

# Topologia I

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1</b>	<b>Topologia</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>08 ottobre 2025 DA METTERE</b>	<b>3</b>
2.1	Generated topology . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Lezione del 23</b>	<b>6</b>
3.1	Verso la compattificazione di Alexandrov . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Topologia quoziente</b>	<b>19</b>
4.1	Quoziente per gruppi di omomorfismo . . . . .	23
4.2	Spazi proiettivi reali . . . . .	26
4.3	Spazi proiettivi complessi . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Topologia algebrica</b>	<b>27</b>
5.1	Omotopia . . . . .	27
5.2	Incollamento di funzioni continue . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Esercizi 21 ottobre</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Esercizi 11 novembre</b>	<b>29</b>

## 1 Topologia

Invarianti:  $p_0$  corrisponde al numero di componenti connesse di uno spazio. Formalmente  $\pi_0(X)$  è l'insieme delle componenti connesse di  $X$  per archi. Invece,  $p_1$  è il gruppo fondamentale  $\pi_1(X)$ , che descrive la struttura dei cammini chiusi fino a omotopia.

### Assioma Estensionalità

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$$

### Proposition Relazione di aggiunzione

Valgono

$$S \subseteq f^{-1}(T) \iff f(S) \subseteq T$$

Da cui derivano  $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$ . Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto  $f$  potrebbe non essere suriettiva. E pure  $S \subseteq f^{-1}(f(S))$ . Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto  $f$  potrebbe non essere iniettiva.

L'operazione di controimmagine preserva tutte le operazioni insiemistiche.

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \\ f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i) \\ X \setminus f^{-1}(T) &= f^{-1}(Y \setminus T) \end{aligned}$$

L'operazione di immagine preserva in generale solo le unioni.

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

le altre due non valgono necessariamente. Abbiamo solo

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

se  $f$  non è iniettiva la direzione opposta non vale necessariamente. Infatti potrebbero esistere  $x, x'$  tale che  $x \in A \setminus B$  e  $x' \in B \setminus A$  tali che  $f(x) = f(x')$ . La medesima logica vale per il complementare.

#### Proposition Proprietà universale del quoziente

Sia  $f: X \rightarrow Y$  e  $\sim$  relazione di equivalenza su  $X$ . Sono equivalenti:

1.  $f$  è costante sulle classi di equivalenza

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

2.  $f$  fattorizza (in modo necessaria unico, essendo  $\pi$  suriettivo) attraverso  $\pi$ , cioè  $\exists_{=1} g: X/\sim \rightarrow Y$  tale che  $g \circ \pi = f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ X/\sim & & \end{array}$$

#### Proof

1. (2)  $\implies$  (1) :  $f = g \circ \pi$ . Abbiamo

$$x \sim x' \implies \pi(x) = \pi(x') \implies g(\pi(x)) = g(\pi(x'))$$

che sono uguali a  $f(x)$  e  $f(x')$ .

2. (2)  $\implies$  (1) : Definiamo  $g: X/\sim \rightarrow Y$  come

$$g([x]) \triangleq f(x)$$

bisogna verificare che sia ben posta. Vogliamo quindi che se  $[x] = [x']$  allora  $f(x) = f(x')$ . Ma ciò è garantito dalla ipotesi.

In  $\mathbb{R}^n$ .

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_\infty(x, y)$$

## 2 08 ottobre 2025 DA METTERE

### Esercizio

Le topologie con la proprietà che le intersezioni arbitrari di aperti sono aperti, possono essere caratterizzate esplicitamente. Essi sono esattamente, a meno di omeomorfismo, gli spazi topologici della seguente forma: dato un insieme preordinato  $(P, \leq)$ , la topologia di Alexandrov  $\mathcal{A}_P$  su  $P$  è la topologia i cui aperti sono i sottoinsiemi  $U \subseteq P$  tale che  $\forall p \leq q, p \in U \implies q \in U$ .

### 2.1 Generated topology

#### Proposition

Data una collezione di topologie  $\{\tau_i\}_{i \in I}$  su un insieme  $X$ . La famiglia

$$\tau = \bigcup_{i \in I} \tau_i$$

è ancora una topologia su  $X$ .

#### Corollario

Sia  $X$  un insieme e  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$  famiglia di sottoinsiemi. Esiste la topologia meno fine su  $X$  che contiene i sottoinsiemi in  $S$  come aperti. Tale topologia viene detta la topologia generata da  $S$ .

#### Definizione Topologia dell'unione disgiunta

Sia  $\{X_i \mid i \in I\}$  una famiglia di spazi topologici. Allora lo spazio topologico è definita come

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i$$

Possiamo definire astrattamente la topologia dell'unione disgiunta su  $\bigsqcup X_i$  come a topologia più fine che rende tutte le mappe  $\tau_i: X_i \rightarrow \bigsqcup X_i$  continue.

Alternativamente, possiamo definire la topologia come la topologia generata dalla famiglia di sottoinsiemi dell'insieme  $\bigsqcup X_i$  che sono aperti in qualcuno degli  $X_i$ .

Vediamo una caratteristica esplicita di questa topologia

#### Proposition

Un insieme

$$A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

è aperto per la topologia dell'unione disgiunta se e solo se  $A \cap X_i$  è aperto in  $X_i$  per ogni  $i \in I$ .

#### Proof

Definiamo  $\tau$  come la collezione dei sottoinsiemi dati nella proposizione tale che  $A \cap X_i$  è aperto in  $X_i$ . Usando il fatto che su  $X_i$  abbiamo delle topologia possiamo dimostrare che tale collezione soddisfa gli assiomi di topologia:

1. Siano  $A, B \in \tau$ . Allora  $A \cap X_i$  e  $B \cap X_i$  sono entrambi aperti in  $X_i$ . Di conseguenza la loro unione è ancora aperta in  $X_i$ . Possiamo scrivere

$$(A \cap X_i) \cup (B \cap X_i) = (A \cup B) \cap X_i$$

che è appunto aperto.

Notiamo che  $\tau$  contiene tutti i sottoinsiemi che sono aperti in qualche  $X_i$ . Infatti,  $A \subseteq X_i$  è aperto di  $X_i$ ,  $A \cap X_i = A$  aperto di  $X_i$  e  $A \cap X_j = \emptyset$  aperto di  $X_j$  per  $j \neq i$ . Quindi  $\tau$  contiene la topologia dell'unione disgiunta (per definizione di quest'ultima come topologia generate). Viceversa, dato  $A \in \tau$  vogliamo mostrare che  $A$  è aperto per la topologia dell'unione disgiunta.

$$A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

$$A = A \cap \left( \bigsqcup_{i \in I} X_i \right) = \bigsqcup_{i \in I} (A \cap X_i)$$

che è una disgiunzione di insiemi aperti

Queste due definizioni sono una un po' il duale dell'altra, da due punti di vista differenti. Da una parte considerando le applicazioni (ci arriviamo come la topologia più fine), mentre l'altro è come se costruissimo la topologia dal basso.

Possiamo verificare che questa è effettivamente la topologia più fine che rende queste mappe continue. In generale, data una famiglia di applicazioni  $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow Y$  si può considerare la topologia più fine che rende le mappe  $f_i$  continue. In particolare nel caso di un'unica funzione la topologia più fine che rende  $f$  continua è la topologia detta topologia quoziente indotta da  $f$ .

### Esempio Topologia di Zariski

Let  $\mathbb{K}$  be a field and consider  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Consider the affine space given by the cartesian exponent  $\mathbb{K}^n$ . For each  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  consider

$$D(f) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}$$

the set  $\{D(f)\}$  is a basis for the topology of  $\mathbb{K}^n$  called Zariski topology.

### Proof Che è una base

Chiaramente  $D(0) = \emptyset$  e  $D(1) = \mathbb{K}^n$ . The latter already proves that the whole space can be expressed as a union. For the intersection, consider

$$D(f) \cap D(g) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) \neq 0 \wedge g(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}$$

Siccome un campo è un dominio di integrità la condizione è equivalente a  $(f \circ g)(a_1, \dots, a_n) \neq 0$  ma ciò è uguale a  $D(f \circ g)$ . Quindi  $\{D(f)\}$  forma una base per una topologia sul dato spazio.

### Esercizio

Caratterizzare i chiusi di questa topologia. Quindi generiamo tutti gli aperti e prendiamo i complementari, o usiamo le leggi di de Morgan. I chiusi sono generati da un ideale.

TODO anche la dimostrazione che la chiusura è pari ai punti  $x$  tali che per ogni  $U$  in  $I(x)$ ,  $U$  intersection  $B$  non empty.

### Definizione

Uno spazio topologico si dice  $T_1$  se ogni punto  $\{x\}$  (come sottoinsieme dello spazio) è chiuso.

Per esempio la retta euclidea.

**Proposition**

Sia  $X$  uno spazio topologico. Allora  $X$  è  $T_1$  se e solo se  $\forall x \in X$ ,

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \{x\}$$

**Proof**

( $\Rightarrow$ ) Abbiamo ovviamente l'inclusione  $\supseteq$ . Viceversa, dimostriamo che

$$\bigcap_{U \in I(x)} U \subseteq \{x\}$$

che è equivalente a dire

$$X \setminus \left( \bigcup_{U \in I(x)} U \right) \supseteq X \setminus \{x\}$$

Prendiamo quindi un punto  $y \in X \setminus \{x\}$  che è come dire  $y \neq x$ . Siccome lo spazio è  $T_1$ , abbiamo che  $\{y\}$  è chiuso e quindi il suo complementare  $X \setminus \{y\}$  è un aperto che contiene  $x$  in quanto  $x \neq y$ . Quindi  $X \setminus \{y\} \in I(x)$ . Ponendo  $U = X \setminus \{y\}$  otteniamo quindi che

$$y \in X \setminus U = X \setminus (X \setminus \{y\}) = \{y\}$$

( $\Leftarrow$ ) Applichiamo la caratterizzazione della chiusura del singoletto, cioè  $y \in \overline{\{x\}}$  è come dire che per ogni  $U \in I(x)$ ,  $U \cap \{x\} \neq \emptyset$ . Ma tutto ciò è equivalente a dire che

$$x \in \bigcap_{U \in I(x)} U = \{y\}$$

che è equivalente a dire che  $x = y$ . Quindi,  $\overline{\{x\}} = \{x\}$  e quindi è chiuso.

**Definizione** Definizione di convesso in  $\mathbb{R}^n$ 

.

Sono proprietà topologiche  $T_1$ , proprietà di Hausdorff, connessione, connessione per archi.

### 3 Lezione del 23

L'operazione di controimmagine fra le topologie presenta tutte le operazioni insiemistiche. Sezione sugli invarianti topologici? (Sposando anche la definizione di quest'ultima).

#### Lemma

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un omeomorfismo. Allora, per ogni sottospazio  $S \subseteq X$ , la restrizione di  $f$  a  $S$  è un omeomorfismo.

