

Category theory

Paolo Bettelini

Contents

1	XXX	1
1.1	Tipi di categorie	1
2	Funtori	2
3	3 Esempi	2
4	Subobject	3
5	15/10/2025	4

1 XXX

Se un oggetto iniziale esiste in una categoria allora è unico a meno di isomorfismo. Se esistessero due oggetti iniziali 0 e $0'$, allora ci deve essere un morfismo fra 0 e $0'$ e uno fra $0'$ e 0 . Dalla definizione tale morfismo è isomorfismo. Il duale è il medesimo teorema con l'oggetto terminale.

Studiamo cosa sono gli oggetti iniziali nella categoria **Sets**. Se consideriamo l'insieme vuoto, vi è una e una sola funzione che colla tale insieme a tutti gli altri. Quindi l'insieme vuoto è l'oggetto iniziale della categoria **Sets**.

Invece, l'oggetto terminale è il singoletto della categoria **Sets**. Infatti tutti i singoletti sono isomorfi fra loro.

L'uguaglianza degli insiemi diventa isomorfismo nelle categorie. Possiamo dare un complementare dell'assioma dell'estensionabilità nelle categoria, cioè due oggetti sono uguali se hanno gli stessi elementi generalizzati.

1.1 Tipi di categorie

La categoria **Set**, **Top**, **Gr**, **Rng**, **Vect/K**, **T-mod(Set)**.

Possiamo costruire la categoria discreta data un insieme, i cui oggetti sono gli elementi e le cui frecce sono solo le identità.

Possiamo fare una categoria da un preordine. Essa ha al massimo un morfismo fra due oggetti distinti. Esercizio: queste categorie sono tutte quelle indotte da un preordine.

Possiamo fare una categoria con un singolo oggetti (monoide).

Possiamo fare un groupoide: una categoria con soli isomorfismi. In particolare se un groupoide ha solo un oggetto allora è un gruppo.

La categoria **Cat** è la categoria di tutte le categorie (piccole) dove i morfismi sono funtori

Mettere l'esempio del funtore duale fra spazi vettoriali. Il doppio duale è una trasformazione naturale.

2 Funtori

Date due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ possiamo definire TODO la categoria $[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ dei funtori da \mathcal{C} a \mathcal{C}' dove gli oggetti sono i funtori da \mathcal{C} a \mathcal{C}' , i morfismi sono le trasformazioni naturali, e la composizione è componente per componente.

Esercizio

Una trasformazione naturale è un isomorfismo naturale se e solo se tutte le sue componenti sono degli isomorfismi nella categoria d'arrivo.

Dalla definizione α ammette un inverso nella categoria **Cat**. Cioè due funtori sono naturalmente isomorfi se sono oggetti isomorfi in $[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$. L'esercizio richiede di costruire una trasformazione naturale inversa e verificare che sia ancora naturale. Quindi esiste α' tale che $\alpha \circ \alpha' = 1$ e $\alpha' \circ \alpha = 1$. Se nel diagramma della trasformazione naturale inverti le frecce di α la commutatività vale ancora, ma nell'altra direzione.

TODO definizione full and faithful functors and subcategory. Non definiamo una nozione di suriettività fra oggetti in quanto l'uguaglianza fra oggetti non è robusta. Vogliamo non distinguere oggetti essenzialmente uguali. L'uguaglianza diventa l'isomorfismo. Infatti la suriettività essenziale usa un isomorfismo.

Nella definizione del funtore sottocategoria, il funtore è sempre federale, ma non necessariamente full.

Definizione Category equivalence

TODO Anche qui non usiamo l'uguaglianza ma l'isomorfismo.

Teorema

Under the axiom of choice a functor is part of an equivalence of categories if and only if it is full, faithful and essentially surjective.

Proof

(\Rightarrow) Trivial check. (Exercise) Non richiede l'assioma della scelta.

(\Leftarrow) Dobbiamo costruire un funtore G che sia un inverso. Quindi dobbiamo effettuare delle scelte.

Questa nozione ci dice che usando AC possiamo definire un quasi-inverso, che non è unico. Ma in generale i funtori per cui devo eseguire una scelta non sono particolarmente interessanti.

Dato un funtore F possiamo considerare $\text{End}(F)$ che è il monoide delle trasformazioni naturali da F a F . In particolare, comprende gli automorfismi e quindi il gruppo $\text{Aut}(F)$. Nel contesto degli insiemi mancano le componenti, che sono i morfismi (a parte l'identità). Quindi questo contesto diventa banale.

