Analisi III

Paolo Bettelini

Contents

1 Successione di funzioni

Definizione Successione di funzioni

Una *successione di funzioni* è una famiglia di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite su un dominio comune $f_n\colon D \to \mathbb{R}$.

Definizione Convergenza in un punto

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione converge in un punto x_0 se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) < \infty$$

Definizione Convergenza puntuale

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge puntualmente* ad una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ se

$$\forall x \in D,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Quindi la successione converge in ogni punto, ma la velocità di convergenza può dipenderere dal punto.

Definizione Convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge uniformemente* ad una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ se

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

per $n \to \infty$.

Oppure possiamo dire che la condizione è che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n > N, ||f_n - f||_{\infty,E} < \varepsilon$$

Dovremmo dire che la differenza

$$|f_n(x) - f| \leq \varepsilon$$

ma siccome ciò deve valere per tutte le x possiamo utilizzare il supremum.

Quindi la velocità di convergenza è la stessa in ogni punto. Ogni cosa che converge uniformemente converge puntualmente.

Definizione Convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione è *uniformemente di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N, \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

A partire da un certo indice, tutte le funzioni della successione sono molto vicine tra loro in modo uniforme su tutto D, indipendentemente dalla funzione limite.

Teorema Convergenza uniforme e convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. Se la successione è uniformemente di Cauchy allora è uniformemente convergente.

Teorema

Sia $\{f_n\}$ convergente uniformemente a f in E e sia $x_0 \in E$ un punto di accumulazione di E. Supponiamo che esista

$$\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lambda_n$$

per ogni n, allora

1. $\lambda_n \to \lambda$,
2. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$$

Proof

1. $$|\lambda_n - \lambda_m| = \lim_{x\to x_0} |f_n(x) - f_n(x)| \leq \lim_{x\to x_0} ||f_n - f_m||_{\infty,E} < \varepsilon$$
   dunque è di Cauchy e converge al limite $\lambda_n \to \lambda$.
2. $$\begin{aligned} |f(x) - \lambda| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| \\ &\leq ||f - f_n||_{\infty,E} + |f_n(x) - \lambda_n| \end{aligned}$$
   dunque se $\overline{n} = \max\{N_1, N_2\}$
   $$|f(x) - \lambda| \leq 2\varepsilon + |f_{\overline{n}}(x) - \lambda_{\overline{n}}| \leq 3\varepsilon$$
   quindi
   $$f_{\overline{n}}(x) - \lambda_{\overline{n}} \leq \varepsilon$$

Quindi, se abbiamo convergenza uniforme,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right)\\ &= \lambda = \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)\end{aligned}$$

possiamo scambiare l'ordine.

Corollario

Se f_n sono continue e $f_n \to f$, allora f è continua.

Teorema

Sia $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni R-integrabili dove $f_n \to f$ in $[a,b]$. Allora f è R-integrabile e

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Proof

Supponiamo anche che f_n siano continue.

1. f è continua e quindi R-integrabile;
2. mostriamo che vale l'uguale, cioè $\forall m,n \geq N$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx\\ &\leq \int_a^b ||f_n - f||_{\infty,[a,b]}\,dx \leq \varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

(cioè tende a zero) per $n \geq N$.

Teorema

Sia $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

1. $\exists x_0 \in [a,b]$ tale che f_n converge in x_0;
2. f_n' converge uniformemente in g a $[a,b]$.

Allora,

1. f_n converge uniformemente a f in $[a,b]$;
2. f è derivabile;
3. $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

2 Serie di funzioni

Definizione Convergenza uniforme

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente* ad una funzione $S(x)$ se la successione delle somme parziali

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converge uniformemente a $S(x)$, ovvero se

$$\sup_{x\in D} |S_N(x) - S(x)| \to 0$$

per $N \to \infty$.

È più forte della convergenza puntuale.

Definizione Convergenza totale

Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge totalmente* su un insieme D se la serie di norme

$$\sum ||f_n||_\infty$$

converge.

Ricordiamo che in generale la norma

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty$$

e per $p = \infty$ con f limitata

$$||f||_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|$$

che è un numero siccome f è limitata

Teorema

XXXX. Se ho la convergenza uniforme posso invertire integrale e serie.

3 Integrazione

Teorema Monotone convergence theorem for non-negative measurable functions

Let (X, Σ, μ) be a measurable space and let

$$f_n \colon X \to [0; +\infty)$$

be measurable such that $f_n \le f_{n+1}$. Then,

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\lim_n f_n) \, d\mu$$

Sia per esempio $f_n = \chi_{\{1\}} + \chi_{\{n\}}$. Allora la funzione converge puntualmente in quanto l'1 si sposta sempre più a destra. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = 2 \to 2$$

Se invece $f_n \ge f_{n+1}$ allora $f_n = \chi_{\{n,n+1,\cdots\}}$, allora tende a zero. Tuttavia, l'integrale di f_n è infinito in quanto la misura dell'insieme è infinita.

Proof

Abbiamo

$$f_n \leq f_{n+1} \cdots \leq f, \quad f = \lim_n f_n$$

Quindi

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

quindi anchde la successione degli integrali è monotona e ammette limite. Il limite sarà sempre più piccolo dell'ultimo valore.

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

Facciamo ora il caso $\geq$. Sia $0 \leq \varphi \leq f$ una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad \alpha_i \geq 0$$

e prendiamo $c \in (0,1)$. Considegliamo gli insiemi

$$A_n = \{f_n \geq c\varphi\}$$

Tali insiemi sono misurabili, in quanto sto moltiplicando una funzione misurabile per una costante e l'insieme $\{f \geq g\}$ è come dire $\{f - g \geq 0\}$. Sappiamo

1. $A_n \in A_{n+1}$ in quanto $c\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$;
2. $\bigcup A_n = X$. Sia $x \in X$. Se $\varphi(x) = 0$ allora è in A_n. Se invece $\varphi(x) > 0$, ma siccome $\varphi \leq f$, e $c < 1$, allora

$$c\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$$

La succesione, da un certo posto in poi, è più grande di $c\varphi(x)$ (ne basta uno), quindi $x \in A_n$.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} E_i &= E_i \cap X \\ &= E_i \cap (\bigcup A_n) \\ &= \bigcup_n (E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Quindi $E_i \cap A_n \subseteq E_i \cap A_{n+1}$ è una successione di insiemi che si sta allargando. Quindi, la misura dell'union è il limite.

$$\mu(E_i) = \lim_{n \to \infty} E_i \cap A_n$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{A_n} \varphi \, d\mu \\ = c \int_X \varphi \chi_{A_n} \, d\mu = c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Facciamo ora il limite

$$\begin{aligned} \lim_n \int_X f_n \, d\mu &\geq c \lim_n \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \\ &= c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i) = c \int_X \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X \varphi \, d\mu$$

vale per tutti i $c \in (0,1)$, e allora possiamo usare il supremum

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \varphi \, d\mu$$

Non solo vale per ogni c, ma per ogni funzione semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$. In particolare anche per il supremum. Il supremum di questi integrali al variare di tutte le funzioni semplici minori di f è l'integrale di f, cioè la definizione

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu$$

Mettendo assieme le due cose otteniamo l'uguaglianza

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Corollario

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

Proof

Siccome i termini sono tutti positivi, la successione delle serie parziale è monotona.

Lemma Lemma di Fatou

Sia $f_n \colon X \to [0, +\infty)$ misurabili, allora

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

(l'integrale esiste sempre)

Proof

Consideriamo

$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k$$

chiaramente $g_n \leq g_{n+1} \to \liminf f_n$ e sono misurabili. Consideriamo allora l'integrale

$$\lim \int_X g_n \, d\mu = \int_X \liminf f_n \, d\mu$$

e per il teorema della convergenza monotona e definizione di $\liminf$

$$\begin{aligned}\int_X \liminf f_n \, d\mu &= \lim_n \int_X (\inf_n k \geq n f_k) \, d\mu \\ &\leq \liminf \int_X f_n \, d\mu\end{aligned}$$

Definizione Integrabilità di una funzione positiva

Sia $f\colon X \to [0; +\infty)$ misurabile. Allora f è *integrabile* su X se

$$\int_X f\, d\mu < \infty$$

Diciamo che $f \in L^1(\{X, \Sigma, \mu\})$. Per esempio $\{1/n^2\} \in L^1(\mathbb{N})$ ma $\{1/n\} \notin L^1(\mathbb{N})$

Definizione Integrabilità di una funzione

Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile. Allora f è *integrabile* se f^+ e f^- sono integrabili (che sono entrambe funzioni positive).

Dobbiamo tuttavia definire l'integrale di una funzione di segno arbitraria. Sia allora

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu$$

Consideriamo per esempio

$$f = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$$

Allora

$$f^+ = (1, 0, \frac{1}{3}, 0)$$

e

$$f^- = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$$

L'integrale non converge in quanto i due integrali non convergono (le serie divergono per confronto asintotico).

Proposition

Siano $f, g \in L^1$.

1. $\alpha f + \beta b \in L^1$ e

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$

   Quindi lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale.

2. $$f \leq g \implies \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$$

3. $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$. Infatti $f^+ f^- = |f|$ e per la direzione inserva abbiamo $0 \leq f^+ \leq |f|$. Ma se l'integrale del modulo è finito allora lo sarà anche quello di f^+ che è più piccolo. Lo stesso vale per la parte negativa.
4. Se f è misurabile allora lo è anche $|f|$, ma il viceversa non è vero. Per esempio sia $X = \{a, b, c\}$ e $\Sigma = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Sia allora

$$f = \begin{cases} 1 & x = a \vee x = b \\ -1 & x = c \end{cases}$$

   Chiaramente $\{f < 0\} = \{c\}$ non è misurabile, ma $|f| = 1$ per tutte le x e le funzioni costanti sono sempre misurabili.

5. $$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

Infatti

$$\begin{aligned}\left|\int_X (f^+ - f^-)\, d\mu\right| &= \left|\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu\right| \\ &\le \left|\int_X f^+\, d\mu\right| + \left|\int_X f^-\, d\mu\right| \\ &= \int_X f^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu \\ &= \int_X (f^+ + f^-)\, d\mu \\ &= \int_X |f|\, d\mu\end{aligned}$$

Teorema Teorema della convergenza dominante

Sia $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $f = \lim_n f_n$. Supponiamo che ci sia $g \in L^1$ tale che $|f_n| \le g$ in X. Allora

$$\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Proof

f_n sono integrabili in quanto $|f_n| \le g$ che è integrabili, quindi sarà finito anche l'integrale del modulo, e f è integrabile perché ciò vale anche per il limite. Allora $|f - f_n| \le 2g$ quindi $2g - |f - f_n| \ge 0$. Siccome quest'ultima è una successione positiva posso applicare il lemma di Fatou

$$\int_X \liminf(2g - |f - f_n|)\, d\mu \le \liminf \int_X (2g - |f - f_n|)\, d\mu$$

Ma per le proprietà dei lim inf possiamo estrarre la costante

$$\begin{aligned}\int_X 2g - \lim |f - f_n| &= \int_X 2g \\ &\le \liminf \left(\int_X 2g\, d\mu - \int_X |f - f_n|\, d\mu\right) \\ &= \int_X 2g\, d\mu - \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_X 2g\, d\mu \le \int_X 2g\, d\mu - \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu \\ \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu \le 0\end{aligned}$$

Ma quindi questo limite deve essere ed essere uguale a zero

$$\int_X |f - f_n|\, d\mu = 0$$

Infine, usando il modulo

$$\lim \left|\int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu\right| \le \lim \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

siccome è tutto positivo deve essere

$$\lim \left|\int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu\right| = 0$$

Se $A \subseteq X$ con A integrabile e $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, f è integrabile in A se $f\chi_A$ è integrabile. Chiaramente definiamo

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu$$

Quindi per vedere se è integrabile nel sottoinsieme la estendiamo su tutto lo spazio con la funzione caratteristica e integriamo.

Costruiamo ora una misura su R (la misura di Lebesuge). Vogliamo che sia invariante per traslazione $\mu(A) = \mu(A+c)$ dove c è una costante. Vorremmo anche che $\mu([b,a]) = b-a$. Tuttavia, non è possibile costruire tale misura su tutto $\mathbb{R}$. Sia allora $I = (a,b)$ (non cambia se incluso o meno) e denotiamo $l(I) = b-a$. Sia anche $E \subset \mathbb{R}$. Diamo la *misura esterna*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \,|\, E \subset \bigcup_n I_n\right\}$$

Alcune proprietà di questa ipotetica misura

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\mu^*(\{x\}) = 0$ dove $\{x\} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$;
3. se E numerabile, allora $\mu^*(E) = 0$

$$E \subset \{x_n\}$$
$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$
$$E \subset \bigcup I_n$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon\end{aligned}$$

4. $\mu^*(E+x) = \mu^*(E)$ (invariante per traslazione).
5. subadditività (numerabile)

$$\mu^*\left(\bigcup E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$$

6. $\mu^*(I) = b-a$

Se tutto fosse vero, abbiamo quello che cerchiamo, ma in realtà quando gli insiemi sono disgiunti l'ugualgianza non vale, quindi non esiste tale misura.

Vale sempre $\mu^*(I) \leq b-a$ perché c'è l'inf, c'è sempre un ricoprimento. La misura esterna è almeno quel valore, magari più piccolo, vale lo stesso.

