Topologia I

Paolo Bettelini

Contents

1 Topologia

Assioma Estensionalità

$$A = B \iff \forall x (x \in A \iff x \in B)$$

Proposition Relazione di aggiunzione

Valgono

$$S \subseteq f^{-1}(T) \iff f(S) \subseteq T$$

Da cui derivano $f(f^{-1})(T) \subseteq T$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere suriettiva. E pure $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Ma in generale l'uguaglianza non vale in quanto f potrebbe non essere iniettiva.

L'operazione di controimmagine preserva tutte le operazioni insiemistiche.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap i \in I f^{-1}(A_i)$$
$$X \backslash f^{-1}(T) = f^{-1}(Y \backslash T)$$

L'operazione di immagine preserva in generale solo le unioni.

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

le altre due non valgono necessariamente.

Abbiamo solo

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

se f non è iniettiva la direzione opposta non vale necessariamente. Infatti potrebbero esistere x, x' tale che $x \in A \backslash B$ e $x' \in B \backslash A$ tali che $f(x) = f(x')$. La medesima logica vale per il complementare.

Proposition Proprietà universale del quoziente

Sia $f\colon X \to Y$ e $\sim$ relazione di equivalenza su X. Sono equivalenti:

1. f è costante sulle classi di equivalenza

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

2. f fattorizza (in modo necessaria unico, essendo π suriettivo) attraverso π, cioè $\exists_{=1}\, g\colon X/_\sim \to Y$ tale che $g \circ \pi = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/_\sim \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof

1. $(2) \implies (1) : f = g \circ \pi$. Abbiamo

$$x \sim x' \implies \pi(x) = \pi(x') \implies g(\pi(x)) = g(\pi(x'))$$

che sono uguali a $f(x)$ e $f(x')$.

2. (1) $\implies$ (2) : Definiamo $g\colon X/_{\sim}\colon Y$ come

$$g([x]) \triangleq f(x)$$

bisogna verificare che sia ben posta. Vogliamo quindi che se $[x]=[x']$ allora $f(x)=f(x')$. Ma ciò è garantito dalla ipotesi.

In $\mathbb{R}^n$.

$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n \cdot d_\infty(x,y)$$

2 08 ottobre 2025

Esercizio

Le topologie con la proprietà che le intersezioni arbitrari di aperti sono aperti, possono essere caratterizzate esplicitamente. Essi sono esattamente, a meno di omeomorfismo, gli spazi topologici della seguente forma: dato un insieme preordinato $(P,\le)$, la topologia di Alexandrov $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ su $\mathcal{P}$ è la topologia i cui aperti sono i sottoinsiemi $U \subseteq \mathcal{P}$ tale che $\forall p \le q, p \in U \implies q \in U$.

2.1 Generated topology

Proposition

Data una collezione di topologie $\{\tau_i\}_{i\in I}$ su un isieme X. La famiglia

$$\tau = \bigcap_{i\in I} \tau_i$$

è ancora una topologia su X.

Corollario

Sia X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ famiglia di sottoinsiemi. Esiste la topologia meno fine su X che contiene i sottoinsiemi in S come aperti. Tale topologia viene detta la topologia generata da S.

Definizione Topologia dell'unione disgiunta

Sia $\{X_i \mid i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici. Allora lo spazio topologico è definita come

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i$$

Possiamo definire astrattamente la topologia dell'unione disgiunta su $\sqcup X_i$ come la topologia meno fine che rende tutte le mappe $\tau_i\colon X_i \to \bigsqcup X_i$ continue.
Alternativamente, possiamo definire la topologia come la topologia generata dalla famiglia di sottoinsiemi dell'insieme $\sqcup X_i$ che sono aperti in qualcuno degli X_i.

Vediamo una caratteristica esplicita di questa topologia

Proposition

Un insieme

$$A \subseteq \bigsqcup_{i\in I} X_i$$

è aperto per la topologia dell'unione disgiunta se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni $i \in I$.

Proof

Definiamo τ come la collezione dei sottoinsiemi dati nella proposizione tale che $A \cap X_i$ è aperto in X_i. Usando il fatto che su X_i abbiamo delle topologia possiamo dimostrare che tale collezione soddisfa gli assiomi di topologia:

1. Siano $A, B \in \tau$. Allora $A \cap X_i$ e $B \cap X_i$ sono entrambi aperti in X_i. Di conseguenza la loro unione è ancora aperta in X_i. Possiamo scrivere

$$(A \cap X_i) \cup (B \cap X_i) = (A \cap B) \cap X_i$$

   che è appunto aperto.

Notiamo che τ contiene tutti i sottoinsiemi che sono aperti in qualche X_i. Infatti, $A \subseteq X_i$ è aperto di X_i, $A \cap X_i = A$ aperto di X_i e $A \cap X_j = \varnothing$ aperto di X_j per $j \neq i$. Quindi τ contiene la topologia dell'unione disgiunta (per definizione di quest'ultima come topologia generate). Viceversa, dato $A \in \tau$ vogliamo mostrare che A è aperto per la topologia dell'unione disgiunta.

$$A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

$$A = A \cap \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) = \bigsqcup_{i \in I} (A \cap X_i)$$

che è una disgiunzione di insiemi aperti

Queste due definizioni sono una un po' il duale dell'altra, da due punti di vista differenti. Da una parte considerando le applicazioni (ci arriviamo come la topologia più fine), mentre l'altro è come se costruissimo la topologia dal basso.

Possiamo verificare che questa è effettivamente la topologia più fine che rende queste mappe continue. In generale, data una famiglia di applicazioni $f_i \colon (X_i, \tau_I) \to y$ si può considerare la topologia più fine che rende le mappe f_i continue. In particolare nel caso di un'unica funzione la topologia più fine che rende f continua è la topologia detta topologia quoziente indotta da f.

Esempio Topologia di Zaniski

Let $\mathbb{K}$ be a field and consider $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Consider the affine space given by the cartesian exponent $\mathbb{K}^n$. For each $f \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ consider

$$D(f) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \cdots, a_n) \neq 0\}$$

the set $\{D(f)\}$ is a basis for the topology of $\mathbb{K}^n$ called Zaniski topology.

Proof Che è una base

Chiaramente $D(0) = \varnothing$ e $D(1) = \mathbb{K}^n$. The latter already proves that the whole space can be expressed as a union. For the intersection, consider

$$D(f) \cap D(g) = \{\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \cdots, a_n) \neq 0 \wedge g(a_1, \cdots, a_n) \neq 0\}\}$$

Siccome un campo è un dominio di integrità la condizione è equivalente a $(f \circ g)(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$ ma ciò è uguale a $D(f \circ g)$. Quindi $\{D(f)\}$ forma una base per una topologia sul dato spazio.

Esercizio
Caratterizzare i chiusi di questa topologia. Quindi generiamo tutti gli aperti e prendiamo i complementari, o usiamo le leggi di de morgan. I chiusi sono generati da un ideale.

Proposition
Sia B un sottoinsieme di uno spazio X. Allora

$$\overline{B} = \{x \in X \mid \forall U \in I(x), U \cap B \neq \varnothing\}$$

Proof todo

Definizione
Uno spazio topologico si dice T_1 se ogni punto $\{x\}$ (come sottoinsieme dello spazio) è chiuso.

Per esempio la retta euclidea.

Proposition
Sia X uno spazio topologico. Allora X è T_1 se e solo se $\forall x \in X$,

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \{x\}$$

Proof
($\Longrightarrow$) Abbiamo ovviamente l'inclusione $\supseteq$. Viceversa, dimostriamo che

$$\bigcap_{U \in I(x)} U \subseteq \{x\}$$

che è euivalente a dire

$$X \backslash \left(\bigcup_{U \in I(x)} U \right) \geq X \backslash \{x\}$$

Prendiamo quindi un punto $y \in X \backslash \{x\}$ che è come dire $y \neq x$. Siccome lo spazio è T_1, abbiamo che $\{y\}$ è chiuso e quindi il suo complementar e $X \backslash \{x\}$ è un aperto che contiene x in quanto $x \neq y$. Quindi $X \backslash \{y\} \in I(x)$. Ponendo $U = X \backslash \{y\}$ otteniamo quindi che

$$y \in X \backslash U = X \backslash (X \backslash \{y\}) = \{y\}$$

($\Longleftarrow$) Applichiamo la caratterizzazione della chiusura del singoletto, cioè $y \in \overline{\{x\}}$ è come dire che per ogni $U \in I(x)$, $U \cap \{x\} \neq \varnothing$. Ma tutto ciò è equivalente a dire che

$$x \in \bigcap_{U \in I(x)} U = \{y\}$$

che è equivalente a dire che $x = y$. Quindi, $\overline{x} = \{x\}$ e quindi è chiuso.

Definizione Definizione di convesso in $\mathbb{R}^n$
.

Sono proprietà topologiche T_1, proprietà di Hausdorff, connessione, connessione per archi.

3 Lezione del 23

L'operazione di controimmagine fra le topologia presenta tutte le operazioni insiemistiche. Sezione sugli invarianti topologici? (Sposando anche la definizione di quest'ultima).

Lemma

Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo. Allora, per ogni sottospazio $S \subseteq X$, la restrizione di f a S è un omeomorfismo.

Proof

Un omeomorfismo è un operazione continua biettiva con inverso continua. Inoltre vi è la proprietà universale della topologia di sottospazio.

Esempio

L'intervallo $(0,1)$ e $[0,1)$ non sono omeomorfi.

Proof

Supponiamo che esiste un tale omeomorfismo $f\colon [0,1) \to (0,1)$. Abbiamo che $f(0) \in (0,1)$. Prendiamo $S = [0,1)\backslash\{0\} = (0,1)$. Then, f restricted to S is a homeomorphism from S to

$$f(S) = (0,1)\backslash\{f(0)\} = (0, f(0)) \sqcup (f(0), 1)$$

But $(0,1)$ is connected and $f(S)$ is not, which is absurd.

Esempio

Sia $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste x tale che $f(x) = f(-x)$, in particolare non è iniettiva.

Proof

Sia $g\colon S^n \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = f(x) - f(-x)$. Chiaramente g è continua. Chiaramente $g(x) = 0$ se e solo se $f(x) = f(-x)$. S^n è connesso per archi e quindi connesso. Allora $g(S^n)$ è connesso nei reali, ovvero è un intervallo. Let $y \in S^n$. Then, $g(y), g(-y) \in g(S^n)$. Consider

$$\frac{1}{2}g(y) + \frac{1}{2}g(-y) \in g(S)$$

Then

$$\frac{1}{2}\left(f(y) - f(-y)\right) + \frac{1}{2}\left(f(-y) - f(y)\right) = 0$$

Corollario

Aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$ per $n > 1$.

Proof

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ contiene al suo interno un sottospazio omeomorfo a S^{n-1}. Suppose that there is a homeomorphism $f\colon A \to f(A)$ where A is open in $\mathbb{R}^n$ and $f(A)$ is open in $\mathbb{R}$. La reistrizione di f ad un sottospazio $B \cong S^{n-1}$ è ancora un omeomorfismo. Ma dal risultato precedente non può esistere una tale applicazione biettiva, assurdo.

Lemma

Sia $f\colon X \to Y$ un applicazione continua e suriettiva verso Y connesso e $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ connesso. Allora, se f è aperta oppure chiusa, X è connesso.

Proof

Supponiamo che f sia aperta senza perdita di generalità. Prendiamo A_1, A_2 aperti non vuoti di X tale che $X = A_1 \cup A_2$. Vogliamo mostrare che non sono disgiunti. Abbiamo che $Y = f(X) = f(A_1) \cup f(A_2)$. Siccome Y è connesso, la loro intersezione non può essere vuota. Abbiamo quindi almeno un punto $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Consideriamo

$$f^{-1}(y) \cap A_1 \neq \varnothing \qquad f^{-1}(y) \cap A_2 \neq \varnothing$$

Per ipotesi

$$f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y) \cap A_2)$$

è aperto. Quindi

$$(f^{-1}(y) \cap A_1) \cap (f^{-1}(y) \cap A_2) \neq \varnothing$$

quindi $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

Teorema

Siano X, Y due spazi topologici coneessi. Allora, $X \times Y$ è connesso.

Proof

Applichiamo il lemma. Prendiamo $p : X \times Y \to Y$ una delle due proiezioni. Applichiamo il lemma. P è aperta (dai risultato sulla topologia prodotto). Inoltre P è continua e suriettiva (se l'insieme X non è vuoto, in tal caso il risultato è banale). Consideriamo la fibra $p^{-1}(y) = X \times \{y\}$ che è omeomorfo ad X, che è connesso. Quindi le ipotesi sono soddisfatte e $Y \times X$ è connesso.

Lo stesso vale per la connessione per archi.

Teorema

Siano X, Y connessi per archi. Allora, $X \times Y$ è connesso per archi.

Proof

Mostriamo che ogni coppia di punti è collegata da un cammino. Siano quindi $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Siccome X è connesso per archi, esiste un cammino $\alpha\colon I \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = x'$. Analogamente $\beta(0) = y$ e $\beta(1) = y'$. Per la proprietà universale del prodotto con I come vertice, esiste un cammino (unico) che fattorizza il diagramma tale che i due triangoli commutino mediante le proiezioni. Quindi $(\alpha, \beta)\colon I \to X \times Y$ dato da $(\alpha, \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$.

Definizione Componente connessa

Sia X spazio topologico. Un sottospazio C di X si dice una componente connessa se soddisfa le seguenti:

1. C è un sottospazio connesso
2. se $C \subseteq A$ e A è connesso allora $C = A$.

Esempio

Sia X uno spazio e $C \subseteq X$. Se C è sottospazio aperto, chhiuso, connesso e non vuoto, allora è componente connessa. Ciò è dato dal fatto che C è anche chiuso e aperto in A.

Lemma

Sia Y un sottospazio connesso di X. Sia W un sottospazio tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora W è connesso.

Proof

Sia $Z \subseteq W$ aperto, chiuso e non vuoto. Consideriamo $Z \cap Y$. Questo è aperto e chiuso di Y per "transitività" della topologia di sottospazio, (cioè se abbiamo una successione di spazi possiamo indurre la topologia di sottospazi in un colpo solo oppure a step). Sappiamo che

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid \text{for every open } A \text{ of } X \text{ where } x \in A, A \cap Y \neq \varnothing\}$$

Siccome $Z \neq \varnothing$ è aperto in W, $Z = A \cap W$ per qualche A aperto di X. Quindi, $\forall x \in Z \subseteq A$, $A \cap Y \neq \varnothing$ (e quindi possono prendere un $x \in Z$). Siccome Y è connesso, deduciamo che $Z \cap Y = Y$. Infatti quest'ultima intersezione è aperta e chiusa in Y per definizione di topologia di sottospazio e l'intersezione non è vuota. Quindi, $Y \subseteq Z$. Consideriamo la chiusura (in W) di entrambi $\overline{Y} \subseteq \overline{Z}$. Quindi la chiusura in W è pari a $\overline{Y} \cap W$ e l'altro $\overline{Z} = Z$ siccome Z è chiuso in W per ipotesi. Quindi $\overline{Y} \subseteq Z$. Siccome $Z \subseteq W$, abbiamo $W = Z$.

Lemma

Sia x un punto di uno spazio topologico X e sia $\{Z_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazio connessi di X tali che $x \in Z_i$. Allora, $\bigcup_i Z_i$ è un sottospazio connesso.

Proof

Sia

$$W = \bigcup_{i=1} Z_i$$

Dato $A \subseteq W$ aperto, chiuso e non vuoto, vogliamo mostrare che $A = W$. Per ogni $i \in I$, andiamo a considerare $A \cap Z_i$ che è un aperto e chiuso di Z_i per definizione di sottospazio. Siccome Z_1 è connesso, $A \cap Z_i = \varnothing$ oppure $A \cap Z_i = Z_i$. Quest'ultimo è equivalente a dire che $Z_i \subseteq A$. Supponiamo $A \neq \varnothing$. Quindi

$$A = \bigcup_{i \in I} Z_i \cap Z_i$$

Allora esiste almeno un $i \in I$ tale che $A \cap Z_i \neq \varnothing$, cioè $Z_i \subseteq A$. Dato il punto x come nelle ipotesi del lemma, abbiamo $x \in Z_i$. Segue quindi che $x \in A$. Allora $x \in Z_i \cap A$ per ogni $i \in I$. Per ipotesi$x \in Z_i$ per tutte le i. Quindi, $Z_i \cap A \neq \varnothing \iff Z_i \subseteq A$, allora

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq A$$

cioè $A = W$.

