

# Analisi I

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1</b>	<b>Sottoinsiemi finali</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Combinatoria</b>	<b>3</b>
2.1	Funzione indicatrice . . . . .	4
2.2	Altre proprietà . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Interi relativi</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Definizioni con ordini</b>	<b>7</b>
4.1	Considerazioni . . . . .	7
4.2	Estremi superiori e inferiori . . . . .	8
4.3	Conseguenze della proprietà del sup . . . . .	9
4.4	Esercizi sup . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Esponenziali</b>	<b>13</b>
5.1	Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi . . . . .	13
5.2	Potenze a esponente reale . . . . .	13
5.3	Esponenziali . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Numeri complessi</b>	<b>15</b>
6.1	Inclusione dei reali . . . . .	15
6.2	Operazioni algebriche . . . . .	15
6.3	Passaggio polari e cartesiane . . . . .	16
6.4	De Moivre . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Distanza fra due insiemi</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>Teorema di Ruffini</b>	<b>17</b>
<b>9</b>	<b>Spazi metrici</b>	<b>18</b>
<b>10</b>	<b>Spazi topologici</b>	<b>18</b>
<b>11</b>	<b>Successioni</b>	<b>19</b>
11.1	Aritmetica dei limiti . . . . .	21
11.2	Limiti notevoli . . . . .	24
11.3	Limiti notevoli con funzioni trigonometriche . . . . .	29
11.4	Proprietà asintotico . . . . .	30
11.5	Esercizi . . . . .	31
<b>12</b>	<b>Serie numeriche</b>	<b>32</b>
12.1	Aritmetica delle serie . . . . .	32
12.2	Formula di Stirling . . . . .	37
12.3	Serie a termini di segno qualunque . . . . .	39
12.4	Serie con parametri . . . . .	46

12.5 Teorema delle permutazioni di Riemann . . . . .	50
<b>13 Successioni, sottosuccessioni e topologia</b>	<b>52</b>
<b>14 Limiti</b>	<b>57</b>
14.1 Proprietà dei limiti . . . . .	59
14.2 Aritmetica dei limiti . . . . .	60
14.3 Continuità . . . . .	67
<b>15 Limiti e discontinuità di funzioni monotone</b>	<b>69</b>
15.1 Compattezza . . . . .	70
15.2 Continuità uniforme . . . . .	72
<b>16 Derivate</b>	<b>76</b>
16.1 Condizioni equivalenti alla derivabilità . . . . .	77
16.2 Punti di singolarità . . . . .	80
16.3 Massimi e minimi . . . . .	81
16.4 Conseguenze del teorema di Lagrange . . . . .	84
16.5 Derivate di ordine superiore . . . . .	88
16.6 Classificazione punti stazionari . . . . .	91
16.7 Convessità . . . . .	93
16.8 Asintoti . . . . .	97
16.9 Studio di funzioni . . . . .	97
<b>17 Integrali</b>	<b>98</b>
17.1 Integrazione di Riemann . . . . .	98
17.2 Area del cerchio . . . . .	98
17.3 Funzione gradini . . . . .	98
17.4 Integrali impropri . . . . .	116

## 1 Sottoinsiemi finali

### Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{N}$  si dice *finale* se  $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$  per qualche  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Esiste quindi un valore  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$$

### Proposition

Usando l'assioma induttivo si deduce che se  $A$  è un insieme tale che  $n_0 \in A$  e  $\forall n \in A, S(n) \in A$ , allora  $A$  è finale.

## 2 Combinatoria

Il valore  $n!$  è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni da  $F_n$  a  $F_n$  che sono biettive. Dove  $F_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

$$n! = |\{f: F_n \rightarrow F_n\}|$$

### Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è  $F_1$ , che contiene solo 1 elemento e  $1! = 1$ .
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme  $F_n$ , aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in  $n + 1$  posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è  $n!(n + 1) = (n + 1)!$ .

La funzione  $\sigma(n)$  è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta  $n$  elementi). Infatti, le permutazioni di  $n$  sono  $n!$ , ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

### Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di  $k$  oggetti scelti fra  $n$  oggetti, dove  $1 \leq k \leq n$ , sono il numero delle funzioni iniettive  $f: F_k \rightarrow F_n$ .

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

### Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di  $k$  oggetti scelto fra  $n$  oggetti, dove  $1 \leq k \leq n$ , sono il numero di sottoinsiemi di  $F_n$  di cardinalità  $k$ .

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbiamo che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

### Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni  $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

### Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme  $X$ .

### Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$  è equivalente a  $x \notin A \cap B$ , che è equivalente a  $x \notin A$  o  $x \notin B$ . Allora  $x \in A^c$  o  $x \in B^c$ , e quindi  $x \in A^c \cup B^c$ .

### Teorema Teorema del binomio

Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

## 2.1 Funzione indicatrice

### Definizione Funzione indicatrice

Sia  $X$  un insieme e  $E \subseteq X$ . La *funzione caratteristica* di  $E$  è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi  $E$  e  $F$ , abbiamo  $E \neq F \iff 1_E \neq 1_F$ .

La notazione  $y^x$  indica  $\{f: x \rightarrow y\}$ , cioè tutte le funzioni da  $x$  a  $y$ .

La funzione  $\Xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$  tale che  $\Xi(E) = 1_E$  è biettiva. È iniettiva perché sottoinsiemi diversi hanno funzioni caratteristiche diverse, suriettiva perché ogni funzione definisce un insieme diverso (e quindi c'è sempre un insieme che porta in ciascuna funzione). La funzione  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  è pari a  $f = 1_E$  per  $E = \{x \mid f(x) = 1\}$ . Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti.

Quindi, siccome è biettiva le cardinalità coincidono

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

## 2.2 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

### 3 Interi relativi

In  $\mathbb{N}$  è definita la funzione  $+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  dove  $(m, n) \rightarrow m + n$ .

Abbiamo chiaramente che  $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$ .

Le proprietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che  $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia,  $m - n$  è definito solo per  $m \geq n$ .

Definiamo  $\mathbb{Z}$  come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Abbiamo allora  $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{-1} n' = -n \mid n + (-n) = 0$ , e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma  $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \mid n + (-n) = 0$$

Per definire gli inversi di tutti i numeri  $\neq 0$ , si introducono le frazioni  $\frac{m}{n}$  con  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Si dice che due frazioni sono equivalenti  $\frac{m'}{n'}$  e  $\frac{m}{n}$  se  $mn' = m'n$ . I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione  $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$ .

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \rightarrow \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali  $\mathbb{Q}$  con le operazioni  $+$  e  $\cdot$  introdotte. Quindi  $(\mathbb{Q}, +)$  è un gruppo abeliano,  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo, per cui possiede le operazioni  $+$  e  $\cdot$  con le proprietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in  $\mathbb{Q}$  si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con  $a, b, x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di  $\mathbb{Q}$  ha un ordinamento totale dove  $r \leq s$  se e solo se  $r - s$  è non-negativa.

In  $\mathbb{Q}$  è definito un ordinamento che è compatibile con le operazioni  $+$  e  $\cdot$ , cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con  $t \in \mathbb{Q}$  e con  $t \geq 0$  abbiamo  $tr \leq ts$ .

#### **Definizione** Campo ordinato

Un campo  $F$  nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in  $\mathbb{Q}$  sono risolvibili.

#### **Teorema** Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in  $\mathbb{Q}$ .

#### **Proof** Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini  $r = \frac{m}{n}$ , tale che  $r^2 = 2$ . Abbiamo quindi che  $\frac{m^2}{n^2} = 2$ , quindi  $m^2 = 2n^2$ . Ciò ci dice che  $m^2$  è pari. Allora, 2 è un fattore anche di  $m$  (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi  $m$  è pari. Di conseguenza, se  $m$  è divisibile per 2, allora  $m^2$  è divisibile per 4. Abbiamo quindi  $4k = n^2$  e quindi  $n^2$  è divisibile per 2, anche  $n$ , contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

## 4 Definizioni con ordini

Sia  $E \subseteq X$  un insieme dove  $E \neq \emptyset$ .

Si dice che  $m \in X$  è *maggiorante* di  $E$  se  $\forall x \in E, x \leq m$ .

Se un tale valore esiste,  $E$  si dice *superiormente limitato*.

Si dice che  $m \in X$  è *minorante* di  $E$  se  $\forall x \in E, x \geq m$ .

Se un tale valore esiste,  $E$  si dice *inferiormente limitato*.

L'insieme  $E$  si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore  $m \in X$  si dice *massimo* di  $E$  se  $M$  è un maggiorante di  $E$  e  $m \in E$ .

Un valore  $m \in X$  si dice *minimo* di  $E$  se  $M$  è un minorante di  $E$  e  $m \in E$ .

### 4.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme  $E$  sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio  $X = \mathbb{Q}$  ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di  $E$ . Vi sono diversi minoranti di  $E$ , come  $-1$ ,  $-30$  etc. In generale, tutti i  $x \leq 0$  sono dei minoranti di  $E$ . I maggioranti di  $E$  sono tutti i valori  $x \geq 1$ .

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo  $r_n \in E$ . È facile vedere che  $r_n$  non può essere maggiorante in quanto se  $n' > n$ ,  $r_{n'} > r_n$ . Dato qualsiasi  $r_n$ , è possibile trovare un altro elemento in  $E$  che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che  $z < 1$ , verifichiamo quindi che  $z$  non è un maggiorante. Il valore  $z$  non è maggiorante di  $E$  se esiste una  $x \in E$  tale che  $x > z$ . Esiste infatti  $n$  tale che  $r_n > z$ , studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1 - z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché  $1 - z > 0$ . Qualunque numero più piccolo di  $z$  sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1 - z}$$

## 4.2 Estremi superiori e inferiori

### Definizione Estremo superiore

Sia  $E \subseteq X$  un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che  $\mu$  è l'*estremo superiore* di  $E$  se  $\mu$  è un maggiorante di  $E$  e  $\mu$  è il più piccolo dei maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

### Definizione Estremo inferiore

Sia  $E \subseteq X$  un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che  $\mu$  è l'*estremo inferiore* di  $E$  se  $\mu$  è un minorante di  $E$  e  $\mu$  è il più grande dei minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di  $\mathbb{Q}$  che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in  $\mathbb{Q}$  sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

### Teorema

Sia

$$E = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2\}$$

allora,  $E$  è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

### Proof

- Per dimostrare che  $E \neq \emptyset$  possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme  $E$  è banalmente limitato superiormente da tutti i valori  $x \geq 2$ .
- Supponiamo per assurdo che esista un  $\mu = \sup E$ . Notiamo che ovviamente  $\mu > 0$ . Possiamo notare che  $\mu^2 = 2$  è impossibile per il teorema di Euclide. Allora,  $\mu$  potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che  $\mu^2 < 2$ , allora dimostro che  $\exists x \in E$  tale che  $x > \mu$  e quindi che  $\mu$  non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

$$\mu + \frac{1}{n}$$

che sono chiaramente più grandi di  $\mu$ . Possiamo quindi scegliere  $n$  sufficientemente grande tale che  $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$ , e quindi  $\mu + \frac{1}{n} \in E$  in quanto

$$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

è chiaramente più grande di  $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$ . Ciò è dato dal fatto che  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ .

$$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

Analogamente, si dimostra che  $\mu^2$  non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi  $\mu$  non esiste.



È facile verificare che  $\inf$ ,  $\sup$ ,  $\min$ ,  $\max$  se esistono sono unici. Se esiste il massimo di  $E$ , allora esiste il  $\sup E$  e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste  $\sup E$  e  $\sup E \in E$ .

In  $\mathbb{Q}$  (e poi in  $\mathbb{R}$ ), se  $E$  non è limitato superiormente (cioè non ha maggiorante cioè  $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$  tale che  $e > M$ ) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se  $E$  non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

### 4.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della proprietà del sup sono:

- **proprietà archimedeo:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid na > x$  (in realtà vale anche in  $\mathbb{Q}$ ).
- **densità dei razionali nei reali:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  dove  $x < y$ , esiste  $r \in \mathbb{Q} \mid x < r < y$ .

#### Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \mid x^n = y$$

#### Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che  $E$  non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo  $x = \sup E$  e mostriamo che  $x^n = y$ .

- **Non vuoto:** se  $y \geq 1$ , basta scegliere  $x = 1$  in quanto  $x^n = 1 \leq y$ . Altrimenti, se  $y < 1$ , poniamo  $x = y$  e notiamo che, perché  $y < 1$ , allora  $y^n < y$ , e quindi  $y \in E$ .
- **Limitato superiormente:**  $E$  è limitato superiormente, infatti  $1 + y$  è un maggiorante di  $E$ . Se  $z \geq (1 + y)$ , poiché la funzione  $t \rightarrow t^2$  è crescente per  $t > 0$ , si ha  $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$ . Sia  $x = \sup E$ . Dico che  $x^n = y$ . Dimostro che se suppongo  $x^n > y$  allora per  $k$  grande

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

e quindi  $x - \frac{1}{k}$  è ancora un maggiorante di  $E$ , contro l'ipotesi impossibile perché  $x$ , che è il  $\sup E$ , è il più piccolo maggiorante. Invece, se  $x^n < y$  allora per  $k$  grande

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

allora  $x + \frac{1}{k} \in E$  ed è più grande di  $x$ , e  $x$  non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che  $x$  non può essere né più grande né più piccolo,  $x^n = y$ .

- **Unicità:** notiamo che se  $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$ .

Possiamo anche mettere  $z \geq 0$  così dimostrare che  $E \neq \emptyset$  è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che  $0 < y < 1 \implies y^n < y$ , per  $n > 1$ . (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

## 4.4 Esercizi sup

### Esercizio

Let

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5 \right\}$$

and the sequence

$$F = \left\{ x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di  $E$ ,  $F$ ,  $E \cup F$  e  $E \cap F$ .

- $E$  è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è  $\frac{1}{2}$ , mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi  $\sup E = 5$ , ma non vi è un massimo.
- $F$  è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché  $x_n > 0$ . Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il termine  $n+2$  cresce con  $n$ , quindi  $\frac{1}{n+2}$  decresce al crescere di  $n$  e quindi  $x_n$  cresce approssimando 1. Allora con  $n=1$  il termine assume il valore più piccolo, ossia  $\frac{2}{3}$ , quindi il minimo di  $F$ . Allora siccome ci avviciniamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare  $\sup F = 1$ . Il massimo di  $F$  non esiste. Rimane da far vedere che se  $z < 1$  allora  $z$  non è maggiorante di  $F$  cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché  $\frac{1}{n+2} < 1 - z$  cioè  $n > \frac{1}{1-z} - 2$ . Quindi  $z$  non è maggiorante e  $\sup E = 1$ .

- Verificare che  $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$ . Abbiamo che  $\sup E \leq \sup F$ . In sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi  $\sup E \cup F = 5$ . Tuttavia, il max non esiste in quanto  $5 \notin E \cup F$ . Analogamente,  $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$ . Questo valore è anche il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi  $F \subseteq E$ . Consideriamo allora  $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali  $n$  vale che  $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$ ? Abbiamo  $4(n+2) \leq 5(n+1)$  e quindi  $n \geq 3$ . Allora  $\sup E_1 \cap F = 1$  e non vi è massimo, mentre  $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$  che è anche il minimo.

- Posto  $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$  mostrare  $\sup E + F = \sup E + \sup F$ . Supponiamo quindi che  $\sup E$  e  $\sup F$  siano finiti. Siccome, per definizione,  $\forall e \in E, e \leq \sup E$  e  $\forall f \in F, f \leq \sup F$ , abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di sup dicendo che  $\mu$  è pari a  $\sup E$  se:

1.  $\forall x \in E, x \leq \mu$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$  non è maggiorante.

- Nota:** se  $x < \mu$  allora posto  $\varepsilon = \mu - x$  risulta  $x = \mu - \varepsilon$ . Allora sia  $\varepsilon > 0$ . Diciamo che esistono  $e_1 \in E$  e  $f_1 \in F$  tali che  $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$ . Poiché  $\sup E$  è, appunto, il supremum, esiste per definizione una  $e_1 \in E$  tale che  $e_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2}$ . Analogamente, esiste  $f_1 \in F$  tale che  $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$ . Da cui  $e_1 + f_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$ .
- Posto  $-E = \{-x \mid x \in E\}$  mostrare che  $\sup -E = -\inf E$  e  $\inf -E = -\sup E$ .

Dimostrare che il max esiste se e solo se  $\sup E$  è finito e appartiene a  $E$ . Analogamente per il min.

### Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{n^2+1} \mid n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore. Studiamo quindi per quali indici vale  $x_n \leq x_{n+1}$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{n-7}{n^2+1} &\leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1} \\ \frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono  $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$ . Di conseguenza, l'espressione è negativa per  $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$ . Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che  $14^2 < 201 < 15^2$ , e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e  $\frac{27}{2}$ . Allora, tutte le  $n$  intere che soddisfano l'equazione sono  $n = 13$ . Ne consegue che se  $n \geq 14$ ,  $x_n > x_{n+1}$ . Il massimo è quindi  $x_{14}$ .

## 5 Esponenziali

### 5.1 Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni  $p$  intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza  $x^r$  è quindi ben definita con  $r \in \mathbb{Q}^{>0}$ . Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = (x^{-1})^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1.  $\forall x > 0, x^0 = 1$ ;
2.  $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$ ;
3.  $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (x^r)^s = x^{rs}$ ;

Con  $r > 0$  posso definire  $0^r = 0$  e se  $r = \frac{m}{n}$  (ridotta ai minimi termini) con  $n$  dispari posso definire  $x^{\frac{m}{n}}$  se  $x < 0$ .

### 5.2 Potenze a esponente reale

Se  $x = 1, \forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$ . Se  $x > 1$  e  $r < s$ , allora  $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = (\sqrt[p]{x})^m < (\sqrt[p]{x})^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con  $a > 1$  e  $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad  $a < 0$  come

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

E infine se  $0 < x < 1$

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

### 5.3 Esponenziali

Fissata una base  $a > 0$  abbiamo poi l'esponenziale che è definita da  $a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Risulta che se  $a = 1$ , allora la funzione è sempre 1. Se  $a > 1$  la funzione è strettamente crescente, e strettamente decrescente se  $0 < a < 1$ .

La funzione è biettiva tra  $\mathbb{R}$  e  $(0, +\infty)$ , quindi è invertibile. La funzione inversa è  $y = \log_a(x)$ .

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

#### Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g.  $\ln(x(x-1))$  non si può riscrivere come  $\ln(x) + \ln(x-1)$  perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo  $\log_2(x^2)$ , possiamo riscriverlo come  $2 \log_2 |x|$ .

## 6 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in  $\mathbb{R}$ ,  $x^2 \geq 0$  e vale  $x^2 = 0 \iff x = 0$ . Quindi l'equazione  $x^2 = -1$  non ha soluzione in  $\mathbb{R}$ . Estendiamo il campo  $\mathbb{R}$  costruendo un campo  $\mathbb{C}$  che contiene una immagine isomorfa di  $\mathbb{R}$  nel quale  $z^2 = -1$  ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in  $\mathbb{R}$ ;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia  $0, 0$ ;
3. l'opposto di  $(a, b)$  è  $-(a, b)$ ;

Si può rappresentare  $\mathbb{C}$  come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento  $(1, 0)$  è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere  $z^{-1} = (x, y)$  dove  $(a, b)(x, y) = (1, 0)$ .

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che  $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ .

### 6.1 Inclusione dei reali

Ogni number  $r \in \mathbb{R}$  può essere identificato con il numero complesso  $(r, 0)$ . Cosifacendo, l'applicazione  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\varphi(a) = (a, 0)$  preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere  $z = (a, b)$  come  $a(1, 0) + b(0, 1)$ . Se identifichiamo  $i = (0, 1)$ , possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità  $i^2 = -1$ .

### 6.2 Operazioni algebriche

$$\begin{cases} i^0 = +1 \\ i^1 = +i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases} \quad \begin{cases} i^4 = +1 \\ i^5 = +i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{cases} \quad \dots$$

Dato  $z = a + bi$ , diciamo che  $\Re(z) = a$  e  $\Im(z) = b$ .

### Definizione Coniugio

Dato  $z = a + bi \in \mathbb{Z}$ ,

$$\bar{z} = a - bi$$

Chiaramente,  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ . Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

### Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:**  $\overline{\bar{z}} = z$ ;
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ;
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ ;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ;
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$  per  $n \in \mathbb{Z}$ .

Per ogni numero complesso  $z$ ,

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

e per ogni numero complesso  $w$

$$\overline{wz} = wz\overline{wz} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare,  $|z^n| = |z|^n$ .

La disuguaglianza  $||z| - |w|| \leq |z - w|$ .

- $|wz| = |w| \cdot |z|$ ;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ .

Da dimostrare:  $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ .

## 6.3 Passaggio polari e cartesiane

Dato  $x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e il punto polare  $(r, \theta)$  abbiamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

## 6.4 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\cos \theta)^{n-k} (\sin \theta)^k$$

## 7 Distanza fra due insiemi

La distanza (minima) fra due insiemi è definita come

$$\text{dist}(S, R) = \inf\{d(z, w) \mid z \in S \wedge w \in R\}$$



## 8 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio  $p(z)$ ,  $z_0$  è una radice di  $p(z)$  se esiste un polinomio  $q(z)$  con  $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$  tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se  $p(z)$  è divisibile per  $z - z_0$ .

La radice  $z_0$  ha molteplicità  $m \geq 1$  se  $p(z)$  è divisibile per  $(z - z_0)^m$  ma non per  $(z - z_0)^{m+1}$ .

## 9 Spazi metrici

### Definizione Insieme aperto in spazio metrico

Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  è *aperto* se tutti i punti sono interni in  $A$ .

## 10 Spazi topologici

Un punto  $x_0$  è isolato in  $E$  se  $\exists r > 0$  tale che  $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$ .

### Teorema

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sono equivalenti:

1.  $x_0$  è di accumulazione cioè  $\forall r > 0$ ,

$$((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$

2.  $\forall r > 0$ ,  $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$  è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di  $E$ ).

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che  $\exists r > 0$  tale che  $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$  è finito, e quindi  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dove  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono gli elementi di  $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$  diversi da  $x_0$ . Chiaramente, esiste un  $0 < \varepsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|\}$ . Siccome l'insieme è finito,  $\varepsilon$  esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione  $x_0$  non è di accumulazione.

( $\Leftarrow$ ) Trivial.

## 11 Successioni

La sequenza è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se l'immagine è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente.

Diciamo che  $M = \max x_n$  se  $\forall n x_n < M$  e  $\exists n' \mid x_{n'} = M$ . Analogamente il min.

Definiamo inoltre  $\sup_n x_n = \sup\{x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$  Analogamente per l'inf.

### Definizione Proprietà soddisfatta definitivamente

Data una proprietà  $P$ , una successione  $\{x_n\}$  soddisfa la proprietà  $P$  definitivamente se  $\exists N \mid \forall n, P(n) \geq N$ .

Quando facciamo un limite su una successione, l'unica cosa alla quale la variabile possa tendere è infinito. La sequenza tende al limite superiore se dopo un certo punto il suo valore è maggiore a quello del limite, analogamente per il limite inferiore, e entrambi per il limite in senso generale.

$$x_n \rightarrow l^+$$

Possiamo definire i vari tipi di limiti in maniera equivalente ma con intorno diversi a seconda del tipo

$$I = \begin{cases} (l - \varepsilon, l + \varepsilon) & \xi \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty), M > 0 & \xi = +\infty \\ (-\infty, -M), M > 0 & \xi = -\infty \end{cases}$$

Quindi  $x_n \rightarrow \xi$  se per ogni intorno  $I$  esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n \in I$ .

### Lemma

Se  $\lambda$  e  $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$  and  $\lambda \neq \mu$  allora esistono intorno  $I$  di  $\lambda$  e  $J$  intorno di  $\mu$  tale che  $I \cap J = \emptyset$ .

### Proof

Siano per esempio  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $\lambda < \mu$ .  $\forall r \leq \frac{\mu - \lambda}{2}$  gli intorno  $I = (\lambda - r, \lambda + r)$  e  $J = (\mu - r, \mu + r)$  sono disgiunti.

### Proposition Proprietà dei limiti

1. Sia  $\{x_n\}$  una successione. Se  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $x_n \rightarrow \mu$  allora  $\lambda = \mu$ . Infatti supponiamo che  $\lambda \neq \mu$  per il lemma  $\exists I$  intorno di  $\lambda$  e  $J$  intorno di  $\mu$  tale che  $I \cap J = \emptyset$ . Per ipotesi  $x_n \rightarrow \lambda$  quindi  $\exists M_1$  tale che  $x_n \in I \forall n \geq N_1$ .  $x_n \rightarrow \mu$  quindi  $\exists M_2$  tale che  $x_n \in J \forall n \geq N_2$ . Quindi se  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ,  $x_n \in I \cap J = \emptyset$   $\nabla$ .
2. Se  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , allora  $\{x_n\}$  è limitato cioè esiste  $m \leq M$  tale che  $m \leq x_n \leq M$  per tutte le  $n$ . Infatti, per ipotesi  $x_n \rightarrow l$  quindi usando  $1 = \varepsilon$  nella definizione, risulta che  $\exists N \mid l - 1 < x_n < l + 1$  per ogni  $n \geq N$ . D'altra parte, per ogni  $n = 1, \dots, N - 1$  abbiamo che

$$A = \min\{x_1, \dots, x_{N-1}\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \dots, x_{N-1}\} = B$$

che esistono perché sono insiemi finiti. Concludiamo che  $m = \min\{l - 1, A\} \leq x_n \leq \max\{l + 1, B\} = M$

3. **Teorema di permanenza del segno:** Se  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $y_n \rightarrow \mu$  e  $\lambda < \mu$ , allora esiste  $N \mid \forall n \geq N, x_n < y_n$ . Infatti,  $\forall \lambda < a < b < \mu$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n < a$  e  $y_n > a$ . Infatti, assumendo  $\lambda < \mu$ , dati  $a, b$  tale che  $\lambda < a < b < \mu$ , esistono intorno  $I$  di  $\lambda$  e  $J$  di  $\mu$  tale che

$$I \subseteq (-\infty, a)$$

e

$$J \subseteq (b, +\infty)$$

Per definizione di limite:

•

$$x_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$

•

$$y_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

Quindi, se  $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ , abbiamo  $x_n \in (-\infty, a)$  cioè  $x_n < a$  e  $y_n \in (b, +\infty)$ , cioè  $y_n > b$ . Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$

Infatti,  $x_n \rightarrow 0$  se e solo se  $|x_n| \rightarrow 0$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$

Poichè

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

poniamo  $y_0 = 0, \forall n$  non vale nè  $x_n \geq 0$  nè  $x_n \leq 0$  definitivamente.

In particolare, se  $y_n \rightarrow \mu > 0$ ,  $y_n$  è definitivamente strettamente  $> 0$  cioè esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, y_n > 0$  e infatti  $\forall b \in (0, \mu)$  esiste  $N$  tale che  $y_n > b, \forall n \geq N$ .

4. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni):** Siamo  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  successioni tale che  $x_n \leq y_n$  definitivamente. Se  $\exists \lim x_n = \lambda$  e  $\exists \lim y_n = \mu$  allora  $\lambda \leq \mu$ .
5. **Teorema dei carabinieri:** Siano  $\{x_n\}, \{y_n\}$  e  $\{z_n\}$  tre successioni reali con  $x_n \leq y_n \leq z_n$  definitivamente, e supponiamo che  $x_n \rightarrow l$  e  $z_n \rightarrow l$ . Allora,  $y_n \rightarrow l$ .  
Se  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $z_n \rightarrow +\infty$ , allora  $y_n \rightarrow +\infty$ .  
Se  $x_n \rightarrow -\infty$  e  $z_n \rightarrow -\infty$ , allora  $y_n \rightarrow -\infty$ .

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè  $\lambda > \mu$ , per il punto 3 si avrebbe  $x_n \geq y_n$  definitivamente.

### Proposition

Se  $x_n \rightarrow 0$  e  $\{y_n\}$  è limitata cioè  $\exists m < M$  tale che  $m \leq y_n \leq M$ , allora  $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$ . Infatti,

$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

### Proposition

Sono equivalenti:

1.  $\exists a, b \mid a < b \wedge a \leq x_n \leq b, \forall n$
2.  $\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M, \forall n$

## 11.1 Aritmetica dei limiti

Siano  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  successioni reali con  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $y_n \rightarrow \mu$  con  $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ .

### Proposition Addizione

$x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$  dove  $\lambda + \mu$ . Questa somma è quella usuale se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , altrimenti  $\pm\infty + c = \pm\infty$  con  $c \in \mathbb{R}$  e  $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$ .

### Proof

Nel caso in cui  $\lambda, \mu$  sono finiti,  $x_n \rightarrow \lambda$ , ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e  $y_n \rightarrow \mu$ , ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se  $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n + y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leq |x_n - \lambda| + |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione  $x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$ .

Dimostriamo ora che se  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $\{y_n\}$  è limitata allora  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ . Ricordiamo che se  $y_n \rightarrow \mu$  finito allora  $\{y_n\}$  è limitata si conclude che vale la tesi nel caso  $\lambda = +\infty$  e  $\mu$  finito.

Infatti,  $\{y_n\}$  è limitato quindi esiste  $K$  tale che  $|y_n| \leq K$  per tutte le  $n$ .  $x_n \rightarrow +\infty$  per definizione  $\forall M > 0$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n > M + K$ .

Quindi  $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + K) - K = M$  (alla peggio tolgo un  $K$ ).

Il caso  $-\infty$  è identico.

Mostriamo ora che  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $y_n \rightarrow -\infty$ , allora  $x_n + y_n$  può tendere a  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\pm\infty$  o oscillare.

### Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \rightarrow +\infty \\ y_n = -n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Allora  $x_n + y_n = c \rightarrow c$ .

La definizione di limite finito è  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$ .

### Proposition

Se so che  $x_n \rightarrow l$  finito dato  $\varepsilon > 0$  posso applicare la definizione di limite a un qualunque multiplo di  $\varepsilon$  e concludere che

$$\exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato  $\varepsilon > 0$  si trovi  $N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$  con  $c$  fisso positivo. Allora  $x_n \rightarrow l$  infatti basta applicare le condizioni a  $\frac{\varepsilon}{c}$ .

### Proposition Moltiplicazione successioni

Dati  $x_n \rightarrow \lambda$ ,  $y_n \rightarrow \mu$  allora  $x_n \cdot y_n \rightarrow \lambda \cdot \mu$  dove  $\lambda \mu$  è l'usuale prodotto se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Se  $c \neq 0$ ,  $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$  con le regole dei segni, e  $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$  con le regole dei segni. Non è definito  $0 \cdot \infty$  forma indeterminata del prodotto.

### Proof

Supponiamo presi  $\lambda, \mu$  finiti per ipotesi  $x_n \rightarrow \lambda$  fissato  $\varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$  e  $y_n \rightarrow \mu$  fissato  $\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$ . Se  $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$  abbiamo

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \lambda \mu| &= |x_n y_n - x_n \mu + x_n \mu - \lambda \mu| \\ &= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\ &\leq N \cdot |y_n - \mu| + |\mu| |x_n - \lambda| \\ &\leq (N + |\mu|)\varepsilon \end{aligned}$$

$x_n \rightarrow \lambda$  finito implica che  $x_n$  è limitata, cioè  $\exists M \mid |x_n| \leq M, \forall n$ . Per l'osservazione fatta, questo dimostra che  $x_n y_n \rightarrow \lambda \mu$ .

### Proposition Quoziente successioni

Siamo  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  successioni reali tali che  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $y_n \rightarrow \mu$ . Supponiamo che  $y_n \neq 0$  definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se  $\mu \neq 0$ ), cosicché è definitivamente definita la successione  $\frac{x_n}{y_n}$ . Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$$

Se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , allora  $\frac{\lambda}{\mu}$  è l'usuale quoziente. Se invece  $\lambda = \pm\infty$  e  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\mu = \pm\infty$ , allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$  e  $\mu = 0^\pm$ , allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto  $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$  (forme indeterminate del quoziente) e  $\frac{\lambda}{0}$  con 0 senza segno.

### Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

### Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significativa forma di indecisione, al contrario del

denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[ n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2 = n^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1 + \frac{\sin n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}}}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{2}{n^3}}$$

Il termine  $\frac{\sin n}{n}$  tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi  $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$ , e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre,  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  tende a 1 e  $\frac{2}{n^3}$  tende a 0.

**Nota:** Il termine dominante in  $\frac{3}{m} + \frac{4}{n^2}$  è  $\frac{3}{m}$ .

### Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia  $\{x_n\}$  una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se  $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$  (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se  $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$  (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

### Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui  $x_n$  è definitivamente monotona crescente e che quindi  $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ . Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$ : La tesi è che esiste  $\exists N_1 > 0 \mid \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$ . Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum,  $\forall \varepsilon > 0$  we have that
  - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
  - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid x_N > \xi - \varepsilon$
 e poiché  $x_n$  è monotona crescente,  $\forall n \geq N$  abbiamo

$$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$ : La tesi è che  $\{x_n\}$  non è limitata superiormente, quindi  $\forall M > 0, \exists N_1 \mid x_{N_1} > M$  e, ancora per monotonìa

$$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

e per definizione,  $x_n \rightarrow +\infty = \sup x_n$ .

## 11.2 Limiti notevoli

Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  successioni reali, e supponiamo che  $a_n \rightarrow A$  e  $b_n \rightarrow B$ .

### Proposition

Se  $a_n > 0$  definitivamente, e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora

$$a_n^\alpha \rightarrow A^\alpha$$

dove  $A^\alpha$  è la usuale potenza se  $A > 0$ . Se  $\alpha \neq 0$  decisamente e  $A = +\infty$  allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

**Nota:** se  $\alpha = 0$  e  $a_n > 0$  definitivamente, allora  $a_n^\alpha = 1$  definitivamente e  $a_n^\alpha \rightarrow 1$ .

### Proposition

Se  $A > 0$  allora

$$A^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

### Proof

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1 + h) \implies A^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \rightarrow +\infty$$

con  $h = A - 1$ . Se  $0 < A < 1$ , allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove  $\frac{1}{A} > 1$  e  $(\frac{1}{A})^n \rightarrow +\infty$ .

### Proposition

Se  $a_n > 0$  definitivamente  $a_n \rightarrow A \geq 0$ ,  $b_n \rightarrow B$  con  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ , allora

$$a_n^{b_n} \rightarrow A^B$$

dove  $A^B$  è la solita potenza se  $A, B \in \mathbb{R}$  escludendo il caso  $0^0$ .

Se  $A > 1$  e  $B = +\infty$ , allora  $A^B = +\infty$ .

Se  $0 \leq A < 1$  e  $B = +\infty$ , allora  $A^B = 0^+$ .

Se  $A > 1$  e  $B = -\infty$ , allora  $A^B = 0^+$ .

Se  $0 \leq A < 1$  e  $B = -\infty$ , allora  $A^{-\infty} = +\infty$ .

Non è definito il caso  $A = 1$  e  $B = \infty$  ( $1^\infty$ ).

Non è definito il caso  $A = \infty$  e  $B = 0$  ( $\infty^0$ ).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

### Proposition Successioni di logaritmi



Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con  $b_n > 0$  definitivamente e  $b_n \rightarrow B$ , allora

$$\log b_n \rightarrow \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

### Proposition Velocità delle successioni

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  and  $\forall A > 1$ ,

$$\frac{n^\alpha}{A^n} \rightarrow 0$$

(in particolare con  $\alpha$ )

2.  $\forall a_n \rightarrow \infty$  e  $\forall \alpha > 0$ ,

$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \rightarrow 0^+$$

3.  $\forall \alpha, \beta > 0$ ,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \rightarrow 0$$

4.  $\forall a_n \rightarrow \infty$  e  $\forall \alpha, \beta > 0$ ,

$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \rightarrow 0$$

5.  $\forall A > 1$ ,

$$\frac{A^n}{n!} \rightarrow 0^+$$

- 6.

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0^+$$

### Proof

Dimostriamo che con  $A > 1$  abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \rightarrow 0$$

Scriviamo  $A = B^2$  con  $B = (1 + h)$  con  $h > 0$  da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1 + h)^n]^2 \geq (1 + hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1 + hn)^2} = \frac{n}{n^2(h + \frac{1}{n})^2} \rightarrow 0$$

### Proof

Dimostriamo che

$$\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

### Teorema Numero di Eulero

Siano

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1.  $a_n$  è monotona strettamente crescente;
2.  $b_n$  è monotona strettamente decrescente;
3.  $\forall n, a_n \leq b_n$  quindi  $a_n$  è limitata superiormente.

Sia

$$e = \lim a_n$$

Allora,  $a_n \rightarrow e^-$ ,  $b_n \rightarrow e^+$  e  $e \approx 2.7182818$ .

### Proof

1. Mostriamo che  $\forall n \geq 1, a_n < a_{n+1}$ . Per mostrare ciò mostriamo che

$$\forall n \geq 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Per ogni  $n \geq 2$  studiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} > \frac{1 - \frac{1}{n^2} \cdot n}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$

2. Mostriamo che  $\forall n \geq 1$ ,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n}
 \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli, per  $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + n \left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

3. Per tutte le  $n$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n$$

Siccome  $a_n$  è limitata superiormente e ed è monotona crescente, esiste  $\lim a_n = e^-$  Poiché  $b_n = a_n + (b_n - a_n)$ ,

$$b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Quindi  $b_n \rightarrow e^+$  siccome è decrescente. Siccome  $a_n < e < b_n$  si può approssimare scegliendo  $n$  sufficientemente grandi.

### Proposition

Se  $a_n$  è crescente, e  $b_n$  è decrescente e  $a_n < b_n$  si deduce che  $\forall m, n, a_m < b_n$

### Corollario

Se  $c_n \rightarrow +\infty$  allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

### Proof

Siccome vale sempre  $[c_n] \leq c_n < [c_n] + 1$

$$1 + \frac{1}{[c_n] + 1} < 1 + \frac{1}{c_n} \leq 1 + \frac{1}{[c_n]}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{[c_n] + 1}\right)^{[c_n]} < \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n] + 1} = \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]} \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right) = e$$

### Proposition

Se  $|c_n| \rightarrow +\infty$ , allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

### Proposition

Se  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente, allora

$$(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \rightarrow e$$

Segue dall'ultima proposition con  $c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$

### Proposition

Se  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \frac{(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow \alpha$$

### Proof

Basta porre  $\delta_n = (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \rightarrow 0$  dove chiaramente  $\delta_n \neq 0$  definitivamente. Quindi esprimere  $\varepsilon_n$  in termini di  $\delta_n$  per concludere.

### Esempio Motivazione per non fare i limiti in tal modo

Calcolare il limite di

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

Vogliamo applicare  $\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$  con  $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})}$ . Abbiamo allora

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

e allora

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n^{3/2} + \log n}{n + \sqrt{n}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{\log n}{n^{3/2}}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

## 11.3 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

### Teorema

Sia  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , allora

1.  $\sin \varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$  e  $\tan \varepsilon_n \rightarrow 0$ ;
2. Se  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente, allora

$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

e

$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

### Proof

1. Per la definizione del seno,

$$|\sin \alpha| \leq \min\{1, |\alpha|\}$$

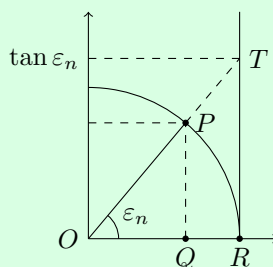
Quindi  $|\sin \varepsilon_n| \leq |\varepsilon_n| \rightarrow 0$  e  $\cos^2 \varepsilon_n = 1 - \sin^2 \varepsilon_n \rightarrow 1$  da cui  $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$ . Inoltre,

$$\tan \varepsilon_n = \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 0$$

2. Sia  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  con  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente. Osserviamo che poiché il seno è dispari,

$$\frac{\sin x}{x}$$

è pari. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo  $\forall n, \varepsilon_n > 0$  e poiché  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  posso anche supporre che  $\forall n, 0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$ . Andiamo a confrontare le aree nella circonferenza trigonometrica.



Per confronto di aree, l'area del triangolo  $OPQ$  è minore o uguale dell'area del settore circolare  $OPR$  che è minore o uguale del triangolo  $OTR$ .

Ricordiamo che l'area del settore circolare di angolo  $\alpha$  è data dalla proporzione

$$\frac{\text{Area } S_\alpha}{\text{Area cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

quindi

$$\text{Area}_{OPR} = \frac{1}{2}\alpha$$

Abbiamo allora che

$$\frac{1}{2} \cos \varepsilon_n \sin \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \varepsilon_n$$

che semplificando diventa

$$\cos \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n} \leq \frac{1}{\cos \varepsilon_n}$$

Siccome  $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$  e  $\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 1$ , per il teorema dei carabinieri,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n}$$

Per la tangente abbiamo semplicemente

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \left( \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right) \left( \frac{1}{\cos \varepsilon_n} \right) \rightarrow 1$$

E per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} &= \frac{(1 - \cos \varepsilon_n)(1 + \cos \varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2 \cdot (1 + \cos \varepsilon_n)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \\ &= \left( \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \left( \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \rightarrow \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

### Proposition

Calcolare il limite della successione

$$a_n = (n+2) \sin \left( \frac{n+1}{n^2} \right)$$

Notiamo che

$$\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} a_n &= (n+2) \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{n^2(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{1}{n})}{n^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

## 11.4 Proprietà asintotico

**Nota:** non vale  $a_n \sim b_n \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}$  se  $a_n \rightarrow \infty$ . Per esempio,  $a_n = n + \sqrt{n} = n(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n = b_n$ . Quindi

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

**Nota:** non vale  $a_n \sim b_n \implies \log a_n \sim \log b_n$  se  $a_n \rightarrow 1$ . Per esempio,  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$  e  $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ . Tuttavia,

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} \rightarrow +\infty$$

**Nota:** non vale  $a_n \sim b_n \wedge c_n \sim d_n \implies a_n \pm c_n \sim b_n \pm d_n$ . Per esempio,  $a_n = n + \sqrt{n} \sim n = b_n$ .

### Proposition Proprietà dell'o-piccolo

- Se  $a_n = o(b_n)$ , allora  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ ;

- Se  $a_n = o(b_n)$  e  $c_n = \mathcal{O}(d_n)$ , allora  $a_n c_n = o(b_n d_n)$ . Infatti,

$$\left| \frac{a_n c_n}{b_n d_n} \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \left| \frac{c_n}{d_n} \right|$$

che tendono entrambi a zero;

- Se  $a_n = o(b_n)$  e  $c_n = o(b_n)$ , allora  $a_n + c_n = o(b_n)$ . Infatti,

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{b_n}$$

che tendono entrambi a zero. Possiamo anche scrivere  $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$ ;

## 11.5 Esercizi

### Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1}{\sqrt{n^3+1} + \log n}$$

### Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2} + \cos(1/n) + \log n}{(n + \sqrt{n})^2 - \sqrt{n}}$$

### Esercizio

$$a_n = \log\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \log n}\right)\right) \left(\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2\right)$$

### Esercizio

$$a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3 - \log n}{\sqrt{n^4 + n}}}$$

## 12 Serie numeriche

### Esercizio

Sia  $\{b_n\}$  una successione e sia  $\{b_{n \pm k_0}\}$  la successione traslata di  $\pm k$ . Dimostrare che  $\lim b_n$  esiste se e solo se  $\lim b_{n \pm k_0}$  esiste e che i limiti sono uguali.

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

### Proof Serie geometrica per Induzione

### Esempio

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{10} \right)^n$$

La serie ha ragione  $q = \frac{1}{10}$  e quindi

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2 \cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{7} \right)^{n+1} + \frac{2}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5}{7} \right)^{n+2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

### 12.1 Aritmetica delle serie

Le operazioni aritmetiche sulle serie sono giustificate a posteriori; se alla fine vi è una forma di indecisione non erano legali.



### Proposition

Un numero decimale può essere espresso come

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

### Esempio

Mostriamo che se  $x = N, a_1 a_2 \cdots a_k \bar{9}$  dove  $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e  $a_k < 9$ , allora  $x = N a_1 a_2 \cdots (a_k + 1)$ . Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
x &= N + \left( \sum_{j=1}^k a_j \cdot 10^{-j} \right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\
&= N + \left( \sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \sum_{h=0}^{\infty} 10^{-h} \\
&= N + \left( \sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} \\
&= N + \left( \sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + 10^{-k} (a_k + 1)
\end{aligned}$$

Ciò può essere esteso ad ogni base.

### Corollario

Se  $a_n = o(b_n)$  cioè

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

per definizione di limite, fissato  $\varepsilon = 1$ , esiste  $n_0$  tale che  $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$  e quindi si applica il confronto.

### Esercizio

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1 + 1/n)^n + \sin n}{(n + \sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Notiamo che  $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$ . Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3 \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con  $p = 1$ , allora la serie diverge.

### Esempio Teorema di condensazione

È possibile applicare il teorema di condensazione alla serie armonica e ottenere che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

che è una serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2^{p-1}}$  che converge se e solo se  $p > 1$ .

### Teorema Rapporto di radici

Sia  $\sum a_n$  una serie a termini  $\geq 0$  e supponiamo che una delle due condizioni sia soddisfatta:

1.  $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0; +\infty]$ ;
2.  $a_n > 0$  definitivamente e  $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = h \in [0; +\infty]$ ;

Allora se  $L < 1$  la serie converge, mentre se  $L > 1$  allora  $a_n \rightarrow \infty$ .

Se  $L = 1$  il test è **inconclusivo**.

La condizione della radice è più potente in quanto implica anche l'altra.

Infatti, con la p-serie armonica il limite tende a 1, il che coincide con il fatto che la serie converge se  $p > 1$  e diverge altrimenti.

### Corollario

Sia  $\{a_n\}$  una successione con  $a_n \geq 0$ . Se

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

oppure se il limite esiste e  $a_n \neq 0$  definitivamente, allora se  $L < 1$ , la serie converge e  $a_n \rightarrow 0$  e se  $L > 1$  allora  $a_n \rightarrow +\infty$ .

### Proof

Consideriamo il primo caso cosicché

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

Per definizione di limite,  $\forall \varepsilon > 0$  fissato  $\exists N$  tale che

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$$

Se  $L < 1$ , esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $L + \varepsilon < 1$  (basta scegliere  $\varepsilon = (1 - L)/2$ ). Dalla disequazione  $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$  deduciamo che

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n < (L + \varepsilon)^n$$

e poiché  $L + \varepsilon < 1$  la serie converge per confronto con la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$$

Se  $L > 1$  allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $L - \varepsilon > 1$ , come per esempio  $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ , quindi per  $n \geq N$  abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} > (L - \varepsilon) > 1$$

elevando alla  $n$  otteniamo  $a_n > (L - \varepsilon)^n \rightarrow +\infty$  e per confronto  $a_n \rightarrow +\infty$ . In particolare,  $a_n$  non tende a zero e la serie diverge per il criterio del termine ennesimo.

Per il secondo caso,  $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  come nel caso precedente. Quindi  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Sappiamo per esempio che  $L > 1$  cosicché come nel caso precedente possiamo scegliere  $\varepsilon$  tale che  $L - \varepsilon > 1$  e abbiamo che  $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1 > 0$$

$\forall n \geq N$  moltiplicando i termini membro a membro

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_N} \geq (L - \varepsilon)^{n-N+1}$$

Ciascuno di questi è più grande di  $L - \varepsilon$ . Quindi,

$$a_{n+1} \geq (L - \varepsilon)^{-N+1} \cdot (L - \varepsilon)^n \cdot a_N \rightarrow +\infty$$

e per confronto  $a_n \rightarrow +\infty$ .

### Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con  $A > 0$ . Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \rightarrow 0$$

Quindi la serie converge, e converge a  $e^A - 1$ .

### Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotico. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad  $e$ . Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora  $(\log n)^n = e^{n \log \log n}$ . Allora chiaramente  $e^{n^2}$  domina sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo  $n^n = e^{n \log n}$  come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log \log n - n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2} \right\}}{e^{3n \log n} \left\{ 1 + e^{-2n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n \log n} \right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n \log n}}$$

Allora

$$e^{n \log \log n - n^2} = e^{-n^2 \left\{ 1 - \frac{\log \log n}{n^2} \right\}} \rightarrow \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left( e^{n^2 - 3n \log n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{n \left( 1 - \frac{3 \log n}{n} \right)} \rightarrow \infty > 1$$

### Esempio

Studiare il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n \log n}}{(2n)!}$$

che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che  $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$  e  $(n+1) \log(n+1) = n \log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$ . Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1) \log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n \log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n) + \log(n+1)}}{n^{n \log n}} \end{aligned}$$

Con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$

troviamo

$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} (n+1)^{\log(n+1)}$$

Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$

Il criterio della radice non funziona. Infatti,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$

Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come

$$\begin{aligned} n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n} \log(n^{\log n})} \\ &= e^{\frac{1}{2} (\log n)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Allora il limite è  $L = 1$ , quindi il criterio è inconclusivo. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^{\sqrt{n} \log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n} \log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

### Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2 \log n - \sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2 \log n - \sqrt{n} \log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{2 \log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \rightarrow -\infty \right\}$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

## 12.2 Formula di Stirling

### Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie converge.

Con radici abbiamo

$$\begin{aligned} \left[ \frac{n^n}{(2n)!} \right]^{1/n} &= \frac{n}{\left[ (2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n} (1 + o(1)) \right]^{1/n}} \\ &= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2} (4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} (1 + o(1))^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

E quindi converge

### Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + n^n}{(n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n \log n} = e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log n - n^2} \right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned} (n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= (n^2)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} \left\{ 1 + o(1) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - 2n^2 \left\{ \dots \right\}} \right\} \\ &\sim e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} = (n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2} \end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{(n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che  $\sum a_n$  ha lo stesso carattere di  $\sum b_n$  e

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{(n^2)^n e^{-n} (2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}} \\ &= \frac{e^{2n}}{n^{2n} (2n)^{1/n} n^{1/n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

## 12.3 Serie a termini di segno qualunque

Con serie di segno qualunque non è possibile applicare il criterio asintotico.

Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa (o in uno spazio metrico) e supponiamo che esista finito il limite  $\lim_n a_n = L \in \mathbb{F}$ . Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Quindi, se  $n, m > N$ , allora

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon$$

### Definizione Successione di Cauchy

Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Si dice che  $\{a_n\}$  soddisfa la condizione (C) di Cauchy, o più brevemente che è una successione di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \mid \forall n, m \geq M, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per quanto visto sopra, se  $a_n \rightarrow L$  finito, allora  $\{a_n\}$  è di Cauchy.

### Teorema

Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Sono equivalenti:

1.  $\exists$  finito

$$\lim_n a_n = L$$

2.  $\{a_n\}$  è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che (1) implica (2). Il converso, vale in  $\mathbb{R}$  ma non in  $\mathbb{Q}$ .

### Proposition

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie reali o complessa e sia  $\{S_n\}$  la successione delle sue somme parziali. Per definizione,  $\sum a_n$  converge a  $S$  se esiste finito  $\lim_n S_n \in \mathbb{R}$ .

### Corollario

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie  $\sum a_n$  converga e che la successione delle somme parziali soddisfi le condizioni di Cauchy, scritte in 3 modi equivalenti:

- 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N, |S_n - S_m| < \varepsilon$$

equivalentemente notando che se  $n > m$ ,

$$S_n - S_m = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=m+1}^n a_k$$

- 2.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n > m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n \geq m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

### 3. condizione più usata:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall m, n \geq N \wedge \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

con  $0 < p \leq 1$  converge ma non assolutamente. La serie converge per  $p > 0$ .

#### **Lemma** disuguaglianza triangolare generalizzata

Sia  $\{b_k\}$  una successione, allora

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |b_k|$$

#### **Proof**

Per induzione

- il caso base è banale;
- 

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right| &= \left| \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) + b_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| + |b_{n+1}| \\ &= \sum_{k=1}^n |b_k| + |b_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |b_k| \end{aligned}$$

#### **Proof** Teorema fondamentale

Sapendo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

la tesi è che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converga equivalentemente soddisfa le condizioni di Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq m \geq N, \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \varepsilon$$

Per ipotesi  $\sum |a_k|$  converge quindi soddisfa la condizione di Cauchy e dato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq m \geq N$

$$\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \varepsilon$$

Ma per il lemma  $\forall n \geq m \geq N$ ,

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$$



Quando abbiamo una serie che non ha termini solo positivi, la prima cosa da fare è mettere il modulo e controllare la convergenza assoluta.

### Esempio

Considera

$$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$

che non ha termini solo positivi. Allora proviamo a studiare la convergenza assoluta.

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$$

Poiché  $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  e  $\sum \frac{1}{n^2 \leq +\infty}$  converge (p-serie), allora la serie dei moduli converge assolutamente e quindi converge.

Vale lo stesso procedimento per

$$\sum \frac{\sin n}{n^p}$$

con  $p > 1$ . Se  $p \leq 1$ , allora diverge. Ciò segue dal fatto che, per esempio,  $|\sin x| > \frac{1}{2}$  se  $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Notiamo che l'intervallo

$$I_k = \left[ \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right]$$

ha lunghezza  $\frac{2\pi}{3} > 1$ , quindi conviene un intero  $n$ , in realtà 2 interi in quando la lunghezza è maggiore di 2. Allora la serie

$$\sum \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$$

dove  $n_k$  è un intero in ognuno di  $I_k$ . Ciò è maggiore o uguale di

$$\sum \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

in quanto il valore a denominatore è al minimo  $\frac{5}{6}\pi + k\pi$ . Allora troviamo un multiplo della serie armonica, che diverge.

### Esempio

Considera

$$\sum \frac{-n + (\sin n)n^2 - \log n}{(1+n)^{10/3} - \cos n}$$

allora guardiamo il modulo:

$$|a_n| = \frac{|-n + (\sin n)n^2 - \log n|}{|(1+n)^{10/3} - \cos n|}$$

Maggioriamo rendendo più piccolo il denominatore e più grande il numeratore.

$$|a_n| \leq \frac{n + n^2|\sin n| + |\log n|}{(1+n)^{10/3} - 1}$$

Notiamo che  $(1+n)^{10/3} - 1 \geq \frac{1}{2}(1+n)^{10/3} > \frac{1}{2}n^{10/3}$  perché  $n = 1$  dà il valore massimo. Quindi

$$|a_n| \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{\log n}{\frac{1}{2}n^{10/3}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 2 \sum n^{-\frac{7}{8}} + 2 \sum n^{-\frac{4}{3}} + 2 \sum_{n=2} \frac{1}{n^{10/3} (\log n)^{-1}}$$

Tutti i termini convergono e quindi la serie converge.

