

# Analisi III

Paolo Bettelini

## Contents

1	Successione di funzioni	1
2	Serie di funzioni	3
3	Integrazione	4
4	Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$	22
5	Esercizi	31

## 1 Successione di funzioni

### Definizione Successione di funzioni

Una *successione di funzioni* è una famiglia di funzioni  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definite su un dominio comune  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Definizione Convergenza in un punto

Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni. La successione converge in un punto  $x_0$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) < \infty$$

### Definizione Convergenza puntuale

Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni. La successione *converge puntualmente* ad una funzione  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  se

$$\forall x \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Quindi la successione converge in ogni punto, ma la velocità di convergenza può dipendere dal punto.

### Definizione Convergenza uniforme

Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni. La successione *converge uniformemente* ad una funzione  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  se

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ .

Oppure possiamo dire che la condizione è che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n > N, \|f_n - f\|_{\infty, E} < \varepsilon$$

Dovremmo dire che la differenza

$$|f_n(x) - f| \leq \varepsilon$$

ma siccome ciò deve valere per tutte le  $x$  possiamo utilizzare il supremum.

Quindi la velocità di convergenza è la stessa in ogni punto. Ogni cosa che converge uniformemente converge puntualmente.

### Definizione Convergenza uniformemente di Cauchy

Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni. La successione è *uniformemente di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N, \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

A partire da un certo indice, tutte le funzioni della successione sono molto vicine tra loro in modo uniforme su tutto  $D$ , indipendentemente dalla funzione limite.

### Teorema Convergenza uniforme e convergenza uniformemente di Cauchy

Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni. Se la successione è uniformemente di Cauchy allora è uniformemente convergente.

### Teorema

Sia  $\{f_n\}$  convergente uniformemente a  $f$  in  $E$  e sia  $x_0 \in E$  un punto di accumulazione di  $E$ . Supponiamo che esista

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lambda_n$$

per ogni  $n$ , allora

1.  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ,
- 2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

### Proof

1.

$$|\lambda_n - \lambda_m| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \|f_n - f_m\|_{\infty, E} < \varepsilon$$

dunque è di Cauchy e converge al limite  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ .

2.

$$\begin{aligned} |f(x) - \lambda| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| \\ &\leq \|f - f_n\|_{\infty, E} + |f_n(x) - \lambda_n| \end{aligned}$$

dunque se  $\bar{n} = \max\{N_1, N_2\}$

$$|f(x) - \lambda| \leq 2\varepsilon + |f_{\bar{n}}(x) - \lambda_{\bar{n}}| \leq 3\varepsilon$$

quindi

$$f_{\bar{n}}(x) - \lambda_{\bar{n}} \leq \varepsilon$$

Quindi, se abbiamo convergenza uniforme,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \\ &= \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) \end{aligned}$$

possiamo scambiare l'ordine.

### Corollario

Se  $f_n$  sono continue e  $f_n \rightarrow f$ , allora  $f$  è continua.

### Teorema

Sia  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni R-integrabili dove  $f_n \rightarrow f$  in  $[a, b]$ . Allora  $f$  è R-integrabile e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

### Proof

Supponiamo anche che  $f_n$  siano continue.

1.  $f$  è continua e quindi R-integrabile;
2. mostriamo che vale l'uguale, cioè  $\forall m, n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} dx \leq \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

(cioè tende a zero) per  $n \geq N$ .

### Teorema

Sia  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

1.  $\exists x_0 \in [a, b]$  tale che  $f_n$  converge in  $x_0$ ;
2.  $f'_n$  converge uniformemente in  $g$  a  $[a, b]$ .

Allora,

1.  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $[a, b]$ ;
2.  $f$  è derivabile;
3.  $f'(x) = g(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

## 2 Serie di funzioni

### Definizione Convergenza uniforme

La serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente ad una funzione  $S(x)$  se la successione delle somme parziali

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

converge uniformemente a  $S(x)$ , ovvero se

$$\sup_{x \in D} |S_N(x) - S(x)| \rightarrow 0$$

per  $N \rightarrow \infty$ .

È più forte della convergenza puntuale.

### Definizione Convergenza totale

Una serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge *totalmente* su un insieme  $D$  se la serie di norme

$$\sum \|f_n\|_{\infty}$$

converge.

Ricordiamo che in generale la norma

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e per  $p = \infty$  con  $f$  limitata

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

che è un numero siccome  $f$  è limitata

### Teorema

XXXX. Se ho la convergenza uniforme posso invertire integrale e serie.

## 3 Integrazione

### Teorema Monotone convergence theorem for non-negative measurable functions

Let  $(X, \Sigma, \mu)$  be a measurable space and let

$$f_n : X \rightarrow [0; +\infty)$$

be measurable such that  $f_n \leq f_{n+1}$ . Then,

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X (\lim_n f_n) d\mu$$

Sia per esempio  $f_n = \chi_{\{1\}} + \chi_{\{n\}}$ . Allora la funzione converge puntualmente in quanto l'1 si sposta sempre più a destra. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = 2 \rightarrow 2$$

Se invece  $f_n \geq f_{n+1}$  allora  $f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}}$ , allora tende a zero. Tuttavia, l'integrale di  $f_n$  è infinito in quanto la misura dell'insieme è infinita.

### Proof

Abbiamo

$$f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f, \quad f = \lim_n f_n$$

Quindi

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq \int_X f d\mu$$

quindi anche la successione degli integrali è monotona e ammette limite. Il limite sarà sempre

più piccolo dell'ultimo valore.

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Facciamo ora il caso  $\geq$ . Sia  $0 \leq \varphi \leq f$  una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{E_i}, \quad \alpha_i \geq 0$$

e prendiamo  $c \in (0, 1)$ . Consideriamo gli insiemi

$$A_n = \{f_n \geq c\varphi\}$$

Tali insiemi sono misurabili, in quanto sto moltiplicando una funzione misurabile per una costante e l'insieme  $\{f \geq g\}$  è come dire  $\{f - g \geq 0\}$ . Sappiamo

1.  $A_n \subseteq A_{n+1}$  in quanto  $c\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ;
2.  $\bigcup A_n = X$ . Sia  $x \in X$ . Se  $\varphi(x) = 0$  allora è in  $A_n$ . Se invece  $\varphi(x) > 0$ , ma siccome  $\varphi \leq f$ , e  $c < 1$ , allora

$$c\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$$

La successione, da un certo posto in poi, è più grande di  $c\varphi(x)$  (ne basta uno), quindi  $x \in A_n$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} E_i &= E_i \cap X \\ &= E_i \cap \left(\bigcup A_n\right) \\ &= \bigcup_n (E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Quindi  $E_i \cap A_n \subseteq E_i \cap A_{n+1}$  è una successione di insiemi che si sta allargando. Quindi, la misura dell'union è il limite.

$$\mu(E_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_i \cap A_n)$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_X f_n d\mu &\geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq c \int_{A_n} \varphi d\mu \\ &= c \int_X \varphi \chi_{A_n} d\mu = c \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Facciamo ora il limite

$$\begin{aligned} \lim_n \int_X f_n d\mu &\geq c \lim_n \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \\ &= c \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i) = c \int_X \varphi d\mu \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \geq c \int_X \varphi d\mu$$

vale per tutti i  $c \in (0, 1)$ , e allora possiamo usare il supremum

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \geq \int_X \varphi d\mu$$

Non solo vale per ogni  $c$ , ma per ogni funzione semplice tale che  $0 \leq \varphi \leq f$ . In particolare anche per il supremum. Il supremum di questi integrali al variare di tutte le funzioni semplici minori di  $f$  è l'integrale di  $f$ , cioè la definizione

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$$

Mettendo assieme le due cose otteniamo l'uguaglianza

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

### Corollario

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$$

### Proof

Siccome i termini sono tutti positivi, la successione delle serie parziale è monotona.

### Lemma Lemma di Fatou

Sia  $f_n: X \rightarrow [0, +\infty)$  misurabili, allora

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$$

(l'integrale esiste sempre)

### Proof

Consideriamo

$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k$$

chiaramente  $g_n \leq g_{n+1} \rightarrow \liminf f_n$  e sono misurabili. Consideriamo allora l'integrale

$$\lim \int_X g_n d\mu = \int_X \liminf f_n d\mu$$

e per il teorema della convergenza monotona e definizione di  $\liminf$

$$\begin{aligned} \int_X \liminf f_n d\mu &= \lim_n \int_X (\inf_{k \geq n} f_k) d\mu \\ &\leq \liminf \int_X f_n d\mu \end{aligned}$$

### Definizione Integrabilità di una funzione positiva

Sia  $f: X \rightarrow [0; +\infty)$  misurabile. Allora  $f$  è *integrabile* su  $X$  se

$$\int_X f d\mu < \infty$$

Diciamo che  $f \in L^1(\{X, \Sigma, \mu\})$ . Per esempio  $\{1/n^2\} \in L^1(\mathbb{N})$  ma  $\{1/n\} \notin L^1(\mathbb{N})$

**Definizione Integrabilità di una funzione**

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile. Allora  $f$  è *integrabile* se  $f^+$  e  $f^-$  sono integrabili (che sono entrambe funzioni positive).

