Topologia I

Paolo Bettelini

Contents

1 Topologia

Invarianti: p_0 corrisponde al numero di componenti connesse di uno spazio. Formalmente $\pi_0(X)$ è l'insieme delle componenti connesse di X per archi. Invece, p_1 è il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$, che descrive la struttura dei cammini chiusi fino a omotopia.

Assioma Estensionalità

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$$

Proposition Relazione di aggiunzione

Valgono

$$S \subseteq f^{-1}(T) \iff f(S) \subseteq T$$

Da cui derivano $f(f^{-1})(T) \subseteq T$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere suriettiva. E pure $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere iniettiva.

L'operazione di controimmagine preserva tutte le operazioni insiemistiche.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$X \backslash f^{-1}(T) = f^{-1}(Y \backslash T)$$

L'operazione di immagine preserva in generale solo le unioni.

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

le altre due non valgono necessariamente. Abbiamo solo

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

se f non è iniettiva la direzione opposta non vale necessariamente. Infatti potrebbero esistere x, x' tale che $x \in A \backslash B$ e $x' \in B \backslash A$ tali che $f(x) = f(x')$. La medesima logica vale per il complementare.

Proposition Proprietà universale del quoziente

Sia $f\colon X \to Y$ e $\sim$ relazione di equivalenza su X. Sono equivalenti:

1. f è costante sulle classi di equivalenza
$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$
2. f fattorizza (in modo necessaria unico, essendo π suriettivo) attraverso π, cioè $\exists_{=1}\, g\colon X/_{\sim} \to Y$ tale che $g \circ \pi = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/_{\sim} \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof

1. $(2) \implies (1) : f = g \circ \pi$. Abbiamo
$$x \sim x' \implies \pi(x) = \pi(x') \implies g(\pi(x)) = g(\pi(x'))$$
che sono uguali a $f(x)$ e $f(x')$.
2. $(2) \implies (1)$: Definiamo $g\colon X/_{\sim} \colon Y$ come
$$g([x]) \triangleq f(x)$$
bisogna verificare che sia ben posta. Vogliamo quindi che se $[x] = [x']$ allora $f(x) = f(x')$. Ma ciò è garantito dalla ipotesi.

In $\mathbb{R}^n$.

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_\infty(x, y)$$

2 08 ottobre 2025 DA METTERE

Esercizio

Le topologie con la proprietà che le intersezioni arbitrari di aperti sono aperti, possono essere caratterizzate esplicitamente. Essi sono esattamente, a meno di omeomorfismo, gli spazi topologici della seguente forma: dato un insieme preordinato $(P, \leq)$, la topologia di Alexandrov $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ su $\mathcal{P}$ è la topologia i cui aperti sono i sottoinsiemi $U \subseteq \mathcal{P}$ tale che $\forall p \leq q, p \in U \implies q \in U$.

2.1 Generated topology

Proposition

Data una collezione di topologie $\{\tau_i\}_{i \in I}$ su un isieme X. La famiglia

$$\tau = \bigcup_{i \in I} \tau_i$$

è ancora una topologia su X.

Corollario

Sia X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ famiglia fi sottoinsiemi. Esiste la topologia meno fine su X che contiene i sottoinsiemi in S come aperti. Tale topologai viene detta la topologia generata da S.

Definizione Topologia dell'unione disgiunta

Sia $\{X_i \,|\, i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici. Allora lo spazio topologico è definita come

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i$$

Possiamo definire astrattamente la topologia dell'unione disgiunta su $\sqcup X_i$ come a topologia più fine che rende tutte le mappe $\tau_i \colon X_i \to \bigsqcup X_i$ continue.
Alternativamente, possiamo definire la topologia come la topologia generata dalla famiglia di sottoinsiemi dell'insieme $\sqcup X_i$ che sono aperti in qualcuno degli X_i.

Vediamo una caratteristica esplicita di questa topologia

Proposition

Un insieme

$$A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

è aperto per la topologia dell'unione disgiunta se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni $i \in I$.

Proof

Definiamo τ come la collezione dei sottoinsiemi dati nella proposizione tale che $A \cap X_i$ è aperto in X_i. Usando il fatto che su X_i abbiamo delle topologia possiamo dimostrare che tale collezione soddisfa gli assiomi di topologia:

1. Siano $A, B \in \tau$. Allora $A \cap X_i$ e $B \cap X_i$ sono entrambi aperti in X_i. Di conseguenza la loro unione è ancora aperta in X_i. Possiamo scrivere

$$(A \cap X_i) \cup (B \cap X_i) = (A \cap B) \cap X_i$$

   che è appunto aperto.