Mettere i 3 esempi di functor categories. La composizione della functor category è componente per componente

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & H \\ & \searrow & \swarrow & & \\ & & & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

$(\alpha * \beta)(a) = \beta(c) \circ \alpha(a)$

3 Esempi

Esempio 2: Chiamiamo X l'insieme. Visto che τ è un endomorfismo di X , prendiamo il prodotto cartesiano e otteniamo una azione sinistra. Se volessimo l'azione destra potremmo prendere il duale del monoide.

La condizione di naturalezza corrisponde con la condizione che f sia una funzione equivariante, cioè rispetta l'azione (M-equivariante).

$$m *' f(*) = f(m * x)$$

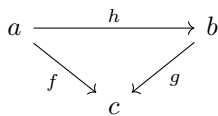
cioè è compatibile con le due azioni, di M su X e di M su Y .

Quindi la categoria studiata è la categoria delle azioni sinistre su insiemi e delle mappe M-equivariante fra loro.

Esempio 3: Non abbiamo condizioni di naturalità nel senso che escludiamo le identità che sono banali. Le trasformazioni naturali corrispondono a famiglie di funzioni

Definizione Slice category

La composizione è data dai morphism $h: a \rightarrow b$ tale che il diagramma commuta



Esercizio

Show that for any set I , set slice category **Sets**/ I is equivalent to the category $[I, \mathbf{Set}]$ (which is the disjoint union).

Partiamo da una collezione di insiemi indicizzata e la mando nell'unione disgiunta degli A_i per formare la mappa canonica invertibile: $(x, i) \rightarrow i$ e nell'altra direzione, partendo da un insieme A con $f: A \rightarrow I$, associo la controimmagine (che in questo caso posso fare in generale). Quindi prendo le fibre $\{f^{-1}(i) \mid i \in I\}$. Dobbiamo verificare i dettagli.

C'è un'equivalenza fra le categorie indicizzate e la nozione di fibrazione (che sono dei funtori). Il risultato che forma ciò è Grothendieck's equivalence between indexed categories and fibrations. Le indexed categories generalizzano i funtori $I \rightarrow \mathbf{Sets}$, dove I viene sostituita dalla categoria delle categorie piccole, e i funtori dagli pseudofuntori. Le fibrazioni generalizzano gli oggetti si **Sets**/ I .

4 Subobject

è la generalizzazione categorica dei sottoinsiemi. Anche qua il triangolo con i due monomorfismi e il morfismo sopra deve commutare. Ciò è equivalente (piccola verifica esercizio) al fatto che siano isomorfe come oggetti nella categoria slice.

Dobbiamo considerare le classi di equivalenza altrimenti non riusciamo ad identificare...

Dualizzando i monomorfismi otteniamo gli epimorfismi e quindi dualizzando otteniamo i quozienti (su una categoria che deve essere esatta).

Definizione Balanced category

A category is said to be balanced if epi and mono \Rightarrow iso.

5 15/10/2025

Coproduct in Set: possiamo prendere il duale della proprietà universale del prodotto, e otteniamo il coproduct, o l'unione disgiunta.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{i_A} & A & \xleftarrow{i_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow \chi & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array}$$

There exist a unique morphism $\chi : A \sqcup B \rightarrow C$ we we forced to define it as

$$x \in A \sqcup B \begin{cases} x \in A \rightarrow \chi(x) = f(x) \\ x \in B \rightarrow \chi(x) = g(x) \end{cases}$$

Oggetti iniziali in Set:

The singleton $1_{\text{Set}} = \{*\}$ satisfies a universal property: for any C set there exist a unique arrow $C \rightarrow 1_{\text{Set}}$.

$$\begin{array}{c} 1_{\text{Set}} \\ \uparrow \exists! \\ C \end{array}$$

Oggetti terminali in Set:

Dually, the empty set \emptyset satisfies the following universal property:

$$\begin{array}{c} \emptyset \\ \downarrow \exists! \\ C \end{array}$$

Kernel in vector spaces in Set: Per semplicità usiamo set. Possiamo generare il kernel come l'egualizzatore prendendo $g = 0$

$$\text{Eq}(f, g) = \{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$$

Quindi

$$\begin{array}{ccccc} \text{Eq}(f, g) & \xleftarrow{i} & V & \xrightleftharpoons[f]{g} & W \\ & \nwarrow \exists! h' & \uparrow h & \nearrow f \circ h = g \circ h & \\ & & C & & \end{array}$$

Suppose $h : C \rightarrow V$ is an arrow such that $f \circ h = g \circ h$. Then,

there exists exactly one arrow (factorization) $h' : C \rightarrow \text{Eq}(f, g)$ such that $i \circ h' = h$. Quindi, $\forall c \in C$,

$$h(c) \in \text{Eq}(f, g) \iff f(h(c)) = g(h(c))$$

Se prendiamo una altra mappa che soddisfa tale proprietà universale allora essa è necessariamente isomorfa a i .