Dobbiamo tuttavia definire l'integrale di una funzione di segno arbitraria. Sia allora

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Consideriamo per esempio

$$f = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$$

Allora

$$f^+ = (1, 0, \frac{1}{3}, 0)$$

e

$$f^- = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$$

L'integrale non converge in quanto i due integrali non convergono (le serie divergono per confronto asintotico).

**Proposition**

Siano  $f, g \in L^1$ .

1.  $\alpha f + \beta g \in L^1$  e

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

Quindi lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale.

- 2.

$$f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

3.  $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$ . Infatti  $f^+ f^- = |f|$  e per la direzione inversa abbiamo  $0 \leq f^+ \leq |f|$ . Ma se l'integrale del modulo è finito allora lo sarà anche quello di  $f^+$  che è più piccolo. Lo stesso vale per la parte negativa.
4. Se  $f$  è misurabile allora lo è anche  $|f|$ , ma il viceversa non è vero. Per esempio sia  $X = \{a, b, c\}$  e  $\Sigma = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ . Sia allora

$$f = \begin{cases} 1 & x = a \vee x = b \\ -1 & x = c \end{cases}$$

Chiaramente  $\{f < 0\} = \{c\}$  non è misurabile, ma  $|f| = 1$  per tutte le  $x$  e le funzioni costanti sono sempre misurabili.

- 5.

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 \left| \int_X (f^+ - f^-) d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \\
 &\leq \left| \int_X f^+ d\mu \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right| \\
 &= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu \\
 &= \int_X (f^+ + f^-) d\mu \\
 &= \int_X |f| d\mu
 \end{aligned}$$

### Teorema Teorema della convergenza dominante

Sia  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e sia  $f = \lim_n f_n$ . Supponiamo che ci sia  $g \in L^1$  tale che  $|f_n| \leq g$  in  $X$ . Allora

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

### Proof

$f_n$  sono integrabili in quanto  $|f_n| \leq g$  che è integrabili, quindi sarà finito anche l'integrale del modulo, e  $f$  è integrabile perché ciò vale anche per il limite. Allora  $|f - f_n| \leq 2g$  quindi  $2g - |f - f_n| \geq 0$ . Siccome quest'ultima è una successione positiva posso applicare il lemma di Fatou

$$\int_X \liminf (2g - |f - f_n|) d\mu \leq \liminf \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu$$

Ma per le proprietà dei  $\liminf$  possiamo estrarre la costante

$$\begin{aligned}
 \int_X 2g - \lim |f - f_n| &= \int_X 2g \\
 &\leq \liminf \left( \int_X 2g d\mu - \int_X |f - f_n| d\mu \right) \\
 &= \int_X 2g d\mu - \limsup \int_X |f - f_n| d\mu
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 \int_X 2g d\mu &\leq \int_X 2g d\mu - \limsup \int_X |f - f_n| d\mu \\
 \limsup \int_X |f - f_n| d\mu &\leq 0
 \end{aligned}$$

Ma quindi questo limite deve essere ed essere uguale a zero

$$\int_X |f - f_n| d\mu = 0$$

Infine, usando il modulo

$$\lim \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \lim \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

siccome è tutto positivo deve essere

$$\lim \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = 0$$



Se  $A \subseteq X$  con  $A$  integrabile e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile,  $f$  è integrabile in  $A$  se  $f\chi_A$  è integrabile. Chiaramente definiamo

$$\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$$

Quindi per vedere se è integrabile nel sottoinsieme la estendiamo su tutto lo spazio con la funzione caratteristica e integriamo.

Costruiamo ora una misura su  $\mathbb{R}$  (la misura di Lebesgue). Vogliamo che sia invariante per traslazione  $\mu(A) = \mu(A + c)$  dove  $c$  è una costante. Vorremmo anche che  $\mu([b, a]) = b - a$ . Tuttavia, non è possibile costruire tale misura su tutto  $\mathbb{R}$ . Sia allora  $I = (a, b)$  (non cambia se incluso o meno) e denotiamo  $l(I) = b - a$ . Sia anche  $E \subset \mathbb{R}$ . Diamo la *misura esterna*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E \subset \bigcup_n I_n \right\}$$

Alcune proprietà di questa ipotetica misura

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu^*(\{x\}) = 0$  dove  $\{x\} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ;
3. se  $E$  numerabile, allora  $\mu^*(E) = 0$

$$\begin{aligned} E &\subset \{x_n\} \\ I_n &= \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ E &\subset \bigcup I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon \end{aligned}$$

4.  $\mu^*(E + x) = \mu^*(E)$  (invariante per traslazione).
5. subadditività (numerabile)

$$\mu^*\left(\bigcup E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$$

6.  $\mu^*(I) = b - a$

Se tutto fosse vero, abbiamo quello che cerchiamo, ma in realtà quando gli insiemi sono disgiunti l'ugualianza non vale, quindi non esiste tale misura.

Vale sempre  $\mu^*(I) \leq b - a$  perché c'è l'inf, c'è sempre un ricoprimento. La misura esterna è almeno quel valore, magari più piccolo, vale lo stesso.

Vogliamo mostrare la subadditività (numerabile). Per definizione possiamo prendere  $E_n$  come un'unione di intervalli numerati

$$E_n \subseteq \bigcup_k I_k^n$$

quindi, per avvicinarsi alla misura

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Chairamente l'unione di  $E_n$  è ricoperta da un'unione di unioni

$$\bigcup E_n \subseteq \bigcup_n \left( \bigcup_k I_k^n \right)$$

E per definizione la misura di tale unione

$$\begin{aligned} \mu^* \left( \bigcup E_n \right) &\leq \sum_n \left( \sum_k l(I_k^n) \right) \\ &\leq \sum_n \left( \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Siccome  $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$  è una possibile ricopratura, abbiamo

$$\mu^*([a, b]) \leq b - a + 2\varepsilon$$

Ora facciamo il contrario; mostriamo che per ogni ricoprimento  $[a, b] \subseteq \bigcup I_n$ , la serie di tutte quelle lunghezze è almeno  $b - a$ . L'insieme  $\bigcup I_n$  è compatto e quindi ha un ricoprimento finito. Possiamo estrarre un sottoricoprimento finito che lo ricopre ancora. Quindi possiamo immaginarci

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n$$

Vogliamo mostrare che se i ricoprimenti finiti hanno lunghezza almeno  $b - a$ , quindi anche quelli infiniti. Siccome usiamo intervalli aperti, vogliamo che gli altri intervalli si sovrappongano per coprire anche gli estremi, che non sono coperti. Impostiamo allora la condizione che  $a_1 < a$ ,  $a_2 < b_1$ ,  $a_3 < b_2$ . Quindi in generale ci spostiamo verso destra con  $a_k - b_{k-1}$ . L'ultimo intervallo deve contenere  $b$  quindi  $b_n > b$ . Quindi, dato un ricoprimento qualsiasi, possiamo sempre trovare un sottoricoprimento in questa maniera. Abbiamo allora la sommatoria

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n l(I_k) &= b_n - a_n + b_{n-1} - a_{n-1} + \dots + b_2 - a_2 + b_1 - a_1 \\ &= b_n + (b_{n-1} - a_n) + (b_{n-2} - a_{n-1}) + \dots + (b_1 - a_2) - a_1 \end{aligned}$$

Siccome  $a_k - b_{k-1}$ , tutte le parentesi sono strettamente positive. Se buttiamo via tali termini ci rimane un valore maggiore di  $b_n - a_1$ .

$$\sum_{k=1}^n l(I_k) > b_n - a_1 > b - a$$

Abbiamo quindi trovato che  $\mu^*([a, b]) = b - a$ . Possiamo trovare la misura dell'intervallo aperto facendo

$$\begin{aligned} b - a &= \mu^*([a, b]) = \mu^*((a, b) \cup \{a\} \cup \{b\}) \\ &\leq \mu^*((a, b)) + \mu^*({a}) + \mu^*({b}) \\ &= \mu^*((a, b)) \leq b - a \end{aligned}$$

### Definizione Misurabile secondo Lebesgue

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}$  è *misurabile secondo Lebesgue* se  $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Questa definizione è data dal fatto che vogliamo che la misura si scomponga in due parti disgiunte per tutti gli  $A$ , quella che si sovrappone con  $E$  e quella che non si sovrappone con  $E$ .

### Teorema

Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono una  $\sigma$ -algebra.

### Proof

Sia  $\mathcal{M}$  tale insieme.

1. Notiamo un paio di cose. Se  $\mu^*(E) = 0$ , allora  $E \in \mathcal{M}$ . Questo è dato dal fatto che

$$\begin{aligned} 0 + \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\leq \mu^*(A) \end{aligned}$$

Quindi anche tutti gli insiemi misurabili hanno misura zero.