Perché il teorema valga basta che  $a_n \geq 0$  e  $a_n \geq a_{n+1}$  valgano definitivamente. In tal caso la stima dell'errore vale solo per  $n$  sufficientemente grande.

### Esempio

Si può applicare il teorema a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

e notare che la serie converge semplicemente ma non assolutamente per ogni  $0 < p \leq 1$ .

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^4} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché  $\forall n \geq 1$ ,  $a_n \leq \frac{1}{n^2}$  e quindi  $p = 2 > 1$  e quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge. Tuttavia, è chiaro che  $\forall n$ ,  $a_{2n+1} < a_{2n+2}$ .

**Nota:**  $a_n \sim b_n$  e  $b_n$  monotona crescente non implica necessariamente che  $a_n$  sia monotona decrescente.

Infatti,

### Esempio

Consideriamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

e  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . È chiaro che  $b_n$  è strettamente monotona decrescente. Inoltre,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ 1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

Verifichiamo allora che

$$a_{2k} > a_{2k-1}$$

Infatti,  $a_n$  non può essere definitivamente monotona decrescente in quanto se  $a_n$  fosse definitivamente monotona decrescente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

per il teorema di Leibniz sarebbe convergente. Tuttavia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

dove il secondo addendo chiaramente diverge. Allora, la serie di partenza diverge, nonostante il primo addendo converga.

### Esempio Stima errore teorema Leibniz

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

con un errore minore di  $10^{-3}$ . Abbiamo allora

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

La serie converge assolutamente per il criterio della radice e per il criterio del rapporto. La serie è a termini alterni,  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_{n+1} < a_n$ , quindi vale la condizione per il teorema di Leibniz. Per l'errore abbiamo

$$\forall N, |E_N| = |S - S_N| < \frac{1}{(N+1)!}$$

Se noi imponiamo che  $\frac{1}{(N+1)!} < 10^{-3}$  certamente  $|E_N| < 10^{-3}$ . Dobbiamo usare almeno  $N = 6$  per ottenere  $(N+1)! = 5040 > 1000$ . Allora,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{6!} = S_6$$

che ha un errore minore o uguale di  $\frac{1}{6!}$ .

### Esempio

Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

la serie ha termini alterni con  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ . Controlliamo la convergenza assoluta:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

e

$$\sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

in quanto  $p = \frac{1}{2} \leq 1$  e quindi non converge assolutamente. Vogliamo ora usare il teorema di Leibniz. Le condizioni sono soddisfatte in quanto  $a_n \geq 0$  e  $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Verifichiamo esplicitamente

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n-1}}{n+2} \\ &= \frac{\sqrt{n}(n+2) - (n+1)\sqrt{n-1}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Studiamo allora quando il numeratore è maggiore di zero.

$$\sqrt{n}(n+2) \geq (n+1)^{3/2}$$

Siccome i termini sono tutti positivi, possiamo fare il quadrato

$$\begin{aligned} n(n+2)^2 &\geq (n+1)^3 = n^3 + 4n^2 + 4n \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

che è sempre vero. Alternativamente, potremmo fare il limite con  $n \rightarrow \infty$  del numeratore

$$\sqrt{n}(n+2) - (n+1)^{3/2} = n^{3/2} \left\{ 1 - \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} \right\}$$

Abbiamo che

$$\frac{2}{n} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} = \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \sim (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\} &= \frac{2}{n} - \frac{3}{2} \frac{1}{n} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{3}{2} \frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} + o(1) \right\} \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Adesso, per permanenza del segno, il fatto che il numeratore tenda ad infinito, implica che sia maggiore di zero definitivamente. Allora, possiamo utilizzare il teorema di Leibniz. Alternativamente, se non riusciamo a mostrare che i termini siano decrescente, abbiamo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

e  $b_n$  è decrescente. Allora, scriviamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \left( \sqrt{n}n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Cosifacendo, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^i nfty (-1)^n a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \left( \frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Se non ci sono forme di intedeterminazione nel membro di destra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge semplicemente ma non assolutamente per il teorema di Leibniz. La seconda serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

ha modulo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} \\ &= \frac{(n+1) - \sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{n^{3/2}(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\sum (-1)^n a_n$$

converge come somma di

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che converge semplicemente ma non assolutamente e

$$\sum (-1)^n \left( \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

che converge assolutamente e la convergenza non può essere assoluta perché se  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  convergono assolutamente allora  $\sum (a_n + b_n)$  converge assolutamente. Infatti,

$$\sum |a_n - b_n| \leq \sum (|a_n| + |b_n|) = \sum |a_n| + \sum |b_n| < +\infty$$

## 12.4 Serie con parametri

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} (x^2 - x - 2)^2$$

Controlliamo la positività

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

per  $x \leq -1 \vee x \geq 2$ , altrimenti i termini sono alterni. Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio di radice/rapporto

$$\left| \frac{\log n}{n+1} (x^2 - x - 2) \right|^{1/n} = \frac{(\log n)^{1/n}}{[n(1+1/n)]^{1/n}}$$

Scriviamo che  $(\log n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log \log n} \rightarrow 1$  e  $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  (limite notevole) e

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

Quindi  $|x^2 - x - 2| = L$  e se  $L < 1$ , la serie converge assolutamente, se  $L > 1$  il modulo del termine generale diverge e la serie non converge e diverge dove è a termini non-negativi. Dobbiamo allora risolvere la disequazione  $L < 1$

$$|x^2 - x - 2| < 1$$

Siccome  $|t| < a \iff -a < t < a$  scriviamo che ciò è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 1 \\ x^2 - x - 2 > -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima sono

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

mentre della seconda

$$x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Allora abbiamo che la serie converge assolutamente in  $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  e  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ . Se  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , la serie non converge (presumibilmente oscilla ma bisognerebbe mostrarlo). Invece, se  $x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  oppure  $x > \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$  la serie non converge ed è a termini positivi, quindi diverge necessariamente. Manca ancora il caso per cui  $L = 1$ . In tale caso,  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  oppure  $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ . Nel caso in cui  $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$  sappiamo che  $x^2 - x - 2 = 1$  e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

con

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} = \frac{\log n}{n(1+1/n)} \sim \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(\log n)^{-1}}$$

che è quindi una p-q serie con  $p = 1$  e  $q > 1$ , quindi la serie diverge. Invece, se  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  abbiamo che  $x^2 - x - 2 = -1$  e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$$

che non converge assolutamente (caso di prima). Tuttavia,

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} \sim \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

Controlliamo ora i criteri per il teorema di Leibniz: verifichiamo se  $a - a_{n+1} \geq 0$  definitivamente

$$\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)\log n - (n+1)\log(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

il numeratore è dato da

$$\begin{aligned} (n+2)\log n - (n+1) \left[ \log n + \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] &= \log n - (n+1) \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\sim \log n - (n+1) \frac{1}{n} \rightarrow +\infty - 1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

siccome  $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Quindi, per la permanenza del segno il numeratore è definitivamente non-negativo. Valgono quindi le condizioni per il teorema di Leibniz, e quindi la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left( \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n$$

La serie è a termini non-negativi quando  $x-1 < 0$  cioè  $x < 1$ . Studiamo allora la convergenza assoluta

$$\sum \left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left( \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|$$

appliciamo il criterio della radice n-esima

$$\left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left( \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|^{1/n} = \frac{2 \left( 1 + \frac{\log n}{2^n} \right)^{1/n}}{n^{1/n} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{1/n}} \cdot \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} \rightarrow \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = L$$

Se  $L < 1$ , la serie converge assolutamente. Se  $L > 1$ , il modulo del termine generale diverge, e quindi la serie non converge e infatti diverge dove è a termini di segno non-negativo. Se  $L = 1$  il test è inconclusivo. Abbiamo allora

$$L = \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} < 1 \iff 2|x-1| < \sqrt{x^2+4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) &< x^2 + 4 \\ 3x^2 - 8x &< 0 \\ x(3x - 8) &< 0 \end{aligned}$$

allora la soluzione è  $0 < x < \frac{8}{3}$ . In questo intervallo, la serie converge assolutamente. Se  $x < 0$  o  $x > \frac{8}{3}$  la serie non converge. Poiché è a termini positivi per  $x \leq 1$  se  $x < 0$  la serie diverge. Per  $x > \frac{8}{3}$  la serie non converge e nient'altro si può dire senza ulteriore studio. Se  $x = 0$  o  $x = \frac{8}{3}$  abbiamo  $L = 1$  e il criterio è inane. Per tali valori,

$$\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = 1$$

poiché

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

è negativo in  $x = 0$  e positivo in  $x = \frac{8}{3}$ , concludiamo che per  $x = 0$ ,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = -\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$

Invece, per  $x = \frac{8}{3}$  abbiamo che

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = +\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$



Nel caso  $x = 0$  la serie è a termini positivi e

$$a_n = \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

e la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Nel caso  $x = \frac{8}{3}$  la serie è

$$\sum (-1)^n a_n$$

che non converge assolutamente. Vorremmo usare il teorema di Leibniz. La successione  $a_n$  è decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{\log n}{2^n(n + \sqrt{n})} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{2^n(n + \sqrt{n})}$$

la prima serie converge sicuramente per Leibniz. La seconda serie, poiché  $\frac{\log n}{n + \sqrt{n}} \rightarrow 0$ , possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2^n} \frac{\log n}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$$

definitivamente, e  $\sum \frac{1}{2^n}$  converge in quanto è una serie geometrica. Quindi, la seconda serie converge assolutamente e concludiamo che la serie assegnata converge per  $x = \frac{8}{3}$ .

### Teorema Teorema di Dirichlet

Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

be a series where:

1.  $a_n \geq 0$ ;
2.  $a_n \rightarrow 0$ ;
3.  $a_n \geq a_{n+1}$ ;
4. Let

$$\sum_{k=1}^n b_k$$

there exist  $M$  such that  $\forall n, |B_n| \leq M$

Then, the series converges.

Dimostrazione per lode.

Il teorema di Leibniz è quindi un corollario di questo teorema.

### Proposition Prodotto di serie secondo Cauchy

Date due serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  con rispettiva somme parziali  $A_N$  e  $B_N$ , vogliamo definire una serie prodotto  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  con somme parziali  $C_N$  in modo che se  $A_N \rightarrow A$  e  $B_N \rightarrow B$ , allora  $C_N \rightarrow AB$ . Per trovare la forma di questa serie consideriamo

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) = a_0b_0 + x(a_0b_1 + a_1b_0) + x^2(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

Definiamo quindi il prodotto di serie secondo Cauchy con

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

### Teorema Teorema di Mertens

Date due serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  convergenti rispettivamente con somma  $A$  e  $B$  e supponiamo che almeno una delle due converga assolutamente. Allora, la serie prodotto converge a  $AB$ .

Dimostrazione per lode. È importante che almeno una delle due deve convergere assolutamente.

Mostriamo che  $e^x e^y = e^{x+y}$  usando il prodotto secondo Cauchy delle espansioni di Taylor.

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j \cdot y^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= e^{x+y} \end{aligned}$$

L'espansione di Taylor ci permette di estendere la funzione esponenziale ai valori complessi.

## 12.5 Teorema delle permutazioni di Riemann

TODO: esempi

### Definizione Convergenza incondizionale

Una serie è incondizionatamente convergente se ogni serie permutata ha la stessa somma.

### Teorema

Sia consideri la serie  $\sum a_n$ :

1. Se  $a_n \geq 0$  allora ogni permutazione  $\sum a_{\sigma(n)}$  ha lo stesso carattere e la stessa somma;
2. Se  $\sum |a_n| < +\infty$  allora  $\sum |a_{\sigma(n)}| < +\infty$  e ha la stessa somma.
3. Teorema di Riemann: se  $\sum a_n$  converge solo semplicemente, allora:
  - (a)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , esiste una serie permutata con valore  $\lambda$ ;
  - (b) esiste una permutazione  $\sigma$  tale che  $\sum a_{\sigma(n)}$  oscilla.

### Corollario

Una serie numerica è incondizionatamente convergente se e solo se è assolutamente convergente.

### Proof Punto I

Sia  $a_n \geq 0$  e sia  $\sigma$  una permutazione di  $\mathbb{N}$  arbitraria e consideriamo la serie permutata  $\sum a_{\sigma(n)}$  e sia

$$A_N = \sum_{k=1}^N a_n \quad B_N = \sum_{k=1}^N b_n$$

Notiamo che per ogni  $n$  esiste  $N$  tale che

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$$

Cosicché

$$B_N = \sum_{k=1}^N a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^N a_k = A_N \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Passando limite otteniamo

$$\lim B_N = B = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Notando che, se  $\sigma^{-1}$  è la permutazione inversa, per ogni  $n$

$$a_n = a_{\sigma^{-1}(n)}$$

lo stesso ragionamento mostra che

$$A = \sum a_n \leq B = \sum a_{\sigma(n)}$$

e quindi vale  $A = B$ .

Punto II lode.

### Proof Teorema di Riemann (dimostrazione concettuale)

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie convergente solamente semplicemente e poniamo

$$\forall n, p_n = \begin{cases} a_n & a_n > 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases} \quad q_n = \begin{cases} a_n & a_n < 0 \\ 0 & a_n \geq 0 \end{cases}$$

Cosicché  $\forall n, a_n = p_n - q_n$  e  $|a_n| = p_n + q_n$ . Poiché  $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n = +\infty$  mentre  $\sum a_n = \sum (p_n - q_n)$  converge, deve essere che sia  $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$  (devono divergere entrambe). Se solo una divergesse, spezzandola la serie avrebbe una parte che converge e una che diverge, quindi la differenza divergerebbe, ma la differenza deve convergere. Siccome  $a_n \rightarrow 0$  allora  $p_n \rightarrow 0$  e  $q_n \rightarrow 0$ . Siccome entrambe le serie divergono, io posso creare una permutazione per giungere a qualsiasi cosa. Supponiamo che il primo termine sia 0. Possiamo definire  $p_n$  e  $q_n$  tale che la somma sale sopra uno e scende sotto meno uno, all'infinito e oscillando. Oppure, posso farla oscillare ma avvicinandosi sempre di più a 0, e quindi il valore sarebbe zero.

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

che converge assolutamente per  $p > 1$ . Vogliamo studiare la convergenza semplice per  $0 < p \leq 1$ . Notiamo che se  $p \leq 0$ , allora il termine non tende a zero e la serie non converge. Applichiamo il teorema di Dirichlet con  $b_n = \sin n$  e  $a_n = \frac{1}{n^p}$ . Per applicare il teorema bisogna verificare che la successione  $\{b_n\}$  ha somme parziali limitate. Allora,

$$B_N = \sum_{k=1}^N \sin k$$

che è limitato se la consideriamo come serie geometrica con l'identità di Eulero.

## 13 Successioni, sottosuccessioni e topologia

### Definizione Sottosuccessione

Sia  $\{x_n\}$  una successione e sia  $\{n_k\}$  una successione strettamente crescente in  $\mathbb{N}$ . La successione  $\{x_{n_k}\}$  viene detta *sottosuccessione* di  $\{x_n\}$ .

### Teorema Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

Sia  $\{x_n\}$  una successione e sia  $\{n_k\}$  una successione strettamente crescente in  $\mathbb{N}$ . Sono equivalenti

1.  $\{x_n\} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ;
2. per ogni successione  $\{x_{n_k}\}$ ,  $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$ ;
3. da ogni sotto successione  $\{x_{n_k}\}$  di  $\{x_n\}$  si può generare una sottosuccessione  $\{x_{n_{k_j}}\} \rightarrow \lambda$ .

Notiamo che in generale se esiste una successione  $\{x_{n_k}\}$  che tende a  $\lambda$ , niente si può dire di  $\{x_n\}$ . Per esempio  $x_{2k} = (-1)^{2k} \rightarrow 1$  ma la successione non ammette limite.

### Proof Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

1. **(1)  $\implies$  (2):** dimostriamo che il primo punto implica il secondo. Supponiamo che  $x_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ . Per definizione di limite per ogni intorno  $I$  di  $\lambda$  di raggio  $\varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n \in I$ . Sia ora  $\{x_{n_k}\}$  una sottosuccessione. Poiché  $n_k$  è strettamente crescente  $\forall k, n_k \geq k$ . Quindi se  $k \geq N$ ,  $n_k \geq N$  da cui  $x_{n_k} \in I$  e per definizione  $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$  con  $k \rightarrow \infty$ .
2. **(2)  $\implies$  (3):** il secondo punto implica il terzo: se  $x_{n_k} \rightarrow \lambda$  per quanto appena visto ogni sua sottosuccessione tende a  $\lambda$  e quindi il punto vale.
3. **(3)  $\implies$  (1):** dimostriamo ora che il terzo punto implica il primo. Se per ogni sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  esiste una sottosuccessione  $\{x_{n_{k_j}}\}$  tale che  $\{x_{n_{k_j}}\} \rightarrow \lambda$  abbiamo  $\{x_n\} \rightarrow \lambda$ . Dimostriamo la contronominale. Dimostriamo quindi che se  $\{x_n\}$  non tende a  $\lambda$ , allora esiste una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  tale che nessuna sua sottosuccessione tende a  $\lambda$ . Il fatto che  $\{x_n\}$  non tenda a  $\lambda$ , per negazione della definizione è  $\exists I_0(\lambda), \forall N \exists n \geq N$  tale che  $x_n \notin I_0$ . Costruiamo tale sottosuccessione. Scegliamo  $N = 1$ . Per il primo punto,  $\exists n_1 \geq 1 \mid x_{n_1} \notin I_0$ . Sia poi  $N = n_1 + 1$ . Per il primo punto,  $\exists n_2 \geq n_1 + 1 \mid x_{n_2} \notin I_0$ . Iterando il procedimento si ottiene una successione  $n_k$  tale che  $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$  e  $x_{n_k} \notin I_0$  per tutte le  $k$ . Poiché  $\{x_{n_k}\} \notin I_0$ , nessuna sua sottosuccessione può tendere a  $I_0$ .

### Corollario

Sia  $\{x_n\}$  una successione. Allora:

1. se  $\exists \{x_{n_k}\} \mid x_{n_k}$  non ha limite, allora  $\{x_n\}$  non ha limite;
2. se  $\exists \{x_{n_k}\}$  e  $\{x_{n_j}\}$  tale che  $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$  e  $\{x_{n_j}\} \rightarrow \mu$  con  $\lambda \neq \mu$  allora  $\{x_n\}$  non ha limite;
3. se  $\{x_{2k}\}$  e  $\{x_{2k+1}\}$  tendono allo stesso limite  $\lambda$ , allora  $\{x_n\} \rightarrow \lambda$  (o suddividendo in qualsiasi altra partizione disgiunta).

### Teorema Punti di chiusura e successioni

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

1. Sono equivalenti:
  - (a)  $x_0$  è punto di accumulazione per  $E$ ;
  - (b)  $\exists \{x_n\} \subseteq E$  tale che  $\forall n, x_n \neq x_0$  e  $x_n \rightarrow x_0$ ;
2. Sono equivalenti:
  - (a)  $x_0 \in \bar{E}$ ;
  - (b)  $\exists \{x_n\} \subseteq E$  tale che  $x_n \rightarrow x_0$ .

### Proof

1. **(1.a)  $\implies$  (1.b)**: supponiamo che  $x_0$  sia di accumulazione. Per definizione  $\forall I$  intorno di  $x_0$ , esiste  $x \in I \cap E$  con  $x \neq x_0$ . In particolare,

$$\forall I_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}\right), \exists x_n \neq x_0 \mid x_n \in E \cap I_n$$

cioè  $x_n \in E$  e  $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$  che per il teorema dei carabinieri converge a  $x_0$ .

2. **(1.b)  $\implies$  (1.a)**: supponiamo che

$$\exists \{x_n\} \subseteq E \mid \forall n, x_n \neq x_0 \wedge x_n \rightarrow x_0$$

Allora per ogni intorno  $I$  di  $x_0$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n \in (I \cap E) \setminus \{x_0\}$  e per definizione  $x_0$  è di accumulazione.

3. **(2.a)  $\implies$  (2.b)**: Siccome  $x_0 \in \overline{E}$  si presentano due casi:
  - (a)  $x_0 \in E$ : basta porre  $\forall n, x_n = x_0$  e  $\{x_n\} \subseteq E$  quindi  $x_0 \rightarrow x_0$ ;
  - (b)  $x_0 \notin E$ : ciò implica che  $x_0 \in E'$  e per il primo punto  $\exists \{x_0\} \subseteq E$  tale che  $\forall n, x_n \neq x_0$  e  $x_n \rightarrow x_0$ .
4. **(2.b)  $\implies$  (2.a)**: esercizio.

### Teorema Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  e siano  $\lambda = \inf E$  e  $\mu = \sup E$ . Allora, esistono successioni  $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq E$  tale che  $\{x_n\} \rightarrow \lambda^+$  e  $\{y_n\} \rightarrow \mu^-$ .

### Proof Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso dell'inf. Dobbiamo considerare due casi distinti:

1.  $\lambda > -\infty$ : per definizione di  $\lambda = \inf E$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \mid \lambda \leq x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$$

Ponendo  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  si trova quindi  $x_n \in E$  tale che  $\lambda \leq x_n < \lambda + \frac{1}{n}$ . Per il teorema dei carabinieri,  $x_n \rightarrow \lambda^+$ .

2.  $\lambda = -\infty$ : per definizione  $E$  non è limitato inferiormente. Quindi,  $\forall n, -n$  non è minorante e per tanto  $\forall n, \exists x_n \in E$  con  $x_n < -n$ . Allora, chiaramente  $x_n \rightarrow -\infty$  per confronto.

### Corollario

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  limitato sup (e inferiormente). Allora:

1.  $\sup E = \mu \in \overline{E}$  e  $\inf E = \lambda \in \overline{E}$ ;
2. se  $E$  è limitato superiormente (o inferiormente), allora  $E$  ammette massimo (o minimo).

### Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia  $\{x_n\}$  una successione limitata in  $\mathbb{R}$ . Allora, da  $\{x_n\}$  si può estrarre una sottosuccessione convergente.

### Proof Dimostrazione 1

Si danno due casi:

1.  $\{x_n\}$  assume infinite volte lo stesso valore  $x_0$ . Allora  $\{n_k\}$  è la successione tale che  $x_{n_k} = x_0$  banalmente  $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0$ .
2.  $\{x_n\}$  non assume infinite volte lo stesso valore, quindi assume infiniti valori distinti. Poiché  $\{x_n\}$  è limitata esiste un intervallo  $I_0 = [a; b]$  tale che  $x_n \in I_0$ . Consideriamo il punto

medio  $m_0 = \frac{a+b}{2}$  e i due sottointervalli  $[a; m_0]$  e  $[m_0; b]$ . Almeno uno dei due intervalli deve contenere infiniti valori. Scegliamo allora quest'ultimo come  $I_1 = [a_0, b_0]$  e iteriamo. Consideriamo quindi gli intervalli  $I_n$  dove chiaramente

$$I_{n+1} \subseteq I_n \text{ and } l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n) = \frac{1}{2^n}l(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$$

e costruiamo la sottosuccessione nella seguente maniera: sia  $n_1$  il primo  $n$  tale che  $x_n \in T_1$ . Consideriamo  $I_2$  che contiene infiniti valori della successione. Allora  $n_2$  è il primo  $n > n_1$  tale che  $x_{n_2} \in I_2$ , e così via. Allora la sottosuccessione converge per l'assioma di continuità. Dato  $\varepsilon > 0$  si scelga  $j$  tale che  $\frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$  e si conclude che  $\forall k \geq j, |x_{n_k} - x_0| \leq \frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$  e per definizione  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ .

### Lemma Lemma di Polya

Sia  $\{x_n\}$  una successione reale. Allora da tale successione si può estrarre una sottosuccessione monotona.

### Proof Dimostrazione 2

Per il lemma di Polya, da  $\{x_n\}$  estraggo una sottosuccessione monotona  $\{x_{n_k}\}$  che quindi ha limite  $\lambda$ . Poiché  $\{x_{n_k}\}$  è limitata,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Proof Lemma di Polya

Sia  $\{x_n\}$  una qualunque successione reale e sia  $S = \{n \mid \forall m \geq n, x_m \geq x_n\}$  un insieme di indici. Si presentano due casi mutualmente esclusivi

1.  $S$  è infinito. Allora  $S$  ha forma  $\{n_1, n_2, \dots\}$ . Per definizione di  $S$ , per ogni  $k$  abbiamo  $\forall m \geq n, x_{n_k} \leq x_m$ . In particolare  $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$  e  $\{x_{n_k}\}$  è monotona crescente.
2.  $S$  è finito (eventualmente vuoto) esiste una  $N$  tale che  $\forall n \geq N, n \notin S$ . Sia  $n_1 = N \notin S$  per definizione di  $S$  esiste  $n_2 > n_1$  tale che  $x_{n_2} < x_{n_1}$  con  $n_2 \notin S$  per definizione  $\exists n_3 < n_2$  tale che  $x_{n_3} < x_{n_2}$ . Iterando troviamo una sottosuccessione  $x_{n_k}$  strettamente decrescente.

### Teorema Equivalenza convergenza e Cauchy

Una successione  $\{x_n\}$  reale converge se e solo se è di Cauchy.

### Lemma

Sia  $\{x_n\}$  una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Allora:

1. la successione è limitata;
2. se  $\{x_n\}$  ammette una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $\{x_{n_k}\} \rightarrow L$ , allora  $\{x_n\} \rightarrow L$ .

### Proof Dimostrazione del lemma

1. Per definizione di successione di Cauchy con  $\varepsilon = 1$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n, m \geq N$ , si ha  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . In particolare,  $\forall n \neq N$  (con  $m = N$ ), si ha che

$$|x_n - x_N| < 1$$

da cui

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < |x_N| + 1, \quad \forall n \neq N$$

e quindi posto  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$  risulta quindi  $\forall n, |x_n| \leq M$  e quindi  $\{x_n\}$  è limitata.

2. Sia  $\{x_n\}$  di Cauchy e supponiamo che esista  $\{x_{n_k}\}$  sottosuccessione di  $\{x_n\}$  tale che  $\{x_{n_k}\} \rightarrow L$ . La tesi è che  $x_n \rightarrow L$ . Per ipotesi, fissati  $\varepsilon > 0$ ,

$$\exists N \mid \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

$(\{x_n\})$  è di Cauchy

$$\exists K \mid \forall k \geq K, |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

$(\{x_{n_k}\} \rightarrow L)$ . Sia quindi  $n \geq N$  e fissiamo  $k \geq \max\{K, N\}$  cosicché  $k \geq N \implies n_k \geq k \geq N$ . Pertanto, vale  $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$ . Quindi

$$\forall n \geq N, |x_n - L| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - L)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| \leq 2\varepsilon$$

e quindi per definizione  $x_n \rightarrow L$ .

### Proof Equivalenza convergenza e Cauchy

La successione  $\{x_n\}$  è limitata per il lemma. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass  $\{x_n\}$  ha una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  che converge a  $L \in \mathbb{R}$ . Per il secondo punto del lemma,  $x_n \rightarrow L$  e quindi converge.