#### Proof

Un omeomorfismo è un'operazione continua biettiva con inverso continuo. Inoltre vi è la proprietà universale della topologia di sottospazio.

#### Esempio

L'intervallo  $(0, 1)$  e  $[0, 1)$  non sono omeomorfi.

#### Proof

Supponiamo che esista un tale omeomorfismo  $f: [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ . Abbiamo che  $f(0) \in (0, 1)$ . Prendiamo  $S = [0, 1) \setminus \{0\} = (0, 1)$ . Then,  $f$  restricted to  $S$  is a homeomorphism from  $S$  to

$$f(S) = (0, 1) \setminus \{f(0)\} = (0, f(0)) \sqcup (f(0), 1)$$

But  $(0, 1)$  is connected and  $f(S)$  is not, which is absurd.

#### Esempio

Sia  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora esiste  $x$  tale che  $f(x) = f(-x)$ , in particolare non è iniettiva.

#### Proof

Sia  $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $g(x) = f(x) - f(-x)$ . Chiaramente  $g$  è continua. Chiaramente  $g(x) = 0$  se e solo se  $f(x) = f(-x)$ .  $S^n$  è connesso per archi e quindi connesso. Allora  $g(S^n)$  è connesso nei reali, ovvero è un intervallo. Let  $y \in S^n$ . Then,  $g(y), g(-y) \in g(S^n)$ . Consider

$$\frac{1}{2}g(y) + \frac{1}{2}g(-y) \in g(S)$$

Then

$$\frac{1}{2}(f(y) - f(-y)) + \frac{1}{2}(f(-y) - f(y)) = 0$$

#### Corollario

Aperti di  $\mathbb{R}$  non sono omeomorfi ad aperti di  $\mathbb{R}^n$  per  $n > 1$ .

#### Proof

Ogni aperto di  $\mathbb{R}^n$  contiene al suo interno un sottospazio omeomorfo a  $S^{n-1}$ . Suppose that there is a homeomorphism  $f: A \rightarrow f(A)$  where  $A$  is open in  $\mathbb{R}^n$  and  $f(A)$  is open in  $\mathbb{R}$ . La restrizione di  $f$  ad un sottospazio  $B \cong S^{n-1}$  è ancora un omeomorfismo. Ma dal risultato precedente non può esistere una tale applicazione biettiva, assurdo.

### Lemma

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione continua e suriettiva verso  $Y$  connesso e  $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$  connesso. Allora, se  $f$  è aperta oppure chiusa,  $X$  è connesso.

### Proof

Supponiamo che  $f$  sia aperta senza perdita di generalità. Prendiamo  $A_1, A_2$  aperti non vuoti di  $X$  tale che  $X = A_1 \cup A_2$ . Vogliamo mostrare che sono disgiunti. Abbiamo che  $Y = f(X) = f(A_1) \cup f(A_2)$ . Siccome  $Y$  è connesso, la loro intersezione non può essere vuota. Abbiamo quindi almeno un punto  $y \in A_1 \cap A_2$ . Consideriamo

$$f^{-1}(y) \cap A_1 \neq \emptyset \quad f^{-1}(y) \cap A_2 \neq \emptyset$$

Per ipotesi

$$f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y) \cap A_2)$$

è aperto. Quindi

$$(f^{-1}(y) \cap A_1) \cap (f^{-1}(y) \cap A_2) \neq \emptyset$$

quindi  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ .

### Teorema

Siano  $X, Y$  due spazi topologici connessi. Allora,  $X \times Y$  è connesso.

### Proof

Applichiamo il lemma. Prendiamo  $p: X \times Y \rightarrow Y$  una delle due proiezioni. Appliciamo il lemma.  $P$  è aperta (dal risultato sulla topologia prodotto). Inoltre  $P$  è continua e suriettiva (se l'insieme  $X$  non è vuoto, in tal caso il risultato è banale). Consideriamo la fibra  $p^{-1}(y) = X \times \{y\}$  che è omeomorfo ad  $X$ , che è connesso. Quindi le ipotesi sono soddisfatte e  $Y \times X$  è connesso.

Lo stesso vale per la connessione per archi.

### Proof

Siano  $X, Y$  connessi per archi. Allora,  $X \times Y$  è connesso per archi.

### Proof

Mostriamo che ogni coppia di punti è collegata da un cammino. Siano quindi  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ . Siccome  $X$  è connesso per archi, esiste un cammino  $\alpha: I \rightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha(1) = x'$ . Analogamente  $\beta(0) = y$  e  $\beta(1) = y'$ . Per la proprietà universale del prodotto con  $I$  come vertice, esiste un cammino (unico) che fattorizza il diagramma tale che i due triangoli commutino mediante le proiezioni. Quindi  $(\alpha, \beta): I \rightarrow X \times Y$  dato da  $(\alpha, \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ .

### Definizione Componente connessa

Sia  $X$  spazio topologico. Un sottospazio  $C$  di  $X$  si dice una componente connessa se soddisfa le seguenti:

1.  $C$  è un sottospazio connesso
2. se  $C \subseteq A$  e  $A$  è connesso allora  $C = A$ .

### Esempio

Sia  $X$  uno spazio e  $C \subseteq X$ . Se  $C$  è sottospazio aperto, chiuso, connesso e non vuoto, allora è

componente connessa. Ciò è dato dal fatto che  $C$  è anche chiuso e aperto in  $A$ .

### Lemma

Sia  $Y$  un sottospazio connesso di  $X$ . Sia  $W$  un sottospazio tale che  $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$ . Allora  $W$  è connesso.

### Proof

Sia  $Z \subseteq W$  aperto, chiuso e non vuoto. Consideriamo  $Z \cap Y$ . Questo è aperto e chiuso di  $Y$  per "transitività" della topologia di sottospazio, (cioè se abbiamo una successione di spazi possiamo indurre la topologia di sottospazi in un colpo solo oppure a step). Sappiamo che

$$\bar{Y} = \{x \in X \mid \text{for every open } A \text{ of } X \text{ where } x \in A, A \cap Y \neq \emptyset\}$$

Siccome  $Z \neq \emptyset$  è aperto in  $W$ ,  $Z = A \cap W$  per qualche  $A$  aperto di  $X$ . Quindi,  $\forall x \in Z \subseteq A$ ,  $A \cap Y \neq \emptyset$  (e quindi possono prendere un  $x \in Z$ ). Siccome  $Y$  è connesso, deduciamo che  $Z \cap Y = Y$ . Infatti quest'ultima intersezione è aperta e chiusa in  $Y$  per definizione di topologia di sottospazio e l'intersezione non è vuota. Quindi,  $Y \subseteq Z$ . Consideriamo la chiusura (in  $W$ ) di entrambi  $\bar{Y} \subseteq \bar{Z}$ . Quindi la chiusura in  $W$  è pari a  $\bar{Y} \cap W$  e l'altro  $\bar{Z} = Z$  siccome  $Z$  è chiuso in  $W$  per ipotesi. Quindi  $\bar{Y} \subseteq Z$ . Siccome  $Z \subseteq W$ , abbiamo  $W = Z$ .

### Lemma

Sia  $x$  un punto di uno spazio topologico  $X$  e sia  $\{Z_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottospazio connessi di  $X$  tali che  $x \in Z_i$ . Allora,  $\bigcup_i Z_i$  è un sottospazio connesso.

### Proof

Sia

$$W = \bigcup_{i=1} Z_i$$

Dato  $A \subseteq W$  aperto, chiuso e non vuoto, vogliamo mostrare che  $A = W$ . Per ogni  $i \in I$ , andiamo a considerare  $A \cap Z_i$  che è un aperto e chiuso di  $Z_i$  per definizione di sottospazio. Siccome  $Z_i$  è connesso,  $A \cap Z_i = \emptyset$  oppure  $A \cap Z_i = Z_i$ . Quest'ultimo è equivalente a dire che  $Z_i \subseteq A$ . Supponiamo  $A \neq \emptyset$ . Quindi

$$A = \bigcup_{i \in I} Z_i \cap A$$

Allora esiste almeno un  $i \in I$  tale che  $A \cap Z_i \neq \emptyset$ , cioè  $Z_i \subseteq A$ . Dato il punto  $x$  come nelle ipotesi del lemma, abbiamo  $x \in Z_i$ . Segue quindi che  $x \in A$ . Allora  $x \in Z_i \cap A$  per ogni  $i \in I$ . Per ipotesi  $x \in Z_i$  per tutte le  $i$ . Quindi,  $Z_i \cap A \neq \emptyset \iff Z_i \subseteq A$ , allora

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq A$$

cioè  $A = W$ .

### Corollario

Siano  $A, B$  due sottospazi connessi di uno spazio topologico. Allora, se  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cup B$  è connesso.

### Proof

Applichiamo il lemma al caso della famiglia  $\{A, B\}$ .



### Lemma

Sia  $x \in X$  un punto di uno spazio topologico  $X$ . Denotiamo  $C(x)$  l'unione di tutti i sottospazi connessi di  $X$  che contengono il punto  $x$ . Allora  $C(x)$  è una componente connessa di  $X$  contenente il punto  $x$ .

### Proof

1.  $C(x)$  è connesso per il lemma;
2.  $C(x) \subseteq A$  con  $A$  connesso.  $\{x\}$  è un sottospazio connesso di  $X$  contenente  $x$ . Per definizione  $\{x\} \in C(x)$ . Abbiamo allora che  $x \in C(x) \subseteq A$  e quindi  $x \in A$ . Ma  $A$  è connesso, quindi  $A \subseteq C(x)$ . Allora  $A = C(x)$ .

### Teorema

Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse. Ogni componente connessa è chiusa e ogni punto è contenuto in una e una sola componente connessa.

### Proof

Siccome  $x \in C(x)$ ,

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Sia  $C$  componente connessa. Da un risultato precedente, sappiamo che  $\overline{C}$  è ancora un connesso. Tuttavia  $C \subseteq \overline{C}$  e per la seconda condizione nella definizione di componente connessa, ci deve essere uguaglianza. Siano  $C, D$  componenti connesse. Supponiamo che non siano disgiunte. Abbiamo che  $C \cup D$  è connesso in quanto unione dei connessi

$$C, D \subseteq C \cup D$$

Ciò implica che  $C = C \cup D$  e  $D = C \cup D$ . Allora  $C = D$

Questo teorema giustifica la seguente definizione.

### Definizione

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x \in X$ . Allora  $C(x)$  è detta la componente connessa.

### Definizione Compattezza

**Definizione** Dato  $X$  spazio topologico, il  $\pi_0(X)$  è definito come l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$ .

### Teorema

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione continua. Allora se  $X$  è compatto,  $f(X)$  è compatto come sottospazio di  $Y$ .

