

# Analisi II

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1</b>	<b>Spazi metrici</b>	<b>2</b>
1.1	Definizioni . . . . .	2
1.2	Successioni in spazi metrici . . . . .	7
1.3	Funzioni . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Operatori lineari fra spazi vettoriali</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Calcoli differenziale multivariabile</b>	<b>25</b>
3.1	Funzioni a valori vettoriali . . . . .	33
3.2	Chain rule . . . . .	34
3.3	Criteri di lipschitzianità . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Derivate di ordini successive</b>	<b>40</b>
4.1	Derivate $k$ -esime . . . . .	44
4.2	Differenziabili $k$ -esimi . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Ottimizzazione</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Teorema della funzione implicita</b>	<b>53</b>
6.1	Teorema della funzione inversa . . . . .	64
6.2	Trasformazioni di coordinate . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Estremi vincolati</b>	<b>67</b>
<b>8</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>79</b>
8.1	Equazioni a variabili separabili . . . . .	79
8.2	Equazioni differenziali del primo ordine . . . . .	80
8.3	Equazioni di Bernoulli . . . . .	80
<b>9</b>	<b>Curve</b>	<b>81</b>
9.1	Parametrizzazione naturale (lunghezza d'arco) . . . . .	87
9.2	Integrali curvilinei . . . . .	89
<b>10</b>	<b>Forme differenziali</b>	<b>91</b>
<b>11</b>	<b>Integrali</b>	<b>95</b>
11.1	Integrali tripli . . . . .	104
<b>12</b>	<b>19/12/25</b>	<b>106</b>
12.1	Flussi . . . . .	108

# 1 Spazi metrici

## 1.1 Definizioni

L'insieme vuoto e l'insieme  $X$  sono aperti e chiusi.

### Proposition

L'unione di aperti non numerabile è aperta, mentre l'intersezione è aperta solo se finita.

### Proof

Per dimostrare quest'ultima lo facciamo su due insiemi e il resto è per induzione. Prendiamo un punto nell'intersezione e prendiamo le due bolle dentro gli insiemi centrate nel punto. Siccome hanno lo stesso centro la loro intersezione è sempre una bolla di raggio il minore fra i due.

La metrica discreta può generare una bolla che è un singoletto.

### Proposition

L'unione di chiusi finiti è chiusa. L'intersezione qualsiasi è chiusa.

Ogni singoletto è chiuso. Per dimostrarlo mostriamo che nel complementare esiste una bolla che non interseca il punto (vero per proprietà di Hausdorff).

Tutti i punti di accumulazione sono dei punti aderenti. Tutti i punti di un sottoinsieme sono aderenti per il sottoinsieme. Ogni punto  $x$  è di accumulazione o è isolato.

Se  $x_0$  è aderente ad  $E$ ,  $x_0$  può essere un punto di  $E$  oppure no. Se  $x_0$  è punto di accumulazione per  $E$ , in ogni bolla centrata in  $x_0$  cadono infiniti punti.

### Proposition

$E^\circ$  è aperto.  $E$  è aperto se e solo se  $E = E^\circ$ .  $E^\circ$  è il più grande aperto contenuto in  $E$ .  
 $\overline{E}$  è chiuso.  $E$  è chiuso se e solo se  $E = \overline{E}$ . La chiusura di  $E$  è il più piccolo chiuso contenente  $E$ .

### Proof per l'interno

Dimostriamo che  $E^\circ$  è aperto. Sia  $x_0 \in E^\circ$ , un punto interno ad  $E$ , quindi esiste una bolla centrata in tale punto che è contenuta in  $E$ . Prendiamo un altro punto  $y$  in questa bolla. Possiamo costruire una inner bolla centrata in  $y$  con un raggio sufficientemente piccolo da rimanere nella bolla più grande. Quindi il punto  $y$  è a sua volta interno, quindi tutta la bolla centrata in  $x_0$  è in  $E^\circ$  e quindi è aperto.

Dimostriamo ora che se  $E$  è aperto allora  $E = E^\circ$  (l'altra implicazione è ovvia). Per fare ciò dimostriamo che  $E^\circ$  è il più grande aperto in  $E$ . Osserviamo che  $E^\circ$  fa parte della famiglia degli aperti di  $X$  contenuti in  $E$ . Sia  $A$  un aperto contenuto in  $E$ . Voglio dimostrare che  $A \subseteq E^\circ$ . Sia  $x_0 \in A$ .  $A$  è unione di bolle quindi esiste un raggio tale che la bolla centrata in  $x_0$  di tale raggio è contenuta in  $A$  che è contenuta in  $E$ . Quindi,  $x_0$  è interno ad  $E$  e  $x_0 \in E^\circ$  e  $A \subseteq E^\circ$ . Supponiamo ora che  $E$  sia aperto. Allora  $E$  fa parte della famiglia degli aperti di  $X$  contenuti in  $E$ . Devo avere  $E \subseteq E^\circ$ . Dato che  $E^\circ \subseteq E$  allora  $E^\circ = E$ .

Dire che un insieme è dentro in un altro significa dire che la sua chiusura coincide con l'insieme. Tipo la chiusura di  $Q$  è  $R$  quindi  $Q$  è denso in  $R$ .

### Definizione Limitato

Se è contenuto in una bolla

**Definizione Diametro**

è il sup della metrica su tutte le coppie.

**Definizione Ricoprimento**

Sia  $E$  un sottoinsieme di uno spazio metrico  $X$ . Una famiglia

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è un ricoprimento aperto di  $E$  se

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

**Definizione Sottoricoprimento**

Un Sottoricoprimento di

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

è una sottofamiglia di  $G_\alpha$  tale che continua a ricoprire. Cioè ne scarto alcuni ma deve comunque rimanere una copertura.

**Definizione Compatto**

Uno spazio metrico  $X$  è compatto se ogni ricoprimento aperto di  $E$  ammette un sottoricoprimento finito.

Ogni insieme finito è compatto.

**Teorema**

Sia  $X$  uno spazio metrico e  $E$  un sottoinsieme di  $X$  compatto.

1.  $E$  è limitato;
2.  $E$  è chiuso;
3. Ogni sottoinsieme infinito di  $E$  ha almeno un punto di accumulazione in  $E$ .

**Proof**

1. Consideriamo  $\{B_1(x) \mid x \in E\}$  che è un ricoprimento aperto di  $E$ . Siccome  $E$  è compatto esiste un sottoricoprimento finito aperto di  $E$ , ossia  $x_1, \dots, x_n \in E$  tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_1(x_i)$$

Posto

$$R = 1 + \max_{i=1, \dots, n} d(x_i, x_1)$$

Allora la bolla di raggio  $R$  centrata in  $x_1$  contiene  $E$ , quindi  $E$  è limitato.

2. Supponiamo che non sia chiuso. Allora esiste  $y \in E'$  ma  $y \notin E$ . Vogliamo costruire un ricoprimento aperto di  $E$  che non ammette sottoricoprimento finito. Sia  $r(x) = \frac{1}{2}d(x, y)$  per ogni  $x \in X$ . Se  $x \in E$  allora  $r(x) > 0$  perchè  $y \notin E$ . Abbiamo il ricoprimento

$$\{B_{r(x)}(x) \mid x \in E\}$$

Ma per la compattezza esisterebbe un sottoricoprimento finito, cioè  $x_1, \dots, x_n \in E$  tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r(x_i)}(x_i)$$

Sia ora  $R = \min_{i=1,\dots,n} r(x_i)$ . Allora  $R > 0$  e la bolla  $B_R(y)$  non interseca nessuna delle  $B_{r(x_i)}(x_i)$ , assurdo poiché  $y$  è punto di accumulazione.

3. Sia  $F$  un sottoinsieme infinito di  $E$ . Supponiamo che  $F$  non abbia punti di accumulazione in  $E$ . Allora ogni punto di  $E$  ha una bolla che interseca  $F$  in al più un punto. Queste formano un ricoprimento aperto di  $E$ . Ma se esistesse un sottoricoprimento finito,  $F$  sarebbe finito, assurdo.

### Proposition

Sia  $E \subseteq X$  compatto. Se  $F \subseteq E$  è chiuso allora  $F$  è compatto.

### Proof

Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $F$ . Dobbiamo aggiungere degli insiemi aperti per coprire il resto. Siccome  $F$  è chiuso,  $X \setminus F$  è aperto. Quindi  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{X \setminus F\}$  è un ricoprimento aperto di  $E$ . Per la compattezza di  $E$  esiste un sottoricoprimento finito, che escludendo  $X \setminus F$  è un sottoricoprimento finito di  $F$ .

Se  $F \subseteq X$  è chiuso, ed  $E \subseteq X$  è compatto, allora  $F \cap E$  è compatto.

### Teorema Teorema dell'intersezione finita

Sia  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una famiglia di compatti tale che ogni intersezione finita è non vuota. Allora

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \emptyset$$

### Proof

Supponiamo che l'intersezione sia vuota. Allora e sia  $E_{\bar{\alpha}}$  un compatto fissato nella famiglia.

$$\begin{aligned} E_{\bar{\alpha}} \cap \left( \bigcap_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_\alpha \right) &= \emptyset \\ \implies E_{\bar{\alpha}} &\subseteq \left( \bigcap_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \neq \bar{\alpha}} E_\alpha^c \end{aligned}$$

$\{E_\alpha^c\}_{\alpha \neq \bar{\alpha}}$  è un ricoprimento aperto di  $E_{\bar{\alpha}}$ . Esistono quindi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq \bar{\alpha}$  tali che

$$\begin{aligned} E_{\bar{\alpha}} &\subseteq \bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}^c = \left( \bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right)^c \\ \implies E_{\bar{\alpha}} \cap \left( \bigcap_{i=1}^n E_{\alpha_i} \right) &= \emptyset \end{aligned}$$

assurdo.