Vogliamo mostrare la subadditività (numerabile). Per definizione possiamo prendere E_n come un'unione di intervalli numerati

$$E_n \subseteq \bigcup_k I_k^n$$

quindi, per avvicinarsi alla misura

$$\sum_{k=1} l(I_k^n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Chairamente l'unione di E_n è ricoperta da un unione di unioni

$$\bigcup E_n \subseteq \bigcup_n \left(\bigcup_k I_k^n \right)$$

E per definizione la misura di tale unione

$$\begin{aligned}
\mu^* \left(\bigcup E_n \right) &\leq \sum_n \left(\sum_k l(I_k^n) \right) \\
&\leq \sum_n \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\
&= \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Siccome $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ è una possibile ricopritura, abbiamo

$$\mu^*([b, a]) \leq b - a + 2\varepsilon$$

Ora facciamo il contrario; mostriamo che per ogni ricoprimento $[a, b] \subseteq \bigcup I_n$, la serie di tutte quelle lunghezze è almeno $b - a$. L'insieme $\bigcup I_n$ è compatto e quindi ha un ricoprimento finito. Possiamo estrarre un sottoricoprimento finito che lo ricopre ancora. Quindi possiamo immaginarci

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$$

Vogliamo mostrare che se i ricoprimenti finiti hanno lunghezza almeno $b - a$, quindi anche quelli infiniti. Siccome usiamo intervalli aperti, vogliamo che gli altri intervalli si sovrappongano per coprire anche gli estremi, che non sono coperti. Impostiamo allora la condizione che $a_1 < a$, $a_2 < b_1$, $a_3 < b_2$. Quindi in generale ci spostiamo verso destra con $a_k - b_{k-1}$. L'ultimo intervallo deve contenere b quindi $b_n > b$. Quindi, dato un ricoprimento qualsiasi, possiamo sempre trovare un sottoricoprimento in questa maniera. Abbiamo allora la sommatoria

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} l(I_k) &= b_n - a_n + b_{n-1} - a_{n-1} + \cdots + b_2 - a_2 + b_1 - a_1 \\
&= b_n + (b_{n-1} - a_n) + (b_{n-2} - a_{n-1}) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1
\end{aligned}$$

Siccome $a_k - b_{k-1}$, tutte le parentesi sono strettamente positive. Se buttiamo via tali termini ci rimane un valore maggiore di $b_n - a_1$.

$$\sum_{k=1}^{n} l(I_k) > b_n - a_1 > b - a$$

Abbiamo quindi trovato che $\mu^*([a, b]) = b - a$. Possiamo trovare la misura dell'intervallo aperto facendo

$$\begin{aligned}
b - a = \mu^*([a, b]) &= \mu^* \left((a, b) \cup \{a\} \cup \{b\} \right) \\
&\leq \mu^* \left((a, b) \right) + \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\}) \\
&= \mu^* \left((a, b) \right) \leq b - a
\end{aligned}$$

Definizione Misurabile secondo Lebesgue

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è *misurabile secondo Lebesgue* se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Questa definizione è data dal fatto che vogliamo che la misura si scomponga in due parti disgiunte per tutti gli A, quella che si sovrappone con E e quella che non si sovrappone con E.

Teorema

Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono una σ-algebra.

Proof

Sia $\mathcal{M}$ tale insieme.

1. Notiamo un paio di cose. Se $\mu^*(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}$. Questo è dato dal fatto che

$$\begin{aligned} 0 + \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\leq \mu^*(A) \end{aligned}$$

   Quindi anche tutti gli insiemi misurabili hanno misura zero.
2. Abbiamo anche che se $E \in \mathcal{M}$ allora $E^C \in \mathcal{M}$. Questo è dato dalla definizione simmetrica di misura di Lebesgue.
3. Mostriamo che se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, allora $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Per fare ciò mostriamo $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$, e poi usiamo il complementare due volte per tornare al primo caso. Siccome E_2 è misurabile possiamo scomporre

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*((A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2^c)) \end{aligned}$$

   il terzo passaggio usa la subadditività per maggiorare. Chiaramente se ciò vale per due insiemi, banalmente vale per n insiemi $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{M}$, e quindi $\bigcup_i E_i \in \mathcal{M}$. Se quindi $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sono misurabili e sono disgiunti, allora $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k)$$

   Per esempio, per $A = \mathbb{R}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k)$$

   Per induzione abbiamo $n+1 \implies n$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cup E_n\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cap E_n^c\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right) \\ &= \mu^*\left(A \cap E_n\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k) \end{aligned}$$

   Mostriamo ora il caso infinito. Sia $\{E_n\}$ con $E_n \in \mathcal{M}$, allora $\bigcup I_n \in \mathcal{M}$. Sia

$$\begin{aligned} E = \bigcup E_n &= E_1 \cap (E_2 \backslash E_1) \cup (E_3 \backslash (E_1 \cup E_2)) \cup \cdots \\ &= G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \end{aligned}$$

   siccome l'intersezione di insiemi misurabili è misurabile, e i G_i sono una collezione finita di quest'ultimi, allora i G_i sono misurabili. Abbiamo allora $E = \bigcup G_n$ dove $G_n \in \mathcal{M}$ sono disgiunti. Sia

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$$

Chiaramente $F_n \subseteq E$ e $F_n^c \supseteq E^c$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\
&\geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\right)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^*\left(A \cap G_k\right) + \mu^*(A \cap E^c)
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi questa maggiorazione per ogni n, quindi vale anche per il limite. Il limite delle successioni delle somme parziali è la serie.

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(A \cap E^c) \\
&\geq \mu^*\left(\bigcup_{k}^{\infty}(A \cap G_k)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\
&= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)
\end{aligned}$$

per la subadditività.

La σ-algebra $\mathcal{M}$ viene detta *σ-algebra di Lebesgue.*

Definizione Misura di Lebesgue

Sia E misurabile secondo Lebesgue. Allora

$$\mu(E) \triangleq \mu^*(E)$$

dove μ^* è la misura esterna.

Dobbiamo assicurarsi che data una collezione $\{E_n\}$ misurabili secondo Lebesgue e disgiunti,

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Sicuramente il primo termine è minore o uguale al secondo. Per il maggiore o uguale abbiamo

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup^{\infty} E_n\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \\
&= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)
\end{aligned}$$

che vale siccome vale la subadditività su insiemi finiti disgiunti. Sicocme ciò vale per ogni n, allora vale anche il limite

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

La misura esterna è additiva per un numero finiti di insiemi disgiunti, ma non è vero nel caso infinito. La σ-algebra che abbiamo creato è la più grande che gode delle proprietà della misura che vogliamo.

Abbiamo quindi l'algebra $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$. Abbiamo pronta la teoria dell'integrazione per definire l'integrale di Legesbue. Dobbiamo tuttavia capire quali insiemi sono misurabili.

Proposition

$(a, +\infty)$ è misurabile.

Proof

Abbiamo

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a])$$

e $A \subseteq \bigcup I_n$ Siano

$$I_n^- = I_n \cap (-\infty, a], \quad I_n^+ = I_n \cap (a, +\infty)$$

ovviamente valgono

$$I_n = I_n^- \cup I_n^+, \quad I_n^- \cap I_n^+ = \emptyset$$

quindi $l(I_n) = l(I_n^-) + l(I_n^+)$. Inoltre

$$A \cap (-\infty, a] \subseteq \bigcup I_n^-, \quad A \cap (a, +\infty) \subseteq \bigcup I_n^+$$

E per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a]) &\leq \sum_n l(I_n^+) + \sum_n l(I_n^-) \\ &= \sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi tutti anche gli intervalli sono misurabili. Anche $[a, b)$ è misurabile in quanto

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty \right) \cap (-\infty, b)$$

e $(-\infty, b)$ è misurabile in quanto è il complemento di

$$[b, +\infty) = \bigcap (b - \frac{1}{n}, +\infty)$$

In generale $(a, b) \in \mathcal{M}$. Se A è aperto allora è misurabile. $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue è uno spazio di misura completo.

Proposition

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto. Allora A è unione numerabile di intervalli disgiunti.

Quindi sono misurabili (non serve nemmeno che siano disgiunti).

Proof

Sia $x \in A$ e consideriamo

$$I_x = \left\{ \bigcup I \,|\, x \in I \right\} \subseteq A$$

chiaramente I_x è un intervallo, il più grande intervallo contenente x. Se $I_x = A$, allora abbiamo finito altrimenti $I_x \subset A$ e consideriamo dunque $y \in A \backslash I_x$ e I_y. Chiaramente $I_x \cap I_y = \emptyset$. Adesso abbiamo altri due casi, o $I_x \cup I_y = A$, e allora abbiamo scritto l'aperto come unione di intervalli disgiunti, oppure c'è $z \in A \backslash (I_y \cup I_x)$. Considerando I_z possiamo fare lo stesso ragionamento. Possiamo andare avanti finché non ho consumato tutti i punti di A. Dobbiamo tuttavia mostrare che $A = \bigcup I_{x_i}$ è unione numerabile. Per fare ciò consideriamo tutti i razionali $\{r_n\}$ che stanno in A. Ognuno dei I_{x_i} deve contenere almeno un razionale, ma siccome i razionali sono numerabili, ci sarebbero intervalli I_{x_i} senza razionali, che è impossibile.

Assioma Assioma della scelta

Sia $\mathcal{F}$ una collezione di sottoinsieme di X esiste una funzione di scelta $\varphi \colon \mathcal{F} \to X$ tale che $\forall G \in \mathcal{F}, \varphi(G) \in G$.

Vediamo ora un insieme che non è misurabile usando l'assioma della scelta. In $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue, sia $X = [0, 1)$ e definiamo

$$x \overset{\circ}{+} y = \begin{cases} x + y & x + y < 1 \\ x + y - 1 & x + y \geq 1 \end{cases}$$

per $x, y \in X$. Usiamo la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Indichiamo con P tutti gli elementi che estraiamo con la funzione della scelta dalle classi di equivalenza, cioè i rappresentanti delle varie classi. Consideriamo ora i razionali $\{r_n\}$ di $[0, 1)$ e sia

$$P_n \triangleq P \overset{\circ}{+} r_n$$

Abbiamo alcune proprietà:

1. $n \neq m \implies P_n \cap P_m = \emptyset$. Se $z \in P_n \cap P_m$, allora $z = p \overset{\circ}{+} r_n = q \overset{\circ}{+} r_m$. Quindi $p - q = r_m - r_n$, ma quindi $p - q$ è razionale, e quindi sono nella stessa classe di equivalenza, contro l'ipotesi che sono di classi distinte.
2. $$\bigcup P_n = [0, 1)$$
   Chiaramente $\bigcup P_n \subseteq [0, 1)$. Sia ora $x \in [0, 1)$ e mostriamo che appartiene ad un certo P_n. Ovviamente $x \in [x]_\sim = [p]_\sim$, quindi $p - x \in \mathbb{Q}$.
   - se $x > p$ allora $x - p = r_{\overline{n}} \in [0, 1)$, quindi $x = p + r_{\overline{n}}$ o in altre parole $x \in {}_{r_{\overline{n}}}$
   - se $x < p$ allora $x - p + 1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ e $x - p + 1 = r_{\hat{n}} \in [0, 1) = x = p + r_{\hat{n}} - 1 = p \overset{\circ}{+} r_{\hat{n}}$

Supponiamo ora che P sia misurabile, e quindi P_n è misurabile. Allora $\mu(P) = \mu(P_n)$

$$\begin{aligned} 1 = \mu([0, 1)) = \mu\left(\bigcup P_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P) \end{aligned}$$

quindi la serie di termini costanti o è zero, o diverge, il che è assurdo. Quindi l'insieme non è misurabile.

Ricordiamo che una funzione è misurabile quando $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}$. La funzione $1_{\mathbb{Q}}$ è misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}} \, d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0$$

Teorema

Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile. Allora

1. f è misurabile secondo Lebesgue;

2. f è Lebesgue-integrabile;
3.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\mu$$

Proof

Sia f misurabile. Vogliamo vedere se

$$\int_{[a,b]} |f|\,d\mu < \infty$$

Ma

$$\int_{[a,b]} |f|\,d\mu \leq \int_{[a,b]} M\,d\mu = M(b-a)$$

Siccome f è R-integrabile, sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$, esiste una partizione P di $[a,b]$ tale che

$$|S(f,P) - s(f,P)| < \varepsilon$$

TODO: usare i simboli di integrale superiore e inferiore. Ricordiamo che

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Prendiamo

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i 1_{(x_{i-1},x_i)}$$

e

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{n} M_i 1_{(x_{i-1},x_i)}$$

Una prende l'inf e l'altra prende il sup, quindi $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$. Allora

$$S(f,P) = \int_{[a,b]} \varphi_2\,d\mu, \quad s(f,P) = \int_{[a,b]} \varphi_1\,d\mu$$

Quindi possiamo rimpiazzare la condizione con gli integrali di Lebesgue

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_2\,d\mu - \int_{[a,b]} \varphi_1\,d\mu \right| < \varepsilon$$

Al posto di ε prendiamo $1/n$. Per ogni n ci saranno le funzioni semplici $\varphi_1^n \leq f \leq \varphi_2^n$. Possiamo anche fare in modo che $\varphi_1^n \leq \varphi_1^{n+1} \leq f \leq \varphi_2^{n+1} \leq \varphi_2^n$. Chiaramente $\{\varphi_1^n\}$ e $\{\varphi_2^n\}$ sono monotone e quindi convergono a $\overline{\varphi}_1$ e $\overline{\varphi}_2$, quindi $\overline{\varphi}_1 \leq f \leq \overline{\varphi}_2$. Vale sempre che $|\varphi_1^n|, |\varphi_2^n| \leq M$ sono limitate da qualche costante, ma allora possiamo applicare il teorema della convergenza dominante

$$\int_{[a,b]} (\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1)\,d\mu = 0$$

ma quindi siccome l'integranda $\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1$ è non negativa, allora deve essere quasi ovunque uguale a zero, oppure che le due sono uguali quasi ovunque, e siccome $\overline{\varphi}_1 \leq f \leq \overline{\varphi}_2$, allora $\overline{\varphi}_2 = f = \overline{\varphi}_1$

quasi ovunque. Allora, siccome $\mathcal{M}$ è completa, f è misurabile. Il terzo punto è immediato in quanto l'integrale rimane monotono e quindi

$$\int_{[a,b]} \overline{\varphi}_1 \, d\mu \leq \int_{[a,b]} f \, d\mu \int_{[a,b]} \overline{\varphi}_2 \, d\mu$$

ma il primo è uguale all'ultimo. Per definizione di integrale di Riemann,

$$\int_{[a,b]} \overline{\varphi}_2 \, d\mu$$

è l'integrale di Riemann di f, e quindi

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

Teorema

Sia $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ misurabile tale che f sia R-integrabile in $[a, c]$ per $c > a$. Allora,

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x) \, dc = \int_{[a,+\infty)} f \, d\mu$$

L'ipotesi garantisce che l'integrale esiste per ogni c. Siccome la funzione è positiva, l'integrale è monotono crescente (potrebbe essere $+\infty$). Quindi, nel caso dell'integrale di Lebesgue non è necessario usare il limite per estendere l'integrale nell'intervallo illimitato, a differenza dell'integrale di Riemann.