### Proof

Sia  $\mathcal{A}$  una famiglia di aperti di  $Y$  tale che

$$f(X) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Allora

$$X = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A)$$

cioè unione di aperti di  $X$  siccome  $f$  è continua. Siccome  $X$  è compatto, esistono  $A_1, \dots, A_n$  tali che  $X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n)$ . Applicando  $f$  otteniamo

$$f(X) = f(f^{-1}(A_1)) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_n))$$

e quindi  $f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  che è un ricoprimento finito.

### Proposition

Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.

### Proof

Sia  $X$  compatto e  $C$  chiuso in  $X$ . Sia  $\mathcal{A}$  una famiglia di aperti tali che

$$C \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Notiamo che  $C = (X \setminus C) \cup \bigcup A$ , dove il primo termine è aperto in quanto complementare di un chiuso. Essendo  $X$  compatto, esistono  $A_1, \dots, A_n$  tali che

$$X = (X \setminus C) \cup \bigcup_{i=1}^n A_i$$

quindi

$$C = C \cap X = (C \cap (X \setminus C)) \cup \bigcup (A_i \cap C)$$

ma il primo termine è l'insieme vuoto quindi  $C \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ .

### Proposition

Unione finita di sottospazi compatti è compatta.

### Proof

Sia  $X$  spazio topologico e  $K_1, \dots, K_n$  sottospazi compatti di  $X$ . Sia

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_i$$

Vogliamo dimostrare che  $K$  è compatto. Siccome i  $K_i$  sono compatti, possiamo estrarre dei sottoricoprimenti finiti da essi. Ma l'unione di questi sottoricoprimenti finiti è un sottoricoprimento finito, in quanto unioni finite di sottoinsiemi finiti sono sottoinsiemi finiti.

### Teorema

L'intervallo unitario è compatto rispetto alla topologia euclidea reale.

**Proof**

Sia  $\mathcal{A}$  un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$ . Quindi

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Definiamo il sottoinsieme  $X \subseteq [0, \infty)$  come seguente:

$$X = \{t \in [0, +\infty) \mid [0, t] \text{ is contained in a finite union of open sets in } \mathcal{A}\}$$

La tesi equivalente a dire che  $1 \in X$ . Note that  $X \neq \emptyset$  as  $0 \in X$ . Questo è dato dal fatto che  $0 \in [0, 1] \subseteq \bigcup A$ . Consideriamo ora il supremum di  $X$ . Abbiamo due possibilità, o  $\sup X > 1$  oppure  $\sup X \leq 1$ . Nel secondo caso esiste quindi  $t \in X$  tale che  $1 < t < \sup X$ , quindi  $[0, t]$  è un sottoinsieme di un'unione finita di aperti di  $\mathcal{A}$ . In particolare  $[0, 1]$  è uno di questi quindi vale alla tesi. Supponiamo invece l'altro caso dove  $b = \sup X > 1$ . Se  $b \leq 1$  allora  $b \in [0, 1]$ , quindi esiste  $A \in \mathcal{A}$  tale che  $b \in A$  ( $b \geq 0$  in quanto  $0 \in X$ ). Essendo  $A$  aperto per la topologia euclidea reale, esiste  $\delta > 0$  tale che  $(b - \delta, b + \delta) \subseteq A$ . D'altra parte, essendo  $b$  il supremum, esiste  $t \in X$  tale che  $t \in (b - \delta, b + \delta)$ . Siccome  $t \in X$ , per definizione di  $X$ ,

$$[0, t] \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$$

Per ogni  $h$  tale che  $0 \leq h < \delta$ ,

$$[0, b + h] = [0, t] \cup [t, b + h]$$

Il primo termine è in  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  mentre il secondo è in  $A \in \mathcal{A}$ . Questo contraddice il fatto che  $b$  sia il supremum, in quanto ciò implicherebbe che  $b + h \in X$ .

Quindi  $\mathbb{R}$  e  $[0, 1]$  non sono omeomorfi.

**Corollario**

Un sottospazio reale è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

**Proof**

( $\Rightarrow$ ) Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  compatto. Mostriamo che è limitato. Consideriamo il ricoprimento aperto  $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  che ricopre  $\mathbb{R}$ . Allora,

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$$

Essendo  $A$  compatto, è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Quindi,  $A \subseteq [-N, N]$  per qualche  $N > 0$ , quindi è limitato. Mostriamo ora che  $A$  è chiuso, in particolare mostriamo che  $\bar{A} \subseteq A$ . Quindi se  $X \setminus A \subseteq X \setminus \bar{A}$ , ovvero che se  $p \notin A$  allora  $p \notin \bar{A}$ . Se  $p \notin A$  abbiamo una funzione continua da  $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{p\}$  in  $\mathbb{R}$  data da  $f(x) = 1/(x - p)$ . Se  $f$  è continua, siccome  $A$  è compatto, allora  $f(A)$  è compatto, quindi anche limitato come dimostratosi prima. Questo implica chiaramente che  $p \notin A$ .

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $A \subseteq \mathbb{R}$  sia chiuso e limitato. Siccome è limitato,  $A \subseteq [-a, a]$  per qualche  $a \geq 0$ . Ma  $[-a, a]$  è omeomorfo a  $[0, 1]$  quindi è compatto.

**Proposition**

Un sottospazio  $K$  di uno spazio topologico  $X$  è compatto (per la topologia di sottospazio) se e

solo se per ogni famiglia  $\mathcal{A}$  di aperti di  $X$  tali che

$$K \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

esistono  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  tali che

$$K \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n$$

### Proof

$K$  è compatto per la topologia di sottospazio ogni ricoprimento aperto  $\mathcal{B}$  di  $K$  ammette un sottoricoprimento finito dove  $\forall B \in \mathcal{B}$  con  $B = K \cap A$  con  $A$  aperto di  $X$  vale

$$K = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \iff K \subseteq \bigcup_{A \cap K \in \mathcal{B}} A$$

con  $A$  aperto. Quindi  $K = B_1 \cup \dots \cup B_n$  se e solo se  $K \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ , dove per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $B_i \subseteq A_i \cap K$ .

Notiamo che ogni insieme finito è compatto per qualunque topologia.

### Corollario Teorema di Weierstrass

Sia  $X$  uno spazio topologico compatto e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione continua. Allora  $f$  ammette massimo e minimo.

### Proof

Siccome  $f$  è continua ed  $X$  è compatto,  $f(X)$  è compatto nei reali. Ma allora è chiuso e limitato, quindi se consideriamo infimum e supremum sono sicuramente numeri reali. Dalla definizione di chiusura, infimum e supremum stanno sempre nella chiusura. Ma visto che  $f(X)$  è chiuso, coincide con la sua chiusura, quindi infimum e supremum stanno nell'insieme stesso, quindi corrispondono a massimo e minimo.

### Proposition

Sia  $\mathcal{B}$  una base di uno spazio topologico  $X$ . Supponiamo che ogni ricoprimento aperto di  $X$  formato da elementi in  $\mathcal{B}$  ammetta un sottoricoprimento finito. Allora,  $X$  è compatto.

### Proof

Sia  $\mathcal{A}$  un ricoprimento aperto di  $X$

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Vogliamo dimostrare che da questo ricoprimento si può estrarre un sottoricoprimento finito. Per ogni  $A \in \mathcal{A}$ , consideriamo  $\mathcal{B}_A = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq A\}$ . Chiaramente per definizione di base,  $A = \bigcup \mathcal{B}_A$ . Quindi

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$$

quindi esistono  $B_1 \in \mathcal{B}_{A_1}, \dots$  tale che

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_n$$

### Teorema

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione chiusa,  $Y$  spazio compatto, le fibre  $f^{-1}(y)$  compatte. Allora,  $X$  è compatto.

### Proof

Dato  $A \subseteq X$  consideriamo  $A' \subseteq Y$  definito come seguente:

$$A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}$$

Mostriamo alcune proprietà:

1.  $Y \setminus Y' = f(X \setminus A)$ : abbiamo che

$$\begin{aligned} Y \setminus Y' &= \{y \in Y \mid \neg(f^{-1}(y) \subseteq A)\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in f^{-1}(y) \mid x \notin A\} \\ &= f(X \setminus A) \end{aligned}$$

2.  $f^{-1}(A') \subseteq A$  sia  $x \in f^{-1}(A')$ . Quindi dire che  $f(x) \in A'$  è come dire  $f^{-1}(f(x)) \subseteq A$ . Mostriamo che se  $A$  è aperto in  $X$  allora  $A'$  è aperto in  $Y$ .  $A'$  è aperto in  $Y$  se e solo se  $Y \setminus Y'$  è chiuso in  $Y$ . Ma  $Y \setminus Y' = f(X \setminus A)$  è chiuso in quanto immagine di un chiuso. Prendiamo quindi  $\mathcal{A}$  come ricoprimento aperto di  $X$ . Definiamo  $\mathcal{B}$  come la famiglia dei sottoinsiemi di  $X$  esprimibili come unioni finite di aperti in  $A$ . Consideriamo la famiglia  $\mathcal{B}' = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$ . Mostriamo che questa famiglia è un ricoprimento (aperto) di  $Y$ . Dato  $y \in y$ , consideriamo  $f^{-1}(y)$  che è compatto per ipotesi.

$$f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

quindi  $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  per qualche  $A_i$ . Ponendo  $B = A_1 \cup \dots \cup A_n$  abbiamo per definizione di  $\mathcal{B}'$  che  $y \in B'$ . La compattezza di  $Y$  implica quindi che esistano  $B'_1, \dots, B'_n$  tali che  $Y = B'_1 \cup \dots \cup B'_n$  e quindi

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(B'_1) \cup \dots \cup f^{-1}(B'_n)$$

Usando la seconda proprietà dimostrata prima, troviamo

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_n$$

visto che sono tutte unione finite di aperti in  $\mathcal{A}$ , allora  $X$  è esprimibile come unione finita di aperti in  $\mathcal{A}$ .

## 3.1 Verso la compattificazione di Alexandrov

### Proposition

Siano  $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \dots$  una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico ambiente. Allora,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$$

### Proof

$K_n$  è chiuso in  $K_1$  in quanto  $K_n = K_n \cap K_1$  e  $K_n$  è chiuso nello spazio ambiente. Quindi i complementari  $K_1 \setminus K_n$  è aperto. Supponiamo che l'intersezione sia vuota

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$$

Ciò è equivalente a dire che

$$K_1 \setminus \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \right) = K_1 \setminus \emptyset$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (K_1 \setminus K_n) = K_1$$

quindi i sottoinsieme  $\{K_1 \setminus K_n\}$  formerebbero un ricoprimento aperto di  $K_1$ , dal quale, essendo  $K_1$  compatto, si dovrebbe poter estrarre un sottoricoprimento finito  $\{K_1 \setminus K_{J_1}, \dots, K_1 \setminus K_{J_n}\}$ . Avremmo quindi che

$$K_1 = \bigcup K_1 \setminus K_{J_i}$$

$$K_1 = \bigcap K_{J_i} = \emptyset$$

$$K_1 = K_{\max\{J_i\}}$$

che è assurdo in quanto tutti i  $K$  sono non-vuoti per ipotesi.

