

Analisi II

Paolo Bettelini

Contents

1 Spazi metrici	1
1.1 Definizioni	1
1.2 Successioni in spazi metrici	6
1.3 Funzioni	8

1 Spazi metrici

1.1 Definizioni

L'insieme vuoto e l'insieme X sono aperti e chiusi.

Proposition

L'unione di aperti non numerabile è aperta, mentre l'intersezione è aperta solo se finita.

Proof

Per dimostrare quest'ultima lo facciamo su due insiemi e il resto è per induzione. Prendiamo un punto nell'intersezione e prendiamo le due bolle dentro gli insiemi centrate nel punto. Siccome hanno lo stesso centro la loro intersezione è sempre una bolla di raggio il minore fra i due.

La matrice discreta può generare una bolla che è un singoletto.

Proposition

L'unione di chiusi finiti è chiusa. L'intersezione qualsiasi è chiusa.

Ogni singoletto è chiuso. Per dimostrarlo mostriamo che nel complementare esiste una bolla che non interseca il punto (vero per proprietà di Hausdorff).

Tutti i punti di accumulazione sono dei punti aderenti. Tutti i punti di un sottoinsieme sono aderenti per il sottoinsieme. Ogni punto x è di accumulazione o è isolato.

Se x_0 è aderente ad E , x_0 può essere un punto di E oppure no. Se x_0 è punto di accumulazione per E , in ogni bolla centrata in x_0 cadono infiniti punti.

Proposition

E° è aperto. E è aperto se e solo se $E = E^\circ$. E° è il più grande aperto contenuto in E .
 \overline{E} è chiuso. E è chiuso se e solo se $E = \overline{E}$. La chiusura di E è il più piccolo chiuso contenente E .

Proof per l'interno

Dimostriamo che E° è aperto. Sia $x_0 \in E^\circ$. un punto interno ad E , quindi esiste una bolla centrata in tale punto che è contenuta in E . Prendiamo un altro punto y in questa bolla. Possiamo costruire

una inner bolla centrata in y con un raggio sufficientemente piccolo da rimanere nella bolla più grande. Quindi il punto y è a sua volta interno, quindi tutta la bolla centrata in x_0 è in E° e quindi è aperto.

Dimostriamo ora che se E è aperto allora $E = E^\circ$ (l'altra implicazione è ovvia). Per fare ciò dimostriamo che E° è il più grande aperto in E . Osserviamo che E° fa parte della famiglia degli aperti di X contenuti in E . Sia A un aperto contenuto in E . Voglio dimostrare che $A \subseteq E^\circ$. Sia $x_0 \in A$. A è unione di bolle quindi esiste un raggio tale che la bolla centrata in x_0 di tale raggio è contenuta in A che è contenuto in E . Quindi, x_0 è interno ad E e $x_0 \in E^\circ$ e $A \subseteq E^\circ$. Supponiamo ora che E sia aperto. Allora E fa parte della famiglia degli aperti di X contenuti in E . Devo avere $E \subseteq E^\circ$. Dato che $E^\circ \subseteq E$ allora $E^\circ = E$.

Dire che un insieme è dentro in un altro significa dire che la sua chiusura coincide con l'insieme. Tipo la chiusura di \mathbb{Q} è \mathbb{R} quindi \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

Definizione Limitato

Se è contenuto in una bolla

Definizione Diametro

è il sup della metrica su tutte le coppie.

Definizione Ricoprimento

Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico X . Una famiglia

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è un ricoprimento aperto di E se

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Definizione Sottoricoprimento

Un Sottoricoprimento di

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è una sottofamiglia di G_α tale che continua a ricoprire. Cioè ne scarto alcuni ma deve comunque rimanere una copertura.

Definizione Compatto

Uno spazio metrico X è compatto se ogni ricoprimento aperto di E ammette un sottoricoprimento finito.

Ogni insieme finito è compatto.

Teorema

Sia X uno spazio metrico e E un sottoinsieme di X compatto.