2. Abbiamo anche che se  $E \in \mathcal{M}$  allora  $E^c \in \mathcal{M}$ . Questo è dato dalla definizione simmetrica di misura di Lebesgue.
3. Mostriamo che se  $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ , allora  $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ . Per fare ciò mostriamo  $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$ , e poi usiamo il complementare due volte per tornare al primo caso. Siccome  $E_2$  è misurabile possiamo scomporre

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*((A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2^c)) \end{aligned}$$

il terzo passaggio usa la subadditività per maggiorare. Chiaramente se ciò vale per due insiemi, banalmente vale per  $n$  insiemi  $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{M}$ , e quindi  $\bigcup_i E_i \in \mathcal{M}$ . Se quindi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sono misurabili e sono disgiunti, allora  $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k)$$

Per esempio, per  $A = \mathbb{R}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k)$$

Per induzione abbiamo  $n+1 \implies n$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cup E_n\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cap E_n^c\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k) \end{aligned}$$

Mostriamo ora il caso infinito. Sia  $\{E_n\}$  con  $E_n \in \mathcal{M}$ , allora  $\bigcup I_n \in \mathcal{M}$ . Sia

$$\begin{aligned} E &= \bigcup E_n = E_1 \cap (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)) \cup \dots \\ &= G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \end{aligned}$$

siccome l'intersezione di insiemi misurabili è misurabile, e i  $G_i$  sono una collezione finita di quest'ultimi, allora i  $G_i$  sono misurabili. Abbiamo allora  $E = \bigcup G_n$  dove  $G_n \in \mathcal{M}$  sono

disgiunti. Sia

$$F_n = \bigcup_{k=1}^n G_k$$

Chiaramente  $F_n \subseteq E$  e  $F_n^c \supseteq E^c$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi questa maggiorazione per ogni  $n$ , quindi vale anche per il limite. Il limite delle successioni delle somme parziali è la serie.

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_k (A \cap G_k)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

per la subadditività.

La  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}$  viene detta  *$\sigma$ -algebra di Lebesgue*.

#### **Definizione Misura di Lebesgue**

Sia  $E$  misurabile secondo Lebesgue. Allora

$$\mu(E) \triangleq \mu^*(E)$$

dove  $\mu^*$  è la misura esterna.

Dobbiamo assicurarci che data una collezione  $\{E_n\}$  misurabili secondo Lebesgue e disgiunti,

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Sicuramente il primo termine è minore o uguale al secondo. Per il maggiore o uguale abbiamo

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \\ &= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \end{aligned}$$

che vale siccome vale la subadditività su insiemi finiti disgiunti. Siccome ciò vale per ogni  $n$ , allora vale anche il limite

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

La misura esterna è additiva per un numero finito di insiemi disgiunti, ma non è vero nel caso infinito. La  $\sigma$ -algebra che abbiamo creato è la più grande che gode delle proprietà della misura che vogliamo.

Abbiamo quindi l'algebra  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ . Abbiamo pronta la teoria dell'integrazione per definire l'integrale di Lebesgue. Dobbiamo tuttavia capire quali insiemi sono misurabili.

### Proposition

$(a, +\infty)$  è misurabile.

### Proof

Abbiamo

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a])$$

e  $A \subseteq \bigcup I_n$  Siano

$$I_n^- = I_n \cap (-\infty, a], \quad I_n^+ = I_n \cap (a, +\infty)$$

ovviamente valgono

$$I_n = I_n^- \cup I_n^+, \quad I_n^- \cap I_n^+ = \emptyset$$

quindi  $l(I_n) = l(I_n^-) + l(I_n^+)$ . Inoltre

$$A \cap (-\infty, a] \subseteq \bigcup I_n^-, \quad A \cap (a, +\infty) \subseteq \bigcup I_n^+$$

E per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a]) &\leq \sum_n l(I_n^+) + \sum_n l(I_n^-) \\ &= \sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi tutti anche gli intervalli sono misurabili. Anche  $[a, b)$  è misurabile in quanto

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( a - \frac{1}{n}, \infty \right) \cap (-\infty, b)$$

e  $(-\infty, b)$  è misurabile in quanto è il complemento di

$$[b, +\infty) = \bigcap \left( b - \frac{1}{n}, +\infty \right)$$

In generale  $(a, b) \in \mathcal{M}$ . Se  $A$  è aperto allora è misurabile.  $\mathbb{R}$  con la misura di Lebesgue è uno spazio di misura completo.

### Proposition

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  aperto. Allora  $A$  è unione numerabile di intervalli disgiunti.

Quindi sono misurabili (non serve nemmeno che siano disgiunti).

### Proof

Sia  $x \in A$  e consideriamo

$$I_x = \left\{ \bigcup I \mid x \in I \right\} \subseteq A$$

chiaramente  $I_x$  è un intervallo, il più grande intervallo contenente  $x$ . Se  $I_x = A$ , allora abbiamo finito altrimenti  $I_x \subset A$  e consideriamo dunque  $y \in A \setminus I_x$  e  $I_y$ . Chiaramente  $I_x \cap I_y = \emptyset$ . Adesso abbiamo altri due casi, o  $I_x \cup I_y = A$ , e allora abbiamo scritto l'aperto come unione di intervalli

disgiunti, oppure c'è  $z \in A \setminus (I_y \cup I_x)$ . Considerando  $I_z$  possiamo fare lo stesso ragionamento. Possiamo andare avanti finché non ho consumato tutti i punti di  $A$ . Dobbiamo tuttavia mostrare che  $A = \bigcup I_{x_i}$  è unione numerabile. Per fare ciò consideriamo tutti i razionali  $\{r_n\}$  che stanno in  $A$ . Ognuno dei  $I_{x_i}$  deve contenere almeno un razionale, ma siccome i razionali sono numerabili, ci sarebbero intervalli  $I_{x_i}$  senza razionali, che è impossibile.

### Assioma della scelta

Sia  $\mathcal{F}$  una collezione di sottoinsieme di  $X$  esiste una funzione di scelta  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow X$  tale che  $\forall G \in \mathcal{F}, \varphi(G) \in G$ .

Vediamo ora un insieme che non è misurabile usando l'assioma della scelta. In  $\mathbb{R}$  con la misura di Lebesgue, sia  $X = [0, 1)$  e definiamo

$$x \overset{\circ}{+} y = \begin{cases} x + y & x + y < 1 \\ x + y - 1 & x + y \geq 1 \end{cases}$$

per  $x, y \in X$ . Usiamo la relazione di equivalenza  $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ . Indichiamo con  $P$  tutti gli elementi che estraiamo con la funzione della scelta dalle classi di equivalenza, cioè i rappresentanti delle varie classi. Consideriamo ora i razionali  $\{r_n\}$  di  $[0, 1)$  e sia

$$P_n \triangleq P \overset{\circ}{+} r_n$$

Abbiamo alcune proprietà:

1.  $n \neq m \implies P_n \cap P_m = \emptyset$ . Se  $z \in P_n \cap P_m$ , allora  $z = p \overset{\circ}{+} r_n = q \overset{\circ}{+} r_m$ . Quindi  $p - q = r_m - r_n$ , ma quindi  $p - q$  è razionale, e quindi sono nella stessa classe di equivalenza, contro l'ipotesi che sono di classi distinte.
- 2.

$$\bigcup P_n = [0, 1)$$

Chiaramente  $\bigcup P_n \subseteq [0, 1)$ . Sia ora  $x \in [0, 1)$  e mostriamo che appartiene ad un certo  $P_n$ . Ovviamente  $x \in [x]_{\sim} = [p]_{\sim}$ , quindi  $p - x \in \mathbb{Q}$ .

- se  $x > p$  allora  $x - p = r_{\bar{n}} \in [0, 1)$ , quindi  $x = p + r_{\bar{n}}$  o in altre parole  $x \in P_{\bar{n}}$
- se  $x < p$  allora  $x - p + 1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$  e  $x - p + 1 = r_{\hat{n}} \in [0, 1) = x = p + r_{\hat{n}} - 1 = p \overset{\circ}{+} r_{\hat{n}}$

Supponiamo ora che  $P$  sia misurabile, e quindi  $P_n$  è misurabile. Allora  $\mu(P) = \mu(P_n)$

$$\begin{aligned} 1 = \mu([0, 1)) &= \mu\left(\bigcup P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P) \end{aligned}$$

quindi la serie di termini costanti o è zero, o diverge, il che è assurdo. Quindi l'insieme non è misurabile.

