Analisi II

Paolo Bettelini

Contents

1 Spazi metrici

1.1 Definizioni

L'insieme vuoto e l'insieme X sono aperti e chiusi.

Proposition

L'unione di aperti non numerabile è aperta, mentre l'intersezione è aperta solo se finita.

Proof

Per dimostrare quest'ultima lo facciamo su due insiemi e il resto è per induzione. Prendiamo un punto nell'interezione e prendiamo le due bolle dentro gli insiemi centrate nel punto. Siccome hanno lo stesso centro la loro intersezione è sempre una bolla di raggio il minore fra i due.

La metrice discreta può generare una bolla che è un singoletto.

Proposition

L'unione di chiusi finiti è chiusa. L'intersezione qualsiasi è chiusa.

Ogni singoletto è chiuso. Per dimostrarlo mostriamo che nel complementare esiste una bolla che non interseca il punto (vero per proprietà di Hausdorff).

Tutti i punti di accumulazione sono dei punti aderenti. Tutti i punti di un sottoinsieme sono aderenti per il sottoinsieme. Ogni punto o è di accumulazione o è isolato.

Se x_0 è aderente ad E, x_0 può essere un punto di E oppure no. Se x_0 è punto di accumulazione per E, in ogni bolla centrata in x_0 cadono inifniti punti.

Proposition

E° è aperto. E è aperto se e solo se $E = E^\circ$. E° è il più grande aperto contenuto in E.
$\overline{E}$ è chiuso. E è chiuso se e solo se $E = \overline{E}$. La chiusura di E è il più piccolo chiuso contenente E.

Proof per l'interno

Dimostriamo che E° è aperto. Sia $x_0 \in E^\circ$. un punto interno ad E, quindi esiste una bolla centrata in tale punto che è contenuta in E. Prendiamo un altro punto y in questa bolla. Possiamo costruire una inner bolla centrata in y con un raggio sufficientemente piccolo da rimanere nella bolla più grande. Quindi il punto y è a sua volta interno, quindi tutta la bolla centrata in x_0 è in E° e quindi è aperto.
Dimostriamo ora che se E è aperto allora $E = E^\circ$ (l'altra implicazione è ovvia). Per fare ciò dimostriamo che E° è il più grande aperto in E. Osserviamo che E° fa parte della famiglia degli aperti di X contenuti in E. Sia A un aperto contenuto in E. VOglio dimostrare che $A \subseteq E^\circ$. Sia $x_0 \in A$. A èunione di bolle quindi esiste unr aggio tale che la bolla centrata in x_0 di tale raggio è contenuta in A che è contenuto in E. Quindi, x_0 è interno ad E e $x_0 \in E^\circ$ e $A \subseteq E^\circ$. Supponiamo ora che E sia aperto. Allora E fa parte della famiglia degli aperti di X contenuti in E. Devo avere $E \subseteq E^\circ$. Dato che $E^\circ \subseteq E$ allora $E^\circ = E$.

Dire che un insieme è dentro in un altro significa dire che la sua chiusura coincide con l'insieme. Tipo la chiusura di Q è R quindi Q è denso in R.

Definizione Limitato

Se è contenuto in una bolla

Definizione Diametro

è il sup della metrica su tutte le coppie.

Definizione Ricoprimento

Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico X. Una famiglia

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è un ricoprimento apert di E se

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Definizione Sottoricoprimento

Un Sottoricoprimento di

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è una sottofamiglia di G_α tale che continua a ricoprire. Cioè ne scarto alcuni ma deve comunque rimanere una copertura.

Definizione Compatto

Uno spazio metrico X è compatto se ogni ricoprimento aperto di E ammette un sottoricoprimento finito.

Ogni insieme finito è compatto.

Teorema

Sia X uno spazio metrico e E un sottoinsieme di X compatto.
1. E è limitato;
2. E è chiuso;
3. Ogni sottoinsieme infinito di E ha almeno un punto di accumulazione in E.

Proof

1. Consideriamo $\{B_1(x) \mid x \in E\}$ che è un ricoprimento aperto di E. Siccome E è compatto esiste un sottoricoprimento finito aperto di E, ossia $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$$
Posto
$$R = 1 + \max_{i=1,\dots,n} d(x_i, x_1)$$
Allora la bolla di raggio R centrata in x_1 contiene E, quindi E è limitato.
2. Supponiamo che non sia chiuso. Allora esiste $y \in E'$ ma $y \notin E$. Vogliamo costruire un ricoprimento aperto di E che non ammette sottoricoprimento finito. Sia $r(x) = \frac{1}{2}d(x, y)$ per ogni $x \in X$. Se $x \in E$ allora $r(x) > 0$ perchè $y \notin E$. Abbiamo il ricoprimento
$$\{B_{r(x)}(x) \mid x \in E\}$$
Ma per la compattezza esisterebbe un sottoricoprimento finito, cioè $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r(x_i)}(x_i)$$
Sia ora $R = \min_{i=1,\dots,n} r(x_i)$. Allora $R > 0$ e la bolla $B_R(y)$ non interseca nessuna delle $B_{r(x_i)}(x_i)$, assurdo poiché y è punto di accumulazione.
3. Sia F un sottoinsieme infinito di E. Supponiamo che F non abbia punti di accumulazione in E. Allora ogni punto di E ha una bolla che interseca F in al più un punto. Queste formano un ricoprimento aperto di E. Ma se esistesse un sottoricoprimento finito, F sarebbe finito, assurdo.

Proposition

Sia $E \subseteq X$ compatto. Se $F \subseteq E$ è chiuso allora F è compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di F. Dobbiamo aggiungere degli insiemi aperti per coprire il resto. Siccome F è chiuso, $X \setminus F$ è aperto. Quindi $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{X \setminus F\}$ è un ricoprimento aperto di E. Per la compattezza di E esiste un sottoricoprimento finito, che escludendo $X \setminus F$ è un sottoricoprimento finito di F.

Se $F \subseteq X$ è chiuso, ed $E \subseteq X$ è compatto, allora $F \cap E$ è compatto.

Teorema Teorema dell'intersezione finita

Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di compatti tale che ogni intersezione finita è non vuota. Allora
$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \emptyset$$

Proof

Supponiamo che l'intersezione sia vuota. Allora e sia $E_{\overline{\alpha}}$ un compatto fissato nella famiglia.

$$E_{\overline{\alpha}} \cap \left(\bigcap_{\alpha \neq \overline{\alpha}} E_\alpha \right) = \emptyset$$
$$\implies E_{\overline{\alpha}} \subseteq \left(\bigcap_{\alpha \neq \overline{\alpha}} E_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \neq \overline{\alpha}} E_\alpha^c$$

$\{E_\alpha^c\}_{\alpha \neq \overline{\alpha}}$ è un ricoprimento aperto di $E_{\overline{\alpha}}$. Esistono quindi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq \overline{\alpha}$ tali che

$$E_{\overline{\alpha}} \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right)^c$$
$$\implies E_{\overline{\alpha}} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right) = \emptyset$$

assurdo.