1. E è limitato;
2. E è chiuso;
3. Ogni sottoinsieme infinito di E ha almeno un punto di accumulazione in E .

Proof

1. Consideriamo $\{B_1(x) \mid x \in E\}$ che è un ricoprimento aperto di E . Siccome E è compatto esiste un sottoricoprimento finito aperto di E , ossia $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_1(x_i)$$

Posto

$$R = 1 + \max_{i=1, \dots, n} d(x_i, x_1)$$

Allora la bolla di raggio R centrata in x_1 contiene E , quindi E è limitato.

2. Supponiamo che non sia chiuso. Allora esiste $y \in E'$ ma $y \notin E$. Vogliamo costruire un ricoprimento aperto di E che non ammette sottoricoprimento finito. Sia $r(x) = \frac{1}{2}d(x, y)$ per ogni $x \in X$. Se $x \in E$ allora $r(x) > 0$ perchè $y \notin E$. Abbiamo il ricoprimento

$$\{B_{r(x)}(x) \mid x \in E\}$$

Ma per la compattezza esisterebbe un sottoricoprimento finito, cioè $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r(x_i)}(x_i)$$

Sia ora $R = \min_{i=1, \dots, n} r(x_i)$. Allora $R > 0$ e la bolla $B_R(y)$ non interseca nessuna delle $B_{r(x_i)}(x_i)$, assurdo poiché y è punto di accumulazione.

3. Sia F un sottoinsieme infinito di E . Supponiamo che F non abbia punti di accumulazione in E . Allora ogni punto di E ha una bolla che interseca F in al più un punto. Queste formano un ricoprimento aperto di E . Ma se esistesse un sottoricoprimento finito, F sarebbe finito, assurdo.

Proposition

Sia $E \subseteq X$ compatto. Se $F \subseteq E$ è chiuso allora F è compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di F . Dobbiamo aggiungere degli insiemi aperti per coprire il resto. Siccome F è chiuso, $X \setminus F$ è aperto. Quindi $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{X \setminus F\}$ è un ricoprimento aperto di E . Per la compattezza di E esiste un sottoricoprimento finito, che escludendo $X \setminus F$ è un sottoricoprimento finito di F .

Se $F \subseteq X$ è chiuso, ed $E \subseteq X$ è compatto, allora $F \cap E$ è compatto.

Teorema Teorema dell'intersezione finita

Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di compatti tale che ogni intersezione finita è non vuota. Allora

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \emptyset$$

Proof

Supponiamo che l'intersezione sia vuota. Allora e sia $E_{\bar{\alpha}}$ un compatto fissato nella famiglia.

$$\begin{aligned} E_{\bar{\alpha}} \cap \left(\bigcap_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_{\alpha} \right) &= \emptyset \\ \implies E_{\bar{\alpha}} &\subseteq \left(\bigcap_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_{\alpha} \right)^c = \bigcup_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_{\alpha}^c \end{aligned}$$

$\{E_{\alpha}^c\}_{\alpha \neq \bar{\alpha}}$ è un ricoprimento aperto di $E_{\bar{\alpha}}$. Esistono quindi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq \bar{\alpha}$ tali che

$$\begin{aligned} E_{\bar{\alpha}} &\subseteq \bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right)^c \\ \implies E_{\bar{\alpha}} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right) &= \emptyset \end{aligned}$$

assurdo.

Corollario caso particolare

Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di compatti tale che

$$E_{n+1} \subseteq E_n$$

Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$$

Teorema Teorema di Heine-Borel

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea. Allora E è compatto se e solo se E è chiuso e limitato.

Lemma

Sia $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ tali che $I_k \supseteq I_{k+1}$. Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$$

Proof

Gli intervalli sono annidati, quindi a_k è crescente e b_k è decrescente e $a_k \leq b_k$. In particolare $a_k \leq b_i$. Consideriamo l'insieme $E = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. E è limitato superiormente, e ammette supremum x . Per definizione $x \geq a_k$. Ma $a_k \leq b_i$ per tutte le i . Quindi, $x \leq b_i$ per ogni i . Allora

$$x \in I_n \implies x \in \bigcap I_k$$

Definizione

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Un rettangolo chiuso è il prodotto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

che indichiamo con $[a, b]$.