### Corollario caso particolare

Sia  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una famiglia di compatti tale che

$$E_{n+1} \subseteq E_n$$

Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$$

### **Teorema** Teorema di Heine-Borel

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea. Allora  $E$  è compatto se e solo se  $E$  è chiuso e limitato.

### **Lemma**

Sia  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una famiglia di intervalli  $I_k = [a_k, b_k]$  tali che  $I_k \supseteq I_{k+1}$ . Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$$

### **Proof**

Gli intervalli sono annidati, quindi  $a_k$  è crescente e  $b_k$  è decrescente e  $a_k \leq b_k$ . In particolare  $a_k \leq b_i$ . Consideriamo l'insieme  $E = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .  $E$  è limitato superiormente, e ammette supremum  $x$ . Per definizione  $x \geq a_k$ . Ma  $a_k \leq b_i$  per tutte le  $i$ . Quindi,  $x \leq b_i$  per ogni  $i$ . Allora

$$x \in I_n \implies x \in \bigcap I_k$$

### **Definizione**

Siano  $a, b \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i < b_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Un rettangolo chiuso è il prodotto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

che indichiamo con  $[a, b]$ .

### **Lemma**

Sia  $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una famiglia di rettangoli chiusi tali che  $R_k \supseteq R_{k+1}$  per ogni  $k$ . Allora

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k \neq \emptyset$$

### **Proof**

Siccome

$$R_k = I_{k,1} \times I_{k,2} \times \dots \times I_{k,n}$$

possiamo applicare il primo lemma e quindi

$$\exists y_i \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_{k,i}$$

Il punto  $y = (y_1, \dots, y_n)$  è in ogni  $R_k$ .

### **Lemma** Lemma 3

In  $\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea ogni rettangolo è compatto.

### Proof Lemma 3

Sia  $R = [a, b]$  un rettangolo e supponiamo che non sia compatto. Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $R$  che non ammette sottoricoprimento finito. Vogliamo adesso dimezzare ambo i lati (quindi  $n$  tagli). Abbiamo adesso  $2^n$  rettangoli.

$$[a_i, b_i] = [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Il diametro di  $R$  è  $\|b - a\|$ . Il diametro di ogni rettangolo ottenuto è la metà. Almeno uno di questi rettangoli ha la proprietà di non ammettere sottoricoprimento finito. Lo chiamiamo  $R_1$ . Iterando il procedimento otteniamo una successione di rettangoli

$$R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$$

con diametro che tende a zero e che non ammettono sottoricoprimento finito, il diametro di  $R^k$  è dato da  $\frac{1}{2^k} \|b - a\|$ . Per il lemma precedente esiste  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k$ . Siccome  $R_k \subseteq R$  per ogni  $k$ ,  $x \in R$ . Siccome  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  è un ricoprimento di  $R$ , esiste  $\alpha_0 \in A$  tale che  $x \in G_{\alpha_0}$ .  $G_{\alpha_0}$  è aperto, quindi esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \subseteq G_{\alpha_0}$ . Scegliamo  $k$  sufficientemente grande tale che  $2^{-k} \|b - a\| < r$ . Ma il diametro di  $R_k$  è minore di  $r$ , quindi  $R_k \subseteq B_r(x)$ . Quindi  $R_k \subseteq G_{\alpha_0}$ , assurdo perchè  $R_k$  non ammette sottoricoprimento finito.

### Proof Heine-Borel

Dobbiamo dimostrare solo che se  $E$  è chiuso e limitato allora è compatto. Siccome  $E$  è limitato esiste  $M$  tale che  $\|x\| < M$  per ogni  $x \in E$ . Quindi,

$$E \subseteq [-M, M] \times [-M, M] \times \dots \times [-M, M] = R$$

$E$  è un chiuso contenuto in un compatto, quindi è compatto.

### Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di  $\mathbb{R}^n$  ha almeno un punto di accumulazione.

### Proof Teorema di Bolzano-Weierstrass

#### Definizione Insiemi separati

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A, B \subseteq X$  due sottoinsiemi. Diciamo che  $A$  e  $B$  sono separati se

$$A \cap \overline{B} = \emptyset \wedge \overline{A} \cap B = \emptyset$$

Devono sicuramente essere disgiunti, ma non basta. Serve che nessun punto di uno dei due insiemi è punto di accumulazione dell'altro.

#### Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $E \subseteq X$ .  $E$  è connesso se non può essere scritto come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati.

I sottoinsiemi connessi di  $\mathbb{R}$  sono tutti e soli gli intervalli.

Uno spazio metrico è connesso se e solo se l'unico sottoinsieme non vuoto di  $X$  che è anche aperto e chiuso è  $X$  stesso. (Dimostrazione per esercizio).

$\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea è connesso. (Dimostrazione per esercizio non proprio banale).

## 1.2 Successioni in spazi metrici

Mettere la definizione di convergenza ma con  $d(x_m, y) < \varepsilon$ . Oppure  $x_m \in B_\varepsilon(y)$ .

In particolare la successione metrica converge se e solo se  $d(x_m, y) \rightarrow 0$  secondo la convergenza reale.

Il limite è unico per proprietà di Hausdorff.

### Proposition

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $E \subseteq X$  e sia  $y$  un punto di accumulazione per  $E$ . Allora esiste una successione  $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{y\}$  che converge ad  $y$ . In particolare,  $E$  è chiuso se e solo se per ogni successione  $\{x_n\} \subseteq E$  che converge ad  $y$  allora  $y \in E$ .

### Proof

Dato che  $y \in E'$ ,  $\forall x_m \in \mathbb{N}$ , esiste  $x_m$  tale che  $x_m \in B_{\frac{1}{m}}(y) \cap E$  e  $x_m \neq y$ . La successione così costruita converge ad  $y$ . Infatti,  $d(x_m, y) < \frac{1}{m} \rightarrow 0$ .

### Proposition

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $\{x_n\}$  una successione convergente in  $X$ . Una condizione necessaria per la convergenza è che ogni sottosuccessione converga allo stesso limite. La condizione sufficiente è che ogni sottosuccessione ammetta una sottosuccessione che converge allo stesso limite.

### Definizione Compattezza sequenziale

Uno spazio metrico  $X$  è sequenzialmente compatto se ogni successione in  $X$  a valori in  $E$  ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di  $E$ .

### Proposition Equivalenza compattezza

$E$  is compact if and only if  $E$  is sequentially compact.

Questa c'è solo negli spazi metrici.

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Sia  $\{x_n\}$  una successione in  $E$ . Consideriamo  $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Se  $F$  è finito, esiste un elemento che compare infiniti volte e la successione costante converge a tale elemento. Se  $F$  è infinito, per la compattezza  $F$  ammette un punto di accumulazione,  $y \in E$ . Costruiamo una sottosuccessione che converga ad  $y$ . Scegliamo  $x_m$  tale che  $d(x_m, y) < 1$ . Scegliamo  $x_{m_2}$  tale che  $d(x_{m_2}, y) < \frac{1}{2}$  e  $m_2 > m_1$ , e così via. La sottosuccessione così costruita converge ad  $y$  in quanto  $d(x_{m_k}, y) < \frac{1}{k} \rightarrow 0$ .

( $\Leftarrow$ ) XXX

Ogni successione convergente è di Cauchy.

Per esempio con la metrica discreta una successione è convergente se e solo se è definitamente costante, che è equivalente ad essere di Cauchy, quindi è completo.

Nel caso dei razionali nei reali con metrica euclidea, consideriamo la radice di due che è un punto di accumulazione per i razionali. Esiste una successione di razionali che converge a radice di due, quindi è di Cauchy. Ma essa non può convergere in  $\mathbb{Q}$ , altrimenti convergerebbe anche in  $\mathbb{R}$  e avrebbe due limiti. Tuttavia è una successione di Cauchy in  $\mathbb{Q}$  perché è convergente in  $\mathbb{R}$  e quindi è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . (La condizione è la medesima). Quindi  $\mathbb{Q}$  non è completo.

### **Definizione Spazio completo**

Uno spazio metrico  $(X, d)$  è completo se ogni successione di Cauchy in  $X$  converge ad un punto di  $X$ .

### **Teorema**

$\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea è completo.

### **Proof**

Sia  $\{x_n\}$  una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$ . Scriviamo  $E_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ . Notiamo che  $E_n \supseteq E_{n+1}$ . Ponendo la chiusura  $\overline{E_n} \supseteq \overline{E_{n+1}}$ . Inoltre,  $E_n$  è limitato e  $\text{diam} E_n \rightarrow 0$ . Infatti, dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che per ogni  $m, n \geq N$   $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ . Notiamo inoltre che

$$\text{diam} E_n = \sup\{d(x_m, x_k)\} < \varepsilon$$

Dimostrazione per esercizio vale che  $\text{diam} F = \text{diam} \overline{F}$ . Quindi,  $\text{diam} \overline{E_n} \rightarrow 0$ . Adesso  $\{\overline{E_n}\}$  è una successione di compatti in quanto chiusi e limitati, annidati. Quindi

$$E \triangleq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset$$

Siccome  $\text{diam} E = 0$  o è vuoto o contiene un solo punto, quindi contiene un solo punto  $E = \{y\}$ . Mostriamo che  $x_n \rightarrow y$ . Abbiamo  $d(x_n, y) \leq \text{diam} \overline{E_n} \rightarrow 0$ .

