Analisi III

Paolo Bettelini

Contents

1 Successione di funzioni

Definizione Successione di funzioni

Una *successione di funzioni* è una famiglia di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite su un dominio comune $f_n\colon D \to \mathbb{R}$.

Definizione Convergenza in un punto

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione converge in un punto x_0 se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) < \infty$$

Definizione Convergenza puntuale

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge puntualmente* ad una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ se

$$\forall x \in D,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Quindi la successione converge in ogni punto, ma la velocità di convergenza può dipenderere dal punto.

Definizione Convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge uniformemente* ad una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ se

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

per $n \to \infty$.

Oppure possiamo dire che la condizione è che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n > N, ||f_n - f||_{\infty,E} < \varepsilon$$

Dovremmo dire che la differenza

$$|f_n(x) - f| \leq \varepsilon$$

ma siccome ciò deve valere per tutte le x possiamo utilizzare il supremum.

Quindi la velocità di convergenza è la stessa in ogni punto. Ogni cosa che converge uniformemente converge puntualmente.

Definizione Convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione è *uniformemente di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n, m > N, \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

A partire da un certo indice, tutte le funzioni della successione sono molto vicine tra loro in modo uniforme su tutto D, indipendentemente dalla funzione limite.

Teorema Convergenza uniforme e convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. Se la successione è uniformemente di Cauchy allora è uniformemente convergente.

Teorema

Sia $\{f_n\}$ convergente uniformemente a f in E e sia $x_0 \in E$ un punto di accumulazione di E. Supponiamo che esista

$$\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lambda_n$$

per ogni n, allora

1. $\lambda_n \to \lambda$,
2. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$$

Proof

1. $$|\lambda_n - \lambda_m| = \lim_{x\to x_0} |f_n(x) - f_n(x)| \leq \lim_{x\to x_0} ||f_n - f_m||_{\infty,E} < \varepsilon$$
   dunque è di Cauchy e converge al limite $\lambda_n \to \lambda$.
2. $$\begin{aligned} |f(x) - \lambda| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| \\ &\leq ||f - f_n||_{\infty,E} + |f_n(x) - \lambda_n| \end{aligned}$$
   dunque se $\overline{n} = \max\{N_1, N_2\}$
   $$|f(x) - \lambda| \leq 2\varepsilon + |f_{\overline{n}}(x) - \lambda_{\overline{n}}| \leq 3\varepsilon$$
   quindi
   $$f_{\overline{n}}(x) - \lambda_{\overline{n}} \leq \varepsilon$$

Quindi, se abbiamo convergenza uniforme,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right) \\ &= \lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) \end{aligned}$$

possiamo scambiare l'ordine.

Corollario
Se f_n sono continue e $f_n \to f$, allora f è continua.

Teorema
Sia $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni R-integrabili dove $f_n \to f$ in $[a,b]$. Allora f è R-integrabile e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Proof
Supponiamo anche che f_n siano continue.
1. f è continua e quindi R-integrabile;
2. mostriamo che vale l'uguale, cioè $\forall m, n \geq N$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &\leq \int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx \\ &\leq \int_a^b ||f_n - f||_{\infty,[a,b]}\,dx \leq \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

(cioè tende a zero) per $n \geq N$.

Teorema
Sia $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:
1. $\exists x_0 \in [a,b]$ tale che f_n converge in x_0;
2. f_n' converge uniformemente in g a $[a,b]$.

Allora,
1. f_n converge uniformemente a f in $[a,b]$;
2. f è derivabile;
3. $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

2 Serie di funzioni

Definizione Convergenza uniforme
La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente* ad una funzione $S(x)$ se la successione delle somme parziali

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converge uniformemente a $S(x)$, ovvero se

$$\sup_{x\in D} |S_N(x) - S(x)| \to 0$$

per $N \to \infty$.

È più forte della convergenza puntuale.

Definizione Convergenza totale

Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge totalmente* su un insieme D se la serie di norme

$$\sum ||f_n||_\infty$$

converge.

