# Differential geometry

Paolo Bettelini

## Contents



# 1 Differential geometry

**Definizione** Curva parametrizzata di classe $\mathcal{C}^k$

Una *curva parametrizzata* su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ con $I$ intervallo reale (con più di un punto) e con $\sigma$ di classe $\mathcal{C}^k$.

Le derivate sono generalmente definite per l'interno dell'intervallo. La classe $\mathcal{C}^k$ è definita su un estremo dell'intervallo, per esempio $[a, b)$, se $\sigma$ può essere prolungata a funzione $\tilde{\sigma}$ di classe $\mathcal{C}^k$ su $(a - \varepsilon, b) = I_\varepsilon$, cosicché $a \in I_\varepsilon$. In tal caso $\sigma'(a)$ è ben definito come $\tilde{\sigma}'(a)$.

Per parametrizzare un segmento fra $A$ e $B$ possiamo scrivere $P = (1 - t)A + tB$ oppure $P = \lambda A + \mu B$ dove $\lambda + \mu = 1$, che viene detta combinazione lineare affine. Se richiediamo anche che $\lambda, \mu \geq 0$ allora si chiamano combinazioni convesse. Quest'ultima si generalizza al $k$-simplesso.

**Definizione** $k$-simplesso in $\mathbb{R}^n$

Sia $n \geq k$. Consideriamo $k + 1$ punti $P_0, \cdots, P_k \in \mathbb{R}^n$ in posizione lineare generale, cioè non appartenenti ad un sottospazio affine di dimensione minore o uguale a $r - 1$. Allora il $r$-simplesso di tali vertici è

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i \,|\, \lambda_j \geq 0 \wedge \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

**Definizione** Sottospazi affini in forma parametrica

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale di dimensione $r \leq n$ e $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$L = \{P_0 + u \,|\, u \in U\} = P_0 + U$$

è il sottospazio affine di direzione $U$ e passante per $P_0$.

Questi sono una generalizzazione della retta. Fissata una base $u_1, \cdots, u_r$ di $U$, otteniamo la parametrizzazione lineare

$$L = \left\{ P_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i \,|\, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

cioè $\sigma\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ dato da

$$\sigma(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) = P_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i$$

è una parametrizzazione completa di $L$. Chiaramente $P_0$ può essere arbitrariamente scelto fra i punti di $L$ e la base può essere scelta arbitrariamente fra i punti di $U$. Il passaggio alle coordinate affini

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) &= P_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i \\ &= P_0 - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_0\right) + \sum_{i=1}^{r} t_i(\underbrace{P_0 + \lambda_i}_{\in L})\end{aligned}$$

Chiamando $P_i = P_0 + u_i$ possiamo scrivere

$$\sigma(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) = \sum \lambda_0 P_0 + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i$$

cosicché

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$$

che sono tanti parametri. Così si possono ottenere i punti all'interno dei simplessi con i $\lambda_i \geq 0$.

**Definizione** Baricentro di un insieme di punti

Dati $P_0, \cdots, P_n \in \mathbb{R}^n$ arbitrari, il loro baricentro è dato dalla combinazione affine

$$B = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} P_i$$

che è la media aritmetica.

**Teorema** Teorema di geometria euclidea

Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle rette mediane, e divide ciascuna mediana in due parti una lunga $\frac{1}{3}$ dell'altra.

Fisicamente, il motivo per cui si incontrano è dato dal fatto che il baricentro di un segmento è il suo punto medio. Il baricentro del segmento di una delle mediane è una media pesata a $\frac{2}{3}$.

**Proof**

Sia $B = \frac{1}{3}(P_0 + P_1 + P2)$. Consideriamo la retta $P_0B = \{(1-t)P_0 + tB\}$, cioè

$$P_0B = \left(1 - t + \frac{t}{3}\right) P_0 - \frac{t}{3} P_1 + \frac{t}{3} P_2$$

che sta sul lato $[P_1, P2]$ se e solo se $1 - t + t/3 = 0$, cioè $t = 1/2$. Quindi,

$$\left(1 - t + \frac{t}{3}\right) P_0 + \frac{t}{3} P_1 + \frac{t}{3} P_2 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$$

per $t = 1/2$, che è il punto medio $M_{1,2}$ fra $P_1$ e $P_2$. Analogamente lo stesso vale per ogni mediana $P_i M_{j,k}$. Quindi le tre mediane si incontrano nel baricentro. Inoltre, vediamo come scrivere $B$ come combinazione affine fra $P_0$ e $M = M_{1,2}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 = (1-t)P_0 + tB\big|_{t=\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} P_0 + \frac{3}{2} B\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo $B = \frac{1}{3} P_0 + \frac{2}{3} M$.

Lo stesso teorema vale per i simplessi di dimensione superiore. Per il tetraedro la mediana parte dal baricentro di ogni faccia, cioè il baricentro del triangolo. Quindi abbiamo una sorta di successione di punti di baricentro, e la mediana viene spezzata in due parti con rapporto $\frac{1}{4}$.