### **Teorema**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto. Allora  $X$  è completo.

### **Proof**

Sia  $\{x_n\}$  una successione di Cauchy in  $X$ . Siccome è compatto è compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  che converge ad un punto  $y \in X$ . Mostriamo che  $x_n \rightarrow y$ . Dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $N_0$  tale che per ogni  $m, n \geq N_0$   $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Per la convergenza di  $\{x_{n_k}\}$  esiste  $K$  tale che per ogni  $k \geq K$   $d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Scegliamo  $\overline{N} = \max\{N_0, n_K\}$ . Allora per ogni  $n \geq \overline{N}$  si ha

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Sia  $X$  uno spazio metrico completo,  $Y \subseteq X$ .  $Y$  è completo se e solo se  $Y$  è chiuso in  $X$ .

### **Teorema**

$E$  sequenzialmente compatto implica  $E$  compatto.

### **Proof**

Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $E$ . Esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall x \in E$  esiste  $\bar{\alpha}$  tale che  $B_\delta(x) \subseteq G_{\bar{\alpha}}$ .

1. *claim 1:*  $\forall m \in \mathbb{N}$ , esiste  $x_m$  tale che  $B_{1/m}(x_m)$  non è sottoinsieme di  $G_\alpha$  per tutte le  $\alpha$ .  $\{x_m\}$  è una successione in  $E$  e quindi posso estrarre una sottosuccessione convergente  $x_{m_k} \rightarrow p \in E$ . Esiste  $\hat{\alpha}$  tale che  $p \in G_{\hat{\alpha}}$ .  $G_{\hat{\alpha}}$  è aperto e quindi esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$ . Ma  $x_{m_k} \rightarrow p$  quindi con  $k$  sufficientemente grande

$$B_{1/m_k}(x_{m_k}) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\hat{\alpha}}$$

che è assurdo lightning.



2. *claim 2*:  $E$  è contenuto nell'unione di un numero finito di bolle di raggio  $\delta$  centrate in punto di  $E$ . Per assurdo, sia  $x_1 \in E$ . Sicuramente  $B_\delta(x_1)$  non ricopre  $E$  quindi esiste  $x_2 \in E \setminus B_\delta(x_1)$ . Ma assieme  $B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2)$  non ricoprono  $E$ , quindi esiste un  $x_3 \in E \setminus (B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2))$  e così via. La successione  $\{x_m\}$  deve ammettere una sottosuccessione convergente. Ma  $d(x_i, x_j) \geq \delta$  se  $i \neq j$  quindi la successione  $\{x_m\}$  non è di Cauchy Lightning. Quindi  $E \subseteq B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \dots$ .

In realtà abbiamo mostrato anche la terza.

### Teorema

Sia  $X$  uno spazio metrico. Sono equivalenti:

1.  $X$  è compatto;
2.  $X$  è sequenzialmente compatto;
3. *limit point compact*: ogni sottoinsieme infinito di  $X$  ha almeno un punto di accumulazione.

Solo negli spazi metrici.

## 1.3 Funzioni

### Definizione

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  due spazi metrici e sia  $E \subseteq X_1$ . Sia  $f: E \rightarrow X_2$  e  $p \in E'$ . Diciamo che  $l \in X_2$  è limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow p$  e diciamo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in E \wedge 0 < d_1(x, p) < \delta \implies d_2(f(x), l) < \varepsilon$$

Equivalentemente  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f((B_\delta(p) \cap E) \setminus \{p\}) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

### Proposition

Sia  $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ . Allora  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow p$  se e solo se  $f(x_n) \rightarrow l$  per ogni successione  $\{x_n\}$  tale che  $x_n \in E$  e  $x_n \neq p$  per tutte le  $n$  e  $x_n \rightarrow p$ .

Valgono i medesimi teoremi tipo l'unicità del limite e i teoremi di permanenza del segno, confronto etc.

### Proposition

Sia  $f: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}^n$  per  $n > 1$ . Allora

$$f(x) \rightarrow l \iff f_i(x) \rightarrow l_i$$

per  $x \rightarrow p$ .

### Proof Sketch

Conderiamo la norma per tutte le  $i$

$$|f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\| \leq \sum_k |f_k(x) - l_k|$$

### Definizione Continuità

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  due spazi metrici,  $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ ,  $p \in E$ . Diciamo che  $f$  è *continua* in

$p$  se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\forall x \in E \cap B_\delta(p) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$$

Euivalentemente  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $x \in E$  e  $d_1(x, p) < \delta$  implica che  $d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon$ . Oppure ancora  $(f(B_\delta(p) \cap E)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$ .

Se  $p$  è un punto isolato di  $E$  allora  $\exists r > 0$  tale che  $B_r(p) \cap E = \{p\}$ . Scegliendo  $\delta \leq r$  la definizione di continuità è automaticamente soddisfatta. Se  $p$  non è isolato, allora è un punto di accumulazione per  $E$ . In questo caso  $f$  è continua in  $p$  e vale che  $f(x) \rightarrow f(p)$  per  $x \rightarrow p$ .

### Proposition

$f$  è continua in  $p$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x_n) = f(p)$$

per ogni successione  $\{x_n\}$  tale che  $x_n \in E$  per tutte le  $n$  e  $x_n \rightarrow p$ .

### Definizione

Sia  $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ . Diciamo che  $f$  è continua nell'insieme  $E$  se  $f$  è continua in ogni punto di  $E$ .

### Proposition

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e sia  $f: X_1 \rightarrow X_2$ . Allora  $f$  è continua in  $X$  se e solo se  $f^{-1}(V)$  è aperto in  $X_1$  per tutti i  $V$  aperti in  $X_2$ .

### Proof

( $\implies$ ) Sia  $V$  un aperto di  $X_2$ . Se  $f^{-1}(V) = \emptyset$  in questo caso abbiamo finito. Altrimenti, sia  $p \in f^{-1}(V)$ , cioè  $f(p) \in V$ . Essendo  $V$  aperto, riesco a trovare

$$B_\varepsilon(f(p)) \subseteq V$$

Ma  $f$  è continua quindi riesco anche a trovare  $\delta > 0$  tale che

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

Quindi  $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$  quindi  $p$  è un punto interno a  $f^{-1}(V)$ . Per l'arbitrarietà di  $p$  segue che  $f^{-1}(V)$  è aperto.

( $\impliedby$ ) Sia  $p \in X$  e dimostriamo che  $f$  è continua in  $p$ . Sia  $\varepsilon > 0$  fissato.  $B_\varepsilon(f(p))$  è un aperto di  $X_2$ .  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$  è un aperto di  $X_1$  e  $p \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$  e quindi esiste  $\delta > 0$  tale che

$$B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$$

cioè

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

che è la definizione di continuità.

Siccome  $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$  allora  $f$  è continua se e solo se  $f^{-1}(C)$  è chiuso in  $X_1$  per ogni chiuso in  $C \in X_2$ . Molto utile.

In generale le funzioni continue non mandano aperti in aperti. Per esempio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $x \rightarrow x^2$ . Abbiamo che

$$f((-1, 1)) = [0, 1)$$

**Definizione Funzione aperta**

Una funzione viene detta *aperta* se  $f(U)$  è aperto in  $X_2$  per tutti gli insiemi  $U$  aperto om  $X_1$ . Analogamente funzione chiusa.

Sia  $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$  è continua se e solo se tutte le sue componenti sono continue.

**Proposition**

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici,  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una funzione continua. Se  $X_1$  è compatto, allora  $f(X_1)$  è compatto.

**Proof**

Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto di  $f(X_1)$ . Consideriamo  $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  che sono degli aperti. Queste preimmagini sono un ricoprimento di  $X_1$ , che è compatto e quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito  $f^{-1}(G_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(G_{\alpha_n})$ . Vogliamo mostrare che  $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$  sono un ricoprimento di  $f(X_1)$ .

$$f(X_1) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(G_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

**Teorema Teorema di Weierstrass**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora,  $\exists x_1, x_2 \in X$  tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in X$$

cioè  $f$  possiede massimo e minimo assoluto.

**Proof Teorema di Weierstrass**

$f(X)$  è compatto in  $\mathbb{R}$ , quindi è chiuso e limitato. Siccome limitato,  $f(X)$  ammette infimum e supremum reali. Siccome  $\inf f(x)$  e  $\sup f(x)$  appartengono a  $\overline{f(X)}$  e  $f(X)$  è chiuso, appartengono allora ad  $f(X)$  e quindi sono massimi e minimi.

**Teorema Teorema da compatto ad Hausdorff**

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici con  $X_1$  compatto e  $f: X_1 \rightarrow X_2$  continua. Allora,  $f$  è chiusa.

In realtà questo funziona con domini compatti e codomini di Hausdorff.

**Proof Teorema da compatto ad Hausdorff**

Sia  $C$  un chiuso di  $X_1$ . Voglio dimostrare che  $f(C)$  è un chiuso di  $X_2$ . Sappiamo che  $C$  è chiuso in un compatto, quindi è compatto. La funzione è continua e quindi  $f(C)$  è compatto. Siccome i compatti sono chiusi allora è chiuso.

**Corollario**

Sia  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  continua,  $X_1$  compatto e  $f$  biunivoca. Allora,  $f^{-1}$  è continua.