Proof

Consideriamo una generica successione $c_n \to \infty$ e consideriamo

$$f_n(x) = f(x) 1_{[a,c_n]}$$

Chiaramente $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ è monotona crescente. Inoltre, $f_n \to f$ in $[a, +\infty)$. Usiamo il teorema della convergenza monotona che si dice

$$\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu &= \lim_n \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a,c_n]} \, d\mu \\
&= \lim \int_{[a,c_n]} f \, d\mu \\
&= \lim \int_a^{c_n} f \, d\mu \\
&= \lim \int_a^{c_n} f(x) \, dx \\
&= \lim \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a,+\infty)} \, d\mu \\
&= \int_{[a,+\infty)} d\mu
\end{aligned}$$

Esempio

La funzione
$$\frac{\cos \pi x}{x} \notin L^1((1,+\infty))$$
Una funzione è integrabile secondo Lebesgue se e solo se lo è il suo modulo. Possiamo anche utilizzare il fatto che
$$\int_{\bigcup E_n} f\, d\mu = \sum_n \int_{E_n} f\, d\mu$$
per insiemi E_n disgiunti se f è positiva, come in questo caso. Consideriamo quindi
$$[1,+\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k+1)$$
che sono disgiunti. E quindi
$$\begin{aligned}
\int_{[1,+\infty)} \frac{|\cos \pi x|}{x}\, d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k,k+1)} \frac{|\cos \pi x|}{x}\, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{x}\, dx \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{|\cos \pi x|}{k+1}\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 |\cos \pi x|\, dx = +\infty
\end{aligned}$$
che diverge. Questa funzione non è integrabile secondo Lebesgue ma lo è secondo Riemann.

Esempio

Studiare, al variare di α, quando
$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin \pi x}{(\ln x) \ln(1+\sqrt{x})} \in L^1((0,+\infty))$$
Abbiamo dei problemi in $x = 0, 1, +\infty$. In un intorno di zero abbiamo
$$f \sim \frac{C}{x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \ln x}$$
quindi è integrabile per $\alpha > -3/2$. In un intorno di 1 abbiamo
$$f \sim C\frac{\sim \pi x}{\ln x}$$
che è ha limite
$$\lim_{x\to 1} Cx \cos(\pi x) = 0$$
quindi la nostra funzione è sempre integrabile in un intorno di 1. In un intorno di infinito abbiamo la maggiorazione
$$|f| \leq \frac{Cx^\alpha}{\ln^2(x)}$$
siccome per x grande togliamo il $+1$. Quindi la funzione è del tipo
$$\frac{C}{x^{-\alpha} \ln^2 x}$$

che è integrabile per $\alpha \leq -1$. Quindi la funzione è integrabile per $-3/2 < \alpha \leq -1$. Dobbiamo tuttavia capire che cosa succede se $\alpha \leq -1$, siccome abbiamo usato una maggiorazione. Dividiamo l'integrale in diversi integrali secondo il periodo

$$\int_{a=2}^{+\infty} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x)\ln(1+\sqrt{x})}\, dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{x^\alpha |\sin \pi x|}{(\ln x)\ln(1+\sqrt{x})}\, dx$$
$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{-\alpha}\ln(k+1)\ln(1+\sqrt{k+1})} \int_0^1 |\sin \pi x|\, dx$$

dove $a = 2$ è quasi arbitrario. Della parte periodica sappiamo che l'integrale è costante, del resto della funzione abbiamo preso il minimo. Cominciamo guardando $-1 \leq \alpha \leq 0$. Il termine ora ha forma

$$\frac{1}{k^{-\alpha}\ln^2 k}$$

allora diverge per $a > -1$. In conclusione, la funzione è integrabile se e solo se

$$-\frac{3}{2} < \alpha \leq -1$$

Quindi per $\alpha \leq -1$ abbiamo fatto una maggiorazione, mentre per il resto abbiamo fatto una minorazione.

Esempio

Studiare quando

$$f(x) = \frac{\sin^2 x^2}{x^\alpha} \in L^1((0,+\infty))$$

al variare di α. Abbiamo problemi in $x = 0, +\infty$. In un intorno di 0 abbiamo

$$f \sim \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

quindi è integrabile per $\alpha < 5$. In un intorno di infinito notiamo che

$$f \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

quindi è integrabile se $\alpha > 1$. Dobbiamo tuttavia studiare il caso $\alpha \leq 1$. Dobbiamo cambiare la variabile in maniera tale da fare diventare la funzione periodica $x^2 = t$. Allora,

$$\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\, dt \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\, dt$$
$$\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k+1)\pi]^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^\pi \sin^2 t\, dt$$

che non è integrabile $\frac{\alpha+2}{2} \leq 1 \iff \alpha \leq 1$. Quindi, $f \in L^1((0,+\infty))$ se e solo se $1 < \alpha < 5$.

Esempio

Studiare quando

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}} \in L^1((0,+\infty))$$

al variare di α. Abbiamo problemi ad infinito ed sicuramente illimitata in quanto il seno si annulla periodicamente. Tuttavia, i punti critici periodici dipendono solo da

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\alpha}}$$

che è integrabile per $\alpha > -2/3$. Guardiamo ora cosa succede in un intorno di $k\pi$

$$\frac{1}{|x-k\pi|^\alpha} \sim f \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

Dobbiamo fare uno sviluppo per studiare il seno negli intorni di $k\pi$.

$$\sin(x) = 0 \pm (x-k\pi) + o((x-k\pi))$$

quindi si comporta come

$$\frac{1}{|x-k\pi|^{1/3}}$$

che è integrabile. Quindi, non ci sono problemi di integrabilità in tali punti per quel pezzo della funzione. In un intorno di infinito

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f|\, d\mu &\geq \int_\pi^\infty |f|\, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sin x}}\, dx \\
&\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{(k\pi)^\alpha}{1+(k\pi)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx
\end{aligned}$$

quindi il carattere è lo stesso di

$$\frac{1}{k^{2-\alpha}}$$

che diverge per $\alpha \geq 1$. Analogamente minoriamo

$$\leq \sum_{k=1}^\infty \frac{((k+1)\pi)^\alpha}{1+\pi^2(k+1)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$$

che converge per $\alpha < 1$. Quindi, $f \in L^1 \iff -2/3 < \alpha < 1$.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}}\, dx$$

Calcoliamo il limite (per $x > 0$) delle funzioni che stiamo integrando

$$\lim_n \frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} = \begin{cases} e^x 0 < x < 1 \\ e^{-2x} \end{cases}$$

il caso $x = 1$ non ci interessa in quanto per ciò che concerne l'integrale un singolo punto è irrilevante. Vogliamo applicare il teorema di convergenza dominante. Vogliamo trovare una maggiorante integrabile g. Per $x \in (0, 1)$ possiamo usare

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq e^x + 1$$

Invece, per $x \in (1, +\infty)$

$$\frac{e^x + x^n}{1 + x^n e^{2x}} \leq \frac{e^x}{x^n e^{2x}} + \frac{x^n}{x^n e^{2x}} = \frac{e^- x}{x^n} + e^{-2x} \leq e^{-x} + e^{-2x}$$

Quindi,

$$f_n \leq \begin{cases} e^x + 1 & x \in (0, 1) \\ e^{-2x} + e^{-x} & x > 1 \end{cases}$$

allora il limite degli integrali è l'integrale del limite

Esercizio

Calcolare

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}}\, dt$$

Il problema è l'intervallo di integazione, ma possiamo sistemarlo

$$\lim_n \int_0^n \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}}\, dt = \lim_n \int_0^\infty \frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}} 1_{[0,n]}\, dt$$

Il limite è dato da

$$\lim_n f_n(t) = \begin{cases} \to 0 \end{cases}$$

Quindi per dimostrare che l'integrare è nullo dobbiamo trovare una maggiorante integrabile. Potrei maggiorare con una constante

$$\frac{n^2 e^{-n/t}}{t^2 \sqrt{1 + t^3}} \leq \frac{C}{t^2 \sqrt{1 + t^3}}$$

che tuttavia non è integrabile quando t è piccolo. Consideriamo allora il termine

$$\frac{n^2}{t^2} e^{-n/t} = y^2 e^{-y}$$

con $y = n/t$. Di tale funziona, controlliamo se è veramente limitata superiormente, ha un massimo

$$2ye^{-y} - y^2 e^{-y} = ye^{-y}(2 - y)$$

Quindi è sempre limitata da $4e^{-2}$

$$\left(\frac{n^2}{t^2}e^{-n/t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\le\frac{4e^{-2}}{\sqrt{1+t^3}}$$

che è integrabile sia in zero che in infinito.

Lo spazio di probabilità è una misura $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mathbb{P})$ dove $\mathcal{B}$ è la misura generata dagli aperti (di Borel), quindi $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}$ in quanto gli aperti sono nelle σ-algebra di Lebesgue. Si può mostrare che la misura di Lebesgue è strettamente contenuta in $\mathcal{M}$ ma è più complicato. La misura ha la proprietà che $\mathbb{P}(\mathbb{R})=1$. Se prendiamo $x\in\mathbb{R}$, $\delta_x(\mathbb{R})=1$ (misura di Dirac).

Costruiamo una funzione $F\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ tale che

$$F_{\mathbb{P}}(x)=\mathbb{P}((-\infty,x])$$

Se prendiamo $\mathbb{P}=\delta_x$, allora F_{δ_a} vale 1 per $x\ge 1$, altrimenti 0.

Prendiamo ora $\mathbb{P}=\mu(A\cap[0,1])$ che viene chiamata la misura di Lebesgue concentrata in 1. Scriviamo

$$F_{\mathbb{P}}(x)=\mu((-\infty,x]\cap[0,1])$$

fino a zero, la funzione è nulla in quanto l'intersezione è vuota. La funzione è 1 per $x\ge 1$ e una retta in $[0,1]$. Tale funzioni ha delle proprietà molto importanti:

1. $x<y\implies F(x)\le F(y)$
2. $$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\qquad\lim_{x\to\infty}F(x)=1$$
   Per dimostrare che il limite tende ad 1 prendiamo una successione $x_n\to\infty$ e consideriamo gli intervalli $I_n=(-\infty,x_n]$. Abbiamo che $I_n\subseteq I_{n+1}$ e
   $$\bigcup I_n=\mathbb{R}$$
   quindi la probabilità (misura) dell'unione è data dal limite
   $$\mathbb{P}\left(\bigcup I_n\right)=\lim_n\mathbb{P}(I_n)=\mathbb{P}(\mathbb{R})=\lim_n F(x_n)=1$$
3. *continua da destra*
   $$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$$

Una funzione $F\colon\mathbb{R}\to[0,]$ che soddisfa $(1),(2),(3)$ è detta una funzione di distribuzione (anche funzione di ripartizione della probabilità $\mathbb{P}$). Sia dunque F una tale funzione. Allora esiste una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathbb{R}$ tale che $F=F_{\mathbb{P}}$, cioè partendo da $\mathbb{P}$ posso ritrovare la stessa F. Quindi, avere una probabiltà o una funzione di distribuzione è la stessa cosa. Per costruire tale probabilità prendiamo intervalli $I=(a,b]$ e diciamo che la lunghezza di tale intervallo relativa alla funzione la calcolo così:

$$l_F(I)=F(b)-F(a)$$

e poi costruiamo

$$\mu_F^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}l_F(I_n),E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}$$

Un sottoinsieme $E\subseteq\mathbb{R}$ è F-misurabile se

$$\forall A\subseteq\mathbb{R},\mu_F^*(A)=\mu_F^*(A\cap E)+\mu_F^*(A\cap E^c)$$

esattamente come prima. Se E è F-misurabile allora definiamo

$$\mu_F(E)=\mu_F^*(E)$$

che in realtà è una probabilità, la cui funzione di distribuzione è quella da cui siamo partiti.