Notiamo che τ contiene tutti i sottoinsiemi che sono aperti in qualche X_i. Infatti, $A \subseteq X_i$ è aperto di X_i, $A \cap X_i = A$ aperto di X_i e $A \cap X_j = \varnothing$ aperto di X_j per $j \neq i$. Quindi τ contiene la topologia dell'unione disgiunta (per definizione di quest'ultima come topologia generate). Viceversa, dato $A \in \tau$ vogliamo mostrare che A è aperto per la topologia dell'unione disgiunta.

$$A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$$
$$A = A \cap \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) = \bigsqcup_{i \in I} (A \cap X_i)$$

che è una disgiunzione di insiemi aperti

Queste due definizioni sono una un po' il duale dell'altra, da due punti di vista differenti. Da una parte considerando le applicazioni (ci arriviamo come la topologia più fine), mentre l'altro è come se costruissimo la topologia dal basso.

Possiamo verificare che questa è effettivamente la topologia più fine che rende queste mappe continue. In generale, data una famiglia di applicazioni $f_i \colon (X_i, \tau_I) \to y$ si può considerare la topologia più fine che rende le mappe f_i continue. In particolare nel caso di un'unica funzione la topologia più fine che rende f continua è la topologia detta topologia quoziente indotta da f.

Esempio Topologia di Zaniski

Let $\mathbb{K}$ be a field and consider $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Consider the affine space given by the cartesian exponent $\mathbb{K}^n$. For each $f \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ consider

$$D(f) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \cdots, a_n) \neq 0\}$$

the set $\{D(f)\}$ is a basis for the topology of $\mathbb{K}^n$ called Zaniski topology.

Proof Che è una base

Chiaramente $D(0) = \varnothing$ e $D(1) = \mathbb{K}^n$. The latter already proves that the whole space can be expressed as a union. For the intersection, consider

$$D(f) \cap D(g) = \{\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \cdots, a_n) \neq 0 \land g(a_1, \cdots, a_n) \neq 0\}\}$$

Siccome un campo è un dominio di integrità la condizione è equivalente a $(f \circ g)(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$ ma ciò è uguale a $D(f \circ g)$. Quindi $\{D(f)\}$ forma una base per una topologia sul dato spazio.

Esercizio

Caratterizzare i chiusi di questa topologia. Quindi generiamo tutti gli aperti e prendiamo i complementari, o usiamo le leggi di de morgan. I chiusi sono generati da un ideale.

TODO anche la dimostrazione che la chiusura è pari ai punti x tali che per ogni U in I(x), U intersection B neq emptyset.

Definizione

Uno spazio topologico si dice T_1 se ogni punto $\{x\}$ (come sottoinsieme dello spazio) è chiuso.

Per esempio la retta euclidea.

Proposition

Sia X uno spazio topologico. Allora X è T_1 se e solo se $\forall x \in X$,

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \{x\}$$

Proof

($\Longrightarrow$) Abbiamo ovviamente l'inclusione $\supseteq$. Viceversa, dimostriamo che

$$\bigcap_{U \in I(x)} U \subseteq \{x\}$$

che è euivalente a dire

$$X \backslash \left(\bigcup_{U \in I(x)} U \right) \geq X \backslash \{x\}$$

Prendiamo quindi un punto $y \in X \backslash \{x\}$ che è come dire $y \neq x$. Siccome lo spazio è T_1, abbiamo che $\{y\}$ è chiuso e quindi il suo complementar e $X \backslash \{x\}$ è un aperto che contiene x in quanto $x \neq y$. Quindi $X \backslash \{y\} \in I(x)$. Ponendo $U = X \backslash \{y\}$ otteniamo quindi che

$$y \in X \backslash U = X \backslash (X \backslash \{y\}) = \{y\}$$

($\Longleftarrow$) Applichiamo la caratterizzazione della chiusura del singoletto, cioè $y \in \overline{\{x\}}$ è come dire che per ogni $U \in I(x)$, $U \cap \{x\} \neq \varnothing$. Ma tutto ciò è equivalente a dire che

$$x \in \bigcap_{U \in I(x)} U = \{y\}$$

che è equivalente a dire che $x = y$. Quindi, $\overline{x} = \{x\}$ e quindi è chiuso.

Definizione Definizione di convesso in $\mathbb{R}^n$

.

Sono proprietà topologiche T_1, proprietà di Hausdorff, connessione, connessione per archi.

3 Lezione del 23

L'operazione di controimmagine fra le topologia presenta tutte le operazioni insiemistiche. Sezione sugli invarianti topologici? (Sposando anche la definizione di quest'ultima).

Lemma

Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo. Allora, per ogni sottospazio $S \subseteq X$, la restrizione di f a S è un omeomorfismo.

Proof

Un omeomorfismo è un coperazione continua biettica con inverso continua. Inoltre vi è la proprietà universale della topologia di sottospazio.

Esempio

L'intervallo $(0,1)$ e $[0,1)$ non sono omeomorfi.