La definizione di una successione di Cauchy è la stessa nei complessi e anche quella di convergenza. Vale sempre il medesimo teorema.

In particolare, mostriamo che se è di Cauchy, allora converge. Notiamo che, dato un numero complesso  $w$  banalmente

$$\begin{cases} |\Re w| \\ |\Im w| \end{cases} \leq |w| \leq |\Re w| + |\Im w|$$

Mostriamo che  $z_n \rightarrow \alpha$  se e solo se  $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$  e  $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$ . Infatti,

$$\begin{cases} |\Re z_n - \Re \alpha| \\ |\Im z_n - \Im \alpha| \end{cases} \leq |z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re \alpha| + |\Im z_n - \Im \alpha|$$

poiché  $z_n \rightarrow \alpha$  se e solo se  $|z_n - \alpha| \rightarrow 0$ , le dis di sind ice che se  $z_n \rightarrow \alpha$  allora  $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$  e  $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$ . Viceversa se  $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$  e  $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$  allora

$$|z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re \alpha| + |\Im z_n - \Im \alpha| \rightarrow 0$$

cosicché  $|z_n - \alpha| \rightarrow 0$  e  $z_n \rightarrow \alpha$ . Analogamente,  $\{z_n\}$  è di Cauchy se e solo se  $\{\Re z_n\}$  e  $\{\Im z_n\}$  sono di Cauchy. Siccome entrambe queste successioni sono di Cauchy nei reali, allora convergono. Quindi

$$\Re z_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \wedge \Im z_n \rightarrow \beta \in \mathbb{R} \implies z_n = \Re z_n + i \Im z_n \rightarrow \alpha + i \beta$$

Anche nei complessi le serie sono analoghe. Una serie converge se se la successione delle sue somme parziali converge. La serie diverge se il suo modulo tende a infinito. Se il limite delle somme parziali non esiste, la serie è oscillante.

La medesima convergenza e successione di Cauchy si estende a tutti gli spazi metrici.

**Importante:** in uno spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy, ma non necessariamente il contrario.

Per esempio, in  $(\mathbb{Q}, |r - s|)$  la successione  $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $r_n \rightarrow \sqrt{2}$ . Allora, questa successione è di Cauchy nei reali e anche nei razionali, in quanto la metrica è la stessa. Tuttavia, la successione non converge nello spazio metrico dato.

**Definizione Spazio metrico completo**

Uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni di Cauchy convergono.



## 14 Limiti

### Definizione

Sia  $E$  un insieme diciamo che  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$  è un punto di accumulazione esteso di  $E$  se o  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $\xi$  è un punto di accumulazione di  $E$  o  $\xi = \pm\infty$  e  $E$  è limitata superiormente/inferiormente.

Quindi  $\xi$  è un punto di accumulazione esteso di  $E$  se  $\exists \{x_n\} \subseteq E$  tale che  $x_n \rightarrow \xi$  con  $\forall n, x_n \neq \xi$ .

### Definizione Intorno puntato

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e sia  $I$  un intorno di  $x_0$ . L'insieme  $I \setminus \{x_0\}$  viene detto *intorno puntato* di  $x_0$ .

### Definizione Limite

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\xi$  un punto di accumulazione esteso per  $E$ . Diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

e per ogni intorno  $I$  di  $\mu$  esiste un intorno  $J$  di  $\xi$  tale che  $\forall x \in (J \setminus \{\xi\}) \cap E, f(x) \in I$ .

*Sintassi:* scriviamo anche  $f(x) \rightarrow \mu$  per  $x \rightarrow \xi$ .

Richiediamo che il punto sia di accumulazione esteso per esterne la definizione di limiti ai punti infiniti (stando nel dominio).

La definizione di limite non coinvolge il valore di  $f$  in  $\xi$ . In tal punto, la funzione non deve essere necessaria definita.

Se  $\mu, \xi \in \mathbb{R}$ , la definizione si specifica in:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E \cap [(\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}], f(x) \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$$

In questo caso  $I = (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$  e  $J = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ .

Equivalentemente, possiamo scrivere:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, x \neq \xi, |x - \xi| < \delta \implies |f(x) - \mu| < \varepsilon$$

Modificando tale espressione esplicitando le condizioni del valore assoluto, è possibile introdurre la definizione di limite da destra/sinistra da sotto (per difetto) e da sopra (per eccesso).

### Definizione Limite da sinistra

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \mu^+$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, \xi - \delta < x < \xi \implies \mu \leq f(x) < \mu + \varepsilon$$

Dalla definizione di limite, il limite esiste se e solo se il limite destro e quello sinistro esistono e coincidono.

Se  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $\mu = \pm\infty$ , gli intorno di  $\xi$  sono delle forma  $J = (\xi - \delta, \xi + \delta)$  e gli intorno di  $\pm\infty$  sono  $(+M, +\infty)$  e  $(-\infty, -M)$  con  $M > 0$ .

La definizione di  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \pm\infty$  diventa

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E \begin{cases} x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), x \neq \xi \\ \xi - \delta < x < \xi + \delta, x \neq \xi \\ 0 < |x - \xi| < \delta \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} f(x) \in (M, +\infty) \\ f(x) > M \end{cases}$$

Come nel caso precedente si possono definire  $\lim_{x \rightarrow \xi^+} = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \xi^-} = \pm\infty$ .

Se  $\xi = +\infty$  la definizione è uguale al limite delle successioni. Per  $\xi = -\infty$  è leggermente diversa.

### Esempio Limite

Dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3} = 2$$

Dobbiamo verificare che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall x \in \mathbb{R}$  abbiamo che  $0 < |x - 1| < \delta$  implica  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ . Prendiamo quindi  $\varepsilon > 0$ . Studiamo la disequazione

$$|\sqrt{x^2 + 3} - 2| < \varepsilon$$

e determiniamo un  $\delta > 0$  per cui la disequazione vale per ogni  $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$  e eventualmente  $x \neq 1$ . Vogliamo quindi

$$2 - \varepsilon < \sqrt{x^2 + 3} < 2 + \varepsilon$$

Supponiamo  $\varepsilon < 1$  e quindi  $2 - \varepsilon > 0$ . Siccome tutto è positivo, quadriamo e otteniamo

$$\begin{cases} (x^2 + 3) < (2 + \varepsilon)^2 \\ x^2 + 3 > (2 - \varepsilon)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \\ x^2 > 1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 \end{cases}$$

Quindi, la prima diventa  $|x| < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$ , mentre la seconda è sempre vera se  $1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < 0$ , e nel caso in cui sia maggiore o uguale a zero, allora  $|x| > \sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}$ . Scegliamo  $\varepsilon < \frac{1}{4}$  e allora  $1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$  e la disuguaglianza  $|\sqrt{x^2 + 3} - 2| < \varepsilon$  è equivalente a

$$\begin{cases} |x| < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2} \\ |x| > \sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} \end{cases}$$

Supponiamo ora che  $x > 0$ , data la natura del limite, quindi

$$\sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} < x < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$$

Scegliamo allora

$$\delta = \min\{\sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}, \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}\}$$

Il seguente teorema fa da ponte per permetterci di usare le proposizioni circa i limiti di successioni come limiti di funzioni.

### Teorema

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\xi$  un punto di accumulazione esteso per  $E$ . Sono equivalenti:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

2.

$$\forall \{x_n\} \subseteq E, \forall n, x_n \neq \xi \mid x_n \rightarrow \xi \implies f(x_n) \rightarrow \mu$$

### Proof

( $\implies$ ) Per ipotesi  $f(x) \rightarrow \mu$  per  $x \rightarrow \xi$ . Sia  $\{x_n\} \subseteq E$  con  $x_n \neq \xi$  per tutte le  $n$  e  $x_n \rightarrow \xi$ . Applichiamo la definizione di limite per dimostrare  $f(x) \rightarrow \mu$ . Sia  $I$  un intorno di  $\mu$ , la tesi è che  $\exists N$  tale che  $\forall n \geq N, f(x_n) \in I$ . Poiché  $f(x) \rightarrow \mu$  per  $x \rightarrow \xi$  per definizione  $\exists J$  intorno di  $\xi$  tale che  $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$  si ha  $f(x) \in I$ . Ma per ipotesi  $x_n \rightarrow \xi$  e  $\forall n, x_n \neq \xi$ , quindi  $\exists N$  tale che  $x_n \in I \cap J$  e  $x_n \in E$  quindi  $f(x_n) \in I$  come richiesto.

( $\impliedby$ ) Dimostriamo la contronominale. Supponiamo quindi che  $f(x)$  non tenda a  $\mu$  cioè esiste un intorno  $I_0$  di  $\mu$  tale che per ogni intorno  $J$  di  $\xi$ , esiste un punto  $x \neq \xi$  con  $x \in E \cap J$  tale che  $f(x) \notin I_0$ . Consideriamo  $\xi \in \mathbb{R}$  cosicché gli intorno di  $\xi$  abbiamo forma  $J = (\xi - \delta; \xi + \delta)$  e  $\exists$  intorno  $I_0$  di  $\mu$  tale che  $\forall \delta > 0$ , esiste  $x_\delta \in E \cap (\xi - \delta; \xi + \delta)$  e  $x_\delta \neq \xi$  tale che  $f(x_\delta) \notin I_0$ . Scegliamo ora  $\delta = \frac{1}{n}$  si ottiene quindi che  $\forall n, \exists x_n \in E$  con  $x_n \neq \xi$  con

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n}$$

tale che  $f(x_n) \notin I_0$ . Per il teorema dei due carabinieri  $x_n \rightarrow \xi$  con  $x_n \neq \xi$  e  $x_n \in E$  ma  $\forall n, f(x_n) \notin I_0$  cosicché  $f(x_n)$  non tenda a  $\mu$ . I casi  $\xi = \pm\infty$  è analogo e lasciato per esercizio.

## 14.1 Proprietà dei limiti

### Proposition Il limite, se esiste, è unico

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\xi$  un punto di accumulazione esteso di  $E$ . Il limite se esiste è unico.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lambda \wedge \exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \mu \implies \lambda = \mu$$

### Proof Il limite, se esiste, è unico

Poiché  $f(x) \rightarrow \lambda$ ,  $\forall \{x_n\} \subseteq E, x_n \neq \xi$ , abbiamo che  $x_n \rightarrow \xi$ . Allora  $f(x_n) \rightarrow \lambda$  e  $f(x_n) \rightarrow \mu$  ma il limite di successioni è unico, quindi  $\lambda = \mu$ .

### Proposition Permanenza del segno e monotonia del limite

Siano  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\xi$  un punto di accumulazione esteso di  $E$ , e supponiamo

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lambda \wedge \exists \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \mu$$

1. Se  $\lambda \neq \mu$ , allora  $\forall c$  tale che  $\lambda < c < \mu$  esiste un intorno  $J$  di  $\xi$  tale che  $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$ , allora  $f(x) < c$  e  $g(x) > c$
2. se esiste un intorno  $J$  di  $\xi$  tale che  $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$ , abbiamo

$$f(x) \leq g(x) \implies \lambda \leq \mu$$

Dal primo punto segue in particolare che  $f(x) < g(x)$  in  $J \cap E \setminus \{\xi\}$ , e se  $f(x) \equiv 0$ ,  $f(x) \rightarrow 0 = \lambda$  e concludiamo che se  $g(x) \rightarrow \mu > 0$  per  $x \rightarrow \xi$  esiste un intorno  $J$  di  $\xi$  tale che  $g(x) > 0$  in  $(J \cap E) \setminus \{\xi\}$  (permanenza del segno).

#### Proof Permanenza del segno e monotonia del limite

1. Per ipotesi  $\lambda < c < \mu$  esistono due intorni  $I_\lambda$  di  $\lambda$  e  $I_\mu$  di  $\mu$  tale che  $I_\lambda$  è tutto a sinistra di  $c$  e  $I_\mu$  è tutto a destra di  $c$ . Per definizione di limite, esiste un intorno  $J_1(\xi)$  di  $\xi$  tale che  $\forall x \in E \cap J_1, x \neq \xi, f(x) \in I_\lambda$  e  $\forall x \in E \cap J_2, x \neq \xi, g(x) \in I_\mu$  (ossia  $f(x) \rightarrow \lambda$  e  $g(x) \rightarrow \mu$ ). Quindi  $\forall x \in E \cap [J_1 \cap J_2], x \neq \xi$  abbiamo  $f(x) < c < g(x)$ .
2. Esercizio: contronominale.

#### Proposition Limitatezza

Se  $f(x) \rightarrow L \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow \xi$  allora usando la definizione di limite con  $J = (L - 1, L + 1)$  si trova un intorno  $J$  di  $\xi$  tale che  $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi, L - 1 < f(x) < L + 1$  e in particolare  $f$  è limitata nell'intorno puntato  $J \setminus \{\xi\}$  di  $\xi$ .

#### Teorema Teorema dei carabinieri

Siano  $f, g, h: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\xi$  punto di accumulazione esteso di  $E$ . Se esiste un intorno  $J_0$  di  $\xi$  tale che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

in  $(E \cap J) \setminus \{\xi\}$  e

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \mu = \lim_{x \rightarrow \xi} h(x)$$

allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$$

#### Proof Teorema dei carabinieri

Per il teorema che lega limiti di funzioni e limiti successionali, la tesi equivale a

$$\forall \{x_n\} \subseteq E, x_n \neq \xi, g(x_n) \rightarrow \mu$$

Sia allora  $\{x_n\}$  una tale successione. Poiché  $f(x) \rightarrow \mu$ , risulta  $f(x_n) \rightarrow \mu$  e poiché  $h(x) \rightarrow \mu$ , risulta  $h(x_n) \rightarrow \mu$  e poiché  $\forall x \in J \cap E, x \neq \xi, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  e siccome  $x_n \rightarrow \xi, \forall x_n \neq \xi$  risulta che esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n \in J \cap E, x_n \neq \xi$  cosicché per tali  $n$

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

e per il teorema dei carabinieri delle successioni vale la tesi.

## 14.2 Aritmetica dei limiti

#### Proposition Aritmetica dei limiti

Siano  $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\xi$  un punto di accumulazione esteso di  $E$  e supponiamo che  $f(x) \rightarrow \lambda$ ,  $g(x) \rightarrow \mu$  per  $x \rightarrow \xi$ . Allora:

1.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \pm g(x) = \lambda \pm \mu$$

purché non si presenti forma  $\infty - \infty$ .

2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = \lambda\mu$$

purché non si presenti forma  $0 \cdot \infty$ .

3. se  $\mu \neq 0$  cosicché  $g(x) \neq 0$  in un intorno puntato di  $E$  (per la permanenza del segno) allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

purché non si presenti forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Se  $g(x) \neq 0$  in un intorno puntato di  $\xi$  e  $g(x) \rightarrow 0^\pm$ , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{0^\pm} = \pm\infty$$

(il segno è dato dalla regola dei segni) purché  $\lambda \neq 0$ .

### Proof

Mostriamo che  $f(x)g(x) \rightarrow \lambda\mu$  se non si presenta forma  $0 \cdot \infty$ . Sia infatti  $\{x_n\} \subseteq E$  tale che  $\forall n, x_n \neq \xi$  e  $x_n \rightarrow \xi$ , allora  $f(x_n) \rightarrow \lambda$  e  $f(x_n) \rightarrow \mu$  implica che  $f(x_n)g(x_n) \rightarrow \lambda\mu$  purché non si presenti forma  $0 \cdot \infty$ .

In modo analogo si estendono tutte le formule di calcolo per i limiti viste per i limiti di successione. Per esempio,

$$f(x)^{g(x)} \rightarrow \lambda^\mu$$

purché non si presenti forma  $1^\infty$  e  $\infty^0$ . Nel caso in cui  $f(x) \rightarrow 0^+$  cosicché  $f(x) > 0$  in un intorno puntato la forma indeterminata relativa è  $0^0$  ( $(0^+)^0 = 0$ ) tranne per  $\mu = 0$ .

### Teorema Cambiamento di variabile nei limiti

Siano  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\xi$  un punto di accumulazione esteso per  $E$  dove  $f(x) \rightarrow \lambda$  per  $x \rightarrow \xi$ ,  $g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda$  un punto di accumulazione esteso dove  $g(y) \rightarrow \mu$  per  $y \rightarrow \lambda$ , e supponiamo infine che  $\xi$  sia di accumulazione esteso per

$$f^{-1}(F) = \text{C.E. di } g \circ f$$

e

$$\text{C.E. di } (g \circ f) = \{x \in E \mid f(x) \in F\} = f^{-1}(F)$$

Allora,  $g(f(x)) \rightarrow \mu$  per  $x \rightarrow \xi$  in  $f^{-1}(F)$ . Si può scrivere tale relazione come

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \lambda} g(y)$$

pongo

$$y = f(x) \rightarrow \lambda$$

per  $x \rightarrow \xi$ .

le relazioni di limiti per le successioni conducono alle corrispondenti di limite per le funzioni. Se  $\forall \varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon_n \neq 0$  definitivamente, abbiamo le analoghe con  $x$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \rightarrow \alpha$$

**Definizione Condizione di Cauchy**

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\xi$  un punto di accumulazione esteso per  $E$ . Diciamo che  $f$  soddisfa la condizione di Cauchy (C) per  $x \rightarrow \xi$  se  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste un intorno  $J$  di  $\xi$  tale che

$$\forall x, x' \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}, \varepsilon > |f(x) - f(x')|$$

nei casi in cui  $\xi \in \mathbb{R}$  la condizione si semplifica a

$$0 < |x - \xi| < \delta \wedge 0 < |x' - \xi| < \delta$$

e per  $\xi = +\infty$

$$x, x' > M$$

per qualche  $M$ .

### Teorema

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\xi$  un punto di accumulazione esteso per  $E$ . Sono equivalenti:

1. esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L$$

2.  $f(x)$  soddisfa la condizione di Cauchy per  $x \rightarrow \xi$ .

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $f(x) \rightarrow L$  per  $x \rightarrow \xi$ . Per definizione  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste un intorno  $J$  di  $L$  tale che

$$\forall x \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}, |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi  $\forall x, x' \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}$  abbiamo

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - f(x') - L + L| \leq |f(x) - L| + |L - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e vale la condizione.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $f$  soddisfa la condizione di Cauchy. Abbiamo che

$$\forall \{x_n\} \subseteq E \mid \forall n, x_n \neq \xi \wedge x_n \rightarrow \xi, f(x_n) \rightarrow L$$

(usiamo la successione analoga). Mostriamo che:

1. esiste  $L$  tale che  $f(x) \rightarrow L$ .  $\forall \{x_n\} \subseteq E \mid \forall n, x_n \rightarrow \xi \wedge x_n \neq \xi$ ,  $f(x_n)$  è di Cauchy, e quindi

$$\exists \lim_n f(x_n) = L$$

Sia allora  $\{x_n\} \subseteq E \mid \forall x_n \rightarrow \xi \wedge x_n \neq \xi$ . Dimostriamo che dato  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N \mid \forall n, m \geq N$ ,  $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ , quindi  $f(x_n)$  è di Cauchy. Poiché  $f$  soddisfa la condizione di Cauchy dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $J$  intorno di  $\xi$  tale che  $\forall x, x' \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}$ ,  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . Per ipotesi,  $x_n \in E$  e  $x_n \neq \xi$  per tutte le  $n$  e  $x_n \rightarrow \xi$  quindi esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n \in (J \cap E) \setminus \{\xi\}$ . Quindi  $\forall n, m \geq N$ ,  $x_n, x_m \in (J \cap E) \setminus \{\xi\}$  da cui  $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$  come si voleva;

2. il limite è lo stesso per tutte le successioni. Sia allora  $\{x'_n\} \subseteq E$  un'altra successione tale che  $x'_n \neq \xi$  per tutte le  $n$  e  $x'_n \rightarrow \xi$ .  $\{f(x'_n)\}$  è di Cauchy e quindi esiste finito

$$\lim_n f(x'_n) = L'$$

La tesi è quindi che  $L = L'$  e per dimostrarlo costruiamo una successione che intercala le due

$$x''_n = \begin{cases} x_n & n \text{ pari} \\ x'_n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi  $\forall n, x''_n \neq \xi$  e  $x''_n \rightarrow \xi$ . Abbiamo che  $\{f(x''_n)\}$  è di Cauchy quindi esiste finito

$$\lim_n f(x''_n) = L''$$

Ma  $f(x''_{2k} = f(x_{2k})) \rightarrow L$  perché è sottosuccessione di  $\{f(x_n)\}$ . Tuttavia, questa tende anche a  $L''$  perché è sottosuccessione di  $\{f(x''_n)\}$ . Abbiamo quindi che  $L = L''$ . Analogamente, con i dispari, mostriamo che  $L' = L''$  e quindi  $L = L'$ .

**Esercizio**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x \sin x}{x^3 \cos(x) - (e^x - 1)^2} = 2$$

**Esercizio**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-x)^2 + x^3\left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Poiché  $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ ,  $\sin \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Inoltre,  $x^3 \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \sim x^{7/2}$ , quindi al numeratore raggruppiamo  $x^{7/2}$ . Per il denominatore  $1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x}$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{x}x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)^2 &\sim x^{5/2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Riscriviamo allora l'espressione come

$$\begin{aligned} &= \frac{x^{7/2} \left\{ x^{-7/2} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + x^{1/2} \sin\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) \right\}}{x^2 \left\{ x^{-2} x^{1/2} (\sqrt{x^2+1}-x)^2 + x \cos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right\}} \\ &\sim 2x^{3/2} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

**Esercizio**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x-1}$$

la forma di indecisione è  $1^\infty$ . Allora usiamo la forma esponenziale

$$e^{(2x-1) \log\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)}$$

Vogliamo usare  $\log(1+f(x)) \sim f(x)$  con  $f(x) \rightarrow 0$ . Allora scriviamo

$$e^{(2x-1) \log\left(1 - \frac{6}{4x+5}\right)}$$

dove l'esponente è asintotico a  $-3$ . Allora il limite è pari a  $e^{-3}$ .**Esercizio**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sin^2(x) \log(1 + \tan^4(\frac{x}{1+x^4}))}{(e^{2 \sin^4 x} - 1) \left( \sqrt[6]{1 + \frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1 \right)}$$

Abbiamo:

1.  $\sin(x^2) \sim x^2$
2.  $\tan(1 + \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2})) \sim \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2}) \sim \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 \sim x^4$
3.  $e^{2 \sin^4(x)} - 1 \sim 2 \sim x^4 \sim 2x^4$



4.  $\sqrt[6]{1 + \frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1 \sim \frac{1}{6}x^2$   
XXX

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(1 + 2x)}{\sqrt[6]{1+x} - \sqrt[6]{1-x}}$$

Scriviamo l'asintotico con l'o-piccolo:

1.  $\sin x = x(1 + o(1))$
2.  $\log(1 + 2x) = 2x(1 + o(1))$

Allora

$$\begin{aligned}\sin x - \log(1 + 2x) &= x + xo(1) - 2x - 2xo(1) \\ &= -x + xo(1) = -x(1 + o(1))\end{aligned}$$

Al denominatore abbiamo

$$(1 + x)^{1/6} - 1 = \frac{1}{6}x(1 + o(1))$$

e allora

$$(1 + x)^{1/6} = 1 + \frac{1}{6}x(1 + o(1))$$

Trasformiamo analogamente l'altro termine e troviamo

$$\sqrt[6]{1+x} - \sqrt[6]{1-x} = \frac{1}{3}x(1 + o(1)) \sim \frac{1}{3}x$$

e quindi il limite fa  $-3$ .

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{2}{3}x} - \cos \sqrt{x}}{(\tan(2x))^\alpha}$$

Il primo termine è pari a  $1 + \frac{2}{3}x(1 + o(1))$ , il secondo  $1 - \frac{1}{2}x(1 + o(1))$ . Abbiamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{2}{3}x(1 + o(1)) - 1 + \frac{1}{2}x(1 + o(1))}{(2x)^\alpha} \sim \frac{7}{3 \cdot 2^{\alpha+1} x^{1-\alpha}} = \begin{cases} 0^+ & \alpha < 1 \\ \frac{7}{12} & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x \left(\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Conviene razionalizzare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left[\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right] \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sin x \left[(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}})(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}})\right]} = \frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{\sin x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Sostituiamo la variabile  $y = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi} \left[\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + y^2\right]}{y}$$

Notiamo che  $\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(y) \sim -y$ . Quindi,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi}(-y)}{y} = -\sqrt{2\pi}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1} & x > 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo allora i limiti dalla due direzioni.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

L'altro limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1} = \frac{\infty}{0^+} = +\infty$$

Quindi il limite generale non esiste.

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ 1 + \sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right) \right]^{\frac{x+1}{x^3 + \tan^2 x}}$$

Scriviamo la forma esponenziale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left\{ \frac{x+1}{x^3 + \tan^2 x} \log \left( 1 + \sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right) \right) \right\}$$

Il primo termine è asintotico a  $\frac{1}{x^2}$ , mentre il logaritmo è asintotico a  $\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)$  che è asintotico a  $\frac{x^\alpha}{x+1}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ e & \alpha = 2 \\ 1 & \alpha < 2 \end{cases}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2+x}\right) \right\}^{\frac{\tan x}{\log(1+1+x^2)}}$$

## 14.3 Continuità

### Definizione Continuità

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$ . Diciamo che  $f$  è continua in  $x_0$  se per ogni intorno  $I$  di  $f(x_0)$ , esiste un intorno  $J$  di  $x_0$  tale che  $\forall x \in E \cap J, f(x) \in I$ .

Nota che non si richiede che  $x_0$  sia un punto di accumulazione come nel limite. Infatti, se  $x_0 \in E$  è isolato in  $E$ , cioè  $\exists J$  intorno di  $x_0$  tale che  $E \cap J = \{x_0\}$  la condizione di continuità è automaticamente soddisfatta. In altri termini ogni funzione è continua nei punti isolati del suo dominio.

Se invece  $x_0 \in E$  è un punto di accumulazione, la definizione di continuità è equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### Definizione Continuità

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$ . Diciamo che  $f$  è continua in  $x_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, \delta > |x - x_0| \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Usando le definizioni con  $\varepsilon$  e  $\delta$  possiamo parlare di continuità da destra e sinistra.

### Definizione Continuità da sinistra

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$ . Diciamo che  $f$  è continua in  $x_0$  da sinistra se per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, x_0 - \delta < x \leq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

### Definizione Continuità da destra

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$ . Diciamo che  $f$  è continua in  $x_0$  da destra se per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, x_0 \leq x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

### Proposition

Una funzione è continua se e solo se è sia continua da destra che da sinistra.

### Proposition

Se  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $E$  destro e sinistro,  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

### Teorema Continuità e continuità per successione

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$ . Sono equivalenti:

1.  $f$  è continua in  $x_0$ ;
2. *continuità per successioni*:  $\forall \{x_n\} \subset E \mid x_n \rightarrow x_0, f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

### Proof Continuità e continuità per successione

Esercizio. Se  $x_0$  non è di accumulazione (è isolato), la successione deve essere definitivamente pari a  $x_0$ .

( $\implies$ ) TODO

( $\Leftarrow$ ) TODO

La continuità è equivalente alla continuità per successione in ogni spazio metrico.