Ricordiamo che in generale la norma

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e per $p = \infty$ con f limitata

$$||f||_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

che è un numero siccome f è limitata

Teorema

XXXX. Se ho la convergenza uniforme posso invertire integrale e serie.

3 Integrazione

Teorema Monotone convergence theorem for non-negative measurable functions

Let (X, Σ, μ) be a measurable space and let

$$f_n \colon X \to [0; +\infty)$$

be measurable such that $f_n \leq f_{n+1}$. Then,

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\lim_n f_n) \, d\mu$$

Sia per esempio $f_n = \chi_{\{1\}} + \chi_{\{n\}}$. Allora la funzione converge puntualmente in quanto l'1 si sposta sempre più a destra. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = 2 \to 2$$

Se invece $f_n \geq f_{n+1}$ allora $f_n = \chi_{\{n, n+1, \cdots\}}$, allora tende a zero. Tuttavia, l'integrale di f_n è infinito in quanto la misura dell'insieme è infinita.

Proof

Abbiamo

$$f_n \leq f_{n+1} \cdots \leq f, \quad f = \lim_n f_n$$

Quindi

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

quindi anchde la successione degli integrali è monotona e ammette limite. Il limite sarà sempre più piccolo dell'ultimo valore.

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

Facciamo ora il caso $\geq$. Sia $0 \leq \varphi \leq f$ una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad \alpha_i \geq 0$$

e prendiamo $c \in (0,1)$. Considegliamo gli insiemi

$$A_n = \{f_n \geq c\varphi\}$$

Tali insiemi sono misurabili, in quanto sto moltiplicando una funzione misurabile per una costante e l'insieme $\{f \geq g\}$ è come dire $\{f - g \geq 0\}$. Sappiamo

1. $A_n \in A_{n+1}$ in quanto $c\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$;
2. $\bigcup A_n = X$. Sia $x \in X$. Se $\varphi(x) = 0$ allora è in A_n. Se invece $\varphi(x) > 0$, ma siccome $\varphi \leq f$, e $c < 1$, allora

$$c\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$$

La succesione, da un certo posto in poi, è più grande di $c\varphi(x)$ (ne basta uno), quindi $x \in A_n$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} E_i &= E_i \cap X \\ &= E_i \cap (\bigcup A_n) \\ &= \bigcup_n (E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Quindi $E_i \cap A_n \subseteq E_i \cap A_{n+1}$ è una successione di insiemi che si sta allargando. Quindi, la misura dell'union è il limite.

$$\mu(E_i) = \lim_{n \to \infty} E_i \cap A_n$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu &\geq c \int_{A_n} \varphi \, d\mu \\ &= c \int_X \varphi \chi_{A_n} \, d\mu = c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Facciamo ora il limite

$$\begin{aligned} \lim_n \int_X f_n \, d\mu &\geq c \lim_n \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \\ &= c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i) = c \int_X \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X \varphi \, d\mu$$

vale per tutti i $c \in (0,1)$, e allora possiamo usare il supremum

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \varphi \, d\mu$$

Non solo vale per ogni c, ma per ogni funzione semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$. In particolare anche per il supremum. Il supremum di questi integrali al variare di tutte le funzioni semplici minori di f è l'integrale di f, cioè la definizione

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu$$

Mettendo assieme le due cose otteniamo l'uguaglianza

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Corollario

Allora
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

Proof

Siccome i termini sono tutti positivi, la successione delle serie parziale è monotona.

Lemma Lemma di Fatou

Sia $f_n \colon X \to [0, +\infty)$ misurabili, allora

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

(l'integrale esiste sempre)

Proof

Consideriamo
$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k$$

chiaramente $g_n \leq g_{n+1} \to \liminf f_n$ e sono misurabili. Consideriamo allora l'integrale

$$\lim \int_X g_n \, d\mu = \int_X \liminf f_n \, d\mu$$

e per il teorema della convergenza monotona e definizione di lim inf

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf f_n \, d\mu &= \lim_n \int_X (\inf_n k \geq n f_k) \, d\mu \\
&\leq \liminf \int_X f_n \, d\mu
\end{aligned}$$

Definizione Integrabilità di una funzione positiva

Sia $f \colon X \to [0; +\infty)$ misurabile. Allora f è *integrabile* su X se

$$\int_X f \, d\mu \leq \infty$$

Diciamo che $f \in L^1(\{X, \Sigma, \mu\})$. Per esempio $\{1/n^2\} \in L^1(\mathbb{N})$ ma $\{1/n\} \notin L^1(\mathbb{N})$

Definizione Integrabilità di una funzione

Sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ misurabile. Allora f è *integrabile* se f^+ e f^- sono integrabili (che sono entrambe funzioni positive).