Corollario caso particolare

Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di compatti tale che

$$E_{n+1} \subseteq E_n$$

Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$$

Teorema Teorema di Heine-Borel

Sia $E \subseteq R^n$ con la metrica euclidea. Allora E è compatto se e solo se E è chiuso e limitato.

Lemma

Sia $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ tali che $I_k \supseteq I_{k+1}$. Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$$

Proof

Gli intervalli sono annidati, quindi a_k è crescente e b_k è decrescente e $a_k \leq b_k$. In particolare $a_k \leq b_i$. Consideriamo l'insieme $E = \{a_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. E è limitato superiormente, e ammette supremum x. Per definizione $x \geq a_k$. Ma $a_k \leq b_i$ per tutte le i. Quindi, $x \leq b_i$ per ogni i. Allora

$$x \in I_n \implies x \in \bigcap I_k$$

Definizione

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Un rettangolo chiuso è il prodotto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

che indichiamo con $[a, b]$.

Lemma

Sia $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di rettangoli chiusi tali che $R_k \supseteq R_{k+1}$ per ogni k. Allora

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k \neq \emptyset$$

Proof

Siccome

$$R_k = I_{k,1} \times I_{k,2} \times \ldots \times I_{k,n}$$

possiamo applicare il primo lemma e quindi

$$\exists y_i \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_{k,i}$$

Il punto $y = (y_1, \ldots, y_n)$ è in ogni R_k.

Lemma Lemma 3

In $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea ogni rettangolo è compatto.

Proof Lemma 3

Sia $R = [a, b]$ un rettangolo e supponiamo che non sia compatto. Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento aperto di R che non ammette sottoricoprimento finito. Vogliamo adesso dimezzare ambo i lati (quindi n tagli). Abbiamo adesso 2^n rettangoli.

$$[a_i, b_i] = [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Il diametro di R è $||b - a||$. Il diametro di ogni rettangolo ottenuto è la metà. Almeno uno di questi rettangoli ha la proprietà di non ammettere sottoricoprimento finito. Lo chiamiamo R_1. Iterando il procedimento otteniamo una successione di rettangoli

$$R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$$

con diametro che tende a zero e che non ammettono sottoricoprimento finito, il diametro di R^k è dato da $\frac{1}{2^k}||b - a||$. Per il lemma precedente esiste $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k$. Siccome $R_k \subseteq R$ per ogni k, $x \in R$. Siccome $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è un ricoprimento di R, esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $x \in G_{\alpha_0}$. G_{α_0} è aperto, quindi esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq G_{\alpha_0}$. Scegliamo k sufficientemente grande tale che $2^{-k}||b - a|| < r$. Ma il diametro di R_k è minore di r, quindi $R_k \subseteq B_r(x)$. Quindi $R_k \subseteq G_{\alpha_0}$, assurdo perchè R_k non ammette sottoricoprimento finito.

Proof Heine-Borel

Dobbiamo dimostrare solo che se E è chiuso e limitato allora è compatto. Siccome E è limitato esiste M tale che $||x|| < M$ per ogni $x \in E$. Quindi,

$$E \subseteq [-M, M] \times [-M, M] \times \ldots \times [-M, M] = R$$

E è un chiuso contenuto in un compatto, quindi è compatto.

Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di $\mathbb{R}^n$ ha almeno un punto di accumulazione.

Proof Teorema di Bolzano-Weierstrass

Definizione Insiemi separati

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A, B \subseteq X$ due sottoinsiemi. Diciamo che A e B sono separati se

$$A \cap \overline{B} = \emptyset \wedge \overline{A} \cap B = \emptyset$$

Devono sicuramente essere disgiunti, ma non basta. Serve che nessun punto di uno dei due insiemi è punto di accumulazione dell'altro.

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subseteq X$. E è connesso se non può essere scritto come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati.

I sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.

Uno spazio metrico è connesso se e solo se l'unico sottoinsieme non vuoto di X che è anche aperto e chiuso è X stesso. (Dimostrazione per esercizio).

R^n con la metrica euclidea è connesso. (Dimostrazione per esercizio non proprio banale).

1.2 Successioni in spazi metrici

Mettere la definizione di convergenza ma con $d(x_m, y) < \varepsilon$. Oppure $x_m \in B_\varepsilon(y)$.

In particolare la successione metrica converge se e solo se $d(x_m, y) \to 0$ secondo la convergenza reale.

Il limite è unico per proprietà di Hausdorff.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subseteq X$ e sia y un punto di accumulazione per E. Allora esiste una successione $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{y\}$ che converge ad y. In particolare, E è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq E$ che converge ad y allora $y \in E$.

Proof

Dato che $y \in E'$, $\forall x_m \in \mathbb{N}$, esiste x_m tale che $x_m \in B_{\frac{1}{m}}(y) \cap E$ e $x_m \neq y$. La successione così costruita converge ad y. Infatti, $d(x_m, y) < \frac{1}{m} \to 0$.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione convergente in X. Una condizione necessaria per la convergenza è che ogni sottosuccesione converga allo stesso limite. La condizione sufficiente è che ogni sottosuccessione ammetta una sottosuccessione che converge allo stesso limite.

Definizione Compattezza sequenziale

Uno spazio metrico X è sequenzialmente compatto se ogni successione in X a valori in E ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di E.

Proposition Equivalenza compattezza

E is compact is and only if E is sequentially compact.

Questa c'è solo negli spazi metrici.

Proof

($\Longrightarrow$) Sia $\{x_n\}$ una successione in E. Consideriamo $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se F è finito, esiste un elemento che compare infiniti volte e la successione costante converge a tale elemento. Se F è infinito, per la compattezza F ammette un punto di accumulazione, $y \in E$. Costruiamo una sottosuccessione che converga ad y. Scegliamo x_m tale che $d(x_m, y) < 1$. Scegliamo x_{m_2} tale che $d(x_{m_2}, y) < \frac{1}{2}$ e $m_2 > m_1$, e così via. La sottosuccessione così costruita converge ad y in quanto $d(x_{m_k}, y) < \frac{1}{k} \to 0$.

($\Longleftarrow$) XXX

Ogni successione convergente è di Cauchy.

Per esempio con la metrica discreta una successione è convergente se e solo se è definitamente costante, che è equivalente ad essere di Cauchy, quindi è completo.

Nel caso dei razionali nei reali con metrica euclidea, consideriamo la radice di due che è un punto di accumulazione per i razionali. Esiste una successione di razionali che converge a radice di due, quindi è di Cauchy. Ma essa non può convergere in Q, altrimenti convergerebbe anche in R e avrebbe due limiti. Tuttavia è una successione di Cauchy in Q perché è convergente in R e quindi è di Cauchy in R. (La condizione è la medesima). Quindi Q non è completo.

Definizione Spazio completo

Uno spazio metrico (X, d) è completo se ogni successione di Cauchy in X converge ad un punto di X.

Teorema

R^n con la metrica euclidea è completo.