**Proof**

Dobbiamo mostrare che  $(f^{-1})^{-1}(C)$  è chiuso per ogni  $C$  chiuso di  $X_2$ . Ma questo coincide con

$f(C)$  che è chiusa per il teorema da compatto ad Hausdorff.

### Teorema

Sia  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  continua e sia  $E \subseteq X$  connesso. Allora  $f(E)$  è connesso.

### Proof

Supponiamo che  $f(E)$  non sia connesso. Esistono quindi due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e separati tali che

$$f(E) = A \cup B$$

Poniamo  $F = f^{-1}(A) \cap E$  e  $G = f^{-1}(B) \cap E$ . Sicuramente  $F, G \neq \emptyset$  e  $E = F \cup G$ . Vogliamo mostrare che  $F$  e  $G$  sono separati. Siccome  $A \subseteq \overline{A}$  vale anche  $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ . L'applicazione  $f$  è continua e la chiusura di  $A$  è un chiuso. Quindi la preimmagine del chiuso  $\overline{A}$  è un chiuso. Consideriamo ora

$$\overline{F} \subseteq \overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$$

perché  $f$  è continua se  $\overline{A}$  è chiuso. Quindi  $\overline{F} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$  che implica  $f(\overline{F}) \subseteq \overline{A}$ . D'altro canto  $f(G) \subseteq B$  e  $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ , e quindi  $\overline{F} \cap G \neq \emptyset$  perché altrimenti vi sarebbe un elemento sia in  $\overline{A}$  che in  $B$ . Dovrebbe essere  $f(x) \in \overline{A}$  e  $f(x) \in B$  lightning. Analogamente si dimostra che  $F \cap \overline{G} = \emptyset$  cioè abbiamo scritto  $E$  come unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati. Ma  $E$  è connesso lightning.

### Definizione

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e  $f: X_1 \rightarrow X_2$ . Allora  $f$  è uniformemente continua se  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall x, y \in X_1$

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

### Teorema Theorema di Heine-Cantor

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  continua e  $X_1$  compatto. Allora,  $f$  è uniformemente continua.

La dimostrazione è la medesima rispetto al caso banale.

### Definizione Funzione di Lipschitz

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici,  $f: X_1 \rightarrow X_2$ . Diciamo che  $f$  è *lipschitz-continua* o *lipschitziana* se  $\exists \alpha > 0$  tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha d_1(x, y)$$

per tutte le  $x, y \in X_1$ .

### Proposition

Se  $f$  è Lipschitz-continua, allora è uniformemente continua.

### Definizione

Siano  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  spazi metrici e  $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ . Diciamo che  $f$  è una *contrazione* se  $f \in \text{Lip}_\alpha(X_1, X_2)$  con  $\alpha < 1$ .

Se il supremum è finito, allora questa è la miglior costante di Lipschitz (in generale)

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

### Esempio

Consideriamo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = x^2$ . Non è di Lipschitz in quanto non è uniformemente continua. Per mostrarlo possiamo dire

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|$$

Se restringessimo il dominio di questa funzione ad un intervallo limitato, allora sarebbe di Lipschitz, per il supremum.

### Proposition

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile. Allora,  $f \in \text{Lip}_\alpha(I, \mathbb{R})$  se e solo se  $|f'(x)| \leq \alpha$  per tutte le  $x$ .

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Cominciamo con

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha|x+t-x|}{|t|} = \alpha \end{aligned}$$

Possiamo togliere il limite dal modulo in quanto il modulo è una funzione continua.

( $\Leftarrow$ ) Per il teorema di Lagrange esiste  $\theta \in (\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(\theta)(x - y) \\ |f(x) - f(y)| &= |f'(\theta)| \cdot |x - y| \\ &\leq \alpha|x - y| \end{aligned}$$

### Esercizio

Per quali  $a \leq b$  la funzione  $f(t) = 1 + t - \arctan(t)$  è una contraddizione in  $[a, b]$ . Stabiliamo quindi se la derivata è limitata

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

notiamo quindi che  $0 \leq f'(t) \leq 1$ . Quindi è sicuramente Lipschitziana. Notiamo allora che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'(t)| = 1 = \alpha$$

Quindi per far sì che  $\alpha < 1$  dobbiamo limitare il dominio ad un intervallo limitato. Quindi  $-\infty < a \leq b < \infty$ . Porta l'intervallo  $[a, b]$  in sé? Siccome la funzione è crescente porta intervalli a intervalli di estremi  $f(a)$  e  $f(b)$ . Mi basta quindi imporre che  $f(a) \geq a$  e  $f(b) \leq b$ . Abbiamo

quindi

$$\begin{cases} 1 + a - \arctan a \geq a \\ 1 + b - \arctan b \leq b \end{cases} = \begin{cases} \arctan a \leq 1 \\ \arctan b \geq 1 \end{cases}$$

e quindi  $a \leq \tan 1 \leq b$ . Notiamo che  $f(\tan 1) = \tan 1$  quindi è un punto fisso per il teorema delle contrazioni.

### Esempio

Sia  $v \in \mathbb{R}^n$  e consideriamo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = v \cdot x$ . Dobbiamo studiare  $|f(x) - f(y)| = |v \cdot x - v \cdot y|$  usando la bilinearità del prodotto scalare ottengo  $|v \cdot (x - y)|$ . Per Cacuchy-Schwarz

$$|v \cdot (x - y)| \leq \|v\| \cdot \|x - y\|$$

che è quindi di Lipschitz.

### Teorema Teorema di Banach-Cacciopoli o delle contrazioni

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $f: X \rightarrow X$  una contrazione. Allora  $\exists_{=1} x \in X$  tale che  $f(x) = x$ .

Le ipotesi sono necessarie. Togliamo per esempio la completezza e consideriamo quindi  $X = (0, +\infty)$  con la contrazione  $f(x) = x/2$ . Questa contrazione non ha punti fissi. Togliamo invece l'ipotesi che sia una contrazione. Richiediamo solamente che sia una contrazione debole, cioè

$$d_2(f(x), f(y)) \leq f_1(x, y)$$

Consideriamo  $X = [0, +\infty)$  e prendiamo  $f(t) = t + e^{-t}$ . La derivata è  $f'(t) = 1 - e^{-t}$  che è nulla nell'origine e poi tende ad 1 dal sotto. Chiaramente non ci sono punti fissi in quanto  $f(t) = t$  è come dire  $e^{-t} = 0$ .

### Proof

Cominciamo mostrando l'esistenza del punto fisso. Sia  $x_0 \in X$  un punto fissato e consideriamo la successione  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

1. Mostriamo che  $\{x_n\}$  è di Cauchy, quindi siccome lo spazio è completo converge. Dobbiamo mostrare che  $d(x_n, x_m)$  tende a zero quando  $n, m$  crescono. Consideriamo inizialmente

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la distanza generica e usiamo la disuguaglianza triangolare ripetutamente

per ogni step

$$\begin{aligned}
 d(x_{n+k}, d_n) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+k-i}, d_{n+k-i-1}) \\
 &\leq d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i} \\
 &= \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i-1} \\
 &= \alpha^n \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} d(x_1, x_0) \\
 &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Per sbarazzarci di  $k$  (siccome vogliamo  $k$  arbitrario e il  $\varepsilon$  nella definizione di Cauchy deve essere uniforme rispetto ad esso) maggioriamo la somma parziale della serie geometrica con il valore della serie geometrica. Siccome  $0 < \alpha < 1$  il termine non esplode e la serie geometrica converge.

2. Detto  $x$  il limite di  $\{x_n\}$  mostriamo che è un punto fisso di  $f$ . Consideriamo il limite per  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x)$$

perché  $f$  è continua.

Mostriamo ora l'unicità del punto. Supponiamo che  $x, y$  siano due punti fissi. Vogliamo mostrare che  $d(x, y) = 0$ . Abbiamo

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)(1 - \alpha)d(x, y) \leq 0$$

siccome  $1 - \alpha > 0$  ciò succede solo se  $d(x, y) = 0$ .

Abbiamo notato che

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

Con  $k \rightarrow \infty$  otteniamo

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

quindi tende al punto fisso in maniera esponenziale.

Denotiamo  $f^n = f \circ f \cdots f$ . Se  $f$  è una contrazione, una qualsiasi sua iterazione è anch'essa una contrazione.

$$d(f(f(x)), f(f(y))) \leq \alpha d(f(x), f(y)) \leq \alpha^2 d(x, y)$$

Per induzione segue il resto. In generale la costante è  $\alpha^n$ . Ci chiediamo se nel caso in cui  $f$  non sia una contrazione, una sua iterata lo possa essere.

### Esempio

Per esempio  $f(x) = \cos x$ , che non è una contrazione in quanto il supremum della derivata è 1. Invece,  $\cos(\cos(x))$  ha derivata

$$\sin(\cos(x)) \cdot \sin$$

Il suo modulo è dato da

$$|\sin(\cos(x))| \cdot |\sin x| \leq \sin(1) < 1$$

Il secondo termine può solamente essere maggiorato da 1, mentre il secondo, siccome  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ , può essere maggiorato da  $\sin 1$ . Quindi è una contrazione.

Con questo possiamo per esempio mostrare che il coseno ha un punto fisso, siccome una sua iterata è una contrazione.