Corollario

Siano A, B due sottospazi connessi di uno spazio topologico. Allora, se $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cup B$ è connesso.

Proof

Applichiamo il lemma al caso della famiglia $\{A, B\}$.

Lemma

Sia $x \in X$ un punto di uno spazio topologico X. Denotiamo $C(x)$ l'unione di tutti i sottospazi connessi di X ch contengono il punto x. Allora $C(x)$ è una componente connessa di X contenente il punto x.

Proof

1. $C(x)$ è connesso per il lemma;
2. $C(x) \subseteq A$ con A connesso. $\{x\}$ è un sottospazio connesso di X contenente x. Per definizione $\{x\} \in C(x)$. Abbiamo allroa che $x \in C(x) \subseteq A$ e quindi $x \in A$. Ma A è connesso, quindi $A \subseteq C(x)$. Allora $A = C(x)$.

Teorema

Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse. Ogni componente connessa è chiusa e ogni punto è contenuto in una e una sola componente connessa.

Proof

Siccome $x \in C(x)$,

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Sia C componente connessa. Da un risultato precedente, sappiamo che $\overline{C}$ è ancora un connesso. Tuttavia $C \subseteq \overline{C}$ e per la seconda condizione nella definizione di componente connessa, ci deve essere uguaglianza. Siano C, D componenti connesse. Supponiamo che non siano disgiunte. Abbiamo che $C \cup D$ è connesso in quanto unione dei connessi

$$C, D \subseteq C \cup D$$

Ciò implica che $C = C \cup D$ e $D = C \cup D$. Allora $C = D$

Questo teorema giustifica la seguente definizione.

Definizione

Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Allora $C(x)$ è detta la componente connessa.

Definizione Compattezza

Definizione Dato X spazio topologico, il $\pi_0(X)$ è definito come l'insieme delle componenti connesse di X.

Teorema

Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Allora se X è compatto, $f(X)$ è compatto come sottospazio di Y.

Proof

Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di Y tale che

$$f(X) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Allora

$$X = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A)$$

cioè unione di aperti di X siccome f è continua. Siccome X è compatto, esistono $A_1, \cdots, A_n$ tali che $X = f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n)$. Applicando f otteniamo

$$f(X) = f(f^{-1}(A_1)) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(A_n))$$

e quindi $f(X) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ che è un ricoprimento finito.

Proposition

Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Proof

Sia X compatto e C chiuso in X. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti tali che

$$C \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Notiamo che $X = (X \backslash C) \cup \bigcup A$, dove il primo termine è aperto in quanto complementare di un chiuso. Essendo X compatto, esistono $A_1, \cdots, A_n$ tali che

$$X = (X \backslash C) \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

quindi

$$C = C \cap X = (C \cap (X \backslash C)) \cup \bigcup (A_i \cap C)$$

ma il primo termine è l'insieme vuoto quindi $C \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Proposition

Unione finita di sottospazi compatti è compatta.

Proof

Sia X spazio topologico e $K_1, \cdots, K_n$ sottospazi compatti di X. Sia

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

Vogliamo dimostrare che K è compatto. Siccome i K_i sono compatti, possiamo estrarre dei sottoricoprimenti finiti da essi. Ma l'unione di questi sottoricoprimenti finiti è un sotoricoprimento finito, in quanto unioni finite di sottoinsiemi finiti sono sottoinsiemi finiti.

Teorema

L'intervallo unitario è compatto rispetto alla topologia euclidea reale.

Proof

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$. Definiamo il sottoinsieme $X \subseteq [0,1]$ come segue:

$$X = \{t \in [0,1] \mid [0,t] \text{ è coperto da un numero finito di aperti in } \mathcal{A}\}$$

Notiamo che $X \neq \varnothing$ poiché $0 \in X$. Infatti $0 \in [0,1]$, quindi esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $0 \in A$, dunque $[0,0] \subseteq A$.
Poiché X è limitato superiormente da 1, esiste $b = \sup X$. Chiaramente $b \leq 1$.
Passo 1: Mostriamo che $b \in X$. Poiché $b \in [0,1]$, esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $b \in A$. Essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $(b-\delta, b] \subseteq A$. Per definizione di supremum, esiste $t \in X$ tale che $t > b - \delta$. Essendo $t \in X$, esiste una famiglia finita $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ che copre $[0,t]$. Allora $\mathcal{F} \cup \{A\}$ è una famiglia finita che copre $[0,b]$, poiché $[0,b] \subseteq [0,t] \cup (b-\delta, b]$. Dunque $b \in X$.
Passo 2: Mostriamo che $b = 1$. Supponiamo per assurdo che $b < 1$. Poiché $b \in A$ (l'aperto del passo precedente), esiste $\eta > 0$ tale che $[b, b+\eta] \subseteq A$ con $b + \eta \leq 1$. Unendo la copertura finita di $[0,b]$ (che esiste poiché $b \in X$) con A, copriamo $[0, b+\eta]$. Quindi $b + \eta \in X$, contraddicendo che $b = \sup X$.
Concludiamo che $b = 1$. Poiché $b \in X$, allora $1 \in X$, ovvero $[0,1]$ ammette un sottoricoprimento finito.

Quindi $\mathbb{R}$ e $[0,1]$ non sono omeomorfi.

Corollario

Un sottospazio reale è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Proof

($\Longrightarrow$) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Mostriamo che è limitato. Consideriamo il ricoprimento aperto $\{(-n,n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ che ricopre $\mathbb{R}$. Allora,

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$$

Essendo A compatto, è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Quindi, $A \subseteq [-N, N]$ per qualche $N > 0$, quindi è limitato. Mostriamo ora che A è chiuso, in particolare mostriamo che $\overline{A} \subseteq A$. Quindi se $X \backslash A \subseteq X \backslash \overline{A}$, ovvero che se $p \notin A$ allora $p \notin \overline{A}$. Se $p \notin A$ abbiamo una funzione continua da $A \subseteq \mathbb{R}\backslash\{p\}$ in $\mathbb{R}$ data da $f(x) = 1/(x-p)$. Se f è continua, siccome A è compatto, allora $f(A)$ è compatto, quindi anche limitato come dimostratosi prima. Questo implica chiaramente che $p \notin \overline{A}$.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}$ sia chiuso e limitato. Siccome è limitato, $A \subseteq [-a, a]$ per qualche $a \geq 0$. Ma $[-a, a]$ è omeomofo a $[0,1]$ quindi è compatto.

Proposition

Un sottospazio K di uno spazio topologico X è compatto (per la topologia di sottospazio) se e solo se per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tali che

$$K \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

esistono $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$K \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$$

Proof

K è compatto per la topologia di sottospazio ogni ricoprimento aperto $\mathcal{B}$ di K ammette un sottoricoprimento finito dove $\forall B \in \mathcal{B}$ con $B = K \cap A$ con A aperto di X vale

$$K = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \iff K \subseteq \bigcup_{A \cap K \in \mathcal{B}} A$$

con A aperto. Quindi $K = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ se e solo se $K \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$, dove per ogni $i = 1, 2, \cdots, n$, $B_i \subseteq A_i \cap K$.

Notiamo che ogni insieme finito è compatto per qualunque topologia.

Corollario Teorema di Weierstrass

Sia X uno spazio topologico compatto e $f: X \to \mathbb{R}$ un applicazione continua. Allora f ammette massimo e minimo.

Proof

Siccome f è continua ed X è compatto, $f(X)$ è compatto nei reali. Ma allora è chiuso e limitato, quindi se consideriamo infimum e supremum sono sicuramente numeri reali. Dalla definizione di chiusura, infimum e supremum stanno sempre nella chiusura. Ma visto che $f(X)$ è chiuso, choincide con la sua chiusura, quindi infimum e supremum stanno nell'insieme stesso, quindi corrispondono a massimo e minimo.

Proposition

Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio topologico X. Supponiamo che ogni ricoprimento aperto di X formato da elementi in $\mathcal{B}$ ammetta un sottoricoprimento finito. Allora, X è compatto.

Proof

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Vogliamo dimostrare che da questo ricoprimento si può estrarre un sottoricoprimento finito. Per ogni $A \in \mathcal{A}$, consideriamo $\mathcal{B}_A = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq A\}$. Chiaramente per definizione di base, $A = \bigcup \mathcal{B}_A$. Quindi

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$$

quindi esistono $B_1 \in \mathcal{B}_{A_1}, \cdots$ tale che

$$X = B_1 \cup \cdots \cup B_n$$

Teorema

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione chiusa, Y spazio compatto, le fibre $f^{-1}(y)$ compatte. Allora, X è compatto.

Proof

Dato $A \subseteq X$ consideriamo $A' \subseteq Y$ definito come seguente:

$$A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}$$

Mostriamo alcune proprietà:

1. $Y \backslash Y' = f(X \backslash A)$: abbiamo che

$$\begin{aligned} Y \backslash Y' &= \{y \in Y \mid \neg(f^{-1}(y) \subseteq A)\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in f^{-1}(y) \mid x \notin A\} \\ &= f(X \backslash A) \end{aligned}$$

2. $f^{-1}(A') \subseteq A$ sia $x \in f^{-1}(A')$. Quindi dire che $f(x) \in A'$ è come dire $f^{-1}(f(x)) \subseteq A$.

Mostriamo che se A è aperto in X allora A' è aperto in Y. A' è aperto in Y se e solo se $Y \backslash Y'$ è chiuso in Y. Ma $Y \backslash A' = f(X \backslash A)$ è chiuso in quanto immagine di un chiuso. Prendiamo quindi $\mathcal{A}$ come ricoprimento aperto di X. Definiamo $\mathcal{B}$ come la famiglia dei sottoinsiemi di X esprimibili come unioni finite di aperti in A. Consideriamo la famiglia $\mathcal{B}' = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$. Mostriamo che questa famiglia è un ricoprimento (aperto) di Y. Dato $y \in y$, consideriamo $f^{-1}(y)$ che è compatto per ipotesi.

$$f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

quindi $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ per qualche A_i. Ponendo $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ abbiamo per definizione di $\mathcal{B}'$ che $y \in \mathcal{B}'$. La compattezza di Y implica quindi che esistano $B'_1, \cdots, B'_n$ tali che $Y = B'_1 \cup \cdots \cup B'_n$ e quindi

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(B'_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(B'_n)$$

Usando la seconda proprietà dimostrata prima, troviamo

$$X = B_1 \cup \cdots \cup B_n$$

visto che sono tutte unione finite di aperti in $\mathcal{A}$, allora X è esprimibile come unione finita di aperti in $\mathcal{A}$.

3.1 Verso la compattificazione di Alexandrov

Proposition

Siano $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico ambiente. Allora,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$$

Proof

K_n è chiuso in K_1 in quanto $K_n = K_n \cap K_1$ e K_n è chiuso nello spazio ambiente. Quindi i complementari $K_1 \backslash K_n$ è aperto. Supponiamo che l'intersezione sia vuota

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \varnothing$$

Ciò è equivalente a dire che

$$K_1 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \right) = K_1 \setminus \varnothing$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (K_1 \setminus K_n) = K_1$$

quindi i sottoinsieme $\{K_1 \setminus K_n\}$ formerebbero un ricoprimento aperto di K_1, dal quale, essendo K_1 compatto, si dovrebbe poter estrarre un sottoricoprimento finito $\{K_1 \setminus K_{J_1}, \cdots, K_1 \setminus K_{J_n}\}$.

Avremmo quindi che

$$K_1 = \bigcup K_1 \setminus K_{J_i}$$
$$K_1 = \bigcap K_{J_i} = \varnothing$$
$$K_1 = K_{\max\{J_i\}}$$

che è assurdo in quanto tutti i K sono non-vuoti per ipotesi.

Proposition

Siano X, Y spazi topologici e A, B sottospazi rispettivamente di X, Y. Allora $A \times B$ è sottospazio di $X \times Y$.
Sullo spazio $A \times B$ possiamo definire due topologie: la topoloia prodotto, considerando A e B come spazi topologici secondo le topologie di sottospazio indotte dalle topologie madri, oppure la topologia di sottospazio indotta dalla topologia prodotto su $X \times Y$. In realtà, sono uguali.

Proof

Considerando $A \times B$ con la topologia di sottospazio, abbiamo che una sua base è data dia sottoinsieme della forma
$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$$
Il primo termine è aperto della base standard per $X \times Y$, gli ultimi due sono aperti generici di A, B per la topologia di sottospazio. Le due topoloigie coincidono, avendo una stessa base.
Possiamo dimostrarlo con le proprietà universali delle topologie di prodotto e delle topologie di sottospazio. La topologia prodotto è la topologia meno fine su $A \times B$ che rende le due proiezioni $\pi_A \colon A \times B \to A$ e $\pi_B \colon A \times B \to B$ continue. la topologia di sottospazio su $A \times B$ è la topologia meno fine che rende l'inclusione $1 \colon A \times B \hookrightarrow X \times Y$ continue. DISEGNO. Sia J una topologia su $A \times B$. $i \colon (A \times B, J) \to X \times Y$ è continua se e solo se $\pi_X \circ i$ e $\pi_Y \circ i$ sono continue. Ma $\pi_X \circ i = i_A \circ \pi_A$ e $\pi_Y \circ i = i_B \circ \pi_B$. La proprietà universale della topologia di sottospazio ciò è equivalente a richiedere che le due proiezioni π_A, π_B siano continue. Quindi le due topologie coincidono.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, hook, "i_A"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"'] \arrow[d, hook, "i"] & B \arrow[d, hook, "i_B"] \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Teorema teorema di Wallace

Let X, Y spazi topologici e $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sottospazi compatti con la topologia indotta e W un aperto di $X \times Y$ tale che $A \times B \subseteq W$. Allora, esistono degli aperti U di X e V di Y tali che

$$A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge (U \times V \subseteq W)$$

Proof

Dimostriamo dapprima il caso particolare del teorema per $A = \{a\}$. Quindi $\{a\} \times B \subseteq W$. Ciò significa che $(a, b) \in W$ per ogni $b \in B$. Siccome W è un aperto di $X \times Y$, sappiamo che una base della topologia prodotto p data dai prodotti $U \times V$ dove U è aperto di X e V è aperto di Y, quindi esistono U_b di X e V_b di Y tali che $(a, b) \in U_b \times V_b \subseteq W$. Quindi $\{V_b\}$ definiscono un ricoprimento aperto del sottospazio B. per ipotesi, B è compatto, quindi possiamo estrarre un sottoricoprimento finito
$$B \subseteq \bigcup V_{b_i}$$

quindi a questo punto poniamo $V = \bigcup V_{b_i}$ e $U = \bigcap U_{b_i}$. Allora se $A \subseteq U$, cioè $\{a\} \subseteq U$, è come dire che $a \in U$ cioè $a \in \bigcup b_i$. Inoltre

$$\begin{aligned} U \times V &= U \times \bigcup B_{b_i} \\ &= \bigcup (U \times V_{b_i}) \end{aligned}$$

che sono tutti termini in U_{b_i} che sono in W. Quindi U, V soddisfano le condizioni del teorema. Adesso, mostriamo il caso generale. Sia $A \subseteq X$ un compatto arbitrario. $\forall a \in A$ esistono aperti U_a di X e V_a di Y tali che $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ e $\{a\} \times B \subseteq W$ per il caso particolare del teorema appena dimostrato. Similarmente a prima, osservimo che $\{U_a\}$ è un ricoprimento aperto di A, e quindi siccome A è compatto, esiste un sottoricoprimento finito

$$A \subseteq \bigcup U_{a_i}$$

Quindi poniamo $U = \bigcup U_{a_i}$ e $V = \bigcap V_{a_i}$. Quindi $A \subseteq U, B \subseteq V$ in quanto $B \subseteq V_a$ per ogni a. Quindi sarà anche contenuto nell'intersezione. Inoltre

$$U \times V = \bigcup U_{a_i} \times V_{a_i} \subseteq W$$

Corollario

Ogni sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Proof

Sia X spazio di Hausdorff e $K \subseteq X$ compatto. Vogliamo mostrare che K è chiuso, quindi che $X \setminus K$ è aperto. Dire che è aperto è come richiedere che sia intorno di ciascun suo punto. Quindi $\forall x \in X \setminus K$ tale che $x \notin K$ esiste U tale che $x \in U$ e $U \subseteq X \setminus K$, con U, K disgiunti. Ricordiamo che X è di Hausdorff se e solo se $\Delta X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$. Applichiamo il teorema di Wallace prendendo $A = \{x\}$ e $B = K$, che sono compatto in quanto finito e compatto per ipotesi rispettivamente. $W = (X \times X) \setminus \Delta x$ aperto in quanto ΔX è chiusa. $A \times B \subseteq W$ cioè $\{x\} \times K \subseteq W$ e $x \notin K$. Deduciamo quindi dal teorema di Wallace che esistono aperti U di X e V di Y tali che $\{x\} \subseteq U$, che è come dire $x \in U$, e $K \subseteq V$. Inoltre $U \times K \subseteq U \times V \subseteq W = (X \times X) \setminus \Delta X$. Quindi $U \cap K = \varnothing$.