Proof

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in R^n. Scriviamo $E_n = \{x_k \mid k \geq n\}$. Notiamo che $E_n \supseteq E_{n+1}$. Ponendo la chiusura $\overline{E_n} \supseteq \overline{E_{n+1}}$. Inoltre, E_n è limitato e $\operatorname{diam} E_n \to 0$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $m, n \geq N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Notiamo inoltre che

$$\operatorname{diam} E_n = \sup\{d(x_m, x_k)\} < \varepsilon$$

Dimostrazione per esercizio vale che $\operatorname{diam} F = \operatorname{diam} \overline{F}$. Quindi, $\operatorname{diam} \overline{E_n} \to 0$. Adesso $\{\overline{E_n}\}$ è una successione di compatti in quanto chiusi e limitati, annidati. Quindi

$$E \triangleq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset$$

Siccome $\operatorname{diam} E = 0$ o è vuoto o contiene un solo punto, quindi contiene un solo punto $E = \{y\}$. Mostriamo che $x_n \to y$. Abbiamo $d(x_n, y) \leq \operatorname{diam} \overline{E_n} \to 0$.

Teorema

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora X è completo.

Proof

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X. Siccome è compatto è compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge ad un punto $y \in X$. Mostriamo che $x_n \to y$. Dato

$\varepsilon > 0$ esiste N_0 tale che per ogni $m, n \geq N_0$ $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per la convergenza di $\{x_{n_k}\}$ esiste K tale che per ogni $k \geq K$ $d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Scegliamo $\overline{N} = \max\{N_0, n_K\}$. Allora per ogni $n \geq \overline{N}$ si ha

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Sia X uno spazio metrico completo, $Y \subseteq X$. Y è completo se e solo se Y è chiuso in X.

Teorema

E sequenzialmente comaptto implica E compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di E. Esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in E$ esiste $\overline{\alpha}$ tale che $B_\delta(x) \subseteq G_{\overline{\alpha}}$.

1. *claim 1:* $\forall m \in \mathbb{N}$, esiste x_m tale che $B_{1/m}(x_m)$ non è sottoinsieme di G_α per tutte le α. $\{x_m\}$ è una successione in E e quindi posso estrarre una sottosuccessione convrgente $x_{m_k} \to p \in E$. Esiste $\hat{\alpha}$ tale che $p \in G_{\hat{\alpha}}$. $G_{\hat{\alpha}}$ è aperto e quindi esiste una $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(p) \in G_{\hat{\alpha}}$. Ma $x_{m_k} \to p$ quindi con k sufficientemente grande

$$B_{1/m_k}(x_{m_k}) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$$

che è assurdo lightning.
2. *claim 2:* E è contenuto nel'unione di un numero finito di bolle di raggio δ centrate in punto di E. Per assurdo, sia $x_1 \in E$. Sicuramente $B_\delta(x_1)$ non ricopre E quindi esiste $x_2 \in E \backslash B_\delta(x_1)$. Ma assieme $B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2)$ non ricoprono E, quindi esiste un $x_3 \in E \backslash (B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2))$ e così via. La successione $\{x_m\}$ deve ammettere una sottosuccessione convergente. Ma $d(x_i, x_j) \geq \delta$ se $i \neq j$ quindi la sucessione $\{x_m\}$ non è di Cauchy Lightning. Quindi $E \subseteq B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \cdots$.

In realtà abbiamo mostrato anche la terza.

Teorema

Sia X uno spazio metrico. Sono equivalenti:

1. X è compatto;
2. X è sequenzialmente compatto;
3. *limit point compact:* ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione.

Solo negli spazi metrici.

1.3 Funzioni

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ due spazi metrici e sia $E \subseteq X_1$. Sia $f \colon E \to X_2$ e $p \in E'$. Diciamo che $l \in X_2$ è limite di $f(x)$ per $x \to p$ e diciamo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, x \in E \wedge 0 < d_1(x_1, p) < \delta \implies d_2(f(x), l) < \varepsilon$$

Equivalentemente $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f((B_\delta(p) \cap E) \backslash \{p\}) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

Proposition

Sia $f\colon E \subseteq X_1 \to X_2$. Allora $f(x) \to l$ per $x \to p$ se e solo se $f(x_n) = l$ per ogni successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in E$e $x_n \neq p$ per tutte le n e $x_n \to p$.

Valgono i medesimi teoremi tipo l'unicità del limite e i teoremi di permanenza del segno, confronto etc.

Proposition

Sia $f\colon E \subseteq X \to \mathbb{R}^n$ per $n > 1$. Allora

$$f(x) \to l \iff f_i(x) \to l_i$$

per $x \to p$.

Proof Sketch

Conderiamo la norma per tutte le i

$$|f_i(x) - l_i| \le ||f(x) - l|| \le \sum_k |f_k(x) - l_k|$$

Definizione Continuità

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ due spazi metrici, $f\colon E \subseteq X_1 \to X_2$, $p \in E$. Diciamo che f è *continua* in p se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in E \cap B_\delta(p) \implies f(x) \in B_\varepsilon((f(p)))$$

Euivalentemente $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in E$ e $d_1(x, p) < \delta$ implica che $d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Oppure ancora $(f(B_\delta(p) \cap E)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$.

Se p è un punto isolato di E allora $\exists r > 0$ tale che $B_r(p) \cap E = \{p\}$. Scegliendo $\delta \le r$ la definizione di continuità è automaticamente soddisfatta. Se p non è i solato, allora è un punto di accumulazione per E. In questo caso f è continua in p e vale che $f(x) \to f(p)$ per $x \to p$.

Proposition

f è continua in p se e solo se

$$\lim_{x \to p} f(x_n) = f(p)$$

per ogni successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in E$ per tutte le n e $x_n \to p$.

Definizione

Sia $f\colon E \subseteq X_1 \to X_2$. Diciamo che f è continua nell'insieme E se f è continua in ogni punto di E.

Proposition

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e sia $f\colon X_1 \to X_2$. Allora f è continua in X se e solo se $f^{-1}(V)$ è aperto in X_1 per tutti i V aperti in X_2.

Proof

($\Longrightarrow$) Sia V un aperto di X_2. Se $f^{-1}(V) = \emptyset$ in questo caso abbiamo finito. Altrimenti, sia $p \in f^{-1}(V)$, cioè $f(p) \in V$. Essendo V aperto, riesco a trovare

$$B_\varepsilon(f(p)) \in V$$

Ma f è continua quindi riesco anche a trovare $\delta > 0$ tale che

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

Quindi $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$ quindi p è un punto interno a $f^{-1}(V)$. Per l'arbitrarietà di p segue che $f^{-1}(V)$ è aperto.

($\Longleftarrow$) Sia $p \in X$ e dimostriamo che f è continua in p. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. $B_\varepsilon(f(p))$ è un aperto di X_2. $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ è un aperto di X_1 e $p \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$$

cioè

$$f(B_\varepsilon(p)) \subset B_\varepsilon(f(p))$$

che è la definizione di continuità.

Siccome $f^{-1}(E^c) = \left(f^{-1}(E)\right)^c$ allora f è continua se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X_1 per ogni chiuso in $C \in X_2$. Molto utile.