#### Corollario Indebolimento del teorema delle contrazioni: teorema delle iterate contrazioni

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $f: X \rightarrow X$  un'applicazione tale che  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $f^n$  sia una contrazione. Allora  $\exists_{=1} x \in X$  tale che  $f(x) = x$ .

#### Proof

Mostriamo che i punti fissi di  $f$  (che sono uno solo) sono i punti fissi di  $f^n$ . Sia  $x$  un punto fisso di  $f$ . Allora  $f^n(x) = f(f(\dots(x))) = f(x) = x$ . Quindi tutti i punti fissi di  $f$  sono anche punti fissi di  $f^n$ . Sia ora  $x$  tale che  $f^n(x) = x$ . Componendo otteniamo

$$\begin{aligned} f(f^n(x)) &= f(x) \\ f^n(f(x)) &= f(x) \end{aligned}$$

quindi  $f(x)$  è un punto fisso di  $f^n$ , ma siccome  $f$  è una contrazione ha solo un punto fisso, quindi coincidono  $f(x) = x$ . Quindi tutti i punti fissi di  $f^n$  sono anche punti fissi di  $f$ .

Parametrizziamo ora la funzione

Consideriamo  $T: X \times Y \rightarrow X$  come operatore parametrizzato dai valori di  $Y$ . Fissato  $y$  imponiamo che  $T(-, y): X \rightarrow X$  sia una contrazione. Per tutte le  $y$  esiste un solo  $x \in X$  tale che  $T(x, y) = x$ . Data la dipendenza funzionale  $x = \varphi(y)$  vogliamo capire come il punto fisso dipende dal parametro. In particolare, vogliamo mostrare che  $\varphi$  è continua sotto alcune ipotesi.

#### Teorema di dipendenza del punto fisso dal parametro

Sia  $X$  uno spazio metrico completo e sia  $Y$  uno spazio metrico (topologico). Sia  $T: X \times Y \rightarrow X$  tale che  $\exists \alpha < 1$  tale che  $\forall y \in Y$ ,  $T(-, y)$  è in  $\text{Lip}_\alpha(X)$ . ( $\alpha$  deve essere uniforme rispetto a  $y$ ). Sia  $y_0 \in Y$  tale che  $\forall x \in X$ ,  $T(x, y)$  sia continua in  $y_0$ . Allora  $f$  è continua in  $y_0$ .

#### Proof

Vogliamo mostrare che  $d(f(y), f(y_0)) \rightarrow 0$  se  $y \rightarrow y_0$ . Vogliamo stimare  $d(f(y), f(y_0))$  con  $f(y) = T(f(y), y)$ . Sia  $x = f(y)$  e  $f(y_0) = x_0$ . Allora

$$d(f(y), f(y_0)) = d(T(x, y), T(x_0, y_0))$$

Usando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} d(T(f(y_0), y_0)) &\leq d(T(f(y), y), T(f(y_0), y)) + d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \\ &\leq \alpha d(f(y), f(y_0)) + d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \\ (1 - \alpha)d(f(y), f(y_0)) &\leq d(T(f(y_0), y), T(f(y_0), y_0)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La costante è positiva e indipendente da  $y$ . La funzione  $T(f(y_0), -)$  è continua in  $y$ .

#### Lemma Sugli spazi normati

$$|||y| - |x|| \leq \|y - x\|$$



**Proof**

Sia  $y = x + (y - x)$ . Allora

$$\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\|$$

Scambiando i ruoli di  $x$  e  $y$  si ottiene la proposizione.

Ciò mostra che la norma è lipschitz continua.

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, ma non il viceversa.

**Definizione Spazio di Banach**

Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo rispetto alla norma.

**Definizione Equivalenza di norme**

Diciamo che due norme  $\|\cdot\|, |\cdot|$  sono equivalenti se  $\exists 0 < \alpha \leq \beta$  tale che

$$\alpha|x| \leq \|x\| \leq \beta|x|, \quad \forall x \in X$$

Questa è una relazione di equivalenza.

### Teorema Equivalenza di norme reali

Tutte le norme in  $\mathbb{R}^n$  sono equivalenti.

#### Proof

Basta mostrare che una norma  $\|\cdot\|$  questa è equivalente alla  $\|\cdot\|_2$ . Dobbiamo trovare  $\alpha, \beta$  tale che

$$\alpha\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Consideriamo la base canonica  $\{e_1, \dots, e_n\}$  che è finito-dimensionale e quindi  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \\ &\leq \left( n \max_{i=1}^n \{ \|e_i\| \} \right) \left( \sum_{i=1}^n |x_i| \right) \\ &\leq \left( n \max_{i=1}^n \{ \|e_i\| \} \right) \|x\|_1 \leq \underbrace{\left( n \max_{i=1}^n \{ \|e_i\| \} \right)}_{\beta} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Questo ci dice anche che  $\|\cdot\|$  è continua rispetto alla topologia indotta da  $\|\cdot\|_2$ , e pure lipschitziana. Dobbiamo ora dimostrare l'altra metà della disuguaglianza e trovare  $\alpha$ . Poniamo  $\alpha$  in funzione dei vettori

$$\alpha = \inf_{\|x\|_2=1} \|x\|$$

Mostriamo che  $\alpha > 0$ . Una volta fatto questo, possiamo ottenere che la definizione di  $\alpha$  dice che  $\|x\|_2 = 1 \implies \|x\| \geq \alpha$ . Voglio dimostrare che  $\|x\| \geq \alpha\|x\|_2$  per tutte le  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $x = 0$  la disuguaglianza è soddisfatta. Altrimenti, normalizziamo  $z = x/\|x\|_2$ . Usando l'omogeneità assoluta

$$\|z\|_2 = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2} \|x\|_2 \implies \|z\|_2 = 1$$

Quindi  $\|z\| \geq \alpha$  and furthermore

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq \alpha \implies \|x\| \geq \alpha\|x\|_2$$

We now need to show that  $\alpha$  is positive. Siccome le norme sono non-negative, alla peggio sono nulle. In realtà  $\alpha$  è un minimo

$$\alpha = \min_{\|x\|_2=1} \|x\|$$

since the norm is continuous with the respect to the topology induced by  $\|\cdot\|_2$ . The set over which we are taking the minimum is clearly closed and bounded. Siccome siamo nella topologia reale con norma euclidea è quindi anche compatto. Per Weierstrass,  $\alpha$  è un minimo. Quindi deve essere  $\alpha > 0$ . Se fosse  $\alpha = 0$  allora esisterebbe  $\hat{x}$  tale che  $\|\hat{x}\|_2 = 1$  e  $\|\hat{x}\| = 0$ , che è assurdo lightning.

## 2 Operatori lineari fra spazi vettoriali

Lo spazio  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

Studiamo la continuità degli operatori lineari in spazi normati.

### Proposition

Ogni  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  è continua rispetto alla topologia indotta dalla norma (qualsiasi visto che sono equivalenti in  $\mathbb{R}^n$ ).

### Proof

1. Mostriamo che la continuità dell'operatore in un singolo punto, come l'origine, implica la continuità di  $A$  in tutto  $\mathbb{R}^n$ . Questo è un fatto generale. Abbiamo quindi che se  $\{x_n\} \rightarrow 0$  allora  $\{Ax_n\} \rightarrow A0 = 0$ . La continuità generale è data dal fatto che se  $\{y_n\} \rightarrow x$  allora  $\{Ay_n\} \rightarrow Ax$ . Ma  $\{Ay_n\} \rightarrow Ax$  se e solo se  $\{Ay_n - Ax\} \rightarrow 0$  cioè  $\{A(y_n - x)\} \rightarrow 0$  e per linearità  $\{y_n - x\}$  è una successione che tende a zero, quindi  $A$  è continuo ovunque. Inoltre, per la continuità uniforme possiamo mostrare che  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che

$$\|y - x\| < \delta \implies \|Ay - Ax\| < \varepsilon$$

Ma  $\|Ay - Ax\| = \|A(x - y)\|$ . Poniamo quindi  $z = y - x$ . Dobbiamo mostrare che se  $\|z\| < \delta$  allora  $\|Az\| < \varepsilon$ . Ma questa è la continuità nell'origine che stiamo presupponendo.

2. Mostriamo ora la continuità nell'origine. Usiamo il fatto che  $\mathbb{R}^n$  ha dimensione finita. Sia  $x = (x_1, \dots, x_n)$  secondo la base canonica  $(e_1, \dots, e_n)$ . Calcolo usando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A e_i\| \\ &\leq C \sum_{i=1}^n |x_i|_1, \quad C = \max_{i=1}^n \{\|A e_i\|\} \end{aligned}$$

Ciò dimostra quindi che la funzione è Lipschitz-continua.

Nel passo secondo abbiamo usato il fatto che lo spazio fosse finitamente generato (il dominio). In generale, con  $A: X \rightarrow Y$  è un operatore lineare fra spazi normati qualunque, on è detto che  $A$  sia continuo.

### Esempio Controesempio

Consideriamo lo spazio delle funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  limitate, in  $\mathcal{C}^1$  e con derivata limitata  $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R})$ . Come secondo spazio prendiamo delle funzioni continue e limitate  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{BC}(\mathbb{R})$ . Consideriamo quindi l'operatore della derivata  $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R})$ . Siccome questi non sono spazi finitamente generati, dobbiamo scegliere delle norme. Scegliamo come norma sia nel dominio che nel codominio  $\|\cdot\|_\infty$ , che ha senso siccome le funzioni sono limitate. Mostriamo quindi che l'operatore lineare non è continuo. Scegliamo l'origine. Vogliamo quindi trovare  $\{f_n\} \rightarrow 0$  ma tale che  $\{f'_n\}$  non tende a zero. Per farlo prendiamo una funzione oscillante che si schiaccia sull'ascisse, e quindi la sua derivata non si schiaccia come la funzione. Prendiamo

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

Abbiamo la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} |\sin(nx)| = \frac{1}{n}$$

Mentre la norma della derivata

$$\|f'\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |\cos(nx)| = 1$$

Andiamo a definire una norma speciale su questo spazio, la norma operatoriale.