### Proposition

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $A, B$  sottospazi rispettivamente di  $X, Y$ . Allora  $A \times B$  è sottospazio di  $X \times Y$ .

Sullo spazio  $A \times B$  possiamo definire due topologie: la topologia prodotto, considerando  $A$  e  $B$  come spazi topologici secondo le topologie di sottospazio indotte dalle topologie madri, oppure la topologia di sottospazio indotta dalla topologia prodotto su  $X \times Y$ . In realtà, sono uguali.

### Proof

Considerando  $A \times B$  con la topologia di sottospazio, abbiamo che una sua base è data dai sottoinsiemi della forma

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$$

Il primo termine è aperto della base standard per  $X \times Y$ , gli ultimi due sono aperti generici di  $A, B$  per la topologia di sottospazio. Le due topologie coincidono, avendo una stessa base.

Possiamo dimostrarlo con le proprietà universali delle topologie di prodotto e delle topologie di sottospazio. La topologia prodotto è la topologia meno fine su  $A \times B$  che rende le due proiezioni  $\pi_A: A \times B \rightarrow A$  e  $\pi_B: A \times B \rightarrow B$  continue. la topologia di sottospazio su  $A \times B$  è la topologia meno fine che rende l'inclusione  $1: A \times B \hookrightarrow X \times Y$  continua. DISEGNO. Sia  $J$  una topologia su  $A \times B$ .  $i: (A \times B, J) \rightarrow X \times Y$  è continua se e solo se  $\pi_X \circ i$  e  $\pi_Y \circ i$  sono continue. Ma  $\pi_X \circ i = i_A \circ \pi_A$  e  $\pi_Y \circ i = i_B \circ \pi_B$ . La proprietà universale della topologia di sottospazio ciò è equivalente a richiedere che le due proiezioni  $\pi_A, \pi_B$  siano continue. Quindi le due topologie coincidono.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ i_A \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i_B \\ X & \xleftarrow{\pi_X} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array}$$

### Teorema teorema di Wallace

Let  $X, Y$  spazi topologici e  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  sottospazi compatti con la topologia indotta e  $W$  un aperto di  $X \times Y$  tale che  $A \times B \subseteq W$ . Allora, esistono degli aperti  $U$  di  $X$  e  $V$  di  $Y$  tali che

$$A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge (U \times V \subseteq W)$$

### Proof

Dimostriamo dapprima il caso particolare del teorema per  $A = \{a\}$ . Quindi  $\{a\} \times B \subseteq W$ . Ciò significa che  $(a, b) \in W$  per ogni  $b \in B$ . Siccome  $W$  è un aperto di  $X \times Y$ , sappiamo che una base della topologia prodotto è data dai prodotti  $U \times V$  dove  $U$  è aperto di  $X$  e  $V$  è aperto di  $Y$ , quindi esistono  $U_b$  di  $X$  e  $V_b$  di  $Y$  tali che  $(a, b) \in U_b \times V_b \subseteq W$ . Quindi  $\{V_b\}$  definiscono un ricoprimento aperto del sottospazio  $B$ . per ipotesi,  $B$  è compatto, quindi possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$B \subseteq \bigcup V_{b_i}$$

quindi a questo punto poniamo  $V = \bigcup V_{b_i}$  e  $U = \bigcap U_{b_i}$ . Allora se  $A \subseteq U$ , cioè  $\{a\} \subseteq U$ , è come dire che  $a \in U$  cioè  $a \in \bigcup U_{b_i}$ . Inoltre

$$\begin{aligned} U \times V &= U \times \bigcup V_{b_i} \\ &= \bigcup (U \times V_{b_i}) \end{aligned}$$

che sono tutti termini in  $W$  che sono in  $W$ . Quindi  $U, V$  soddisfano le condizioni del teorema. Adesso, mostriamo il caso generale. Sia  $A \subseteq X$  un compatto arbitrario.  $\forall a \in A$  esistono aperti  $U_a$  di  $X$  e  $V_a$  di  $Y$  tali che  $a \in U_a$ ,  $B \subseteq V_a$  e  $\{a\} \times B \subseteq W$  per il caso particolare del teorema appena dimostrato. Similarmente a prima, osserviamo che  $\{U_a\}$  è un ricoprimento aperto di  $A$ , e quindi siccome  $A$  è compatto, esiste un sottoricoprimento finito

$$A \subseteq \bigcup U_{a_i}$$

Quindi poniamo  $U = \bigcup U_{a_i}$  e  $V = \bigcap V_{a_i}$ . Quindi  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  in quanto  $B \subseteq V_a$  per ogni  $a$ . Quindi sarà anche contenuto nell'intersezione. Inoltre

$$U \times V = \bigcup U_{a_i} \times V \subseteq W$$

### Corollario

Ogni sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

### Proof

Sia  $X$  spazio di Hausdorff e  $K \subseteq X$  compatto. Vogliamo mostrare che  $K$  è chiuso, quindi che  $X \setminus K$  è aperto. Dire che è aperto è come richiedere che sia intorno di ciascun suo punto. Quindi  $\forall x \in X \setminus K$  tale che  $x \notin K$  esiste  $U$  tale che  $x \in U$  e  $U \subseteq X \setminus K$ , con  $U, K$  disgiunti. Ricordiamo che  $X$  è di Hausdorff se e solo se  $\Delta X = \{(x, x) \mid x \in X\}$  è chiusa in  $X \times X$ . Applichiamo il teorema di Wallace prendendo  $A = \{x\}$  e  $B = K$ , che sono compatto in quanto finito e compatto per ipotesi rispettivamente.  $W = (X \times X) \setminus \Delta X$  aperto in quanto  $\Delta X$  è chiusa.  $A \times B \subseteq W$  cioè  $\{x\} \times K \subseteq W$  e  $x \notin K$ . Deduciamo quindi dal teorema di Wallace che esistono aperti  $U$  di  $X$  e  $V$  di  $Y$  tali che  $\{x\} \subseteq U$ , che è come dire  $x \in U$ , e  $K \subseteq V$ . Inoltre  $U \times K \subseteq U \times V \subseteq W = (X \times X) \setminus \Delta X$ . Quindi  $U \cap K = \emptyset$ .

### Corollario

Siano  $X, Y$  spazi topologici. Se  $X$  è compatto allora la proiezione  $p: X \times Y \rightarrow Y$  è chiusa. Inoltre, Se  $X$  e  $Y$  sono compatti allora  $X \times Y$  è compatto. Mettere enunciate.

### Proof

1. Sia  $C \subseteq X \times Y$  chiuso. Vogliamo mostrare che  $p(C)$  è chiuso in  $Y$ , cioè che  $Y \setminus p(C)$  è aperto, cioè è un intorno di ogni suo punto, quindi  $\forall y \notin p(C)$  esiste un intorno di  $Y$  disgiunto da

$p(C)$ . Applichiamo il teorema di Wallace prendendo  $A = X$ ,  $B = \{y\}$  e  $W = (X \times Y) \setminus C$  aperto (in quanto  $C$  è chiuso). Allora  $A \times B = X \times \{y\} \subseteq W = (X \times Y) \setminus C$ . Ciò è equivalente a  $a \notin p(C)$  che è l'insieme di tutte le  $y \in Y$  tale che esiste  $x \in X$  con  $(x, y) \in C$ . Il teorema di Wallace fornisce quindi un aperto  $V$  intorno di  $y$  interamente contenuto in  $Y \setminus p(C)$ . Quindi  $B = \{y\} \subseteq V$  e

$$X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus C \iff V \subseteq Y \setminus p(C)$$

2. Ricordiamo il risultato che dice che data una mappa chiusa che va in un compatto, e le sue fibre sono compatte allora il dominio è compatto. Nel nostro caso la mappa è la proiezione, che è chiusa per il punto precedente. Le fibre sono

$$p^{-1}(y) \cong X$$

in quanto  $X \times \{y\} \cong X$ , che è compatto per ipotesi. Segue per induzione che prodotti finiti di spazi compatti sono compatti.

### Corollario

Un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  è compatto (con la topologia indotta dalla topologia euclidea su  $\mathbb{R}^n$ ), se e solo se esso è chiuso e limitato (quindi incluso in un ipercubo).

### Proof

- ( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  sia chiuso e limitato. Allora  $A \subseteq [-a, a]^n$  per qualche  $a > 0$ . Siccome  $[-a, a]$  è omeomorfo a  $[0, 1]$  che è compatto,  $[-a, a]^n$  è compatto in quanto prodotto di spazi compatti. Quindi,  $A$  è compatto in quanto chiuso di uno spazio compatto.
- ( $\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  sia compatto. Consideriamo la funzione  $d: A \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $x \rightarrow \|x\|$ . Chiaramente  $d$  è continua. Allora,  $d(A)$  è compatto in  $\mathbb{R}$ , ovvero chiuso e limitato. In particolare,  $d(A) \subseteq [-N, N]$  per qualche  $N > 0$ . Quindi,  $d(x) \leq N$  cioè per tutte le  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq N$ . Quindi,  $A$  è limitato. Allora  $A$  è chiuso in quanto compatto in uno spazio di Hausdorff, cioè  $\mathbb{R}^n$ .

Per esempio  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è compatto. Anche  $D^n = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$  disco è compatto.

### Corollario

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione continua con  $X$  compatto e  $Y$  di Hausdorff. Allora  $f$  è un'applicazione chiusa. In particolare, se  $f$  è biettiva allora  $f$  è un omeomorfismo.

### Proof

Per dimostrarlo passiamo da un chiuso  $C$  in  $X$  verso ad un compatto  $C$  in  $X$ . Una volta fatto ciò possiamo applicare  $f$  per ottenere  $f(C)$  compatto in  $Y$ , ed infine otteniamo  $f(C)$  chiuso in  $Y$ . Abbiamo utilizzato che ogni chiuso di un compatto è compatto.

### Definizione Compattificazione di Alexandrov

Sia  $X$  uno spazio topologico,  $\infty \notin X$ . Sull'insieme  $\hat{X} \triangleq X \cup \{\infty\}$  definiamo la seguente famiglia di sottoinsiemi

$$J = \{A \text{ aperto} \mid A \subseteq X\} \cup \{\hat{X} \setminus K \mid K \text{ chiuso e compatto in } X\}$$



**Proposition** Quest'ultima famiglia è una topologia per  $\hat{X}$  della topologia di Alexandrov

1.  $\emptyset \in J$  in quanto  $\emptyset$  è un aperto di  $X$ ;
2. sia  $K = \emptyset$  che è chiuso e compatto in  $X$ . Allora,  $\hat{X} \in J$ ;
3. *intersezione*: abbiamo diversi casi
  - (a) siano  $A_1, A_2 \subseteq X$  aperti di  $X$ , allora  $A_1 \cap A_2$  è un aperto di  $X$ ;
  - (b) sia  $A$  un aperto di  $X$ . Sia  $K$  chiuso e compatto in  $X$ . Quindi

$$A \cap (\hat{X} \setminus K) = A \cap (X \setminus K)$$

quest'ultimo termine è aperto di  $X$ .