In generale le funzioni continue non mandano aperti in aperti. Per esempio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $x \to x^2$. Abbiamo che

$$f((-1,1)) = [0,1)$$

Definizione Funzione aperta

Una funzione viene detta *aperta* se $f(U)$ è aperto in X_2 per tutti gli insiemi U aperto om X_1. Analogamente funzione chiusa.

Sia $f\colon (X,d) \to \mathbb{R}^n$ con $n > 1$ è continua se e solo se tutte le sue componenti sono continue.

Proposition

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici, $f\colon X_1 \to X_2$ una funzione continua. Se X_1 è compatto, allora $f(X_1)$ è compatto.

Proof

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di $f(X_1)$. Consideriamo $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ che sono degli aperti. Queste preimmagini sono un ricoprimento di X_1, che è compatto e quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito $f^{-1}(G_{\alpha_1}), \cdots, f^{-1}(G_{\alpha_n})$. Vogliamo mostrare che $\{G_{\alpha_1}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ sono un ricoprimento di $f(X_1)$.

$$f(X_1) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f\left(f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

Teorema Teorema di Weierstrass

Sia (X,d) uno spazio metrico compatto e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, $\exists x_1, x_2 \in X$ tali che

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \quad \forall x \in X$$

cioè f possiede massimo e minimo assoluto.

Proof Teorema di Weierstrass

$f(X)$ è compatto in $\mathbb{R}$, quindi è chiuso e limitato. Siccome limitato, $f(X)$ ammette infimum e supremum reali. Siccome $\inf f(x)$ e $\sup f(x)$ appartengono a $\overline{f(x)}$ e $f(x)$ è chiuso, appartengono allora ad $f(X)$ e quindi sono massimi e minimi.

Teorema Teorema da compatto ad Hausdorff

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici con X_1 compatto e $f\colon X_1 \to X_2$ continua. Allora, f è chiusa.

In realtà questo funziona con domini compatti e codomini di Hausdorff.

Proof Teorema da compatto ad Hausdorff

Sia C un chiuso di X_1. Voglio dimostrare che $f(C)$ è un chiuso di X_2. Sappiamo che C è chiuso in un compatto, quindi è compatto. La funzione è continua e quindi $f(C)$ è compatto. Siccome i compatti sono chiusi allora è chiuso.

Corollario

Sia $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ continua, X_1 compatto e f biunivoca. Allora, f^{-1} è continua.

Proof

Dobbiamo mostrare che $(f^{-1})^{-1}(C)$ è chiuso per ogni C chiuso di X_2. Ma questo coincide con $f(C)$ che è chiusa per il teroema da compatto ad Hausdorff.

Teorema

Sia $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ continua e sia $E \subseteq X$ connesso. Allora $f(E)$ è connesso.

Proof

Supponiamo che $f(E)$ non sia connesso. Esistono quindi due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e separati tali che

$$f(E) = A \cup B$$

Poniamo $F = f^{-1}(A) \cap E$ e $G = f^{-1}(B) \cap E$. Sicuramente $F, G \neq \emptyset$ e $E = F \cup G$. Vogliamo mostrare che E e G sono separati. Siccome $A \subseteq \overline{A}$ vale anche $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$. $\overline{\text{L}}$'applicazione f è continua e la chiusura di A è un chiuso. Quindi la preimmagine del chiuso $\overline{A}$ è un chiuso. Consideriamo ora

$$\overline{F} \subseteq \overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$$

perché f è continua se $\overline{A}$ è chiuso. Quindi $\overline{F} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ che implica $f(\overline{F}) \subseteq \overline{A}$. D'altro canto $f(G) \subseteq B$ e $\overline{A} \cap B \neq 0$, e quindi $\overline{F} \cap G \neq 0$ perché altrimenti vi sarebbe un elemento sia in $\overline{A}$ che in B. Dovrebbe essere $f(x) \in \overline{A}$ e $f(x) \in B$ lightinng. Analogamente si dimostra che $F \cap \overline{G} = \emptyset$ cioè abbiamo scritto E come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati. Ma E è connesso lightning.

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f\colon X_1 \to X_2$. Allora f è uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x, y \in X_1$

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Teorema Theorema di Heine-Cantor

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ continua e X_1 compatto. Alorra, f è uniformemente continua.

La dimostrazione è la medesima rispetto al caso banale.

Definizione Funzione di Lipschitz

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici, $f\colon X_1 \to X_2$. Diciamo che f è *lipschitz-continua* o *lipschitziana* se $\exists \alpha > 0$ tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha d_1(x, y)$$

per tutte le $x, y \in X_1$.

Proposition

Se f è Lipschitz-continua, allora è uniformemente continua.

Definizione

Siano $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spazi metrici e $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$. Diciamo che f è una *contrazione* se $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(X_1, X_2)$ con $\alpha < 1$.

Se il supremum è finito, allora questa è la miglior costante di Lipschitz (in generale)

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Esempio

Consideriamo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$. Non è di lipschitz inquanto non è uniformemente continua. Per mostrarlo possiamo dire

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|$$

Se restringessimo il dominio di questa funzione ad un intervallo limitato, allora sarebbe di Lipschitz, per il supremum.

Proposition

Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Allora, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(I, \mathbb{R})$ se e solo se $|f'(x)| \leq \alpha$ per tutte le x.

Proof

($\Longrightarrow$) Cominciamo con

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \\ &= \lim_{t\to 0} \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|} \\ &\leq \lim_{t\to 0} \frac{\alpha|x+t-x|}{|t|} = \alpha \end{aligned}$$

Possiamo togliere il limite dal modulo in quanto il modulo è una funzione continua.

($\Longleftarrow$) Per il teorema di Lagrange esiste $\theta \in (\min\{x,y\}, \max\{x,y\})$

$$\begin{aligned} f(x)-f(y) &= f'(\theta)(x-y) \\ |f(x)-f(y)| &= |f'(\theta)| \cdot |x-y| \\ &\leq \alpha|x-y| \end{aligned}$$

Esercizio

Per quali $a \leq b$ la funzione $f(t) = 1+t-\arctan(t)$ è una contradizione in $[a,b]$. Stabiliamo quindi se la derivata è limitata

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

notiamo quindi che $0 \leq f'(t) \leq 1$. Quindi è sicuramente lipschitziana. Notiamo allora che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'(t)| = 1 = \alpha$$

Quindi per far sì che $\alpha < 1$ dobbiamo limitare il dominio ad un intervallo limitato. Quindi $-\infty < a \leq b < \infty$. Porta l'intervallo $[a,b]$ in sè? Siccome la funzione è crescente porta intervalli a intervalli di estremi $f(a)$ e $f(b)$. Mi basta quindi imporre che $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} 1+a-\arctan a \geq a \\ 1+b-\arctan b \leq b \end{cases} = \begin{cases} \arctan a \leq 1 \\ \arctan b \geq 1 \end{cases}$$

e quindi $a \leq \tan 1 \leq b$. Notiamo che $f(\tan 1) = \tan 1$ quindi è un punto fisso per il teorema delle contrazioni.