**Definizione Norma operatoriale**

$$\|A\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

**Proposition**

Norma operatoriale è una norma.

Mostriamo che la norma è ben definita, e che questo è un numero reale. Infatti,  $\|A\|_* < +\infty$ , siccome l'insieme del supremum è chiuso e limitato e, quindi, compatto, e la funzione è continua allora il supremum è un massimo. Mostriamo che il massimo si ottiene sulla frontiera della bolla.

**Proof**

Mostriamo le due disuguaglianze. Il fatto che  $\|A\|_* \geq \max \|Ax\|$  è banale, infatti  $\{x \mid \|x\| = 1\}$  è un sottoinsieme di  $\{x \mid \|x\| \leq 1\}$ . D'altra parte se il massimo è ottenuto per  $x = 0$  allora il max è 0 e quindi  $Ax = 0$  sempre, e la disuguaglianza è banalmente soddisfatta. Supponiamo ora che il massimo sia ottenuto in un punto non nullo  $\hat{x}$ , possiamo normalizzare e ottenere norma unitaria.

$$\begin{aligned} \|A\hat{x}\| &= \left\| A \left( \|\hat{x}\| \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|} \right) \right\| = \left\| \|\hat{x}\| A \left( \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|} \right) \right\| = \|\hat{x}\| \left\| A \left( \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|} \right) \right\| \leq \left\| A \left( \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|} \right) \right\| \\ \|A\|_* &= \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\hat{x}\| \leq \left\| A \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|} \right\| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \end{aligned}$$

Quindi il valore può essere calcolato solo sulla buccia in quanto lì viene raggiunto il massimo.

**Proposition Stima fondamentale**

Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  vale

$$\|Ax\|_* \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

**Proof**

Se  $\|x\| = 1$  vale  $\|Ax\| \leq \|A\|$  perché per la proprietà precedente,

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Se  $x = 0$ , la disuguaglianza vale. Altrimenti, normalizziamo  $x$  per ritrovarci sulla frontiera.

$$\|A\|_* \geq \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\|$$

moltiplicando entrambi i membri e per  $\|x\|$  si ottiene la tesi.

In realtà questa costante è la migliore.

**Proposition**

Se  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$  per tutte le  $x \in \mathbb{R}^n$ , allora

$$\|A\|_* \leq \alpha$$

In realtà questo risultato vale anche se supponiamo che  $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$  solo per  $x$  tale che  $\|x\| \leq 1$  oppure tale che  $\|x\| = \varepsilon$  per qualche  $\varepsilon > 0$ .

### Proof

Supponiamo di avere una stima del tipo  $\|Ax\| \leq \alpha\|x\|$  per tutte le  $x$ . Sappiamo che

$$\|A\|_* = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \alpha \max_{\|x\|\leq 1} \|x\| = \alpha$$

che è quindi chiaramente 1.

La medesima dimostrazione funziona supponendo che  $\|Ax\| \leq \alpha\|x\|$  per tutte le  $\|x\| \leq 1$ . Se invece sappiamo che  $\|Ax\| \leq \alpha\|x\|$  solo per gli  $x$  tale che  $\|x\| = \varepsilon$ , allora è sufficiente normalizzare (per esercizio).

### Proof La norma operatoriale è una norma

1. *annullamento*: Supponiamo che  $\|A\|_* = 0$ . Devo mostrare che  $A = 0$ . Siccome la norma è nulla,

$$\max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = 0 \implies \|Ax\| = 0, \quad \forall x \mid \|x\| \leq 1$$

e quindi anche per tutti le altre  $x$  visto che possiamo normalizzare. Quindi,  $Ax = 0$ .

2. *positiva omogeneità*:

$$\|\lambda A\|_* = \max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|_*$$

3. *disuguaglianza triangolare*:

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\| &= \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \\ &\leq \|A\|_* \|x\| + \|B\|_* \|x\| = \|x\| (\|A\|_* + \|B\|_*) \end{aligned}$$

Per la proposizione precedente,  $\|A+B\|_*$  è la più piccola costante per cui vale una disuguaglianza di questo tipo.

La norma operatoriale è scelta tale precisamente per la stima.

### Teorema

$(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$  è uno spazio di Banach.

### Proof

Siccome questo spazio è finito dimensionale è isomorfo allo spazio  $\mathbb{R}^{m \times n}$  che è completo per esempio rispetto alla norma seconda. Tuttavia, dimostriamo con le successioni di Cauchy. Consideriamo quindi una successione di operatori lineari. Per tutte le  $\varepsilon > 0$  esiste  $N_\varepsilon$  tale che  $\forall m, n > N_\varepsilon$  tale che

$$\|A_m - A_n\| < \varepsilon$$

cioè per tutte le  $x$

$$\|(A_m - A_n)x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Questo vuole dire che per  $x$  fissato la successione  $\{A_n x\}$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^m$ . Siccome  $\mathbb{R}^m$  è completo, la successione converge. Chiamiamo il limite di tale successione  $Ax$ . Verifichiamo che in questo modo abbiamo definito un operatore lineare  $x \rightarrow Ax$ . Sappiamo che  $A_n$  è lineare per ogni  $n$ , quindi  $A_n(x+y) = A_n x + A_n y$ . Sappiamo che  $A_n(x+y)$  tende ad  $Ax + Ay$  e quindi l'espressione sopra tende ad  $Ax + Ay$ . Analogamente per l'omogeneità. Mostriamo ora che  $\{A_n\}$  effettivamente converge ad  $A$ , quindi  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ . Sappiamo che  $\{A_n\}$  è una successione di Cauchy. Quindi  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $N_\varepsilon$  tale che  $\forall n, m > N_\varepsilon$

$$\|A_m x - A_n x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Ma  $A_n x \rightarrow Ax$  per  $n \rightarrow \infty$ . passando al limite si ha che per tutte le  $\varepsilon > 0$  esiste  $N_\varepsilon$  tale che  $\forall n > N_\varepsilon$ ,

$$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon |x|$$

cioè abbiamo trovato che  $\|A_n - A\| = \varepsilon$ .

Notiamo che abbiamo sfruttato solo la completezza di  $\mathbb{R}^n$ .

### Esercizio

Sia  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dato da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Prendiamo la norma infinito in ambo gli spazi. Il massimo è dato dal valore sulla frontiera della bolla.

$$\|A\|_* = \max_{\max\{|x|, |y|\}=1} \max\{|3x - 2y|, |y|, |x + 3y|\}$$

Quindi  $|3x - 2y| \leq 3|x| + 2|y|$  ed deve essere  $\max\{|x|, |y|\} = 1$ . In particolare i due moduli sono minori o uguali ad uno.  $|3x - 2y| \leq 3 + 2 = 5$  e il valore 5 è assunto per  $x = 1$  e  $y = -1$  (oppure il contrario). Quindi  $\|A\| = 5$ .

Consideriamo invece ora la norma 1 quindi

$$\|A\| = \max_{|x|+|y|=1} (|3x - 2y| + |y| + |x + 3y|)$$

Allora

$$|3x - 2y| + |y| + |x + 3y| \leq 3|x| + 2|y| + |y| + |x| + 3|y| = 4|x| + 6|y|$$

Siccome  $|x| + |y| = 1$  quest'ultima è un'interpolazione lineare tipo  $ta + (1-t)b$ . In questo caso abbiamo l'espressione  $4|x| + 6|y|$  che è sempre minore o uguale di 6. Quindi abbiamo trovato che  $|3x - 2y| + |y| + |x + 3y| \leq 6$ . Tale valore può essere raggiunto per esempio scegliendo  $x = 0$  e  $y = 1$ .

Consideriamo ora operatori lineari invertibili, quindi fra spazi con la medesima dimensione.

### Teorema

$GL_n(\mathbb{R})$  è un aperto in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  dove consideriamo lo spazio topologico indotto dalla metrica indotta dalla norma associata allo spazio. Inoltre, la mappa dell'inversione è continua.

### Proof

Visto che il determinante è non nullo

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

ma visto che è la preimmagine di un aperto tramite il determinante, che è continuo.

Dimostriamo tuttavia la proposizione con un argomento che può funzionare anche nel caso infinito dimensionale.

1. *identità è un punto interno dell'insieme*: mostriamo che esiste  $\delta$  tale che  $\|A - \mathbf{1}\| < \delta$  implica che  $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ . Stiamo usando la norma operatoriale. Possiamo  $B = \mathbf{1} - A$  e quindi  $A^{-1} = (\mathbf{1} - B)^{-1}$  che possiamo scrivere come la serie geometrica di  $B^k$ . Ovviamente dobbiamo usare la convergenza della somma parziale della serie secondo la norma dei vettori. (Purché la serie converga). Infatti, se la serie converge usiamo la proprietà distributiva per

mostrare che è veramente l'inverso di  $\mathbf{1} - B$

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - B) \sum_{k=0}^{\infty} B^k &= \sum_{k=0}^{\infty} B^k - \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} B^k - \sum_{k=1}^{\infty} B^k = B^0 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Quindi la stessa cosa che vale per i numeri, vale anche con gli operatori (negli spazi vettoriali in generale). Dobbiamo tuttavia studiare quando la serie converge. Usando il criterio di Cauchy, troviamo che la serie converge se e solo se  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} B^k \right\| \leq \varepsilon$$

Mediante la stima otteniamo una serie numerica.