Corollario

Siano X, Y spazi topologici. Se X è compatto allora la poiezione $p \colon X \times Y \to Y$ è chiusa. Inoltre, Se X e Y sono compatti allora $X \times Y$ è compatto. Mettere enumerate.

Proof

1. Sia $C \subseteq X \times Y$ chiuso. Vogliamo mostrare che $p(C)$ è chiuso in Y, cioè che $Y \setminus p(C)$ è aperto, cioè è un intorno di ogni suo punto, quindi $\forall y \notin p(C)$ esiste un intorno di Y disgiunto da $p(C)$. Applichiamo il teorema di Wallacde prendendo $A = X$, $B = \{y\}$ e $W = (X \times Y) \setminus C$ aperto (in quanto C è chiuso). Allora $A \times B = X \times \{y\} \subseteq W = (X \times Y) \setminus C$. Ciò è equivalente a $a \notin p(C)$ che è l'insieme di tutte le $y \in Y$ tale che esiste $x \in X$ con $(x, y) \in C$. Il teorema di Wallace fornisce quindi un aperto V intorno di y interamento contenuto in $Y \setminus p(C)$. Quindi $B = \{y\} \subseteq B$ e

$$X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus C \iff V \subseteq Y \setminus p(C)$$

2. Ricordiamo il risultato che dice che data una mappa chiusa che va in un compatto, e le sue fibre sono compatte allora il dominio è compatto. Nel nostro caso la mappa è la prozeione,

che è chiusa per il punto precedente. Le fibre sono

$$p^{-1}(y) \cong X$$

in quanto $X \times \{y\} \cong X$, che è compatto per ipotesi. Segue per induzione che prodotti finiti di spazi compatti sono compatti.

Corollario

Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto (con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$), se e solo se esso è chiuso e limitato (quindi incluso in un ipercubo).

Proof

($\Longleftarrow$) Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sia chiuso e limitato. Allora $A \subseteq [-a, a]^n$ per qualche $a > 0$. Siccome $[-a, a]$ è omeomorfo a $[0, 1]$ che è compatto, $[-a, a]^n$ è compatto in quanto prodotto di spazi compatti. Quindi, A è compatto in quanto chiuso di uno spazio compatto.

($\Longrightarrow$) Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sia compatto. Consideriamo al funzione $d \colon A \to \mathbb{R}$ data da $x \to ||x||$. Chiaramente d è continua. Allora, $d(A)$ è compatto in $\mathbb{R}$, ovvero chiuso e limitato. In particolare, $d(A) \subseteq [-N, N]$ per qualche $N > 0$. Quindi, $d(x) \leq N$ cioè per tutte le $x \in A$, $||x| \neq N$. Quindi, A è limitato. Allora A è chiuso in quanto compatto in uno spazio di Hausdorff, cioè $\mathbb{R}^n$.

Per esempio $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è compatto. Anche $D^n = \{x \mid ||x|| \leq 1\}$ disco è compatto.

Corollario

Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione continua con X compatto e Y di Hausdorff. Allora f è un'applicazione chiusa. In particolare, se f è biettiva allora f è un omeomorfismo.

Proof

Per dimostrarlo passiamo da un chiuso C in X verso ad un compatto C in X. Una volta fatto ciò possiamo applicare f per ottenere $f(C)$ compatto in Y, ed infinite otteniamo $f(C)$ chiuso in Y. Abbiamo utilizzato che ogni chiuso di un compatto è compatto.

Definizione Compattificazione di Alexandrov

Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{U}$, $\infty \notin X$. Sull'insieme $\hat{X} \triangleq X \cup \{\infty\}$ definiamo la seguente famiglia di sottoinsiemi

$$J = \mathcal{U} \cup \{V \cup \{\infty\} \mid X \setminus V \text{ chiuso e compatto in } X\}$$

cioè gli aperti che contengono il punto ∞ sono i complementari degli insiemi chiusi e compatti di X.

Proposition Quest'ultima famiglia è una topologia per $\hat{X}$ della topologia di Alexandrov

1. $\varnothing \in J$ in quanto $\varnothing$ è un aperto di X;
2. sia $K = \varnothing$ che è chiuso e compatto in X. Allora, $\hat{X} \in J$;
3. *intersezione:* abbiamo diversi casi
   (a) siano $A_1, A_2 \subseteq X$ aperti di X, allora $A_1 \cap A_2$ è un aperto di X;
   (b) sia A un aperto di X. Sia K chiuso e compatto in X. Quindi

$$A \cap (\hat{X} \setminus K) = A \cap (X \setminus K)$$

   quest'ultimo termine è aperto di X.

(c) nel caso $(\hat{X} \setminus K_1) \cap (\hat{X} \setminus K_2)$ usiamo le leggi di De Morgan. Quindi l'intersezione è equivalente a

$$\hat{X} \setminus (K_1 \cup K_2)$$

Il secondo termine è chiuso e compatto.

4. *unioni arbitrarie:* abbiamo diversi casi

(a) sempre per le leggi di De Morgan

$$\bigcup_{i \in I} (\hat{X} \setminus K_i) = \hat{X} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} K_i \right)$$

Se $I = \varnothing$ la proposizione è banale. Altrimenti, esiste $i_0 \in I$ tale che

$$\bigcap_{i \in I} K_i \subseteq K_{i_0}$$

a sinistra l'intersezione è chiusa in quanto intersezione di chiusi, a destra è comatto. Quindi, è anch'esso compatto in quanto chiuso di un compatto.

(b) nel caso di un unione mista con K chiuso e compatto in X e A aperto

$$\begin{aligned}(\hat{X} \setminus K) \cup A &= (\hat{X} \setminus K) \cup (\hat{X} \setminus (\hat{X} \setminus A)) \\ &= \hat{X} \setminus (K \cup (\hat{X} \setminus A))\end{aligned}$$

quindi è anche compatto. Siccome $X \setminus A$ è chiuso allora è chiuso e compatto in quanto chiuso del compatto K

Proposition

Sia X uno spazio topologico e $\infty \notin X$. Allora $\hat{X}$ è compatto.

Proof

Supponiamo di avere un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di $\hat{X}$. Esiste almeno una aperto che contiene ∞. Per semplicità sia $\infty \in U_0$. Quindi U_0 è della forma $U_0 = \hat{X} \setminus K$ per qualche K chiuso e compatto in X. Quindi, $K = \hat{X} \setminus U_0$. Siccome K è compatto, esiste un sottoricoprimento finito $\{U_1, \cdots, U_n\}$ di K. Quindi, aggiungendo anche U_0 a questi, ottengo un ricoprimento finito di tutto lo spazio.

Notiamo che l'inclusione $i \colon X \hookrightarrow \hat{X}$ è continua ed è una immersione aperta. Infatti, $i^{-1}(A) = A$ è aperto di X, e $i^{-1}(\hat{X} \setminus K) = X \setminus K$ che è aperto di X. Inoltre se A è un aperto di X, $i(A) = A$ che è aperto di $\hat{X}$. Siccome i è iniettiva allora è un immersione aperta.

Proposition

Se X è uno spazio topologico NON compatto allora $i(X)$ è denso in $\hat{X}$, dove i è l'inclusione sopracitata.

Proof

Abbiamo due tipi di aperti e quindi due casi. Nel primo abbiamo $i(X) \cap i(A) = i(A) \neq \varnothing$ per $A \neq \varnothing$. Nel secondo caso $i(X) \cap (\hat{X} \setminus K) = X \setminus K \neq \varnothing$.

Proposition

Sia X uno spazio topologico. Allora $\hat{X}$ è di Hausdorff se e solo se X è di Hausdorff e ogni suo punto possiede un intorno compatto.

Proof

Siccome X è aperto in $\hat{X}$, due punti di X ammettono intorni disgiunti in X se e solo se ammettono intorni disgiunti in $\hat{X}$. Dato $x \in X$, vogliamo studiare la condizione di esistenza di intorni perti disgiunti rispettivamente di x e del punto ∞. Gli intorni di x sono aperti U di X tale che $x \in U$, mentre gli altri devono essere della forma $\hat{X} \setminus K$ con $\infty \in \hat{X} \setminus K$ con K chiuso compatto in X. Vogliamo che l'intersezione sia disgiunta

$$U \cap (\hat{X} \setminus K) = U \cap (X \setminus K) = \varnothing$$

fissato K, un tale aperto U tale che $x \in U$, esiste se e solo se $x \in \operatorname{int}(K)$, che è l'unione di tutti gli aperti contenuti in K, che è precisamente la condizione

$$U \cap (X \setminus K) = \varnothing$$

Proposition

Sia Y uno spazio compatto e di Hausdorff e $y \in Y$. Allora, lo spazio topologico $Y \setminus \{y\}$ con la topologia di sottospazio indotta da quella su Y, soddisfa le condizioni del risultati precedente, cioè è uno spazio di Hausdorff e ogni punto ammette un intorno compatto.

Proof

$Y \setminus \{y\}$ è di Hausdorff in quanto sottospazio di uno spazio di Hausdorff. Resta da dimostrare l'esistenza degli intorni compatti per ogni punto. Sia $y \in Y \setminus \{y\}$. Essendo Y di Hausdorff per ipotesi, esistono intorni aperti U di y e U' di y' tali che $U \cap U' = \varnothing$. Allora, $Y \setminus U$ è un chiuso di Y e essendo Y compatto, $Y \setminus U \subseteq Y$ è compatto in quanto chiuso di un compatto (in Y), ma vale anche $y' \in Y \setminus U \subseteq Y \setminus \{y\}$. L'appartenenza è data dal fatto che $y' \in U' \subseteq Y \setminus U$, e l'inclusione perché $\{y\} \subseteq U$. Quindi, se consideriamo $Y \setminus U$ come sottospazio di $Y \setminus \{y\}$ non cambia niente per transitività della topologia di sottospazio. Quindi, $Y \setminus U$ è un chiuso e compatto di $Y \setminus \{y\}$. Abbiamo quindi trovato un intorno compatto (pure chiuso) di y'.

Proposition

Sia $f\colon X \to Y$ un'immersione aperta di spazi topologici di Hausdorff. Allora, l'applicazione $g\colon Y \to \hat{X}$ data da $y \to x$ se $y = f(x)$, che è ben posta in quanto f è iniettiva per ipotesi, mentre $y \to \infty$ se $y \notin f(X)$, è continua.

Proof

Mostriamo la continuità. Sia U un aperto di $\hat{X}$. Abbiamo due possibilità:

1. $U \subseteq X$, allora $g^{-1}(U) = f(U)$ che è aperto essendo U aperto di X e f aperta per ipotesi;
2. $U = \hat{X} \setminus K$, allora $g^{-1}(\hat{X} \setminus K) = Y \setminus f(K)$. Questo è un aperto in quanto $f(K)$ è un chiuso di Y in quanto K è compatto, quindi $f(K)$ è compatto in quanto continua, e allora essendo Y di Hausdorff è chiuso.

Corollario

Sia Y spazio compatto di Hausdorff e $y \in Y$. Allora, Y è omeomorfo alla compattificazione di Alexandrov di $Y \setminus \{y\}$.

Proof

Applichiamo la proposizione precedente con $X = Y \setminus \{y\}$ e $f = i\colon Y \setminus \{y\} \hookrightarrow Y$. Questa è un immersione aperta, infatti Y è di Hausdorff e quindi T_1, cioè $Y \setminus \{y\}$ è aperto. Abbiamo quindi una mappa continua $g\colon Y \to Y \setminus \hat{\{y\}}$. Inoltre, è un omeomorfismo in quanto iniettiva ed è chiusa in quanto definita tra spazi entrambi compatti e di Hausdorff (corollario precedente).

Per esempio $S^1 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}$. Più in generale S^n è omeomorfa alla compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{R}^n$.

4 Topologia quoziente

Definizione

Sia $f\colon X \to Y$ un applicazione (tipicamente suriettiva) e X uno spazio topologico. La topologia quoziente su Y è la più fine che rende f continua.

Questo è un duale di quando abbiamo considerato la topologia meno fine per le mappe di inclusione.

La collezione di insiemi

$$\tau = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \text{ è aperto di } X\}$$

è effettivamente una topologia su Y, ed è quindi la topologia quoziente su Y.

Infatti:

1. $\varnothing \in \tau$ in quanto $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ che è aperto di X.
2. $Y \in \tau$ in quanto $f^{-1}(Y) = X$ aperto di X;
3. se $A_1, A_2 \in \tau$ allora
$$f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)$$
4. sia invece $\{A_i\}_{i \in I}$ allora
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$
che è unione di aperti di X

Definizione

Una applicazione continua e suriettiva $f\colon X \to Y$ è una *identificazione* se gli aperti di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi A di Y tale che $f^{-1}(A)$ è aperto in X.

La topologia quoziente è l'unica topologia su Y che rende f una identificazione. Inoltre, f è un identificazione se vale l'analogo per i chiusi della condizione precedente, cioè se e solo se i chiusi di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi C di Y tale che $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

Definizione

Sia $f\colon X \to Y$ una mappa. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice f-saturo se $\forall x, x' \in X$ tali che $f(x) = f(x')$, allora $x \in A$ se e solo se $x' \in A$.

$A \subseteq X$ è f-saturo se e solo se $A = f^{-1}(B)$ per qualche sottoinsieme $B \subseteq Y$. Equivalentemente, $A = f^{-1}(f(A))$.

Proposition

Se $f\colon X \to Y$ è continua e suriettiva, allora f è un identificazione se e solo se gli aperti di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi di Y della forma $f(A)$ dove A è un aperto f-saturo di X.

Proof

Essendo f suriettiva, per tutte le $B \subseteq Y$, $B = f(f^{-1}(B))$. D'altro canto, A è f-saturo se e solo se $A = f^{-1}(f(A))$.

Proposition

Sia $f\colon X \to Y$ un identificazione. Se A è un aperto f-saturo, allora $f(A)$ è un aperto di Y.

Proof

$f(A)$ è aperto di Y se e solo se $f^{-1}(f(A))$ è aperto in X, ma $f^{-1}(f(A)) = A$ siccome A è f-saturo.

Questo non implica che f sia aperta.

Esempio

Sia $f\colon [0, 2\pi] \to S^1$ data $f(t) = (\cos t, \sin t)$. f è continua e suriettiva, quindi è chiusa, e quindi è un'identificazione chiusa. Osserviamo che f non è un'identificazione aperta: $[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2\pi]$ è un aperto di $[0, 2\pi]$. Ma quindi $f([0, 1))$ è un arco di circonferenza aperto in un estremo e chiuso nell'altro, quindi non è un aperto di S^1.

Vediamo la proprietà universale delle identificazioni.