Ricordiamo che una funzione è misurabile quando  $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}$ . La funzione  $1_{\mathbb{Q}}$  è misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}} d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0$$

### Teorema

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrabile. Allora

1.  $f$  è misurabile secondo Lebesgue;

2.  $f$  è Lebesgue-integrabile;
- 3.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mu$$

### Proof

Sia  $f$  misurabile. Vogliamo vedere se

$$\int_{[a,b]} |f| d\mu < \infty$$

Ma

$$\int_{[a,b]} |f| d\mu \leq \int_{[a,b]} M d\mu = M(b-a)$$

Siccome  $f$  è R-integrabile, sappiamo che  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste una partizione  $P$  di  $[a, b]$  tale che

$$|S(f, P) - s(f, P)| < \varepsilon$$

TODO: usare i simboli di integrale superiore e inferiore. Ricordiamo che

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

Prendiamo

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^n m_i 1_{(x_{i-1}, x_i]}$$

e

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^n M_i 1_{(x_{i-1}, x_i]}$$

Una prende l'inf e l'altra prende il sup, quindi  $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ . Allora

$$S(f, P) = \int_{[a,b]} \varphi_2 d\mu, \quad s(f, P) = \int_{[a,b]} \varphi_1 d\mu$$

Quindi possiamo rimpiazzare la condizione con gli integrali di Lebesgue

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_2 d\mu - \int_{[a,b]} \varphi_1 d\mu \right| < \varepsilon$$

Al posto di  $\varepsilon$  prendiamo  $1/n$ . Per ogni  $n$  ci saranno le funzioni semplici  $\varphi_1^n \leq f \leq \varphi_2^n$ . Possiamo anche fare in modo che  $\varphi_1^n \leq \varphi_1^{n+1} \leq f \leq \varphi_2^{n+1} \leq \varphi_2^n$ . Chiaramente  $\{\varphi_1^n\}$  e  $\{\varphi_2^n\}$  sono monotone e quindi convergono a  $\bar{\varphi}_1$  e  $\bar{\varphi}_2$ , quindi  $\bar{\varphi}_1 \leq f \leq \bar{\varphi}_2$ . Vale sempre che  $|\varphi_1^n|, |\varphi_2^n| \leq M$  sono limitate da qualche costante, ma allora possiamo applicare il teorema della convergenza dominante

$$\int_{[a,b]} (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1) d\mu = 0$$

ma quindi siccome l'integranda  $\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$  è non negativa, allora deve essere quasi ovunque uguale a zero, oppure che le due sono uguali quasi ovunque, e siccome  $\bar{\varphi}_1 \leq f \leq \bar{\varphi}_2$ , allora  $\bar{\varphi}_2 = f = \bar{\varphi}_1$

quasi ovunque. Allora, siccome  $\mathcal{M}$  è completa,  $f$  è misurabile. Il terzo punto è immediato in quanto l'integrale rimane monotono e quindi

$$\int_{[a,b]} \bar{\varphi}_1 d\mu \leq \int_{[a,b]} f d\mu \leq \int_{[a,b]} \bar{\varphi}_2 d\mu$$

ma il primo è uguale all'ultimo. Per definizione di integrale di Riemann,

$$\int_{[a,b]} \bar{\varphi}_2 d\mu$$

è l'integrale di Riemann di  $f$ , e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mu$$

### Teorema

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  misurabile tale che  $f$  sia R-integrabile in  $[a, c]$  per  $c > a$ . Allora,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx = \int_{[a, +\infty)} f d\mu$$

L'ipotesi garantisce che l'integrale esiste per ogni  $c$ . Siccome la funzione è positiva, l'integrale è monotono crescente (potrebbe essere  $+\infty$ ). Quindi, nel caso dell'integrale di Lebesgue non è necessario usare il limite per estendere l'integrale nell'intervallo illimitato, a differenza dell'integrale di Riemann.

### Proof

Consideriamo una generica successione  $c_n \rightarrow \infty$  e consideriamo

$$f_n(x) = f(x)1_{[a, c_n]}$$

Chiaramente  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  è monotona crescente. Inoltre,  $f_n \rightarrow f$  in  $[a, +\infty)$ . Usiamo il teorema della convergenza monotona che si dice

$$\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu &= \lim_n \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a, c_n]} d\mu \\ &= \lim \int_{[a, c_n]} f d\mu \\ &= \lim \int_a^{c_n} f d\mu \\ &= \lim \int_a^{c_n} f(x) dx \\ &= \lim \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a, +\infty)} d\mu \\ &= \int_{[a, +\infty)} f d\mu \end{aligned}$$



### Esempio

La funzione

$$\frac{\cos \pi x}{x} \notin L^1((1, +\infty))$$

Una funzione è integrabile secondo Lebesgue se e solo se lo è il suo modulo. Possiamo anche utilizzare il fatto che

$$\int_{\bigcup E_n} f d\mu = \sum_n \int_{E_n} f d\mu$$

per insiemi  $E_n$  disgiunti se  $f$  è positiva, come in questo caso. Consideriamo quindi

$$[1, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k+1)$$

che sono disgiunti. E quindi

$$\begin{aligned} \int_{[1, +\infty)} \frac{|\cos \pi x|}{x} d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k, k+1)} \frac{|\cos \pi x|}{x} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{k+1} dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 |\cos \pi x| dx = +\infty \end{aligned}$$

che diverge. Questa funzione non è integrabile secondo Lebesgue ma lo è secondo Riemann.

### Esempio

Studiare, al variare di  $\alpha$ , quando

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin \pi x}{(\ln x) \ln(1 + \sqrt{x})} \in L^1((0, +\infty))$$

Abbiamo dei problemi in  $x = 0, 1, +\infty$ . In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{C}{x^{-\alpha - \frac{1}{2}} \ln x}$$

quindi è integrabile per  $\alpha > -3/2$ . In un intorno di 1 abbiamo

$$f \sim C \frac{\pi x}{\ln x}$$

che ha limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} Cx \cos(\pi x) = 0$$

quindi la nostra funzione è sempre integrabile in un intorno di 1. In un intorno di infinito abbiamo la maggiorazione

$$|f| \leq \frac{Cx^\alpha}{\ln^2(x)}$$

siccome per  $x$  grande togliamo il  $+1$ . Quindi la funzione è del tipo

$$\frac{C}{x^{-\alpha} \ln^2 x}$$

che è integrabile per  $\alpha \leq -1$ . Quindi la funzione è integrabile per  $-3/2 < \alpha \leq -1$ . Dobbiamo tuttavia capire che cosa succede se  $\alpha \leq -1$ , siccome abbiamo usato una maggiorazione. Dividiamo l'integrale in diversi integrali secondo il periodo

$$\begin{aligned} \int_{a=2}^{+\infty} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x) \ln(1 + \sqrt{x})} dx &= \sum_{k=2}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x) \ln(1 + \sqrt{x})} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{-\alpha} \ln(k+1) \ln(1 + \sqrt{k+1})} \int_0^1 |\sin \pi x| dx \end{aligned}$$

dove  $a = 2$  è quasi arbitrario. Della parte periodica sappiamo che l'integrale è costante, del resto della funzione abbiamo preso il minimo. Cominciamo guardando  $-1 \leq \alpha \leq 0$ . Il termine ora ha forma

$$\frac{1}{k^{-\alpha} \ln^2 k}$$

allora diverge per  $\alpha > -1$ . In conclusione, la funzione è integrabile se e solo se

$$-\frac{3}{2} < \alpha \leq -1$$

Quindi per  $\alpha \leq -1$  abbiamo fatto una maggiorazione, mentre per il resto abbiamo fatto una minorazione.

### Esempio

Studiare quando

$$f(x) = \frac{\sin^2 x^2}{x^\alpha} \in L^1((0, +\infty))$$

al variare di  $\alpha$ . Abbiamo problemi in  $x = 0, +\infty$ . In un intorno di 0 abbiamo

$$f \sim \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

quindi è integrabile per  $\alpha < 5$ . In un intorno di infinito notiamo che

$$f \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

quindi è integrabile se  $\alpha > 1$ . Dobbiamo tuttavia studiare il caso  $\alpha \leq 1$ . Dobbiamo cambiare la variabile in maniera tale da fare diventare la funzione periodica  $x^2 = t$ . Allora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} dt &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} dt \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k+1)\pi]^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^\pi \sin^2 t dt \end{aligned}$$

che non è integrabile  $\frac{\alpha+2}{2} \leq 1 \iff \alpha \leq 1$ . Quindi,  $f \in L^1((0, +\infty))$  se e solo se  $1 < \alpha < 5$ .