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} B^k \right\| \leq \sum_{k=m}^{m+p} \|B^k\|$$

Preferiremmo lavorare la potenza di una norma piuttosto che la norma di una potenza, ma coincidono?

Calcoliamo quindi  $\|B \circ A\|_*$  con  $A, B$  operatori lineari, e usando la norma operatoriale. Siccome abbiamo la norma operatoriale vale la stima fondamentale

$$\|(B \circ A)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\|_* \|Ax\| \leq \|B\|_* \|A\|_* \|x\|$$

Siccome la norma operatoriale è la più piccola costante per cui vale una stima del tipo dato. Quindi  $\|B \circ A\|_* \leq \|B\|_* \|A\|_*$ . Quindi in particolare  $\|B^k\|_* \leq \|B\|_*^k$ . Tornando a prima otteniamo

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} B^k \right\|_* \leq \sum_{k=m}^{m+p} \|B^k\|_* \leq \sum_{k=m}^{m+p} (\|B\|_*)^k \leq \varepsilon$$

pur di considerare  $\|B\|_* < 1$ .

2. Sia  $A_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Vogliamo mostrare che  $\exists \delta > 0$  tale che

$$\|A - A_0\|_* < \delta \implies A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Calcoliamo

$$A = A_0 - (A_0 - A) = A_0(\mathbf{1}A_0^{-1}(A_0 - A)) = A_0(\mathbf{1} - B), \quad B = \mathbf{1} - B$$

per il punto precedente  $\mathbf{1} - B$  è invertibile purché  $\|B\|_* < 1$ . Studiamo quando ciò avviene

$$\|B\|_* = \|A_0^{-1}(A_0 - A)\|_* \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \|A_0 - A\| < 1 \text{ se } \|A_0 - A\|_* < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$$

la divisione la possiamo fare in quanto la funzione nulla, che ha norma nulla, non è invertibile quindi non siamo in quel caso. Quindi, scegliendo  $\delta \leq 1/\|A_0^{-1}\|$  si ha che  $A$  è invertibile, quindi è un aperto. Cioè in questo caso  $\|B\|_* < 1$  quindi  $\mathbf{1} - B$  è invertibile e visto che abbiamo scritto  $A$  come prodotto di operatori invertibili, è anch'esso invertibile.

Mostriamo ora che l'inversa è continua. Da  $\|B \circ A\|_* \leq \|B\|_* \|A\|_*$  da qui segue che la composizione di questi lineari è continua. Siano  $B_n \rightarrow B$  e  $A_n \rightarrow A$  quindi  $B_n \circ A_n \rightarrow B \circ A$ . Mostriamo che la mappa  $A \rightarrow A^{-1}$  è continua, cioè che  $A_n \rightarrow A \implies A_n^{-1} \rightarrow A^{-1}$ . Abbiamo

$$A = A_0(\mathbf{1} - A_0^{-1}(A_0 - A)) = A_0(\mathbf{1} - B), \quad A^{-1} = (\mathbf{1} - B)^{-1}A_0^{-1}$$

Vogliamo stimare  $\|A^{-1} - A_0^{-1}\|_*$ .

$$A^{-1} - A_0^{-1} = (\mathbf{1} - B)^{-1} A_0^{-1} - A_0^{-1} = \left[ (\mathbf{1} - B)^{-1} - \mathbf{1} \right] A_0^{-1} = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} B^k - \mathbf{1} \right] A_0^{-1} = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} B^k \right] A_0^{-1}$$

$$\|A^{-1} - A_0^{-1}\|_* = \left\| \left( \sum_{k=1}^{\infty} B^k \right) \circ A_0^{-1} \right\| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\|B\|_*)^k \right) \|A_0^{-1}\| = \frac{\|B\|_*}{1 - \|B\|_*} \|A_0^{-1}\|$$

pur di prendere  $\|B\|_* < 1$ . Se  $A \rightarrow A_0 \implies \|B\|_* \rightarrow 0$  allora  $A^{-1} - A_0^{-1} \rightarrow 0$ .



### 3 Calcoli differenziale multivariabile



#### Definizione Limite multivariabile

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e sia  $a$  un punto di accumulazione per  $\Omega$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}^m$$

se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x \in \Omega$

$$0 < \|x - a\|_1 < \delta \implies \|f(x) - b\|_2 < \varepsilon$$

dove le norme sono generiche.

Il concetto di limite ad infinito vuol dire uscire dai compatti.



#### Definizione Limite a infinito multivariabile

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega$  illimitato. Allora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}^m$$

se  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$  tale che  $\forall x \in \Omega$

$$\|x\| > M \implies \|f(x) - b\| < \varepsilon$$

e per il codominio

#### Definizione Limite infinito multivariabile

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $a$  punto di accumulazione. Allora

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

se  $\forall K > 0, \exists \delta > 0$  tale che per tutte le  $x \in \Omega$

$$0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x)\| > K$$



#### Definizione Cammino

Un *cammino* è un applicazione  $\varphi: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua.

Sia  $\varphi_\Omega(a)$  l'insieme dei cammini con sostegni in  $\Omega$  e tale che  $\varphi(t) \rightarrow a$  per  $t \rightarrow 0^+$  e  $\varphi(t) \neq a$  per tutte le  $t$ .

#### Teorema

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\varphi(t)) = b$$

per tutte le  $\varphi \in \varphi_\Omega(a)$ .



### Definizione Derivata direzionale

TODO 15 ottobre

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + vt) - f(a)}{t}$$

La derivata parziale è come prendere una fetta della funzione multidimensionale, nella direzione data dal vettore direzionale, e calcolare la derivata ad una singola variabile.

Le derivate parziali lungo i versori della base canonica si chiamano derivate parziali.



### Esempio

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Stabiliamo se le derivate direzionali di  $f$  esistono nell'origine e calcoliamo. Questa funzione è costante lungo gli assi cartesiani e vale zero. Quindi, le derivate parziali sono nulle. Sia  $v$  un qualsiasi versore. Possiamo già escludere i casi con  $v_i = 0$  in quanto sono le derivate parziali. Calcoliam quindi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{tv_1 t^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3 (v_1^2 + t^2 v_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^2} \\ &= \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1} \end{aligned}$$

Quindi  $f$  ammette tutte le derivate direzionali. Controlliamo il limite di questa funzione nell'origine, per controllare se è quindi continua in quel punto.

$$\frac{\rho^3 |\cos \theta| \sin^2 \theta}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)} \leq \frac{\rho}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$$

Consideriamo

$$f(y^2, y) = \frac{1}{2}$$

Quindi abbiamo trovato un cammino lungo il quale la funzione non tende a zero. Avremmo potuto semplicemente considerare la stima

$$\frac{|xy^2|}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{2}$$

L'esistenza delle derivate parziali non implica la differenziabilità.

Nelle funzioni di una variabile l'esistenza del rapporto incrementale e l'approssimazione lineare locale di una funzione coincidono e sono equivalenti alla differenziabilità, ma in più variabili non coincidono.



### Definizione

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  aperto e  $a \in \Omega$ . Diremo che  $f$  è differenziabile in  $a$  se esiste una forma lineare (funzionale lineare), o equivalentemente se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$f(a+h) = f(a) + \lambda h + o(\|h\|)$$

per  $h \rightarrow 0$ . Tale forma lineare è detta differenziale di  $f$  in  $a$ , denotata  $df(a)$ , che quindi manda  $h$  in  $h\lambda$ .

(Teorema di Riesz, infatti il fatto che la derivata direzionale è data da  $\nabla f(a) \cdot v$ ). Se tale  $\lambda$  esiste, è unico. Supponiamo che  $\lambda, \mu$  soddisfino l'uguaglianza. Sottraendo membro a membro otteniamo

$$(\lambda - \mu)h = o(\|h\|)$$

per  $h \rightarrow 0$ . Quindi vogliamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\lambda - \mu)h}{\|h\|} = 0$$

ma

$$(\lambda - \mu) \frac{h}{\|h\|}$$

non tende a zero per  $h \rightarrow 0$ . Per mostrarlo scegliamo il cammino  $\varphi(t) = t(\mu - \nu)$  e

$$(\lambda - \mu) \frac{t(\lambda - \mu)}{|t| \cdot \|\lambda - \mu\|} = \frac{t}{|t|} \|\lambda - \mu\|$$

che non tende a zero perché  $\lambda \neq \mu$ . Quindi non esistono  $\lambda \neq \mu$  tale che valga l'uguaglianza.