4 Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

Consideriamo ora un insieme della forma (che chiamiamo per semplicità rettangolo)

$$J = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definiamo l'area come

$$\text{area}_n(J) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Consideriamo quindi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e definiamo la misura n-dimensionale

$$\mu_n^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{area}_n(J_h), E \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} J_h \right\}$$

Analogamente abbiamo le:

1. Proprietà di μ_n^*
2. Definizione di insieme misurabile
3. Gli insiemi misurabili sono una σ-algebra.
4. Tale σ-algebra contiene gli aperti.
5. Se $E \in \mathcal{M}_n$, allora definiamo
$$\mu_n(E) = \mu_n^*(E)$$
   che è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

è la stessa cosa ma siamo partiti dall'area piuttosto che dalla lunghezza. Quindi, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ è l'oggetto con cui abbiamo a che fare, e abbiamo quindi la teoria dell'integrazione.

Una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, cioè una funzione integrabile in $\mathbb{R}^n$.

Per calcolare un integrale n-dimensionale, vogliamo ricondurci al caso unidimensionale. Abbiamo allora il

Teorema Teorema di Fubini

Sia $f\colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ misurabile e integrabile.

1. $f_x(y)\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ è integrabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^k$.
2. $$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_x(y)\, d\mu_{n-k}(y)$$
   è definita quasi ovunque, è integrabile in $\mathbb{R}^k$.
3. $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k} G(x)\, d\mu_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x,y)\, d\mu_{n-k}(y) \right) d\mu_k(x)\end{aligned}$$

bisogna tuttavia capire quando la funzione è integrabile.

Teorema Teorema di Tonelli

Sia $f\colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to [0, +\infty)$ misurabile. Allora

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_x(y)\, d\mu_{n-k}(y)$$

(che potrebbe assumere valore infinito) è misurabile in $\mathbb{R}^k$ e

$$\int_{\mathbb{R}^k} G(x)\mu_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_n$$

È importante notare che la funzione debba essere positiva. Esempio con i quadratini ± 1, gli integrali unidimensionali fanno zero ma l'integrale bidimensionale non è integrabile. Se prendiamo il valore assoluto, gli integrali unidimensionali fanno 2, e l'integrale doppio diverge a $+\infty$, che è corretto nel caso di $|f|$.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\ln(e^{xt}+1)}{tx(t^2+e^{1/x})}\, dt$$

Per trattare il caso continuo basta considerare qualsiasi successione $x_n \to +\infty$ e calcolare

$$\lim_n \int_1^\infty \frac{\ln(e^{x_n t}+1)}{tx_n(t^2+e^{1/x_n})} \chi_{[1,x_n]}\, dt$$

Calcoliamo il limite quando t è fissato

$$f_n(t) \to \frac{1}{t^2+1}$$

in quanto $t > 0$. Quindi, l'integrale è pari a

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

Osserviamo che $\ln(e^{xt}+1) \le \ln(e^{xt}+e^{xt}) = xt + \ln(2)$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(e^{xt}+1)}{xt(t^2+e^{1/x})} &\le \frac{xt+\ln 2}{xt(1+t^2)} = \frac{1+\frac{\ln 2}{xt}}{1+t^2} \\ &\le \frac{2}{1+t^2}\end{aligned}$$

che è integrabile

Esercizio

Dopo aver mostrato che esiste $C > 0$ tale che

$$\frac{n^3 x}{(1+nx)^n} \le \frac{C}{\sqrt{x}}$$

per $x \in (0,1)$, calcolare

$$\lim_n \int_0^1 \frac{n^3 x}{(1+nx)^n}\,dx$$

La maggiorazione è integrabile in un intorno di zero e quindi l'integrale è uguale a

$$\int_0^1 \left(\lim_n \frac{n^3 x}{(1+nx)^n}\right)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

Per dimostrare la maggioranza vogliamo

$$\frac{n^3 x\sqrt{x}}{(1+nx)^n} \le C$$

quindi verifichiamo che abbia un massimo studiando quindi la funzione

$$g_n(x) = \frac{x\sqrt{x}}{(1+nx)^n}$$

Abbiamo che $g_n(0) = 0$ e $g_n(1) = \frac{1}{(1+n)^n}$. Calcoliamo la derivata del numeratore per vedere dove si annulla

$$\frac{d}{dx}(g_n'(x)\cdot(1+nx)^n) = \sqrt{x}(1+nx)^{n-1}\left[\frac{3}{2}(1+nx) - n^2 x\right]$$

la derivata di annulla in

$$x = \frac{3}{2n^2-3n} \to 0$$

quindi vi è un massimo e

$$\frac{n^3 x}{(1+nx)^n} \le \frac{n^3\left(\frac{3}{2n^2-3n}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{3}{2n-3}\right)^n} \le \lim \dots$$

il denominatore ammette limite (di forma esponenziale) e pure il numeratore, quindi ammette limite ed è quella la costante.

Esercizio

Si consideri la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha x}{x^4+n^2}$$

1. Determinare per quali α la serie converge in $\mathbb{R}$: Abbiamo che
$$\frac{n^\alpha x}{x^4+n^2} \sim \frac{C}{n^{2-\alpha}}$$
quindi converge per $\alpha < 1$.
2. Determinare per quali α la somma è integrabile in $\mathbb{R}$: Notiamo che le funzioni sono dispari, quindi se prendiamo il modulo otteniamo una funzione pari. Possiamo quindi considerare $x \geq 0$. Per il teorema della convergenza monotona (di funzioni positive) abbiamo
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha x}{x^4+n^2}\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{n^\alpha x}{x^4+n^2}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}}\end{aligned}$$
che converge se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio

Consideriamo
$$\sum \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2}$$
Mostrare che converge uniformrmente in $\mathbb{R}$ (non fatto qui). Mostriamo che $S \in L^1(\mathbb{R})$. Notiamo che il termine è una funzione dispari, quindi anche S, e l'integrabilità è simmetrica. Quindi dobbiamo studiare
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sum \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2}\,dx &= \sum \int_0^\infty \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx^2}\,dx \\ &\leq \frac{1}{n}\int_0^\infty xe^{-nx^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$
siccome la funzione è positiva e le somma parziali sono positive possiamo scambiare integrale e serie. Quindi, la serie converge in quanto è maggiorata una serie convergente.

Esercizio

Studiare
$$\sum \ln\left(1+x^{2n}\right)$$
iniziamo con la convergenza puntuale. Essa converge in $E = (-1, 1)$. Studiamo ora l'integrabilità.

I termini e la somma sono funzioni pari positivi.

$$\int_0^1 \sum \ln\left(1+x^{2n}\right)\, dx = \sum \int_0^1 1 + x^{2n}\, dx$$
$$\leq \int_0^1 x^{2n}\, dx = \frac{1}{2n+1}$$

siccome $\ln(1+t) \leq t$. Ciò non ci porta da nessuna parte, ma possiamo aggiustarsi. Proviamo a maggiorare con la retta che congiunge 0 e $\ln 2$. Inoltre il grafico è concavo, tutte le secanti stanno sotto. $\ln(1+t) \geq ln 2t$ in $(0,1)$.

$$\sum \int_0^1 1 + x^{2n}\, dx \geq \frac{\ln 2}{2n+1}$$

che diverge e quindi la somma non è integrabile.

Esercizio

Sia
$$f(x,y) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$$
e
$$E = \{x^6 + y^4 < 1\}$$

Determinare per quali α vale $f \in L^1(E)$, ovviamente rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale. Possiamo notare che l'insieme è limitata in un cerchio unitario. Se la funzione è limitata e l'insieme, come in questo caso, ha misura finita, allora è integrabile. Dobbiamo controllare se la funzione è integrabile, in tal caso potremmo applicre il Teorema di Fubini. Tuttavia, grazie al teorema di Tonelli, la funzione è positiva e misurabile e quindi l'integrabile è pari alla decomposizione dei due integrali successivi, che hanno valore finito se è integrabile.

$$\begin{aligned}
\int_E f\, d\mu_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} f\chi_E\, d\mu_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\chi_E(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\chi_{E_x}(y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_x} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_{A} \left(\int_{E_x} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x)
\end{aligned}$$

Chiamiamo la x-sezione $E_x = \{y \in \mathbb{R} \,|\, (x,y) \in E\}$. Siccome E_x è spesso vuoto (fuori dall'area), definiamo
$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, E_x \neq \varnothing\}$$

Quindi

$$\int_E \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,d\mu_2 = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt[4]{1-x^6}}^{\sqrt[4]{1-x^6}} \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt[6]{1-y^4}}^{\sqrt[6]{1-y^4}} \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx\right)dy$$

Ma i problemi sono vicino a 1, il resto della funzione è continua e non ci serve per studiare l'integrabilità

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt[6]{1-y^4}} \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx\right)dy = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{[1-x^6]}}{(1-x^6)^\alpha}\,dx$$

In un intorno sinistro di 1 l'integranda è

$$\frac{\sqrt[4]{1-x^6}}{(1-x^6)^\alpha} \sim \frac{C}{(1-x)^\beta}$$

e in questo caso

$$\beta = \alpha - 1/4$$

siccome

$$1-x^6 = (1-x^3)(1+x^3) = (1-x)(1+x+x^2)(1+x^3) \sim 6(1-x)$$

Quindi la funzione è integrabile per $\alpha < 5/4$.

Esercizio

Studiare l'integrabilità al variare di α di

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^\alpha)(1-y^2)}$$

in

$$E = \{(x,y)\,|\,x>0, y<0<1-x^2\}$$

che è l'intersezione del pirmo quadrante con $1-x^2$. La funzione ha dei problemi vicino a $y=1$ e nell'origine. La scomposizione degli integrali deve rappresentare tali problemi, quindi usiamo una y-sezione.

$$\int_E f\,d\mu_2 = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y}} \frac{1}{y^\alpha+x^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\cdot\frac{1}{y^{\alpha/2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-y}}{y^{\alpha/2}}\right)dy$$

In un intorno di zero

$$f \sim \frac{C}{y^{\alpha/2}}$$

quindi deve essere $\alpha < 2$. In un intorno di uno

$$f \sim \frac{\sqrt{1-y}}{(1-y^2)} \sim \frac{C}{y^{1/2}}$$

quindi è integrabile per ogni α.

Esercizio

Studiando per quali $\alpha > 0$

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin x}{y}\right)^2$$

è integrabile in

$$E = \{(x,y) \mid x > 0, y > x^\alpha\}$$

I problemi sono per $y \to 0$ e verso infinito Integriamo la funzione rispetto ad entrambe le variabili.

$$\begin{aligned}\int_E f\, d\mu_2 &= \int_0^\infty \int_{x^\alpha}^\infty \left(\frac{\sin x}{y}\right)^2 dy\, dx \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{\sin^2(x)}{y}\right]_{x^\alpha}^\infty dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\, dx\end{aligned}$$

In un intorno di zero

$$\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

ed è quindi integrabile per $\alpha < 3$. In un intorno di infinito

$$\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha > 1$. Per gli altri casi notiamo

$$\begin{aligned}\int_\pi^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\, dx &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\, dx \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\pi(k+1))^\alpha} \int_0^\pi \sin^2(x)\, dx\end{aligned}$$

che diverge per $\alpha \leq 1$. Alternativamente possiamo partire dall'integrale opposto,

$$\begin{aligned}\int_E f\, d\mu_2 &= \int_0^\infty \int_0^{y^{1/\alpha}} \left(\frac{\sin x}{y}\right)^2 dx\, dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{2}y^{1/\alpha} - \frac{1}{4}\sin\left(2y^{1/\alpha}\right)\right) dy\end{aligned}$$

In un intorno di infinito è integrabile per $2 - 1/\alpha > 1$ quindi $\alpha > 1$. In un intorno di zero, per guardare l'asintotico, dobbiamo prendere due termini dell'espansione del seno per evitare cancellazione diretta. Quindi alla fine è integrabile per $2 - 3/\alpha < 1$ quindi per $\alpha < 3$. In entrambi i casi è integrabile per $\alpha \in (1,3)$.

Esercizio

Studiando per quali α

$$f(x,y) = \frac{y^\alpha}{\sqrt{|1-y| \cdot |x^2-y^2|}}$$

è integrabile in

$$E = \left\{ (x,y) \,|\, x > 0, 0 < y < \min\left(x^3, \frac{1}{x}\right) \right\}$$

I due moduli sono inutili, il secondo perché l'insieme è sempre sotto la bisettrice. Abbiamo problemi in infinito, $y \to 1$ e nell'origine. Per integrare dobbiamo dividere l'insieme in due partizioni disgiunte separate per $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_E f \, d\mu_2 &= \int_0^1 \int_{y^{1/3}}^{\frac{1}{y}} \frac{y^\alpha}{\sqrt{1-y} \cdot (x^2-y^2)} \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 \frac{y^\alpha}{\sqrt{1-y}} \cdot \frac{1}{2y} \left(\ln\left(\frac{\frac{1}{y} - y}{\frac{1}{y} + y} \right) - \ln\left(\frac{y^{1/3}-y}{y^{1/3}+y} \right) \right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2y^{1-\alpha}\sqrt{1-y}} \ln\left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \cdot \frac{y^{1/3}+y}{y^{1/3}-y} \right) dy
\end{aligned}$$

In un intorno destro di zero, l'unico punto critico è la seconda frazione del logaritmo. Avremo un confronto asintotico a

$$\sim \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln\left(\frac{y^{1/3}+y}{y^{1/3}-y} \right) = \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln\left(\frac{1+y^{2/3}}{1-y^{2/3}} \right)$$

Aggiungiamo e togliamo uno al logaritmo nella seguente maniera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln\left(\frac{1-y^{2/3}+2y^{2/3}}{1-y^{2/3}} \right) &= \frac{1}{y^{1-\alpha}} \ln\left(1 + \frac{2y^{2/3}}{1-y^{2/3}} \right) \\
&\sim \frac{C}{y^{1-2/3-\alpha}}
\end{aligned}$$

che è integrabile per $\alpha > -2/3$. In un intorno di 1 abbiamo

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{1-y}} \ln\left(\frac{1-y^2}{y^{1/3}-y} \right)$$

Calcoliamo il limite con l'Hôpital

$$\lim_{y \to 1} \frac{1-y^2}{y^{1/3}-y} \overset{H}{=} \lim_{y \to 1} -\frac{2y}{\frac{1}{3}y^{-2/3}-1} = 3$$

Quindi

$$f \sim \frac{C}{(1-y)^{1/2}}$$

che è integrabile per ogni α.