Proposition

Sia $f\colon X \to Y$ una identificazione e $g\colon X \to Z$ un'applicazione continua. Allora esiste una e una sola applicazione continua $h\colon Y \to Z$ tale che $h \circ f = g$ se e solo se g è costante sulle fibre di f, cioè per tutte le $x, x' \in f^{-1}(y), g(x) = g(x')$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Proof

Per definiziona un'identificazione è surriettiva, quindi l'unicità di h segue direttamente. Cioè dato $y \in Y$, se $y = f(x)$ allora $h(y)$ deve necessariamente coincidere con $g(x)$. Iniziamo mostrando che la condizione che g sia costante sulle fibre è necessaria per l'esistenza di h tale che il diagrammi commuti. Dire che $x, x' \in f^{-1}(y)$ è equivalente a dire che $f(x) = y = f(x')$, e quindi $h(f(x)) = h(f(x'))$, cioè $g(x) = g(x')$. Mostriamo ora che è anche sufficiente. Come osservato sopra, la suriettività di f obbliga a dfinire h nel modo seguente: sia $y \in Y$, $y = f(x)$ allora $h(y) \triangleq g(x)$. Tale definizione è ben posta in quanto g è costante sulel fibre di f. $y = f(x) = f(x') \implies g(x') = g(x)$. Ovviamente abbiamo $h \circ f = g$ per defiinzione di h. Vogliamo anche che h sia continua, Sia B aperto di Z, quindi $h^{-1}(B)$ è aperto in Y, ma ciò è equivalente, isccome f è una identificazione, a dire che $f^{-1}(h^{-1}(B))$ è aperto in X. Ma ciò è uguale a $(h \circ f)^{-1}(B)$ che è uguale a $g^{-1}(B)$ in quanto g è continua per ipotesi.

Esempio

Sia

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq ||x||\}$$

Sia
$$S^n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 1 = ||x||^2 + y^2\}$$
Consideriamo $f\colon D^n \to S^n$ data da
$$x \to (2x\sqrt{1-||x||^2}, 2||x||^2 - 1)$$
Chiaramente $x/||x|| = 1 \to (0,1)$ e quindi f non è iniettiva. Tuttavia, lo diventa se la restringiamo all'interno di D^n. Infatti definisce un omeomorfismo sulla sua immagine in quanto
$$y < 1 \iff 2||x||^2 - 1 < 1 \iff ||x|| < 1$$
In tal caso x può essere chiaramente ricostruito mediante applicazione continua da z a y. Se $y = 2||x||^2 - 1$ allora
$$||x|| = \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$
Sostituendo tale espressione in quella per z si arriva a ricostruire x in funzione di y e z. Notiamo che D^n è compatto in quanto chiuso e limitato, e S^n è di Hausdorff (per lo spazio metrico), quindi f è una identificazione continua da uno spazio compatto ad uno spazio di Hausdorff.

Definizione

Sia $A \subseteq X$ di uno spazio topologico X. Sia $\sim_A$ la più piccola relazione di equivalenza su X che ha A come classe di equivalenza, cioè i punti tali che $x, y \in A$. Denotando $X/A \triangleq X/_{\sim_A}$. Questo spazio, dotato della topologia quoziente, indotta dalla proiezione canonica $\pi_A\colon X \to X/A$ è detto contrazione di A ad un punto.

Definizione Nastro di Möbius

Let $I = [0,1]$ be the closed unit interval. Define the equivalence relation $\sim$ on I generated by $(0,t) \sim (1, 1-t)$. The *Möbius strip* is defined as $M = (I \times I)/\sim$.

Definizione Klein's Bottle

Let $I = [0,1]$ be the closed unit interval. Define the equivalence relation $\sim$ on I generated by $(x,0) \sim (x,1)$ and $(0,y) \sim (1,1-y)$. The *Klein's bottle* is defined as $K = (I \times I)/\sim$.

Proposition

Sia $f\colon X \to Z$ un'identificazione. Allora Z è di Hausdorff se e solo se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ tali che $f(x) \neq f(y)$, esistono due aperti f-saturi disgiunti A e B di X tali che $x \in A$ e $y \in B$.

Proof

Z è di Hausdorff se esolo se per ogni x, y di X tali che $f(x) \neq f(y)$, esistono intorni aperti disgiunti U, V di Z tali che $f(x) \in U$ e $f(y) \in V$.
$(\Longrightarrow)$ Abbiamo che $x \in f^{-1}(U)$ e $y \in f^{-1}(V)$ e
$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

($\Longleftarrow$) Sia $x \in A$ e $y \in B$ aperti f-saturi di X disgiunti. Mostriamo che $f(A)$ e $f(B)$ sono degli aperti di Z tali che $f(A) \cap f(B) = \varnothing$. $f(A)$ e $f(B)$ sono aperti in quanto f è identificazione e A, B sono f-saturi (risultato precedente). Siano $f(x) \in f(A)$ e $f(y) \in f(B)$. Sia $z \in f(A) \cap f(B)$. Chiaramente $z = f(a) = f(b)$ per qualche $a \in A$ oppure $b \in B$. Allora $f(a) = z = f(b)$. Siccome A è f-saturo allora $b \in A$. Siccome B è f-saturo allora $a \in B$. Ma quindi $a, b \in A \cap B = \varnothing$, che è assurdo.

Teorema

Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff e sia $f \colon X \to Y$ un'identificazione. The following are equivalent:

1. Y è di Hausdorff;
2. f è una identificazione chiusa;
3. il sottoinsieme di $X \times X$ dato da
$$K = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$
è chiuso in $X \times X$.

Proof

1. (1) $\implies$ (3) : Y è di Hausdorff se esolo se la diagonale $\Delta Y \subseteq Y \times Y$ è chiusa. Possiamo esprimere K come
$$K = (f \times f)^{-1}(\Delta Y)$$
e $f \times f$ è continua per la proprietà universale del prodotto. Quindi K è chiuso in quanto controimmagine di un chiuso.
2. (3) $\implies$ (2) : sia A chiuso di X. Per ipotesi, le due proiezioni canoniche $p_1, p_2 \colon X \times X \to X$ soo chiuse, essendo X compatto e pure di Hausdorff. Possiamo esprimere
$$f^{-1}(f(A)) = p_1\left(K \cap p_2^{-1}(A)\right)$$
3. (2) $\implies$ (1) : siano $a, b \in Y$ tale che $a \neq b$. Consideriamo le fibre $A = f^{-1}(a)$ e $B = f^{-1}(b)$. Essendo f suriettiva, $a = f(x)$ per qualche x e $b = f(x')$ per qualche x'. Quindi, $\{a\} = f(\{x\})$ e $\{b\} = f(\{x'\})$ dove i singoletti sono chiusi siccome X è di Hausdorff e quindi è anche T_1. Allora, $\{a\}$ e $\{b\}$ sono chiusi in Y essendo f chiusa. Quindi, A e B sono dei chiusi di X, in wuanto controimmagini di chiusi, e quindi compatti (essendo X compatto). Allora la condizione $A \cap B = \varnothing$ può essere espressa come
$$A \times B \subseteq (X \times X \setminus \Delta x) = W$$
in quanto quest'ultimo insieme è di Hausdorff per ipotesi. Allora possiamo applicare il teorema di Wallace che ci garantisce l'esistenza di aperti U, V che circondano i due compatti $A \subseteq U, B \subseteq V$ e $U \times V \subseteq W$ che è equivalente a dire $U \cap V = \varnothing$. Tornando indietro abbiamo
$$Y = f(X) = f((X \setminus U) \cup (X \setminus U)) = f(X \setminus U) \cup f(X \setminus U)$$
quindi abbiamo unione di due chiusi essendo f identificazione chiusa. Ora, per concludere, poniamo $U' = Y \setminus f(X \setminus U)$ e $V' = Y \setminus f(X \setminus V)$. Abbiamo quindi trovato due intorni dei miei due punti a, b in Y. Quindi $f^{-1}(a) = A \subseteq U$ and $f^{-1}(b) = B \subseteq V$. Chiaramente $a \in U'$ in quanto se così non fosse avremmo $a \in f(X \setminus U)$ ovvero esisterebbe $x \notin U$ tale che $a = f(a) \implies b \in V'$. Mostriamo che U' e V' sono disgiunti:
$$\begin{aligned} U' \cap V' &= (Y \setminus f(X \setminus U)) \cap (Y \setminus f(X \setminus V)) \\ &= Y \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)) \\ &= Y \setminus f(X \setminus U) \cup (X \setminus V) \\ &= Y \setminus f(X) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Esempio 5.11

Consideriamo l'ipercubo $I = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ e il suo bordo $\partial I = [0,1]^n \setminus (0,1)^n$. Mostriamo che $I^n/\partial I^n$ è omeomorfo a $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Sappiamo che vi è una identificazione fra D^n e S^n che contrae ∂D^n ad un punto di S^n. Dimostriamo ora che $D^n \cong I^n$ costruendo un omeomorfismo che manda ∂D^n in ∂I^n. Supponiamo, a tal scopo, di avere una applicazione continua $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\Phi(tx) = t\Phi(x)$ per $t \geq 0$. Quindi per esempio Φ potrebbe essere $||\cdot||$. Supponiamo inoltre che esistano delle costanti positive $m, M > 0$ tale che

$$m||x|| \leq \Phi(x) \leq M||x||$$

Consideriamo le applicazioni $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definite ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{x}{||x||}\Phi(x) & x \neq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{y||y||}{\Phi(x)}\Phi(x) & x \neq 0 \end{cases}$$

sono entrambe funzioni continue e una l'inversa dell'altra. Adessp, ponendo $A = \{x \,|\, \Phi(x) \leq 1\}$ e $D = \{y \,|\, ||y|| \leq 1\}$ vediamo che f, g si restringono a funzioni (continue) fra A, D e danno lugoo luogo ad un omeomorfismo fra i due. Dobbiamo quindi verificare:

1. $x \in A \implies f(x) \in D$: sappiamo che $x \in A$ se e solo se $\Phi(x) \leq 1$. La norma della funzione è

$$||f(x)|| = \frac{x}{||x||}\Phi(x) = \frac{||x||}{||x||}\Phi \leq 1$$

2. $y \in D \implies g(y) \in A$: sappiamo che $y \in D$ se e solo se $||y|| \leq 1$ e $g(y) \in A$ se e solo se $\Phi(g(y)) \leq 1$, ma espandendo il valore questo è $||y|| \leq 1$.

Dato un $x = (x_1, \cdots, x_n)$ scegliamo

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

in quanto $\Phi \leq 1$ se e solo se $|x_i| \leq 1$ che equivale a dire $x_i \in [-1, 1]$. Quindi $[-1,1]^n = \{x \,|\, \Phi(x) \leq 1\}$. Chiaramente vale la omogeneità. Per ciò che concerne l'uguaglianza notiamo che

$$\frac{||x||}{\sqrt{n}} \leq \max\{|x_i|\} \leq ||x||$$

Per la prima uguaglianza bastare notare che $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, e ponendo $C = \max\{|x_i|\}$ allora $||x|| \leq \sqrt{nC^2} = \sqrt{n}C$. La seconda disuguaglianza vale se e solo se $|x_i| \leq ||x||$ se e solo se $x_i^2 \leq ||x||^2$ cioè

$$x_i^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

che è sempre vero.

4.1 Quoziente per gruppi di omomorfismo

Dare una azione $*$ di un gruppo $(G, \circ)$ su un insieme X equivalente precisamente a definire un omomorfismo di gruppi $\tau\colon (G, \circ) \to (\text{Bijections}(X), \circ)$ with respect to composition. Chiaramente $\tau_1 = 1_X$ e

$$\begin{aligned} \tau_{g_1 \cdot g_2}(x) &= (\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2})(x) \\ (g_1 \cdot g_2)* &= \tau_{g_1}(\tau_{g_2}(x)) \\ &= g_1 * (g_2 * x) \end{aligned}$$

Supponiamo ora che X sia uno spazio topologico. Definiamo un'azione (sinistra) di $(G, \circ)$ su X come un omomorfismo di gruppi

$$(G, \circ) \to (\text{Omeo}(X), \circ, 1_X)$$

Definizione

G si dice gruppo di omeomorfismo su X se G è un sottogruppo di $(\mathrm{Omeo}(X), \circ)$.

Chiaramente $\mathrm{Omeo}(X)$ è un gruppo di omeomorfismo su X, cioè agisce naturalmente su X con l'azione $(f, x) \to f(x)$.

Dato un gruppo di omeomorfismi G su X, consideriamo la relazione di equivalenza su X data da: $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $y = g * x$. L'insieme quoziente $X/G \triangleq X/_\sim$ si chiama l'insieme delle orbite dell'azione di G su X. Lo muniamo della topologia quoziente.

Proposition

Sia $G \subseteq \mathrm{Omeo}(X)$ un gruppo di omeomorfismi su X. Abbiamo quindi la proiezione $\pi \colon X \to X/G$. Allora, π è aperta, e se G è finito, π è anche chiusa.

Proof

Sia $A \subseteq X$. Allora

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A) = \bigcup_{g \in G} \tau_g(A) = \bigcup_{g \in G} \{x * x \,|\, x \in A\}$$

Se A è aperto, siccome τ_g è un omeomorfismo, quindi manda un aperto in un aperto, $\pi^{-1}(\pi(A))$ èa perto in quanto unione di aperti. Se A è chiuso e G è finita, $\pi^{-1}(\pi(A))$ è chiuso in quanto unione finita di chiusi.

Proposition

Sia G un gruppo di omeomorfismo su uno spazio topologico X. Allora X/G è di Hausdorff se e solo se

$$K = \{(x, g * x) \,|\, x \in X, g \in G\}$$

è chiuso.

Proof

Sappiamo che $\pi \colon X \to X/G$ è aperta. Quindi $\pi \times \pi \colon X \times X \to G/X \to X/G$ è quindi aperta. Inoltre π è suriettiva e quindi $\pi \times \pi$ è anch'essa suriettiva. Allora $\pi \times \pi$ è una identificazione aperta. X/G è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta_{X/G}$ è chiusa in $X/G \times X/G$. Ma siccome $\pi \times \pi$ è una identificazione, $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/G})$ chiuso in $X \times X$, ma è uguale $\{(x, x') \in X \times X \,|\, \pi(x) = \pi(x')\}$, ma la condizione è equivalente a dire che $x' = g * x$ per qualche $g \in G$, quindi è uguale a K.

Proposition

Sia G un gruppo di omeomorfismi su uno spazio topologico X. Sia X di Hausdorff. Supponiamo che esista un sottoinsieme A di X aperto tale che:

1. $\pi\big|_A \colon A \to X/G$ è suriettiva.
2. l'insieme $\{g \in G \,|\, g(A) \cap A \neq \varnothing\}$ è finito.

Allora, X/G è Hausdorff.

Proof

Grazie a (2) possiamo scrivere

$$\{g \in G \,|\, g(A) \cap A \neq \varnothing\} = \{g_1, \cdots, g_n\}$$

Siano $p, q \in X/G$ tali che $p \neq q$. Allora $p = \pi(x)$ e $q = \pi(y)$ per qualche $x, y \in A$. Siccome $p \neq q$

in X/G appartengono ad orbite disgiunte, quindi $x \neq g_i(y)$. Siccome X è di Hausdorff, per ogni i esistono intorni aperti U_i e V_i disgiunti tali che $x \in U_i$ e $g_i(y) \in V_i$. Vogliamo una scelta uniforme che non dipenda da i, quindi consideriamo l'intersezione

$$U \triangleq A \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \quad V \triangleq A \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V_i)$$

Quindi $y \in A$ e $g_i(y) \in V_i$ e quest'ultima è equivalente a dire che $y \in g_i^{-1}(V_i)$. Mostriamo che $U \cap g(V) = \varnothing$ per tutti i $g \in G$. Distinguiamo due casi:

1. $g \notin \{g \in G \,|\, g(A) \cap A \neq 0\}$: questo equivale precisamente a dire che $g \neq g_i$ per tutte le i. Abbiamo che $g(A) \cap A = \varnothing$. Ciò implica che $g(V) \cap U \subseteq g(A) \cap A = \varnothing$
2. $g \in \{g \in G \,|\, g(A) \cap A \neq 0\}$:, quindi $g = g_i$ per qualche i. In questo caso, siccome $U \subseteq U_i$ e $V \subseteq g_i^{-1}(V)$, abbiamo che
$$U \cup g_i(V) \subseteq U_i \cap V_i = \varnothing$$

Mostriamo che gli aperti

$$\bigcup_{g \in G} g(U), \quad \bigcup_{h \in G} h(V)$$

ottenuti "saturando" rispettivamente U e V sono ancora disgiunti

$$\left(\bigcup_{g \in G} g(U)\right) \cap \left(\bigcup_{h \in G} h(V)\right) = \bigcup_{g,h \in G} g(U) \cap h(V) = \bigcup_{g,h \in G} \varnothing = \varnothing$$

il termine è l'insieme vuoto in quanto $g^{-1}(g(U) \cap h(V))$ è pari a $U \cap (g^{-1}h)(V)$ che è l'insieme vuoto. Quindi, grazie ad una proposizione scorsa, $\pi(U')$ e $\pi(V')$, in cui ci sono p, q, sono aperti disgiunti di X/G contenenti due punti p e q.

