Category theory

Paolo Bettelini

Contents

1 XXX

Se un oggetto iniziale esiste in una categoria allora è unico a meno di isomorfismo. Se esistessero due oggetti iniziali 0 e $0'$, allora ci deve essere un morfismo fra 0 e $0'$ e uno fra 0 e $0'$. Dalla definizione tale morfismo è isomorfismo. Il duale è il medesimo teorema con l'oggetto terminale.

Studiamo cosa sono gli oggetti iniziali nella categoria Sets. Se consideriamo l'insieme vuoto, vi è una e una sola funzione che colla tale insieme a tutti gli altri. Quindi l'insieme vuoto è l'oggetto iniziale della categroia Sets.

Invece, l'oggetto terminale è il singoletto della categoria Sets. Infatti tutti i singoletti sono isomorfi fra loro.

L'uguaglianza degli insiemi diventa isomorfismo nelle categorie. Possiamo dare un complementare dell'assioma dell'estensionabilità nelle categoria, cioè due oggetti sono uguali se hanno gli stessi elementi generalizzati.

1.1 Tipi di categorie

La categoria Set, Top, Gr, Rng, Vect/K, T-mod(Set).

Possiamo costruire la categoria discreta data un insieme, i cui oggetti sono gli elementi e le cui freccie sono solo le identità.

Possiamo fare una categoria da un preordine. Essa ha al massimo un morfismo fra due oggetti distinti. Esercizio: queste categorie sono tutte quelle indotte da un preordine.

Possiamo fare una categoria con un singolo oggetti (monoide).

Possiamo fare un groupoide: una categoria con soli isomorfismi. In particolare se un grupoide ha solo un oggetto allora è un gruppo.

La categoria Cat è la categoria di tutte le categorie (piccole) dove i morfismi sono funtori

Mettere l'esempio del funtore duale fra spazi vettoriali. Il doppio duale è una trasformazione naturale.

2 Funtori

Date due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ possiamo definire TODO la categoria $[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ dei funtori da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ dove gli oggetti sono i funtori da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$, i morfismi sono le trasformazioni naturali, e la composizione è componente per componente.

Esercizio

Una trasformazione naturale è un isomorfismo naturale se e solo se tutte le sue componenti sono degli isomorfimsmi nella categoria d'arrivo.
Dalla definizione α ammette un inverso nella categoria **Cat**. Cioè due funtori sono naturalmente isomorfi se sono oggetti isomorfi in $[C, C']$. L'esercizio richiede di costruire una trasformazione naturale inversa e verificare che sia ancora naturale. Quindi esiste α' tale che $\alpha \circ \alpha' = 1$ e $\alpha' \circ \alpha = 1$. Se nel diagramma della trasformazione naturale inverto le freccie di α la commutatività vale ancora, ma nell'altra direzione.

TODO definizione dull and faithful functors and subcategory. Non definiamo una nozione di suriettività fra oggetti in quanto l'uguaglianza fra oggetti non è robusta. Vogliamo non distinguere oggetti essenzialmente uguali. L'ugualignza diventa l'isomorfismo. Infatti la suriettività essenziale usa un isomorfismo.

Nella definizione del funtore sottocategoria, il functore è sempre federale, ma non necessariamente full.

Definizione Category equivalence

TODO Anche qui non usiamo l'uguaglianza ma l'isomorfismo.

Teorema

Under the axiom of choice a functor is part of an equivalence of categories if and only if it is full, faithful and essentially surjective.

Proof

($\Longrightarrow$) Trivial check. (Exercise) Non richiede l'assioma della scelta.

($\Longleftarrow$) Dobbiamo costruire un funtore G che sia un inverso. Quindi dobbiamo effettuare delle scelte.

Questa nozione ci dice che usando AC possiamo definire un quasi-inverso, che non è unico. Ma in generale i funtori per cui devo eseguire una scelta non sono particolarmente interessanti.

Dato un funtore F possiamo considerare $\mathrm{End}(F)$ che è il monoide delle trasformazioni naturali da F a F. In particolare, comprende gli automorfismi e quindi il gruppo $\mathrm{Aut}(F)$. Nel contesto degli insiemi mancano le componenti, che sono i morfismi (a parte l'identità). Quindi questo contetto diventa banale.

