

# Algebra lineare I

Paolo Bettelini

## Contents

1	Algebra lineare	1
2	Algoritmo di eliminazione di Gauss	1

## 1 Algebra lineare

La moltiplicazione scalare di un vettore è un *omotetia*.

### Definizione Spazio a prodotto interno

Uno *spazio a prodotto interno* è uno spazio vettoriale con la struttura aggiuntiva del dot product.

### Definizione Ortogonalità

In uno spazio a prodotto interno, la nozione di *ortogonalità* è definita dalla nullità del product.

### Definizione Spazio affine

Uno *spazio affine* è uno spazio vettoriale senza la nozione del punto di origine.

Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  necessita di un orientamento. Se consideriamo il prodotto vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  nel piano bidimensionale  $\mathbb{R}^2$ , il prodotto ha forma di complesso. Il prodotto scalare e il prodotto dei complessi si uniscono nella struttura quaternionale.

I sistemi lineari possono essere interpretati come trovare l'intersezione delle varie rette, oppure possiamo vederlo come trovare i coefficienti lineari tali che la combinazione lineare (con tali coefficienti) dei vettori sia il vettore risultante. Possiamo quindi anche vederlo come trovare il vettore che moltiplicato dalla matrice del sistema ci restituisce il vettore voluto.

## 2 Algoritmo di eliminazione di Gauss

### Lemma

Dato un sistema di equazioni con  $m$  equazioni e  $n$  indeterminata, l'eliminazione di Gauss non modifica le soluzioni del sistema.

### Proof

Per la prima operazione, la dimostrazione in una direzione è banale. Per dimostrarla nell'altra direzione è sufficiente considerare le righe della matrice  $E'_i = E_i + \lambda E_j$  dove l'apice indica la riga modificata. Siccome la riga che viene aggiunta rimane invariata  $E_j = E'_j$  allora  $E_i = E'_i - \lambda E'_j$  e quindi i calcoli nella direzione inversa sono gli stessi in quanto sto sempre aggiungendo un multiplo di un'altra riga. Quindi le soluzioni prima e dopo l'operazione rimangono invariate. Se il sistema

originario non ha soluzioni, non ne ha nemmeno quello nuovo.

I coefficienti affinché la somma scalare di righe tale che una variabile si elimina è detta *pivot*.