Esempio 5.18

Sia $G \subseteq \text{Omeo}(\mathbb{R}^n)$ tale che $g \in G$ se e solo se esiste $a \in \mathbb{Z}^n$ tale che $g(x) = a + x$ per tutte le $x \in \mathbb{R}^n$. Allora $\mathbb{R}^n/G$ è di Hausdorff.

Proof

Possiamo applicare la proposizione precedente prendendo

$$A = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, |x_i| < 1\}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ prendiamo la parte intera. Resta da verificare $\{g \in G \,|\, g(A) \cap A \neq \varnothing\}$ è finito. Sia $g \in G$, che è come dire che esiste $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tale che la condizione è soddisfatta. Allora $A \cap g(A) \neq \varnothing$ dove $g(A) = A + a$. Esiste $x \in A$ tale che $x \in A + a$ e $x = y + a$ per qualche $y \in A$. Ma allora $a = (y+a) - y$ dove $x = x + y$, quindi $a_i = x_i - y_i$. Allora $|a_i| = |x_i - y_i| \leq |x_1| + |y_i| < 2$. Quindi, vi è solo un numero finito di possibili elementi a che soddisfano la condizione, quindi anche l'insieme è finito.

Se G è finito e X è di Hausdorff allora X/G è di Hausdorff. Ciò segue dalla proposizione precedente con $A = X$.

4.2 Spazi proiettivi reali

Definizione Spazio proiettivo

Consideriamo $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$ dove $x \sim y$ se e solo se $\exists y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,|\, x = \lambda x$, che è il quoziente per l'azione del gruppo delle omotetie. Questo è lo spazio proiettivo reale di dimensione n, $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \triangleq (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$.

Sia $\pi(x) = [x]$. Per ogni $i = 0, \cdots, n$ definiamo

$$A_i = \{[(x_0, \cdots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \,|\, x_i \neq 0\}$$

aperto dello spazio proiettivo, Allora $\pi^{-1}(A_i) = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \,|\, x_i \neq 0\}$ aperto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
Abbiamo che

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$$

che sono tutti elementi omeomorfi a $\mathbb{R}^n$. Quindi lo spazio proiettivo si può ricoprire con elemeti omeomorfi a $\mathbb{R}^n$.
Notiamo che $x \sim x/||x||$. Rappresentiamo lo spazio proiettivo usando S^n. Dati $x, y \in S^n$, $x \sim y$ se e solo se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $y = \lambda x$. Ma quindi

$$\begin{aligned} ||y|| &= ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \\ |y| &= 1 \end{aligned}$$

Quindi $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$. Allora $\sim$ ristretta a S^n è generata dal gruppo finito $\mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{id}\}$. Allora possiamo costruire il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi|_{S^n}"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"] & S^n \arrow[d, "\pi|_{S^n}"] \\ S^n/_\sim \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[r, "f^{-1}"] & S^n/_\sim \end{tikzcd}$$

dove $r(x) = x/||x||$ e $f([x]) = [x]$. Possiamo quindi concludere che lo spazio proiettivo è di Hausdorff in quanto quoziente dello spazio S^n che è di Hausdorff.

4.3 Spazi proiettivi complessi

Definizione Spazio proiettivo

Consideriamo $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$ dove $x \sim y$ se e solo se $\exists y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,|\, x = \lambda x$, che è il quoziente per l'azione del gruppo delle omotetie. Questo è lo spazio proiettivo complesso di dimensione n, $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \triangleq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$.

Come prime possiamo rappresentare lo spazio con S^{2n+1} e quindi è compatto e connesso. Vogliamo mostrare che è pure di Hausdorff. Consideriamo

$$K = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \,|\, x = \lambda y\}$$

questi elementi sono come matrici $2 \times (n+1)$ a coefficienti complessi. La condizione di proporzionalità della righe della matrice equivale precisamente alla conizione di avere rango 1, la quale è equivalente a richiedere che tutti i determinanti minori di ordine 2 si anullino. Ma tali condizioni si esprimono attraverso equazioni, quindi danno luogo a un sottoinsieme chiuso. Quindi K è chiuso e lo spazio proiettivo è di Hausdorff.

5 Topologia algebrica

Definizione Costruzione invariante

Una costruzione invariante su spazi topologici è una funzione f tale che se X e Y sono omeomorfi allora $f(X)$ e $f(Y)$ sono isomorfi, nel senso della categoria a cui appartengono gli oggetti $f(X)$ e $f(Y)$.

Definizione Componente connesse per archi

Sia X spazio topologico. Sia $\pi_0(X) = X/\sim$ dove $\sim$ è relazione di equivalenza data da

$$x \sim y \iff \exists \alpha\colon [0,1] \to X \mid \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y$$

sono le componenti connesse per archi di X.

È chiaramente una relazione di equivalenza.

Data una funzione continua f,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X/_\sim \arrow[r, dotted, "\pi_0(f)"] & Y/_\sim \end{tikzcd}$$

dove $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ data da $[x] \to [f(x)]$. Tale definizione è ben posta in quanto dato un cammino α fra due rappresentanti x, x' allora nell'immagine possiamo considerare $f \circ \alpha$. Inoltre, π_0 soddisfa le proprietà di funtorialità:

1. $\pi_0(1_X) = 1_{\pi_0(X)}$;
2. $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.

5.1 Omotopia

Definizione

Due applicazioni continue $f_0, f_1\colon X \to Y$ tra spazi topologici si dicono *omotope* se esiste una applicazione continua

$$H\colon X \times [0,1] \to Y$$

che porta $(x,t) \to H(x,b)$ data da:

1. $H(x,0) = f_0(x)$;
2. $H(x,1) = f_1(x)$

per tutte le $x \in X$. Una tale applicazione viene detta *omotopia* da f_0 a f_1.

È quindi una deformazione continua.

Proposition

Sia X, Y spazi topologici e sia $C(X,Y)$ l'insieme delle applicazioni continue. Allora, la relazione $\sim$ su $C(X,Y)$ fra le mappe omotope è una relazione di equivalenza.

Proof

1. Chiaramente $f \sim f$ mediante omotopia costante $H(x,t) = f(x)$.
2. Sia $f \sim g$ tramite $H\colon X\colon [0,1] \to Y$. Allora $g \sim f$ tramite $G = H(x, 1-t)$.

3. Siano $f \sim g$ e $g \sim h$ tramite $H\colon X\colon [0,1] \to Y$ e $K\colon X\colon [0,1] \to Y$ rispettivamente. Allora $f \sim h$ mediante
$$L(x,t) \triangleq \begin{cases} H(x,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

5.2 Incollamente di funzioni continue

Siano $A_i \subseteq X$ una famiglia arbitraria di sottoinsiemi e $f_i\colon A_i \to Y$ mappe continue tali che $\forall i,j \in I$
$$f_i\big|_{A_i \cap A_j} = f_j\big|_{A_i \cap A_j}$$
Possiamo quindi definire
$$f\colon \bigcup_{i \in I} A_i \to Y$$
data da $x \to f(x) = f_i(x)$ se $x \in A_i$. Questa funzione è ben definita ed è continua se:

1. gli A_i sono tutti aperti in X;
2. I è finito e gli A_i sono tutti chiusi.

Per la proprietà di transitività della topologia di sottospazio abbiamo che

1. Se V è aperto di Y
$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$$
che è unione di aperti in X e quindi aperti in $\bigcup A_i$ per transitività della topologia di sottospazio;
2. Se C è chiuso di Y
$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(C)$$
che è unione di chiusi in A_i, che è chiuso in $\bigcup A_i$ in quanto unione finita di chiusi, e quindi chiuso per transitività della topologia di sottospazio.

Lemma

Siano $f_0, f_1\colon X \to Y$ e $g_0, g_1\colon Y \to Z$ funzioni continue tali che $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$. Allora $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
X \times I \arrow[ur, "F"] \arrow[r, dotted, "\exists!\,\tilde{F}"] \arrow[dr, "\pi_I"'] & Y \times I \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "G"] & Z \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Proof

Sia $F\colon X \times I \to Y$ omotopia da f_0 a f_1 e $G\colon Y \times I \to Z$ omotopia da g_0 a g_1. Per la proprietà universale del prodotto $Y \times I$ esiste un'unica applicazione continua $\tilde{F}\colon X \to I \to Y \times I$ che da commutare il diagramma. Abbiamo che $G \circ \tilde{F}$ è continua in quanto composizione di applicazioni continue, ed è un'omotopia da $g_0 \circ f_0$ a $g_1 \circ f_1$ in quanto:

1.
$$\begin{aligned}(G \circ \tilde{F})(x,0) &= G(\tilde{F}(x,0)) = G(f_0(x),0) \\ &= g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(G \circ \tilde{F})(x,1) &= G(\tilde{F}(x,1)) = G(f_1(x),1)\\ &= g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)\end{aligned}$$

Definizione

Una applicazione continua $f\colon X \to Y$ si dice una *equivalenza omotopica* se esiste un'applicazione continua $g\colon Y \to X$ tale che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano rispettivamente omotope a 1_Y e 1_X. Diciamo che due spazi topologici sono *omotopicamente equivalenti* se esiste un'equivalenza omotopica fra di essi.

Quest'ultima è una relazione di equivalenza.

Esempio

Siano $x \subseteq \mathbb{R}^n$ e $y \subseteq \mathbb{R}^m$ sottospazi convessi e non vuoti. Allora X e Y sono omotopicamente equivalenti.
Per dimostrarlo scegliamo delle applicazioni continue $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ (come per esempio quelle costanti). Allora $g \circ f\colon X \to X$ e $f \circ g\colon Y \to Y$ sono continue e $g \circ f \sim 1_X$ e $f \circ g \sim 1_Y$ in quanto X, Y sono convessi (risultato precedente)

Definizione

Uno spazio topologico è detto *contrattile* se è omotopicamente equivalente ad un singolo punto.

Lemma

Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue. Se f, g sono omotope allora $\pi_0(f) = \pi_0(g)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. In particolare, se f è equivalenza omotopica allora $\pi_0(f)$ è una biiezione.

Proof

Abbiamo $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$ e $\pi_0(g)([x]) = [g(x)]$.

($\Longrightarrow$) Dire che $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ è equivalente a dire che $\forall x \in X$, $f(x)$ e $g(x)$ stanno nella medesima Componente connessa per archi di Y. Sia $F\colon X \times I \to Y$ un omotopia da f a g. Per ogni $x \in X$, consideriamo $F_x\colon I \to Y$ data da $F_x(t) = F(x,t)$ che è continuo in quanto composizione di applicazioni continue. Allora abbiamo che $F_x(0) = f(x)$ e $F_x(1) = g(x)$ quindi F_x è un cammino in Y da $f(x)$ a $g(x)$.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che f sia una equivalenza omotopica. Allora esiste $g\colon Y \to X$ continua tale che $g \circ f \sim 1_X$ e $f \circ g \sim 1_Y$. Abbiamo $\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g \circ f) = \pi_0(1_X) = 1_{\pi_0(X)}$. Analogamente si dimostra che $\pi_0(f) \circ \pi_0(g) = 1_{\pi_0(Y)}$.

5.3 Retratti e retratti per deformazione

Definizione Retratto

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un suo sottospazio. Diciamo che Y è un retratto di X se esiste una applicazione continua $r\colon X \to Y$, detta *retrazione*, tale che $r(y) = y$ per $y \in Y$.

Se $iY \hookrightarrow X$ è l'inclusioe canonica allora la condizione $r(y) = y$ equivale esattamente alla condizione $r \circ i = 1_Y$.

Esempio

Consideriamo due circonferenza A, B distinte che sono tangenti in un punto P, quinsi toccano. Allora $r\colon A \cup B \to A$ data da

$$y \to \begin{cases} r(y) = y & y \in A \\ r(y) = P & y \in B \end{cases}$$

ed r è continua in qanto incollamento di funzioni continue.

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio Y di X si dice *retratto per deformazione* di X se esiste un'applicazione continua

$$R\colon X \times I \to X$$

detta *deformazione di X su Y* tale che

1. $R(x, 0) = x$ per $x \in X$ (parti dallo spazio intero);
2. $R(x, 1) \in Y$ per $x \in X$ (finisce tutto dentro il sottospazio);
3. $R(y, t) = y$ per $y \in Y$ e $t \in I$ (il sottospazio rimane sempre invariato).

Esempio

Sia A un insieme stellato per il punto $p \in A$. Allora $\{p\} \subseteq A$ è un retratto per deformazioni di A in quanto abiamo $R\colon A \times I \to A$ dato da $(x, t) \to R(x, t) = tx + (1 - t)p$ che è continua e

1. $R(x, 0) = p$;
2. $R(x, 1) = x$;
3. $R(p, t) = tp + (1 - t)p = p$.

Proposition

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un retratto per deformazione di X. Allora Y è un retratto di X e l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica

Proof

Abbiamo $R\colon X \times I \to X$ retrazione per deformazione di X su Y. Definiamo $r\colon X \to Y$ come $r(x) = R(x, 0) \in Y$ e $r(y) = R(y, 0) = y$ per $y \in Y$. Questa funzione è continua in quanto

$$i \circ r = R\big|_{X \times \{0\}}$$

è continua per la prorpieté universale della topologia di sottospazio. Abbiamo $r \circ i = 1_Y$. D'altro canto, abbiamo $i \circ r \sim 1_X$. Infatti, R fornisce un'omotopia tra $i \circ r$ e 1_X:

1. $R(x, 1) = x = 1_X(x)$;
2. $R(x, 0) = i(r(x)) = (i \circ r)(x)$.

Esempio

Consideriamo $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ data da $x \to x/||x||$. Abbiamo R dato da $(x, t) \to R(x, t) = tx + (1 - t)r(x)$ che è un retratto per deformazione.

6 Gruppo fondamentale

Definizione Insieme dei cammini

$\Omega(X, a, b)$

Definizione Omotopia a estremi fissi

Relazione di equivalenza fra due cammini se vi è una omotopia fra di essi tale che $F(0, s) = a$ e $F(1, s) = b$.

Proposition

La nozione di omotopia ad estremi fissi è compatibile con le operazioni

1. $\alpha \sim \alpha' \implies i(\alpha) \sim i(\alpha')$;
2. se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$ allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.

Proof

1. Sia $F \colon I \times I \to X$ omotopia a estremi fissi tra α e α'. Allora $\tilde{F} \colon I \times I \to X$ data da $(t, s) \to \tilde{F}(t, s) = F(1 - t, s)$ che è omotopia a estremi fissi tra $i(\alpha)$ e $i(\alpha')$.
2. Siano F una omotopia a estremi fissi fra α e α' e G una omotopia a estremi fissi fra β e β'. Allora
$$(F * G)(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
tale mappa è continua in quanto "incollamento" di funzioni continue che sono compatibili nell'intersezione, quindi $F * G$ è una omotopia a estremi fissi fra $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$.

Lemma

Sia $\alpha \colon I \to X$ un cammino e $\varphi \colon I \to I$ un'applicazione continua tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. Sia β il cammino riparametrizzato attraverso φ, cioè $\beta \triangleq \alpha \circ \varphi$. Allora α e β sono omotopicamente equivalenti a estremi fissi.