**Definizione**

Due curve parmetrizzate $\sigma_1 \colon I \to \mathbb{R}^n, \sigma_2 \colon J \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^h, \mathcal{C}^k$ rispettivamente si dicono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $h \colon J \to I$ tale che $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h$.

Il diffeomorfismo è un omeomorfismo tale che $h, h^{-1}$ siano di classe $\mathcal{C}^{\max\{h,k\}}$. Quindi se $h, k \geq 1$ allora $h, h^{-1}$ sono derivabili e quindi $h'(t) \neq 0$ in quanto

$$\frac{dh^{-1}}{ds} = \frac{1}{h'(t)}\bigg|_{s=h(t)}$$

ne segue quindi che per $t \in J$ abbiamo $h'(t) > 0$ o $h'(t) < 0$, cioè è monotona crescente o decrescente.

**Esempio** Tutte le parametrizzazioni lineari di una retta sono equivalenti

$\sigma_1(s) = P_1 + sv$ e $\sigma_2(t) = P_2 + tw$ parametrizzano la stessa retta se e solo se

$$\begin{cases} P_2 = P_1 + s_0 v \\ w = \rho v \end{cases}$$

In tal caso

$$\begin{aligned} \sigma_2(t) &= P_1 + s_0 v + t\rho v \\ &= P_1 + (s_0 + t\rho)v \\ &= \sigma_1(s_0 + t\rho) = \sigma_1(h(t)) \end{aligned}$$

con $h(t) = s_0 + t\rho$ e $\rho \neq 0$.

D'ora in poi tendiamo a lavorare con curve liscie.

**Definizione**

Una curva $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^n$ liscia si dice *regolare* se $\sigma' \neq 0$.

Una curva regolare ha una forma arrotondata ovunque, in quanto esiste sempre una retta tangente. Una curva $(x, f(x))$ è sempre regolare.

**Esempio** Parametrizzazioni standard di una circonferenza

Sia $C$ la circonferenza di centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raggio $R$. Le parametrizzazioni standard sono

$$\sigma(t) = P_0 + R(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

con $\omega \in \mathbb{R}^*$. Risulta regolare.

**Definizione** Curva a tratti

Se esiste un ricoprimento di intervallo

$$I \subseteq (-\infty, t_1] \cup \left(\bigcup [t_i, t_{i+1}]\right) \cup [t_k, +\infty)$$

tale per cui le restrizioni a questi intervalli sono regolari o lisci etc.

In una curva liscia le derivate esistono gli estremi, quindi se a tratti, sui punti di cuspide possiamo avere derivata destra e sinistra usando le derivate dei pezzi di curva prima o dopo rispettivamente.

**Definizione**

Una curva liscia a tratti è detta regolare se le sue derivate destre e simistri sono non nulli.

**Definizione** Punto angoloso e cuspidi per una curva

Se $\sigma'_-(t) \neq \sigma'_+(t)$ e sono enrambi non nulli, allora $\sigma(t)$ è detto:

1. punto angoloso se $\sigma'_-(t), \sigma'_+(t)$ sono linearmente indipendenti
2. cuspide se $\sigma'_-(t) = \lambda\sigma'_+(t)$ con $\lambda < 0$.

Disegno.

**Definizione** Angolo di un punto angoloso per curve

Definiamo l'angolo

$$\varepsilon(t) \triangleq \begin{cases} +\arccos\left(\frac{\langle\sigma'_-(t),\sigma'_+(t)\rangle}{||\sigma'_-(t)||\cdot||\sigma'_-(t)||}\right) & \det(\sigma'_-(t), \sigma'_+(t)) > 0 \\ -\arccos\left(\frac{\langle\sigma'_-(t),\sigma'_+(t)\rangle}{||\sigma'_-(t)||\cdot||\sigma'_-(t)||}\right) & \det(\sigma'_-(t), \sigma'_+(t)) < 0 \end{cases}$$

Cioè prendiamo il segno positivo se le due derivate formano una base orientata positivamente in $\mathbb{R}^2$, e negativo altrimenti. È il verso della minima rotazione per portare la derivata sinistra sulla derivata destra.

**Definizione** Curva semplice

Sia $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ liscia a tratti è detta semplice, o chiusa di Jordan, se

1. $\sigma(a) = \sigma(b)$
2. $\sigma'(a) = \sigma'(b)$
3. sono iniettivi

$$\sigma\big|_{(a,b]}, \quad \sigma\big|_{[a,b)}$$

La seconda intersezione è quella di auto intersecarsi.

**Teorema** Teorema della tangenti di Hopf

Se $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è curva semplice e regolare avente solo punti angolosi, allora il vettore $\sigma'(t)$ percorre una rotazione complessiva $\pm 2\pi$.

**Corollario**

La somma degli angoli orientati estermi di un poligono chiuso è sempre $\pm 2\pi$.

**Esercizio**

Usare questo corollario per mostrare che la somma degli angoli interni è $(n - 2)\pi$.