#### Proposition Proprietà delle funzioni continue

Siano  $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$  continue in  $x_0$ .

1. supponiamo che  $f(x_0) < g(x_0)$ , allora per tutte le  $c$  tali che  $f(x_0) < c < g(x_0)$ , esiste un intorno  $J$  di  $x_0$  tale che

$$\forall x \in J \cap E, f(x) < c < g(x)$$

Se  $x_0$  è isolato, la tesi è banale. Altrimenti, usiamo il teorema della permanenza del segno dei limiti. Troviamo quindi un intorno dove la condizione vale necessariamente ovunque tranne nel punto  $x_0$ , ma nel punto  $x_0$  la tesi vale per ipotesi.

2. esistono  $M$  e  $J$  intorno di  $x_0$  tale che

$$\forall x \in E \cap J, |f(x)| \leq M$$

Chiaramente se il limite è finito, allora esiste un intorno puntato dove la funzione è limitata. Siccome la tesi vale anche per il punto stesso, vale la tesi.

#### Proposition Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Siano  $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$  continue in  $x_0$ .

1.  $f(x) \pm g(x)$  è continua in  $x_0$ ;
2.  $f(x)g(x)$  è continua in  $x_0$ ;
3.  $\frac{f(x)}{g(x)}$  è continuità in  $x_0$  per  $g(x) \neq 0$ .

#### Proof Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Se il punto non è di accumulazione tali proprietà sono banali. Altrimenti, seguono dalle proprietà dei limiti. Nel caso della divisione distinguiamo  $g(x)$  positivo e negativo.

Tali proprietà sono analoghe per la continuità destra e sinistra.

#### Definizione Continuità intervallo

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $f$  è continua in  $E$  se è continua in ogni punto di  $E$ .

#### Teorema Composizione delle funzioni continue

Siano  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $x_0 \in E$  e  $g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $y_0 = f(x_0) \in F$ . Then, the composite function

$$g \circ f: f^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

is continuous  $x_0$ .

## 15 Limiti e discontinuità di funzioni monotone

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  monotona crescente su  $I$ , e sia  $x_0$  intorno a  $I$ . Allora esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f$$

In particolare,  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

e se  $f$  non è continua in  $x_0$  allora  $x_0$  è una discontinuità di salto.

Un analogo risultato vale per funzioni monotone decrescenti, e si può ricavare osservando che  $f$  è monotona decrescente se e solo se  $-f$  è monotona crescente.

### Proof

Dimostra che esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Per monotonia, per ogni  $x_1 < x < x_0$  abbiamo

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$$

da cui

$$\forall x_1 < x_0, f(x_1) \leq \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Per definizione di supremum,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon < x_0 \mid f(x_\varepsilon) > \sup_{x < x_0} f(x) - \varepsilon$$

Per monotonia concludiamo che  $\forall x_\varepsilon < x < x_0$  vale quindi

$$\sup_{x < x_0} f(x) - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq \sup_{x < x_0} f(x)$$

Quindi, posto  $\delta = x_0 - x_\varepsilon$  vale che per tutte le  $x$  tali che  $x_0 - \delta < x < x_0$  abbiamo

$$\sup_{x < x_0} f - \varepsilon < f(x) < \sup_{x < x_0} f(x)$$

e per definizione

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f$$

### Corollario

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  monotona. Allora, l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$  è al più numerabile.

### Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo che  $f$  sia monotona crescente e siano  $x_1$  e  $x_2$  due punti di discontinuità. Consideriamo  $x'$ ,  $x''$  e  $x'''$  come punti negli intervalli definiti da  $x_1$  e  $x_2$ . Dal

teorema precedente

$$f(x') \leq \lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) \leq f(x_1) \leq \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \leq f(x'') \leq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) \leq f(x_2) \leq \lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x) \leq f(x''')$$

e poiché per ipotesi  $f$  è discontinua in  $x_1, x_2$  almeno una delle disuguaglianze in rosso o in blu sono strette. Questo dice che gli intervalli di salto

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f, \lim_{x \rightarrow x_1^+} f$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} f, \lim_{x \rightarrow x_2^+} f$$

sono disgiunti. Dissando un razionale in ciascuno degli intervalli di salto corrispondente ai punti di discontinuità in  $f$  si stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra

$$D = \{x \in I \mid f \text{ è discontinua in } x\}$$

e un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . Poiché  $\mathbb{Q}$  è numerabile,  $D$  è al più numerabile.

## 15.1 Compattezza

Quindi i punti di massimo forte sono al più numerabile, mentre quelli deboli non sono necessariamente numerabile.

### Definizione Compattezza di successioni nei reali

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}$ . Diciamo che  $K$  è compatto per successioni se

$$\forall \{x_n\} \subseteq K$$

esiste una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ , cioè da ogni successione di punti di  $K$  si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di  $K$ .

Se  $K$  è finito allora è compatto per successioni (un insieme finito è chiuso in quanto non contiene punti di accumulazione).

### Teorema Teorema di Heine Borel

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}$ , allora sono equivalenti:

1.  $K$  è compatto per successioni
2.  $K$  è chiuso e limitato.

### Proof Teorema di Heine Borel

- (2)  $\implies$  (1). Consideriamo  $\{x_n\} \subseteq K$ . Siccome  $K$  è limitata,  $\{x_n\}$  è limitata. Quindi, per Bolzano-Weierstrass esiste  $\exists \{x_{n_k}\}$  tale che  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ . Poiché  $\{x_{n_k}\} \subseteq K$  e  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$  per la caratterizzazione dei punti di chiusura  $\bar{x} \in \overline{K} = K$  perché  $K$  è chiuso, quindi  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in K$  e  $K$  è compatto.
- (1)  $\implies$  (2).
  - $K$  è **chiuso**: Sia  $\bar{x} \in \overline{K}$ . Per il teorema di caratterizzazione di  $\overline{K}$ , esiste  $\{x_n\} \subseteq K$  tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ . Poiché  $K$  è compatto, esiste  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ . Ma  $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$  e quindi  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$  e per unicità del limite  $\bar{x} = x_0 \in K$  e  $K$  è chiuso.
  - $K$  è **limitato**: Mostriamo che  $\mu = \sup K < +\infty$ . Abbiamo dimostrato che  $\exists \{x_n\} \subseteq K$  tale che  $x_n \rightarrow \mu$ . Ma  $K$  è compatto cosicché esista  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ . Per unicità  $x_0 = \mu$  e quindi  $\mu$  è finito.

### Corollario Teorema di Wierstrass

Se  $K$  è compatto per successioni, allora esiste  $\min\{K\}$  e  $\max\{K\}$ .

Siccome il supremum e l'infimum appartengono a  $K$  (dalla dimostrazione).

### Teorema Teorema di Heine-Cantor

Sia  $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $K$  compatto. Allora,  $f(K)$  è compatto.

### Proof Teorema di Heine-Cantor

Data  $\{y_n\} \subseteq f(K)$ , dobbiamo dimostrare che esiste  $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$  tale che  $y_{n_k} \rightarrow y \in f(K)$ . Per definizione,  $y_n \in f(K)$  quindi esiste  $x_n \in K$  tale che  $f(x_n) = y_n$ . La successione  $\{x_n\}$  è contenuta in  $K$  compatto. Esiste  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ . Ma è continua su  $K$  e quindi in  $x_0$ . Quindi per il teorema su continuità e continuità per successione, abbiamo che

$$x_{n_k} \rightarrow x_0 \implies f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow f(x_0) = y_0 \in f(K)$$

e quindi  $f(K)$  è compatto.

### Corollario Teorema di Wierstrass

Sia  $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $K$  compatto. Allora  $f$  è limitata ed assume massimo e minimo.

### Teorema Teorema degli zeri

Sia  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $[a; b]$  e tale che  $f(a)f(b) < 0$ . Allora, esiste  $c \in [a; b]$  tale che  $f(c) = 0$ .

### Proof Teorema degli zeri

Senza perdita di generalità, supponiamo che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Definiamo l'insieme

$$E = \{x \mid \forall t \in [a, x], f(t) < 0\}$$

Notiamo che  $a \in E \neq \emptyset$ . Sia  $c = \sup E$ . La tesi è che  $f(c) = 0$ . Notiamo che  $c > a$  in quanto  $f(a) < 0$  e  $f$  continuano implicano, per il teorema di permanenza del segno, che  $f(t) < 0$  in  $[a; a + \delta)$  per qualche  $\delta > 0$ . Analogamente,  $c < b$  siccome  $f(b) > 0$  ed esiste  $\delta_1$  tale che  $f(t) > 0$  in  $(b - \delta; b)$  e quindi  $c < b$ . Mostriamo che  $f(c) = 0$  facendo vedere che non può essere nè  $f(c) < 0$  nè  $f(c) > 0$ . Infatti, se fosse  $f(c) < 0$ , esisterebbe  $\delta > 0$  tale che  $f(t) < 0$  per  $t \in (c - \delta, c + \delta)$ . D'altra parte, per definizione di  $c = \sup\{x \mid f(t) < 0, t \in [0, x]\}$  esisterebbe  $x_0 \in E$  tale che  $c - \delta < x_0 < c$ . Quindi si avrebbe  $f(t) < 0$  in  $[a, x_0]$  e in  $(c - \delta; c + \delta)$ . Quindi,  $f(t) < 0$  in  $[a; c + \delta]$  e  $c$  non è maggiorante di  $E$  4. Se invece fosse  $f(c) > 0$  per lo stesso motivo esisterebbe  $\delta > 0$  tale che  $f(t) > 0$  per  $t \in (c - \delta; c + \delta)$  e quindi  $\forall x_0 \in (c - \delta; c + \delta), f(x_0) > 0$  e quindi  $c$  non è più piccolo maggiorante di  $E$  4.

### Esempio

Dimostriamo che la funzione  $f(x) = x - \cos x$  ha un (e un solo) zero in  $(0; \frac{\pi}{2})$  e determinarlo con un errore minore di  $10^{-2}$ . La funzione è continua nell'intervallo  $[0; \frac{\pi}{2}]$  e  $f(0) = -1$  e  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ . Per cui, per il teorema degli zeri esiste uno zero  $c$  in tale intervallo. Lo zero è unico in quanto è strettamente crescente, per la derivata  $f'(x) = 1 + \sin x$ . Calcoliamo  $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.078 > 0$ . Quindi,  $c \in (0; \frac{\pi}{4})$ . Se si approssima  $c$  con il punto medio dell'intervallo, quindi  $c = \frac{\pi}{8}$ , l'errore è al massimo  $E = \frac{\pi}{8}$ . Consideriamo poi  $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{8} - \cos(\frac{\pi}{8}) = -0.53 < 0$ . Quindi,  $c$  si trova in  $(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4})$ . Allora prendiamo la media  $c = \frac{3\pi}{16}$ , e l'errore è al massimo  $E = \frac{\pi}{16}$ . Iteriamo il processino fino a quando  $E < 10^{-2}$ .

### Teorema Teorema dei valori intermedi di Darboux

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $I$ . Vi sono due versioni:

1. Se  $I = [a; b]$ , allora  $f$  assume tutti i valori fra  $f(a)$  e  $f(b)$ ;
2. Se  $I$  è arbitrario, finito o infinito, aperto o chiuso o semiaperto, allora  $\forall \xi$  con

$$\inf_I f < l < \sup_I f$$

esiste  $c \in I$  tale che  $f(c) = \xi$ .

### Proof Teorema dei valori intermedi di Darboux

1. Se  $a = b$  il teorema è banale. Senza perdita di generalità, supponiamo ora che  $f(a) < f(b)$ , e sia  $f(a) < l < f(b)$ . Consideriamo la funzione ausiliaria  $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(x) = f(x) - l$ . Notiamo che  $g$  è continua in  $[a; b]$ ,  $g(a) = f(a) - l < 0$  e  $g(b) = f(b) - l > 0$  quindi per il teorema degli zeri,  $\exists c \in [a, b] \mid g(c) = f(c) - l = 0$ . Quindi,  $f(c) = l$ .
2. Sia  $\inf_I f < l < \sup_I f$ . Per definizione di infimum, esiste  $a \in I$  tale che

$$\inf_I f < f(a) < l$$

e, analogamente, esiste  $b \in I$  tale che

$$l < f(b) < \sup_I f$$

Se  $a < b$ , applicando il punto primo all'intervallo  $[a; b]$ , si deduce che esiste  $c \in (a; b) \subseteq I$  tale che  $f(c) = l$ . Se, invece,  $a > b$  si considera l'intervallo  $[b; a]$  e si conclude in maniera analoga.

### Corollario

Se  $f$  è continua su  $I$  intervallo, allora  $f(I)$  è un intervallo.

Combinando il teorema di Weierstrass con il teorema dei valori intermedi, otteniamo che se  $f$  è continua in  $[a; b]$ , allora  $f([a; b]) = [m; M]$  con  $m = \min_I f$  e  $M = \max_I f$ .

I teoremi degli zeri e dei valori intermedi, valgono per funzioni continue su intervalli.

Variante del teorema di Weierstrass quando non valgono tutte le premesse:

Sia  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue e supponiamo che  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  o  $x \rightarrow +\infty$ . Allora  $f$  è limitata inferiormente e ammette min assoluto.

Per dimostrarlo sia  $x_0 \in (0, +\infty)$  e sia  $M = f(x_0) + 1$ . Per definizione di limite esistono  $\delta < x_0$  e  $R > x_0$  tale che  $\forall x \in (0; \delta) \cup (R, +\infty), f(x) > M$ .  $f$  è continua su  $[\delta; R]$  chiuso e limitato. Quindi è limitata inferiormente su  $[\delta, R]$  e assume minimo assoluto  $m = f(x_1)$  con  $x_1 \in [\delta, R]$  cioè  $f(x) \geq m = f(x_1)$  per tutte le  $x \in [\delta, R]$ . In particolare,  $m = f(x_1) \leq f(x_0) < M$ . Se  $x \in [\delta, R], f(x) \geq f(x_1) = m$ . Se  $x \in (0, \delta) \cup (R, +\infty), f(x) > M > m = f(x_1)$ . Quindi,  $m = f(x_1)$  è il min assoluto di  $f$  in  $(0, +\infty)$ .

## 15.2 Continuità uniforme

### Definizione Continuità uniforme

Una funzione  $f$  si dice *uniformemente continua* in  $E$  se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$  tale che  $\forall x_0 \in E$  e  $\forall x \in E$ , per  $|x - x_0| < \delta$  si ha  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Quindi il valore  $\delta$  è indipendente dal punto.



**Lemma**

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f$  non è uniformemente continua in  $E$  se esiste  $\bar{\varepsilon} > 0$  e successioni  $\{x_0\}, \{x'_n\}$  tale che  $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$  e  $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \bar{\varepsilon}$ .

**Proof**

Abbiamo che  $f$  non è uniformemente continua se  $\exists \bar{\varepsilon} > 0$  tale che  $\forall \delta > 0$  esistono  $x_\delta, x'_\delta \in E$  con  $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$  e  $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \bar{\varepsilon}$ . Prendendo  $\delta = \frac{1}{n}$  si ottengono successioni  $\{x_n\}$  e  $\{x'_n\}$  in  $E$  tale che  $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$  e  $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \bar{\varepsilon}$ .

La funzione  $\sqrt{x}$  è uniformemente continua su  $[0, +\infty)$ .

**Teorema Teorema di Heine-Cantor**

Sia  $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $K$  compatto. Allora  $f$  è uniformemente continua su  $K$ . In particolare,  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, è uniformemente continua.

**Proof**

Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia uniformemente continua. Per il lemma, esistono  $\bar{\varepsilon} > 0$  e successioni  $\{x_n\}$  e  $\{x'_n\}$  in  $K$  tale che  $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$  e  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \bar{\varepsilon} > 0$ . Siccome  $K$  è compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ . Poiché  $x'_{n_k} = x_{n_k} + (x'_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow x_0$  e poiché  $f$  è continua in  $x_0$ , per l'equivalenza fra continuità e continuità per successioni,  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  e  $f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ . Quindi,  $\bar{\varepsilon} \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow 0$ , ma dovrebbe essere sempre maggiore o uguale a  $\bar{\varepsilon} \not\rightarrow 0$ .

**Definizione Funzione Lipschiziana**

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *Lipschiziana* se esiste  $L > 0$  tale che  $\forall x, x' \in I$ ,

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

Se  $L = 1$  si dice espansiva. Se  $L < 1$  si dice contrazione.

**Definizione Funzione Hölderiana**

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *Hölderiana* di esponente  $\alpha \in (0, 1]$  se esiste  $M > 0$  tale che  $\forall x, x' \in I$ ,

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha$$

**Proposition**

Tutte le funzioni  $\alpha$ -Hölderiane, sono uniformemente continue.

**Proof**

Consideriamo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Abbiamo che

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha, \quad M > 0$$

Quindi dato  $\varepsilon > 0$  se  $M|x - x'|^\alpha$  con  $M > 0$ . Quindi, dato  $\varepsilon > 0$  se  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$  purché  $M|x - x'|^\alpha < \varepsilon$ , cioè

$$|x - x'| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha} = d$$

**Proposition Proprietà di funzioni uniformemente continue**

Siano  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continue. Allora

1.  $f + g$  è uniformemente continua. Per dimostrarlo basta considerare  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ;
2. se  $f$  e  $g$  sono anche entrambe limitate su  $I$ , allora  $fg$  è uniformemente continua;
3. se  $\frac{1}{f}$  è definita è uniformemente continua.
4. se  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua, allora  $\forall E_1 \subseteq E$ ,  $f$  è uniformemente continua su  $E_1$ .

**Teorema**

Se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è continua su  $I$  e uniformemente continua in  $I \cap (-\infty, c)$  e  $I \cap (c, +\infty)$ , allora è uniformemente continua su tutto  $I$ .

**Proof**

Dato  $\varepsilon > 0$  bisogna trovare  $\delta$  tale che  $\forall x_1, x_2 \in I$  se  $|x_2 - x_1| < \delta$  allora vale  $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ . Poiché  $f$  è uniformemente continua su  $I \cap (-\infty, c)$  e  $I \cap (c, +\infty)$ , esistono  $\delta_1 > 0$  tale che  $\forall x_1, x_2 \in I \cap (-\infty, c)$  con  $|x_2 - x_1| < \delta$  si ha  $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$  e analogamente  $\delta_2$ . Poiché  $f$  è continua in  $c$ ,  $\exists \delta_3$  tale che  $\forall x \in I$  con  $|x - c| < \delta_3$ , abbiamo  $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Quindi se  $x_1 < c < x_2$  e  $|x_2 - x_1| < \delta$ , allora la distanza  $|c - x_1| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$  e  $|x_2 - c| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$ . E quindi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(c)| + |f(c) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Allora posto  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  si ha la tesi.

**Proposition**

Siano  $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f$  è continua nel dominio e  $g$  è uniformemente continua nel dominio e  $f \sim g$  per  $x \rightarrow \infty$ . Allora,  $f$  è uniformemente continua nel dominio. In particolare, se  $f$  è continua su  $[A, +\infty)$  e

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

allora  $f$  è uniformemente continua.

Per dimostrarlo, stimiamo la differenza fra  $|f(x_1) - f(x_2)|$  per  $x$  molto grande intercalando la funzione  $g$ . Troviamo quindi che il  $\delta$  che va bene per  $g$  va bene anche per  $f$ .

**Proposition**

Se  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua nel dominio, allora esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Per dimostrarlo mostriamo che  $f(x)$  soddisfa la condizione di Cauchy per  $x$  che tende ad  $a^+$  o  $b^-$  (cosa che deriva naturalmente dalla definizione di continuità uniforme).

Se una funzione è continua e invertibile, ciò non implica necessariamente che l'inversa sia continua.

**Lemma Lemma 1**

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e invertibile su  $I$  intervallo. Allora,  $f$  è strettamente monotona.

**Proof Lemma 1**

Supponiamo per assurdo che non sia strettamente monotona. Esistono quindi  $x_1 < x_2 < x_3$  in

$I$ . Quindi (uguaglianze non strette), o  $f(x_1) = f(x_2)$  oppure  $f(x_1) < f(x_2)$  e  $f(x_2) \geq f(x_3)$  o viceversa (o prima cresce e poi decresce o viceversa o rimane uguale). Chiaramente, se vale una di questi casi (tutti i casi),  $f$  non è iniettiva e quindi non invertibile. Se invece valgono le disuguaglianze strette, allora per il teorema dei valori intermedi, applicato agli intervalli  $[x_1; x_2]$  e  $[x_2; x_3]$  si trova che

$$\forall \max\{f(x_1), f(x_3)\} \leq \xi < f(x_2)$$

esistono almeno 2 valori di  $x$  tali che  $f(x) = \xi$ . Quindi, la funzione non è iniettiva.

### Lemma Lemma 2

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  monotona su  $I$  intervallo. Se  $f(I)$  è un intervallo, allora  $f$  è continua.

### Proof Lemma 2

Assumiamo che  $x_0 \in I$  sia un punto di discontinuità di  $f$ . Allora, sarebbe una discontinuità di salto, e  $f(I)$  non sarebbe un intervallo.

### Teorema Continuità dell'inversa

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e invertibile su  $I$  che è un intervallo. Allora,  $f^{-1}$  è continua.

### Proof Continuità dell'inversa

Per il Lemma 1  $f$  è strettamente monotona. Quindi,  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  è strettamente monotona. Per il teorema dei valori intermedi  $f(I)$  è un intervallo e  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  è monotona definita su un intervallo e la sua immagine è l'intervallo  $I$ . Per il Lemma 2,  $f^{-1}$  è continua.

## 16 Derivate

### Definizione Derivabilità

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $x_0$  se esistono finito il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### Definizione Retta tangente

La retta tangente è definita come

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Nel caso esistano i limiti finiti da destra o sinistra si dirà che la funzione è derivabile da destra o sinistra nel punto.

### Proposition

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  interno ad  $I$ . Se  $f$  è derivabile rispettivamente da destra, da sinistra, in  $x_0$ , allora  $f$  è continua rispettivamente da destra, da sinistra, in  $x_0$ .

### Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo per esempio che  $f$  sia derivabile da destra in  $x_0$  cioè esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_+ f(x_0)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = D_+ f(x_0) \cdot 0 = 0$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

e  $f$  è continua da destra in  $x_0$ .

### Proposition Proprietà aritmetiche della derivabilità

Siano  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile (rispettivamente da sinistra o destra) in  $x_0$  interno ad  $I$ . Allora:

1.  $f \pm g$  è derivabile in  $x_0$  e vale che

$$D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$$

2.  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $cf$  è derivabile in  $x_0$  e vale

$$D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$$

3.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $af + bg$  è derivabile in  $x_0$  e vale

$$D(af + gb)(x_0) = aDf(x_0) + bDg(x_0)$$

4.  $fg$  è derivabile in  $x_0$  e vale

$$(fg)'(x_0) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

che si chiama Formula di Leibniz

5.  $g(x_0) \neq 0$  allora  $g(x) \neq 0$  in un intorno di  $x_0$  cosicché  $\frac{f}{g}$  sia derivabile in un intorno di  $x_0$  è derivabile in  $x_0$  e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

### Proof Proprietà aritmetiche della derivabilità

1. esercizio;
2. segue dal 3;
3. calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Per ipotesi, il primo termine tende a  $f'(x_0)$  mentre l'ultimo  $g'(x_0)$ . L'altro termine  $g(x)$  tende a  $g(x_0)$  perché  $x \rightarrow x_0$  e  $g$  è derivabile in  $x_0$  (il fatto che sia derivabile, implica che sia continua), e l'altro termine analogo. Quindi, vale la tesi.

4. Poiché per ipotesi  $g(x_0) \neq 0$  e  $g$  è continua in  $x_0$  perché è derivabile  $g(x) \neq 0$  in un intorno di  $x_0$  per permanenza del segno. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \end{aligned}$$

Come prima otteniamo la tesi siccome  $g$  derivabile implica  $g$  continua.

### Proposition Derivata della tangente

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

per  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$  per  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 16.1 Condizioni equivalenti alla derivabilità

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  interno ad  $I$ . Sono equivalenti:

1.  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $Df(x_0) = \lambda \in \mathbb{R}$
2. differenziabilità in  $x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + r(x)$$

dove  $r(x) = o(x - x_0)$ .

Notiamo che (2) dice che, se approssimiamo  $f$  con l'equazione della retta tangente al grafico, l'errore  $r(x)$  tende a zero più velocemente di  $x - x_0$ . La retta tangente è l'unica per la quale l'errore tende a zero più velocemente di  $x - x_0$ . La differenziabilità è quindi la proprietà di poter essere approssimata bene con una funzione affine.

**Proof**

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right] (x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x - x_0) + r(x) \end{aligned}$$

e chiaramente  $f$  è derivabile in  $x_0$  con derivata se e solo se

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \lambda \iff \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right] \rightarrow 0$$

se e solo se

$$r(x) = \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right] \rightarrow 0$$

è tale che

$$\frac{r(x)}{x - x_0} \rightarrow 0$$

**Corollario**

Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  allora,  $\forall m$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = Df(x_0) - m = 0 \iff m = Df(x_0)$$

Quindi, la retta tangente è precisamente quella che approssima meglio la funzione attorno ad  $x_0$ .

**Teorema Formula di derivazione della funzione composta**

Siano  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x_0$  interno ad  $I$  e  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $y_0 = f(x_0)$  interno a  $J$ . Allora,  $Dg(f(x))$  è derivabile in  $x_0$  e vale la formula

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

**Proof Formula di derivazione della funzione composta**

Dobbiamo dimostrare che esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$$

Introduciamo una funzione ausiliaria  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\varphi(y) \triangleq \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 = f(x_0) \\ Dg(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

e notiamo che, per definizione di derivata

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = Dg(y_0)$$

Osserviamo ora che  $\forall x \in I$  vale l'uguaglianza

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Infatti, se  $f(x) = f(x_0)$  allora il primo membro è nullo e così per il secondo. Se invece  $f(x) \neq f(x_0)$  allora

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Per  $x \rightarrow x_0$  abbiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow Df(x_0)$$

e  $f(x) \rightarrow f(x_0) = y_0$  perché  $f$  derivabile implica  $f$  continua, e quindi

$$\varphi(f(x)) \rightarrow \varphi(y_0) = Dg(y_0) = Dg(f(x_0))$$

da cui otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che porta alla tesi.

### Teorema Derivata di funzione inversa

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x_0$  interno ad  $I$  e invertibile in  $I$  con  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ . Supponiamo che:

1.  $Df(x_0) \neq 0$ ;
2.  $f^{-1}$  sia continua in  $y_0 = f(x_0)$ .

Allora,  $f^{-1}$  è derivabile in  $x_0$  e vale

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)} = \frac{1}{Df(f^{-1}(y_0))}$$

Osserviamo che se  $f$  è continua e invertibile su  $I$  allora  $f^{-1}$  è continua su  $f(I)$  e quindi il secondo puntato è automaticamente garantito.