### Esempio

Studiare quando

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}} \in L^1((0, +\infty))$$

al variare di  $\alpha$ . Abbiamo problemi ad infinito ed sicuramente illimitata in quanto il seno si annulla periodicamente. Tuttavia, i punti critici periodici dipendono solo da

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\alpha}}$$

che è integrabile per  $\alpha > -2/3$ . Guardiamo ora cosa succede in un intorno di  $k\pi$

$$\frac{1}{|x - k\pi|^\alpha} \sim f \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

Dobbiamo fare uno sviluppo per studiare il seno negli intorni di  $k\pi$ .

$$\sin(x) = 0 \pm (x - k\pi) + o((x - k\pi))$$

quindi si comporta come

$$\frac{1}{|x - k\pi|^{1/3}}$$

che è integrabile. Quindi, non ci sono problemi di integrabilità in tali punti per quel pezzo della funzione. In un intorno di infinito

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f| d\mu &\geq \int_\pi^\infty |f| d\mu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{(k\pi)^\alpha}{1+(k\pi)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} dx \end{aligned}$$

quindi il carattere è lo stesso di

$$\frac{1}{k^{2-\alpha}}$$

che diverge per  $\alpha \geq 1$ . Analogamente minoriamo

$$\leq \sum_{k=1}^\infty \frac{((k+1)\pi)^\alpha}{1+\pi^2(k+1)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$

che converge per  $\alpha < 1$ . Quindi,  $f \in L^1 \iff -2/3 < \alpha < 1$ .

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} dx$$

Calcoliamo il limite (per  $x > 0$ ) delle funzioni che stiamo integrando

$$\lim_n \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e^{-2x} & x > 1 \end{cases}$$

il caso  $x = 1$  non ci interessa in quanto per ciò che concerne l'integrale un singolo punto è irrilevante. Vogliamo applicare il teorema di convergenza dominante. Vogliamo trovare una maggiorante integrabile  $g$ . Per  $x \in (0, 1)$  possiamo usare

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq e^x + 1$$

Invece, per  $x \in (1, +\infty)$

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq \frac{e^x}{x^n e^{2x}} + \frac{x^n}{x^n e^{2x}} = \frac{e^{-x}}{x^n} + e^{-2x} \leq e^{-x} + e^{-2x}$$

Quindi,

$$f_n \leq \begin{cases} e^x + 1 & x \in (0, 1) \\ e^{-2x} + e^{-x} & x > 1 \end{cases}$$

allora il limite degli integrali è l'integrale del limite

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} dt$$

Il problema è l'intervallo di integrazione, ma possiamo sistemarlo

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} dt = \lim_n \int_0^\infty \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} 1_{[0,n]} dt$$

Il limite è dato da

$$\lim_n f_n(t) = \begin{cases} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Quindi per dimostrare che l'integrare è nullo dobbiamo trovare una maggiorante integrabile. Potrei maggiorare con una costante

$$\frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1+t^3}} \leq \frac{C}{t^2 \sqrt{1+t^3}}$$

che tuttavia non è integrabile quando  $t$  è piccolo. Consideriamo allora il termine

$$\frac{n^2}{t^2} e^{-n/t} = y^2 e^{-y}$$

con  $y = n/t$ . Di tale funziona, controlliamo se è veramente limitata superiormente, ha un massimo

$$2ye^{-y} - y^2 e^{-y} = ye^{-y}(2 - y)$$

Quindi è sempre limitata da  $4e^{-2}$

$$\left(\frac{n^2}{t^2} e^{-n/t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \leq \frac{4e^{-2}}{\sqrt{1+t^3}}$$

che è integrabile sia in zero che in infinito.

Lo spazio di probabilità è una misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  dove  $\mathcal{B}$  è la misura generata dagli aperti (di Borel), quindi  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$  in quanto gli aperti sono nelle  $\sigma$ -algebra di Lebesgue. Si può mostrare che la misura di Lebesgue è strettamente contenuta in  $\mathcal{M}$  ma è più complicato. La misura ha la proprietà che  $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$ . Se prendiamo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_x(\mathbb{R}) = 1$  (misura di Dirac).

Costruiamo una funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tale che

$$F_{\mathbb{P}}(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Se prendiamo  $\mathbb{P} = \delta_x$ , allora  $F_{\delta_x}$  vale 1 per  $x \geq 1$ , altrimenti 0.

Prendiamo ora  $\mathbb{P} = \mu(A \cap [0, 1])$  che viene chiamata la misura di Lebesgue concentrata in 1. Scriviamo

$$F_{\mathbb{P}}(x) = \mu((-\infty, x] \cap [0, 1])$$

fino a zero, la funzione è nulla in quanto l'intersezione è vuota. La funzione è 1 per  $x \geq 1$  e una retta in  $[0, 1]$ . Tale funzioni ha delle proprietà molto importanti:

1.  $x < y \implies F(x) \leq F(y)$
- 2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Per dimostrare che il limite tende ad 1 prendiamo una successione  $x_n \rightarrow \infty$  e consideriamo gli intervalli  $I_n = (-\infty, x_n]$ . Abbiamo che  $I_n \subseteq I_{n+1}$  e

$$\bigcup I_n = \mathbb{R}$$

quindi la probabilità (misura) dell'unione è data dal limite

$$\mathbb{P}\left(\bigcup I_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(I_n) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \lim_n F(x_n) = 1$$

3. *continua da destra*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

Una funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  che soddisfa (1), (2), (3) è detta una funzione di distribuzione (anche funzione di ripartizione della probabilità  $\mathbb{P}$ ). Sia dunque  $F$  una tale funzione. Allora esiste una probabilità  $\mathbb{P}$  su  $\mathbb{R}$  tale che  $F = F_{\mathbb{P}}$ , cioè partendo da  $\mathbb{P}$  posso ritrovare la stessa  $F$ . Quindi, avere una probabilità o una funzione di distribuzione è la stessa cosa. Per costruire tale probabilità prendiamo intervalli  $I = (a, b]$  e diciamo che la lunghezza di tale intervallo relativa alla funzione la calcolo così:

$$l_F(I) = F(b) - F(a)$$

e poi costruiamo

$$\mu_F^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l_F(I_n), E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Un sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{R}$  è  $F$ -misurabile se

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \mu_F^*(A) = \mu_F^*(A \cap E) + \mu_F^*(A \cap E^c)$$

esattamente come prima. Se  $E$  è  $F$ -misurabile allora definiamo

$$\mu_F(E) = \mu_F^*(E)$$

che in realtà è una probabilità, la cui funzione di distribuzione è quella da cui siamo partiti.

## 4 Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

Consideriamo ora un insieme della forma (che chiamiamo per semplicità rettangolo)

$$J = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definiamo l'area come

$$\text{area}_n(J) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Consideriamo quindi  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e definiamo la misura n-dimensionale

$$\mu_n^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{area}_n(J_h), E \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} J_h \right\}$$

Analogamente abbiamo le:

1. Proprietà di  $\mu_n^*$
2. Definizione di insieme misurabile
3. Gli insiemi misurabili sono una  $\sigma$ -algebra.
4. Tale  $\sigma$ -algebra contiene gli aperti.
5. Se  $E \in \mathcal{M}_n$ , allora definiamo

$$\mu_n(E) = \mu_n^*(E)$$

che è la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$

è la stessa cosa ma siamo partiti dall'area piuttosto che dalla lunghezza. Quindi,  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$  è l'oggetto con cui abbiamo a che fare, e abbiamo quindi la teoria dell'integrazione.

Una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , cioè una funzione integrabile in  $\mathbb{R}^n$ .

Per calcolare un integrale  $n$ -dimensionale, vogliamo ricondurci al caso unidimensionale. Abbiamo allora il

### Teorema Teorema di Fubini

Sia  $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e integrabile.

1.  $f_x(y): \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^k$ .
- 2.

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_x(y) d\mu_{n-k}(y)$$

è definita quasi ovunque, è integrabile in  $\mathbb{R}^k$ .

- 3.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^k} G(x) d\mu_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x, y) d\mu_{n-k}(y) \right) d\mu_k(x) \end{aligned}$$

bisogna tuttavia capire quando la funzione è integrabile.

### Teorema Teorema di Tonelli

Sia  $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow [0, +\infty)$  misurabile. Allora

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_x(y) d\mu_{n-k}(y)$$

(che potrebbe assumere valore infinito) è misurabile in  $\mathbb{R}^k$  e

$$\int_{\mathbb{R}^k} G(x) d\mu_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n$$

È importante notare che la funzione debba essere positiva. Esempio con i quadratini  $\pm 1$ , gli integrali unidimensionali fanno zero ma l'integrale bidimensionale non è integrabile. Se prendiamo il valore assoluto, gli integrali unidimensionali fanno 2, e l'integrale doppio diverge a  $+\infty$ , che è corretto nel caso di  $|f|$ .