Dobbiamo tuttavia definire l'integrale di una funzione di segno arbitraria. Sia allora
$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

Consideriamo per esempio
$$f = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$$

Allora

$$f^+ = (1, 0, \frac{1}{3}, 0)$$

e

$$f^- = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$$

L'integrale non converge in quanto i due integrali non convergono (le serie divergono per confronto asintotico).

Proposition

Siano $f, g \in L^1$.

1. $\alpha f + \beta b \in L^1$ e
$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$
Quindi lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale.
2. $$f \leq g \implies \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$$
3. $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$. Infatti $f^+ f^- = |f|$ e per la direzione inserva abbiamo $0 \leq f^+ \leq |f|$. Ma se l'integrale del modulo è finito allora lo sarà anche quello di f^+ che è più piccolo. Lo stesso vale per la parte negativa.
4. Se f è misurabile allora lo è anche $|f|$, ma il viceversa non è vero. Per esempio sia $X = \{a, b, c\}$ e $\Sigma = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Sia allora
$$f = \begin{cases} 1 & x = a \vee x = b \\ -1 & x = c \end{cases}$$
Chiaramente $\{f < 0\} = \{c\}$ non è misurabile, ma $|f| = 1$ per tutte le x e le funzioni costanti sono sempre misurabili.
5. $$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$
Infatti
$$\begin{aligned} \left| \int_X (f^+ - f^-)\, d\mu \right| &= \left| \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f^+\, d\mu \right| + \left| \int_X f^-\, d\mu \right| \\ &= \int_X f^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu \\ &= \int_X (f^+ + f^-)\, d\mu \\ &= \int_X |f|\, d\mu \end{aligned}$$

Teorema Teorema della convergenza dominante

Sia $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $f = \lim_n f_n$. Supponiamo che ci sia $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ in X. Allora

$$\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Proof

f_n sono integrabili in quanto $|f_n| \leq g$ che è integrabili, quindi sarà finito anche l'integrale del modulo, e f è integrabile perché ciò vale anche per il limite. Allora $|f - f_n| \leq 2g$ quindi $2g - |f - f_n| \geq 0$. Siccome quest'ultima è una successione positiva posso applicare il lemma di Fatou

$$\int_X \liminf(2g - |f - f_n|)\, d\mu \leq \liminf \int_X (2g - |f - f_n|)\, d\mu$$

Ma per le proprietà dei lim inf possiamo estrarre la costante

$$\begin{aligned}\int_X 2g - \lim |f - f_n| = \int_X 2g \\ &\leq \liminf \left(\int_X 2g\, d\mu - \int_X |f - f_n|\, d\mu \right) \\ &= \int_X 2g\, d\mu - \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_X 2g\, d\mu \leq \int_X 2g\, d\mu - \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu \\ \limsup \int_X |f - f_n|\, d\mu \leq 0\end{aligned}$$

Ma quindi questo limite deve essere ed essere uguale a zero

$$\int_X |f - f_n|\, d\mu = 0$$

Infine, usando il modulo

$$\lim \left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \leq \lim \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

siccome è tutto positivo deve essere

$$\lim \left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| = 0$$

Se $A \subseteq X$ con A integrabile e $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, f è integrabile in A se $f\chi_A$ è integrabile. Chiaramente definiamo

$$\int_A f\, d\mu = \int_X f\chi_A\, d\mu$$

Quindi per vedere se è integrabile nel sottoinsieme la estendiamo su tutto lo spazio con la funzione caratteristica e integriamo.