Lemma

Sia $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia di rettangoli chiusi tali che $R_k \supseteq R_{k+1}$ per ogni k . Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k \neq \emptyset$$

Proof

Siccome

$$R_k = I_{k,1} \times I_{k,2} \times \dots \times I_{k,n}$$

possiamo applicare il primo lemma e quindi

$$\exists y_i \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_{k,i}$$

Il punto $y = (y_1, \dots, y_n)$ è in ogni R_k .

Lemma Lemma 3

In \mathbb{R}^n con la metrica euclidea ogni rettangolo è compatto.

Proof Lemma 3

Sia $R = [a, b]$ un rettangolo e supponiamo che non sia compatto. Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di R che non ammette sottoricoprimento finito. Vogliamo adesso dimezzare ambo i lati (quindi n tagli). Abbiamo adesso 2^n rettangoli.

$$[a_i, b_i] = [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Il diametro di R è $\|b - a\|$. Il diametro di ogni rettangolo ottenuto è la metà. Almeno uno di questi rettangoli ha la proprietà di non ammettere sottoricoprimento finito. Lo chiamiamo R_1 . Iterando il procedimento otteniamo una successione di rettangoli

$$R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$$

con diametro che tende a zero e che non ammettono sottoricoprimento finito, il diametro di R^k è dato da $\frac{1}{2^k} \|b - a\|$. Per il lemma precedente esiste $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k$. Siccome $R_k \subseteq R$ per ogni k , $x \in R$. Siccome $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento di R , esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $x \in G_{\alpha_0}$. G_{α_0} è aperto, quindi esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq G_{\alpha_0}$. Scegliamo k sufficientemente grande tale che $2^{-k} \|b - a\| < r$. Ma il diametro di R_k è minore di r , quindi $R_k \subseteq B_r(x)$. Quindi $R_k \subseteq G_{\alpha_0}$, assurdo perchè R_k non ammette sottoricoprimento finito.

Proof Heine-Borel

Dobbiamo dimostrare solo che se E è chiuso e limitato allora è compatto. Siccome E è limitato esiste M tale che $\|x\| < M$ per ogni $x \in E$. Quindi,

$$E \subseteq [-M, M] \times [-M, M] \times \dots \times [-M, M] = R$$

E è un chiuso contenuto in un compatto, quindi è compatto.

Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di \mathbb{R}^n ha almeno un punto di accumulazione.

Proof Teorema di Bolzano-Weierstrass

Definizione Insiemi separati

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A, B \subseteq X$ due sottoinsiemi. Diciamo che A e B sono separati se

$$A \cap \overline{B} = \emptyset \wedge \overline{A} \cap B = \emptyset$$

Devono sicuramente essere disgiunti, ma non basta. Serve che nessun punto di uno dei due insiemi è punto di accumulazione dell'altro.

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subseteq X$. E è connesso se non può essere scritto come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati.

I sottoinsiemi connessi di \mathbb{R} sono tutti e soli gli intervalli.

Uno spazio metrico è connesso se e solo se l'unico sottoinsieme non vuoto di X che è anche aperto e chiuso è X stesso. (Dimostrazione per esercizio).

\mathbb{R}^n con la metrica euclidea è connesso. (Dimostrazione per esercizio non proprio banale).

1.2 Successioni in spazi metrici

Mettere la definizione di convergenza ma con $d(x_m, y) < \varepsilon$. Oppure $x_m \in B_\varepsilon(y)$.

In particolare la successione metrica converge se e solo se $d(x_m, y) \rightarrow 0$ secondo la convergenza reale.

Il limite è unico per proprietà di Hausdorff.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subseteq X$ e sia y un punto di accumulazione per E . Allora esiste una successione $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{y\}$ che converge ad y . In particolare, E è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq E$ che converge ad y allora $y \in E$.

Proof

Dato che $y \in E'$, $\forall x_m \in \mathbb{N}$, esiste x_m tale che $x_m \in B_{\frac{1}{m}}(y) \cap E$ e $x_m \neq y$. La successione così costruita converge ad y . Infatti, $d(x_m, y) < \frac{1}{m} \rightarrow 0$.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione convergente in X . Una condizione necessaria per la convergenza è che ogni sottosuccessione converga allo stesso limite. La condizione sufficiente è che ogni sottosuccessione ammetta una sottosuccessione che converge allo stesso limite.