Mettere i 3 esempi di functor categories. La composizione della functor category è componente per componente

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "(\alpha*\beta)(a)=\beta(c)\circ\alpha(a)"'] & G \arrow[r, Rightarrow, "\beta"] & H \end{tikzcd}$$

3 3 Esempi

Esempio 2: Chiamiamo X l'insieme. Visto che τ è un endomorfismo di X, prendiamo il prodotto cartesiano e otteniamo una azione sinistra. Se volessimo l'azione destra potremmo prendere il duale del monoide.

La condizione di naturalezza corrisponde con la condizione che f sia una funzione equivariante, cioè rispetta l'azione (M-equivariante).

$$m *' f(*) = f(m * x)$$

cioè è compatibile con le due azioni, di M su X e di M su Y.

Quindi la categoria studiata è la categoria delle azioni sinistre su insiemi e delle mappe M-equivariante fra loro.

Esempio 3: Non abbiamo condizioni di naturalità nel senso che escludiamo le identità che sono banali. Le trasformazioni naturali corrispondono a famiglie di funzioni

Definizione Slice category

La composizione è data dai morphism $h\colon a \to b$ tale che il diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

Esercizio

Show that for any set I, set slice category $\mathbf{Sets}/I$ is equivalent to the category $[I, \mathbf{Set}]$ (which is the disjoint union).
Partiamo da una collezione di insiemi indicizzata e la mando nell'unione disgiunta degli A_i per formare la mappa canonica invertibile: $(x, i) \to i$ e nell'altra direzione, partendo da un insieme A con $f\colon A \to I$, associo la controimmagine (che in questo caso posso fare in generale). Quindi prendo le fibre $\{f^{-1}(i) \mid i \in I\}$. Dibbiamo verificare i dettagli.

C'è un equivalenza fra le categorie indicizzate e la nozione di fibrazione (che sono dei funtori). Il risultato che forma ciò è Grothendieck's equivalence between indexed categories and fibrations. Le indexed categories generalizzano i funtori $I \to \mathbf{Sets}$, dove I viene sostituita dalla categoria delle categorie piccole, e i funtori dagli pseudofuntori. Le fibrazioni generalizzano gli oggetti si $\mathbf{Sets}/I$.

4 Suboject

è la generalizzazione categorica dei sottoinsiemi. Anche qua il triangolo con i due monomorfismi e il morfismo sopra deve commutare. Ciò è equivalente (piccola verifica esericizio) al fatto che siano isomorfe come oggetti nelle categoria slice.

Dobbiamo considerare le classi di equivalenza altrimenti non riusciamo ad identificare...

Dualizzando i monomorfismi otteniamo gli epimorfismi e quindi dualizzando otteniamo i quozienti (su un categoria che deve essere esatta).

Definizione Balanced category

A category is said to be balanced if epi and mono => iso.

5 15/10/2025

Coproduct in Set: possiamo prendere il duale della proprietà universale del prodotto, e otteniamo il coproduct, o l'unione disgiunta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dashed, "\chi"] & B \arrow[l, hook', "i_B"] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

There exist a unique morphism $\chi : A \amalg B \to C$ we we forced to define it as

$$x \in A \amalg B \begin{cases} x \in A \to \chi(x) = f(x) \\ x \in B \to \chi(x) = g(x) \end{cases}$$

Oggetti iniziali in Set:

The singleton $1_{\mathbf{Set}} = \{*\}$ satisfies a universal property: for any C set there exist a unique arrow $C \to 1_{\mathbf{Set}}$.

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathbf{Set}} \\
C \arrow[u, dashed, "\exists!"]
\end{tikzcd}$$

Oggetti terminali in Set:

Dually, the empty set $\emptyset$ satisfies the following universal property:

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
C
\end{tikzcd}$$

Kernel in vector spaces in Set: Per semplicità usiamo set. Possiamo generare il kernel come l'egualizzatore prendendo $g = 0$

$$\mathrm{Eq}(f, q) = \{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$$

Quindi

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, hook, "i"] & V \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & W \\
& C \arrow[ul, dashed, "\exists!\, h'"] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "f\circ h = g \circ h"'] &
\end{tikzcd}$$

Suppose $h\colon C \to V$ is an arrow such that $f \circ h = g \circ h$. Then, there exists exactly one arrow (factorization) $h'\colon C \to \mathrm{Eq}(f, g)$ such that $i \circ h' = h$. Quindi, $\forall c \in C$,

$$h(c) \in \mathrm{Eq}(f, g) \iff f(h(c)) = g(h(c))$$

Se prendiamo una altra mappa che soddisfa tale proprietà universale allora essa è necessariamente isomorfa a i.