### Proof Derivata di funzione inversa

Studiamo il limite

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Allora posto  $f^{-1}(y) = x$  e  $f^{-1}(y_0) = x_0$ , abbiamo  $f(x) = y$  e  $f(x_0) = y_0$  e per la continuità di  $f^{-1}$  in  $y_0$  se  $y \rightarrow y_0$ , allora  $f^{-1}(y) = x \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ . Allora, possiamo applicare il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{Df(x_0)} \end{aligned}$$

Notiamo le seguenti:

$$D \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y \in (-1; 1)$$

$$D \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$D \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$D \tanh(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1 - \tanh^2(x) \end{cases}$$

$$D \sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$D \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

## 16.2 Punti di singolarità

### **Definizione** Punto singolare

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $I$  dove  $f$  non è derivabile in  $c \in I$ . Allora,  $c$  è un *punto singolare* per  $f$ .

Possiamo parzialmente classificare tali punti:

1. esistono finite le derivate destre e sinistre nel punto ma diverse, allora  $c$  è un punto angoloso;
2. esistono infinite le derivate destre e sinistre. La funzione non è derivabile ma diciamo comunque che  $Df(c) = \pm\infty$  e che  $c$  è un punto a tangente verticale.
3. esistono infinite le derivate destre e sinistre ma con segno opposto. Allora  $c$  è un punto di cuspid.

Le varie formule di derivazione, forniscono condizioni sufficienti per la derivabilità delle derivate, ma se le ipotesi non sono rispettate, è necessario studiare direttamente il limite.

Per esempio,  $x^{1/3}$  e  $x^{4/5}$  non sono derivabili in  $x = 0$ , ma il loro prodotto è derivabile in  $x = 0$ .

Studiando il limite incrementale di  $|x|^\alpha$  troviamo che il rapporto incrementale è dato da

$$\begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ +1 & \alpha = 1 \wedge x \rightarrow 0^+ \\ -1 & \alpha = 1 \wedge x \rightarrow 0^- \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \wedge x \rightarrow 0^+ \\ -\infty & 0 < \alpha < 1 \wedge x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Quindi la funzione è derivabile solo in  $\alpha > 1$ . Per  $\alpha = 1$  abbiamo un punto angoloso, e per  $0 < \alpha < 1$  abbiamo un punto di cuspid.



**Esercizio** Studiare al variare di  $a, b \in \mathbb{R}$  la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} = f_+(x) & x > 0 \\ a \ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + e^{b \cos(x)-1} = f_-(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di derivabilità  $f_+(x)$  è derivabile per  $x > 0$  e quindi  $f$  è derivabile per  $x > 0$ . La funzione  $f_-$  è anch'essa derivabile per  $x < 0$ , in particolare per  $x \leq 0$ . Quindi, manca da studiare il punto  $x = 0$ . La continuità deve valere

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Il limite è dato da

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f_-(0) = e^{b-1}$$

in quanto  $f_-$  è continua. Quindi,  $f$  è sempre continua a sinistra. L'altro limite è dato da

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{x^2}{x} + e^{(\sqrt{1+x^2}-1) \ln(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{2} x^2 \ln(x)} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$x^2 \ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^2} \rightarrow 0$$

Quindi, il secondo limite è 1. Allora  $f$  è continua se e solo se  $1 = e^{b-1}$ , quindi  $b = 1$ . Poiché la derivabilità implica la continuità, deve essere  $b = 1$ . Inoltre devono esistere finite  $D_-f(0) = D_+f(0)$ , quindi

$$D_-f(0) = D_-(f_-)(0) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_-(x) - f_-(0)}{x - 0} = -a \\ Df_-(0) = -a \end{cases}$$

e quella sinistra

$$D_+f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_+(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Concludiamo allora che  $f$  è derivabile in  $x = 0$  se e solo se  $b = 1$  e  $a = -\frac{1}{2}$ . In tal caso  $f'(0) = \frac{1}{2}$ . Se  $b = 1$  e  $a \neq -\frac{1}{2}$ ,  $f$  è continua ma non derivabile e  $x = 0$  abbiamo un punto angoloso.

## 16.3 Massimi e minimi

### Definizione Massimo locale o relativo

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Allora  $x_0$  è un *punto di massimo locale o relativo* debole se esiste un intorno di  $x_0$  tale che  $f(x) \leq f(x_0)$  per tutte le  $x \in I \cap E$ . Il punto  $x_0$  dice *punto di massimo locale o relativo* forte se esiste un intorno di  $x_0$  tale che  $f(x) < f(x_0)$  per tutte le  $x \in I \cap E$  con  $x \neq x_0$ .

Se  $x_0$  è tale che  $f(x) \leq f(x_0)$  per tutte le  $x \in E$  si dice punto di massimo globale o assoluto, e debole se  $f(x) < f(x_0)$  con  $x \neq x_0$ . Analogamente per i punti di minimo locale e assoluti, forti e deboli.

Un punto può essere contemporaneamente minimo e massimo locale debole. Tuttavia, è incompatibile essere minimo locale forte e massimo locale debole e viceversa. Inoltre, la forza implica la debolezza.

### Definizione

Un punto  $x_0$  si dice estremamente debole/forte se è un minimo o massimo debole/forte.

### Teorema Teorema di Fermat

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che  $x_0 \in I$  sia un punto estremante per  $f$  (locale/globale debole/forte) e supponiamo

1.  $x_0$  è interno ad  $I$ ;
2.  $f$  è derivabile in  $x_0$ .

Allora  $f'(x_0) = 0$ .

### Proof Teorema di Fermat

Supponiamo che  $x_0$  sia un punto di minimo relativo debole. Per definizione, esiste un intorno  $J$  di  $x_0$  tale che  $\forall x \in J \cap I, f(x) \geq f(x_0)$ . Poiché  $x_0$  è interno prendendo un  $J$  più piccolo possiamo supporre che  $J \subseteq I$ . Consideriamo allora il rapporto incrementale per  $x \in J \subseteq I$  e  $x \neq x_0$ . Abbiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & x > x_0 \\ \leq 0 & x < x_0 \end{cases}$$

In questo passaggio è essenziale che  $x_0$  sia un punto interno. Facendo tendere  $x \rightarrow x_0^+$  e rispettivamente  $x \rightarrow x_0^-$  e utilizzando il teorema di monotonia del limite otteniamo che

$$D_-f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \lim_{x \rightarrow x_0} \leq 0$$

e

$$D_+f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \lim_{x \rightarrow x_0} \geq 0$$

Poiché  $f$  è derivabile,  $D_+(x_0) = D_-f(x_0) = f'(x_0)$  e quindi  $f'(x_0) = 0$ .

### Definizione Punto critico o stazionario

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in I$ . Allora  $x_0$  è un *punto critico o stazionario* se  $f'(x_0) = 0$ .

### Corollario

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora, gli eventuali punti estremanti di  $f$  in  $I$  vanno ricercati tra:

- i punti interni stazionari;
- i punti interni dove  $f$  non è derivabile (cioè è punti singolari);
- gli estremi di  $I$  che appartengono a  $I$ .

**Esercizio** Tra tutti i contenitori cilindrici di volume fissato  $V$ , trovare quello che ha superficie minima.

Abbiamo che

$$V = r^2 \pi h$$

e

$$S = 2r^2 \pi h + 2r \pi h$$

Vogliamo minimizzare  $S$  con  $V$  costante. Troviamo  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ , e allora

$$\frac{S}{2} = \pi r^2 + \frac{V}{r}$$

I vincoli sono  $r > 0$ . Minimizziamo allora  $f(r) = \frac{S}{2}$ . La funzione è derivabile e quindi continua in  $(0, +\infty)$ . Notiamo che  $f(r) \rightarrow \infty$  per  $r \rightarrow 0^+$  e  $r \rightarrow \infty$ . Per estensione del teorema di Weierstrass

al caso di funzioni definite su intervalli aperti che tendono ad infinito agli estremi, esiste un minimo assoluto in tale intervallo. Poiché  $f$  è derivabile in  $(0, +\infty)$ , tale minimo è assunto in un punto stazionario, per il teorema di Fermat. Abbiamo

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r^2}(2\pi r^3 - V)$$

Risolviamo quindi  $f'(r) = 0$  e quindi

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/2}$$

Vi è un unico punto stazionario nell'intervallo, e quindi questo è il minimo assoluto.

### Teorema Teorema di Rolle

Sia  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che  $f$  sia:

1. continua in  $[a, b]$ ;
2. derivabile in  $(a, b)$ ;
3.  $f(a) = f(b)$ .

Allora, esiste almeno un  $c \in (a; b)$  tale che  $f'(c) = 0$ .

### Proof Teorema di Rolle

Poiché  $f$  è continua in  $[a; b]$  chiuso e limitato, per Weierstrass ammette minimo  $m$  e massimo  $M$  assoluti in  $[a, b]$ . Per definizione,  $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ . Consideriamo due casi:

- $m = M$ , allora  $f$  è costante e  $f'(c) = 0$  per ogni  $c$  in  $[a, b]$ ;
- $m < M$ , allora se  $x_m$  e  $x_M$  sono i punti dove  $f$  assume minimo e massimo rispettivamente, cioè  $m = f(x_m)$  e  $M = f(x_M)$  poiché  $f(a) = f(b)$  e  $m < M$  almeno uno dei due punti deve essere interno. Tale punto è estremamente interno dove  $f$  è derivabile. Quindi per Fermat,  $f'(c) = 0$ .

Le ipotesi di Rolle sono strettamente necessarie. Se manca la derivabilità il controesempio è  $|x|$ . Se manca la continuità l'esempio è

$$\begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

### Teorema Teorema di Lagrange

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dove

1. continua in  $[a, b]$ ;
2. derivabile in  $(a, b)$ ;

Allora, esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La retta tangente esiste sempre in quanto la funzione è derivabile.

### Proof Teorema di Lagrange

Vogliamo applicare il teorema di Rolle, ma la condizione che  $f(a) = f(b)$ . Allora, sottraiamo ad  $f$  la della corda

$$\varphi(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

che è una funzione affine. Tale funzione è continua in  $[a, b]$ , in quanto viene mantenuta la derivabilità, è quindi anche derivabile, e  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Allora, per il teorema di Rolle, esiste  $c \in (a, b)$

tale che

$$\varphi(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

da cui  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Notiamo che Rolle è un caso particolare di Lagrange. Infatti, le due sono equivalenti, e le condizioni sono strettamente necessarie.

#### **Teorema Teorema di Cauchy dei valori intermedi**

Siano  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dove

1.  $f, g$  siano continue in  $[a, b]$ ;
2.  $f, g$  siano derivabili in  $(a, b)$ .

Allora, esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

In particolare, se  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$  cosicché  $g(a) \neq g(b)$  per Rolle, allora dividendo si ottiene

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Se  $g(x) = x$ , allora l'espressione data diventa

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$$

e quindi Lagrange è un caso particolare di Cauchy.

#### **Proof Teorema di Cauchy dei valori intermedi**

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

Allora  $\varphi$  è continua in  $[a, b]$ , derivabile in  $(a, b)$  come combinazione lineare di funzioni con queste proprietà. Inoltre,  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Quindi, per il teorema di Rolle, esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$\varphi'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$$

da cui la tesi.

Come funzione ausiliaria si sarebbe potuta scegliere, più in generale, una combinazione lineare di  $f$  e  $g$  tale che  $\varphi(a) = \varphi(b)$

In sintesi abbiamo che siccome il teorema di Cauchy implica quello di Rolle, allora i 3 teoremi sono tutti equivalenti.

## 16.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

#### **Teorema**

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervallo e derivabile nell'interno  $\overset{\circ}{I}$ . Allora:

1.  $f$  è costante su  $I$  se e solo se  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$ ;
2.  $f$  è monotona crescente se e solo se  $f'(x) \geq 0$ , e analogamente decrescente,
3. Se  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$ , allora  $f$  è strettamente crescente in  $I$ . Nota che il fatto che  $f$  sia strettamente crescente in  $\overset{\circ}{I}$  non implica che  $f'(x) > 0$  in  $\overset{\circ}{I}$ . Per esempio,  $f(x)x^3$  si annulla

in un punto solo.

4. Posto  $Z = \{x \in \overset{\circ}{I} \mid f'(x) = 0\}$ , allora  $f$  è strettamente crescente in  $I$  se e solo se:

- (a)  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$ ;
- (b)  $Z$  non ha punti interni (non contiene intervalli).

### Proof

Poiché  $f$  è derivabile in  $\overset{\circ}{I}$  e continua in  $I$ ,  $\forall a < b \in I$ ,  $f$  è continua in  $[a, b] \subseteq I$  e  $f$  è derivabile in  $(a, b) \in \overset{\circ}{I}$ . Per Lagrange, risulta quindi che esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

1. è chiaro che se  $f$  è costante in  $I$ ,  $\forall x \in I, f'(x) = 0$  in particolare  $\forall x \in \overset{\circ}{I}$ . Viceversa, supponiamo che  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$ . Per quanto detto sopra  $\forall a < b \in I, \exists c$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$$

cioè  $\forall a < b \in I$  risulta  $f(a) = f(b)$  e  $f$  è quindi costante.

2. supponiamo che  $f$  sia monotona crescente in  $I$  e sia  $x_0$  interno ad  $I$ . Allora,  $\forall x > x_0, x \in I$ , risulta che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

da cui facendo tendere  $x$  a  $x_0^+$  e usando la monotonia del limite, si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_+ f(x_0) = f'(x_0)$$

in quanto la funzione è derivabile. Viceversa, se  $\forall x, f'(x) \geq 0$  allora  $\forall a < b \in I$  dalla conclusione di Lagrange segue che esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0$$

da cui  $f(b) \geq f(a)$ , e quindi  $f$  è monotona crescente.

3. Se  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$  dal ragionamento fatto nel precedente punti, deduciamo che  $\forall a < b \in I, f(a) < f(b)$  e quindi  $f$  è strettamente crescente.
4. Supponiamo che  $f$  sia strettamente crescente, per il secondo punto abbiamo che è  $\forall \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$ . Se  $Z$  contenesse un intervallo  $(a, b)$ , allora per il primo punto  $f$  sarebbe costante in  $(a, b)$ , equindi non monotona crescente  $\zeta$ . Viceversa,  $f$  è monotona crescente, e  $Z$  non contiene intervalli. Supponiamo che  $f$  non sia strettamente crescente, esistono  $a < b \in I$  tale che  $f(a) \geq f(b)$  ma poiché  $f$  è monotona crescente,  $f(a) = f(b)$ , e quindi in tale intervallo è costante. Quindi,  $(a, b) \in Z$ , contro l'ipotesi  $\zeta$ .

### Teorema

Sia  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $(a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ . Supponiamo

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lambda$$

In particolare, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  allora  $f$  è derivabile da sinistra in  $b$  e

$$D_- f(b) = \lambda \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

Vale lo stesso per  $[a, b)$  continua in  $[a, b)$  e derivabile in  $(a, b)$  con il limite da sinistra e per  $I \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $I$  e derivabile in  $I \setminus \{c\}$  per il quale esiste

$$\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$$

### Proof

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Per ogni  $x \in (a, b)$ ,  $f$  è continua in  $[x, b)$  ed è derivabile in  $(x, b)$  quindi soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange ed esiste  $c_x$  tale che

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(c_x), \quad x < c_x < b$$

Per  $x \rightarrow b^-$ ,  $c_x \rightarrow b^-$  e quindi  $f'(c_x) \rightarrow \lambda$  da cui

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lambda = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

nel caso considerato se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , non solo la derivata sinistra esiste finita, ma  $f'(x)$  risulta continua da sinistra. In particolare il teorema fornisce una condizione solo sufficiente per la derivabilità: se il limite della derivata esiste, finito o infinito, allora esiste anche il limite del rapporto incrementale e i due limiti sono uguali. Ma, può accadere che esista

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

ma non

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

### Esempio

Verificare per quali valori di  $\alpha > 0$ ,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in  $x = 0$ .  $f$  è continua per ogni  $\alpha > 0$  per il teorema dei due carabinieri. Infatti,  $|f(x)| \leq |x|^\alpha \rightarrow 0 = f(0)$  per  $x \rightarrow 0$ . Il rapporto è dato da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \nexists & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Per ogni  $\alpha$ ,  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$f'(x) = D[|x|^\alpha \cos \frac{1}{x}] = |x|^{\alpha-2} \left\{ \alpha |x| \operatorname{sgn} x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right\}$$

Quindi  $f'(0)$  esiste per  $\alpha > 1$ ,  $f'$  è continua in  $x = 0$  se e solo se  $\alpha > 2$ .

### Teorema Teorema di de L'Hôpital

Siano  $f, g: (a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\xi \leq +\infty$  e supponiamo che  $f, g$  siano derivabili in  $(a, \xi)$ , che  $g, g'$  siano diverse da zero in  $(a, \xi)$ , che o  $f, g \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \xi^-$ , o  $g(x) \rightarrow \pm\infty$  e che

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Analogamente per limiti destri e bilaterali

### Proof

Consideriamo il caso in cui  $\xi = b \in \mathbb{R}$  e  $f, g \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow b$ . Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vogliamo applicare il teorema di Cauchy: osserviamo che poiché  $f(x), g(x) \rightarrow 0$ , posto  $f(b) = g(b) = 0$  risulta che la funzione così estese sono

1. continue in  $(a, b]$ ;
2. derivabili in  $(a, b)$

e inoltre per ipotesi  $g'(x), g(x) \neq 0$  in  $(a, b)$  e valgono le ipotesi del teorema di Cauchy.  $[x, b]$  per ogni  $x \in (a, b)$ . Quindi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$$

e per Cauchy esiste  $c_x \in (x, b)$  tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Per  $x \rightarrow b^-$ ,  $c_x \rightarrow b^-$  e per ipotesi

$$\frac{f(c_x)}{g(c_x)} \rightarrow \lambda$$

cosicché

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## 16.5 Derivate di ordine superiore

Sia  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in ogni punto  $x \in (a, b)$ . Così è definita  $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f'$  è derivabile in  $x_0 \in (a, b)$  si dice che  $f$  è derivabile 2 volte in  $x_0$  e si pone

$$f''(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = (f')'(x_0)$$

Notiamo che affinché una funzione  $f$  sia doppiamente derivabile in  $I$ , dobbiamo avere:

- esiste un intorno  $I_1$  di  $x_0$  tale che  $f$  è derivabile in tutti i punti di  $I_1$ ;
- la funzione  $f': I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $x_0$ .

Le derivate di ordine successive vengono definite iterativamente in maniera analoga:  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile  $n$  volte in  $x_0$  se esiste un intorno  $I_1$  di  $x_0$  tale che le derivate di ordine  $k \leq n-1$  esistano in  $I_1$  e la derivata di ordine  $n-1$  è derivabile in  $x_0$ .

### Proposition Proprietà delle funzioni derivabili n-volte

Siano  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili  $n$  volte in  $x_0 \in I$ . Allora,

1.  $f \pm g$  è derivabile  $n$  volte in  $x_0$  e

$$D^n(f \pm g)(x_0) = D^n f(x_0) \pm D^n g(x_0)$$

2.  $fg$  è derivabile  $n$  volte in  $x_0$  e vale la formula di Leibniz

$$D^n(fg)(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f(x_0) \cdot D^{n-k} g(x_0)$$

3. se  $g(x_0) \neq 0$  ( $g(x_0) \neq 0$  in un intorno), allora  $f/g$  è derivabile  $n$  volte in  $x_0$

### Proposition Derivabilità della funzione composta

Siano  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile  $n$  volte in  $x_0 \in I$  e  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile  $n$  volte in  $y_0 = f(x_0) \in J$ . Allora,  $g \circ f: f^{-1}(J) \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile  $n$  volte in  $x_0$ .

### Proposition Derivabilità della funzione inversa

Sia  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  invertibile e derivabile  $n$  volte in  $x_0$ , e supponiamo che  $f'(x_0) \neq 0$ . Allora,  $f^{-1}$  è derivabile  $n$  volte in  $y_0 = f(x_0)$ .

### Proposition Serie di MacLaurin dell'esponenziale

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{D^k f(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \left( \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \end{aligned}$$



**Proposition** Serie di MacLaurin del seno

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{D^{2k+1} \sin(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + o(x^{2n+3}) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}
\end{aligned}$$

**Proposition** Serie di MacLaurin del coseno

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \\ O(x^{2n+2}) \end{cases}$$

**Proposition** Serie di MacLaurin di  $\log(1-x)$ 

Abbiamo che

$$D^k \log(1-x) = -(k-1)!(1-x)^{-k}$$

Allora

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{k!} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

**Proposition** Serie di MacLaurin di  $\log(1+x)$ 

Abbiamo che

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

**Proposition** Serie di MacLaurin di  $(1+x)^\alpha$ 

Notiamo che se  $\alpha = n$ , allora è un polinomio di grado  $n$ , quindi lui stesso è il suo Polinomio di Taylor

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k}$$

Altrimenti,

$$D^k (1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1) (1+x)^{\alpha-k}$$

e allora

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

con i coefficienti binomiali generalizzati.

### Esempio Espansione di MacLaurin del seno iperbolico

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}$$

### Esempio Espansione di MacLaurin del coseno iperbolico

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + XX$$

### Esercizio

Verificare per induzione che per ogni  $k$ ,

$$D^k e^{-\frac{1}{x^2}} = P_k(x) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

con  $x \neq 0$ , dove  $P_k$  è un polinomio di grado minore o uguale a  $k$  in  $\frac{1}{x^3}$ . Dedurre inoltre che per tutte le  $k$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} D^k \left( e^{-\frac{1}{x^2}} \right) = 0 = D^k \left( e^{-\frac{1}{x^2}} \right) (0)$$

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $C^\infty$  e sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

la sue serie di Taylor in  $x_0$ . Poiché è infinitamente differenziabile, soddisfa le ipotesi di Teorema di Taylor per tutte le  $n$  e quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Notiamo che  $P_n(x)$  è la somma parziale della serie di Taylor.

### Teorema

La serie di Taylor di  $f$  calcolata in  $x$  converge a  $f(x)$  se e solo se  $R_n(x) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Tale uguaglianza vale per le funzioni viste. Per  $e^x$  abbiamo il resto in forma di Lagrange

$$R(x) = \frac{D^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove  $\xi$  è compreso fra 0 e  $x$ . Abbiamo allora

$$R(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

in ogni caso  $e^\xi \leq \max\{e^\xi, 1\} \leq e^{|x|}$  Quindi,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} x^{n+1} \rightarrow 0$$

per gerarchia degli infiniti. Quindi,  $e^x$  è pari alla sue serie di MacLaurin.

Per il seno abbiamo

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(D^{2n+2} \sin)(\xi)}{(2n+2)!}$$

e siccome le derivate pari del seno sono o il seno o il seno negativo, abbiamo

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|\pm \sin(\xi)|}{(2n+2)!} x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0$$

## 16.6 Classificazione punti stazionari

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile 2 volte in  $x_0$  interno ad  $I$  e supponiamo che  $f'(x_0) = 0$ , quindi  $x_0$  è stazionario:

1. se  $f''(x_0) > 0$  allora  $x_0$  è un punto di minimo relativo forte;
2. se  $f''(x_0) < 0$  allora  $x_0$  è un punto di massimo relativo forte;
3. se  $x_0$  è un punto di minimo relativo (debole o forte) allora  $f''(x_0) \geq 0$ ;
4. se  $x_0$  è un punto di massimo relativo (debole o forte) allora  $f''(x_0) \leq 0$ ;

### Proof

Per la formula di Taylor al secondo ordine centrata in  $x_0$  abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

e poiché  $f'(x_0) = 0$ , risulta che

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \\ &= (x - x_0)^2 \left\{ \frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \right\}, \quad \forall x \neq x_0 \end{aligned}$$

Per definizione l'ultimo termine tende a zero per  $x \rightarrow 0$ , quindi prendiamo  $\varepsilon = \frac{1}{4}|f''(x_0)| > 0$  nel caso (1) o (2) dalla definizione di limiti risulta che

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta$$

abbiamo

$$\left| \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \right| < \frac{1}{4}|f''(x_0)|$$

Consideriamo il primo caso senza perdita di generalità, quindi  $f''(x_0) > 0$  risulta quindi che

$$-\frac{1}{4}f''(x_0) < \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0)$$

da cui

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} > \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}f''(x_0)$$

Sostituendo in una vecchia equazione otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x - x_0)^2 \left\{ \frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \right\} \\ &\geq \frac{1}{4}f''(x_0)(x - x_0)^2 > 0, \quad \forall 0 < |x - x_0| < \delta \end{aligned}$$

e  $x_0$  è punto di minimo relativo forte.  
 Il caso in cui  $f''(x_0) < 0$  segue notando che

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0) < 0$$

Per la seconda parte del teorema consideriamo  $x_0$  come punto di minimo relativo (forte o debole). Sappiamo che  $f'(x_0) = 0$  per Fermat e inoltre deve essere  $f''(x_0) \geq 0$  perché altrimenti  $x_0$  sarebbe punto di massimo relativo forte e quindi non potrebbe essere punto di minimo relativo. Analogamente per l'ultimo punto.

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$  interno ad  $I$  con

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Allora

1. Se  $n$  è dispari,  $x_0$  non è estremante;
2. Se  $n$  è pari,  $x_0$  è un estremante e più precisamente:
  - (a) è un minimo relativo forte se  $f^{(n)}(x_0) > 0$ ;
  - (b) è un massimo relativo forte se  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .

### Teorema Teorema di Darboux per le funzioni derivate

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$

1. se  $I = [a, b] \wedge f'(a)f'(b) < 0$  allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ ;
- 2.

$$\forall l \mid \inf_I f' < l < \sup_I f', \exists c \in (a, b) \mid f'(c) = l$$

Nota che non occorre supporre che la derivata sia continua (in tal caso sarebbe ovvio).

### Proof

1. la funzione parte scendendo e termina salendo (senza perdita di generalità). Per definizione

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0$$

Per permanenza del segno esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

in  $a, a + \delta$  cioè  $f(x) < f(a)$  in  $(a, a + \delta)$  e  $f$  non può assumere minimo in  $x = a$ . Analogamente si verifica che  $f(x) - f(b) < 0$  in  $(b - \delta, b)$  e quindi  $f$  non può assumere minimo in  $x = b$ . Ma  $f$  è derivabile, e quindi continua in  $[a, b]$  e per Weierstrass assume minimo assoluto in un punto  $c \in [a, b]$  che è quindi interno. Per Fermat  $f'(c) = 0$ .

## 16.7 Convessità

Una funzione si dice convessa se il suo grafico giace sempre sotto quelle delle corde secanti (strettamente o meno).

### Definizione Funzione convessa

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è (strettamente) convessa in  $I$  se  $\forall x_1 < x_2 \in I$  vale (una delle seguenti)

1.  $\forall x$  tale che  $x_1 < x < x_2$ , vale

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2.  $\forall x$  tale che  $x_1 < x < x_2$ , vale

$$f(x) < f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

3. notando che

$$\forall x_1 \leq x \leq x_2, \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

e ponendo

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in (0, 1), \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda$$

e risolvendo la prima rispetto ad  $x$  si trova  $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$  e quindi la condizione diventa

$$\forall \lambda \in (0, 1), f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

o minore o uguale per la convessità semplice.

Notiamo infatti che  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \end{cases}$$

è l'equazione parametrica che passa per i punti  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$ .

La convessità esprime il fatto che la regione

$$E_f = \{(x, y) \mid x \in I \wedge y \geq f(x)\}$$

detta *epigrafico*, è un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^2$ .