Esempio

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = v \cdot x$. Dobbiamo studiare $|f(x)-f(y) = |v \cdot x - v \cdot y|$ usando la bilinearità del prodotto scalare ottengo $|v \cdot (x-y)|$. Per Cacuhy-Schwarz

$$|v \cdot (x-y)| \leq ||v|| \cdot ||x-y||$$

che è quindi di Lipschitz.

Teorema Teorema di Banach-Cacciopoli o delle contrazioni

Sia (X,d) uno spazio metrico completo e sia $f\colon X \to X$ una contrazione. Allora $\exists_{=1}\, x \in X$ tale che $f(x) = x$.

Le ipotesi sono necessarie. Togliamo per esempio la completezza e consideriamo quindi $X = (0, +\infty)$ con la contrazione $f(x) = x/2$. Questa contrazione non ha punti fissi. Togliamo invece l'ipotesi che sia una contrazione. Richiediamo solamente che sia una contrazione debole, cioè

$$d_2(f(x), f(y)) \leq f_1(x, y)$$

Consideriamo $X = [0, +\infty)$ e prendiamo $f(t) = t + e^{-t}$. La derivata è $f'(t) = 1 - e^{-t}$ che è nulla nell'origine e poi tende ad 1 dal sotto. Chiaramente non ci sono punti fissi in quanto $f(t) = t$ è come dire $e^{-t} = 0$.

Proof

Cominciamo mostrando l'esistenza del punto fisso. Sia $x_0 \in X$ un punto fissato e consideriamo la successione $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Mostriamo che $\{x_n\}$ è di Cauchy, quindi siccome lo spazio è completo converge. Dobbiamo mostrare che $d(x_n, x_m)$ tende a zero quando n, m crescono. Consideriamo inizialmente

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x-n-1)) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la distanza generica e usiamo la disuguaglianza triangolare ripetutamente per ogni step

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, d_n) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+k-i}, d_{n+k-i-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i} \\ &= \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i-1} \\ &= \alpha^n \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \to 0 \end{aligned}$$

Per sbarazzarci di k (siccome vogliamo k arbitrario e il ε nella definizione di Cauchy deve essere uniforme rispetto ad esso) maggioriamo la somma parziale della serie geometrica con il valore della serie geometrica. Siccome $0 < \alpha < 1$ il termine non esplode e la serie geometrica converge.

2. Detto x il limite di $\{x_n\}$ mostriamo che è un punto fisso di f. Consideriamo il limite per $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)$$

perché f è continua.

Mostriamo ora l'unicità del punto. Supponiamo che x, y siano due punti fissi. Vogliamo mostrare che $d(x, y) = 0$. Abbiamo

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)(1-\alpha) d(x, y) \qquad \leq 0$$

siccome $1 - \alpha > 0$ ciò succede solo se $d(x, y) = 0$.

Abbiamo notato che

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

Con $k \to \infty$ otteniamo

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

quindi tende al punto fisso in maniera esponenziale.

Denotiamo $f^n = f \circ f \cdots f$. Se f è una contrazione, una qualsiasi sua iterazione è anch'essa una contrazione.

$$d(f(f(x)), f(f(y))) \leq \alpha d(f(x), f(y)) \leq \alpha^2 d(x, y)$$

Per induzione segue il resto. In generale la costante è α^n. Ci chiediamo se nel caso in cui f non sia una contrazione, una sua iterata lo possa essere.

Esempio

Per esempio $f(x) = \cos x$, che non è una contrazione in quanto il supremum della derivata è 1. Invece, $\cos(\cos(x))$ ha derivata

$$\sin(\cos(x)) \cdot \sin$$

Il suo modulo è dato da

$$|\sin(\cos(x))| \cdot |\sin x| \leq \sin(1) < 1$$

Il secondo termine può solamente essere maggiorato da 1, mentre il secondo, siccome $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, può essere maggiorato da $\sin 1$. Quindi è una contrazione.
Con questo possiamo per esempio mostrare che il coseno ha un punto fisso, siccome una sua iterata è una contrazione.

Corollario Indebolimento del teorema delle contrazioni: teorema delle iterate contrazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f \colon X \to X$ un'applicazione tale che $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che f^n sia una contrazione. Allora $\exists_{=1}\, x \in X$ tale che $f(x) = x$.

Proof

Mostriamo che i punti fissi di f (che sono uno solo) sono i punti fissi di f^n. Sia x un punto fisso di f. Allora $f^n(x) = f(f(\cdots(x)) = f(x) = x$. Quindi tutti i punti fissi di f sono anche punti fissi di f^n. Sia ora x tale che $f^n(x) = x$. Componendo otteniamo

$$f(f^n(x)) = f(x)$$
$$f^n(f(x)) = f(x)$$

quindi $f(x)$ è un punto fisso di f^n, ma siccome f è una contrazione ha solo un punto fisso, quindi coincidono $f(x) = x$. Quindi tutti i punti fissi di f^n sono anche punti fissi di f.

Parametrizziamo ora la funzione

Consideriamo $T \colon X \times Y \to X$ come operatore parametrizzato dai valori di Y. Fissato y imponiamo che $T(-, y) : X \to X$ sia una contrazione. Per tutte le y esiste un solo $x \in X$ tale che $T(x, y) = x$. Data la dipendenza funzionale $x = \varphi(y)$ vogliamo capire come il punto fisso dipende dal parametro. In particolare, vogliamo mostrare che φ è continua sotto alcune ipotesi.

Teorema di dipendenza del punto tfisso del parametro

Sia X uno spazio metrico completo e sia Y uno spazio metrico (topologico). Sia $T \colon X \times Y \to X$ tale che $\exists \alpha < 1$ tale che $\forall y \in Y$, $T(-, y)$ è in $\mathrm{Lip}_\alpha(X)$. (α deve essere uniforme rispetto a y). Sia $y_0 \in Y$ tale che $\forall x \in X$, $T(x, y)$ sia continua in y_0. Allora f è continua in y_0.

Proof

Vogliamo mostrare che $d(f(y), f(y_0)) \to 0$ se $y \to y_0$. Vogliamo stimare $d(f(y), f(y_0))$ con $f(y) = T(f(y), y)$. Sia $x = f(y)$ e $f(y_0) = x_0$. Allora

$$d(f(y), f(y_0)) = d(T(x, y), T(x_0, y_0))$$

Usando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} d(T(f(y_0), y_0)) &\leq d(T(f(y), y), T(f(y_0), y)) + d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \\ &\leq \alpha d(f(y), f(y_0)) + d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \\ (1-\alpha) d(f(y), f(y_0)) &\leq d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \to 0 \end{aligned}$$

La costante è positiva e indipendente da y. La funzione $T(f(y_0), -)$ è continua in y.

Lemma Sugli spazi normati

$$||y|| - ||x||| \leq ||y - x||$$

Proof

Sia $y = x + (y - x)$. Allora

$$||y|| = ||x + (y - x)|| \leq ||x|| + ||y - x||$$

Scambiando i ruoli di x e y si ottiene la proposizione.