Definizione Compattezza sequenziale

Uno spazio metrico X è sequenzialmente compatto se ogni successione in X a valori in E ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di E .

Proposition Equivalenza compattezza

E is compact if and only if E is sequentially compact.

Questa c'è solo negli spazi metrici.

Proof

(\Rightarrow) Sia $\{x_n\}$ una successione in E . Consideriamo $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se F è finito, esiste un elemento che compare infiniti volte e la successione costante converge a tale elemento. Se F è infinito, per la compattezza F ammette un punto di accumulazione, $y \in E$. Costruiamo una sottosuccessione che converga ad y . Scegliamo x_{m_1} tale che $d(x_{m_1}, y) < 1$. Scegliamo x_{m_2} tale che $d(x_{m_2}, y) < \frac{1}{2}$ e $m_2 > m_1$, e così via. La sottosuccessione così costruita converge ad y in quanto $d(x_{m_k}, y) < \frac{1}{k} \rightarrow 0$.

(\Leftarrow) XXX

Ogni successione convergente è di Cauchy.

Per esempio con la metrica discreta una successione è convergente se e solo se è definitamente costante, che è equivalente ad essere di Cauchy, quindi è completo.

Nel caso dei razionali nei reali con metrica euclidea, consideriamo la radice di due che è un punto di accumulazione per i razionali. Esiste una successione di razionali che converge a radice di due, quindi è di Cauchy. Ma essa non può convergere in \mathbb{Q} , altrimenti convergerebbe anche in \mathbb{R} e avrebbe due limiti. Tuttavia è una successione di Cauchy in \mathbb{Q} perché è convergente in \mathbb{R} e quindi è di Cauchy in \mathbb{R} . (La condizione è la medesima). Quindi \mathbb{Q} non è completo.

Definizione Spazio completo

Uno spazio metrico (X, d) è completo se ogni successione di Cauchy in X converge ad un punto di X .

Teorema

\mathbb{R}^n con la metrica euclidea è completo.

Proof

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in \mathbb{R}^n . Scriviamo $E_n = \{x_k \mid k \geq n\}$. Notiamo che $E_n \supseteq E_{n+1}$. Ponendo la chiusura $\overline{E_n} \supseteq \overline{E_{n+1}}$. Inoltre, E_n è limitato e $\text{diam} E_n \rightarrow 0$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $m, n \geq N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Notiamo inoltre che

$$\text{diam} E_n = \sup\{d(x_m, x_k)\} < \varepsilon$$

Dimostrazione per esercizio vale che $\text{diam} F = \text{diam} \overline{F}$. Quindi, $\text{diam} \overline{E_n} \rightarrow 0$. Adesso $\{\overline{E_n}\}$ è una successione di compatti in quanto chiusi e limitati, annidati. Quindi

$$E \triangleq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset$$

Siccome $\text{diam} E = 0$ o è vuoto o contiene un solo punto, quindi contiene un solo punto $E = \{y\}$. Mostriamo che $x_n \rightarrow y$. Abbiamo $d(x_n, y) \leq \text{diam} \overline{E_n} \rightarrow 0$.

Teorema

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora X è completo.

Proof

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X . Siccome è compatto è compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge ad un punto $y \in X$. Mostriamo che $x_n \rightarrow y$. Dato

$\varepsilon > 0$ esiste N_0 tale che per ogni $m, n \geq N_0$ $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per la convergenza di $\{x_{n_k}\}$ esiste K tale che per ogni $k \geq K$ $d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Scegliamo $\bar{N} = \max\{N_0, n_K\}$. Allora per ogni $n \geq \bar{N}$ si ha

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Sia X uno spazio metrico completo, $Y \subseteq X$. Y è completo se e solo se Y è chiuso in X .

Teorema

E sequenzialmente compatto implica E compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di E . Esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in E$ esiste $\bar{\alpha}$ tale che $B_\delta(x) \subseteq G_{\bar{\alpha}}$.