Un ulteriore generalizzazione è detta Pullbacks o prodotto fibrati.

Consideriamo due insiemi A, B che vivono al di sopra di D mediante mappe h, k. Allora viene usata la notazione

$$A \times_D B = \{(a, b) \in A \times B \mid h(a) = k(b)\}$$

e quindi il diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
A \times_D B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "k"] & D
\end{tikzcd}$$

La proprietà universale di questo prodotto è data da: per ogni C tale che $h \circ g = k \circ g$, esiste un unico ξ tale che il diagramma seguenti commuti:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rrd, bend left, "f"] \arrow[rd, "\exists!\,\xi"] \arrow[rdd, bend right, "h"'] & & \\
& A \times_D B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "k"] & D
\end{tikzcd}$$

Prendendo $D = 1_{\mathbf{Set}}$ otteniamo l'usuale prodotto cartesiano.

Prendendo il duale di questa costruzione troviamo il Pushout chde permette di trattare il caso di unioni che non sono disgiunte. This is an object X together with arrows J_A, J_B such that for any object C with arrows f, g such that $f \circ i_A = g \circ i_B$, there exist a unique arrow ξ such that $\chi \circ J_A = f$ and $\chi \circ J_B = g$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"'] & A \arrow[d, "J_a"] \arrow[rdd, bend left, "f"] & \\
B \arrow[r, "J_b"] \arrow[rrd, bend right, "g"'] & X \arrow[rd, dashed, "\exists!\,\xi"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Nel caso $D = \emptyset$ possiamo prendere l'unione disgiunta. Se D non è vuoto come costruiamo X? Possiamo prendere un quoziente dell'unione disgiunta secondo la relazione generata da le coppie $(i_A(d), i_B(d))$ for $d \in D$. Questo fa sì che elementi non appaiano molteplici volte. Esercizio: verificare i dettagli.

Nel caso particolare in cui l'unione non è disgiunta abbiamo $D = A \cap B$ e $i_{A,B}$ sono le inclusioni di $A \cap B$ in A e B. In tal caso abbiamo
$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \\
B &
\end{tikzcd}$
Given $d \in D$, $i_A(d) = i_B(d)$ e J_A e J_B li mandano negli stessi elementi di X, per la commutatività.

Quozienti:

Consideriamo un insieme X e una relazione di equivalenza $R \subseteq X \times X$. Consideriamo la proiezione canonica

$$\pi_R \colon X \to X/R$$

quindi
$\begin{tikzcd}
& X \\
R \arrow[ru, "p"] \arrow[r, hook] \arrow[rd, "q"'] & X \times X \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
& X
\end{tikzcd}$
Consider the following diagram: for any C and h such that $h \circ p = h \circ q$ there exists a unique ξ such that the diagram commutes ($\xi \circ \pi_R = h$)
$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & X \arrow[r, "\pi_R"] \arrow[rd, "h"'] & X/R \arrow[d, "\exists!\,\xi"] \\
& & C
\end{tikzcd}$
For a function $h \colon X \to C$ to factor through the quotient map π_R the following condition is necessary and sufficient (well-defined): $\forall (x, x') \in R, h(x) = h(x')$, which can also be stated $h \circ p = h \circ q$ (which removes the element dependency). Questo è il duale della proprietà universale dell'egualizzatore.

6 16 ottobre

Any category $\mathcal{C}$ has an underlying oriented graph $U(\mathcal{C})$ which forgets the composition law for morphisms. It is natural to define a diagram in $\mathcal{C}$ as morphisms of graphs $G \to U(\mathcal{C})$ where G is a graph specifying the form of the diagram.