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{\ln(e^{xt} + 1)}{tx(t^2 + e^{1/x})} dt$$

Per trattare il caso continuo basta considerare qualsiasi successione  $x_n \rightarrow +\infty$  e calcolare

$$\lim_n \int_1^\infty \frac{\ln(e^{x_n t} + 1)}{tx_n(t^2 + e^{1/x_n})} \chi_{[1, x_n]} dt$$

Calcoliamo il limite quando  $t$  è fissato

$$f_n(t) \rightarrow \frac{1}{t^2 + 1}$$

in quanto  $t > 0$ . Quindi, l'integrale è pari a

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1 + t^2}$$

Osserviamo che  $\ln(e^{xt} + 1) \leq \ln(e^{xt} + e^{xt}) = xt + \ln(2)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\ln(e^{xt} + 1)}{xt(t^2 + e^{1/x})} &\leq \frac{xt + \ln 2}{xt(1 + t^2)} = \frac{1 + \frac{\ln 2}{xt}}{1 + t^2} \\ &\leq \frac{2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

che è integrabile

### Esercizio

Dopo aver mostrato che esiste  $C > 0$  tale che

$$\frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

per  $x \in (0, 1)$ , calcolare

$$\lim_n \int_0^1 \frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} dx$$

La maggiorazione è integrabile in un intorno di zero e quindi l'integrale è uguale a

$$\int_0^1 \left( \lim_n \frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

Per dimostrare la maggioranza vogliamo

$$\frac{n^3 x \sqrt{x}}{(1 + nx)^n} \leq C$$

quindi verifichiamo che abbia un massimo studiando quindi la funzione

$$g_n(x) = \frac{x \sqrt{x}}{(1 + nx)^n}$$

Abbiamo che  $g_n(0) = 0$  e  $g_n(1) = \frac{1}{(1+n)^n}$ . Calcoliamo la derivata del numeratore per vedere dove si annulla

$$\frac{d}{dx}(g'_n(x) \cdot (1 + nx)^n) = \sqrt{x}(1 + nx)^{n-1} \left[ \frac{3}{2}(1 + nx) - n^2 x \right]$$

la derivata di annulla in

$$x = \frac{3}{2n^2 - 3n} \rightarrow 0$$

quindi vi è un massimo e

$$\frac{n^3 x}{(1 + nx)^n} \leq \frac{n^3 \left( \frac{3}{2n^2 - 3n} \right)^{3/2}}{\left( 1 + \frac{3}{2n - 3} \right)^n} \leq \lim \dots$$

il denominatore ammette limite (di forma esponenziale) e pure il numeratore, quindi ammette limite ed è quella la costante.

### Esercizio



Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2}$$

1. Determinare per quali  $\alpha$  la serie converge in  $\mathbb{R}$ : Abbiamo che

$$\frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2} \sim \frac{C}{n^{2-\alpha}}$$

quindi converge per  $\alpha < 1$ .

2. Determinare per quali  $\alpha$  la somma è integrabile in  $\mathbb{R}$ : Notiamo che le funzioni sono dispari, quindi se prendiamo il modulo otteniamo una funzione pari. Possiamo quindi considerare  $x \geq 0$ . Per il teorema della convergenza monotona (di funzioni positive) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{x^4 + n^2} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

che converge se e solo se  $\alpha < 0$ .

### Esercizio

Consideriamo

$$\sum \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2}$$

Mostrare che converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  (non fatto qui). Mostriamo che  $S \in L^1(\mathbb{R})$ . Notiamo che il termine è una funzione dispari, quindi anche  $S$ , e l'integrabilità è simmetrica. Quindi dobbiamo studiare

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2} dx &= \sum \int_0^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^{\infty} x e^{-nx^2} dx \\ &= \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

siccome la funzione è positiva e le somma parziali sono positive possiamo scambiare integrale e serie. Quindi, la serie converge in quanto è maggiorata da una serie convergente.

### Esercizio

Studiare

$$\sum \ln(1 + x^{2n})$$

iniziamo con la convergenza puntuale. Essa converge in  $E = (-1, 1)$ . Studiamo ora l'integrabilità.

I termini e la somma sono funzioni pari positivi.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum \ln(1+x^{2n}) dx &= \sum \int_0^1 1+x^{2n} dx \\ &\leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

siccome  $\ln(1+t) \leq t$ . Ciò non ci porta da nessuna parte, ma possiamo aggiustarsi. Proviamo a maggiorare con la retta che congiunge 0 e  $\ln 2$ . Inoltre il grafico è concavo, tutte le secanti stanno sotto.  $\ln(1+t) \geq \ln 2 t$  in  $(0, 1)$ .

$$\sum \int_0^1 1+x^{2n} dx \geq \frac{\ln 2}{2n+1}$$

che diverge e quindi la somma non è integrabile.

### Esercizio

Sia

$$f(x, y) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$$

e

$$E = \{x^6 + y^4 < 1\}$$

Determinare per quali  $\alpha$  vale  $f \in L^1(E)$ , ovviamente rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale. Possiamo notare che l'insieme è limitata in un cerchio unitario. Se la funzione è limitata e l'insieme, come in questo caso, ha misura finita, allora è integrabile. Dobbiamo controllare se la funzione è integrabile, in tal caso potremmo applicare il Teorema di Fubini. Tuttavia, grazie al teorema di Tonelli, la funzione è positiva e misurabile e quindi l'integrabile è pari alla decomposizione dei due integrali successivi, che hanno valore finito se è integrabile.

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_E d\mu_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_E(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_{E_x}(y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{E_x} f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_A \left( \int_{E_x} f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

Chiamiamo la  $x$ -sezione  $E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\}$ . Siccome  $E_x$  è spesso vuoto (fuori dall'area), definiamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid E_x \neq \emptyset\}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_E \frac{1}{(1-x)^\alpha} d\mu_2 &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt[4]{1-x^6}}^{\sqrt[4]{1-x^6}} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt[6]{1-y^4}}^{\sqrt[6]{1-y^4}} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx \right) dy\end{aligned}$$

Ma i problemi sono vicino a 1, il resto della funzione è continua e non ci serve per studiare l'integrabilità

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt[6]{1-y^4}} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1-x^6}}{(1-x^6)^\alpha} dx$$

In un intorno sinistro di 1 l'integranda è

$$\frac{\sqrt[4]{1-x^6}}{(1-x^6)^\alpha} \sim \frac{C}{(1-x)^\beta}$$

e in questo caso

$$\beta = \alpha - 1/4$$

siccome

$$1-x^6 = (1-x^3)(1+x^3) = (1-x)(1+x+x^2)(1+x^3) \sim 6(1-x)$$

Quindi la funzione è integrabile per  $\alpha < 5/4$ .

### Esercizio

Studiare l'integrabilità al variare di  $\alpha$  di

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^\alpha)(1-y^2)}$$

in

$$E = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0 < 1 - x^2\}$$

che è l'intersezione del primo quadrante con  $1 - x^2$ . La funzione ha dei problemi vicino a  $y = 1$  e nell'origine. La scomposizione degli integrali deve rappresentare tali problemi, quindi usiamo una  $y$ -sezione.

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu_2 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} \frac{1}{y^\alpha + x^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2} \cdot \frac{1}{y^{\alpha/2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-y}}{y^{\alpha/2}}\right) dy\end{aligned}$$

In un intorno di zero

$$f \sim \frac{C}{y^{\alpha/2}}$$

quindi deve essere  $\alpha < 2$ . In un intorno di uno

$$f \sim \frac{\sqrt{1-y}}{(1-y^2)} \sim \frac{C}{y^{1/2}}$$

quindi è integrabile per ogni  $\alpha$ .

### Esercizio

Studiando per quali  $\alpha > 0$

$$f(x, y) = \left( \frac{\sin x}{y} \right)^2$$

è integrabile in

$$E = \{(x, y) \mid x > 0, y > x^\alpha\}$$

I problemi sono per  $y \rightarrow 0$  e verso infinito. Integrando la funzione rispetto ad entrambe le variabili.

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu_2 &= \int_0^\infty \int_{x^\alpha}^\infty \left( \frac{\sin x}{y} \right)^2 dy \, dx \\ &= \int_0^\infty \left[ -\frac{\sin^2(x)}{y} \right]_{x^\alpha}^\infty dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx \end{aligned}$$

In un intorno di zero

$$\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

ed è quindi integrabile per  $\alpha < 3$ . In un intorno di infinito

$$\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

che è integrabile per  $\alpha > 1$ . Per gli altri casi notiamo

$$\begin{aligned} \int_\pi^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\pi(k+1))^\alpha} \int_0^\pi \sin^2(x) dx \end{aligned}$$

che diverge per  $\alpha \leq 1$ . Alternativamente possiamo partire dall'integrale opposto,

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu_2 &= \int_0^\infty \int_0^{y^{1/\alpha}} \left( \frac{\sin x}{y} \right)^2 dx \, dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \left( \frac{1}{2} y^{1/\alpha} - \frac{1}{4} \sin(2y^{1/\alpha}) \right) dy \end{aligned}$$

In un intorno di infinito è integrabile per  $2 - 1/\alpha > 1$  quindi  $\alpha > 1$ . In un intorno di zero, per guardare l'asintotico, dobbiamo prendere due termini dell'espansione del seno per evitare cancellazione diretta. Quindi alla fine è integrabile per  $2 - 3/\alpha < 1$  quindi per  $\alpha < 3$ . In entrambi i casi è integrabile per  $\alpha \in (1, 3)$ .