Costruiamo ora una misura su R (la misura di Lebesuge). Vogliamo che sia invariante per traslazione $\mu(A) = \mu(A + c)$ dove c è una costante. Vorremmo anche che $\mu([b, a]) = b - a$. Tuttavia, non è possibile costruire tale misura su tutto $\mathbb{R}$. Sia allora $I = (a, b)$ (non cambia se incluso o meno) e denotiamo $l(I) = b - a$. Sia anche $E \subset \mathbb{R}$. Diamo la *misura esterna*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \,|\, E \subset \bigcup_n I_n \right\}$$

Alcune proprietà di questa ipotetica misura

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;

2. $\mu^*(\{x\}) = 0$ dove $\{x\} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$;
3. se E numerabile, allora $\mu^*(E) = 0$

$$E \subset \{x_n\}$$
$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$
$$E \subset \bigcup I_n$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon\end{aligned}$$

4. $\mu^*(E+x) = \mu^*(E)$ (invariante per traslazione).
5. subadditività (numerabile)

$$\mu^*\left(\bigcup E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$$

6. $\mu^*(I) = b-a$

Se tutto fosse vero, abbiamo quello che cerchiamo, ma in realtà quando gli insiemi sono disgiunti l'ugualgianza non vale, quindi non esiste tale misura.

Vale sempre $\mu^*(I) \leq b-a$ perché c'è l'inf, c'è sempre un ricoprimento. La misura esterna è almeno quel valore, magari più piccolo, vale lo stesso.

Vogliamo mostrare la subadditività (numerabile). Per definizione possiamo prendere E_n come un'unione di intervalli numerati

$$E_n \subseteq \bigcup_k I_k^n$$

quindi, per avvicinarsi alla misura

$$\sum_{k=1} l(I_k^n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Chairamente l'unione di E_n è ricoperta da un unione di unioni

$$\bigcup E_n \subseteq \bigcup_n \left(\bigcup_k I_k^n\right)$$

E per definizione la misura di tale unione

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup E_n\right) &\leq \sum_n \left(\sum_k l(I_k^n)\right) \\ &\leq \sum_n \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

Siccome $[a,b] \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ è una possibile ricopritura, abbiamo

$$\mu^*([b,a]) \leq b-a+2\varepsilon$$

Ora facciamo il contrario; mostriamo che per ogni ricoprimento $[a,b] \subseteq \bigcup I_n$, la serie di tutte quelle lunghezze è almeno $b-a$. L'insieme $\bigcup I_n$ è compatto e quindi ha un ricoprimento finito. Possiamo estrarre un sottoricoprimento finito che lo ricopre ancora. Quindi possiamo immaginarci

$$[a,b] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$$

Vogliamo mostrare che se i ricoprimenti finiti hanno lunghezza almeno $b-a$, quindi anche quelli infiniti. Siccome usiamo intervalli aperti, vogliamo che gli altri intervalli si sovrappongano per coprire anche gli estremi, che non sono coperti. Impostiamo allora la condizione che $a_1 < a$, $a_2 < b_1$, $a_3 < b_2$. Quindi in generale ci spostiamo verso destra con $a_k - b_{k-1}$. L'ultimo intervallo deve contenere b quindi $b_n > b$. Quindi, dato un ricoprimento qualsiasi, possiamo sempre trovare un sottoricoprimento in questa maniera. Abbiamo allora la sommatoria

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} l(I_k) &= b_n - a_n + b_{n-1} - a_{n-1} + \cdots + b_2 - a_2 + b_1 - a_1 \\ &= b_n + (b_{n-1} - a_n) + (b_{n-2} - a_{n-1}) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1\end{aligned}$$

Siccome $a_k - b_{k-1}$, tutte le parentesi sono strettamente positive. Se buttiamo via tali termini ci rimane un valore maggiore di $b_n - a_1$.

$$\sum_{k=1}^{n} l(I_k) > b_n - a_1 > b - a$$

Abbiamo quindi trovato che $\mu^*([a,b]) = b-a$. Possiamo trovare la misura dell'intervallo aperto facendo

$$\begin{aligned}b - a = \mu^*([a,b]) &= \mu^*\left((a,b) \cup \{a\} \cup \{b\}\right) \\ &\leq \mu^*\left((a,b)\right) + \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\}) \\ &= \mu^*\left((a,b)\right) \leq b - a\end{aligned}$$

Definizione Misurabile secondo Lebesgue

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è *misurabile secondo Lebesgue* se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Questa definizione è data dal fatto che vogliamo che la misura si scomponga in due parti disgiunte per tutti gli A, quella che si sovrappone con E e quella che non si sovrappone con E.