- (c) nel caso  $(\hat{X} \setminus K_1) \cap (\hat{X} \setminus K_2)$  usiamo le leggi di De Morgan. Quindi l'intersezione è equivalente a

$$\hat{X} \setminus (K_1 \cup K_2)$$

Il secondo termine è chiuso e compatto.

4. *unioni arbitrarie*: abbiamo diversi casi
  - (a) sempre per le leggi di De Morgan

$$\bigcup_{i \in I} (\hat{X} \setminus K_i) = \hat{X} \setminus \left( \bigcap_{i \in I} K_i \right)$$

Se  $I = \emptyset$  la proposizione è banale. Altrimenti, esiste  $i_0 \in I$  tale che

$$\bigcap_{i \in I} K_i \subseteq K_{i_0}$$

a sinistra l'intersezione è chiusa in quanto intersezione di chiusi, a destra è compatto. Quindi, è anch'esso compatto in quanto chiuso di un compatto.

- (b) nel caso di un'unione mista con  $K$  chiuso e compatto in  $X$  e  $A$  aperto

$$\begin{aligned} (\hat{X} \setminus K) \cup A &= (\hat{X} \setminus K) \cup (\hat{X} \setminus (\hat{X} \setminus A)) \\ &= \hat{X} \setminus (K \cup (\hat{X} \setminus A)) \end{aligned}$$

quindi è anche compatto. Siccome  $X \setminus A$  è chiuso allora è chiuso e compatto in quanto chiuso del compatto  $K$

**Proposition**

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\infty \notin X$ . Allora  $\hat{X}$  è compatto.

**Proof**

Supponiamo di avere un ricoprimento aperto  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $\hat{X}$ . Esiste almeno un aperto che contiene  $\infty$ . Per semplicità sia  $\infty \in U_0$ . Quindi  $U_0$  è della forma  $U_0 = \hat{X} \setminus K$  per qualche  $K$  chiuso e compatto in  $X$ . Quindi,  $K = \hat{X} \setminus U_0$ . Siccome  $K$  è compatto, esiste un sottoricoprimento finito  $\{U_1, \dots, U_n\}$  di  $K$ . Quindi, aggiungendo anche  $U_0$  a questi, ottengo un ricoprimento finito di tutto lo spazio.

Notiamo che l'inclusione  $i: X \hookrightarrow \hat{X}$  è continua ed è una immersione aperta. Infatti,  $i^{-1}(A) = A$  è aperto di  $X$ , e  $i^{-1}(\hat{X} \setminus K) = X \setminus K$  che è aperto di  $X$ . Inoltre se  $A$  è un aperto di  $X$ ,  $i(A) = A$  che è aperto di  $\hat{X}$ . Siccome  $i$  è iniettiva allora è un'immersione aperta.

**Proposition**

Se  $X$  è uno spazio topologico NON compatto allora  $i(X)$  è denso in  $\hat{X}$ , dove  $i$  è l'inclusione

sopracitata.

### Proof

Abbiamo due tipi di aperti e quindi due casi. Nel primo abbiamo  $i(X) \cap i(A) = i(A) \neq \emptyset$  per  $A \neq \emptyset$ . Nel secondo caso  $i(X) \cap (\hat{X} \setminus K) = X \setminus K \neq \emptyset$ .

### Proposition

Sia  $X$  uno spazio topologico. Allora  $\hat{X}$  è di Hausdorff se e solo se  $X$  è di Hausdorff e ogni suo punto possiede un intorno compatto.

### Proof

Siccome  $X$  è aperto in  $\hat{X}$ , due punti di  $X$  ammettono interni disgiunti in  $X$  se e solo se ammettono interni disgiunti in  $\hat{X}$ . Dato  $x \in X$ , vogliamo studiare la condizione di esistenza di interni aperti disgiunti rispettivamente di  $x$  e del punto  $\infty$ . Gli interni di  $x$  sono aperti  $U$  di  $X$  tale che  $x \in U$ , mentre gli altri devono essere della forma  $\hat{X} \setminus K$  con  $\infty \in \hat{X} \setminus K$  con  $K$  chiuso compatto in  $X$ . Vogliamo che l'intersezione sia disgiunta

$$U \cap (\hat{X} \setminus K) = U \cap (X \setminus K) = \emptyset$$

fissato  $K$ , un tale aperto  $U$  tale che  $x \in U$ , esiste se e solo se  $x \in \text{int}(K)$ , che è l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $K$ , che è precisamente la condizione

$$U \cap (X \setminus K) = \emptyset$$

### Proposition

Sia  $Y$  uno spazio compatto e di Hausdorff e  $y \in Y$ . Allora, lo spazio topologico  $Y \setminus \{y\}$  con la topologia di sottospazio indotta da quella su  $Y$ , soddisfa le condizioni del risultato precedente, cioè è uno spazio di Hausdorff e ogni punto ammette un intorno compatto.

### Proof

$Y \setminus \{y\}$  è di Hausdorff in quanto sottospazio di uno spazio di Hausdorff. Resta da dimostrare l'esistenza degli interni compatti per ogni punto. Sia  $y \in Y \setminus \{y\}$ . Essendo  $Y$  di Hausdorff per ipotesi, esistono interni aperti  $U$  di  $y$  e  $U'$  di  $y'$  tali che  $U \cap U' = \emptyset$ . Allora,  $Y \setminus U$  è un chiuso di  $Y$  e essendo  $Y$  compatto,  $Y \setminus U \subseteq Y$  è compatto in quanto chiuso di un compatto (in  $Y$ ), ma vale anche  $y' \in Y \setminus U \subseteq Y \setminus \{y\}$ . L'appartenenza è data dal fatto che  $y' \in U' \subseteq Y \setminus U$ , e l'inclusione perché  $\{y\} \subseteq U$ . Quindi, se consideriamo  $Y \setminus U$  come sottospazio di  $Y \setminus \{y\}$  non cambia niente per transitività della topologia di sottospazio. Quindi,  $Y \setminus U$  è un chiuso e compatto di  $Y \setminus \{y\}$ . Abbiamo quindi trovato un intorno compatto (pure chiuso) di  $y'$ .

### Proposition

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'immersione aperta di spazi topologici di Hausdorff. Allora, l'applicazione  $g: Y \rightarrow \hat{X}$  data da  $y \rightarrow x$  se  $y = f(x)$ , che è ben posta in quanto  $f$  è iniettiva per ipotesi, mentre  $y \rightarrow \infty$  se  $y \notin f(X)$ , è continua.

### Proof

Mostriamo la continuità. Sia  $U$  un aperto di  $\hat{X}$ . Abbiamo due possibilità:

1.  $U \subseteq X$ , allora  $g^{-1}(U) = f(U)$  che è aperto essendo  $U$  aperto di  $X$  e  $f$  aperta per ipotesi;
2.  $U = \hat{X} \setminus K$ , allora  $g^{-1}(\hat{X} \setminus K) = Y \setminus f(K)$ . Questo è un aperto in quanto  $f(K)$  è un chiuso

di  $Y$  in quanto  $K$  è compatto, quindi  $f(K)$  è compatto in quanto continua, e allora essendo  $Y$  di Hausdorff è chiuso.

### Corollario

Sia  $Y$  spazio compatto di Hausdorff e  $y \in Y$ . Allora,  $Y$  è omeomorfo alla compattificazione di Alexandrov di  $Y \setminus \{y\}$ .

### Proof

Applichiamo la proposizione precedente con  $X = Y \setminus \{y\}$  e  $f = i: Y \setminus \{y\} \hookrightarrow Y$ . Questa è un immersione aperta, infatti  $Y$  è di Hausdorff e quindi  $T_1$ , cioè  $Y \setminus \{y\}$  è aperto. Abbiamo quindi una mappa continua  $g: Y \rightarrow Y \setminus \{y\}$ . Inoltre, è un omeomorfismo in quanto iniettiva ed è chiusa in quanto definita tra spazi entrambi compatti e di Hausdorff (corollario precedente).

Per esempio  $S^1 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}$ . Più in generale  $S^n$  è omeomorfa alla compattificazione di Alexandrov di  $\mathbb{R}^n$ .

## 4 Topologia quoziente

### Definizione

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione (tipicamente suriettiva) e  $X$  uno spazio topologico. La topologia quoziente su  $Y$  è la più fine che rende  $f$  continua.

Questo è un duale di quando abbiamo considerato la topologia meno fine per le mappe di inclusione. Caratterizzare questa dualità nel linguaggio categorico potrebbe essere una tesi.

La collezione di insiemi

$$\tau = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \text{ è aperto di } X\}$$

è effettivamente una topologia su  $Y$ , ed è quindi la topologia quoziente su  $Y$ .

Infatti:

1.  $\emptyset \in \tau$  in quanto  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  che è aperto di  $X$ .
2.  $Y \in \tau$  in quanto  $f^{-1}(Y) = X$  aperto di  $X$ ;
3. se  $A_1, A_2 \in \tau$  allora

$$f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)$$

4. sia invece  $\{A_i\}_{i \in I}$  allora

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

che è unione di aperti di  $X$

### Definizione

Una applicazione continua e suriettiva  $f: X \rightarrow Y$  è una *identificazione* se gli aperti di  $Y$  sono tutti e soli i sottoinsiemi  $A$  di  $Y$  tale che  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ .

La topologia quoziente è l'unica topologia su  $Y$  che rende  $f$  una identificazione. Inoltre,  $f$  è un'identificazione se vale l'analogo per i chiusi della condizione precedente, cioè se e solo se i chiusi di  $Y$  sono tutti e soli i sottoinsiemi  $C$  di  $Y$  tale che  $f^{-1}(C)$  è chiuso in  $X$ .

### Definizione

Sia  $f: X \rightarrow Y$  una mappa. Un sottoinsieme  $A$  di  $X$  si dice  $f$ -satturo se  $\forall x, x' \in X$  tali che  $f(x) = f(x')$ , allora  $x \in A$  se e solo se  $x' \in A$ .

$A \subseteq X$  è  $f$ -satturo se e solo se  $A = f^{-1}(B)$  per qualche sottoinsieme  $B \subseteq Y$ . Equivalentemente,  $A = f^{-1}(f(A))$ .

### Proposition

Se  $f: X \rightarrow Y$  è continua e suriettiva, allora  $f$  è un'identificazione se e solo se gli aperti di  $Y$  sono tutti e soli i sottoinsiemi di  $Y$  della forma  $f(A)$  dove  $A$  è un aperto  $f$ -satturo di  $X$ .