1. *claim 1:* $\forall m \in \mathbb{N}$, esiste x_m tale che $B_{1/m}(x_m)$ non è sottoinsieme di G_α per tutte le α . $\{x_m\}$ è una successione in E e quindi posso estrarre una sottosuccessione convergente $x_{m_k} \rightarrow p \in E$. Esiste $\hat{\alpha}$ tale che $p \in G_{\hat{\alpha}}$. $G_{\hat{\alpha}}$ è aperto e quindi esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$. Ma $x_{m_k} \rightarrow p$ quindi con k sufficientemente grande

$$B_{1/m_k}(x_{m_k}) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$$

che è assurdo lightning.

2. *claim 2:* E è contenuto nell'unione di un numero finito di bolle di raggio δ centrate in punto di E . Per assurdo, sia $x_1 \in E$. Sicuramente $B_\delta(x_1)$ non ricopre E quindi esiste $x_2 \in E \setminus B_\delta(x_1)$. Ma assieme $B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2)$ non ricoprono E , quindi esiste un $x_3 \in E \setminus (B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2))$ e così via. La successione $\{x_m\}$ deve ammettere una sottosuccessione convergente. Ma $d(x_i, x_j) \geq \delta$ se $i \neq j$ quindi la successione $\{x_m\}$ non è di Cauchy Lightning. Quindi $E \subseteq B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \dots$.

In realtà abbiamo mostrato anche la terza.

Teorema

Sia X uno spazio metrico. Sono equivalenti:

1. X è compatto;
2. X è sequenzialmente compatto;
3. *limit point compact:* ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione.

Solo negli spazi metrici.

1.3 Funzioni

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ due spazi metrici e sia $E \subseteq X_1$. Sia $f: E \rightarrow X_2$ e $p \in E'$. Diciamo che $l \in X_2$ è limite di $f(x)$ per $x \rightarrow p$ e diciamo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in E \wedge 0 < d_1(x, p) < \delta \implies d_2(f(x), l) < \varepsilon$$

Equivalentemente $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f((B_\delta(p) \cap E) \setminus \{p\}) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

Proposition

Sia $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$. Allora $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow p$ se e solo se $f(x_n) = l$ per ogni successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in E$ e $x_n \neq p$ per tutte le n e $x_n \rightarrow p$.

Valgono i medesimi teoremi tipo l'unicità del limite e i teoremi di permanenza del segno, confronto etc.

Proposition

Sia $f: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}^n$ per $n > 1$. Allora

$$f(x) \rightarrow l \iff f_i(x) \rightarrow l_i$$

per $x \rightarrow p$.

Proof Sketch

Conderiamo la norma per tutte le i

$$|f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\| \leq \sum_k |f_k(x) - l_k|$$

Definizione Continuità

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ due spazi metrici, $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2, p \in E$. Diciamo che f è *continua* in p se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in E \cap B_\delta(p) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$$

Euivalentemente $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in E$ e $d_1(x, p) < \delta$ implica che $d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Oppure ancora $(f(B_\delta(p) \cap E)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$.

Se p è un punto isolato di E allora $\exists r > 0$ tale che $B_r(p) \cap E = \{p\}$. Scegliendo $\delta \leq r$ la definizione di continuità è automaticamente soddisfatta. Se p non è isolato, allora è un punto di accumulazione per E . In questo caso f è continua in p e vale che $f(x) \rightarrow f(p)$ per $x \rightarrow p$.

Proposition

f è continua in p se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x_n) = f(p)$$

per ogni successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in E$ per tutte le n e $x_n \rightarrow p$.

Definizione

Sia $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$. Diciamo che f è continua nell'insieme E se f è continua in ogni punto di E .

Proposition

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e sia $f: X_1 \rightarrow X_2$. Allora f è continua in X se e solo se $f^{-1}(V)$ è aperto in X_1 per tutti i V aperti in X_2 .

Proof

(\Rightarrow) Sia V un aperto di X_2 . Se $f^{-1}(V) = \emptyset$ in questo caso abbiamo finito. Altrimenti, sia $p \in f^{-1}(V)$, cioè $f(p) \in V$. Essendo V aperto, riesco a trovare

$$B_\varepsilon(f(p)) \subseteq V$$

Ma f è continua quindi riesco anche a trovare $\delta > 0$ tale che

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

Quindi $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$ quindi p è un punto interno a $f^{-1}(V)$. Per l'arbitrarietà di p segue che $f^{-1}(V)$ è aperto.