Ciò mostra che la norma è lipschitz continua.

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, ma non il viceversa.

Definizione Spazio di Banach

Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo rispetto alla norma.

Definizione Equivalenza di norme

Diciamo che due norme $|| \cdot ||, | \cdot |$ sono equivalenti se $\exists 0 < \alpha \leq \beta$ tale che

$$\alpha |x| \leq ||x|| \leq \beta |x|, \quad \forall x \in X$$

Questa è una relazione di equivalenza.

Teorema Equivalenza di norme reali

Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.

Proof

Basta mostrare che una norma $||\cdot||$ questa è equivalente alla $||\cdot||_2$. Dobbiamo trovare α, β tale che

$$\alpha||x||_2 \leq ||x|| \leq \beta||x||_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Consideriamo la base canonica $\{e_1, \cdots, e_n\}$ che è finito-dimensionale e quindi $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

$$\begin{aligned} ||x|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right|\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_1| \cdot ||e_i|| \\ &\leq \left(n \max \bigcup_{i=1}^n \{||e_i||\}\right) \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right) \\ &\leq \left(n \max \bigcup_{i=1}^n \{||e_i||\}\right) ||x||_1 \leq \underbrace{\left(n \max \bigcup_{i=1}^n \{||e_i||\}\right)}_{\beta} ||x||_2 \end{aligned}$$

Questo ci dice anche che $||\cdot||$ è continua rispetto alla topologia indotta da $||\cdot||_2$, e pure lipschitziana. Dobbiamo ora dimostrare l'altra metà della disuguaglianza e trovare α. Poniamo α in funzione dei vettori

$$\alpha = \inf_{||x||_2=1} ||x||$$

Mostriamo che $\alpha > 0$. Una volta fatto questo, possiam ottenere che la definizione di α dice che $||x||_2 = 1 \implies ||x|| \geq \alpha$. Voglio dimostrare che $||x|| \geq \alpha||x||_2$ per tutte le $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x = 0$ la disuguaglianza è soddisfstta. Altrimnti, normalizziamo $z = x/||x||_2$. Usando l'omogeneità assoluta

$$||z||_2 = \left|\left|\frac{x}{||x||_2}\right|\right| = \frac{1}{||x||_2}||x||_2 \implies ||z||_2 = 1$$

Quindi $||z|| \geq \alpha$ and furthermore

$$\left|\left|\frac{x}{||x||_2}\right|\right| \geq \alpha \implies ||x|| \geq \alpha||x||_2$$

We now need to show that α is positive. Siccome le normi sono non-negative, alla peggio sono nulle. In realtà α è un minimo

$$\alpha = \min_{||x||_2=1} ||x||$$

since the norm is continuous with the respect to the topology induced by $||\cdot||_2$. The set over which we are taking the minimum is clearly closed and bounded. Siccome siamo nella topologia reale con norma euclidea è quindi anche compatto. Per Weierstrass, α è un minimo. Quindi deve essere $\alpha > 0$. Se fosse $\alpha = 0$ allora esisterebbe $\hat{x}$ tale che $||\hat{x}||_2 = 1$ e $||\hat{x}|| = 0$, che è assurdo lightning.

2 Operatori lineari fra spazi vettoriali

Lo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Studiamo la continuità degli operatori lineari in spazi normati.

Proposition

Ogni $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è continua rispetto alla topologia indotta dalla norma (qualsiasi visto che sono equivalenti in $\mathbb{R}^n$).

Proof

1. Mostriamo che la continuità dell'operatore in un singolo punto, come l'origine, implica la continuità di A in tutto $\mathbb{R}^n$. Questo è un fatto generale. Abbiamo quindi che se $\{x_n\} \to 0$ allora $\{Ax_n\} \to A0 = 0$. La continuità generale è data dal fatto che se $\{y_n\} \to x$ allora $\{Ay_n\} \to Ax$. Ma $\{Ay_n\} \to Ax$ se e solo se $\{Ay_m - Ax\} \to 0$ cioè $\{A(y_m - x)\} \to 0$ e per linearità $\{y_m - x\}$ è una successione che tende a zero, quindi A è continuo ovunque. Inoltre, per la continuità uniforme possiamo msotrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che
$$||y - x|| < \delta \implies ||Ay - Ax|| < \varepsilon$$
Ma $||Ay - Ax|| = ||A(x - y)||$. Poniamo quindi $z = y - x$. Dobbiamo mostrare che se $||z|| < \delta$ allora $||Az|| < \varepsilon$. Ma questa è la continuità nell'origine che stiamo presupponendo.
2. Mostriamo ora la continuità nell'origine. Usiamo il fatto che $\mathbb{R}^n$ ha dimensione finita. Sia $x = (x_1, \cdots, x_n)$ secondo la base canonica $(e_1, \cdots, e_n)$. Calcolo usando la disuguaglianza triangolare
$$\begin{aligned} ||Ax|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i A e_i\right|\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot ||Ae_i|| \\ &\le C \sum_{i=1}^{n} |x_i|_1, \quad C = \max \bigcup_{i=1}^{n} \{||Ae_i||\} \end{aligned}$$
Ciò dimostra quindi che la funzione è Lipschitz-continua.

Nel passo secondo abbiamo usato il fatto che lo spazio fosse finitamente generato (il dominio). In generale, con $A\colon X \to Y$ è un operatore lineare fra spazi normati qualunque, on è detto che A sia continuo.

Esempio Controesempio

Consideriamo lo spazio delle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitate, in $\mathcal{C}^1$ e con derivata limitata $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R})$. Come secondo spazio prendiamo delle funzioni continue e limitate $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{BC}(\mathbb{R})$. Consideriamo quindi l'operatore della derivata $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{BC}(\mathbb{R})$. Siccome questi non sono spazi finitamente generati, dobbiamo scegliere delle norme. Scegliamo come norma sia nel dominio che nel codominio $|| \cdot ||_\infty$, che ha senso siccome le funzioni sono limitate. Mostriamo quindi che l'operatore lineare non è continuo. Scegliamo l'origine. Vogliamo quindi trovare $\{f_n\} \to 0$ ma tale che $\{f_n'\}$ non tende a zero. Per farlo prendiamo una funzione oscillante che si schiaccia sull'ascisse, e quindi la sua derivata non si schiaccia come la funzione. Prendiamo
$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$
Abbiamo la norma
$$||f||_\infty = \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} |\sin(nx)| = \frac{1}{n}$$
Mentre la norma della derivata
$$||f'||_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |\cos(nx)| = 1$$

Andiamo a definire una norma speciale su questo spazio, la norma operatoriale.

Definizione Norma operatoriale

$$||A||_* = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||$$

Proposition

Norma operatoriale è una norma.

Mostriamo che la norma è ben definita, e che questo è un numero reale. Infatti, $||A||_* < +\infty$, siccome l'insieme del supremum è chiuso e limitato e, quindi, compatto, e la funzione è continua allora il supremum è un massimo. Mostriamo che il massimo si ottiene sulla frontiera della bolla.