### Proof

Essendo  $f$  suriettiva, per tutte le  $B \subseteq Y$ ,  $B = f(f^{-1}(B))$ . D'altro canto,  $A$  è  $f$ -satturo se e solo se  $A = f^{-1}(f(A))$ .

### Proposition

Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'identificazione. Se  $A$  è un aperto  $f$ -satturo, allora  $f(A)$  è un aperto di  $Y$ .

### Proof

$f(A)$  è aperto di  $Y$  se e solo se  $f^{-1}(f(A))$  è aperto in  $X$ , ma  $f^{-1}(f(A)) = A$  siccome  $A$  è  $f$ -satturo.

Questo non implica che  $f$  sia aperta.

### Esempio

Sia  $f: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$  data  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ .  $f$  è continua e suriettiva, quindi è chiusa, e quindi è un'identificazione chiusa. Osserviamo che  $f$  non è un'identificazione aperta:  $[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2\pi]$  è un aperto di  $[0, 2\pi]$ . Ma quindi  $f([0, 1))$  è un arco di circonferenza aperto in un estremo e chiuso nell'altro, quindi non è un aperto di  $S^1$ .

Vediamo la proprietà universale delle identificazioni.

### Proposition

Sia  $f: X \rightarrow Y$  una identificazione e  $g: X \rightarrow Z$  un'applicazione continua. Allora esiste una e una sola applicazione continua  $h: Y \rightarrow Z$  tale che  $h \circ f = g$  se e solo se  $g$  è costante sulle fibre di  $f$ , cioè per tutte le  $x, x' \in f^{-1}(y)$ ,  $g(x) = g(x')$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ Y & & \end{array}$$

### Proof

Per definizione un'identificazione è suriettiva, quindi l'unicità di  $h$  segue direttamente. Cioè dato  $y \in Y$ , se  $y = f(x)$  allora  $h(y)$  deve necessariamente coincidere con  $g(x)$ . Iniziamo mostrando che la condizione che  $g$  sia costante sulle fibre è necessaria per l'esistenza di  $h$  tale che il diagramma commuti. Dire che  $x, x' \in f^{-1}(y)$  è equivalente a dire che  $f(x) = y = f(x')$ , e quindi  $h(f(x)) = h(f(x'))$ , cioè  $g(x) = g(x')$ . Mostriamo ora che è anche sufficiente. Come osservato sopra, la suriettività di  $f$  obbliga a definire  $h$  nel modo seguente: sia  $y \in Y$ ,  $y = f(x)$  allora  $h(y) \triangleq g(x)$ . Tale

definizione è ben posta in quanto  $g$  è costante sulle fibre di  $f$ .  $y = f(x) = f(x') \implies g(x') = g(x)$ . Ovviamente abbiamo  $h \circ f = g$  per definizione di  $h$ . Vogliamo anche che  $h$  sia continua. Sia  $B$  aperto di  $Z$ , quindi  $h^{-1}(B)$  è aperto in  $Y$ , ma ciò è equivalente, iscome  $f$  è una identificazione, a dire che  $f^{-1}(h^{-1}(B))$  è aperto in  $X$ . Ma ciò è uguale a  $(h \circ f)^{-1}(B)$  che è uguale a  $g^{-1}(B)$  in quanto  $g$  è continua per ipotesi.

### Esempio

Sia

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq \|x\|\}$$

Sia

$$S^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 1 = \|x\|^2 + y^2\}$$

Consideriamo  $f: D^n \rightarrow S^n$  data da

$$x \mapsto (2x\sqrt{1 - \|x\|^2}, 2\|x\|^2 - 1)$$

Chiaramente  $x/\|x\| = 1 \rightarrow (0, 1)$  e quindi  $f$  non è iniettiva. Tuttavia, lo diventa se la restringiamo all'interno di  $D^n$ . Infatti definisce un omeomorfismo sulla sua immagine in quanto

$$y < 1 \iff 2\|x\|^2 - 1 < 1 \iff \|x\| < 1$$

In tal caso  $x$  può essere chiaramente ricostruito mediante applicazione continua da  $z$  a  $y$ . Se  $y = 2\|x\|^2 - 1$  allora

$$\|x\| = \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

Sostituendo tale espressione in quella per  $z$  si arriva a ricostruire  $x$  in funzione di  $y$  e  $z$ . Notiamo che  $D^n$  è compatto in quanto chiuso e limitato, e  $S^n$  è di Hausdorff (per lo spazio metrico), quindi  $f$  è una identificazione continua da uno spazio compatto ad uno spazio di Hausdorff.

### Definizione

Sia  $A \subseteq X$  di uno spazio topologico  $X$ . Sia  $\sim_A$  la più piccola relazione di equivalenza su  $X$  che ha  $A$  come classe di equivalenza, cioè i punti tali che  $x, y \in A$ . Denotando  $X/A \triangleq X/\sim_A$ . Questo spazio, dotato della topologia quoziente, indotta dalla proiezione canonica  $\pi_A: X \rightarrow X/A$  è detto contrazione di  $A$  ad un punto.

### Definizione Nastro di Möbius

Let  $I = [0, 1]$  be the closed unit interval. Define the equivalence relation  $\sim$  on  $I$  generated by by  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ . The *Möbius strip* is defined as  $M = (I \times I)/\sim$ .

### Definizione Klein's Bottle

Let  $I = [0, 1]$  be the closed unit interval. Define the equivalence relation  $\sim$  on  $I$  generated by by  $(x, 0) \sim (x, 1)$  and  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ . The *Möbius strip* is defined as  $K = (I \times I)/\sim$ .

### Proposition

Sia  $f: X \rightarrow Z$  un'identificazione. Allora  $Z$  è di Hausdorff se e solo se per ogni coppia di punti  $x, y \in X$  tali che  $f(x) \neq f(y)$ , esistono due aperti  $f$ -saturi disgiunti  $A$  e  $B$  di  $X$  tali che  $x \in A$  e  $y \in B$ .

### Proof

$Z$  è di Hausdorff se e solo se per ogni  $x, y$  di  $X$  tali che  $f(x) \neq f(y)$ , esistono intorni aperti disgiunti  $U, V$  di  $Z$  tali che  $f(x) \in U$  e  $f(y) \in V$ .

( $\Rightarrow$ ) Abbiamo che  $x \in f^{-1}(U)$  e  $y \in f^{-1}(V)$  e

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

( $\Leftarrow$ ) Sia  $x \in A$  e  $y \in B$  aperti  $f$ -saturi di  $X$  disgiunti. Mostriamo che  $f(A)$  e  $f(B)$  sono degli aperti di  $Z$  tali che  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ .  $f(A)$  e  $f(B)$  sono aperti in quanto  $f$  è identificazione e  $A, B$  sono  $f$ -saturi (risultato precedente). Siano  $f(x) \in f(A)$  e  $f(y) \in f(B)$ . Sia  $z \in f(A) \cap f(B)$ . Chiaramente  $z = f(a) = f(b)$  per qualche  $a \in A$  oppure  $b \in B$ . Allora  $f(a) = z = f(b)$ . Siccome  $A$  è  $f$ -saturato allora  $b \in A$ . Siccome  $B$  è  $f$ -saturato allora  $a \in B$ . Ma quindi  $a, b \in A \cap B = \emptyset$ , che è assurdo.

### Teorema

Sia  $X$  uno spazio topologico compatto e di Hausdorff e sia  $f: X \rightarrow Y$  un'identificazione. The following are equivalent:

1.  $Y$  è di Hausdorff;
2.  $f$  è una identificazione chiusa;
3. il sottoinsieme di  $X \times X$  dato da

$$K = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

è chiuso in  $X \times X$ .

### Proof

1. (1)  $\Rightarrow$  (3) :  $Y$  è di Hausdorff se e solo se la diagonale  $\Delta Y \subseteq Y \times Y$  è chiusa. Possiamo esprimere  $K$  come

$$K = (f \times f)^{-1}(\Delta Y)$$

e  $f \times f$  è continua per la proprietà universale del prodotto. Quindi  $K$  è chiuso in quanto controimmagine di un chiuso.

2. (3)  $\Rightarrow$  (2) : sia  $A$  chiuso di  $X$ . Per ipotesi, le due proiezioni canoniche  $p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$  sono chiuse, essendo  $X$  compatto e pure di Hausdorff. Possiamo esprimere

$$f^{-1}(f(A)) = p_1(K \cap p_2^{-1}(A))$$

3. (2)  $\Rightarrow$  (1) : siano  $a, b \in Y$  tale che  $a \neq b$ . Consideriamo le fibre  $A = f^{-1}(a)$  e  $B = f^{-1}(b)$ . Essendo  $f$  suriettiva,  $a = f(x)$  per qualche  $x$  e  $b = f(x')$  per qualche  $x'$ . Quindi,  $\{a\} = f(\{x\})$  e  $\{b\} = f(\{x'\})$  dove i singoletti sono chiusi siccome  $X$  è di Hausdorff e quindi è anche  $T_1$ . Allora,  $\{a\}$  e  $\{b\}$  sono chiusi in  $Y$  essendo  $f$  chiusa. Quindi,  $A$  e  $B$  sono dei chiusi di  $X$ , in quanto controimmagini di chiusi, e quindi compatti (essendo  $X$  compatto). Allora la condizione  $A \cap B = \emptyset$  può essere espressa come

$$A \times B \subseteq (X \times X \setminus \Delta X) = W$$

in quanto quest'ultimo insieme è di Hausdorff per ipotesi. Allora possiamo applicare il teorema di Wallace che ci garantisce l'esistenza di aperti  $U, V$  che circondano i due compatti  $A \subseteq U, B \subseteq V$  e  $U \times V \subseteq W$  che è equivalente a dire  $U \cap V = \emptyset$ . Tornando indietro abbiamo

$$Y = f(X) = f((X \setminus U) \cup (X \setminus V)) = f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)$$

quindi abbiamo unione di due chiusi essendo  $f$  identificazione chiusa. Ora, per concludere, poniamo  $U' = Y \setminus f(X \setminus U)$  e  $V' = Y \setminus f(X \setminus V)$ . Abbiamo quindi trovato due intorni dei miei due punti  $a, b$  in  $Y$ . Quindi  $f^{-1}(a) = A \subseteq U$  and  $f^{-1}(b) = B \subseteq V$ . Chiaramente

$a \in U'$  in quanto se così non fosse avremmo  $a \in f(X \setminus U)$  ovvero esisterebbe  $x \notin U$  tale che  $a = f(x) \implies b \in V'$ . Mostriamo che  $U'$  e  $V'$  sono disgiunti:

$$\begin{aligned} U' \cap V' &= (Y \setminus f(X \setminus U)) \cap (Y \setminus f(X \setminus V)) \\ &= Y \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)) \\ &= Y \setminus f(X \setminus U) \cup (X \setminus V) \\ &= Y \setminus f(X) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