### Esercizio

Studiando per quali  $\alpha$

$$f(x, y) = \frac{y^\alpha}{\sqrt{|1-y|} \cdot |x^2 - y^2|}$$

è integrabile in

$$E = \left\{ (x, y) \mid x > 0, 0 < y < \min \left( x^3, \frac{1}{x} \right) \right\}$$

I due moduli sono inutili, il secondo perché l'insieme è sempre sotto la bisettrice. Abbiamo problemi in infinito,  $y \rightarrow 1$  e nell'origine. Per integrare dobbiamo dividere l'insieme in due partizioni disgiunte separate per  $x = 1$ .

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu_2 &= \int_0^1 \int_{y^{1/3}}^{\frac{1}{y}} \frac{y^\alpha}{\sqrt{1-y} \cdot (x^2 - y^2)} dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^\alpha}{\sqrt{1-y}} \cdot \frac{1}{2y} \left( \ln \left( \frac{\frac{1}{y} - y}{\frac{1}{y} + y} \right) - \ln \left( \frac{y^{1/3} - y}{y^{1/3} + y} \right) \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2y^{1-\alpha} \sqrt{1-y}} \ln \left( \frac{1-y^2}{1+y^2} \cdot \frac{y^{1/3} + y}{y^{1/3} - y} \right) dy \end{aligned}$$

In un intorno destro di zero, l'unico punto critico è la seconda frazione del logaritmo. Avremo un confronto asintotico a

$$\sim \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left( \frac{y^{1/3} + y}{y^{1/3} - y} \right) = \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left( \frac{1 + y^{2/3}}{1 - y^{2/3}} \right)$$

Aggiungiamo e togliamo uno al logaritmo nella seguente maniera

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left( \frac{1 - y^{2/3} + 2y^{2/3}}{1 - y^{2/3}} \right) &= \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln \left( 1 + \frac{2y^{2/3}}{1 - y^{2/3}} \right) \\ &\sim \frac{C}{y^{1-2/3-\alpha}} \end{aligned}$$

che è integrabile per  $\alpha > -2/3$ . In un intorno di 1 abbiamo

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{1-y}} \ln \left( \frac{1-y^2}{y^{1/3}-y} \right)$$

Calcoliamo il limite con l'Hôpital

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{1-y^2}{y^{1/3}-y} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 1} -\frac{2y}{\frac{1}{3}y^{-2/3}-1} = 3$$

Quindi

$$f \sim \frac{C}{(1-y)^{1/2}}$$

che è integrabile per ogni  $\alpha$ .

### Esercizio

Studia per quali valori di  $\alpha$

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} dt$$

è integrabile in  $(0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(x) dx &= \int_0^\infty \left( \int_x^{2x} \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} dt \right) dx \\ &= \int_E \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} d\mu_2(x, t) \end{aligned}$$

Siccome la funzione è una successione positiva, per il teorema di Tonelli possiamo scambiare l'ordine di integrazione. Studiamo allora l'insieme  $E$  per invertire gli integrali. L'insieme è un cono (fra  $x$  e  $2x$ )

$$\begin{aligned} \int_E \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} d\mu_2(x, t) &= \int_0^\infty \int_{y/2}^y \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha} dx dt \\ &= \int_0^\infty \left[ -\frac{e^{-xt^2}}{t^{\alpha+2}} \right]_{t/2}^t dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+2}} \left( e^{-t^3/2} - e^{-t^3} \right) dt \end{aligned}$$

In un intorno di infinito, gli esponenziali si avvicinano a zero più velocemente di ogni potenza, quindi è integrabile per ogni  $\alpha$ . In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{1}{t^{\alpha+2}} e^{-t^3/2} \left( 1 - e^{-t^3/2} \right) \sim \frac{C}{t^{\alpha-1}}$$

quindi è integrabile per  $\alpha < 2$ .

## 5 Esercizi

### Esercizio Successioni 1

Per  $x > -1$  studia la successione

$$f_n(x) = \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}}$$

- **convergenza puntuale:** controlliamo la convergenza puntuale in  $E = (0, +\infty)$ . Fissato  $x > 0$  studiamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} = 0 = f(x)$$

- **convergenza uniforme:** controlliamo la convergenza uniforme in  $E$ . Abbiamo

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right|$$

sostituendo  $t = n/x$  otteniamo una funzione simile all'integranda della funzione gamma, che ha un massimo  $M$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right| &\leq M \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{1}{n\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{M}{n\varepsilon} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Chiaramente il sup si ottiene con il denominatore più piccolo, quindi un  $\varepsilon$  molto vicino a 0.

- **integrabilità:** mostriamo che  $f_n \in L^1$ .

$$\int_0^\infty |f_n(x)| dx = \int_0^\infty \left| \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} \right| dx$$

In un intorno di  $+\infty$  abbiamo

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^{5/2}}$$

siccome  $\frac{5}{2} > 1$  la funzione è integrabile a infinito. In un intorno di  $0^+$  maggioriamo

$$f_n(x) \leq \frac{M}{n\sqrt{1+x}} \sim \frac{M}{n}$$

quindi è integrabile per confronto e confronto asintotico.

### Esercizio Successioni 1

Data la successione

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x}$$

studiare al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$

1. **convergenza puntuale:** studiamo la convergenza puntuale in  $(0, +\infty)$ . Fissato  $x > 0$  abbiamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **convergenza uniforme:** studiamo la convergenza uniforme in  $(0, +\infty)$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty, E} &= \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} \right| \\ &\leq \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| n^\alpha x e^{n^2 x} \right| \end{aligned}$$

siccome  $\arctan(x) \leq x$ . Studiamo la derivata della funzione maggiorante  $g_n(x)$ .

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= n^\alpha e^{-n^2 x} - n^\alpha x e^{-n^2 x} n^2 \\ &= n^\alpha e^{-n^2 x} (1 - xn^2) \end{aligned}$$

Per studiare il segno abbiamo

$$1 - n^2 x \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{n^2}$$

che è un punto di massimo. Chiaramente  $g_n(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ , e siccome è sempre positiva, siamo sicuri che tale valore è un punto di massimo. Il massimo vale

$$g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$

Quindi, la norma infinito è sempre minore di

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} \leq \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$

che tende a zero solo quando  $\alpha < 2$  (condizione sufficiente ma non necessaria). Cerchiamo ora un limite dal basso

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty, E} &\geq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) e^{-1} \\ &\sim n^{\alpha-2} e^{-1} \end{aligned}$$

che non tende a zero. Quindi la convergenza è uniforme per  $\alpha < 2$ .



### Esercizio Successioni 3

Data la successione

$$f_n(x) = n \left( e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right)$$

1. **stabilire in che insieme vi è convergenza puntuale:** fissato  $x$  calcoliamo

$$\lim_n f_n = \lim_n n \left( e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) = x^2$$

in quanto la parentesi è asintotica all'esponente. Allora l'insieme di convergenza puntuale è  $E = \mathbb{R}$ .

2. **stabilire se la convergenza è uniforme in tale insieme:** fissato  $x$  abbiamo

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| n \left( e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) - x^2 \right| = \sup_{x \in (0, +\infty)} |g_n(x)|$$

Studiamo la derivata di  $g_n(x)$

$$g'_n(x) = n e^{\frac{x^2}{n}} \frac{2x}{n} - 2x = 2x \left( e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right)$$

Il segno della derivata è lo stesso di  $x$ , e  $x = 0$  è un punto di minimo.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = \pm\infty$$

quindi non è limitata e la convergenza non è assoluta.

3. **stabilire se la convergenza è uniforme in un intervallo limitato:** sia  $[a, b]$  tale intervallo. Dalla forma della funzione, il sup è o in  $x = a$  o in  $x = b$ , quindi

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} \leq \max\{|f(a) - f(b)|, |f(b) - f(a)|\}$$

supponiamo che sia in  $a$

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \left| n \left( e^{\frac{a^2}{n}} - 1 \right) - a^2 \right|$$

per risolvere il limite facciamo un'espansione di MacLaurin fino al secondo ordine

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} = \left| \frac{a^4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right| \rightarrow 0$$

Quindi, la convergenza è uniforme in un intervallo limitato.

### Esercizio Serie 1

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2 + x^2}$$

verifica la convergenza uniforme in  $\mathbb{R}$ . Cominciamo studiando la convergenza totale che è più forte, quindi la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x e^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2 + x^2} \right|$$

con  $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$  otteniamo la forma  $f(t) = t e^{-t^2}$  che ha grafico noto, e un massimo  $M$  e minimo

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq M \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + x^2} = \frac{M}{n^{3/2}}$$

in quanto il supremum è per  $x = 0$ . Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge. Quindi la serie converge totalmente e quindi converge anche in maniera uniforme su tutto  $\mathbb{R}$ .