Teorema

Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono una σ-algebra.

Proof

Sia $\mathcal{M}$ tale insieme.

1. Notiamo un paio di cose. Se $\mu^*(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}$. Questo è dato dal fatto che

$$\begin{aligned}0 + \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\leq \mu^*(A)\end{aligned}$$

   Quindi anche tutti gli insiemi misurabili hanno misura zero.
2. Abbiamo anche che se $E \in \mathcal{M}$ allora $E^C \in \mathcal{M}$. Questo è dato dalla definizione simmetrica di misura di Lebesgue.
3. Mostriamo che se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, allora $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Per fare ciò mostriamo $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$, e poi usiamo il complementare due volte per tornare al primo caso. Siccome E_2 è misurabile

possiamo scomporre

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*((A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2^c))\end{aligned}$$

il terzo passaggio usa la subadditività per maggiorare. Chiaramente se ciò vale per due insiemi, banalmente vale per n insiemi $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{M}$, e quindi $\bigcup_i E_i \in \mathcal{M}$. Se quindi $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sono misurabili e sono disgiunti, allora $\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k)$$

Per esempio, per $A = \mathbb{R}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k)$$

Per induzione abbiamo $n+1 \implies n$

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cup E_n\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \cap E_n^c\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right) \\ &= \mu^*\left(A \cap E_n\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k)\end{aligned}$$

Mostriamo ora il caso infinito. Sia $\{E_n\}$ con $E_n \in \mathcal{M}$, allora $\bigcup I_n \in \mathcal{M}$. Sia

$$\begin{aligned}E = \bigcup E_n &= E_1 \cap (E_2 \backslash E_1) \cup (E_3 \backslash (E_1 \cup E_2)) \cup \cdots \\ &= G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots\end{aligned}$$

siccome l'intersezione di insiemi misurabili è misurabile, e i G_i sono una collezione finita di quest'ultimi, allora i G_i sono misurabili. Abbiamo allora $E = \bigcup G_n$ dove $G_n \in \mathcal{M}$ sono disgiunti. Sia

$$F_n = \bigcup_{k=1}^n G_k$$

Chiaramente $F_n \subseteq E$ e $F_n^c \supseteq E^c$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*\left(A \cap G_k\right) + \mu^*(A \cap E^c)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi questa maggiorazione per ogni n, quindi vale anche per il limite. Il limite delle successioni delle somme parziali è la serie.

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^* \left(\bigcup_{k}^{\infty} (A \cap G_k) \right) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\end{aligned}$$

per la subadditività.

La σ-algebra $\mathcal{M}$ viene detta *σ-algebra di Lebesgue.*

Definizione Misura di Lebesgue

Sia E misurabile secondo Lebesgue. Allora

$$\mu(E) \triangleq \mu^*(E)$$

dove μ^* è la misura esterna.

Dobbiamo assicurarsi che data una collezione $\{E_n\}$ misurabili secondo Lebesgue e disgiunti,

$$\mu \left(\bigcup E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Sicuramente il primo termine è minore o uguale al secondo. Per il maggiore o uguale abbiamo

$$\begin{aligned}\mu \left(\bigcup^{\infty} E_n \right) &\geq \mu \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \\ &= \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)\end{aligned}$$

che vale siccome vale la subadditività su insiemi finiti disgiunti. Sicocme ciò vale per ogni n, allora vale anche il limite

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

La misura esterna è additiva per un numero finiti di insiemi disgiunti, ma non è vero nel caso infinito. La σ-algebra che abbiamo creato è la più grande che gode delle proprietà della misura che vogliamo.