### Esempio 5.11

Consideriamo l'ipercubo  $I = [0, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$  e il suo bordo  $\partial I = [0, 1]^n \setminus (0, 1)^n$ . Mostriamo che  $I^n / \partial I^n$  è omeomorfo a  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Sappiamo che vi è una identificazione fra  $D^n$  e  $S^n$  che contrae  $\partial D^n$  ad un punto di  $S^n$ . Dimostriamo ora che  $D^n \cong I^n$  costruendo un omeomorfismo che manda  $\partial D^n$  in  $\partial I^n$ . Supponiamo, a tal scopo, di avere una applicazione continua  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\Phi(tx) = t\Phi(x)$  per  $t \geq 0$ . Quindi per esempio  $\Phi$  potrebbe essere  $\|\cdot\|$ . Supponiamo inoltre che esistano delle costanti positive  $m, M > 0$  tale che

$$m\|x\| \leq \Phi(x) \leq M\|x\|$$

Consideriamo le applicazioni  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definite ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{x}{\|x\|} \Phi(x) & x \neq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{y\|y\|}{\Phi(x)} \Phi(x) & x \neq 0 \end{cases}$$

sono entrambe funzioni continue e una l'inversa dell'altra. Adessp, ponendo  $A = \{x \mid \Phi(x) \leq 1\}$  e  $D = \{y \mid \|y\| \leq 1\}$  vediamo che  $f, g$  si restringono a funzioni (continue) fra  $A, D$  e danno luogo ad un omeomorfismo fra i due. Dobbiamo quindi verificare:

1.  $x \in A \implies f(x) \in D$ : sappiamo che  $x \in A$  se e solo se  $\Phi(x) \leq 1$ . La norma della funzione è

$$\|f(x)\| = \frac{x}{\|x\|} \Phi(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|} \Phi(x) \leq 1$$

2.  $y \in D \implies g(y) \in A$ : sappiamo che  $y \in D$  se e solo se  $\|y\| \leq 1$  e  $g(y) \in A$  se e solo se  $\Phi(g(y)) \leq 1$ , ma espandendo il valore questo è  $\|y\| \leq 1$ .

Dato un  $x = (x_1, \dots, x_n)$  scegliamo

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

in quanto  $\Phi \leq 1$  se e solo se  $|x_i| \leq 1$  che equivale a dire  $x_i \in [-1, 1]$ . Quindi  $[-1, 1]^n = \{x \mid \Phi(x) \leq 1\}$ . Chiaramente vale la omogeneità. Per ciò che concerne l'uguaglianza notiamo che

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{n}} \leq \max\{|x_i|\} \leq \|x\|$$

Per la prima uguaglianza bastare notare che  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , e ponendo  $C = \max\{|x_i|\}$  allora  $\|x\| \leq \sqrt{n}C^2 = \sqrt{n}C$ . La seconda disuguaglianza vale se e solo se  $|x_i| \leq \|x\|$  se e solo se  $x_i^2 \leq \|x\|^2$  cioè

$$x_i^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2$$

che è sempre vero.

## 4.1 Quoziente per gruppi di omomorfismo

Dare una azione  $*$  di un gruppo  $(G, \circ)$  su un insieme  $X$  equivalente precisamente a definire un omomorfismo di gruppi  $\tau: (G, \circ) \rightarrow (\text{Bijections}(X), \circ)$  with respect to composition. Chiaramente  $\tau_1 = 1_X$

e

$$\begin{aligned}\tau_{g_1 \cdot g_2}(x) &= (\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2})(x) \\ (g_1 \cdot g_2)* &= \tau_{g_1}(\tau_{g_2}(x)) \\ &= g_1 * (g_2 * x)\end{aligned}$$

Supponiamo ora che  $X$  sia uno spazio topologico. Definiamo un'azione (sinistra) di  $(G, \circ)$  su  $X$  come un omomorfismo di gruppi

$$(G, \circ) \rightarrow (\text{Omeo}(X), \circ, 1_X)$$

### Definizione

$G$  si dice gruppo di omeomorfismo su  $X$  se  $G$  è un sottogruppo di  $(\text{Omeo}(X), \circ)$ .

Chiaramente  $\text{Omeo}(X)$  è un gruppo di omeomorfismo su  $X$ , cioè agisce naturalmente su  $X$  con l'azione  $(f, x) \rightarrow f(x)$ .

Dato un gruppo di omeomorfismi  $G$  su  $X$ , consideriamo la relazione di equivalenza su  $X$  data da:  $x \sim y$  se e solo se esiste  $g \in G$  tale che  $y = g * x$ . L'insieme quoziente  $X/G \triangleq X/\sim$  si chiama l'insieme delle orbite dell'azione di  $G$  su  $X$ . Lo muniamo della topologia quoziente.

### Proposition

Sia  $G \subseteq \text{Omeo}(X)$  un gruppo di omeomorfismi su  $X$ . Abbiamo quindi la proiezione  $\pi: X \rightarrow X/G$ . Allora,  $\pi$  è aperta, e se  $G$  è finito,  $\pi$  è anche chiusa.

### Proof

Sia  $A \subseteq X$ . Allora

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A) = \bigcup_{g \in G} \tau_g(A) = \bigcup_{g \in G} \{x * x \mid x \in A\}$$

Se  $A$  è aperto, siccome  $\tau_g$  è un omeomorfismo, quindi manda un aperto in un aperto,  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è aperto in quanto unione di aperti. Se  $A$  è chiuso e  $G$  è finita,  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è chiuso in quanto unione finita di chiusi.

### Proposition

Sia  $G$  un gruppo di omeomorfismo su uno spazio topologico  $X$ . Allora  $X/G$  è di Hausdorff se e solo se

$$K = \{(x, g * x) \mid x \in X, g \in G\}$$

è chiuso.

### Proof

Sappiamo che  $\pi: X \rightarrow X/G$  è aperta. Quindi  $\pi \times \pi: X \times X \rightarrow X/G \times X/G$  è quindi aperta. Inoltre  $\pi$  è suriettiva e quindi  $\pi \times \pi$  è anch'essa suriettiva. Allora  $\pi \times \pi$  è una identificazione aperta.  $X/G$  è di Hausdorff se e solo se la diagonale  $\Delta_{X/G}$  è chiusa in  $X/G \times X/G$ . Ma siccome  $\pi \times \pi$  è una identificazione,  $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/G})$  chiuso in  $X \times X$ , ma è uguale  $\{(x, x') \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(x')\}$ , ma la condizione è equivalente a dire che  $x' = g * x$  per qualche  $g \in G$ , quindi è uguale a  $K$ .

### Proposition

Sia  $G$  un gruppo di omeomorfismi su uno spazio topologico  $X$ . Sia  $X$  di Hausdorff. Supponiamo che esista un sottoinsieme  $A$  di  $X$  aperto tale che:

1.  $\pi|_A: A \rightarrow X/G$  è suriettiva.



2. l'insieme  $\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$  è finito.  
Allora,  $X/G$  è Hausdorff.

### Proof

Grazie a (2) possiamo scrivere

$$\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\}$$

Siano  $p, q \in X/G$  tali che  $p \neq q$ . Allora  $p = \pi(x)$  e  $q = \pi(y)$  per qualche  $x, y \in A$ . Siccome  $p \neq q$  in  $X/G$  appartengono ad orbite disgiunte, quindi  $x \neq g_i(y)$ . Siccome  $X$  è di Hausdorff, per ogni  $i$  esistono intorni aperti  $U_i$  e  $V_i$  disgiunti tali che  $x \in U_i$  e  $g_i(y) \in V_i$ . Vogliamo una scelta uniforme che non dipenda da  $i$ , quindi consideriamo l'intersezione

$$U \triangleq A \cap \bigcap_{i=1}^n U_i, \quad V \triangleq A \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(V_i)$$

Quindi  $y \in A$  e  $g_i(y) \in V_i$  e quest'ultima è equivalente a dire che  $y \in g_i^{-1}(V_i)$ . Mostriamo che  $U \cap g(V) = \emptyset$  per tutti i  $g \in G$ . Distinguiamo due casi:

1.  $g \notin \{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$  : questo equivale precisamente a dire che  $g \neq g_i$  per tutte le  $i$ . Abbiamo che  $g(A) \cap A = \emptyset$ . Ciò implica che  $g(V) \cap U \subseteq g(A) \cap A = \emptyset$
2.  $g \in \{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$  :, quindi  $g = g_i$  per qualche  $i$ . In questo caso, siccome  $U \subseteq U_i$  e  $V \subseteq g_i^{-1}(V_i)$ , abbiamo che

$$U \cup g_i(V) \subseteq U_i \cap V_i = \emptyset$$

Mostriamo che gli aperti

$$\bigcup_{g \in G} g(U), \quad \bigcup_{h \in G} h(V)$$

ottenuti "saturando" rispettivamente  $U$  e  $V$  sono ancora disgiunti

$$\left( \bigcup_{g \in G} g(U) \right) \cap \left( \bigcup_{h \in G} h(V) \right) = \bigcup_{g, h \in G} g(U) \cap h(V) = \bigcup_{g, h \in G} \emptyset = \emptyset$$

il termine è l'insieme vuoto in quanto  $g^{-1}(g(U) \cap h(V))$  è pari a  $U \cap (g^{-1}h)(V)$  che è l'insieme vuoto. Quindi, grazie ad una proposizione scorsa,  $\pi(U')$  e  $\pi(V')$ , in cui ci sono  $p, q$ , sono aperti disgiunti di  $X/G$  contenenti due punti  $p$  e  $q$ .

### Esempio 5.18

Sia  $G \subseteq \text{Omeo}(\mathbb{R}^n)$  tale che  $g \in G$  se e solo se esiste  $a \in \mathbb{Z}^n$  tale che  $g(x) = a + x$  per tutte le  $x \in \mathbb{R}^n$ . Allora  $\mathbb{R}^n/G$  è di Hausdorff.

### Proof

Possiamo applicare la proposizione precedente prendendo

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1\}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  prendiamo la parte intera. Resta da verificare  $\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$  è finito. Sia  $g \in G$ , che è come dire che esiste  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  tale che la condizione è soddisfatta. Allora  $A \cap g(A) \neq \emptyset$  dove  $g(A) = A + a$ . Esiste  $x \in A$  tale che  $x \in A + a$  e  $x = y + a$  per qualche  $y \in A$ . Ma allora  $a = (y + a) - y$  dove  $x = x + y$ , quindi  $a_i = x_i - y_i$ . Allora  $|a_i| = |x_i - y_i| \leq |x_i| + |y_i| < 2$ . Quindi, vi è solo un numero finito di possibili elementi  $a$  che soddisfano la condizione, quindi anche l'insieme è finito.

Se  $G$  è finito e  $X$  è di Hausdorff allora  $X/G$  è di Hausdorff. Ciò segue dalla proposizione precedente con  $A = X$ .