Proof

Mostriamo le due disuguaglianze. Il fatto che $||A||_* \geq \max ||Ax||$ è banale, infatti $\{x \,|\, ||x|| = 1\}$ è un sottoinsieme di $\{x \,|\, ||x|| \leq 1\}$. D'altra parte se il massimo è ottenuto per $x = 0$ allora il max è 0 e quindi $Ax = 0$ sempre, e la disuguaglianza è banalmente soddisfatta. Supponiamo ora che il massimo sia ottenuto in un punto non nullo $\hat{x}$, possiamo normalizzare e ottenere norma unitaria.

$$||A\hat{x}|| = \left|\left|A\left(||\hat{x}||\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right| = \left|\left|\,||\hat{x}||A\left(\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right| = ||\hat{x}||\left|\left|A\left(\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right| \leq \left|\left|A\left(\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right)\right|\right|$$

$$||A||_* = \max_{||x||=1||Ax||} = |A\hat{x}| \leq \left|\left|A\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right|\right| \leq \max_{||x||=1} ||Ax||$$

Quindi il valore può essere calcolato solo sulla buccia in quanto lì viene raggiunto il massimo.

Proposition Stima fondamentale

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$||Ax||_* \leq ||A|| \cdot ||x||$$

Proof

Se $||x|| = 1$ vale $||Ax|| \leq ||A||$ perché per la proprietà precedente,

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

Se $x = 0$, la disuguaglianza vale. Altrimenti, normalizziamo x per ritrovarci sulla frontiera.

$$||A||_* \geq \left|\left|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| = \frac{1}{||x||}||Ax||$$

moltiplicando entrmambi i membri epr $||x||$ si ottiene la tesi.

In realtà questa costante è la migliore.

Proposition

Se $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $||Ax|| \leq \alpha ||x||$ per tutte le $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$||A||_* \leq \alpha$$

In realtà questo risultato vale anche se supponiamo che $||Ax|| \leq \alpha ||x||$ solo per x tale che $||x|| \leq 1$ oppure tale che $||x|| = \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Proof

Supponiamo di avere una stima del tipo $||Ax|| \leq \alpha||x||$ per tutte le x. Sappiamo che

$$||A||_* = \max_{||x||=1} ||Ax|| \leq \alpha \max_{||x||\leq 1} ||x|| = \alpha$$

che è quindi chiaramente 1.

La medesima dimostrazione funziona supponendo che $||Ax|| \leq \alpha||x||$ per tutte le $||x|| \leq 1$. Se invece sappiamo che $||Ax|| \leq \alpha||x||$ solo per gli x tale che $||x|| = \varepsilon$, allora è sufficiente normalizzare (per esercizio).

Proof La norma operatoriale è una norma

1. *annullamento:* Supponiamo che $||A||_* = 0$. Devo mostrare che $A = 0$. Siccome la norma è nulla,
$$\max_{||x||\leq 1} ||Ax|| = 0 \implies ||Ax|| = 0, \quad \forall x \,|\, ||x|| \leq 1$$
e quindi anche per tutti le altre x visto che possiamo normalizzare. Quindi, $Ax = 0$.
2. *positiva omogeneità:*
$$||\lambda A||_* = \max_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \max_{||x||=1} |\lambda||Ax| = |\lambda| \max_{||x||=1} ||Ax|| = |\lambda|||A||_*$$
3. *disuguaglianza triangolare:*
$$\begin{aligned} ||(A+B)x|| &= ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \\ &\leq ||A||_*||x|| + ||B||_*||x| = ||x|| \left(||A||_* + ||B||_*\right) \end{aligned}$$
Per la proposizion precedente, $||A+B||_*$ è la più piccola costante per cui vale una disuguaglianza di questo tipo.

La norma operatoriale è scelta tale precisamente per la stima.

Teorema

$(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), || \cdot ||)$ è uno spazio di Banach.

Proof

Siccome questo spazio è finito dimensionale è isomorfismo allo spazio $\mathbb{R}^{m\times n}$ che è completo per esempio rispetto alla norma seconda. Tuttavia, dimostramolo con le successioni di Cauchy. Cosideriamo quindi una successione di operatori lineari. Per tutte le $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che $\forall m, n > N_\varepsilon$ tale che

$$||A_m - A - n|| < \varepsilon$$

cioè per tutte le x

$$||(A_n - A_n)x|| \leq \varepsilon(x)$$

Questo vuole dire che per x fissato la successione $\{A_n x\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Siccome $\mathbb{R}^n$ è completo, la successione converge. Chiamiamo il limite di tale successione Ax. Verifichiamo che in questo modo abbiamo definito un operatore lineare $x \to Ax$. Sappiamo che A_n è lineare per ogni n, quindi $A_n(x+y) = A_n x + A_n y$. Sappiamo che $A(x+y)$ tende ad $Ax+Ay$ e quindi l'espressione sopra tende ad $Ax + Ay$. Analogamente per l'omogeneità. Mostriamo ora che $\{A_n\}$ effettivamente converge ad A, quindi $||A_n - A|| \to 0$. Sappiamo che $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che $\forall n, m > N_\varepsilon$

$$||A_m x - A_n x| \leq \varepsilon||x||$$

Ma $A_n x \to Ax$ per $n \to \infty$. passando al limite si ha che per tutte le $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che $\forall n > N_\varepsilon$,

$$||A_n x - Ax|| \leq \varepsilon |x|$$

cioè abbiamo trovato che $||A_n - A|| - \varepsilon$.

Notiamo che abbiamo sfruttato solo la completezza di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio

Sia $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Prendiamo la norma infinito in ambo gli spazi. Il massimo è dato dal valore sulla frontiera della bolla.

$$||A||_* = \max_{\max\{|x|,|y|\}=1} \max\{|3x - 2y|, |y|, |x + 3y|\}$$

Quindi $|3x - 2x| \leq 3|x| + 2|y|$ edeve essere $\max\{||x||, ||y||\} = 1$. In particolare i due moduli sono minori o uguali ad uno. $|3x - 2y| \leq 3 + 2 = 5$ e il valore 5 è assunto per $x = 1$ e $y = -1$ (oppure cil contrario). Quindi $||A|| = 5$.
Consideriamo invece ora la norma 1 quindi

$$||A|| = \max_{|x|+|y|=1} (|3x - 2y| + |y| + |x + 3y|)$$

Allora

$$|3x - 2y| + |y| + |x + 3y| \leq 3|x| + 2|y| + |y| + |x| + 3|y| = 4|x| + 6|y|$$

Siccome $|x| + |y| = 1$ quest'ultima è un interpolazione lineare tipo $ta + (1-t)b$. In questo caso abbiamo l'espressione $4|x| + 6|y|$ che è sempre minore o uguale di 6. Quindi abbiamo trovato che $|3x - 2y| + |y| + |x + 3y| \leq 6$. Tale valore può essere raggiunto per esempio scegliendo $x = 0$ e $y = 1$.

Consideriamo ora operatori lineari invertibili, quindi fra spazi con la medesima dimensione.