Infatti,  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  è convesso se  $\forall x, y \in C$ , l'insieme del segmento

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subseteq C$$

### Definizione Funzione concava

Una funzione è concava se  $-f$  è convessa.

Convesso è come dire concava verso l'alto, e concava è concava verso il basso.

### Proposition

Siano  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervallo. Allora

1. se  $f, g$  sono convesse e  $\alpha, \beta \geq 0$ , allora  $\alpha f + \beta g$  è convessa ed è strettamente convessa se almeno una delle due lo è e il corrispondente coefficiente è strettamente positivo;
2. le funzioni lineari affini (polinomi di primo grado) sono le uniche funzioni che sono sia concave che convesse (non strettamente);
3.  $f$  è (strettamente) convessa se e solo se  $f(x) + ac + b$  lo è.

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervallo. Sono equivalenti:

1.  $f$  è convesso (rispettivamente strettamente convessa);
2.  $\forall x_1 < x_0 < x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

3.  $\forall x_0 \in I$ , il coefficiente angolare

$$F_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è una funzione monotona crescente (rispettivamente strettamente crescente) in  $I \setminus \{x_0\}$ .

### Proof

1. (1)  $\implies$  (2): osserviamo che per ipotesi  $f$  è convessa in  $I$  se  $\forall x_1 < x_2$  e  $\forall x_0$  tale che  $x_1 < x_0 < x_2$  vale la disuguaglianza 2 nella definizione

$$f(x_0) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Poiché

$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

possiamo riscrivere la disequazione nella forma

$$\left\{ \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \right\} f(x_0) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Quindi rearranging

$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} [f(x_0) - f(x_1)] \leq \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_0)]$$

e dividendo otteniamo la seconda condizione.

2. (2)  $\implies$  (1): supponiamo che  $f$  non sia convessa (strettamente convessa). Allora esistono punti  $x_1 < x_0 < x_2$  tale che

$$f(x_0) > f(x_1) \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Gli stessi conti fatti sopra, mostrano che per i punti selezionati non vale la disuguaglianza (2) ovvero non vale il minore stretto (vale il maggiore uguale).

3. (2)  $\implies$  (3): slides;
4. (3)  $\implies$  (2): ovvio.

La convessità non implica la continuità. Vi è solamente un unico controesempio: quello di una funzione concava dove gli estremi dell'intervallo sono punti distaccati più in alto dei punti vicini.

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  convessa su  $I$  intervallo.

1.  $\forall x_0$  interno ad  $I$ , esistono finite  $D_-f(x_0) \leq D_+f(x)$ . In particolare ciò implica che  $f$  è continua in  $x_0$ ;
2.  $\forall x_1 < x_2$  interni ad  $I$  si ha

$$D_-(x_1) \leq D_+f(x_1) \leq D_-f(x_0) \leq D_+f(x_2)$$

Inoltre, se  $f$  è strettamente convessa,  $D_+f(x_1) < D_-f(x_2)$ .

3.  $\forall x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  interni ad  $I$

$$D_+f(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq D_-f(x_4)$$

In particolare,  $f$  è Lipschiziana in  $[x_1, x_4]$ .

### Proof

1. segue direttamente dal punto (3) del teorema (1). Infatti, il rapporto incrementale centrato in  $x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è una funzione monotona crescente di  $x$ . Quindi,  $\forall x_1 < x < x_0 < x' < x_2$  con  $x_1, x_2$  interni, vale

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

facendo tendere  $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x' \rightarrow x_0^+$ , i limiti dei rapporti incrementali esistono per monotonia e si conclude che esistono

$$D_-f(x_0) \leq D_+f(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

2.,3. si ottengono con considerazioni simili. (bisogna considerare 5 punti)

### Corollario

Se  $f$  è convessa (rispettivamente strettamente convessa) in  $I$  e derivabile allora  $f'(x)$  è monotona crescente (rispettivamente monotona crescente)

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$  aperto. Allora  $f$  è (strettamente) convessa se e solo se  $\forall x_0 \in I$  e  $\forall x \in I$  per  $x \neq x_0$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $f$  sia (strettamente) convessa- Quindi dal un teorema precedente,  $\forall x_1 < x_0 < x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Dalla disuglianza destra si ricava

$$\forall x_2 > x_0, f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

e da quella sinistra si deduce che

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

e qiomdo vale la tesi. Se  $f$  è strettamente convessa valgono le disuglianze strette nell'ultima disuglianza, e quindi lo stesso vale per quella prima.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che valga

$$\forall x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

con  $x \neq x_0$ . Allora gli stessi conti mostrano che per  $x_2 > x_1$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \implies \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq f'(x_0)$$

e analogamente per  $x_1 < x_0$  si ha

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$$

Quindi

$$\forall x_1 < x_0 < x_2, \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

e  $f$  è strettamente (strettamente) convessa per un vecchio teorema.

### Teorema

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$  aperto. Allora

1.  $f$  è (strettamente) convessa in  $I$  se e solo se  $f'$  è (strettamente) monotona crescente.
2. se  $f$  è derivabile 2 volte in  $I$ ,  $f$  è convessa se e solo se  $f'' \geq 0$  in  $I$ . Se  $f'' > 0$ , allora  $f$  è strettamente convessa.

### Proof

1. ( $\Rightarrow$ ) Sappiamo già che  $f$  (strettamente) convessa implica  $f'$  monotona crescente.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $f'$  sia (strettamente) monotona crescente.

Mostriamo che vale una vecchia condizione, cioè  $\forall x_0 \in I$  e  $\forall x \neq x_0$ ,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Per il teorema di Lagrange  $\forall x \neq x_0$ , esiste  $\xi$  compreso tra  $x_0$  e  $x$  tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

Sia  $x > x_0$  allora  $\xi > x_0$  e poiché  $f'$  è monotona (strettamente) crescente otteniamo

$$f'(\xi) \geq f'(x_0)$$

e quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f'(x_0) \geq 0$$

Analogamente se  $x < x_0$  allora  $\xi < x_0$  cosicché  $f'(\xi) \leq f'(x_0)$  e  $x - x_0 < 0$ .

Come prima,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. (2) segue da (1) perché se  $f$  è derivabile 2 volte allora  $f$  è monotona crescente se e solo se  $f'' \geq 0$  e  $f'' > 0$  implica  $f'$  strettamente monotona

### Definizione

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $I$  e sia  $c$  tale che  $f$  è convessa per  $x < c$  e concava per  $x > c$  o viceversa. Allora,  $c$  è un *punto di flesso*.



### Teorema

Sia  $f$  derivabile 1 volta in  $I$  e supponiamo che

1.  $x = c$  sia un punto di flesso per  $f$ ;
2.  $f$  sia derivabile 2 volte in  $x = c$ .

Allora,  $f''(c) = 0$ .

Infatti, poiché  $x = c$  è di flesso,  $f$  è convessa (concava) in un intorno sinistro di  $c$ , e concava (convessa) in un intorno destro di  $c$ , è monotona crescente (decrecente) per  $x < c$  e monotona decrescente (crescente) per  $x > c$  è un punto estremo per  $f'$ . Per il teorema di Fermat,  $(f')'(c) = f''(c) = 0$ .

## 16.8 Asintoti

## 16.9 Studio di funzioni

### Esercizio

Dimostrare che se  $f$  è continua, periodica e non costante, ammette un minimo periodo positivo. La funzione di Dirichlet è periodica di ogni razionale, quindi non ha un periodo minimo.

## 17 Integrali

### 17.1 Integrazione di Riemann

### 17.2 Area del cerchio

L'area del cerchio è la medesima considerato i triangoli inscritti e circoscritti

### 17.3 Funzione gradini

#### Definizione Funzione a scala

Sia  $I \neq \emptyset$  un intervallo non vuoto. Una funzione  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice a scalini se esiste una partizione  $\{I_k\}$  di  $I$  mediante intervalli (eventualmente ridotti ad un punto) tale che  $\varphi$  è costante su ciascun intervallo  $I_k$ .

Una tale partizione di  $I$  viene detta adattata a  $\varphi$ . Osserviamo che suddividendo uno o più intervalli di una partizione adattata, si ottiene una partizione adattata. Diciamo che  $\{I_k\}$  è una partizione indotta di  $\varphi$  se la funzione assume valore diversi su intervalli consecutivi. Una partizione adattata si ottiene suddividendo uno o più intervalli della partizione indotta.

Notiamo che se  $\varphi$  è a scala,  $\{I_k\}$  è una partizione adatta e  $\alpha_k$  è il valore costante che  $\varphi$  assume in  $I_k$

$$\varphi(x) = \alpha_k$$

per tutte le  $x \in I_k$ . Allora possiamo scrivere

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}(x)$$

Infatti poiché  $\{I_k\}$  è una partizione di  $I$ ,  $\forall x \in I$ , esiste una sola  $\bar{k}$  tale che  $x \in I_{\bar{k}}$ .

#### Proposition Proprietà delle funzioni a scala

Siano  $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  a scala.

1. esiste una partizione  $\{I_k\}$  di  $I$  adattata ad entrambe;
2. la combinazione lineare delle due è a scala. Infatti sia  $\{I_k\}$  una partizione di  $I$  adattata ad ambo le funzioni cosicché

$$\varphi = \sum \alpha_k \chi_{I_k}$$

e

$$\psi = \sum \beta_k \chi_{I_k}$$

Allora

$$a\varphi + b\psi = \sum (a\alpha_k + b\beta_k) \chi_{I_k}$$

che è a scala.

3. Se  $\{J_l\}$  è una famiglia di sottointervalli di  $I$  e  $\gamma_l \in \mathbb{R}$ , allora

$$\sum \gamma_l \chi_{J_l}$$

è a scala (conseguenza del risultato precedente). Quindi, le funzioni a scala sono precisamente le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.

4.  $\psi\varphi$  e, se  $\psi \neq 0$  in  $I$ ,  $\frac{\varphi}{\psi}$  sono a scala.
5. Se  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  è a scala,  $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione, e  $\varphi(I) \subseteq A$  cosicché è definita  $F \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora,  $F \circ \varphi$  è a scala. In particolare, se  $\varphi$  è a scala allora  $|\varphi|$  è a scala e

$$\varphi_+ = \frac{|\varphi| + \varphi}{2}$$

e

$$\varphi_- = \frac{|\varphi| - \varphi}{2}$$

sono a scala.

### Definizione

Sia  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  a scala e sia  $\{I_k\}_{k=1}^n$  la partizione indotta da  $\varphi$  cosicché

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}$$

Definiamo allora

$$\int_I \varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_k \ell(I_k)$$

Poiché ogni partizione adattata si ottiene suddividendo uno o più intervalli della partizione indotta e poiché se se

$$I_k = \bigcup_i J_i$$

e  $\varphi(x) = \alpha_k$  su  $I_k$  dove i  $J_i$  sono disgiunti tra loro, allora

$$\alpha_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{i=1} \alpha_k \cdot \ell(J_{k_i})$$

Risulta allora che se  $\{J_i\}_{i=1}^m$  è una partizione adattata a  $\varphi$  e

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{J_i}$$

risulta che

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \ell(J_i) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \ell(I_k)$$

e quindi nella definizione dell'integrale non corre usare la rappresenta di  $\varphi$  ottenute mediante le partizioni indotte. Si può usare una qualunque partizione adattata.

### Proposition Proprietà dell'integrale di funzioni a scala

Siano  $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  a scala

1.

$$\int_I (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_I \varphi + \beta \int_I \psi$$

Infatti, se  $\{J_i\}$  è una partizione adattata ad entrambe  $\varphi$  e  $\psi$  e

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{J_i}, \quad \psi = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{J_i}$$

cosicché

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=1}^m (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) \chi_{J_i}$$

risulta la tesi ovviamente spezzando la sommatoria non c'è bisogno che lo scriva è troppo ovvio.

2. *monotonia*: se  $\varphi \leq \psi$  su  $I$  allora

$$\int_I \varphi \leq \int_I \psi$$

infatti se  $\{I_k\}$  è adattata ad entrambe  $\varphi$  e  $\psi$  cosicché

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{J_i}, \quad \psi = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{J_i}$$

$\varphi(x) \leq \psi(x)$  per tutte le  $x \in I$  vale se e solo se  $a_k \leq b_k$  per tutte le  $k$  e quindi

$$\int_I \varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_k \ell(I_k) \leq \sum_{k=1}^n \beta_k \ell(I_k) = \int_I \psi$$

In particolare se  $\psi \geq 0$  su  $I$  allora

$$\int_I \psi \geq 0$$

3. *disuguaglianza triangolare*: se  $\varphi$  è a scala cosicché  $|\varphi|$  è a scala allora

$$\left| \int_I \varphi \right| \leq \int_I |\varphi|$$

4. *additività rispetto all'intervallo di integrazione*: Se  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  è a scala e  $I = I_1 \cup I_2$  disgiunti allora  $\varphi$  è a scala su  $I_1$  e  $I_2$  e

$$\int_I \varphi = \int_{I_1} \varphi + \int_{I_2} \varphi$$

5. Se  $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  sono a scala e  $\varphi(x) = \psi(x)$  eccetto che in un numero finito di punti (nell'integrale di Lebesgue anche numerabile) di punti allora

$$\int_I \varphi = \int_I \psi$$

### Definizione Integrale di Riemann

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  limitata su  $I$  intervallo limitato. L'integrale inferiore di  $f$  su  $I$

$$\underline{\int}_I f = \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\}$$

e superiore

$$\bar{\int}_I f = \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\}$$

Ovviamente  $\underline{\int}_I f \leq \bar{\int}_I f$ . Diciamo che  $f$  è integrabile nel senso di Riemann se  $\underline{\int}_I f \leq \bar{\int}_I f$ . In tal caso, il valore comune è l'*integrale di Riemann*

$$R - \int_I f$$

Quindi per ogni funzione  $\varphi, \psi$  a scala dove  $\varphi \leq f \leq \psi$  vale

$$\int_I \varphi \leq \underline{\int}_I f \leq \bar{\int}_I f \leq \int_I \psi$$

Se  $s = S$  allora la funzione è Riemann integrabile

$$\int_I \varphi \leq R - \int_I f \leq \int_I \psi$$

**Lemma**

Se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è a scala allora  $f$  è Riemann integrabile e

$$\int_I f = R - \int_I f$$

**Proof**

Basta dimostrare che se  $f$  è a scala vale

$$\begin{aligned} \int_I f &= \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\} \end{aligned}$$

Ci limitiamo a verificare la prima uguaglianza. Per tutte le  $\varphi$  a scala con  $\varphi \leq f$  per monotonia dell'integrale di funzione a scala

$$\int_I \varphi \leq \int_I f$$

e passando al suo su  $\varphi$  a scala  $\varphi \leq f$  otteniamo

$$\sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \leq \int_I f$$

D'altra parte poiché  $f$  è a scala,  $f$  stessa è una delle funzioni a scala, quindi per definizione di supremum

$$\int_I f \leq \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \leq \int_I f$$

Quindi vige l'uguaglianza.

Come conseguenza, se  $f$  è a scala togliamo il prefisso di  $R-$ .

Non tutte le funzioni (limitate su intervallo limitata) sono integrabili nel senso di Riemann. Nonostante la maggior parte non lo sia, non è banale mostrarne una. Per esempio la funzione di Dirichlet  $1_{\mathbb{Q}}$  non è integrabile nel senso di Riemann. Abbiamo che

$$s(1_{\mathbb{Q}}, [a, b]) = 0, \quad S(1_{\mathbb{Q}}, [a, b]) = b - a$$

Per mostrare ciò cominciamo con  $1_{\mathbb{Q}} \geq 0$  e per definizione di integrale inferiore

$$s(1_{\mathbb{Q}}, [a, b]) = \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq 1_{\mathbb{Q}} \text{ in } I \right\} \leq \int_I f \geq \int_I 0 = 0$$

D'altra parte, sia

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}$$

una funzione a scala con  $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0)$  su  $[a, b]$  dove  $\{I_k\}$  è una partizione di  $I = [a, b]$  cioè

$$\bigcup_k I_k = I$$

e  $I_j \cap I_k = \emptyset$  se  $j \neq k$  cosicché

$$\begin{aligned}\int_I \varphi &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) = 0}}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k)\end{aligned}$$

Poiché  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$  sono densi in  $\mathbb{R}$ , ogni intervallo  $I_k$  tale che  $\ell(I_k) > 0$  contiene infinite razionali e infiniti irrazionali. In particolare, esiste  $x_k \in I_k$  con  $x_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e poiché  $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0)$  su  $I_k$  avremo

$$\varphi(x_n) \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$$

Quindi, per tutte le  $k$ ,  $\ell(I_k) \geq 0$  e  $\alpha_k \leq 0$  da cui sostituendo nell'integrale, il valore è al massimo zero. Quindi

$$\int_I \varphi \leq 0$$

per ogni  $\varphi$  a scala con  $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}$ . Allora passando al sup otteniamo

$$s(1_{\mathbb{Q}}, I) \leq 0 \implies s(1_{\mathbb{Q}}, I) = 0$$

La dimostrazione per il fatto che  $S(1_{\mathbb{Q}}, I) = \ell(I)$  è simile: Abbiamo che  $1_{\mathbb{Q}} \leq 1$  su  $I$ , il che implica che

$$S(1_{\mathbb{Q}}, I) = \inf \left\{ \int_I \psi \mid \psi \in \mathcal{S} \wedge \psi \geq 1_{\mathbb{Q}} \text{ in } I \right\} \leq \int_I 1 = \ell(I)$$

Il viceversa è come sopra: per la disuglianza inversa, supponiamo che  $1_{\mathbb{Q}}$  sia a scala con  $\psi \geq 1_{\mathbb{Q}}$  e sia

$$\psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{I_k}$$

dove  $\{I_k\}$  è una partizione adattata a  $\psi$  come sopra. Allora

$$\int_I \psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \ell(I_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k)$$

Allora per tutte le  $k$  abbiamo  $\ell(I_k) > 0$  esiste  $x'_k \in I_k$  tale che  $x'_k \in \mathbb{Q}$  da cui

$$\beta_k = \psi(x'_k) \geq 1_{\mathbb{Q}}(x'_k) = 1$$

e sostituendo nell'integrale troviamo

$$\begin{aligned}\int_I \psi &= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) \\ &\geq \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) = \ell(I_k)\end{aligned}$$

cioè  $\forall \psi \geq 1_{\mathbb{Q}}$  a scala

$$\int_I \psi \geq \ell(I)$$

e passando all'infimum abbiamo

$$S(1_{\mathbb{Q}}, I) \geq \ell(I)$$

### Teorema CNS per la Riemann integrabilità

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  limitata su  $I$  intervallo limitato. Sono equivalenti:

1.  $f$  è Riemann integrabile su  $I$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  a scala con  $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$  e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon = \int_I (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) < \varepsilon$$

3. Esistono successioni di funzioni a scala  $\{\varphi_n\}$  e  $\{\psi_n\}$  tale che per tutte le  $n$   $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  su  $I$  e

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \int_I (\psi_n - \varphi_n) \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ . Inoltre esistono

$$\lim_n \int_I \varphi_n = \lim_n \int_I \psi_n = \int_I f$$

### Proof

1. (1)  $\implies$  (2): sia  $f$  integrabile nel senso di Riemann. Per definizione,

$$\begin{aligned} \int_I f &= \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\} \\ &= \bar{\int}_I f = \int_I f \end{aligned}$$

Per definizione di infimum e supremum (finiti)  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\varphi_\varepsilon$  a scala con  $\varphi_\varepsilon \leq f$  su  $I$  tale che

$$\int_I \varphi_\varepsilon > \int_I f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f - \frac{\varepsilon}{2}$$

e analogamente esiste  $\psi_\varepsilon$  a scala con  $\psi_\varepsilon \geq f$  su  $I$  tale che

$$\int_I \psi_\varepsilon < \bar{\int}_I f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Da questo segue quindi

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \left( \int_I f + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left( \int_I f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Il maggiore o uguale a zero è per monotonia delle funzioni a scala

2. (2)  $\implies$  (3): per ipotesi  $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  a scala tale che  $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$  su  $I$  e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Posto  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , per tutte le  $n$  esiste  $\varphi_n, \psi_n$  a scala con  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  su  $I$  e

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n < \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

e quindi vale la terza proposizione.

3. (3)  $\implies$  (1): Per ipotesi esiste  $\{\varphi_n\}$  e  $\{\psi_n\}$  successioni di funzioni a scala tale che per ogni  $n$   $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  e

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \rightarrow 0$$

Ancora per definizione, per tutte le  $n$  abbiamo

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \geq \int_I \varphi_n$$

e

$$\int_I f = \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\} \leq \int_I \varphi_n$$

da cui

$$0 \leq \int_I f - \int_I \varphi_n \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \rightarrow 0$$

cosicché  $\int_I f$  non può che non essere uguale a  $\int_I f$  e quindi  $f$  è integrabile nel senso di Riemann. Inoltre, otteniamo che

$$0 \leq \int_I f - \int_I \varphi_n = \int_I f - \int_I \varphi_n \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \rightarrow 0$$

e questo dimostra che esiste

$$\lim_n \int_I \varphi_n = \int_I f$$

Analogamente per l'altro caso.

### Proposition Proprietà dell'integrale

Siano  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  limitata su  $I$  limitato

1. Se  $f$  e  $g$  sono Riemann integrabili, allora

(a) *linearità*  $\forall a, b, af + bg$  è Riemann-integrabile e vale

$$\int_I af + bg = a \int_I f + b \int_I g$$

(b)  $fg$  è Riemann integrabile e se  $\frac{1}{g}$  è limitata su  $I$   $f/g$  è Riemann-integrabile su  $I$

2. se  $f, g$  sono Riemann-integrabili su  $I$  e  $f \leq g$  su  $I$  allora

$$\int_I f \leq \int_I g$$

In particolare se  $g \geq 0$  su  $I$ ,

$$\int_I g \geq 0$$

3. *disuglianza triangolare* se  $f$  è Riemann interabile su  $I$  allora  $f^+$  e  $f^-$  e  $|f|$  sono Riemann integrabili e vale

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

4. *additività rispetto all'insieme di integrazione* Se  $I = I_1 \cup I_2$  disgiunti allora  $f$  è integrabile su  $I$  se e solo se è integrabile su  $I_1$  e su  $I_2$  e in tal caso

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$$

Nel caso in cui  $I = I_1 \cup I_2$  ma gli intervalli non sono necessariamente disgiunti allora la conclusione sull'integrabilità vale ma la (prima) viene sostituita da

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f - \int_{I_1 \cap I_2} f$$



5. Se  $f = g$  eccetto al più in un numero finito di punti allora  $f$  è Riemann integrabile se e solo se  $g$  è Riemann integrabile e in tal caso

$$\int_I f = \int_I g$$

### Proof

Non sono difficili da dimostrare, basta il teorema sulle condizioni necessarie sufficienti e le proprietà degli integrali delle funzioni a scala.

- Dimostriamo quella sull'addizione. Per tutte le  $\varepsilon > 0$  esistono funzioni a scala  $\varphi_\varepsilon^f \leq f \leq \psi_\varepsilon^f$  su  $I$  tale che

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^f - \int_I \varphi_\varepsilon^f \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e  $\varphi_\varepsilon^g \leq g \leq \psi_\varepsilon^g$  su  $I$

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^g \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posto  $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g$  e  $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g$  risulta che  $\varphi_\varepsilon$  e  $\psi_\varepsilon$  sono a scala e

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g \leq f + g \leq \psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g = \psi_\varepsilon$$

e

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon &< \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^f - \int_I \varphi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^g \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi  $f + g$  è Riemann integrabile inoltre per ogni  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_I (\varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g) &\leq \int_I f + g \leq \int_I (\psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g) \\ \int_I \varphi_\varepsilon^f + \int_I \varphi_\varepsilon^g &\leq \int_I f + \int_I g \leq \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g \end{aligned}$$

da cui deduciamo che

$$\int_I (f + g) - \left( \int_I f + \int_I g \right) \leq \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \psi_\varepsilon^g - \left( \int_I \varphi_\varepsilon^f + \int_I \varphi_\varepsilon^g \right) = \varepsilon$$

da cui concludiamo che

$$\left| \int_I (f + g) - \left( \int_I f + \int_I g \right) \right| < \varepsilon$$

per tutte le  $\varepsilon > 0$ .

- Dimostriamo ora che  $f^+$  è Riemann integrabile. Siccome  $f$ , quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  a scala tale che  $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$  e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Chiaramente,  $\varphi_\varepsilon^+ \leq f^+ \leq \psi_\varepsilon^+$  e vale

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^+ - \int_I \varphi_\varepsilon^+ \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Otteniamo quindi l'integrabilità. Analogamente si verifica che  $f^-$  è Riemann integrabile.

- Poiché  $|f| = f^+ - f^-$

$$\left| \int_I f \right| = \left| \int_I (f^+ - f^-) \right| = \left| \int_I f^+ - \int_I f^- \right|$$

che per disuguaglianza triangolare è minore o uguale di

$$\leq \left| \int_I f^+ \right| + \left| \int_I f^- \right| = \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I (f^+ + f^-) = \int_I |f|$$

### Teorema Classi di funzioni integrabili

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervallo limitato

1. se  $I = [a, b]$  e  $f$  è
  - (a) monotona su  $I$ ;
  - (b) continua su  $I$ ;
 allora  $f$  è limitata su  $I$  (o perché è monotona e quindi compresa fra  $f(b)$  e  $f(a)$ , o perché è continua su un chiuso limitato per Weierstrass) ed è integrabile su  $I = [a, b]$ ;
2. se  $I = [a, b)$  e  $f$  è limitata in  $I$  e
  - (a) monotona su  $I$ ;
  - (b) continua su  $I$ ;
 allora  $f$  è Riemann integrabile. (Questo punto contiene anche quello precedente).
3. se  $I$  è un intervallo limitato e  $f$  è limitata e continua eccetto che in un numero finito di punti, allora  $f$  è integrabile
4. se  $I$  è un intervallo,  $f$  è limitata su  $I$ , e l'insieme

$$B = \{x \in I \mid f \text{ non è continua in } x\}$$

ha un numero finito di punti di accumulazione, allora  $f$  è Riemann integrabile su  $I$ .

In effetti si dimostra che  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  limitata su  $I$  limitato è Riemann integrabile se e solo se l'insieme  $B$  ha misura di Lebesgue nulla. Cioè  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\{I_n\}$  successione di intervalli aperti tale che

$$B \subseteq \bigcup_n I_n \wedge \sum_n \ell(I_n) < \varepsilon$$

### Proof

1. (a) Suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . I punti  $x_k$  hanno forma  $a + k \frac{b-a}{n}$  con  $0 \leq k \leq n$ . La partizione di  $[a, b]$  è data da  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$  con  $0 < k < n$ . Per ogni  $k$  siano

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

e siano per ogni  $n$

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n m_k \chi_{I_k}$$

e

$$\psi_n = \sum_{k=1}^n M_k \chi_{I_k}$$

cosciché  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  sono a scala,  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  su  $I = [a, b]$  e

$$\int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{k=1}^n m_k \frac{b-a}{n}$$

e rispettivamente

$$\int_I \psi_n = \sum_{k=1}^n M_k \frac{b-a}{n}$$

Dal teorema CNS per l'integrabilità risulta che se

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$$

allora  $f$  è Riemann integrabile su  $I$ .