## 4.2 Spazi proiettivi reali

### Definizione Spazio proiettivo

Consideriamo  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$  dove  $x \sim y$  se e solo se  $\exists y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x = \lambda y$ , che è il quoziente per l'azione del gruppo delle omotetie. Questo è lo spazio proiettivo reale di dimensione  $n$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \triangleq (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ .

Sia  $\pi(x) = [x]$ . Per ogni  $i = 0, \dots, n$  definiamo

$$A_i = \{[(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

aperto dello spazio proiettivo, Allora  $\pi^{-1}(A_i) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\}$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

Abbiamo che

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n A_i$$

che sono tutti elementi omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ . Quindi lo spazio proiettivo si può ricoprire con elementi omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ .

Notiamo che  $x \sim x/||x||$ . Rappresentiamo lo spazio proiettivo usando  $S^n$ . Dati  $x, y \in S^n$ ,  $x \sim y$  se e solo se esiste  $\lambda \neq 0$  tale che  $y = \lambda x$ . Ma quindi

$$\begin{aligned} ||y|| &= ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \\ |y| &= 1 \end{aligned}$$

Quindi  $\lambda = 1$  oppure  $\lambda = -1$ . Allora  $\sim$  ristretta a  $S^n$  è generata dal gruppo finito  $\mathbb{Z}_2 = \{\text{Id}, -\text{id}\}$ . Allora possiamo costruire il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xleftarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{r} & S^n \\ \pi|_{S^n} \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi|_{S^n} \\ S^n/\sim & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f^{-1}} & S^n/\sim \end{array}$$

dove  $r(x) = x/||x||$  e  $f([x]) = [x]$ . Possiamo quindi concludere che lo spazio proiettivo è di Hausdorff in quanto quoziente dello spazio  $S^n$  che è di Hausdorff.

## 4.3 Spazi proiettivi complessi

### Definizione Spazio proiettivo

Consideriamo  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$  dove  $x \sim y$  se e solo se  $\exists y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid x = \lambda y$ , che è il quoziente per l'azione del gruppo delle omotetie. Questo è lo spazio proiettivo complesso di dimensione  $n$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \triangleq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ .

Come prima possiamo rappresentare lo spazio con  $S^{2n+1}$  e quindi è compatto e connesso. Vogliamo mostrare che è pure di Hausdorff. Consideriamo

$$K = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \mid x = \lambda y\}$$

questi elementi sono come matrici  $2 \times (n+1)$  a coefficienti complessi. La condizione di proporzionalità della righe della matrice equivale precisamente alla condizione di avere rango 1, la quale è equivalente a richiedere che tutti i determinanti minori di ordine 2 si annullino. Ma tali condizioni si esprimono attraverso equazioni, quindi danno luogo a un sottoinsieme chiuso. Quindi  $K$  è chiuso e lo spazio proiettivo è di Hausdorff.

## 5 Topologia algebrica

### Definizione Costruzione invariante

Una costruzione invariante su spazi topologici è una funzione  $f$  tale che se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi allora  $f(X)$  e  $f(Y)$  sono isomorfi, nel senso della categoria a cui appartengono gli oggetti  $f(X)$  e  $f(Y)$ .

### Definizione Componente connesse per archi

Sia  $X$  spazio topologico. Sia  $\pi_0(X) = X/\sim$  dove  $\sim$  è relazione di equivalenza data da

$$x \sim y \iff \exists \alpha[0, 1] \rightarrow X \mid \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y$$

sono le componenti connesse per archi di  $X$ .

È chiaramente una relazione di equivalenza.

Data una funzione continua  $f$ ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/\sim & \xrightarrow{\pi_0(f)} & Y/\sim \end{array}$$

dove  $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  data da  $[x] \rightarrow [f(x)]$ . Tale definizione è ben posta in quanto dato un cammino  $\alpha$  fra due rappresentanti  $x, x'$  allora nell'immagine possiamo considerare  $f \circ \alpha$ . Inoltre,  $\pi_0$  soddisfa le proprietà di funtorialità:

1.  $\pi_0(1_X) = 1_{\pi_0(X)}$ ;
2.  $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$ .

### 5.1 Omotopia

#### Definizione

Due applicazioni continue  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  tra spazi topologici si dicono *omotope* se esiste una applicazione continua

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

che porta  $(x, t) \rightarrow H(x, t)$  data da:

1.  $H(x, 0) = f_0(x)$ ;
2.  $H(x, 1) = f_1(x)$

per tutte le  $x \in X$ . Una tale applicazione viene detta *omotopia* da  $f_0$  a  $f_1$ .

È quindi una deformazione continua.

#### Proposition

Sia  $X, Y$  spazi topologici e sia  $C(X, Y)$  l'insieme delle applicazioni continue. Allora, la relazione  $\sim$  su  $C(X, Y)$  fra le mappe omotope è una relazione di equivalenza.

#### Proof

1. Chiaramente  $f \sim f$  mediante omotopia costante  $H(x, t) = f(x)$ .
2. Sia  $f \sim g$  tramite  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ . Allora  $g \sim f$  tramite  $G = H(x, 1 - t)$ .
3. Siano  $f \sim g$  e  $g \sim h$  tramite  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  e  $K: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  rispettivamente. Allora

$f \sim h$  mediante

$$L(x, t) \triangleq \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

## 5.2 Incollamento di funzioni continue

Siano  $A_i \subseteq X$  una famiglia arbitraria di sottoinsiemi e  $f_i: A_i \rightarrow Y$  mappe continue tali che  $\forall i, j \in I$

$$f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$$

Possiamo quindi definire

$$f: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow Y$$

data da  $x \rightarrow f(x) = f_i(x)$  se  $x \in A_i$ . Questa funzione è ben definita ed è continua se:

1. gli  $A_i$  sono tutti aperti in  $X$ ;
2.  $I$  è finito e gli  $A_i$  sono tutti chiusi.

Per la proprietà di transitività della topologia di sottospazio abbiamo che

1. Se  $V$  è aperto di  $Y$

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$$

che è unione di aperti in  $X$  e quindi aperti in  $\bigcup A_i$  per transitività della topologia di sottospazio;

2. Se  $C$  è chiuso di  $Y$

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(C)$$

che è unione di chiusi in  $A_i$ , che è chiuso in  $\bigcup A_i$  in quanto unione finita di chiusi, e quindi chiuso per transitività della topologia di sottospazio.

## 6 Esercizi 21 ottobre

### Esercizio

Siano  $f, g$  omeomorfismi, allora la loro composizione (se esiste) è un omomorfismo e l'inverso è un omomorfismo. Quindi  $\text{Omeo}(X)$  è un gruppo. Siano  $X, Y, Z$  spazi tali che  $f: Y \rightarrow Z$  e  $g: X \rightarrow Y$ . Per definizione l'inverso è un omeomorfismo. Siccome  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$  se gli inversi sono omeomorfismo allora è un omeomorfismo. Quindi è un gruppo.

## 7 Esercizi 11 novembre

### Esercizio Esercizio 5.3 Manetti

Siano  $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow W$  due identificazioni aperte. Mostrare che  $f \times g: X \times Y \rightarrow Z \times W$  è una identificazione aperta.

### Soluzione

Dobbiamo mostrare che  $A \subseteq Z \times W$  è aperto se  $(f \times g)^{-1}(A)$  è aperto. L'altra direzione è ovvia. Notiamo che  $f, g$  sono suriettive, quindi anche il prodotto lo è. In particolare  $A = (f \times g)((f \times g)^{-1}(A))$ . Supponiamo che  $(f \times g)^{-1}(A)$  sia aperto, cioè che

$$(f \times g)^{-1}(A) = \bigcup (U_i, V_i)$$

dove  $U_i \subseteq X$  e  $V_i \subseteq Y$  aperti. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} A &= (f \times g)\left(\bigcup (U_i, V_i)\right) \\ &= \bigcup (f \times g)(U_i, V_i) \\ &= \bigcup f(U_i) \times g(V_i) \end{aligned}$$

che è aperto in quanto  $U_i, V_i$  sono aperti.

### Esercizio 5.4 Manetti

Sia  $f: X \rightarrow Y$  una identificazione. Mostrare che se le componenti connesse di  $X$  sono aperte allora anche le componenti connesse di  $Y$  sono aperte.

### Soluzione

Sia  $Y_i$  una componente connessa di  $Y$ . Vogliamo mostrare che  $f^{-1}(Y_i)$  è aperta. Sia  $x_0 \in f^{-1}(Y_i)$  e sia  $X_j$  la componente connessa di  $x_0$ . Allora  $f(X_j)$  è connesso e  $f(X_j) \cap Y_i \ni f(x_0)$  cioè  $f(X_j) \cap Y_i \neq \emptyset$ . Allora  $f(X_j) \cup Y_i$  è connesso e  $f(X_j) \subseteq Y_i$  per massimalità di  $Y_i$  connesso. Quindi  $X_j \subseteq f^{-1}(Y_i)$ . Abbiamo quindi provato che  $\forall x_0 \in f^{-1}(Y_i)$  le componenti connesse  $X_j$  di  $x_0$  è contenuta in  $f^{-1}(Y_i)$ . Quindi  $f^{-1}(Y_i)$  è unione disgiunta di componenti connesse di  $X$ , che sono aperte per ipotesi e quindi  $f^{-1}(Y_i)$  è aperto.

### Esercizio 5.5 Manetti

Sia  $f: X \rightarrow X$  una identificazione tale che le fibre  $f^{-1}(y)$  siano tutte connesse. Provare che ogni sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto di  $X$  è saturo. Dedurre che se  $Y$  è connesso, allora anche  $X$  è connesso.

### Soluzione

Sia  $Y \subseteq X$  aperto e chiuso e sia  $y \in Y$ . Vogliamo provare che  $f^{-1}(f(y)) \subseteq Y$ . Siccome  $f^{-1}(f(y))$  è connesso,  $f^{-1}(f(y)) \cap Y$  aperto e chiuso in  $f^{-1}(f(y))$  e chiaramente contiene  $y$ .  $f^{-1}(f(y)) \cap Y = f^{-1}(f(y))$  per connessione di quest'ultimo vale  $f^{-1}(f(y)) \subseteq Y$ . Supponiamo  $Y$  connesso. Per assurdo sia  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  aperti e chiusi. Perché sono saturi,  $f(A)$  e  $f(B)$  sono aperti

$$f(A) \cup f(B) = Y$$

poiché  $f$  è suriettiva. Se  $x \in f(A) \cap f(B)$  allora  $f^{-1}(x) \subseteq A$  e  $f^{-1}(x) \subseteq B$ , ma dovrebbero essere aggiunti che è assurdo.

### Esercizio 5.6 Manetti

Siano  $f: X \rightarrow Y$  una identificazione aperta ed  $A \subseteq X$  un sottoinsieme saturo; dimostrare che  $A^\circ$  e  $\bar{A}$  sono saturi. Mostrare con un esempio che ciò è generalmente falso se  $f$  è una identificazione chiusa.