Proof

Supponiamo che esiste un tale omeomorfismo $f\colon [0,1) \to (0,1)$. Abbiamo che $f(0) \in (0,1)$. Prendiamo $S = [0,1)\backslash\{0\} = (0,1)$. Then, f restricted to S is a homeomorphism from S to

$$f(S) = (0,1)\backslash\{f(0)\} = (0, f(0)) \sqcup (f(0), 1)$$

But $(0,1)$ is connected and $f(S)$ is not, which is absurd.

Esempio

Sia $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste x tale che $f(x) = f(-x)$, in particolare non è iniettiva.

Proof

Sia $g\colon S^n \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = f(x) - f(-x)$. Chiaramente g è continua. Chiaramente $g(x) = 0$ se e solo se $f(x) = f(-x)$. S^n è connesso per archi e quindi connesso. Allora $g(S^n)$ è connesso nei reali, ovvero è un intervallo. Let $y \in S^n$. Then, $g(y), g(-y) \in g(S^n)$. Consider

$$\frac{1}{2}g(y) + \frac{1}{2}g(-y) \in g(S)$$

Then

$$\frac{1}{2}\left(f(y) - f(-y)\right) + \frac{1}{2}\left(f(-y) - f(y)\right) = 0$$

Corollario

Aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$ per $n > 1$.

Proof

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ contiene al suo interno un sottospazio omeomorfo a S^{n-1}. Suppose that there is a homeomorphism $f\colon A \to f(A)$ where A is open in $\mathbb{R}^n$ and $f(A)$ is open in $\mathbb{R}$. La reistrizione di f ad un sottospazio $B \cong S^{n-1}$ è ancora un omeomorfismo. Ma dal risultato precedente non può esistere una tale applicazione biettiva, assurdo.

Lemma

Sia $f\colon X \to Y$ un applicazione continua e suriettiva verso Y connesso e $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ connesso. Allora, se f è aperta oppure chiusa, X è connesso.

Proof

Supponiamo che f sia aperta senza perdita di generalità. Prendiamo A_1, A_2 aperti non vuoti di X tale che $X = A_1 \cup A_2$. Vogliamo mostrare che sono disgiunti. Abbiamo che $Y = f(X) = f(A_1) \cup f(A_2)$. Siccome Y è connesso, la loro intersezione non può essere vuota. Abbiamo quindi almeno un punto $y \in A_1 \cap A_2$. Consideriamo

$$f^{-1}(y) \cap A_1 \neq \varnothing \qquad f^{-1}(y) \cap A_2 \neq \varnothing$$

Per ipotesi

$$f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y) \cap A_2)$$

è aperto. Quindi

$$(f^{-1}(y) \cap A_1) \cap (f^{-1}(y) \cap A_2) \neq \varnothing$$

quindi $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

Teorema

Siano X, Y due spazi topologici coneessi. Allora, $X \times Y$ è connesso.

Proof

Applichiamo il lemma. Prendiamo $p : X \times Y \to Y$ una delle due proiezioni. Applichiamo il lemma. P è aperta (dai risultato sulla topologia prodotto). Inoltre P è continua e suriettiva (se l'insieme X non è vuoto, in tal caso il risultato è banale). Consideriamo la fibra $p^{-1}(y) = X \times \{y\}$ che è omeomorfo ad X, che è connesso. Quindi le ipotesi sono soddisfatte e $Y \times X$ è connesso.

Lo stesso vale per la connessione per archi.

Proof

Siano X, Y connessi per archi. Allora, $X \times Y$ è connesso per archi.

Proof

Mostriamo che ogni coppia di punti è collegata da un cammino. Siano quindi $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Siccome X è connesso per archi, esiste un cammino $\alpha\colon I \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = x'$. Analogamente $\beta(0) = y$ e $\beta(1) = y'$. Per la proprietà universale del prodotto con I come vertice, esiste un cammino (unico) che fattorizza il diagramma tale che i due triangoli commutino mediante le proiezioni. Quindi $(\alpha, \beta)\colon I \to X \times Y$ dato da $(\alpha, \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$.

Definizione Componente connessa

Sia X spazio topologico. Un sottospazio C di X si dice una componente connessa se soddisfa le seguenti:

1. C è un sottospazio connesso
2. se $C \subseteq A$ e A è connesso allora $C = A$.

Esempio

Sia X uno spazio e $C \subseteq X$. Se C è sottospazio aperto, chhiuso, connesso e non vuoto, allora è componente connessa. Ciò è dato dal fatto che C è anche chiuso e aperto in A.

Lemma

Sia Y un sottospazio connesso di X. Sia W un sottospazio tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora W è connesso.