Abbiamo quindi l'algebra $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$. Abbiamo pronta la teoria dell'integrazione per definire l'integrale di Legesbue. Dobbiamo tuttavia capire quali insiemi sono misurabili.

Proposition

$(a, +\infty)$ è misurabile.

Proof

Abbiamo

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a])$$

e $A \subseteq \bigcup I_n$ Siano

$$I_n^- = I_n \cap (-\infty, a], \quad I_n^+ = I_n \cap (a, +\infty)$$

ovviamente valgono

$$I_n = I_n^- \cup I_n^+, \quad I_n^- \cap I_n^+ = \emptyset$$

quindi $l(I_n) = l(I_n^-) + l(I_n^+)$. Inoltre

$$A \cap (-\infty, a] \subseteq \bigcup I_n^-, \quad A \cap (a, +\infty) \subseteq \bigcup I_n^+$$

E per definizione abbiamo

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \cap (-\infty, a]) &\leq \sum_n l(I_n^+) + \sum_n l(I_n^-) \\ &= \sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon\end{aligned}$$

Quindi tutti anche gli intervalli sono misurabili. Anche $[a, b)$ è misurabile in quanto

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right) \cap (-\infty, b)$$

e $(-\infty, b)$ è misurabile in quanto è il complemento di

$$[b, +\infty) = \bigcap (b - \frac{1}{n}, +\infty)$$

In generale $(a, b) \in \mathcal{M}$. Se A è aperto allora è misurabile. $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue è uno spazio di misura completo.

Proposition

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto. Allora A è unione numerabile di intervalli disgiunti.

Quindi sono misurabili (non serve nemmeno che siano disgiunti).

Proof

Sia $x \in A$ e consideriamo

$$I_x = \left\{ \bigcup I \mid x \in I \right\} \subseteq A$$

chiaramente I_x è un intervallo, il più grande intervallo contenente x. Se $I_x = A$, allora abbiamo finito altrimenti $I_x \subset A$ e consideriamo dunque $y \in A \backslash I_x$ e I_y. Chiaramente $I_x \cap I_y = \emptyset$. Adesso abbiamo altri due casi, o $I_x \cup I_y = A$, e allora abbiamo scritto l'aperto come unione di intervalli disgiunti, oppure c'è $z \in A \backslash (I_y \cup I_x)$. Considerando I_z possiamo fare lo stesso ragionamento. Possiamo andare avanti finché non ho consumato tutti i punti di A. Dobbiamo tuttavia mostrare che $A = \bigcup I_{x_i}$ è unione numerabile. Per fare ciò consideriamo tutti i razionali $\{r_n\}$ che stanno in A. Ognuno dei I_{x_i} deve contenere almeno un razionale, ma siccome i razionali sono numerabili, ci sarebbero intervalli I_{x_i} senza razionali, che è impossibile.

Assioma Assioma della scelta

Sia $\mathcal{F}$ una collezione di sottoinsieme di X esiste una funzione di scelta $\varphi \colon \mathcal{F} \to X$ tale che $\forall G \in \mathcal{F}, \varphi(G) \in G$.

Vediamo ora un insieme che non è misurabile usando l'assioma della scelta. In $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue, sia $X = [0,1)$ e definiamo

$$x \overset{\circ}{+} y = \begin{cases} x+y & x+y<1 \\ x+y-1 & x+y \geq 1 \end{cases}$$

per $x, y \in X$. Usiamo la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Indichiamo con P tutti gli elementi che estraiamo con la funzione della scelta dalle classi di equivalenza, cioè i rappresentanti delle varie classi. Consideriamo ora i razionali $\{r_n\}$ di $[0,1)$ e sia

$$P_n \triangleq P \overset{\circ}{+} r_n$$

Abbiamo alcune proprietà:

1. $n \neq m \implies P_n \cap P_m = \emptyset$. Se $z \in P_n \cap P_m$, allora $z = p \overset{\circ}{+} r_n = q \overset{\circ}{+} r_m$. Quindi $p - q = r_m - r_n$, ma quindi $p - q$ è razionale, e quindi sono nella stessa classe di equivalenza, contro l'ipotesi che sono di classi distinte.
2. $$\bigcup P_n = [0,1)$$
   Chiaramente $\bigcup P_n \subseteq [0,1)$. Sia ora $x \in [0,1)$ e mostriamo che appartiene ad un certo P_n. Ovviamente $x \in [x]_\sim = [p]_\sim$, quindi $p - x \in \mathbb{Q}$.
   - se $x > p$ allora $x - p = r_{\overline{n}} \in [0,1)$, quindi $x = p + r_{\overline{n}}$ o in altre parole $x \in {}_{r_{\overline{n}}}$
   - TODO:

Supponiamo ora che P sia misurabile, e quindi P_n è misurabile. Allora $\mu(P) = \mu(P_n)$

$$1 = \mu([0,1)) = \mu\left(\bigcup P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P)$$

quindi la serie di termini costanti o è zero, o diverge, il che è assurdo. Quindi l'insieme non è misurabile.

Ricordiamo che una funzione è misurabile quando $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}$. La funzione $1_{\mathbb{Q}}$ è misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}} \, d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0$$

Teorema

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile. Allora

1. f è misurabile secondo Lebesgue;
2. f è Lebesgue-integrabile;
3. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

Proof

Sia f misurabile. Vogliamo vedere se

$$\int_{[a,b]} |f| \, d\mu < \infty$$

Ma

$$\int_{[a,b]} |f|\, d\mu \leq \int_{[a,b]} M\, d\mu = M(b-a)$$

Siccome f è R-integrabile, sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$, esiste una partizione P di $[a,b]$ tale che

$$|S(f,P) - s(f,P)| < \varepsilon$$

TODO: usare i simboli di integrale superiore e inferiore. Ricordiamo che

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Prendiamo

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i 1_{(x_{i-1},x_i)}$$

e

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{n} M_i 1_{(x_{i-1},x_i)}$$

Una prende l'inf e l'altra prende il sup, quindi $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$. Allora

$$S(f,P) = \int_{[a,b]} \varphi_2\, d\mu, \quad s(f,P) = \int_{[a,b]} \varphi_1\, d\mu$$

Quindi possiamo rimpiazzare la condizione con gli integrali di Lebesgue

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_2\, d\mu - \int_{[a,b]} \varphi_1\, d\mu \right| < \varepsilon$$

Al posto di ε prendiamo $1/n$. Per ogni n ci saranno le funzioni semplici $\varphi_1^n \leq f \leq \varphi_2^n$. Possiamo anche fare in modo che $\varphi_1^n \leq \varphi_1^{n+1} \leq f \leq \varphi_2^{n+1} \leq \varphi_2^n$. Chiaramente $\{\varphi_1^n\}$ e $\{\varphi_2^n\}$ sono monotone e quindi convergono a $\overline{\varphi}_1$ e $\overline{\varphi}_2$, quindi $\overline{\varphi}_1 \leq f \leq \overline{\varphi}_2$. Vale sempre che $|\varphi_1^n|, |\varphi_2^n| \leq M$ sono limitate da qualche costante, ma allora possiamo applicare il teorema della convergenza dominante

$$\int_{[a,b]} (\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1)\, d\mu = 0$$

ma quindi siccome l'integranda $\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1$ è non negativa, allora deve essere quasi ovunque uguale a zero, oppure che le due sono uguali quasi ovunque, e siccome $\overline{\varphi}_1 \leq f \leq \overline{\varphi}_2$, allora $\overline{\varphi}_2 = f = \overline{\varphi}_1$ quasi ovunque. Allora, siccome $\mathcal{M}$ è completa, f è misurabile. Il terzo punto è immediato in quanto l'integrale rimane monotono e quindi

$$\int_{[a,b]} \overline{\varphi}_1\, d\mu \leq \int_{[a,b]} f\, d\mu \int_{[a,b]} \overline{\varphi}_2\, d\mu$$

ma il primo è uguale all'ultimo. Per definizione di integrale di Riemann,

$$\int_{[a,b]} \overline{\varphi}_2\, d\mu$$

è l'integrale di Riemann di f, e quindi

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\mu$$

4 Esercizi