Esercizio

Studia per quali valori di α

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha}\, dt$$

è integrabile in $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(x)\, dx &= \int_0^\infty \left(\int_x^{2x} \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha}\, dt \right) dx \\ &= \int_E \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha}\, d\mu_2(x,t)\end{aligned}$$

Siccome la funzione è una successione positiva, per il teorema di Tonelli possiamo scambiare l'ordine di integrazione. Studiamo allora l'insieme E per invertire gli integrali. L'insieme è un cono (fra x e $2x$)

$$\begin{aligned}\int_E \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha}\, d\mu_2(x,t) &= \int_0^\infty \int_{y/2}^{y} \frac{e^{-xt^2}}{t^\alpha}\, dx\, dt \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-xt^2}}{t^{\alpha+2}} \right]_{t/2}^{t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+2}} \left(e^{-t^3/2} - e^{-t^3} \right) dt\end{aligned}$$

In un intorno di infinito, gli esponenziali si avvicinano a zero più velocemente di ogni potenza, quindi è integrabile per ogni α. In un intorno di zero abbiamo

$$f \sim \frac{1}{t^{\alpha+2}} e^{-t^3/2} \left(1 - e^{-t^3/2} \right) \sim \frac{C}{t^{\alpha-1}}$$

quindi è integrabile per $\alpha < 2$.

5 1 aprile

Definizione di spazio metrico, bolle, insiemi aperti, convergenza, successione di Cauchy, spazi metrici completi (per esempio i razionali e $(0,1)$ sono non completi), insieme limitato.

Spazio vettoriale normato $(V, ||\cdot||)$. Ogni spazio vettoriale normato è uno spazio metrico dato $d(x,y) = ||x - y||$.

Definizione di punto interno, di accumulazione, di frontiera, aperti, chiusi, chiusura di un insieme, punto isolato.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Sono equivalenti:

1. Da ogni successione in K esistono una sottosuccessione convergente ad un punto di K. Quindi data $\{A_i\}_{i \in I}$ qualsiasi, anche innumerabile, dove A_i sono aperti e

$$\bigcup A_i \supseteq K$$

Allora esistono $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \supseteq K$$

2. Da ogni ricoprimento di K mediante aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito.
3. K è compatto.

Proposition

Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Se K è compatto, allora K è chiuso e limitato. Se $\{K_n\}$ è una successione non vuota di compatti tale che

$$K_n \supseteq K_{n+1}$$

Allora

$$\bigcap K_n \neq \varnothing$$

Se $X = \mathbb{R}^n$ con la norma euclidea, allora K chiuso e limitato implica K compatto. In generale non vale. Per la seconda per esempio di insiemi non vuoti non compatti la cui intersezione è vuota abbiamo $[n, \infty)$.

Proof Dimostrazione della seconda

Abbiamo che $x_n \in K_N$ per ogni $n \geq N$. Allora il limite di tale sottosuccessione sta in K_N, in quanto K_N è compatto, e quindi $x \in K_N$ che è vero $\forall N$. Ma questa è la definizione di intersezione, quindi sta nell'intersezione, e quindi non è vuoto.

Definizione Totalmente limitato

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che A è *totalmente limitato* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

in X tale che

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$$

Osserviamo che

1. per ogni $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ della definizione possono essere presi in A. Supponiamo infatti di avere

   $$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/2}(x_i)$$

   possiamo supporre che

   $$A \cap B_{\varepsilon/2}(x_i) \neq \varnothing$$

   in quanto le bolle ricoprono A. Quindi, esiste un punto $a_i \in A$ tale che

   $$a_i \in B_{\varepsilon/2}(x_i)$$

   cioè la distanza $d(a_i, x_i) < \varepsilon/2$. Abbiamo quindi

   $$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(a_i)$$

   in quanto queste bolle sono il doppio più grandi e contengono per forza quelle di prima, quindi i punti possono essere scelti in A.

2. Se A è totalmente limitato, allora A è limitato. Infatti possono prendere una bolla centrata su qualsiasi x_i che ha come raggio la somma di tutti i raggi.
3. Se $A \subseteq B$ e B è totalmente limitato, allora A è totalmente limitato.
4. prendiamo $\{x_i\}$ in X che sia di Cauchy. Allora $S = \{x_n\}$ formato dalle immagini di tale successione è totalmente limitato. Se S è finito ciò è banale, prendo una bolla di qualsiasi raggio per ogni punto. Se S è infinito, da un certo punto in poi tutti i punti sono arbitrariamente vicini, quindi in uno di quei punti facciamo una bolla di ε e in quelli prima faccio un numero finito di bolle per ricoprirlo.

Teorema

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. A è totalmente limitato se e solo se da ogni successione in A si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy.

Proof Dimostrazione di un verso

Sia A non totalmente limitato. Mostriamo che posso costruire una sottosuccessione che non è di Cauchy. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\forall\{x_1, \cdots, x_n\} \in A$, esiste un elemento di $a \in A$ tale che non è contenuto nella bolle

$$d(a, x_j) \geq \varepsilon, \quad \forall j = 1, \cdots, n$$

Scegliamo quindi $\{x_1\}$ ed esiste allora $x_2 \in A$ tale che $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Prendiamo come insieme $\{x_1, x_2\}$. Esiste $x_3 \in A$ tale che $d(x_1, x_3), d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Continuamo tale processo e otteniamo la successione $\{x_n\}$ dove

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

Chiaramente, tale successione non ha sottosuccessione di Cauchy.

Proposition

Se K è compatto è totalmente limitato.

Possiamo sempre estratto una sottosuccessione che converge ad un punto di K che è sicuramente di Cauchy.

Sia (X, d) uno spazio metrico con X compatto. Sia

$$\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

dove f sono continue, che è quindi uno spazio vettoriale. Le funzioni continue quando X è compatto hanno delle prorpietà importanti:

1. f è limitata
2. f ha massimo e minimo assoluto. Esiste quindi m tale che $f(m) \geq f(x)$ per $x \in X$. Abbiamo due casi
$$\sup_{x \in X} f(x) = \begin{cases} \infty \\ M \end{cases}$$
Nel secondo caso abbimo quindi $M \geq f(x)$ e $M - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon)$. Siccome X è compatto abbiamo sottosuccessioni convergenti, costruiamo quindi una sottosuccessione che converge al punto di massimo, quindi tale che
$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n)$$
Estraiamo una sottosuccessione $\{x_{n_i}\} \to m \in X$. Allora, $f(x_{n_i}) \to f(m) \leq M$ e $M - \frac{1}{n} \to M$.
3. f è uniformemente continua.

Lo spazio dato è uno spazio vettoriale normale rispetto alla norma infinita, dove il sup è un massimo in quando f è continua. Quindi, data $\{f_n\}$

$$f_n \xrightarrow{||\cdot||_\infty} f$$

significa che

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon$$

che è equivalente a scrivere

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

per tutte le $x \in X$. In questo spazio la convergenza in norma è quindi pari alla convergenza uniforme.

Inoltre, se $\{f_n\}$ è uniformemente di Cauchy, allora è uniformemente convergente. Quindi $\mathcal{C}$ è uno spazio vettoriale normato completo, anche detto di Banach.

Definizione Spazio di Banach

Uno *spazio di Banach* è uno spazio vettoriale normato completo.

In tale spazio la bolla

$$B = \{f \in \mathcal{C}(X) \,|\, ||f||_\infty \leq 1\}$$

è chiusa, limitata ma non compatta.

Nel caso $\mathcal{C}([0,1])$ consideriamo la successioni di funzioni (a triangolo con tutto il resto nullo) dove il triangolo si sposta verso 1 e sono disgiunti, e la base sempre più piccola. Questa è una successione nella bolla in quanto il fatto che la norma infinita sia 1 implica che le funzioni stiano fra -1 e 1. Se prendiamo la differenza di due f_n e f_m abbiamo un triangolo sopra e uno sotto. La norma di tale differenza è sempre 1

$$||f_n - f_m||_\infty = 1$$

quindi tale successione non è di Cauchy. Quindi non è nemmeno totalmente limitato.

Esercizio

Per quali α

$$F(x) = \int_{x+1}^{e^x} \frac{y \log y}{(y^2-1)^\alpha}\, dy \in L^1((0,+\infty))$$

Siccome $x > 1$ e pure e^x il logaritmo è positivo. Pure il denominatore è positivo e quindi l'integrabile è positivo. Controlliamo quindi l'integrabilità

$$\int_0^\infty F(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{x+1}^{e^x} \frac{y \log y}{(y^2-1)^\alpha}\, dy \right) dx$$
$$= \int_A \frac{y \log y}{(y^2-1)^\alpha}\, \mu_2$$

L'insieme A ha la forma dell'area fra le due curve $x+1$ e e^x. Invertendo l'integrale otteniamo

$$\int_1^\infty \int_{\log y}^{y-1} \frac{y \log y}{(y^2-1)^\alpha}\, dx\, dy = \int_1^\infty \frac{y \log y}{(y^2-1)^\alpha} (y - 1 - \log y)\, dy$$

In un intorno di infinito abbiamo

$$g \sim \frac{1}{y^{2\alpha-2}}$$

quindi è integrabile per $\alpha > 3/2$. In un intorno di 1 abbiamo il termine $y^2 - 1$ che tende a zero come $y - 1$ in quanto $y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1)$. Il termine della parentesi tende a zero come $(y - 1) - (y - 1)$ e quindi come $(y^2 + 1)/2$ per evitare cancellazione diretta.

$$g \sim \frac{C}{(y-1)^{\alpha-3}}$$

che converge per $\alpha < 4$.

Esercizio

Determinare l'integrabilità di

$$f = \frac{z}{\sqrt{x}(1-2y)}$$

è integrabile in

$$E = \{(x, y) \,|\, x > 0, y > 0, x + 2y + z^2 < 1\}$$

Abbiamo una prima idea di scomposizione

$$\int_E f \, d\mu_3 = \int_A \left(\int_{E_2} f \, dx \, dy \right) dz$$

Siccome l'insieme E è simmetrico rispetto a z allora l'integrale è zero, dobbiamo tuttavia guardare se è integrabile. In ogni caso basta integrarlo con z fra 0 e 1. Sia A l'insieme dove l'integrale non è vuoto. Integriamo allora solo dove la sezione non è nulla, cioè per $0 < z < 1$. Chiamiamo E^+ tale insieme

$$\begin{aligned}\int_{E^+} f \, d\mu_3 &= \int_0^1 \left(\int_{E_2} \frac{z \, dx \, dy}{\sqrt{x}(1-2x)} \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z^2} \int_0^{\frac{1-x-z^2}{2}} f \, dy \, dx \right) dz\end{aligned}$$

Dobbiamo ora scegliere un ordine di integrazione facile

$$\int_{E^+} f \, d\mu_3 = \int_A \int_{E_x} f \, dy \, dz \, dx$$
$$\int_{E^+} f \, d\mu_3 = \int_A \int_{E_{(x,y)}} f \, dz \, dx \, dy$$

Scegliamo quest'ultimo. Abbiamo la $x - y$-sezione che sono

$$\begin{aligned}E_{(x,y)} &= \{z \in \mathbb{R} \,|\, (x, y, z) \in E^+\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \,|\, 0 < z < \sqrt{1 - x - 2y}\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}A = &\{(x, y) \,|\, E_{(x,y)} \neq \varnothing\} \\ &= \{(x, y) \,|\, x > 0 \wedge y > 0 \wedge x + 2y < 1\}\end{aligned}$$

Avremo quindi

$$\int_A \frac{1 - x - 2y}{\sqrt{x}(1-2x)} \, dx \, dy$$

Definizione Sottoinsieme equicontinuo

Un sottoinsieme $\mathcal{F}(K) = \{f : K \to \mathbb{R}\} \subseteq C(K)$ del sottospazio normato delle funzioni continue su spazio metrico K è detto *equicontinuo* se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in K, d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$$

Analogamente,

Definizione Sottoinsieme equilipschitziano

Un sottoinsieme $\mathcal{F}(K) = \{f : K \to \mathbb{R}\} \subseteq C(K)$ del sottospazio normato delle funzioni continue su spazio metrico K è detto *equilipschitziano* se $\exists M > 0$ tale che

$$\forall x, y \in K, |f(x) - f(y)| \leq Md(x, y), \forall f \in \mathcal{F}$$

Proposition

Se $\mathcal{F}$ è equilipschitziano, allora è equicontinuo.