### Esercizio Serie 2

Conderiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left( \frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right)$$

1. Stabilire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  abbiamo convergenza puntuale: Fissato  $x$ , notiamo che per convergere il termine  $n$ -esimo deve tendere a zero. Quindi,

$$\lim_n \arctan \left( \frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right) \rightarrow 0$$

se e solo se  $\alpha < 2$  (condizione necessaria). Usiamo il criterio del confronto asintotico: l'argomento dell'arcotangente tende a zero e quindi è asintotica al suo argomento. La serie

$$\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

converge se e solo se  $\alpha < 1$ . Quindi, la serie converge puntualmente per  $\alpha < 1$ .

2. Stabilire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  abbiamo convergenza uniforme: è necessario  $\alpha - 1$ . Cominciamo studiando la convergenza totale, che è più forte. Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \arctan \left( \frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right) \right|$$

Studiamo la derivata del termine

$$f'_n(x) = \frac{1}{1 + \left( \frac{n^\alpha}{x^2 + n^2} \right)^2} = -\frac{2xn^\alpha}{n^{2\alpha} + n^2 + x^{22}} \geq 0 \iff x \leq 0$$

quindi  $x = 0$  è un punto di massimo. Infatti, gli estremi sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) \rightarrow 0$$

Quindi la forma è data da

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = f_n(0) = \arctan(n^{\alpha-2})$$

La serie è quindi a termini positivi e usiamo il confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n^{\alpha-2})$$

che converge se e solo se  $\alpha < 1$ . Quindi abbiamo convergenza uniforme per  $\alpha < 1$ . Siccome la convergenza puntuale è per  $\alpha < 1$ , non vi sono altri  $\alpha$  per cui vi è convergenza assoluta.

### Esercizio Serie 3

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^{\alpha}+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

1. Valutare per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  vi è convergenza puntuale in  $\mathbb{R}$ . Studiamo la condizione necessaria di convergenza. Il numeratore tende a zero se e solo se  $\alpha > 0$ . In tal caso la funzione è assolutamente asintotica a

$$|f_n(x)| \sim \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$

E la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$

converge se e solo se  $\alpha > 3/2$  per confronto asintotico. Per  $x < 0$ , basta notare che  $\arctan(t)$  è simmetrica rispetto all'origine, il che implica convergenza puntuale per  $\alpha > 3/2$ .

2. Stabilire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  la somma della serie è continua in  $\mathbb{R}$ . Dobbiamo utilizzare il teorema. Dobbiamo trovare per quali  $\alpha$  converge totale per applicare il teorema che dice che se  $f_n$  è continua in  $E$ , allora la sua serie converge uniformemente a  $S(x)$  in  $E$  e  $S(x)$  è continua. Studiamo la convergenza totale in  $E = [-a, a]$ ,  $a > 0$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\infty, [-a, a]} &= \sup_{x \in [-a, a]} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^{\alpha}+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &\leq \sup_{x \in [-a, a]} \frac{|x|}{n^{\alpha}+1} 2\sqrt{n} = \frac{2a\sqrt{n}}{n^{\alpha}+1} \sim \frac{C}{n^{\alpha-1/2}} \end{aligned}$$

in quanto  $\arctan(t) \leq t$ . Ciò implica che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{\alpha-1/2}}$$

che converge se e solo se  $\alpha > 3/2$ . Quindi per confronto la serie converge totalmente, e quindi uniformemente per  $\alpha > 3/2$ . Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale e la serie converge puntualmente per  $\alpha > 3/2$ , abbiamo convergenza uniformemente se e solo se  $\alpha > 3/2$ . Poiché  $f_n$  è continua e la serie converge uniformemente in  $[-a, a]$ , la serie risulta continua in tale intervallo. Poiché  $a$  è arbitrario, possiamo amplificarlo e la serie è continua su tutto  $\mathbb{R}$ .

### Esercizio

Sia

$$f_n(x) = \int_x^{x+n} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt$$

Studiamo la convergenza puntuale in  $x \in (0, \infty)$ . Abbiamo problemi per  $t \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow +\infty$ . Nel limite abbiamo

$$\int_x^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt$$

Il primo problema accade solo se  $0 \in [x, x+n]$ . In infinito abbiamo

$$\frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \sim \frac{C}{t^\alpha}$$

che è integrabile per  $\alpha > 1$ . In un intorno di zero abbiamo

$$\frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \sim t^{2-\alpha}$$

che è integrabile per  $\alpha < 3$ . Quindi converge puntualmente per  $\alpha \in (1, 3)$  Per guardare la convergenza uniforme abbiamo

$$\begin{aligned} \sup |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_x^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt - \int_x^{x+n} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt \right| \\ &= \left| \int_{x+n}^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt \right| \\ &\leq \int_{x+n}^\infty \left| \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \right| dt \\ &= \int_{x+n}^\infty \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} dt \\ &\leq \frac{\pi}{2} \int_{x+n}^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt \\ &= \frac{\pi - (x+n)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Abbiamo tolto il valore assoluto perché l'intervallo è definitivamente positivo. La stima dell'errore è uniforme quindi la convergenza è uniforme. Studiamo ora per quali  $\alpha$ , il limite di  $f_n$  è integrabile in  $(0, +\infty)$ . Osserviamo che  $f_n \geq 0$  e siccome l'intervallo di integrazione cresce, abbiamo che  $f_n \leq f_{n+1}$ . Applichiamo allora il teorema della convergenza monotona, e

$$\lim_n \int_x^{x+n} f_n d\mu = \int f$$

che è integrabile per  $\alpha \in (1, 3)$ .

### Esercizio

Calcoliamo

$$\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n e^{2x}} dx$$

Abbiamo che

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{1+e^2} & x = 0 \\ \frac{x}{e^{2x}} & x > 1 \end{cases}$$

Per  $0 < x \leq 1$

$$f_n(x) \leq 2$$

che è integrabile nella parte limitata del dominio  $(0, 1)$ . Per  $x > 1$  abbiamo

$$f_n(x) \leq \frac{1+x^{n+1}}{x^n e^{2x}} \leq \frac{2x^{n+1}}{x^n e^{2x}} = \frac{2x}{e^{2x}}$$

Usiamo quindi la convergenza dominata

$$\begin{aligned} \lim_n \int_0^{+\infty} f_n dx &= \int_0^{+\infty} \lim_n f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}} dx \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

### Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$f(x) = \frac{x^\alpha (1 - \cos^4(\pi x))}{\ln(x) \ln(1 + \sqrt{x})}$$

in  $(0, +\infty)$ . Usiamo il confronto asintotico in un intorno di zero

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha \cdot 4 \cdot \left(\frac{\pi^2 x^2}{2}\right)}{\ln(x) \ln 2} = C \frac{x^{\alpha+3/2}}{\ln x}$$

che è integrabile per  $\alpha > -5/2$ . Se  $x \rightarrow 1$  abbiamo

$$f(x) \sim \frac{4 \frac{(x-1)^2}{2}}{(x-1) \ln 2} = \frac{2}{\ln 2} (x-1)$$

che è integrabile. Per  $x \rightarrow \infty$

$$f(x) \leq \frac{2x^\alpha}{\ln x \ln(1 + \sqrt{x})} \sim 4 \frac{x^\alpha}{\ln^2(x)}$$

che è integrabile per  $\alpha \leq 1$ . Quindi, la funzione è integrabile per

$$-\frac{5}{2} < x \leq -1$$

### Esercizio

Sia  $\alpha > 0$  e

$$E_\alpha = \{0 < x < 1 \wedge 1 < y < x^{-\alpha}\}$$

quindi

$$|E_\alpha| = \int_0^1 \int_1^{x^{-\alpha}} dy dx$$

che è finito se e solo se  $\alpha < 1$ . Data  $f(x, y) = \arctan(x/y)$  calcolare

$$\int_{E_\alpha} f(x, y) dx dy$$

Possiamo applicare il teorema di Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha} f(x, y) dx dy &= \int_1^\infty \int_0^{y^{-1/\alpha}} \arctan(x/y) dx dy \\ &= \int_1^\infty \int_0^{y^{-1/\alpha-1}} \arctan(z)y dz dy \\ &= \int_1^{+\infty} y \left( y^{-1/\alpha-1} \arctan(y^{-1/\alpha-1}) - \frac{1}{2} \ln(y^{-2/\alpha-2} + 1) \right) dy \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito  $z = x/y$ . Per  $y \rightarrow \infty$ , il primo termine

$$y^{-1/\alpha} \arctan(y^{-1/\alpha-1}) \sim y^{-1/\alpha} y^{-1/\alpha-1} = y^{-1-2/\alpha}$$

che è integrabile per  $\alpha > 0$ . Per il secondo termine abbiamo

$$y \frac{1}{2} \ln(y^{-2/\alpha-2} + 1) \sim y^{-2/\alpha-1}$$

che è integrabile per ogni  $\alpha > 0$ . Quindi  $f$  è integrabile per  $\alpha > 0$ .