Proof

Essenod I convesso, il segmento chde collega t a $\varphi(t)$ è interamente contenuto in I. Abbiamo $F \colon I \times I \to X$ dato da $(t, s) \to \alpha(s\varphi(t) + (1 - s)t)$. Questa è funzione continua in quanto composizione di funzioni continue ed è omotopia ad estremi fissi da α a β in quanto $\varphi(0) = 0 \wedge \varphi(1) = 1$.

Proposition

L'operazione $*$ di concatenazione tra cammini è associativa a mano di omotopia a estremi fissi. Sia quindi $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e $\beta \in \Omega(X, b, c)$ e $\gamma \in \Omega(X, c, d)$. Allora

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

Proof

$(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ differiscono solamente per una riparametrizzazione continua. In effetti,

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = (\alpha * (\beta * \gamma))(\varphi(t))$$

dove φ è la funzione continua definita come seguente:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La tesi segue dal lemma.

Proposition

Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$. Allora:

1. $1_a * \alpha \sim \alpha * 1_b \sim \alpha$;
2. $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$;

dove $i(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$.

Siccome $\alpha = i(i(\alpha))$ allora deduciamo anche che $i(\beta) * \beta = 1_b$.

Proof

1. suddividiamo l'intervallo in due parti, e sul primo pezzo $[0, \frac{1}{2}]$ usiamo 1_a mentre in $[\frac{1}{2}, 1]$ percorriamo con α. Nell'altro caso usiamo prima α e poi 1_b. Nel primo caso abbiamo

$$(1_a * \alpha)(t) = \alpha(\psi(t))$$

dove ψ è la riparametrizzazione continua di $[0, 1]$ data da

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

nell'altro caso abbiamo $(\alpha * 1_b)(t) = \alpha(\nu(t))$ dove ν è la riparametrizzazione continua di $[0, 1]$ data da

$$\nu(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La tesi segue quindi dal fatto che riparametrizzazioni continue di cammini a estremi fissati otteniamo un cammino a meno di omotopia.

2. Vogliamo mostrare che $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$. Dobbiamo costruire un'omotopia a estremi fissi $F \colon I \times I \to X$ tra $\alpha * i(\alpha)$ e 1_a. L'idea è quella di percorrere per metà tempo l'andata e poi il ritorno, accorciando sempre di più il capo

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha((1-s)2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((1-s)2(1-t)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definizione Gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico e $a \in X$. L'insieme delle classi di omotopia a estremi fissi (dove gli estremi coincidono, cioè loop)

$$\pi_1(X, a) = \{[a] \,|\, \alpha \colon I \to X \text{ cammino } \wedge \alpha(0) = a = \alpha(1)\}$$

dotato dell'operazione

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

Proposition Il gruppo fondamentale è un gruppo

Abbiamo

1. l'inverso è dato da $[\alpha] = [i(\alpha)]$;
2. l'elemento neutro è $[1_a]$

Proof

1. Mostriamo che l'operazione è ben definita. Siano $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$. Vogliamo mostrare che $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$. Ma questo è un risultato precedente.
2. L'associatività segue dal risultato della scorsa lezione.
3. Per l'elemento inverso abbiamo
$$[\alpha] \cdot [i(\alpha)] = [\alpha * i(\alpha)] = [1_a]$$
4. Per l'elemento neutro abbiamo
$$[1_a] \cdot [a] = [1_a * \alpha] = [\alpha]$$
e
$$[\alpha] \cdot [1_a] = [\alpha * 1_a] = [\alpha]$$

Abbiamo quindi un ponte fra topologia e algebra.

Definizione

La categoria $\mathbf{Top}_*$ è la categoria in cui gli oggetti sono le coppie (X, a) dove X è uno spazio topologico e $a \in X$, e le cui freccie da (X, a) a (y, b) sono le applicazioni continue $f : X \to Y$ tali che $f(a) = b$.

Proposition

Il gruppo π_1 definisce un funtore $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$.

Proof

Abbiamo già definito l'azione del π_1 sugli oggetti di $\mathbf{Top}_*$. Definiamo la sua azione sulle freccie $f : (X, a) \to (Y, b)$ tali che $b = f(a)$. Definiamo $\pi_1(f) : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b)$ con $f([a]) = [f \circ \alpha]$, che è ben posta. Mostriamo che è un omomorfismo di gruppi. Questo segue dalla prossima proposizione. Usando quella otteniamo

$$\begin{aligned}
\pi_1(f)([\alpha] \cdot [\beta]) &= \pi_1(f)([\alpha * \beta]) \\
&= [f \circ (\alpha * \beta)] \\
&= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\
&= [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] \\
&= \pi_1(f)([\alpha]) \cdot \pi_1(f)([\beta])
\end{aligned}$$

Inoltre l'elemento neutro
$$\pi_1(f)([1_a]) = [f \circ 1_a] = [1_b]$$

Mostriamo infine le proprietà di funtorialità

1. Sia $f\colon (X,a) \to (Y,b)$ e $g\colon (Y,b) \to (Z,c)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\pi_1(g \circ f)([a]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\ &= (\pi_1(g) \circ \pi_1(f))([\alpha]) \\ &= \pi_1(g)(\pi_1(f)([a])) \\ &= [g \circ (f \circ \alpha)]\end{aligned}$$

2. Sia $1_{(X,a)}\colon (X,a) \to (X,a)$. Dobbiamo mostrare che il funtore manda questo elemento dell'identità dei gruppi, quindi

$$\begin{aligned}\pi_1(1_{(X,a)})([\alpha]) &= [1_X \circ \alpha] = [\alpha] \\ &= 1_{\pi_1(X,a)}([\alpha])\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f \circ a"'] & (X,a) \arrow[d, "f"] \\ & (Y,b) \end{tikzcd}$$

Proposition

Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, allora:

1. dati $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$, omotopi fra loro $\alpha \sim \beta$, allora $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$;
2. dati $\alpha \in \Omega(X,a,b)$ e $\beta \in \Omega(X,b,c)$, allora

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$$

e $i(f \circ \alpha) = f \circ i(\alpha)$.

Proof

Il primo punto deriva da prima. Rimane da dimostrare il secondo. Le operazioni i e $*$ sono azioni che coinvolgono solamente il dominio, mentre quella di composizione coinvolge solo il codominio, e sono indipendenti l'una dall'altra quindi commutano.

Proposition

Il π_1 è un invariante topologico. Dato $f\colon (X,a) \to (Y;b)$ tale che $b = f(a)$, allora $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y,b)$ è un isomorfismo di gruppi (ogni funtore manda isomorfismi in isomorfismi).

Supponiamo di avere uno spazio X e due punti a, b connessi fa un cammino γ. Allora possiamo considerare $\gamma_\#\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$ data da

$$\gamma_\#([\alpha]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$$

che è ben definita in quanto se $\alpha \sim \alpha'$ allora per i risultati precedenti $i(\alpha) * \alpha * \gamma \sim i(\alpha) * \alpha' * \gamma$. Inoltre $i(\alpha)_\# = \gamma_\#^{-1}$ (semplice verifica). Mostriamo che $\gamma_\#$ è un omomorfismo di gruppi.

$$\begin{aligned}\gamma_\#([\alpha][\beta]) &= \gamma_\#([\alpha * \beta]) \\ &= [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma] \\ \gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta]) &= [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \cdot [i(\gamma) * \beta * \gamma] \\ &= [i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma) * \beta * \gamma] \\ &= [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma]\end{aligned}$$

Quindi $\gamma_\#$ è un isomorfismo di gruppi.

Definizione Simply connected

A topological space X is said to be simply connected if it is connected by arc (tutti i gruppi fondamentali sono isomorfi) e $\pi_1(X)$ è banale.

Esempio

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio convesso. Allora $\pi_1(X, a) = \{*\}$ è il gruppo banale $\forall a \in X$. In altre parole, X è simply connected. Sia $\alpha\colon I \to X$ un cammino chiuso $\alpha(0) = \alpha(1) = a$. Vogliamo trovare un omotopia per mostrare che quest'ultimo è omotopicamente equivalente al cammino costane 1_a. Sia $F\colon I \times I \to X$ dato da $(t, s) \to s1_a(t) + (1 - s)\alpha(t)$.

Proposition

Siano X, Y spazi topologici e $a \in X$ e $b \in Y$. Allora, abbiamo un isomorfismo

$$\pi_1(X \times Y, (a, b)) \cong \pi_1(X, a) \times \pi_1(X, b)$$

dato dalla mappa $[a\colon I \to X \times Y] \to ([\pi_X \circ \alpha], [\pi_Y \circ \alpha])$ dove π sono le proiezioni.

Proof

Per la proprietà universale della topologia prodotto $X \times Y$ abbiamo

$$\Omega(X \times Y, (a, b)) \cong \Omega(X, a) \times \Omega(Y, b)$$

Tale biiezione induce la mappa nell'enunciato della proposizione. Il fatto che tale mappa sia una biiezione segue dal fatto che dare un'omotopia nello spazio prodotto equivale a dare due omotopie negli spazi del prodotti, e quindi si restringe bene a fare il quoziente. La mappa è un omomorfismo di gruppi essendo π_1 un funtore.

6.1 Retratti

Consideriamo $i\colon A \hookrightarrow X$ e $a \in A$. Abbiamo la mappa $\pi_1(1)\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$. In generale non è iniettiva perché cammini non omotopi in A a estremi fissi potrebero esserli in X.

Tuttavia, se A è retratto di X mediante $R\colon X \to A$ continua tale che $r \circ i = 1_A$ allora per funtorialità di π_1 come funtore otteniamo che

$$\pi_1(r) \circ \pi_1(i) = \pi_1(r \circ i) = \pi_i(1_A) = 1_{\pi_1(A,a)}$$

quindi in particolare $\pi_1(i)$ è iniettiva.

Proposition

Sia A un retratto per deformazione di X. Allora per ogni punto $a \in A$, $\pi_1(i)\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ è un isomorfismo.

Proof

Sia $R\colon X \times I \to X$ una deformazione di X su A. Siccome ogni retratto per deformazione induce un retratto la mappa è anche iniettiva. Dobbiamo anche mostrare che è pure suriettiva. Sia $[\beta] \in \pi_1(X, a)$ con $\beta \in \Omega(X, a, a)$ un elememto del codominio. Poniamo $r(x) = R(x, 0)\colon X \to A$. Consideriamo $r \circ \beta\colon I \to A$. Possiamo quindi calcolare

$$\pi_1(i)([r \circ \beta]) = [i \circ r \circ \beta] \qquad = [\beta]$$

cioè è vero in quanto $F\colon I \times I \to X$ definita da $(t, s) \to F(t, s) = R(\beta(t), s)$ è proprio un'omotopia a estremi fissi tra β e $i \circ r \circ \beta$

$$F(t,0) = R(\beta(t),0) = r(\beta(t)) = i(r(\beta(t))) = (i \circ r \circ \beta)(i)$$
$$F(t,1) = R(\beta(t),1) = \beta(t)$$

gli estremi fissi sono facili da verificare. Quindi è suriettiva.

Proposition

Sia $F\colon X \times I \to Y$ un'omotopia tra due applicazioni continue $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$. Sia $a \in X$. Definiamo $\gamma\colon I \to Y$ dato da $t \to \gamma(s) = F(a,s)$, che chiaramente è un cammino da $f(a)$ a $g(a)$. Il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \pi(X,a) \arrow[dl, "\pi_1(f)"'] \arrow[dr, "\pi_1(g)"] & \\ \pi(Y,f(a)) \arrow[rr, "\gamma_\#"] & & \pi(Y,g(a)) \end{tikzcd}$$

Lemma

Sia $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$ e

$$\mathbb{R} \supseteq I = \{t_1p_1 + t_2p_2 + t_3p_3 \,|\, t_1,t_2,t_3 \geq 0 \wedge t_1+t_2+t_3 = 1\}$$

triangolo eventualmente degenere di vertici p_1, p_2, p_3. Sia $f\colon T \to X$ un'applicazione continua e, per ogni i, j sia $f_{i,j}\colon I = [0,1] \to X$ la parametrizzazione standard della restrizione di f al lato di estremi p_i, p_j. Quindi $f_{i,j}\colon [0,1] \to X$ è dato da $t \to f((1-t)p_i + tp_j)$. Allora $f_{1,3} \sim f_{1,2} * f_{2,3}$.

Proof

Introduciamo una funzione ausiliaria $q\colon I \times I \to T$ data da

$$q(t,s) = \begin{cases} (1-t-ts)p_1 + 2tsp_2 + (t-ts)p_3 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-t-s+ts)p_1 + 2(1-t)sp_2 + (t-s+ts)p_3 & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Abbiamo che per $s = 0$

$$q(t,0) = \begin{cases} (1-b)p_1 + tp_3 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-t)p_1 + tp_3 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

mentre per $s = 1$

$$q(t,1) = \begin{cases} (1-2t)p_1 + 2tp_2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1-(2t-1)p_2 + (2t-1)p_2 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

che sono i due lati. Quindi abbiamo $(F \circ q)(t,0) = f_{1,3}(t)$ e $(F \circ q)(t,1) = (f_{1,2} * f_{2,3})(t)$ e quindi $F \circ q$ è un omotopia a estremi fissi tra $f_{1,3}$ e $f_{1,2} * f_{2,3}$.

Proof

Vogliamo dimostrare che per ogni $[\alpha] \in \pi_1(X,a)$,

$$[i(\gamma) * (f \circ \alpha) * \gamma] = [g \circ \alpha]$$
$$[(f \circ \alpha) * \gamma] = [\gamma * (g \circ \alpha)]$$

cioè che $(f \circ \alpha) * \gamma$ e $\gamma * (g \circ \alpha)$ sono omotopi a estremi fissi. Definiamo la seguente funzione

$G\colon I \times I \to Y$ data da $(t, s) = F(\alpha(t), s)$. Notiamo che

$$
\begin{aligned}
G(t,0) &= F(\alpha(b),0) = f(\alpha(b)) = (f \circ a)(t) \\
G(t,1) &= F(\alpha(t),1) = g(\alpha(t)) = (g \circ \alpha)(t) \\
G(0,s) &= F(\alpha(0),s) = \gamma(s) \\
G(1,s) &= F(\alpha(1),s) = \gamma(s)
\end{aligned}
$$

Vogliamo applicare il lemma e quindi suddividere il quadrato (dominio) in due triangoli. Possiamo quindi notare che i due lati a destra e sinistra verso l'alto sono γ, mentre il lato sopra verso destra è $g \circ \alpha$ e quello sott $f \circ \alpha$. Quindi scindiamo il quadrato mediante la diagonale mediante $\delta\colon I \to Y$ dato da $t \to \gamma(t) = F(\alpha(t), t)$. Possiamo applicare il lemma ad entrambi i triangoli, quindi $\delta \sim \gamma * (g \circ \alpha)$ e $\gamma \sim (f \circ \alpha) * \gamma$. Per transività della relazione di equivalenza abbiamo che $\gamma * (g \circ \alpha) \sim (f \circ \alpha) * \gamma$.

Corollario

Sia X uno spazio topologico e $g\colon X \to X$ una funzione continua omotopa a 1_X. Sia $a \in X$. Allora, l'applicazione $\pi_1(g)\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X, g(a))$ è un isomorfismo di gruppi.

Proof

Basta applicare la commutatività del triangolo alle due mappe prendendo $f = 1_X$e quindi $\pi_1(g) \cong \gamma_\# \circ 1_{\pi_1(X,a)} \cong \gamma_\#$.

Lemma

Siano f, g, h delle applicazioni fra gli insiemi A, B, C, D tali che $g \circ f$ e $h \circ g$ siano biiettivi. Allora, f è biiettiva.

Proof

Siccome $g \circ f$ è biiettiva, è iniettiva e quindi f è iniettiva. Dobbiamo anche dimostrare che f è suriettiva. Sia $b \in B$ e quindi $g(b) \in C$. Essendo $g \circ f$ suriettiva, abbiamo $g(b) = (g \circ f)(a)$ per qualche a. Ma siccome $h \circ g$ è biiettiva, $h \circ g$ è iniettiva. Essendo $(h \circ g)(b) = (h \circ g)(f(a))$ da cui segue che $b = f(a)$.

Teorema Estremamente importante

Sia $f\colon X \to Y$ un'equivalenza omotopica di spazi topologica. Allora per ogni $a \in X$, l'applicazione

$$\pi_1(X,a) \to \pi_1(Y, f(a))$$

è un isomorfismo di gruppi.