Esempio

Fra due spazi di Banach X, Y, $T : X \to Y$ è equilipschitziano se esiste M tale che

$$||T_x - T_y||_y \leq M||x - y||_x$$

Esempio

Le funzioni $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

è un insieme equilipschitziano. Infatti $f_n' = \cos(nx)$ e quindi $|f_n'| \leq 1$,e quindi

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n} - \frac{\sin(ny)}{n}\right| \leq |x - y|$$

Teorema Teorema di Ascoli - Arzelà

Sia $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ chiuso e limitato su un compatto metrico, non vuoto. Allora $\mathcal{F}$ è compatto se e solo se è equicontinuo.

Proof Teorema di Ascoli - Arzelà

($\Longrightarrow$) $\mathcal{F}$ è compatto, quindi è totalmente limitato. Quindi, $\forall \varepsilon > 0, \exists \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ dove $f_i \in \mathcal{F}$ tale che

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(f_i)$$

Le funzioni f_i sono tutte uniformemente continue, quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0$ tale che per $d(x, y) < \delta_i$ allora

$$|f_i(x) - f_j(y)| < \varepsilon$$

per $x, y \in K$. Se prendiamo il più piccolo dei delta

$$\delta = \min_{i=1,2,\cdots,n} \{\delta_i\}$$

allora vale per tuti, quindi $\forall \varepsilon > 0$ se $d(x, y) < \delta$ vale

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

$f \in \mathcal{F}$ e quindi appartiene almeno ad una bolla, quindi $\exists f_j$ tale che

$$||f - f_j||_\infty < \varepsilon$$

Quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

($\Longleftarrow$) $\mathcal{F}$ è equicontinuo. Vogliamo mostrare che data $\{f_n\}$ in $\mathcal{F}$ allora esiste una sottosuccessione convergente (in maniera uniforme) ad un elemento di $\mathcal{F}$. Basta mostrare che $\{f_n\}$ abbia una sottosuccessione di Cauchy in quanto:

1. implica che la sottosuccessione converge;
2. il limite è in $\mathcal{F}$ perché è chiuso.

Sia quindi una successione $\{f_n\}$ in $\mathcal{F}$. Siccome K è compatto, è totalmente limitato, quindi $\forall \varepsilon > 0$ esistono $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(k_j)$$

Mostriamo ora che $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione puntualmente convergente in $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$. Vediamo che siccome $\mathcal{F}$ è limitata per una qualche M

$$|f_n(k_1)| \le ||f_n||_\infty \le M$$

Come tutte le successioni limitate, contiene una sottosuccessione convergente f_n^1 su k_1. Adesso guardiamo

$$|f_n^1(k_2)| \le M$$

che quindi contiene una sottosuccessione convergente f_n^2 su k_2, ma converge anche in k_1. L'ultimo passaggio è la sottosuccessione $f_n^m = g_n$ converge per tutti i k_i, in quanto sottosuccessione di tutti i precedenti. Dalle ipotesi $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $d(x, y) < \delta$ allora

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

per tutte le $f \in \mathcal{F}$. Allora $\exists \{k_1, \cdots, k_m\}$ tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_\delta(k_j)$$

dove abbiamo scelto δ come ε. Il fatto che g_n converga su $k_1, k_2, \cdots, k_m$ significa che $\forall \varepsilon > 0$ esiste N_j tale che

$$\forall n, m \ge N_j, |g_n(k_j) - g_m(k_j)| < \varepsilon$$

Prendiamo allora il più grande di tutti

$$N = \max_{i=1,2,\cdots,N} \{N_j\}$$

che vale per tutti quindi

$$\forall n, m \ge N, |g_n(k_j) - g_m(k_j)| < \varepsilon$$

Esiste un certo k_j tale che $d(x, k_j) < \delta$ per la bolla. Adesso scriviamo

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\le |g_n(x) - g_n(k_j)| + |g_n(k_j) - g_m(k_j)| + |g_m(k_j) - g_m(x)| \\ &= 3\varepsilon \end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo sono piccoli per definizione di equicontinuità, mentre quello in mezzo perché g_n converge per tutti i k_i. Siccome questo vale (per N sufficiente grande) per ogni $x \in K$, e quindi

$$||g_n - g_m||_\infty < 3\varepsilon$$

che è la successione uniformemente di Cauchy.

Esempio

Consideriamo $C([0,1)]$ e $f_n(x) = x^n$, converge puntualmente a

$$\begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ma per converge uniformemente il limite dovrebbe essere continuo, e quindi non converge uniformemente in quanto tutte le sottosuccessioni convergono alla stessa funzione.

6 Equazioni differenziali

Definizione Equazione differenziale di primo ordine in forma normale

Una equazione differenziale del primo ordine in forma normale è

$$y' = f(x, y)$$

con $f \colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove A è aperto, f continua.

Una soluzione di tale equazione è una coppia (φ, I) dove I è un intervallo e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tale che

1. $(t, \varphi(t)) \in A$ per $t \in I$;
2. $\varphi \in C^1(I)$;
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ per $t \in I$.

Un problema di Cauchy ha forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con una condizione iniziale $(x_0, y_0) \in A$ tale che velgano le 3 precedenti condizioni e, ulteriormente, $\varphi(x_0) = y_0$.

Definizione

Diciamo che f definita come sopra è *lipschitziana in y uniformemente rispetto ad x nel punto* (x_0, y_0) se $\exists L > 0$ ed esiste un intorno $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ e un intorno $J_\beta = [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

per ogni $y_1, y_2 \in J_\beta$ e per ogni $x_1, x_2 \in I_\alpha$.

Teorema Teorema fondamentale

Se f è lipschitziana in (x_0, y_0) allora esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy.

Con unicità si intende che date due soluzioni, per esempio $(e^x, [-1, -1])$ e $(e^x, [-2, -2])$, dove sono definite entrambe (cioè l'intersezione) in tali punti devono coincidere.

Per dimostrarlo usiamo l'operatore

$$T_\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

Basta derivare questa espressione per mostrare l'equivalenza con il problema di Cauchy al punto fisso. La parte di destra è derivabile in quanto la è una funzione integrale di una funzione continua f.

Teorema Teorema di Peano

Ogni problema di Cauchy ha almeno una soluzione.

Notiamo che avere più soluzioni significa che siano diverse dove sono entrambe definite.

Definizione Compattezza relativa

Uno spazio $D \subseteq$ metrico è relativamente compatto se la sua chiusura è compatta.

Teorema Teorema di Schauder

Sia X uno spazio di Banach e prendiamo $C \subseteq X$ chiuso, limitato, non vuoto, convesso. Diciamo che un operatore $T\colon C \to C$ è compatto se l'immagine $T(C)$ è relativamente compatta. Se T è continua e compatta allora T ha almeno un punto fisso.

Applichiamo questo teorema all'operatore integrale per mostrare l'esistenza di un punto fisso.

Proof Teorema di Peano

Notiamo che $I\alpha \times J_\beta \subseteq A$ è un rettangolo compatto. Siccome la funzione è continua in A sul rettangolo è anche uniformemente continua. Il massimo è

$$M = \sup_{(x,y)\in I_\alpha \times J_\beta} |f(x,y)|$$

quindi è limitata. Inoltre è uniformemente continua, quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I_\alpha \times J_\beta$

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

oppure qualsiasi norma e quindi sono equivalenti. Scegliamo ora

$$0 \le \delta \le \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$$

e consideriamo $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e

$$\begin{aligned} C &= \{\varphi \in \mathcal{C}(I_\delta) \mid ||\varphi - y_0||_\infty \le \beta\} \\ &= B_\beta(y_0) \end{aligned}$$

y_0 diventa la funzione costante. Quindi tutte le funzioni la cui distanza da y_0 è minore di β. Tale insieme è chiuso, limitato, convesso, e non vuoto. La concessità è data dal fatto che stiamo trattando una bolla in uno spazio normato, quindi (con bolle centrate in zero)

$$||\lambda x + (1-\lambda)y|| \le \lambda ||x|| + (1-\lambda)||y|| \le r$$

Abbiamo ora la mappa $T\colon C \to \mathcal{C}(I_\delta)$ tale che dato $\varphi \in C$ vale

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

1. $T\colon C \to C$. Infatti
$$|T\varphi(x) - y_0| \le \cdots \le \beta$$
2. T è uniformemente continua, quindi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C$
$$||\varphi_1 - \varphi_2||_\infty < \delta \implies ||T\varphi_1 - T\varphi_2||_\infty < \delta$$
Abbiamo
$$||T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)|| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\, dt \right|$$
Il modulo dentro l'integrale è perché non sappiamo se x è prima o dopo x_0. Prendendo $||\varphi_1 - \varphi_2|| < \overline{\delta}$ dove tale delta è quello dell'inizio allora vale $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ per tutte le $x \in I_\delta$ che implica
$$|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dt \right| = \varepsilon |x - x_0| < \varepsilon\delta$$
quindi è uniformemente continua.

3. $T(C)$ è relativamente compatto. Notiamo che tale immagine è sicuramente limitata, ma è anche equicontinuo. Possiamo trovare una sottosuccessione di Cauchy convergente a una funzione in $\overline{T(C)}$, che è quindi compatto. Mostriamo quindi che è equicontinuo. Quindi, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in I_\delta$ per $|x_1 - x_2| < \eta$

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall g \in T(C)$$

$$|T\varphi(x_1) - T\varphi(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall \varphi \in T(C)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, \varphi(t))\, dt - \int_{x_0}^{x_2} f(t, \varphi(t))\, dt \right| &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t, \varphi(t))|\, dt \\ &\leq M|x_2 - x_1| = M\eta = \varepsilon \end{aligned}$$

prendendo $\eta = \varepsilon / M$

Possiamo quindi applicare il teorema di Schauder, quindi T ha almeno un punto fisso $\overline{\varphi} \in \mathcal{C}(I_\delta)$ tale che $T\overline{\varphi} = \overline{\varphi}$ e quindi esiste una soluzione di Cauchy.

Dobbiamo ora verificare l'unicità.

Consideriamo per esempio

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $\varphi(x) = e^x$. Prendendo $\varphi_1 \equiv 1$ possiamo iterare l'operatore

$$\varphi_2 = T\varphi_1 = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$\varphi_3 = T\varphi_2 = 1 + \int_0^x 1 + t\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

E in generale questa successione tende allo sviluppo di e^x.

7 Esercizi

Esercizio Successioni 1

Per $x > -1$ studia la successione

$$f_n(x) = \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}}$$

- **convergenza puntuale:** controlliamo la convergenza puntuale in $E = (0, +\infty)$. Fissato $x > 0$ studiamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}} = 0 = f(x)$$

- **convergenza uniforme:** controlliamo la convergenza uniforme in E. Abbiamo

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|\frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}}\right|$$

sostituendo $t = n/x$ otteniamo una funzione simile all'integranda della funzione gamma, che ha un massimo M

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,+\infty)} \left|\frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}}\right| &\leq M \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{1}{n\sqrt{1+x}}\\ &= \frac{M}{n\varepsilon} \to 0\end{aligned}$$

Chiaramente il sup si ottiene con il denominatore più piccolo, quindi un ε molto vicino a 0.

- **integrabilità:** mostriamo che $f_n \in L^1$.

$$\int_0^\infty |f_n(x)|\, dx = \int_0^\infty \left|\frac{ne^{-n/x}}{x^2\sqrt{1+x}}\right| dx$$

In un intorno di $+\infty$ abbiamo

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^{5/2}}$$

siccome $\frac{5}{2} > 1$ la funzione è integrabile a infinito. In un intorno di 0^+ maggioriamo

$$f_n(x) \leq \frac{M}{n\sqrt{1+x}} \sim \frac{M}{n}$$

quindi è integrabile per confronto e confronto asintotico.

Esercizio Successioni 1

Data la successione

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x}$$

studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

1. **convergenza puntuale:** studiamo la convergenza puntuale in $(0, +\infty)$. Fissato $x > 0$ abbiamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **convergenza uniforme:** studiamo la convergenza uniforme in $(0, +\infty)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_{\infty, E} &= \sup_{x \in (0,+\infty)} \left| n^\alpha \arctan(x) e^{n^2 x} \right| \\ &\leq \sup_{x \in (0,+\infty)} \left| n^\alpha x e^{n^2 x} \right| \end{aligned}$$

siccome $\arctan(x) \leq x$. Studiamo la derivata della funzione maggiorante $g_n(x)$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= n^\alpha e^{-n^2 x} - n^\alpha x e^{-n^2 x} n^2 \\ &= n^\alpha e^{-n^2 x}(1 - xn^2) \end{aligned}$$

Per studiare il segno abbiamo

$$1 - n^2 x \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{n^2}$$

che è un punto di massimo. Chiaramente $g_n(0) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} g_n(x)$, e siccome è sempre positiva, siamo sicuri che tale valore è un punto di massimo. Il massimo vale

$$g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$

Quindi, la norma infinito è sempre minore di

$$||f_n - f||_{\infty, E} \leq \frac{n^{\alpha-2}}{e}$$

che tende a zero solo quando $\alpha < 2$ (condizione sufficiente ma non necessaria). Cerchiamo ora un limite dal basso

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_{\infty, E} \geq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) &= n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) e^{-1} \\ &\sim n^{\alpha-2} e^{-1} \end{aligned}$$

che non tende a zero. Quindi la convergenza è uniforme per $\alpha < 2$.

Esercizio Successioni 3

Data la successione

$$f_n(x) = n\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)$$

1. **stabilire in che insieme vi è convergenza puntuale:** fissato x calcoliamo

$$\lim_n f_n = \lim_n n\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) = x^2$$

in quanto la parentesi è asintotica all'esponente. Allora l'insieme di convergenza puntuale è $E = \mathbb{R}$.