Categorie libera su un grafo. We can construct a minimal category starting from a graph. The objects are the same as the graph, and the morphisms need to be chosen such that they compose. We can define such composition as the concatenation of morphisms with compatible domains and codomains. This is the free category $F(G)$ on G which satisfies the following universal property: for any caregory $\mathcal{C}$ we have the graph morphisms $G \to U(\mathcal{C})$ and functors $F(G) \to \mathcal{C}$. $F(G)$ is constructed by taking as objects those of G and as arrows the finite lists of arrows in G with composible domains and codomains; the composition law is given by list concatenation.

This construction allows us to define the notion of diagram in the language of category theory itself, without loss of generality.

> **Definizione**
>
> A diagram D in a category $\mathcal{D}$ is a functor $D\colon J \to \mathcal{C}$, where J is a category defining the "shape" of the diagram D.

This means that a functor $F\colon J \to C$ can be thought as a diagram in C of shape J.

> **Definizione** Cono
>
> A cone with vertex c over a diagram $D\colon J \to C$ is a collection of morphisms $\{\lambda_j : c \to D(j)\}$ for all $j \in J$ such that $D(\xi) \cdot \lambda_{J_1} = \lambda J_2$

$$\begin{tikzcd} J_1 \arrow[r, "\xi"'] & J_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} D(J_1) \arrow[r, "D(\xi)"] & D(J_2) \\ c \arrow[u, "\lambda_{J_1}"] \arrow[ur, "\lambda_{J_1}"'] & \end{tikzcd}$$

Ci deve essere una freccia sola per ogni oggetto caratterizzante nel diagramma.

> **Definizione** Limit
>
> A limit of a diagram $D\colon J \to C$ is a cone over D which is universal, i.e. such that any cover over D factors uniquely through it.

$$\begin{tikzcd} D(J_1) & \lim(D) \arrow[l, "l_{J_1}"'] \arrow[r, "l_{J_2}"] & D(J_2) \\ & c \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ul, bend left, "\lambda_{J_1}"] \arrow[ur, bend right, "\lambda_{J_2}"'] & \end{tikzcd}$$

This means that there exists for any cone $\{\lambda_j : c \to D(j)\}$ over D, a uinque arrow $\xi\colon c \to \lim D$ such that all the triangles commute.

> **Definizione** Complete category
>
> A category C is said to be complete if every diagram $D\colon J \to C$ where J is a small category.

> **Definizione** Colimite
>
> The dual notion of the notion of limit is called colimit.

Cioè un colimite di un diagramma $D\colon J \to C$ è esattamente il limite del diagramma $D^{op}\colon J^{op} \to C^{op}$.

Exercise: esplicita la proprietà universale di colimite. Exercise: mosra che quest'ultima si specializza in nelle due proprietà universali dell'unione disgiunta, pushout e quotient.

Il cono viene formalmente definito nelle slide. Il diagramma a quadrato dela naturalità collassa perché una freccia è l'identità, cioè il funtore delta c manda tutte le freccie in quella identitaria. (Lezione 16 ottobre mostra il quadrato che diventa degenere).

Esercizio: mostra che se il limite di un diagramma esiste, allora è unico a meno di isomorfismo. (The proof method is the same already used in the articular cases of the product and equalizer). La stessa dimostrazione vale per i colimiti.

L'immagine di un cono è un cono ma non necessariamente universale. Quindi un funtore non preserve i limiti.

Exercise: Show that the universal property of the limit specializes to the universal properties of the pullback (or fibered product) and of the equalizer.

Come definire a,b del teorema slide Limits in Set: Abbiamo

$$a, b\colon \prod_{i \in \mathrm{Ob}(I)} H(i) \to \prod_{\substack{u\colon i \to j \\ J \in \mathrm{Ob}(I)}}$$

usiamo due strade per definire a e b con la composizione, che non danno appunto necessariamente il medesimo risultato. Da una parte ho $H(i)(x_i)$ e dall'altra ho x_j.

Exercise: show that $\mathrm{Eq}(a, b)$ satisfies the universal property $\lim H$. Visto che abbiamo fissato H vale per tutti. Il cono è quello l'eq in quello nelle slide.