tende ad $Ax + Ay$ e quindi l'espressione sopra tende ad $Ax + Ay$. Analogamente per l'omogeneità. Mostriamo ora che $\{A_n\}$ effettivamente converge ad A, quindi $||A_n - A|| \to 0$. Sappiamo che $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che $\forall n, m > N_\varepsilon$

$$||A_m x - A_n x| \leq \varepsilon||x||$$

Ma $A_n x \to Ax$ per $n \to \infty$. passando al limite si ha che per tutte le $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che $\forall n > N_\varepsilon$,

$$||A_n x - Ax|| \leq \varepsilon |x|$$

cioè abbiamo trovato che $||A_n - A|| - \varepsilon$.

Notiamo che abbiamo sfruttato solo la completezza di $\mathbb{R}^n$.