(\Leftarrow) Sia $p \in X$ e dimostriamo che f è continua in p . Sia $\varepsilon > 0$ fissato. $B_\varepsilon(f(p))$ è un aperto di X_2 . $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ è un aperto di X_1 e $p \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$$

cioè

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

che è la definizione di continuità.

Siccome $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$ allora f è continua se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X_1 per ogni chiuso in $C \in X_2$. Molto utile.

In generale le funzioni continue non mandano aperti in aperti. Per esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $x \rightarrow x^2$. Abbiamo che

$$f((-1, 1)) = [0, 1)$$

Definizione Funzione aperta

Una funzione viene detta *aperta* se $f(U)$ è aperto in X_2 per tutti gli insiemi U aperto om X_1 . Analogamente funzione chiusa.

Sia $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n > 1$ è continua se e solo se tutte le sue componenti sono continue.

Proposition

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici, $f: X_1 \rightarrow X_2$ una funzione continua. Se X_1 è compatto, allora $f(X_1)$ è compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di $f(X_1)$. Consideriamo $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ che sono degli aperti. Queste preimmagini sono un ricoprimento di X_1 , che è compatto e quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito $f^{-1}(G_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(G_{\alpha_n})$. Vogliamo mostrare che $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ sono un ricoprimento di $f(X_1)$.

$$f(X_1) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(G_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

Teorema Teorema di Weierstrass

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, $\exists x_1, x_2 \in X$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in X$$

cioè f possiede massimo e minimo assoluto.

Proof Teorema di Weierstrass

$f(X)$ è compatto in \mathbb{R} , quindi è chiuso e limitato. Siccome $f(X)$ ammette infimum e supremum reali. Siccome $\inf f(x)$ e $\sup f(x)$ appartengono a $\overline{f(X)}$ e $f(X)$ è chiuso, appartengono allora ad $f(X)$ e quindi sono massimi e minimi.

Teorema Teorema da compatto ad Hausdorff

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici con X_1 compatto e $f: X_1 \rightarrow X_2$ continua. Allora, f è chiusa.

In realtà questo funziona con domini compatti e codomini di Hausdorff.

Proof Teorema da compatto ad Hausdorff

Sia C un chiuso di X_1 . Voglio dimostrare che $f(C)$ è un chiuso di X_2 . Sappiamo che C è chiuso in un compatto, quindi è compatto. La funzione è continua e quindi $f(C)$ è compatto. Siccome i compatti sono chiusi allora è chiuso.

Corollario

Sia $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ continua, X_1 compatto e f biunivoca. Allora, f^{-1} è continua.

Proof

Dobbiamo mostrare che $(f^{-1})^{-1}(C)$ è chiuso per ogni C chiuso di X_2 . Ma questo coincide con $f(C)$ che è chiusa per il teorema da compatto ad Hausdorff.

Teorema

Sia $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ continua e sia $E \subseteq X$ connesso. Allora $f(E)$ è connesso.

Proof

Supponiamo che $f(E)$ non sia connesso. Esistono quindi due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e separati tali che

$$f(E) = A \cup B$$

Poniamo $F = f^{-1}(A) \cap E$ e $G = f^{-1}(B) \cap E$. Sicuramente $F, G \neq \emptyset$ e $E = F \cup G$. Vogliamo mostrare che F e G sono separati. Siccome $A \subseteq \overline{A}$ vale anche $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$. L'applicazione f è continua e la chiusura di A è un chiuso. Quindi la preimmagine del chiuso \overline{A} è un chiuso. Consideriamo ora

$$\overline{F} \subseteq \overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$$

perché f è continua se \overline{A} è chiuso. Quindi $\overline{F} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ che implica $f(\overline{F}) \subseteq \overline{A}$. D'altro canto $f(G) \subseteq B$ e $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, e quindi $\overline{F} \cap G \neq \emptyset$ perché altrimenti vi sarebbe un elemento sia in \overline{A} che in B . Dovrebbe essere $f(x) \in \overline{A}$ e $f(x) \in B$ lightning. Analogamente si dimostra che $F \cap \overline{G} = \emptyset$ cioè abbiamo scritto E come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati. Ma E è connesso lightning.