2. **stabilire se la convergenza è uniforme in tale insieme:** fissato x abbiamo

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|n\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) - x^2\right| = \sup_{x\in(0,+\infty)} |g_n(x)|$$

Studiamo la derivata di $g_n(x)$

$$g_n'(x) = ne^{\frac{x^2}{n}}\frac{2x}{n} - 2x = 2x\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)$$

Il segno della derivata è lo stesso di x, e $x = 0$ è un punto di minimo.

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = \pm\infty$$

quindi non è limitata e la convergenza non è assoluta.

3. **stabilire se la convergenza è uniforme in un intervallo limitato:** sia $[a, b]$ tale intervallo. Dalla forma della funzione, il sup è o in $x = a$ o in $x = b$, quindi

$$||f_n - f||_{\infty,E} \leq \max\{|f(a) - f(b)|, |f(b) - f(a)|\}$$

supponiamo che sia in a

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \left|n\left(e^{\frac{a^2}{n}} - 1\right) - a^2\right|$$

per risolvere il limite facciamo un espansione di MacLaurin fino al secondo ordine

$$||f_n - f||_{\infty,E} = \left|\frac{a^4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right| \to 0$$

Quindi, la convergenza è uniforme in un intervallo limitato.

Esercizio Serie 1

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2+x^2}$$

verifica la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$. Cominciamo studiando la convergenza totale che è più forte, quindi la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{xe^{-\frac{x^2}{n}}}{n^2+x^2} \right|$$

con $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ otteniamo la forma $f(t) = te^{-t^2}$ che ha grafico noto, e un massimo M e minimo

$$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leq M \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\sqrt{n}}{n^2+x^2} = \frac{M}{n^{3/2}}$$

in quanto il supremum è per $x = 0$. Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge. Quindi la serie converge totalmente e quindi converge anche in maniera uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio Serie 2

Conderiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right)$$

1. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo convergenza puntuale: Fissato x, notiamo che per convergere il termine n-esimo deve tendere a zero. Quindi,

   $$\lim_n \arctan\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right) \to 0$$

   se e solo se $\alpha < 2$ (condizione necessaria). Usiamo il criterio del confronto asintotico: l'argomento dell'arcotangente tende a zero e quindi è asintotica al suo argomento. La serie

   $$\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

   converge se e solo se $\alpha < 1$. Quindi, la serie converge puntualmente per $\alpha < 1$.
2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo convergenza uniforme: è necessario $\alpha - 1$. Cominciamo studiando la convergenza totale, che è più forte. Abbiamo

   $$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \arctan\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right) \right|$$

   Studiamo la derivata del termine

   $$f_n'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{n^\alpha}{x^2+n^2}\right)^2} = -\frac{2xn^\alpha}{n^{2\alpha}+n^2+x^{2^2}} \geq 0 \iff x \leq 0$$

   quindi $x = 0$ è un punto di massimo. Infatti, gli estremi sono

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) \to 0$$

Quindi la forma è data da

$$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = f_n(0) = \arctan(n^{\alpha-2})$$

La serie è quindi a termini positivi e usiamo il confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n^{\alpha-2})$$

che converge se e solo se $\alpha < 1$. Quindi abbiamo convergenza uniforme per $\alpha < 1$. Siccome la convergenza puntuale è per $\alpha < 1$, non vi sono altri α per cui vi è convergenza assoluta.

Esercizio Serie 3

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^\alpha+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

1. Valutare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ vi è convergenza puntuale in $\mathbb{R}$. Studiamo la condizione necessaria di convergenza. Il numeratore tende a zero se e solo se $\alpha > 0$. In tal caso la funzione è assolutamente asintotica a

$$|f_n(x)| \sim \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$

E la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|x|}{n^{\alpha-1/2}}$$

converge se e solo se $\alpha > 3/2$ per confronto asintotico. Per $x < 0$, basta notare che $\arctan(t)$ è simmetrica rispetto all'origine, il ché implica convergenza puntiale per $\alpha > 3/2$.

2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la somma della serie è continua in $\mathbb{R}$. Dobbiamo utilizzare il teorema. Dobbiamo trovare per quali α converge totale per applicare il teorema che dice che se f_n è continua in E, allora la sua serie converge uniformemente a $S(x)$ in E e $S(x)$ è continua. Studiamo la convergenza totale in $E = [-a, a]$, $a > 0$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} ||f_n||_{\infty,[-a,a]} &= \sup_{x\in[-a,a]} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^\alpha+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &\leq \sup_{x\in[-a,a]} \frac{|x|}{n^\alpha+1} 2\sqrt{n} = \frac{2a\sqrt{n}}{n^\alpha+1} \sim \frac{C}{n^{\alpha-1/2}} \end{aligned}$$

in quanto $\arctan(t) \leq t$. Ciò implica che

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\infty,[-a,a]} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{\alpha-1/2}}$$

che converge se e solo se $\alpha > 3/2$. Quindi per confronto la serie converge totalmente, e quindi uniformemente per $\alpha > 3/2$. Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale e la serie converge puntualmente per $\alpha > 3/2$, abbiamo convergenza uniformemente se e solo se $\alpha > 3/2$. Poiché f_n è continua e la serie converge uniformemente in $[-a, a]$, la serie risulta continua in tale intervallo. Poiché a è arbitrario, possiamo amplificato e la serie è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio

Sia

$$f_n(x) = \int\limits_x^{x+n} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha}\, dt$$

Studiamo la convergenza puntuale in $x \in (0, \infty)$. Abbiamo problemi per $t \to 0$ e $t \to +\infty$. Nel limite abbiamo

$$\int\limits_x^{\infty} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha}\, dt$$

Il primo problema accade solo se $0 \in [x, x+n]$. In infinito abbiamo

$$\frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \sim \frac{C}{t^\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha > 1$. In un intorno di zero abbiamo

$$\frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \sim t^{2-\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha < 3$. Quindi converge puntualmente per $\alpha \in (1, 3)$ Per guardare la convergenza uniforme abbiamo

$$\begin{aligned}
\sup |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int\limits_x^{\infty} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha}\, dt - \int\limits_x^{x+n} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha}\, dt \right| \\
&= \left| \int\limits_{x+n}^{\infty} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha}\, dt \right| \\
&\le \int\limits_{x+n}^{\infty} \left| \frac{\arctan t^2}{t^\alpha} \right| dt \\
&= \int\limits_{x+n}^{\infty} \frac{\arctan t^2}{t^\alpha}\, dt \\
&\le \frac{\pi}{2} \int\limits_{x+n}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{-(x+n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to 0
\end{aligned}$$

Abbiamo tolto il valore assolto perché l'intervallo è definitivamente positivo. La stima dell'errore è uniforme quindi la convergenza è uniforme. Studiamo ora per quali α, il limite di f_n è integrabile in $(0, +\infty)$. Osserviamo che $f_n \ge 0$ e siccome l'intervallo di integrazione cresce, abbiamo che $f_n \le f_{n+1}$. Applichiamo allora il teorema della convergenza monotona, e

$$\lim_n \int\limits_x^{x+n} f_n\, d\mu = \int f$$

che è integrabile per $\alpha \in (1, 3)$.

Esercizio

Calcoliamo

$$\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n e^{2x}}\,dx$$

Abbiamo che

$$f_n(x) \to \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ \frac{2}{1+e^2} & x=0 \\ \frac{x}{e^{2x}} & x>1 \end{cases}$$

Per $0 < x \leq 1$

$$f_n(x) \leq 2$$

che è integrabile nella parte limitata del dominio $(0,1)$. Per $x > 1$ abbiamo

$$f_n(x) \leq \frac{1+x^{n+1}}{x^n e^{2x}} \leq \frac{2x^{n+1}}{x^n e^{2x}} = \frac{2x}{e^{2x}}$$

Usiamo quindi la convergenza dominata

$$\begin{aligned} \lim_n \int_0^{+\infty} f_n\,dx &= \int_0^{+\infty} \lim_n f_n(x)\,dx \\ &= \int_0^1 1\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}}\,dx \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$f(x) = \frac{x^\alpha(1-\cos^4(\pi x))}{\ln(x)\ln(1+\sqrt{x})}$$

in $(0,+\infty)$. Usiamo il confronto asintotico in un intorno di zero

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha \cdot 4 \cdot \left(\frac{\pi^2 x^2}{2}\right)}{\ln(x)\ln 2} = C\frac{x^{\alpha+3/2}}{\ln x}$$

che è integrabile per $\alpha > -5/2$. Se $x \to 1$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{4\frac{(x-1)^2}{2}}{(x-1)\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}(x-1)$$

che è integrabile. Per $x \to \infty$

$$f(x) \leq \frac{2x^\alpha}{\ln x \ln(1+\sqrt{x})} \sim 4\frac{x^\alpha}{\ln^2(x)}$$

che è integrabile per $\alpha \leq 1$. Quindi, la funzione è integrabile per

$$-\frac{5}{2} < x \leq -1$$

Esercizio

Sia $\alpha > 0$ e

$$E\alpha = \left\{0 < x < 1 \wedge 1 < y < x^{-\alpha}\right\}$$

quindi

$$|E_\alpha| = \int_0^1 \int_1^{x^{-\alpha}} dy\, dx$$

che è finito se e solo se $\alpha < 1$. Data $f(x, y) = \arctan(x/y)$ calcolare

$$\int_{E_\alpha} f(x, y)\, dx\, dy$$

Possiamo applicare il teorema di Tonelli

$$\begin{aligned}
\int_{E_\alpha} f(x, y)\, dx\, dy &= \int_1^\infty \int_0^{y^{-1/\alpha}} \arctan(x/y)\, dx\, dy \\
&= \int_1^\infty \int_0^{y^{-1/\alpha-1}} \arctan(z) y\, dz\, dx \\
&= \int_1^{+\infty} y \left(y^{-1/\alpha-1} \arctan\left(y^{-1/\alpha-1}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(y^{-2/\alpha-2} + 1\right)\right) dy
\end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $z = x/y$. Per $y \to \infty$, il primo termine

$$y^{-1/\alpha} \arctan\left(y^{-1/\alpha-1}\right) \sim y^{-1/\alpha} y^{-1/\alpha-1} = y^{-1-2/\alpha}$$

che è integrabile per $\alpha > 0$. Per il secondo termine abbiamo

$$y\frac{1}{2} \ln\left(y^{-2/\alpha-2} + 1\right) \sim y^{-2/\alpha-1}$$

che è integrabile per ogni $\alpha > 0$. Quindi f è integrabile per $\alpha > 0$.

Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$f(x, y, z) = \frac{\arctan(z)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

nell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < z < x^2 + y^2 < 1\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Usiamo le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Il determinare della Jacobiana è ρ. Abbiamo quindi la condizione $0 < z < \rho^2$. Per la condizione su ρ notiamo che $0 < \rho^2 < 1$ se e solo se $0 < \rho < 1$. L'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\rho^2} \frac{\arctan(z)}{(x^2 + y^2)^\alpha} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta 1 &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha - 1}} \int_0^{\rho^2} \arctan z \, dz \, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha - 1}} \left[\rho^2 \arctan \rho^2 - \frac{1}{2} \log(1 + z^2) \right]_0^{\rho^2} d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{\arctan \rho^2}{\rho^{2\alpha - 3}} \, d\rho - \pi \int_0^1 \frac{\log(1 + \rho^4)}{\rho^{2\alpha - 1}} \, d\rho
\end{aligned}$$

In un intorno di zero l'integranda del primo integrale è asintotica a

$$\frac{\arctan \rho^2}{\rho^{2\alpha - 3}} \sim \frac{1}{\rho^{2\alpha - 5}}$$

che è quindi integrabile se e solo se $\alpha < 3$. Per la seconda integranda, la funzione è asintotica a

$$\frac{\log(1 + \rho^4)}{\rho^{2\alpha - 1}} \sim \frac{1}{\rho^{2\alpha - 5}}$$

che è come prima. Quindi. È importante notare che grazie alle costanti davanti agli integrali si evita cancellazione diretta. La funzione è integrabile per $\alpha < 3$.

Esercizio

Usando il cambio di variabili $x = \sqrt{\rho\cos\theta}$ e $y = \rho\sin\theta$ determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{(1 + x^4 + y^2)^\alpha}$$

è integrabile in $\mathbb{R}^2$ e calcolare il valore di tale integrale. La funzione è dispari quindi ci restringiamo al primo quadrante. L'integrale è quindi zero dove esiste. Calcoliamo ora $|\det J\varphi|$. Abbiamo

$$\varphi\colon \begin{bmatrix}\rho\\ \theta\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\sqrt{\rho\cos\theta}\\ \rho\sin\theta\end{bmatrix}$$

Quindi

$$J\varphi = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$|\det J\varphi| = \frac{\rho\cos^2\theta}{2\sqrt{\rho\cos\theta}} + \frac{\rho\sin^2\theta}{2\sqrt{\rho\cos\theta}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\cos\theta}}$$

L'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\rho\cos\theta}}{(1 + \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)^\alpha} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\cos\theta}}\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^\alpha}\, d\rho\, d\theta$$

L'integrale esterno è indipendente e vale quindi $\pi/2$. Per l'integrazione abbiamo problemi in infinito, dove l'integranda è asintotica a

$$\frac{\rho}{(1+\rho^2)^\alpha} \sim \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}}$$

che è integrabile per $\alpha > 1$.