Teorema

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è un aperto in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dove consideriamo lo spazio topologico indotto dalla metrica indotta dalla norma associata allo spazio. Inoltre, la mappa dell'inversione è continua.

Proof

Visto che il determinante è non nullo

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \backslash \{0\})$$

ma visto che è la preimmagine di un aperto tramite il determinante, che è continuo.
Dimostriamo tuttavia la proposizione con una argomento che può funzionare anche nel caso infinito dimensionale.

1. *identità è un punto interno dell'insieme:* mostriamo che esiste δ tale che $||A - \mathbf{1}|| < \delta$ implica che $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Stiamo usando la norma operatoriale. Posiamo $B = \mathbf{1} - A$ e quindi $A^{-1} = (\mathbf{1} - B)^{-1}$ che possiamo scrivere come la serie geometrica di B^k. Ovviamente dobbiamo usare la convergenza della somma parziale della serie secondo la norma dei vettori. (Purché la serie converga). Infatti, se la serie converge usiamo la proprietà distributiva per

mostrare che è veramente l'inverso di $\mathbf{1} - B$

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}-\mathbf{1})\sum_{k=0}^{\infty} B^k &= \sum_{k=0}^{\infty} B^k - \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} B^k - \sum_{k=1}^{\infty} B^k = B^0 = \mathbf{1}\end{aligned}$$

Quindi la stessa cosa che vale per i numeri, vale anche con gli operatori (negli spazi vettoriali in generale). Dobbiamo tuttavia studiare quando la serie converge. Usando il criterio di Cauchy, troviamo che la serie converge se e solo se $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left|\left|\sum_{k=m}^{m+p} B^k\right|\right| \leq \varepsilon$$

Mediante la stima otteniamo una serie numerica.

$$\left|\left|\sum_{k=m}^{m+p} B^k\right|\right| \leq \sum_{k=m}^{m+p} ||B^k||$$

Preferiremmo lavorare la potenza di una norma piuttosto che la norma di una potenza, ma coincidono?
Calcoliamo quindi $||B \circ A||_*$ con A, B operatori lineari, e usando la norma operatoriale. Siccome abbiamo la norma operatoriale vale la stima fondamentale

$$||(B \circ A)x|| = ||B(Ax)|| \leq ||B||_* ||Ax|| \leq ||B||_* ||A||_* ||x||$$

Siccome la norma operatoriale è la più piccola costante per cui vale una stima del tipo dato. Quindi $||B \circ A||_* \leq ||B||_* ||A||_*$. Quindi in particolare $||B^k||_* \leq ||B||_*{}^k$. Tornando a prima otteniamo

$$\left|\left|\sum_{k=m}^{m+p} B^k\right|\right|_* \leq \sum_{k=m}^{m+p} ||B^k||_* \leq \sum_{k=m}^{m+p} (||B||_*)^k \leq \varepsilon$$

pur di considerare $||B||_* < 1$.

2. Sia $A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Vogliamo mostrare che $\exists \delta > 0$ tale che

$$||A - A_0||_* < \delta \implies A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Calcoliamo

$$A = A_0 - (A_0 - A) = A_0(\mathbf{1}A_0^{-1}(A_0 - A)) = A_0(\mathbf{1} - B), \quad B = \mathbf{1} - B$$

per il punto precedente $\mathbf{1} - B$ è invertibile purché $||B||_* < 1$. Studiamo quando ciò avviene

$$||B||_* = ||A_0^{-1}(A_0 - A)||_* \leq ||A_0^{-1}|| \cdot ||A_0 - A|| < 1 \text{ se } ||A_0 - A||_* < \frac{1}{||A_0^{-1}||}$$

la divisione la possiamo fare in quanto la funzione nulla, che ha norma nulla, non è invertibile quindi non siamo in quel caso. Quindi, scegliendo $\delta \leq 1/||A_0^{-1}||$ si ha che A è invertibile, quindi è un aperto. Cioè inq uesto caso $||B|| < 1$ quindi $\mathbf{1} - B$ è invertibile e visto che abbiamo scritto A come prodoto di operatori invertibili, è anch'esso invertibile.

Mostriamo ora che l'inversa è continua. Da $||B \circ A||_* \leq ||B||_* ||A||_*$ da qui segue che la composizione di questi lineari è continua. Siano $B_n \to B$ e $A_n \to A$ quindi $B_n \circ A_n \to B \circ A$. Mostriamo che la mappa $A \to A^{-1}$ è continua, cioè che $A_n \to A \implies A_n^{-1} \to A^{-1}$. Abbiamo

$$A = A_0(\mathbf{1} - A_0^{-1}(A_0 - A)) = A_0(\mathbf{1} - B), \quad A^{-1} = (\mathbf{1} - B)^{-1} A_0^{-1}$$

Vogliamo stimare $||A^{-1} - A_0^{-1}||_*$.

$$A^{-1} - A_0^{-1} = (\mathbf{1} - B)^{-1} A_0^{-1} - A_0^{-1} = \left[(\mathbf{1} - B)^{-1} - \mathbf{1}\right] A_0^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} B^k - \mathbf{1}\right] A_0^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} B^k\right] A_0^{-1}$$

$$||A^{-1} - A_0^{-1}||_* = \left|\left|\left(\sum_{k=1}^{\infty} B^k\right) \circ A_0^{-1}\right|\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (||B||_*)^k\right) ||A_0^{-1}|| = \frac{||B||_*}{1 - ||B||_*} ||A_0^{-1}||$$

pur di prendere $||B||_* < 1$. Se $A \to A_0 \implies ||B||_* \to 0$ allora $A^{-1} - A_0^{-1} \to 0$.

3 Calcoli differenziale multivariabile

Definizione Limite multivariabile

Sia $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e sia a un punto di accimulazione per Ω. Allora

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}^m$$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in \Omega$

$$0 < ||x - a||_1 < \delta \implies ||f(x) - b||_2 < \varepsilon$$

dove le norme sono generiche.

Il concetto di limite ad infinito vuol dire uscire dai compatti.

Definizione Limite a infinito multivariabile

Sia $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con Ω illimitato. Allora

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}^m$$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tale che $\forall x \in \Omega$

$$||x|| > M \implies ||f(x) - b|| < \varepsilon$$

e per il codominio

Definizione Limite infinito multivariabile

Sia $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e a punto di accumulazione. Allora

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

se $\forall K > 0, \exists \delta > 0$ tale che per tutte le $x \in \Omega$

$$0 < ||x - a|| < \delta \implies ||f(x)|| > K$$

Definizione Cammino

Un *cammino* è un applicazione $\varphi : (0, 1) \to \mathbb{R}^n$ continua.

Sia $\Phi_\Omega(a)$ l'insieme dei cammini con sostegni in Ω e tale che $\varphi(t) \to a$ per $t \to 0^+$ e $\varphi(t) \neq$ per tutte le t.

Teorema

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{t \to 0^+} f(\varphi(t)) = b$$

per tutte le $\varphi \in \Phi_\omega(a)$.