Exercises

Paolo Bettelini

Contents

1

Esercizio

Scrivere la relazione fra $F_a(x)$ e $F_b(x)$ per $a \neq b$.

Esercizio

Let

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5 \right\}$$

and the sequence

$$F = \{ x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^* \}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di E, F, $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il temrine $n+2$ cresce con n, quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approcciando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F. Allora siccome ci avviciamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$. Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.

- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il max non esiste in quando $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anchde il minimo in quanto fa parte dell'insieme.

- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

  Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

  Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.
- Posto $E + F = \{x + y \,|\, x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

  Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:
  1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
  2. $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$ non è maggiorante.

  Nota: se $x < \mu$ allora posto $\varepsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \varepsilon$. Allora sia $\varepsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > e_1 > \sup E . \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_2 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$.
- Posto $-E = \{-x \,|\, x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E. Analogamente per il min.

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{x^2+1} \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore.
Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$
$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il maggiornate e supremum è quindi x_{14}.

Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right)+1}{\sqrt{n^3+1}+\log n}$$

Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2}+\cos(1/n)+\log n}{\left(n+\sqrt{n}\right)^2-\sqrt{n}}$$

Esercizio

$$a_n = \log\left(1+\sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+\log n}\right)\right)\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)$$

Esercizio

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3-\log n}{\sqrt{n^4+n}}}$$

Esercizio

Sia $\{b_n\}$ una successione e sia $\{b_{n\pm k_0}\}$ la successione traslata di $\pm k$. Dimostrare che $\lim b_n$ esiste se e solo se $\lim b_{n\pm k_0}$ esiste e che i limiti sono uguali.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1}-\frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}$$

Esercizio

Calcolare

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2\cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\
&= \frac{1}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\
&= \frac{1}{7^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} + \frac{2}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+2} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Esercizio

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1+1/n)^n + \sin n}{(n+\sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Notiamo che $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$. Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con $p = 1$, allora la serie diverge.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x\sin x}{x^3\cos(x) - (e^x - 1)^2} = 2$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2 + x^3\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$, $\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Inoltre, $x^3 \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim x^{7/2}$, quindi a numeratore raggruppiamo $x^{7/2}$. Per il denominatore $1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x}$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x}x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)^2 &\sim x^{5/2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}} \to 0
\end{aligned}
$$

Riscriviamo allo l'espressione come

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{7/2}\left\{x^{-7/2}x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 + x^{1/2}\sin\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)\right\}}{x^2\left\{x^{-2}x^{1/2}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2 + x\cos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}} \\
&\sim 2x^{3/2} \to +\infty
\end{aligned}
$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} = \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x-1}$$

la forma di indecisione è 1^∞. Allora usiamo la forma esponenziale

$$e^{(2x-1)\log\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)}$$

Vogliamo usare $\log(1+f(x)) \sim f(x)$ con $f(x)\to 0$. Allora scriviamo

$$e^{(2x-1)\log\left(1-\frac{6}{4x+5}\right)}$$

dove l'esponente è asintotico a -3. Allora il limite è pari a e^{-3}.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin^2(x)\log(1+\tan^4(\frac{x}{1+x^4}))}{\left(e^{2\sin^4 x}-1\right)\left(\sqrt[6]{1+\frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}}-1\right)}$$

Abbiamo:

1. $\sin(x^2) \sim x^2$
2. $\tan(1+\tan^4(\frac{x^2}{1+x^2})) \sim \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2}) \sim \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 \sim x^4$
3. $e^{2\sin^4(x)} - 1 \sim 2 \sim x^4 \sim 2x^4$
4. $\sqrt[6]{1+\frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1 \sim \frac{1}{6}x^2$

XXX

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \log(1+2x)}{\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}$$

Scriviamo l'asintotico con l'o-piccolo:

1. $\sin x = x(1+o(1))$
2. $\log(1+2x) = 2x(1+o(1))$

Allora

$$\begin{aligned}\sin x - \log(1+2x) &= x + xo(1) - 2x - 2xo(1)\\ &= -x + xo(1) = -x(1+o(1))\end{aligned}$$

Al denominatore abbiamo

$$(1+1x)^{1/6} - 1 = \frac{1}{6}x(1+o(1))$$

e allora

$$(1+1x)^{1/6} = 1 + \frac{1}{6}x(1+o(1))$$

Trasformiamo analogamente l'altro termine e troviamo

$$\sqrt[6]{1+x} - \sqrt[6]{1-x} = \frac{1}{3}x(1+o(1)) \sim \frac{1}{3}x$$

e quindi il limite fa -3.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{2}{3}x} - \cos\sqrt{x}}{(\tan(2x))^\alpha}$$

Il primo termine è pari a $1 + \frac{2}{3}x(1+o(1))$, il secondo $1 - \frac{1}{2}x(1+o(1))$. Abbiamo allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \frac{2}{3}x(1+o(1)) - 1 + \frac{1}{2}x(1+o(1))}{(2x)^\alpha} \sim \frac{7}{3\cdot 2^{\alpha+1}x^{1-\alpha}} = \begin{cases} 0^+ & \alpha < 1 \\ \frac{7}{12} & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x\left(\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Conviene razionalizzare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sin x\left[\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]} = \frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{\sin x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Sostituiamo la variabile $y = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{2\pi}\left[\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + y^2\right]}{y}$$

Notiamo che $\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(y) \sim -y$. Quindi,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{2\pi}(-y)}{y} = -\sqrt{2\pi}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{x-1} & x > 1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}x) & x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo allora i limiti dalla due direzioni.

$$\lim_{x\to 1^-} \sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$$

L'altro limite

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1} = \frac{\infty}{0^+} = +\infty$$

Quindi il limite generale non esiste.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \left[1 + \sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{x^3+\tan^2 x}}$$

Scriviamo la forma esponenziale

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left\{\frac{x+1}{x^3+\tan^2 x}\log\left(1+\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)\right)\right\}$$

Il primo termine è asintotico a $\frac{1}{x^2}$, mentre il logaritmo è asintotico a $\sin(\frac{x^\alpha}{x+1})$ che è asintotico a $\frac{x^\alpha}{x+1}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ e & \alpha = 2 \\ 1 & \alpha < 2 \end{cases}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \left\{\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2+x}\right)\right\}^{\frac{\tan x}{\log(1+1+x^2)}}$$