# Topologia I

Paolo Bettelini

## Contents



## 1 Topologia

Invarianti: $p_0$ corrisponde al numero di componenti connesse di uno spazio. Formalmente $\pi_0(X)$ è l'insieme delle componenti connesse di $X$ per archi. Invece, $p_1$ è il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$, che descrive la struttura dei cammini chiusi fino a omotopia.

**Assioma** Estensionalità

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$$

**Proposition** Relazione di aggiunzione

Valgono

$$S \subseteq f^{-1}(T) \iff f(S) \subseteq T$$

Da cui derivano $f(f^{-1})(T) \subseteq T$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto $f$ potrebbe non essere suriettiva. E pure $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto $f$ potrebbe non essere iniettiva.

L'operazione di controimmagine preserva tutte le operazioni insiemistiche.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$X \backslash f^{-1}(T) = f^{-1}(Y \backslash T)$$

L'operazione di immagine preserva in generale solo le unioni.

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

le altre due non valgono necessariamente. Abbiamo solo

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

se $f$ non è iniettiva la direzione opposta non vale necessariamente. Infatti potrebbero esistere $x, x'$ tale che $x \in A \backslash B$ e $x' \in B \backslash A$ tali che $f(x) = f(x')$. La medesima logica vale per il complementare.

**Proposition** Proprietà universale del quoziente

Sia $f\colon X \to Y$ e $\sim$ relazione di equivalenza su $X$. Sono equivalenti:

1. $f$ è costante sulle classi di equivalenza
$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$
2. $f$ fattorizza (in modo necessaria unico, essendo $\pi$ suriettivo) attraverso $\pi$, cioè $\exists_{=1}\, g\colon X/_{\sim} \to Y$ tale che $g \circ \pi = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/_{\sim} \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

**Proof**

1. $(2) \implies (1)$ : $f = g \circ \pi$. Abbiamo
$$x \sim x' \implies \pi(x) = \pi(x') \implies g(\pi(x)) = g(\pi(x'))$$
che sono uguali a $f(x)$ e $f(x')$.
2. $(2) \implies (1)$ : Definiamo $g\colon X/_{\sim} \colon Y$ come
$$g([x]) \triangleq f(x)$$
bisogna verificare che sia ben posta. Vogliamo quindi che se $[x] = [x']$ allora $f(x) = f(x')$. Ma ciò è garantito dalla ipotesi.