Sia  $f$  monotona in  $I = [a, b]$ . Senza perdita di generalità supponiamo che  $f$  sia monotona crescente (altrimenti applichiamo a  $-f$  e l'opposto di una funzione integrabile è integrabile). Cosicché

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_{k-1})$$

e

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_k)$$

(qua  $\sup$  e  $\inf$  corrispondono a  $\max$  e  $\min$  siccome è monotona). Sostituendo ciò nell'equazione CNS dell'integrabilità abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \\ &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Sia  $f$  continua su  $[a, b]$ . Mostriamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$$

facendo vedere che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N$

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

Usiamo la definizione di limite per  $n \rightarrow \infty$ . Poiché  $f$  è continua su  $[a, b]$  chiuso e limitato,  $f$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ , e quindi esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall x, x' \in [a, b]$  con  $|x - x'| < \varepsilon$  si ha che  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . In questo caso sostituiamo  $\varepsilon$  con  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ . L'idea è quella di stimare  $M_k - m_k$ . La distanza fra i punti dove assumono il massimo  $M_k$  e il minimo  $m_k$  non può essere maggiore della lunghezza dell'intervallo. Sia allora  $n$  tale che  $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$ . Per ogni  $k$ ,  $f$  è continua su  $[x_{k-1}, x_k]$  chiuso e limitato, e quindi per Weierstrass  $\exists x'_k, x_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tale che

$$M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x'_k) \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k)$$

cosicché

$$M_k - m_k = f(x'_k) - f(x_k) = |f(x'_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

poiché  $|x'_k - x_k| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$ . Quindi, sostituendo questo nella solita disuguaglianza otteniamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) < \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

2. (a) Sia  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e monotona. Per monotonia, esiste

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$$

che è finito in quanto  $f$  è limitata. Posto  $\bar{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ L & x = b \end{cases}$$

$\bar{f}$  è monotona su  $[a, b]$  e quindi ivi integrabile e quindi  $\bar{f} = f$  è integrabile nel sottoinsieme  $[a, b)$ .

- (b) sia  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e continua. Per dimostrare che  $f$  è integrabile su  $[a, b)$ , costruiamo una funzione a scala sopra e sotto.  $\forall \varepsilon > 0$  costruiamo  $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  a scala tale che  $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$  e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Osserviamo che  $f$  è continua su  $[a, b - \delta]$  per tutti  $\delta > 0$ . Per il punto precedente  $f$  è quindi integrabile su  $[a, b - \delta]$  per tutte  $\delta > 0$ . Ci rimane allora da considerare l'intervallo  $[b - \delta, b)$ . Per ipotesi  $f$  è limitata su  $[a, b]$ , quindi  $\exists M$  tale che  $-M \leq f(x) \leq M$  per tutte le  $x \in [a, b]$ . Scegliamo  $\delta$  tale che

$$2M\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

poiché  $f$  è integrabile su  $[a, b - \delta]$ , dato  $\varepsilon$  esistono funzioni a scala (che scegliamo costanti)  $\varphi'_\varepsilon, \psi'_\varepsilon$  tale che  $\varphi'_\varepsilon \leq f \leq \psi'_\varepsilon$  su  $[a, b - \delta]$  e

$$0 \leq \int_{[a, b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int_{[a, b-\delta]} \varphi'_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiamo allora

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} \varphi'_\varepsilon & x \in [a, b - \delta] \\ -M & x \in [b - \delta, b) \end{cases}$$

e

$$\psi_\varepsilon = \begin{cases} \psi'_\varepsilon & x \in [a, b - \delta] \\ M & x \in [b - \delta, b) \end{cases}$$

Siccome  $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  sono a scala,  $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$  in  $[a, b]$  e

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{[a, b]} \psi_\varepsilon - \int_{[a, b]} \varphi_\varepsilon &= \left( \int_{[a, b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int_{[a, b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) \\ &\quad + \left( \int_{[b-\delta, b)} M - \int_{[b-\delta, b)} (-M) \right) \\ &= \left( \int_{[a, b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int_{[a, b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) + 2M\delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Si deduce facilmente che se  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata e continua allora è Riemann integrabile (al posto che il ragionamento solo a destra lo faccio da ambo le parti) e quindi se  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata e continua eccetto che in  $c \in (a, b)$ , poiché  $(a, b) = (a, c) \cup \{c\} \cup (c, b)$  e  $f$  è integrabile su ciascuno dei 3 sottointervalli  $f$  è integrabile su  $(a, b)$ . In generale, con molteplici punti mancanti, si fa lo stesso procedimento isolandoli.
4. Esercizio: nell'intorno

### Corollario

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  limitata su  $I$  limitato e supponiamo che esista una partizione  $\{I_k\}_{k=1}^n$  tale che  $f$  è o continua o monotona in ciascun  $I_k$ . Allora  $f$  è integrabile su  $I$ .

Sia  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $(a, b)$ . Allora, comunque essa venga estesa a  $[a, b]$  rimane integrabile e l'integrale ha lo stesso valore siccome

$$\int_{\{a\}} f = 0$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_a^b f$$

senza ambiguità. Osserviamo poi che dalla proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione, l'integrale si può spezzare.

### Definizione

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $I$  (quindi  $I$  è limitato e  $f$  è limitata su  $I$ ). Allora  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  poniamo

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{(a,b)} f & a < b \\ 0 & a = b \\ -\int_b^a f & b < a \end{cases}$$

### Definizione

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su ogni sottointervallo limitato di  $I$ . Fissato  $a \in I$  definiamo la *funzione integrale* di  $f$  centrata in  $a$

$$F_a(x) = \int_a^x f = \begin{cases} \int_{(a,x)} f & a < x \\ 0 & a = x \\ -\int_{(x,a)} f & a > x \end{cases}$$

### Esercizio

Scrivere la relazione fra  $F_a(x)$  e  $F_b(x)$  per  $a \neq b$ .

### Lemma

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su ogni sottointervallo di  $I$  e siano  $a, b, c \in I$ . Allora,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

### Proof

La dimostrazione si fa a casi e ne diamo solo due. Se  $a < c < b$  il risultato segue dall'additività rispetto all'insieme di integrazione. Supponiamo  $a < b < c$ . Allora, sempre per l'additività rispetto

all'insieme di integrazione

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

da cui

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

### **Teorema** Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $[a, b]$  e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

la sua funzione integrale centrata in  $a$ . Allora:

1.  $F$  è Lipschiziana in  $[a, b]$  (in particolare continua su  $[a, b]$ );
2. Se  $f$  è continua in  $x_0 \in [a, b]$  allora  $F$  è derivabile in  $x_0$  e vale

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

3. Se  $f$  è continua in  $[a, b]$  allora  $F$  è una primitiva di  $f$  in  $[a, b]$ ;
4. Se  $f$  è continua in  $[a, b]$  e  $G$  è una sua primitiva (che per il punto precedente esiste, quindi qua stiamo dimostrando che se è continua esiste la primitiva) allora  $\forall x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$$

e in particolare

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

### **Proof**

1. per ipotesi  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  e quindi in particolare è limitata, cioè  $\exists M$  tale che  $|f(t)| \leq M$  per tutte le  $t \in [a, b]$ . Dati  $x, x' \in [a, b]$ , supponendo senza perdere la generalità

che  $x < x'$  (il modulo nella definizione di Lipschiziana ce lo permette), abbiamo

$$\begin{aligned}
 |F(x') - F(x)| &= \left| \int_a^{x'} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\
 &= \left| \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x'} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\
 &= \left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \\
 &= \left| \int_{[x, x']} f(t) dt \right| \\
 &\leq \int_{[x, x']} f(t) dt \\
 &\leq M \cdot \int_{[x, x']} 1 dt = M(x' - x) = M|x' - x|
 \end{aligned}$$

2. Sia  $f$  continua in  $x_0 \in [a, b]$ . Mostriamo che  $F$  è derivabile in  $x_0$  con  $F'(x_0) = f(x_0)$  cioè che

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \rightarrow f(x_0)$$

per  $h \rightarrow 0$  cioè che

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \rightarrow 0$$

per  $h \rightarrow 0$ . Possiamo scrivere  $\forall h \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \cdot \left( \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) - f(x_0) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{h} \cdot \left( \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - hf(x_0) \right) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{h} \cdot \left( \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \right) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right|
 \end{aligned}$$

Se  $h > 0$  (la disuglianza triangolare vale quando l'estremo superiore è maggiore a quello inferiore), allora

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt$$

Per ipotesi,  $f$  è continua in  $x_0$  quindi dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta$  tale che  $\forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  vale

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Quindi se  $0 < h < \delta$ , per tutte le  $t \in [x_0, x_0 + h]$

$$|t - x_0| < \delta$$

e sostituendo e usando la monotonia dell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &< \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon = \frac{1}{h} h \varepsilon = \varepsilon, \quad \forall 0 < h < \delta \end{aligned}$$

Per definizione

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| = 0$$

cioè  $D_+ F(x_0) = f(x_0)$ .

Se invece  $h < 0$  vale ancora

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right|$$

Per usare la disuguaglianza triangolare dobbiamo invertire il segno

$$\left| \frac{1}{-h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| = -\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt$$

Come prima,  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$  se  $-\delta < h < 0$ . Quindi,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt &\leq -\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \\ &= -\frac{1}{h} (-h \varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi  $D_- F(x_0) = f(x_0)$ .

3. Se  $f$  è continua in  $x_0 \forall x_0$  allora per il punto 2  $F$  è derivabile in  $x_0$  con  $F'(x_0) = f(x_0)$ .  
 $\forall x_0 \in [a, b]$  e  $F$  è una primitiva di  $f$ .
4. Sia  $G$  una primitiva di  $f$ . Per il punto 3,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una primitiva. Quindi per il teorema di caratterizzazione delle primitive esiste  $C$  tale che  $G(x) = F(x) + C$  per tutte le  $x \in [a, b]$ . Possiamo dire qualcosa della funzione integrale solo per  $x = a$

$$G(a) = F(a) + C = C = \int_a^a f(t) dt = 0$$

Quindi  $C = G(a)$  e si ottiene  $G(x) = F(x) + G(a)$  cioè

$$F(x) = G(x) - G(a)$$



### Corollario

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che  $f$  sia integrabile nel senso di Riemann su ogni sottointervallo limitato. Fissati  $a \in I$  sia

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Allora,

1.  $F$  è Lipschitziana su ogni sottointervallo limitato che contiene  $a$  (non possiamo dire che sia Lipschitziana su tutto). Infatti se  $a \in [\alpha, \beta] \subseteq I$  applichiamo il punto 1 del teorema a tale intervallo. In particolare,  $F$  è continua su tutto  $I$ , in quanto Lipschitziana su tutti i sottointervalli;
2. Se  $f$  è continua in  $x_0 \in I$ , allora  $F$  è derivabile in  $x_0$  e  $F'(x_0) = f(x_0)$ ;
3. se  $f$  è continua in  $I$ ,  $F$  è una primitiva di  $f$  in  $I$ ;
4. se  $G$  è una primitiva di  $f$  in  $I$ ,  $\forall x \in I$

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

### Corollario Formula di derivazione delle funzioni integrali

Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su ogni sottointervallo limitato di  $J$  e siano  $\alpha, \beta: I \rightarrow J$  continue. Definiamo

$$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y) dy$$

che è ben posto. Allora:

1.  $H$  è continua su  $I$ .
2. Se  $f$  è continua su  $J$  e  $\alpha, \beta$  sono derivabili in  $I$ ,  $H$  è derivabile in  $I$  e vale

$$H'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

### Proof

Scelto  $y_0 \in J$ , possiamo scrivere,  $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y) dy = \int_{\alpha(x)}^{y_0} f(y) dy + \int_{y_0}^{\beta(x)} f(y) dy \\ &= F(\beta(x)) - F(\alpha(x)) \end{aligned}$$

dove

$$F(y) = \int_{y_0}^y f(t) dt$$

è la funzione integrale di  $f$  centrata in  $y_0$ .

1. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,  $F$  è continua su  $J$  e quindi  $H$  è continua come composizione di funzioni continue.
2. Se  $f$  è continua in  $J$ ,  $F$  è derivabile in  $J$  con  $F'(y) = f(y)$  e se inoltre  $\alpha, \beta$  sono derivabili dal teorema di derivazione delle funzioni composte,  $H$  è derivabile e

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) \\ &= f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \end{aligned}$$

**Teorema Teorema della media integrale**

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $[a, b]$  e sia

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

la sua *media integrale*. Allora,

1.  $\inf_{[a,b]} f \leq M \leq \sup_{[a,b]} f$ ;
2. se  $f$  è continua su  $[a, b]$  allora  $\exists c \in [a, b]$  tale che  $M = f(c)$ .

Se  $f$  è la velocità di un punto materiale allora la media integrale è la velocità media.

**Proof Teorema della media integrale**

1. Poiché  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  per definizione è ivi limitata e per ogni  $x \in [a, b]$  abbiamo che

$$-\infty < \inf_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f < +\infty$$

da cui integrando su  $[a, b]$  e usando la monotonia otteniamo

$$\left( \inf_{[a,b]} f \right) (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \left( \sup_{[a,b]} f \right) (b-a) dx = \left( \sup_{[a,b]} f \right) (b-a)$$

2. Se  $f$  è continua su  $[a, b]$  allora  $\inf f = \min_{[a,b]} f$  e  $\sup f = \max_{[a,b]} f$  e, per il punto precedente abbiamo che

$$\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \max_{[a,b]} f$$

e per il teorema dei valori intermedi esiste  $c \in [a, b)$  tale che

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

**Corollario Dimostrazione alternativa del punto 3 del TFCl**

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $[a, b]$ . Allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una primitiva di  $f$  in  $[a, b]$ .

**Proof Dimostrazione alternativa del punto 3 del TFCl**

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt\end{aligned}$$

Poiché  $f$  è continua in  $[a, b]$ . Quindi se  $h > 0$ ,  $f$  è continua in  $[x, x+h]$  e per il teorema della media integrale esiste  $c_x \in [x, x+h]$  tale che

$$f(c_x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

se  $h \rightarrow 0^+$ ,  $c_x \rightarrow x^+$  e poiché  $f$  è continua

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(c_x) = f(x)$$

Se  $h < 0$  si scrive

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{-h} \int_{x+h}^x f(t) dt$$

### Teorema Teoremi di annullamento

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $[a, b]$ .

1. Se  $\forall x \in [a, b]$ ,

$$\int_a^x f(t) dt = 0$$

allora  $f = 0$ ;

2. se  $f \geq 0$  e  $\int_a^b f(t) dt$  allora  $f(t) = 0$ .

### Proof Teoremi di annullamento

1. Per il TFCD,  $f$  continua implica che

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

e derivabile con  $F'(x) = f(x)$ . Per ipotesi,  $\forall x, F(x) = 0$  e quindi per tutte le  $x$  vale  $0 = F'(x) = f(x)$ ;

2. supponiamo  $f \geq 0$  allora

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una funzione monotona crescente, quindi  $\forall x \in [a, b], F(a) = 0 \leq F(x) \leq F(b)$ . Per ipotesi,  $F(b) = 0$ , quindi  $F(x) = 0$  per tutte le  $x$ . Allora mediante il punto precedente si giunge alla tesi.

### Teorema

Se  $f$  è integrabile e  $\geq 0$  su  $[a, b]$ , continua in  $x_0$  e  $f(x_0) > 0$ , allora

$$\int_a^b f(t) dt > 0$$

Una funzione è integrabile se e solo se la misura dell'insieme delle sua discontinuità è zero.

## 17.4 Integrali impropri

Ricordiamo che l'integrale di Riemann è definito per funzioni limitate su intervalli limitati.

### Definizione integrale improprio

Sia  $f: [a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\xi \leq +\infty$  e  $f$  possibilmente illimitata in un intorno (sinistro) di  $\xi$ . Supponiamo che  $f$  sia Riemann integrabile su  $[a, b]$ . (Per esempio  $f$  è continua su  $[a, \xi]$ ). Se esistono finito o infinito

$$I - \int_a^b f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \xi^-} \int_a^b f(t) dt$$

tale limite si dice integrale improprio/generalizzato di  $f$  su  $[a, \xi)$ . Se tale limite è finito diciamo che  $f$  è integrabile in senso improprio, e il suo integrale improprio converge. Se tale limite è infinito diciamo che l'integrale improprio diverge a  $\pm\infty$ . Se il limite non esiste diciamo che l'integrale non è definito.

Dobbiamo verificare che il nuovo integrale improprio coincida con quello classico nel caso in cui  $\xi < +\infty$  e  $f$  è integrabile su  $[a, \xi]$

$$R - \int_a^b f(t) dt = I - \int_a^b f(t) dt$$

Notiamo che  $f$  integrabile su  $[a, \xi)$  implica che sia integrabile su  $[a, \xi]$  comunque determiniamo  $f(\xi)$ . Inoltre,

$$\int_{[a, \xi)} f(t) dt = \int_{[a, \xi]} f(t) dt$$

Possiamo supporre quindi che  $f$  sia integrabile sull'intervallo chiuso. Per il TFCI la funzione integrale

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt$$

è continua su  $[a, \xi]$ . In particolare,

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \xi^-} F(b) = \lim_{b \rightarrow \xi^-} \int_a^b f(x) dx$$

Il primo termine  $F(\xi)$  è quello di Riemann e l'ultimo è quello improprio, quindi coincide con quello di Riemann quando esiste.

Analogamente si definisce l'integrale improprio sull'intorno destro. Sia ora  $f: (\eta, \xi): \mathbb{R}$  con  $-\infty \leq \eta < \xi \leq +\infty$  possibilmente illimitata in un intorno (destro) di  $\eta$  e (sinistro) di  $\xi$  e supponiamo che  $f$  sia integrabile su  $[a, b]$  per ogni  $\eta < a < b < \xi$ . Fissiamo ora un punto  $c \in (\eta, \xi)$  e definiamo

$$\int_{\eta}^{\xi} f(t) dt = \int_{\eta}^c f(t) dt + \int_c^{\xi} f(t) dt$$

purché ambo esistano e non si presentino forma di indecisione  $+\infty - \infty$ . La definizione ha senso se non dipende da  $c$ . Osserviamo infatti che a secondo membro la definizione non dipende da  $c$ :

1.  $\forall c, c' \in (\eta, \xi)$  vale

$$\begin{aligned} \int_c^{\xi} f(t) dt &= \lim_{b \rightarrow \xi^-} \left( \int_c^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^b f(t) dt \right) \\ &= \int_c^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^b f(t) dt \end{aligned}$$

che esiste e solo se il limite esiste.

2. analogamente

$$\begin{aligned} \int_c^{\eta} f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow \eta^+} \int_a^c f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \eta^+} \left( \int_a^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^c f(t) dt \right) \\ &= \int_a^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^c f(t) dt \end{aligned}$$

Sommando otteniamo

$$\int_{\eta}^c f(t) dt + \int_c^{\eta} f(t) dt = \int_a^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^c f(t) dt + \int_c^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^{\xi} f(t) dt$$

che si semplifica e quindi è indipendente da  $c$ .

Infine, se  $f: (\eta, \xi) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile su ogni intervallo limitato contenuto in  $(\eta, \xi) \setminus \{x_0\}$  e possibilmente illimitata in un intorno di  $x_0$

$$\int_I f(x) dx = \int_{\eta}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{\xi} f(x) dx$$

### Proposition Proprietà integrali impropri

Siano  $f, g: [a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in senso improprio. Allora

1.  $\alpha f + \beta g$  è integrabile e vale la regola così scontata che non la scrivo.
2. **non** è vero che il prodotto  $fg$  è necessariamente integrabile. (E.g.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  su  $(0, 1)$  è integrabile ma non  $f^2(x)$ ).
3. *monotonia*: se  $f \leq g$ , allora l'integrale di  $f$  è minore o uguale dell'integrale di  $g$ . (Basta che gli integrali esistano, non c'è bisogno che siano integrabili).
4. *additività*;
5. **non** vale che  $|f|$  è necessariamente integrabile in senso improprio. Tuttavia,

$$\int_a^\xi |f(t)| dt$$

è sempre definito ed è maggiore o uguale del modulo dell'integrale.

### Teorema

Sia  $f: [a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $[a, b]$  per tutte le  $b \in (a, \xi)$  e supponiamo che  $f(x) \geq 0$  su  $[a, b]$ . Allora,

$$\int_a^\xi f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \xi^-} \int_a^b f(x) dx$$

esiste sempre, finito o infinito.

### Proof

Basta notare che la funzione integrale

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

è monotona crescente, e le funzioni monotone crescenti ammettono sempre limite.

### Teorema Esistenza integrale improprio

Sia  $f: [a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $[a, b]$  per  $a < b < \xi$  e  $f(x) \geq 0$  definitivamente in  $[a, \xi]$ . Allora,

$$\int_a^\xi f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \xi^-} \int_a^b f(t) dt$$

exists finite or infinite.

### Proof Esistenza integrale improprio

Infatti la funzione  $F(x)$  è monotona crescente.

### Teorema Teorema di confronto / confronto asintotico

Siano  $f, g: [a, \xi] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili su  $[a, b]$  per  $a < b < \xi$  e non-negative su  $[a, \xi)$ .

1. se  $f(x) \leq g(x)$  su  $[a, \xi]$ . Allora,

$$\int_a^\xi f(t) dt \leq \int_a^\xi g(t) dt$$

che esistono. In particolare se  $g$  è integrabile in senso improprio allora lo è anche  $f(x)$ .

2. se  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow \xi^-$ , allora  $f(x)$  è integrabile in senso improprio se e solo se  $g(x)$  è integrabile.  
 3. se  $f(x) = O(g(x))$  per  $x \rightarrow \xi^-$ , allora se

$$\int_a^\xi g(t) dt < +\infty \implies \int_a^\xi f(t) dt$$

### Proof Teorema di confronto / confronto asintotico

1. per  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  su  $[a, \xi]$  cosicché per  $a < b < \xi$  risulta, per monotonia dell'integrale

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

e la conclusione segue passando al limite per  $b \rightarrow \xi^-$ .

2. Preso  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  si deduce che esiste  $c \in [a, \xi)$  tale che

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

in  $(c, \xi)$ . Cioè

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x), \quad c < x < \xi$$

Quindi integrando tra  $c$  e  $b$  con  $c < b < \xi$  otteniamo

$$\frac{1}{2} \int_c^b g(x) dx \leq \int_c^b f(x) dx \leq \frac{3}{2} \int_c^b g(x) dx$$

e passando al limite

$$\frac{1}{2} \int_c^\xi g(x) dx \leq \int_c^\xi f(x) dx \leq \frac{3}{2} \int_c^\xi g(x) dx$$

Quindi

$$\int_c^\xi f(x) dx$$

è finito se e solo se tale è  $\int_c^\xi g(x) dx$

$$\int_c^\xi g(x) dx$$

e la conclusione segue dal fatto che

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\xi f(x) dx$$

e analogamente per  $g$ .

3. come sopra esiste  $c \in [a, \xi)$  tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

su  $(c, \xi)$  cioè  $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$  su  $(c, \xi)$  e come sopra

$$\int_c^\xi f(x) dx \leq M \int_c^\xi g(x) dx$$

Le conclusioni circa il carattere degli integrali nel teorema precedente valgono se si assume che le ipotesi valgano solo definitivamente in  $[a, \xi)$ .

TODO: mettere convergenza integrale da 1 a infinito di  $x^{-p}$  da usare per i confronti

### Esempio

$$\int_e^\infty \frac{1}{x^p (\log x)^q} dx$$

converge se e solo se  $p > 1$  con  $q$  arbitrario, oppure  $p = 1 \wedge q > 1$ .

### Teorema Criterio integrale di convergenza

Sia  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monotona decrescente (e quindi integrabile su  $[1, b]$  per ogni  $b > 1$ ) e non-negativa, cosicché

$$\int_1^\infty f(t) dt$$

esista finito o infinito. Allora,

$$\int_1^\infty f(t) dt < +\infty \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) < +\infty$$

### Proof Criterio integrale di convergenza

Consideriamo gli intervalli di estremi interi di  $f(x)$ . Siccome

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(t) dt$$

esiste,  $\forall b_n \rightarrow \infty$ ,

$$\int_1^{b_n} f(t) dt \rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(t) dt = \int_1^\infty f(t) dt$$

Quindi basta mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(t) dt$$



esiste finito se e solo se

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) < +\infty$$

Per ogni  $n$  scriviamo

$$\int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx$$

Per tutte le  $k$  abbiamo

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k-1) dx = f(k)$$

Sostituendo nella sommatoria otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) &\leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \\ \sum_{h=2}^n f(h) &\leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \end{aligned}$$

Facendo tendere  $n$  ad infinito si ottiene la tesi.

### Definizione

Sia  $f: [a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $[a, b]$  per  $a < b < \xi$ . Si dice che  $f$  è *assolutamente integrabile* se  $|f|$  è integrabile su  $[a, \xi)$  cioè se

$$\int_a^{\xi} |f(t)| dt < +\infty$$

### Teorema

Sia  $f: [a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente integrabile  $[a, b]$ . Allora  $f$  è integrabile su  $[a, \xi]$  e vale

$$\left| \int_a^{\xi} f(t) dt \right| \leq \int_a^{\xi} |f(t)| dt$$

### Proof

Posto

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt$$

la tesi è che

$$\lim_{b \rightarrow \xi^-} F(b)$$

esiste finito e che

$$\left| \lim_{b \rightarrow \xi^-} F(b) \right| \leq \lim_{b \rightarrow \xi^-} \int_a^b |f(t)| dt$$

Ricordiamo che esiste finito il limite se e solo se la condizione di Cauchy è soddisfatta per  $x \rightarrow \xi^-$ . Quindi per tutte le  $\varepsilon > 0$  esiste un intorno sinistro di  $\xi$

$$I^- \begin{cases} I^- = (\xi - \delta, \xi) & \xi \text{ finito} \\ I^- = (M, +\infty) & \xi \text{ infinito} \end{cases}$$

tale che per tutte le  $x, x' \in I \setminus \{\xi\}$ ,

$$|g(x) - g(x')| < \varepsilon$$

Per ipotesi

$$\int_a^\xi |f(t)| dt = \lim_{b \rightarrow \xi^-} \int_a^b |f(t)| dt = \lim_{b \rightarrow \xi^-} G(b)$$

è finito. Quindi,  $G(b)$  soddisfa la condizione di Cauchy e dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $I^-$  tale che  $\forall x, x' \in I^-$

$$|G(x) - G(x')| < \varepsilon$$

Supponendo senza perdita di generalità che  $x < x'$  abbiamo quindi

$$\left| \int_a^{x'} |f(t)| dt - \int_a^x |f(t)| dt \right| < \varepsilon$$

Questo è precisamente

$$\int_x^{x'} |f(t)| dt < \varepsilon$$

Ma allora,

$$\left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| = |F(x') - F(x)| \leq \int_x^{x'} |f(t)| dt < \varepsilon$$

Quindi,  $F$  soddisfa la condizione di Cauchy e esiste finito

$$\lim_{b \rightarrow \xi^-} F(b) = \int_a^\xi f(t) dt$$

Poiché

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

per  $b \rightarrow \xi^-$  si ottiene la disuguaglianza

$$\left| \int_a^\xi f(t) dt \right| \leq \int_a^\xi |f(t)| dt$$