Esercizio

Calcolare, giustificando la risposta

$$\lim_n \int_{E_n} \log^2\left(\frac{y}{x}\right)\, d\mu_2$$

dove

$$E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} < xy < 2 \wedge 1 < \frac{y}{x} < 2\right\}$$

Notiamo che $E_n \subseteq E_{n+1}$ e in termini di funzioni indicatrici $\chi_{E_n} \leq \chi_{E_{n+1}}$ che è quindi monotona crescente. Chiaramente

$$\lim_n \chi_{E_n} = \chi_E$$

dove

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < xy < 2 \wedge 1 < \frac{y}{x} < 2\right\}$$

Applichiamo quindi il teorema di convergenza monotona

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{E_n} \log^2\left(\frac{y}{x}\right)\, d\mu_2 &= \lim_n \int_{\mathbb{R}^2} \log^2\left(\frac{y}{x}\right) \chi_{E_n}\, d\mu_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \lim_n \log^2\left(\frac{y}{x}\right) \chi_{E_n}\, d\mu_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \log^2\left(\frac{y}{x}\right) \chi_E\, d\mu_2 \\
&= 2\int_{E^+} \log^2\left(\frac{y}{x}\right)\, d\mu_2
\end{aligned}$$

Cambiamo la variabile $t = xy$ e $u = y/x$. Per calcolare il determinante ci interessa la trasformazione inversa $y = ux$ e $t = ux^2$ che implica $x = \sqrt{t/u}$ e $y = u\sqrt{t/u} = \sqrt{ut}$. Quindi

$$\varphi\colon \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{t}{u}} \\ \sqrt{ut} \end{bmatrix}$$

la Jacobiana è

$$J\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{u}\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{u}}} & \frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{u}}}\left(-\frac{z}{u^2}\right) \\ u\frac{1}{2\sqrt{ut}} & t\frac{1}{2\sqrt{ut}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{tu}} & -\frac{\sqrt{t}}{2u^{3/2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{t}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{u}} \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$|\det J\varphi| = \frac{1}{4u} + \frac{1}{4u} = \frac{1}{2u}$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_{E^+} \log\left(\frac{y}{z}\right)\, d\mu_2 &= \int_0^2 \int_1^2 \log^2(u)\frac{1}{2u}\, du\, dt \\
&= \frac{\log^3(2)}{3}
\end{aligned}$$

e quindi il limite iniziale è pari al doppio

$$\frac{2}{3}\log^3 2$$

Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}\, dm(y)$$

Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione è integrabile in $(0, +\infty)$. Per invertire l'ordine di integrazione con il teorema di Tonelli dobbiamo spezzare gli integrali in due insiemi.

$$\int_0^\infty \int_{x^2}^{x^4} \frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}\, dm(y)\, dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} \frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}\, dx\, dy + \int_1^\infty \int_{\sqrt[4]{y}}^{\sqrt{y}} \frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}(y^{1/4} - y^{1/2})\, dy + \int_1^\infty \frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}(y^{1/2} - y^{1/4})\, dy$$

In un intorno di zero abbiamo

$$\frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}(y^{1/2} - y^{1/4}) \sim \frac{y^{\alpha+1/4}}{y^2} = \frac{1}{y^{7/4-\alpha}}$$

quindi è integrabile per $\alpha > 3/4$. Invece, in un intorno di infinito abbiamo

$$\frac{y^\alpha}{(1+y^3)\arctan^2(y)}(y^{1/2} - y^{1/4}) \sim \frac{1}{y^{5/3-\alpha}}$$

che è integrabile per $\alpha < 3/2$.

Esercizio

Valutare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \int_{x^2}^{x} \frac{e^{-y}x^\alpha}{(1-t)\log(1+t)}\,dt$$

è integrabile in

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 1 \wedge y > 0\right\}$$

Abbiamo quindi

$$\int_0^\infty \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{e^{-y}x^\alpha}{(1-t)\log(1+t)}\,dt\,dx\,dy = \left(\int_0^\infty e^{-y}\,dy\right)\left(\int_0^1 \int_x^{x^2} \frac{x^\alpha}{(1-t)\log(1+t)}\,dt\,dx\right)$$

$$= \int_0^1 \int_t^{\sqrt{t}} \frac{x^\alpha}{(1-t)\log(1+t)}\,dx\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}} - t^{\alpha+1}}{(1-t)\log(1+t)} \frac{1}{\alpha+1}\,dt$$

Abbiamo escluso il caso $\alpha = -1$ per l'integrazione. In un intorno di 1 l'integranda è asintotica a

$$\frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}} - t^{\alpha+1}}{(1-t)\log(1+t)} \frac{1}{\alpha+1} \sim C \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}(1-t^{\frac{\alpha+1}{2}})}{1-t} \sim C \frac{1-(1-x)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x} \sim C$$

con $x = 1-t$. Quindi è sempre integrabile in un intorno di 1. Invece, in un intorno di zero l'integranda

$$\frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}} - t^{\alpha+1}}{(1-t)\log(1+t)} \frac{1}{\alpha+1} \sim \begin{cases} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{t} & \alpha > -1 \\ \frac{t^{\alpha+1}}{t} & \alpha < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{t^{1-\frac{\alpha+1}{2}}} & \alpha > -1 \\ \frac{1}{t^{-\alpha}} & \alpha < -1 \end{cases}$$

Quindi è integrabile per $\alpha > -1$. Nel caso $\alpha = -1$ l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{-1/2 \log t}{(1-t)\log(1+t)}\,dt$$

che non è integrabile in un intorno di zero. Quindi $f(x,y)$ è integrabile in E se e solo se $\alpha > -1$.

Esercizio

Studiare la convergenza puntuale, uniforme e integrabilità della somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{x+1} \frac{\arctan t}{n^2+t^2}\, dt$$

In $x \in (0, +\infty)$. In un intorno di infinito

$$\frac{\arctan t}{n^2+t^2} \sim \frac{\pi/2}{n^2+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$$

In un intorno di zero abbiamo

$$\frac{\arctan t}{n^2+t^2} \sim \frac{t}{n^2+t^2} \sim t$$

La funzione integrale è ben definita in quanto l'integranda è sempre integrabile. Fissiamo allora x e abbiamo una serie a termini positivi.

$$\begin{aligned}
a_n = \int_x^{x+1} \frac{\arctan t}{n^2+t^2}\, dt &\leq \frac{\pi}{2n^2} \int_x^{x+1} \frac{1/n}{1+\left(\frac{t}{n}\right)^2}\, dt \\
&= \frac{\pi}{2n}\left[\arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right]_x^{x+1} \\
&= \frac{\pi}{2n}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) \\
&\to \frac{\pi}{2n^2}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}$$

converge puntualmente. Per la convergenza uniforme, la stima è la medesima in quanto è indipendente da x. Studiamo ora

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{x+1} \frac{\arctan t}{n^2+t^2}\, dt\, dx$$

Abbiamo che $f_n(x) \geq 0$ e che la successione delle serie è monotona crescente, quindi possiamo scambiare l'integrale e la serie per il teorema di convergenza monotona.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{x+1} \frac{\arctan t}{n^2+t^2}\, dt\, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_x^{x+1} \frac{\arctan t}{n^2+t^2}\, dt\, dx \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) dx
\end{aligned}$$

Sostituiamo $t = x/n$ e successivamente $y = t + 1/n$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\arctan\left(t+\frac{1}{n}\right) - \arctan t\,dt &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\arctan\left(t+\frac{1}{n}\right)\,dt - \int_0^{\infty}\arctan t\,dt\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{1/n}^{\infty}\arctan(t)\,dt - \int_0^{\infty}\arctan(t)\,dt\right] \\
&= -\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\arctan t\,dt \\
&\leq -\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

che converge per confronto asintotico.

Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{|1-(x^2+y^2)z^2|}}$$

su

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$$

che è un cilindro infinito. Usiamo le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Il determinare della Jacobiana è ρ. Quindi

$$\Omega(\rho,\theta,z) = \{0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

e la funzione diventa

$$f(\rho,\theta,z) = \frac{1}{\sqrt{|1-\rho^2 z^2|}}$$

e l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{|1-\rho^2z^2|}}\,d\theta\,d\rho\,dz \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{-2z^2}\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2z^2}}\,d\rho\,dz + 2\pi\int_{|z|>1}\frac{1}{-2z^2}\left(\int_0^{1/|z|}\frac{-2z^2\rho}{\sqrt{1-\rho^2z^2}}\,d\rho - \int_{1/|z|}^{1}\frac{-\rho(-2z^2)}{\sqrt{\rho^2z^2-1}}\,d\rho\right)dz \\
&= -\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{z^2}\left[\sqrt{1-\rho^2z^2}\right]_0^1 dz + 2\pi\int_{|z|>1}\frac{1}{-2z^2}\left(\left[\sqrt{1-\rho^2z^2}\right]_0^{1/|z|} - \left[\sqrt{\rho^2z^2-1}\right]_{1/|z|}^{1}\right)dz \\
&= -\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{z^2}\left(\sqrt{1-z^2}-1\right)dz - \pi\int_{|z|>1}\frac{1}{z^2}\left(-1-\sqrt{z^2-1}\right)dz
\end{aligned}$$

dove abbiamo notare che la funzione era simile a

$$\frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{|1-\rho^2z^2|}\right) = \frac{-2\rho z^2}{2\sqrt{|1-\rho^2z^2|}}$$

e studiato il segno per separare gli integrali. In un intorno di zero

$$\frac{1}{z^2}\left(\sqrt{1-z^2}-1\right) \sim C$$

che quindi è integrabile in zero. In un intorno di di $\pm\infty$ abbiamo

$$\frac{1}{z^2}\left(-1-\sqrt{z^2-1}\right) \sim -\frac{1}{z^2} - \frac{|z|}{z^2} \sim \frac{1}{|z|}$$

che non è integrabile.

Esercizio

Studiare per $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrabilità di

$$f(x,y) = (2 - x^2 - y^2)^\alpha$$

su

$$\Omega = \{\max\{|x|, |y|\}\}$$

che è un quadrato aperto. La funzione ha problemi per $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$, che è la circonferenza di raggio 2. La circonferenza viene toccata solo agli angoli del quadrato. L'insieme è anche simmetrico quindi possiamo studiare il problema solo nel primo quadrante. In coordinate polari abbiamo

$$f(r,\theta) = (2 - \rho^2)^\alpha$$

Se $\alpha \geq 0$ non ho problemi. Scrivere l'insieme in coordinate polari è difficile, ma possiamo studiarne uno più facile che includa comunque il punto di interesse

$$\Omega' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2\} \subset \Omega \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

Per scrivere tale insieme in coordinate polari prima sostituiamo $x = x + 1$ e $y = y + 1$ (che non cambia il Jacobiano). Quindi

$$f(x,y) = (2 - (x+1)^2 - (y+1)^2)^\alpha = (-x^2 - 2x - y^2 - 2y)^\alpha$$

e allora sostiuiamo in coordinate polari

$$f(\rho,\theta) = (-\rho^2 - \rho(\cos\theta + \sin\theta))^\alpha$$

e

$$\Omega' = \{0 < \rho < 2\}$$

Abbiamo quindi l'integrale

$$\int_{\Omega'} f = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} -\rho^3 - \rho^2(\cos\theta + \sin\theta)\, d\rho\, d\theta$$

In un intorno di zero di ρ abbiamo

$$g \sim \rho^{2\alpha+1}$$

che è integrabile per $\alpha > -1$.

Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$f(x,y,z) = \frac{xze^{-z}}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)z^2 \le 1 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge y > -x\}$$

Usiamo le coordinate cilindriche

$$E = \{\rho^2 \le \frac{1}{z^2} \wedge 0 < \theta < \frac{3}{4}\pi \wedge z > 0\}$$

e l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^{3\pi/4} \int_0^{1/z} \frac{z\rho\cos\theta e^{-z}}{\rho^{2\alpha}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \left[ze^{-z} \frac{1}{2-2\alpha+1} \rho^{2-2\alpha+1} \right]_0^{1/z} dz \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \frac{1}{3-2\alpha} \frac{ze^{-z}}{z^{3-2\alpha}} \, dz \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{3-2\alpha} \int_0^\infty z^{2\alpha-2} e^{-z} \, dz
\end{aligned}$$

con $2-2\alpha > -1$ quindi $\alpha < 3/2$. In un intorno di zero la funzione è integrabile per $\alpha > 1/2$. Quindi, la funzione è integrabile per $1/2 < \alpha < 3/2$.

Esercizio

Studiare l'integrabilità di

$$F(x) = \int_x^{x+1/x} \frac{y^2}{1+y^\alpha} \, dy$$

in $(1, +\infty)$. Abbiamo quindi

$$\int_1^\infty \int_x^{x+1/x} \frac{y^2}{1+y^\alpha} \, dy \, dx$$

L'insieme di integrazione è quindi

$$\Omega = \{x < y < x + 1/x \wedge x > 1\} = \{1 < x < y \wedge 1 < y < 2\} \cup \{1/y < x < y \wedge y > 2\}$$

Per il teorema di tonelli possiamo scambiare gli integrali

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \int_x^{x+1/x} \frac{y^2}{1+y^\alpha} \, dy \, dx &= \int_1^2 \int_1^y \frac{y}{1+y^\alpha} \, dx \, dy + \int_2^\infty \int_{1/y}^y \frac{y^2}{1+y^\alpha} \, dx \, dy \\
&= \int_1^2 \frac{(y-1)y^\alpha}{1+y^2} \, dy + \int_2^\infty \frac{y^3}{1+y^\alpha} \, dy - \int_2^\infty \frac{y}{1+y^\alpha} \, dy
\end{aligned}$$

che converge per $\alpha > 4$.