Proof

Sia $Z \subseteq W$ aperto, chiuso e non vuoto. Consideriamo $Z \cap Y$. Questo è aperto e chiuso di Y per "transitività" della topologia di sottospazio, (cioè se abbiamo una successione di spazi possiamo indurre la topologia di sottospazi in un colpo solo oppure a step). Sappiamo che

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid \text{for every open } A \text{ of } X \text{ where } x \in A, A \cap Y \neq \varnothing\}$$

Siccome $Z \neq \varnothing$ è aperto in W, $Z = A \cap W$ per qualche A aperto di X. Quindi, $\forall x \in Z \subseteq A$, $A \cap Y \neq \varnothing$ (e quindi possono prendere un $x \in Z$). Siccome Y è connesso, deduciamo che $Z \cap Y = Y$. Infatti quest'ultima intersezione è aperta e chiusa in Y per definizione di topologia di sottospazio e l'intersezione non è vuota. Quindi, $Y \subseteq Z$. Consideriamo la chiusura (in W) di entrambi $\overline{Y} \subseteq \overline{Z}$. Quindi la chiusura in W è pari a $\overline{Y} \cap W$ e l'altro $\overline{Z} = Z$ siccome Z è chiuso in W per ipotesi. Quindi $\overline{Y} \subseteq Z$. Siccome $Z \subseteq W$, abbiamo $W = Z$.

Lemma

Sia x un punto di uno spazio topologico X e sia $\{Z_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazio connessi di X tali che $x \in Z_i$. Allora, $\bigcup_i Z_i$ è un sottospazio connesso.

Proof

Sia

$$W = \bigcup_{i=1} Z_i$$

Dato $A \subseteq W$ aperto, chiuso e non vuoto, vogliamo mostrare che $A = W$. Per ogni $i \in I$, andiamo a considerare $A \cap Z_i$ che è un aperto e chiuso di Z_i per definizione di sottospazio. Siccome Z_1 è connesso, $A \cap Z_i = \varnothing$ oppure $A \cap Z_i = Z_i$. Quest'ultimo è equivalente a dire che $Z_i \subseteq A$. Supponiamo $A \neq \varnothing$. Quindi

$$A = \bigcup_{i \in I} Z_i \cap Z_i$$

Allora esiste almeno un $i \in I$ tale che $A \cap Z_i \neq \varnothing$, cioè $Z_i \subseteq A$. Dato il punto x come nelle ipotesi del lemma, abbiamo $x \in Z_i$. Segue quindi che $x \in A$. Allora $x \in Z_i \cap A$ per ogni $i \in I$. Per ipotesi$x \in Z_i$ per tutte le i. Quindi, $Z_i \cap A \neq \varnothing \iff Z_i \subseteq A$, allora

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq A$$

cioè $A = W$.

Corollario

Siano A, B due sottospazi connessi di uno spazio topologico. Allora, se $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cup B$ è connesso.

Proof

Applichiamo il lemma al caso della famiglia $\{A, B\}$.

Lemma

Sia $x \in X$ un punto di uno spazio topologico X. Denotiamo $C(x)$ l'unione di tutti i sottospazi connessi di X ch contengono il punto x. Allora $C(x)$ è una componente connessa di X contenente il punto x.

Proof

1. $C(x)$ è connesso per il lemma;
2. $C(x) \subseteq A$ con A connesso. $\{x\}$ è un sottospazio connesso di X contenente x. Per definizione $\{x\} \in C(x)$. Abbiamo allroa che $x \in C(x) \subseteq A$ e quindi $x \in A$. Ma A è connesso, quindi $A \subseteq C(x)$. Allora $A = C(x)$.

Teorema

Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse. Ogni componente connessa è chiusa e ogni punto è contenuto in una e una sola componente connessa.

Proof

Siccome $x \in C(x)$,

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Sia C componente connessa. Da un risultato precedente, sappiamo che $\overline{C}$ è ancora un connesso. Tuttavia $C \subseteq \overline{C}$ e per la seconda condizione nella definizione di componente connessa, ci deve essere uguaglianza. Siano C, D componenti connesse. Supponiamo che non siano disgiunte. Abbiamo che $C \cup D$ è connesso in quanto unione dei connessi

$$C, D \subseteq C \cup D$$

Ciò implica che $C = C \cup D$ e $D = C \cup D$. Allora $C = D$

Questo teorema giustifica la seguente definizione.

4 Esercizi 21 ottobre

Esercizio

Siano f, g omeomorfismi, allora la loro composizione (se esiste) è un omomorfismo e l'inverso è un omomorfismo. Quindi $\text{Omeo}(X)$ è un gruppo. Siano X, Y, Z spazi tali che $f\colon Y \to Z$ e $g\colon X \to Y$. Per definizione l'inverso è un omeomorfismo. Siccome $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ se gli inversi sono omeomorfismo allora è un omeomorfismo. Quindi è un gruppo.