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f: X_1 \rightarrow X_2$. Allora f è uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x, y \in X_1$

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Teorema Theorema di Heine-Cantor

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ continua e X_1 compatto. Allora, f è uniformemente continua.

La dimostrazione è la medesima rispetto al caso banale.

Definizione Funzione di Lipschitz

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici, $f: X_1 \rightarrow X_2$. Diciamo che f è *lipschitz-continua* o *lipschitziana* se $\exists \alpha > 0$ tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha d_1(x, y)$$

per tutte le $x, y \in X_1$.

Proposition

Se f è Lipschitz-continua, allora è uniformemente continua.

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$. Diciamo che f è una *contrazione* se $f \in \text{Lip}_\alpha(X_1, X_2)$ con $\alpha < 1$.

Se il supremum è finito, allora questa è la miglior costante di Lipschitz (in generale)

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Esempio

Consideriamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$. Non è di lipschitz in quanto non è uniformemente continua. Per mostrarlo possiamo dire

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|$$

Se restringessimo il dominio di questa funzione ad un intervallo limitato, allora sarebbe di Lipschitz, per il supremum.

Proposition

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile. Allora, $f \in \text{Lip}_\alpha(I, \mathbb{R})$ se e solo se $|f'(x)| \leq \alpha$ per tutte le x .

Proof

(\Rightarrow) Cominciamo con

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} \\&\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha|x+t-x|}{|t|} = \alpha\end{aligned}$$

Possiamo togliere il limite dal modulo in quanto il modulo è una funzione continua.

(\Leftarrow) Per il teorema di Lagrange esiste $\theta \in (\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$

$$\begin{aligned}f(x) - f(y) &= f'(\theta)(x - y) \\|f(x) - f(y)| &= |f'(\theta)| \cdot |x - y| \\&\leq \alpha|x - y|\end{aligned}$$

Esercizio

Per quali $a \leq b$ la funzione $f(t) = 1 + t - \arctan(t)$ è una contrazione in $[a, b]$. Stabiliamo quindi se la derivata è limitata

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

notiamo quindi che $0 \leq f'(t) \leq 1$. Quindi è sicuramente lipschitziana. Notiamo allora che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'(t)| = 1 = \alpha$$

Quindi per far sì che $\alpha < 1$ dobbiamo limitare il dominio ad un intervallo limitato. Quindi $-\infty < a \leq b < \infty$. Porta l'intervallo $[a, b]$ in sé? Siccome la funzione è crescente porta intervalli a intervalli di estremi $f(a)$ e $f(b)$. Mi basta quindi imporre che $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} 1 + a - \arctan a \geq a \\ 1 + b - \arctan b \leq b \end{cases} = \begin{cases} \arctan a \leq 1 \\ \arctan b \geq 1 \end{cases}$$

e quindi $a \leq \tan 1 \leq b$. Notiamo che $f(\tan 1) = \tan 1$ quindi è un punto fisso per il teorema delle contrazioni.

Esempio

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = v \cdot x$. Dobbiamo studiare $|f(x) - f(y)| = |v \cdot x - v \cdot y|$ usando la bilinearità del prodotto scalare ottengo $|v \cdot (x - y)|$. Per Cacuchy-Schwarz

$$|v \cdot (x - y)| \leq \|v\| \cdot \|x - y\|$$

che è quindi di Lipschitz.

Teorema Teorema di Banach-Cacciopoli o delle contrazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f: X \rightarrow X$ una contrazione. Allora $\exists_{=1} x \in X$ tale che $f(x) = x$.

Le ipotesi sono necessarie. Togliamo per esempio la completezza e consideriamo quindi $X = (0, +\infty)$ con la contrazione $f(x) = x/2$. Questa contrazione non ha punti fissi. Togliamo invece l'ipotesi che sia una contrazione. Richiediamo solamente che sia una contrazione debole, cioè

$$d_2(f(x), f(y)) \leq f_1(x, y)$$

Consideriamo $X = [0, +\infty)$ e prendiamo $f(t) = t + e^{-t}$. La derivata è $f'(t) = 1 - e^{-t}$ che è nulla nell'origine e poi tende ad 1 dal sotto. Chiaramente non ci sono punti fissi in quanto $f(t) = t$ è come dire $e^{-t} = 0$.