Un ulteriore generalizzazione è detta Pullbacks o prodotto fibrati.

Consideriamo due insiemi A, B che vivono al di sopra di D mediante mappe h, k . Allora viene usata la notazione

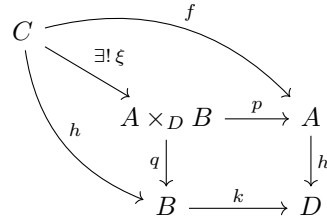
$$A \times_D B = \{(a, b) \in A \times B \mid h(a) = k(b)\}$$

e quindi il diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} A \times_D B & \xrightarrow{p} & A \\ q \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

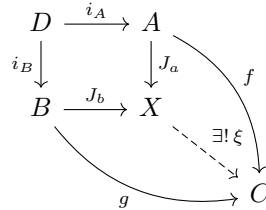
La proprietà universale di questo prodotto è data

da: per ogni C tale che $h \circ g = k \circ g$, esiste un unico ξ tale che il diagramma seguenti commuti:



Prendendo $D = 1_{\text{Set}}$ otteniamo l'usuale prodotto cartesiano.

Prendendo il duale di questa costruzione troviamo il Pushout che permette di trattare il caso di unioni che non sono disgiunte. This is an object X together with arrows J_A, J_B such that for any object C with arrows f, g such that $f \circ i_A = g \circ i_B$, there exist a unique arrow ξ such that $\chi \circ J_A = f$ and $\chi \circ J_B = g$



Nel caso $D = \emptyset$ possiamo prendere l'unione disgiunta. Se D non è vuoto come costruiamo X ? Possiamo prendere un quoziente dell'unione disgiunta secondo la relazione generata da le coppie $(i_A(d), i_B(d))$ for $d \in D$. Questo fa sì che elementi non appaiano molteplici volte. Esercizio: verificare i dettagli.

Nel caso particolare in cui l'unione non è disgiunta abbiamo $D = A \cap B$ e $i_{A,B}$ sono le inclusioni di $A \cap B$

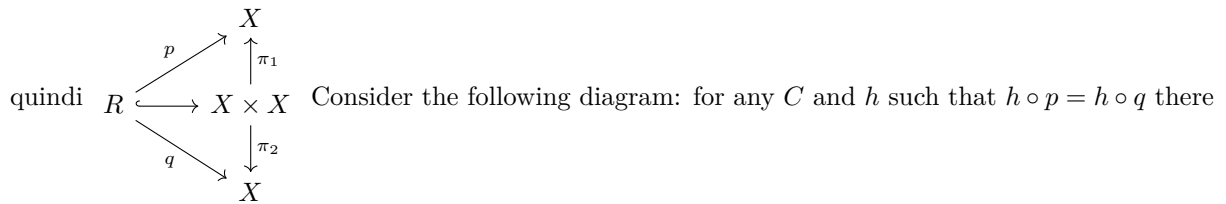
$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \hookrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow J_a \\ B & \xrightarrow{J_b} & X \end{array} \quad \text{Given } d \in D, i_A(d) = i_B(d) \text{ e } J_A \text{ e } J_B \text{ li mandano negli}$$

stessi elementi di X , per la commutatività.

Quozienti:

Consideriamo un insieme X e una relazione di equivalenza $R \subseteq X \times X$. Consideriamo la proiezione canonica

$$\pi_R: X \rightarrow X/R$$



$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow[p]{q} & X \\ & & \downarrow \exists! \xi \\ & & C \end{array} \quad \text{exists a unique } \xi \text{ such that the diagram commutes } (\xi \circ \pi_R = h) \quad \text{For a function}$$

$h: X \rightarrow C$ to factor through the quotient map π_R the following condition is necessary and sufficient (well-defined): $\forall (x, x') \in R, h(x) = h(x')$, which can also be stated $h \circ p = h \circ q$ (which removes the element dependency). Questo è il duale della proprietà universale dell'egualizzatore.