Proof

Essendo f un'equivalenza omotopica, esiste $g\colon Y \to X$ tale che $g \circ f \sim 1_X$ e $f \circ g \sim 1_Y$. (Inserire diagramma sotto). Il lemma si applicare quindi dando che $\pi_1(f)$ è un isomorfismo.

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(X,a) \arrow[r, "\pi_1(f)"] \arrow[rr, bend right, "\pi_1(g)\circ\pi_1(f)=\pi_1(g\circ f)"'] & \pi_1(Y, f(a)) \arrow[r, "\pi_1(g)"] \arrow[rr, bend right, "\pi_1(f)\circ\pi_1(g)=\pi_1(f\circ g)"'] & \pi_1(X, g(f(a))) \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(X, f(g(f(a))))
\end{tikzcd}
$$

6.2 Semplice connessione delle sfere

Esistono dei cammini suriettivi in S^n (curve di Peano). Tuttavia, è possibile dimostrare chd ogni cammino chiuso in $S^{n\geq 2}$ è omotopicamente equivalente alla giunzione di un numero finito di cammini chiusi non suriettivi.

Proposition Teorema del numero di Lebesgue

Sia (Y, d) uno spazio metrico compatto, $f\colon Y \to X$ un'applicazione continua verso uno spazio X, e $\mathcal{A}$ un ricorpimento aperto di X. Allora, esiste un numero reale positivo δ tale che per ogni $y \in Y$ si ha che

$$f(B_\delta(y))$$

è interamente contenuto in uno degli aperti di $\mathcal{A}$.

Proof

Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ definiamo

$$Y_n = \{y \in Y \mid \exists U \in \mathcal{A}, f(B_{2^{-n}}(y)) \subseteq U\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che $Y = Y_n$ per qualche n. Se la tesi vale per δ allora vale per qualsiasi $\delta' \leq \delta$. Abbiamo

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

in quanto per ogni $y \in Y$, $f(y) \in U$ per qualche U del ricoprimento, ma quest'ultimo è un aperto di Y in quanto U è aperto e f è continua, e quindi $f^{-1}(U) \supseteq B_{2^{-n}}(y)$ cioè esiste un raggio sufficientemente piccolo per un n sufficientemente grande tale che $y \in Y_n$. Osserviamo che $Y_n \subseteq Y_{n+1}$. Mostriamo che $Y_n \subseteq \operatorname{int}(Y_{n+1})$ per ogni n. Per mostrarlo prendiamo $y \in Y_n$, scegliamo $U \in \mathcal{A}$ tale che

$$B_{2^{-n}}(y) \subseteq f^{-1}(U)$$

Per ogni $z \in B_{2^{-(n+1)}}(y)$, vogliamo mostrare che $z \in Y_{n+1}$ e quindi esiste un intorno e abbiamo finito. Per mostrarlo notiamo che ciò è come dire $d(z, y) < 2^{-(n+1)}$. Per mostrare che $z \in Y_{n+1}$ mostriamo che $B_{2^{-(n+1)}}(z) \subseteq f^{-1}(U)$. Sia x in tale bolla. Allora

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2 \cdot 2^{-(n+1)} = 2^{-n}$$

abbiamo quindi che $x \in B_{2^{-n}}(y) \subseteq f^{-1}(U)$ e quindi abbiamo concluso. Dall'uguaglianza

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

segue che

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int}(Y_n)$$

Per compattezza esistono $n_1, \ldots, n_m$ tali che

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{int}(Y_{n_i})$$

Pongo $k = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Poiché

$$\operatorname{int}(Y_{n_i}) \subseteq \operatorname{int}(Y_k)$$

segue $Y = \operatorname{int}(Y_k)$. Ponendo $\delta = 2^{-k}$, si ottiene la tesi.

Corollario

Sia $\alpha\colon I \to X$ un cammino e $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un intero positivo n tale che per ogni $i = 0, \cdots, n-1$, l'immagine della restrizione

$$\alpha\big|_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}\colon \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \to X$$

è interamente contenuta in uno degli aperti del ricorprimento $\mathcal{A}$.

Proof

Applicazione immediata del teorema allo spazio metrico compatto $(Y, d) = I$.

Teorema di Van Kampen

Siano A, B aperti di uno spazio topologico X tali che $X = A \cup B$ e $x_0 \in A \cap B$. Se f (rispettivamente g) è l'inclusione di A (rispettivamente B) in X e

1. $f_* \triangleq \pi_1(f)\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$;
2. $g_* \triangleq \pi_1(g)\colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$;

e $A \cap B$, A e B sono tutti connessi per archi allora $\pi_1(X, x_0)$ è governato dalle immagini di f_* e g_*.

Proof

Sia $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$. We must show that α è omotopicamente equivalente a estremi fissi alla giunzione di un numero finito di cammini $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Omega(X, x_0, x_0)$, ognuno dei quali è contenuto o in A o in B. Per il corollario, esiste $n > 0$ tale che la restrizione di α ad ognuno dei sottointervalli $[\frac{1-i}{n}, \frac{i}{n}]$, per $i = 1, \cdots, n$, prende valori in A oppure in B. Sia

$$\alpha_i(t) \triangleq \alpha\big|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} = \alpha\left(\frac{i-1+t}{n}\right)$$

e siano x_i, x_{i+1} gli estremi dei cammini α_i. Siccome $A, B, A \cap B$ sono connessi per archi, esistono cammini $\beta_i \in \Omega(X, x_i, x_0)$ tali che

1. se $x_i \in A \cap B$, allora $\beta_i \in \Omega(A \cap B, x_i, x_0)$
2. se $x_i \in A \setminus B$, allora $\beta_i \in \Omega(A, x_i, x_0)$
3. se $x_i \in B \setminus A$, allora $\beta_i \in \Omega(B, x_i, x_0)$

Queste condizioni ci assicurano che

1. se $x_i \in A$ allora $\beta_i \in \Omega(A, x_i, x_0)$
2. se $x_i \in B$ allora $\beta_i \in \Omega(B, x_i, x_0)$

Possiamo quindi porre

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \alpha_1 * \beta_1 \\
\gamma_2 &= i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2 \\
\gamma_{n-1} &= i(\beta_{n-2}) * \alpha_{n-1} * \beta_{n-1} \\
\gamma_n &= i(\beta_{n-1}) * \alpha_n
\end{aligned}$$

otteniamo dei cammini chiusi in x_0 tali che

$$\alpha \sim \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$$

Corollario

Siano A e B aperti di uno spazio topologico X tali che $X = A \cup B$ e $A \cap B \neq \varnothing$. Se A, B e $A \cap B$ sono semplicemente connessi allora X è semplicemente connesso.

Proof

X è connesso per archi in quanto unione di due sottospazi connessi per archi non disgiunti. Siccome $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$ sono banali, allora $\pi(X, x_0)$ è generato dalle immagini dei primi due, ma quindi è banale.

Corollario

Sia $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera di dimensione $n \geq 2$. Allora S^n è semplicemente connessa.

Proof

Let

$$S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$$

By letting $A = S^n \setminus \{N\}$ and $B = S^n \setminus \{S\}$, abbiamo quindi un ricoprimento aperto di S^n tale che A e B sono semplicemente connessi, in quanto omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ per proiezione stereografica, e $A \cap B$ è connesso per archi in quanto omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$, siccome $n \geq 2$. Per $n = 1$ non lo è. Allora S^n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 2$.

7 Rivestimenti

Definizione Rivestimento

Let X be a connected topological space. Un'applicazione continua $p\colon E \to X$ si dice *rivestimento di* X se ogni punto $x \in X$ è contenuto in un aperto $V \subseteq X$ tale che $p^{-1}(V)$ è unione disgiunta di aperti U_i tali che

$$p\big|_{U_i} : U_i \to V$$

è un omeomorfismo per ogni i. E si dice *spazio totale* del rivestimento, X si dice *base* del rivestimento. Gli aperti V con la prorpietà sopra si dicono *aperti banalizzanti* o *uniformemente rivestiti*.

Definizione Omeomorfismo locale

todo

Proposition

Ogni rivestimento è un omeomorfismo locale

Proof

Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Dato $e \in E$, sia $x = p(e)$, sappiamo che esiste V aperto di X uniformemente rivestito tale che $p(e) \in V$ e

$$e \in p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$$

e siccome $e \in U_i$ per esattamente un i, allora

$$p\big|_{U_i} : U_i \to p(U_i) = V$$

è un omeomorfismo

Definizione

$p\colon E \to X$ si dice *rivestimento banale* se X è un aperto banalizzante.

Esempio

todo

Esempio

todoEsempio con la spirale $e^{2\pi i t}$.

Esempio

todo

7.1 Azioni propriamente discontinue e rivestimenti

Definizione

Sia $\alpha \colon G \times X \to X$ un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X. L'azione si dice *propriamente discontinua* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto V di x tale che $\forall g, g' \in G$ con $g \neq g'$, $gV \cap g'V = \varnothing$.

Ricordiamo che un'azione si dice libera se $g \neq 1 \implies gx \neq x$.

Proposition

Ogni azione propriamente discontinua è libera.

Proof

Sia $x \in X$ e $g \in G$ tale che $g \neq 1$. Se fosse $gx = x$ allora dato un aperto V con $x \in V$ come nella definizione, avremmo $gV \cap 1 \cdot V \neq \varnothing$, in quanto contiene $g \cdot x = x$.

Teorema

Sia $G \times X \to X$ un'azione propriamente discontinua. Allora la proiezione canonica sul quoiente $p \colon X \to X/G$ è un rivestimento. Con quoziente si intende l'insieme delle orbite.

Proof

p è continua, suriettiva ed aperta in quanto

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

cioè l'unione delle orbite. Un punto di X/G ha forma $p(x)$ per qualche $x \in X$. Scegliamo un aperto U contenente x tale che per ogni g, g' distintim $gU \cap g'U = \varnothing$. Allora $p(U)$ è un aperto banalizzante, in quanto

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

è un unione disgiunta siccome vale $gU \cap g'U = \varnothing$ e ovviamente

$$p\big|_{gU} : gU \to p(U)$$

è un omeomorfismo

Esempio

todo

Esempio

todo

Proposition

Sia G un gruppo finito che agisce su uno spazio di Hausdorff X. Se tale azione è libera allora è propriamente discontinua.

Proof

todo

Teorema

Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Allora p è un'applicazione aperta e X ha la topologia quoziente indotta da p.

Proof

todo

Definizione

Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento e $f\colon Y \to X$ una applicazione continua. Un *sollevamento* di f è un'applicazione continua $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$: diagramma

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Osservazione

Teorema

Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento e $f\colon Y \to X$ una applicazione continua. Se $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ sono dei sollevamenti di f tali che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$ per qualche $y \in Y$, allora $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

Proof

Teorema

todo

7.2 Calcolo del gruppo fondamentale di S^1

TODO 4 dic.

Andiamo a considerare il rivestimento $e\colon \mathbb{R} \to S^1$ e quindi $e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Proposition

Sia $f\colon I \to S^1$ una funzione continua e $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $e(x_0) = f(0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}(0) = x_0$.

Proof

Grazie al teorema del numero di Lebesgue, sappiamo che esiste una successione di punti $0 = a_0 < a_1 < \cdots a_{n-1} < a_n = 1$ tale che per ogni $i = 0, \cdots, n-1$, $f([a_i, a_{i+1}])$ è contenuto in un aperto uniformemente rivestito (essendo e e un rivestimento, gli aperti uniformemente rivestiti formano un ricoprimento di S^1). Costruiamo induttivamente, per $k = 0, \cdots, n$ dei sollevamenti $\tilde{f}_k\colon [0, a_k] \to \mathbb{R}$ tali che $\tilde{f}_k(0) = x_0$. Denotiamo

$$f_k = f\big|_{[0,a_k]}$$

Per $k = 0$ otteniamo 0 e poniamo $\tilde{f}_0 = x_0$. Induttivamente, supponiamo di avere un sollevamento $\tilde{f}_k\colon [0, a_k] \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}_k(0) = x_0$. Sappiamo che $f([a_k, a_{k+1}]) \subseteq U$ per qualche U uniformemente rivestito, quindi $e^{-1}(U) = \bigsqcup_{j\in J} W_j$ dove W_j sono aperti tali che

$$e\big|_{W_j}\colon W_j \to U = e(W_j)$$

è un omeomorfismo. Consideriamo il piunto di giunzione $\tilde{f}_k(a_k)$. Abbiamo che $\tilde{f}_k(a_k) \in e^{-1}(U)$ se e solo se

$$e(\tilde{f}_k(a_k)) = f_k(a_k) \in f([a_k, a_{k+1}]) \subseteq U$$

essendo $\tilde{f}_k$ un sollevamento. Esiste un unico $j \in J$ tale che $\tilde{f}_k \in W_j$. Essendo $[a_k, a_{k+1}]$ connesso, $\tilde{f}_k([a_k, a_{k+1}])$ è anch'esso connesso e interamento contenuto in W_j. A questo punto la definizione dell'estensione è forzata in quanto vogliamo $f_{k+1} = e \circ \tilde{f}_k$, essendo $e\big|_{W_j}$ è un omeomorfismo. Quindi

$$\tilde{f_{k+1}}(s) = \begin{cases} \tilde{f}_k(s) & s \in [0, a_k] \\ (e\big|_{W_j}{}^{-1} \circ f)s & s \in [a_k, a_{k+1}] \end{cases}$$

Ciò mostra l'esistenza e unicità del sollevamento.

Proposition

Ogni funzione continua $F\colon I \times I \to S^1$ ammette un sollevamento $\tilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $e(x_0) = F(0, 0)$, esiste un unico sollevamento $\tilde{F}$ tale che $\tilde{F}(0, 0) = x_0$.

Proof

Analoga a quella per i cammini grazie al teorema del numero di Lebesgue. Possiamo infatti definire $\tilde{F}$ in maniera induttiva considerando dei rettangoli

$$R_{i,j} = \{(t, s) \in I \times I \mid a_i \leq t \leq a_{i+1} \wedge b_j \leq s \leq b_{j+1}\}$$

tali che $\forall i, j$, $f(R_{i,j})$ è contenuto in un aperto uniformemente rivestito di S_1. Essendo in numero finito possiamo ordinarli per esempio nel seguente modo

$$R_{0,0}, R_{0,1}, \cdots, R_{0,n}, R_{1,0}, \cdots$$

e il resto è analogo.

Corollario

Siano f_0 e f_1 cammini chiusi in S^1 da 1 a 1. Allora, se f_0, f_1 sono omotopi ad estremi fissi, denotando con $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ due sollevamenti rispettivamente di f_0 e f_1 tali che $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$, allora $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$.

Quindi in particolare la nozione di grado non dipende dal rappresentante. TODO: definizione di grado o winding number mediante rivestimento e sollevamento.

Proof

Sia F un'omotopia a estremi fissi fra f_0, f_1. Grazie al risultato precedente, esiste un unico sollevamento $\tilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{f}_0 = \tilde{f}_1(0)$. Abbiamo

1. $F(t, 0) = f_0(t)$
2. $F(t, 1) = f_1(t)$
3. $F(0, s) = F(1, s) = 1$

e $e \circ \tilde{F} = F$. Per l'unicità del sollevamento di cammini, applicata a f_0 e a f_1 abbiamo

1. $\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}_0(t)$
2. $\tilde{F}(t,1) = \tilde{f}_1(t)$

A priori, $\tilde{f}$ potrebbe non tenere fissi gli estremi. Abbiamo che $e \circ \tilde{F}(1,s) = F(1,s) = 1$ e quindi $\tilde{F}(1,s) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Essendo $\tilde{F}$ continua e $\{1\} \times I$ connesso, $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ è connesso di $\mathbb{Z}$, e quindi ridotto ad un unico punto, ovvero la funzione $s \to \tilde{F}(1,s)$ è costante. In particolare, $\tilde{F}(1,1) = \tilde{F}(1,0)$. Ma $\tilde{f}_0(1) = \tilde{F}(1,0)$ e $\tilde{f}_1(1) = \tilde{F}(1,1)$, da cui segue che $\tilde{F}$ è una omotopia a estremi fissi fra i due sollevamenti.