Proof

Cominciamo mostrando l'esistenza del punto fisso. Sia $x_0 \in X$ un punto fissato e consideriamo la successione $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Mostriamo che $\{x_n\}$ è di Cauchy, quindi siccome lo spazio è completo converge. Dobbiamo mostrare che $d(x_n, x_m)$ tende a zero quando n, m crescono. Consideriamo inizialmente

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la distanza generica e usiamo la disuguaglianza triangolare ripetutamente per ogni step

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+k-i}, x_{n+k-i-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i} \\ &= \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{k-i-1} \\ &= \alpha^n \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Per sbarazzarci di k (siccome vogliamo k arbitrario e il ε nella definizione di Cauchy deve essere uniforme rispetto ad esso) maggioriamo la somma parziale della serie geometrica con il valore della serie geometrica. Siccome $0 < \alpha < 1$ il termine non esplode e la serie geometrica converge.

2. Detto x il limite di $\{x_n\}$ mostriamo che è un punto fisso di f . Consideriamo il limite per $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x)$$

perché f è continua.

Mostriamo ora l'unicità del punto. Supponiamo che x, y siano due punti fissi. Vogliamo mostrare che $d(x, y) = 0$. Abbiamo

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)(1 - \alpha) d(x, y) \leq 0$$

siccome $1 - \alpha > 0$ ciò succede solo se $d(x, y) = 0$.

Abbiamo notato che

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

Con $k \rightarrow \infty$ otteniamo

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

quindi tende al punto fisso in maniera esponenziale.

Denotiamo $f^n = f \circ f \cdots f$. Se f è una contrazione, una qualsiasi sua iterazione è anch'essa una contrazione.

$$d(f(f(x)), f(f(y))) \leq \alpha d(f(x), f(y)) \leq \alpha^2 d(x, y)$$

Per induzione segue il resto. In generale la costante è α^n . Ci chiediamo se nel caso in cui f non sia una contrazione, una sua iterata lo possa essere.

Esempio

Per esempio $f(x) = \cos x$, che non è una contrazione in quanto il supremum della derivata è 1. Invece, $\cos(\cos(x))$ ha derivata

$$\sin(\cos(x)) \cdot \sin$$

Il suo modulo è dato da

$$|\sin(\cos(x))| \cdot |\sin x| \leq \sin(1) < 1$$

Il secondo termine può solamente essere maggiorato da 1, mentre il secondo, siccome $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, può essere maggiorato da $\sin 1$. Quindi è una contrazione.

Con questo possiamo per esempio mostrare che il coseno ha un punto fisso, siccome una sua iterata è una contrazione.

Corollario Indebolimento del teorema delle contrazioni: teorema delle iterate contrazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f: X \rightarrow X$ un'applicazione tale che $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che f^n sia una contrazione. Allora $\exists_{=1} x \in X$ tale che $f(x) = x$.

Proof

Mostriamo che i punti fissi di f (che sono uno solo) sono i punti fissi di f^n . Sia x un punto fisso di f . Allora $f^n(x) = f(f(\cdots(x))) = f(x) = x$. Quindi tutti i punti fissi di f sono anche punti fissi di f^n . Sia ora x tale che $f^n(x) = x$. Componendo otteniamo

$$\begin{aligned} f(f^n(x)) &= f(x) \\ f^n(f(x)) &= f(x) \end{aligned}$$

quindi $f(x)$ è un punto fisso di f^n , ma siccome f è una contrazione ha solo un punto fisso, quindi coincidono $f(x) = x$. Quindi tutti i punti fissi di f^n sono anche punti fissi di f .

Parametrizziamo ora la funzione

Consideriamo $T: X \times Y \rightarrow X$ come operatore parametrizzato dai valori di Y . Fissato y imponiamo che $T(-, y): X \rightarrow X$ sia una contrazione. Per tutte le y esiste un solo $x \in X$ tale che $T(x, y) = x$. Data la dipendenza funzionale $x = \varphi(y)$ vogliamo capire come il punto fisso dipende dal parametro. In particolare, vogliamo mostrare che φ è costante sotto alcune ipotesi.