

Differential geometry

Paolo Bettelini

Contents

1 Differential geometry

1

1 Differential geometry

Definizione Curva parametrizzata di classe \mathcal{C}^k

Una *curva parametrizzata* su \mathbb{R}^n è una funzione $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con I intervallo reale (con più di un punto) e con σ di classe \mathcal{C}^k .

Le derivate sono generalmente definite per l'interno dell'intervallo. La classe \mathcal{C}^k è definita su un estremo dell'intervallo, per esempio $[a, b)$, se σ può essere prolungata a funzione $\tilde{\sigma}$ di classe \mathcal{C}^k su $(a - \varepsilon, b) = I_\varepsilon$, cosicché $a \in I_\varepsilon$. In tal caso $\sigma'(a)$ è ben definito come $\tilde{\sigma}'(a)$.

Per parametrizzare un segmento fra A e B possiamo scrivere $P = (1 - t)A + tB$ oppure $P = \lambda A + \mu B$ dove $\lambda + \mu = 1$, che viene detta combinazione lineare affine. Se richiediamo anche che $\lambda, \mu \geq 0$ allora si chiamano combinazioni convesse. Quest'ultima si generalizza al k -simpleso.

Definizione k -simpleso in \mathbb{R}^n

Sia $n \geq k$. Consideriamo $k + 1$ punti $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ in posizione lineare generale, cioè non appartenenti ad un sottospazio affine di dimensione minore o uguale a $r - 1$. Allora il r -simpleso di tali vertici è

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i \mid \lambda_j \geq 0 \wedge \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

Definizione Sottospazi affini in forma parametrica

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale di dimensione $r \leq n$ e $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$L = \{P_0 + u \mid u \in U\} = P_0 + U$$

è il sottospazio affine di direzione U e passante per P_0 .

Questi sono una generalizzazione della retta. Fissata una base u_1, \dots, u_r di U , otteniamo la parametrizzazione lineare

$$L = \left\{ P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

cioè $\sigma: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ dato da

$$\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i$$

è una parametrizzazione completa di L . Chiaramente P_0 può essere arbitrariamente scelto fra i punti di L e la base può essere scelta arbitrariamente fra i punti di U . Il passaggio alle coordinate affini

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_r) &= P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \\ &= P_0 - \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_0 \right) + \sum_{i=1}^r t_i \underbrace{(P_0 + \lambda_i)}_{\in L}\end{aligned}$$

Chiamando $P_i = P_0 + u_i$ possiamo scrivere

$$\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \sum \lambda_0 P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i$$

cosicché

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$$

che sono tanti parametri. Così si possono ottenere i punti all'interno dei semplici con i $\lambda_i \geq 0$.

Definizione Baricentro di un insieme di punti

Dati $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^n$ arbitrari, il loro baricentro è dato dalla combinazione affine

$$B = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n P_i$$

che è la media aritmetica.

Teorema Teorema di geometria euclidea

Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle rette mediane, e divide ciascuna mediana in due parti una lunga $\frac{1}{3}$ dell'altra.

Fisicamente, il motivo per cui si incontrano è dato dal fatto che il baricentro di un segmento è il suo punto medio. Il baricentro del segmento di una delle mediane è una media pesata a $\frac{2}{3}$.

Proof

Sia $B = \frac{1}{3}(P_0 + P_1 + P_2)$. Consideriamo la retta $P_0B = \{(1-t)P_0 + tB\}$, cioè

$$P_0B = \left(1 - t + \frac{t}{3}\right) P_0 - \frac{t}{3} P_1 + \frac{t}{3} P_2$$

che sta sul lato $[P_1, P_2]$ se e solo se $1 - t + t/3 = 0$, cioè $t = 1/2$. Quindi,

$$\left(1 - t + \frac{t}{3}\right) P_0 + \frac{t}{3} P_1 + \frac{t}{3} P_2 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$$

per $t = 1/2$, che è il punto medio $M_{1,2}$ fra P_1 e P_2 . Analogamente lo stesso vale per ogni mediana $P_i M_{j,k}$. Quindi le tre mediane si incontrano nel baricentro. Inoltre, vediamo come scrivere B come combinazione affine fra P_0 e $M = M_{1,2}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 = (1-t)P_0 + tB \Big|_{t=\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} P_0 + \frac{3}{2} B\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo $B = \frac{1}{3} P_0 + \frac{2}{3} M$.

Lo stesso teorema vale per i semplici di dimensione superiore. Per il tetraedro la mediana parte dal baricentro di ogni faccia, cioè il baricentro del triangolo. Quindi abbiamo una sorta di successione di punti di baricentro, e la mediana viene spezzata in due parti con rapporto $\frac{1}{4}$.