Dal corollario segue che abbiamo una mappa ben definita

$$\varphi\colon \pi_1(S_1, 1) \to \mathbb{Z}$$

dato da $[\alpha] \to \deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1)$ dove $\tilde{\alpha}$ è l'unico sollevamento di α tale che $\tilde{\alpha}(0) = 0$.

Proposition

La mappa φ è un isomorfismo di gruppi dove $\mathbb{Z}$ è visto come gruppo additivo.

Proof

1. Abbiamo che $\varphi([1_1]) = \deg(1_1) = \tilde{1}_1(1) = 0$.
2. siano $[f], [g] \in \pi_1(S^1, 1)$. Vogliamo che

$$\varphi([f] \cdot [g]) = \deg(f * g) = \deg(f) + \deg(g)$$

Dato $a \in e^{-1}(f(0))$, definiamo $l_a(f)$ come l'unico sollevamento di f che inizia nel punto a, ovvero che manda il punto 0 in a: $(l_a(f))(0) = a$. Abbiamo che $l_0 = \tilde{f}$ e $l_a(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$ per ogni $f\colon I \to S^1$ tale che $f(0) = f(1) = 1$ in quanto $a \in e^{-1}(f(0)) = \mathbb{Z}$. Supponiamo che $b = \tilde{f}(1) + a$ e mostriamo che $l_a(f * g) = l_a(f) * l_b(g)$. Questo segue dal fatto che sia $l_a(f * g)$ e $l_a(f) * l_a(g)$ sono entrambi sollevamenti di $f * g$ e soddisfano le medesime condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} (l_a(f * g))(0) &= a \\ (l_a(f) * l_b(g))(0) = (l_a(f))(0) & \qquad\qquad\qquad = a \end{aligned}$$

Poniamo $a = 0$ e valutiamo in 1 l'eguaglianza $l_a(f * g) = l_a(f) * l_b(g)$. Troviamo

$$\begin{aligned} l_0(f * g)(1) &= f \tilde{*} g(1) \\ &= (l_0(f) * l_b(g))(1) = l_b(g)(1) = b + \tilde{g}(1) \end{aligned}$$

con $b = a + \tilde{f}(1)$. Quindi ottenieniamo la tesi.
3. Mostriamo ora la suriettività di φ. Dato $n \in \mathbb{Z}$, vogliamo costruire un cammino che faccia n giri. Possiamo usare la mappa di rivestimento e considerare la mappa $g\colon I \to \mathbb{R}$ che manda $t \to nt$. Abbiamo che $g_n(0) = 0$ e $e \circ g_n$ è un cammino che ha g_n come suo sollevamento, quindi $e \tilde{\circ} g_n = g_n$. Abbiamo quindi che $\deg(e \circ g_n) = g_n(1) = n$. Abbiamo quindi trovato un tale cammino

$$\varphi([e \circ g_n]) = n$$

4. mostriamo ora l'iniettività. Supponiamo che $\varphi([f]) = 0$, quindi $\tilde{f}(1) = 0$ dove $\tilde{f}$ è l'unico solelvamento di f tale che $\tilde{f}(0) = 0$. Se $\tilde{f}(1) = 0$, allora $\tilde{f}$ è un cammino chiuso in $\mathbb{R}$ da 0 a 0. Essendo $\mathbb{R}$ convesso, $\tilde{f}$ è omotopicamente equivalente a estremi fissi al cammino costante da 0 a 0. Ma allora, $e \circ \tilde{f}$ è omotopicamente equivalente a estremi fissi al cammino costante da $e(0)$ a $e(0)$, ovvero a 1_1, ma $e \circ \tilde{f} = f$.

Corollario di quella del prodotto

Sia T il toro. $T \cong S^1 \times S^1$. Allora $\pi_1(T) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$ e quindi è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$.

Teorema Teorema fondamentale dell'algebra

Let $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ where $\deg P(z) = n$. Then, $P(z)$ admits exactly n solutions up to multiplicity.

$$P(z) = a \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{m_i}$$

for $a \in \mathbb{C}$ and $n \in \mathbb{N}$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = n$$

Proof

Osserviamo, innanzitutto, che è sufficiente dimostrare che f ha almeno una radice, in quanto se α è una radice allora f è divisibile per $x - \alpha$ e quindi $f/(x - \alpha)$ ha grado $n - 1$, e quindi si può procedere per induzione. Supponiamo per assurdo che f non abbia radici complesse. Consideriamo la funzione $g_r \colon I \to S^1$ data da

$$g_r(s) \triangleq \frac{f(re^{2\pi is})/f(r)}{|f(re^{2\pi is})/f(r)|}$$

Per costruzione, gr prende valori in S^1 ed è ben definita e continua in quanto non si annulla mai per ipotesi. Definiamo $g \colon I \times \mathbb{R} \to S^1$ dato da $(s, r) \to g(s, r) = g_r(s)$. Allora

$$g_r(0) = \frac{f(r)/f(r)}{|f(r)/f(r)|} = 1 = g_r(1)$$

Quindi g_r è un cammino chiuso da 1 a 1 in S^1. Quindi $[g_r] \in \pi_1(S^1, 1)$. Abbiamo che $g_0(s) = 1$ e quindi g_0 è il cammino costante in 1, e allora $\forall r, r'$, g_r e $g_{r'}$ sono omotopi a estremi fissi (possiamo prendere g come omotopia tra loro). Dunque, g_r è omotopicamente equivalente a estremi fissi al cammino costante g_0. Scegliamo un r per cui l'ultima frase conduce ad una contraddizione. Scegliamo un r_0 sufficientemente grande in modo che $r_0 > 1$ e che $r_0 > \sum |c_i|$ coefficienti del polinomio. Supponiamo che $||x|| = r_0$. Andando a calcolare con la disuguaglianza triangolare

$$\left| \sum c_i x^{n-i} \right| \leq \sum |c_i| \cdot |x^{n-i} \leq |x^{n-1}| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} |c_i| \right)$$

Quindi per ogni $t \in [0, 1]$ abbiamo

$$|x^n| > t \cdot \left| \sum_{i=1}^{n-1} c_i x^{n-i} \right|$$

Quindi considerando

$$f_t(x) \triangleq x^n + t \sum c_i x^{n-i}$$

abbiamo che $f_t(x) \neq 0$ per $t \in [0, 1]$. Chiaramente $f(x) = f_1(x)$, e $f_0(x) = x^n$. Sostituiamo quindi questa formula in g_{r_0}

$$g_{r_0,t}(s) = \frac{f_t(r_0 e^{2\pi is})/f_t(r_0)}{|f_t(r_0 e^{2\pi is})/f_t(r_0)|}$$

Quindi per $t = 1$ abbimo $f_1(x) = f(x) \implies g_{r_0,1} = g_{r_0}$ cammino chiuso in S^1, visto che sono tutti omotopicamente equivalenti a estremi fissi al cammino costante. Per $t = 0$ abbiamo

$$g_{r_0,0}(s) = \frac{{r_0}^n e^{2\pi ins}/{r_0}^n}{|{r_0}^n/{r_0}^n|} = e^{2\pi ins}$$

Quindi abbiamo trovato un cammino che fa n giri intorno al punto 1, ovvero il suo grado è n, ma $g_{r_0,0}$ e $g_{r_0,1}$ sono omotopi a estremi fissi. che è quindi assurdo.

Teorema Teorema del punto fisso di Browner

Ogni funzione continua $f\colon D^2 \to D^2$ ha un punto pinto fisso.

Proof

Per assurdo, supponiamo che $f(x) \neq x$ per $x \in D^2$. Ciò permette di definire una funzione $r\colon D^2 \to S^1$ che associa ad x il punto di intersezione della semiretta che collega x con $f(x)$ su S^1 (che esiste perché i due punti non coincidono). Tale funzione è chiaramente continua. Notiamo che se $x \in S^1$ allora abbiamo che $r(x) = x$, ovvero abbiamo un retratto dove S^1 si immerge in D^2 con una inclusione canonica i (continua). DISEGNO sotto. Applichiamo ora la funtorialità di π_1: DISEGNO 2 sotto. dove i due elemeneti ai lati sono $\mathbb{Z}$ e quello in mezzo $\{0\}$. D^2, essendo convesso, è contrattile, e quindi otteniamo una contraddizione.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "r\circ i=1_{S^1}"'] & D^2 \arrow[r, "r"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1,1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "\pi_1(r\circ i)=1_{\pi_1(S^1,1)}"'] & \pi_1(D^2,1) \arrow[r, "\pi_1(r)"] & \pi_1(S^1,1) \end{tikzcd}$$

8 Successioni topologiche e continuità

Definizione

Si dice che una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende ad x in uno spazio topologico X, $x_n \to x$, o con il lim, se per ogni intorno U di x, esiste N tale che $\forall n > N, x_n \in U$.

Proposition

Ogni funzione continua $f \colon X \to Y$ è continua per successioni, ovvero manda successioni convergenti in successioni convergenti. Se $x_n \to x$ allora $f(x_n) \to f(x)$.

Proof

Per ipotesi per ogni un intorno U di x in X esiste N tale che se $n > N$, $x_n \in U$. Siccome f è continua, è come dire che è continua in ogni punto. In particolare, è continua in x, quindi per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Da ciô segue che per ogni intorno V di $f(x)$, esiste un N tale che $\forall n > N, f(x_n) \in V$, in quanto, preso U tale che $f(U) \subseteq V$ e preso N tale che $\forall n > N$, $x_n \in U$, abbiamo $f(x_n) \in V$.

Proposition

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio Hausdorff ha limite unico.

Proof

Supponiamo per assurdo che $x_n \to x$ e $x_n \to x'$ con $x \neq x'$. Essendo X di Hausdorff, esistono U e V intorni aperti di x e x' tali che $U \cap V = \varnothing$. Esiste N tale che per $n > N$, $x_n \in U$. Esiste M tale che per $n > M$, $x_n \in V$. Ma allora per $n = \max\{N, M\}$, $x_n \in U$ e $x_n \in V$, quindi appartiene a $x_n \in U \cap V$, ma $U \cap V = \varnothing$, che è assurdo.

9 Complementi sul gruppo fondamentale

Proposition

Sia $\gamma\colon I \to X$ un cammino in uno spazio topologico X. e $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Siano $a = \gamma(0)$ e $b = \gamma(1)$ gli estremi del cammino γ. Disegno 1. Allora il seguente diagramma è commutativo. Disegno 2.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\gamma"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,a) \arrow[r, "\gamma_\#"] \arrow[d, "\pi_1(f)"'] & \pi_1(X,b) \arrow[d, "\pi_1(f)"] \\ \pi_1(Y,f(a)) \arrow[r, "(f\circ\gamma)_\#"'] & \pi_1(Y,f(b)) \end{tikzcd}$$

Proof

Vogliamo mostrare che

$$[f(i(\gamma)) * \alpha * \gamma] = [i(f\circ\gamma) * (f\circ\alpha) * (f\circ\gamma)]$$

Ma ciò segue dal fatto che, come abbiamo visto precedentemente, l'applicazione di una funzione continua rispetta sia l'operazione di inverso di un cammino sia l'operazione di concatenazione dei cammini.

Da questo risultato segue che se X e Y sono spazi opologici connessi per archi allora l'iniettività o suriettività dell'omomorfismo $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y,f(a))$ non dipende dalla scelta del punto.

Proposition

Sia X uno spazio topologico e $a \in X$ un punto base. Allora, vi è una corrispondenza biunivoca fra i cammini chiusi in $\Omega(X,a)$ e l'insieme delle applicazioni continue $f\colon S^1 \to X$ tali che $f(1 \in S^1) = a$.

Proof

Consideriamo la restrizione a $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ della mappa esponenziale complessa $e\colon \mathbb{R} \to S^1$. Abbiamo mostrato che $e\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ è una identificazione. La tesi segue dalla proprietà universale delle identificazioni. Disegno

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "e"'] & X \\ S^1 \cong [0,1]/\{0,1\} \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

10 Esercizi 21 ottobre

Esercizio

Siano f, g omeomorfismi, allora la loro composizione (se esiste) è un omomorfismo e l'inverso è un omomorfismo. Quindi Omeo(X) è un gruppo. Siano X, Y, Z spazi tali che $f: Y \to Z$ e $g: X \to Y$. Per definizione l'inverso è un omeomorfismo. Siccome $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ se gli inversi sono omeomorfismo allora è un omeomorfismo. Quindi è un gruppo.

11 Esercizi 11 novembre

Esercizio Esercizio 5.3 Manetti

Siano $f: X \to Y$, $g: Z \to W$ due identificazioni aperte. Mostrare che $f \times g: X \times Y \to Z \to W$ è una identificazione aperta.

Soluzione

Dobbiamo mostrare che $A \subseteq Z \times W$ è aperto se $(f \times g)^{-1}(A)$ è aperto. L'altra direzione è ovvia. Notiamo che f, g sono suriettive, quindi anche il prodotto lo è. In particolare $A = (f \times g)(f \times g)^{-1}(A)$. Supponiamo che $(f \times g)^{-1}(A)$ sia aperto, cioè che

$$(f \times g)^{-1}(A) = \bigcup (U_i, V_i)$$

dove $U_i \subseteq X$ e $V_i \subseteq X$ aperti. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} A &= (f \times g)(\bigcup (U_i, V_i)) \\ &= \bigcup (f \times g)(U_i, V_i) \\ &= \bigcup f(U_i) \times g(V_i) \end{aligned}$$

che è aperto in quanto U_i, V_i sono aperti.

Esercizio 5.4 Manetti

Sia $f: X \to A$ una identificazione. Mostrare che se le componenti connesse di X sono aperte allora anche le componenti convesse di Y sono aperte.

Soluzione

Sia Y_i una componente connessa di Y. Vogliamo mostrare che $f^1(Y_i)$ è aperta. Sia $x_0 \in f^{-1}(Y_1)$ e sia X_j la componente conessa di x_0. Allora $f(X_j)$ è connesso e $f(X_j) \cap Y_i \ni f(x_0)$ cioè $f(X_j) \cap Y_u \neq \varnothing$. Allora $f(X_j) \cup Y_i$ è connesso e $f(X_J) \subseteq Y_i$ per massimalità di Y_i connesso. Quindi $X_j \subseteq f^{-1}(Y_i)$. Abbiamo quindi provato che $\forall x_0 \in f^{-1}(Y_1)$ le componenti connesse X_j di x_0 è contenuta in $f^{-1}(Y_i)$. Quindi $f^{-1}(Y_i)$ è unione disgiunta di comonenti connesse di X, che sono aperte per ipotesi e quindi Y_i è aperto.

Esercizio 5.5 Manetti

Sia $f: X \to X$ una identificazione tale che le fibre $f^{-1}(y)$ siano tutte connesse. Provare che ogni sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto di X è saturo. Dedurre che se Y è connesso, allora anche X è connesso

Soluzione

Sia $Y \subseteq X$ aperto e chiuso e sia $y \in Y$. Vogliamo provare che $f^{-1}(f(y)) \subseteq Y$. Siccome $f^{-1}(f(y))$ è connesso, $f^{-1}(f(y)) \cap Y$ aperto e chiuso in $f^{-1}(f(y))$ e chiaramente contiene y. $f^{-1}(f(y)) \cap Y = f^{-1}(f(y))$ per connessione di quest'ultimo vale $f^{-1}(f(y)) \subseteq Y$. Supponiamo Y connesso. Per assurdo sia $X = A \sqcup B$ con A, B aperti e chiusi. Perché sono saturi, $f(A)$ e $f(B)$ sono aperti

$$f(A) \cup f(B) = Y$$

poiché f è suriettiva. Se $x \in f(A) \cap f(B)$ allora $f^{-1}(X) \subseteq A$ e $f^{-1}(X) \subseteq B$, ma dovrebbero essere aggiunti che è assurdo.

Esercizio 5.6 Manetti

Siano $f\colon X \to Y$ una identificazione aperta ed $A \subseteq X$ un sottoinsieme saturo; dimostrare che A° e $\overline{A}$ sono saturi. Mostrare con un esempio che ciò è generalmente falso se f è una identificazione chiusa.