### Teorema

Se  $f$  è differenziabile in  $a$ , allora

1.  $f$  è continua in  $a$ ;
2.  $\forall v \in \mathbb{R}^n$ , esiste la derivata direzionale  $D_v f(a) = \lambda \cdot v$ ;
3.  $\lambda = \nabla f(a)$



### Proof

1. Per ipotesi esiste  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$f(a+h) - f(a) = \lambda \cdot h + \varepsilon(h)$$

con  $\varepsilon(h) = o(\|h\|)$ . Quindi,

$$\begin{aligned} |f(a+h) - f(a)| &= |\lambda \cdot h + \varepsilon(h)| \\ &= |\lambda h| + |\varepsilon(h)| < \|\lambda\| \|h\| + \|h\| \frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} \\ &\leq \|h\| \left[ \|\lambda\| + \frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

2. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} &= \frac{\lambda \cdot tv + \varepsilon(tv)}{t} \\ &= \lambda v + \frac{\varepsilon(tv)}{t} \\ &= \lambda v + \frac{\varepsilon(tv)}{t\|v\|} \\ &= \lambda v + \frac{|t|}{t} \frac{\varepsilon(tv)}{\|tv\|} \\ &\rightarrow \lambda v \end{aligned}$$

- 3.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_v f(a) = \lambda e_j = \lambda_j$$

quindi  $\lambda = \nabla f(a)$ .



Per stabilire se una funzione  $f$  è differenziabile in  $a$ , basta controllare se le derivate parziali esistono.

### Corollario Formula del gradiente

Se  $f$  è differenziabile in  $a$ , allora  $D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v$ .



### Esempio

Studia se

$$f(x, y) = x^5 \sqrt{|y|}$$

è differenziabile nei punti del tipo  $(x_0, 0)$  lungo l'asse  $x$ . Nel punto zero potremo avere dei problemi per la derivata parziale di  $y$ , quindi dovremo usare la definizione e non le regole delle derivate. Siccome  $f(x, 0) = 0$  la derivata nei punti della forma  $(x_0, 0)$  è 0. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x_0^5 \sqrt{|y|} - 0}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} x_0^5 \frac{\sqrt{|y|}}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} x_0^5 \operatorname{sgn} y |y|^{-1/2} = \begin{cases} 0 & x_0 = 0 \\ \nexists & x_0 \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ma quindi  $f$  non è differenziabile nei punti  $(x_0, 0)$  se  $x_0 \neq 0$ . Invece nel punto dell'origine abbiamo  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^5 \sqrt{|k|}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Siccome

$$\frac{|ab|}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$$

Abbiamo

$$\left| \frac{h^5 \sqrt{|k|}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \left( \frac{|h| \cdot |k|}{h^2 + k^2} \right)^{1/2} |h|^{9/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |h|^{9/2}$$

e quindi tende a zero. Allora  $f$  è differenziabile nell'origine.



Se  $f$  è differenziabile in  $a$  possiamo definire l'iperpiano tangente

$$f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$$



### Teorema Teorema del differenziale totale

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  aperto,  $x_0 \in \Omega$ . Se  $\exists r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq \Omega$  e tutte le derivate parziali di  $f$  esistono in  $B_r(x_0)$  e sono continue in  $x_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

È una condizione sufficiente.

### Proof

Facciamo il caso  $n = 2$ . Per ipotesi sappiamo che  $\nabla f(x_0)$  esiste. Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Calcoliamo l'incremento  $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ . Piuttosto che congiungere i due punti mediante un segmento, facciamo lo stesso percorso con due segmenti nella direzione degli assi, quindi ho una variabile sola al posto di due, due volte. Quindi passiamo dal punto intermedio  $(x, y_0)$ . Abbiamo allora

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f(x,y) - f(x,y_0)] + [f(x,y_0) - f(x_0,y_0)]$$

Possiamo applicare il teorema di Lagrange

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi)(x - x_0)$$

con  $\xi \in [x_0, x]$ , visto che la derivata è parziale. Considerando allo stesso modo  $f(x, y_0)$  e applicando Lagrange si ottiene

$$f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\eta, y_0)(y - y_0)$$

dove  $\eta \in [x_0, x]$ . Sostituendo troviamo

$$\begin{aligned} & \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= \left| \frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &\quad + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \end{aligned}$$

I due termini con le radici a denominatori sono minori di 1. Per il teorema del confronto, se  $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$  implica che  $\xi \rightarrow y_0$  e  $\eta \rightarrow x_0$ . Per la continuità della derivate parziali segue la tesi che il valore tende a zero.



### Corollario

Se in  $\Omega$  tutte le derivate parziali di  $f$  esistono e sono continue, allora  $f$  è differenziabile in  $\Omega$ .

### Definizione

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto. Se le derivate parziali esistono e sono continue in  $\Omega$ , diremo che  $f$  è differenziabile con continuità e scriviamo  $f \in C^1(\Omega)$ .



Per il teorema del differenziale totale le classi  $C$  sono annidate.

### Esercizio

Studiare la differenziabilità di

$$f(x, y) = \ln(1 + xy) - x^2y$$

. Il dominio massimale è  $\{(x, y) \mid xy > -1\}$ . Troviamo le due derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1 + xy} - 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1 + xy} - x^2$$

Siccome le derivate sono continue ed esistono ovunque nel dominio (in particolare nell'origine) la funzione è differenziabile.



### Esercizio

Studiare continuità e differenziabilità nell'origine di

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \left[ 1 - e^{-\frac{x^2 + y^2}{|x|}} \right] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Non conviene usare il teorema del differenziale totale perché la funzione è a tratti e quindi dovremmo usare la definizione di derivata. Cominciamo con la continuità. Calcoliamo il limite  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  notando che  $|f| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ . Quindi è continua nell'origine. Calcoliamo adesso le derivate direzionali. Sia  $v = (v_1, v_2)$  un versore

$$\begin{aligned} \frac{f(tv) - f(0)}{t} &= \frac{1}{t} \left( |t| \left[ 1 - e^{-\frac{t^2}{|t| \cdot |v_1|}} \right] \right) \\ &= \operatorname{sgn} t \left[ 1 - e^{-\frac{|t|}{|v_1|}} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $v_1 \neq 0$ . Nel caso  $v_1 = 0$  abbiamo il vettore  $(0, \pm 1)$  della direzione dell'asse  $y$ . In tal caso abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

in quanto  $f$  è identicamente nulla in quell'asse. Ma  $f$  non è differenziabile in quanto il seguente non tende a zero

$$\left| \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 1 - e^{-\frac{x^2 + y^2}{|x|}}$$

e considerando l'esponente. Possiamo trovare un cammino per il quale il limite non tende a zero. Le rette non vanno bene, dobbiamo prendere un cammino che è tangente a  $x = 0$ . Prendiamo per esempio  $(t^2, t)$ . L'esponente diventa  $-(t^4 + t^2)/t^2 \rightarrow -1$ . Quindi tutto il limite tende a  $1 - e^{-1} \neq 0$ .



La forma differenziabile  $df(-): \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  e quindi associa ad ogni punto il funzionale lineare differenziale. Quindi

$$df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

che associa  $h \rightarrow \nabla f(a) \cdot h$ . In due variabili per esempio

$$df(a)(x - a) = \nabla f(a)(x - a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - e_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(x - e_2)$$

la cui applicazione può essere scritta con le proiezioni

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy$$

Nota:  $\nabla f(a)$  è il vettore che punta nella direzione di massima crescita locale. Infatti,  $f(a+h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + \varepsilon(h)$  con  $\varepsilon(h) = o(\|h\|)$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| \cos \theta + \varepsilon(h) \\ &= \|h\| \left[ \|\nabla f(a)\| \cos \theta + \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \right] \end{aligned}$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra  $h$  e  $\nabla f(a)$ . Quindi ciò assume valore massimo quando  $\theta = 0$ , cioè quando la direzione è il verso di  $\nabla f(a)$ .



### 3.1 Funzioni a valori vettoriali



Consideriamo  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega$  aperto. Abbiamo quindi

$$f = \sum_{i=1}^n f_i e_i, \quad f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Sia  $a \in \Omega$  e sia  $v \in \mathbb{R}^n$ . Definiamo la derivata direzionale

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m$$

e le componenti sono le derivate direzionali delle funzioni a valore reale. Posso definire un totale di  $mn$  derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

Possiamo quindi definire la matrice Jacobiana come la matrice  $J(a)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ . Quindi le righe della matrice sono i trasporti dei gradienti  $\nabla f_j(a)$ .



#### **Definizione** Differenziabilità

Una funzione  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega$  aperto è differenziabile in  $a \in \Omega$  se  $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tale che

$$f(a + h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h)$$

dove  $\varepsilon(h) = o(\|h\|)$ . Tale applicazione lineare si chiama differenziale.

Equivalentemente,  $f$  è differenziabile in  $a$  se esiste una matrice  $\Lambda \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  tale che

$$f(a + h) - f(a) = \Lambda h + \varepsilon(h)$$

Equivalentemente  $f$  è differenziabile se e solo se  $f_i$  sono tutte differenziabili.



#### **Teorema** Teorema del differenziale totale

Vale l'analogo teorema: se tutte le derivate parziali delle componenti di  $f$  esistono in un intorno di  $a$  e sono continue in  $a$  allora  $f$  è differenziabile in  $a$

#### **Teorema**

Se  $f$  è differenziabile in  $a$  allora  $f$  è continua in  $a$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\|v\| = 1$ ,

$$\exists D_v f(a) = \Lambda v$$

e  $\Lambda = J(a)$ .

Cioè il differenziale (differenziale primo)  $L$  è rappresentato nella base canonica dalla matrice Jacobiana,

$$df_a h = Jf(a)h = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) h_j \right) e_i$$

## 3.2 Chain rule



### Teorema Chain rule

Siano  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  funzioni tali che  $f$  è differenziabile nel punto  $a$  e  $g$  differenziabile in  $f(a)$ . Allora,  $g \circ f$  è differenziabile in  $a$  e vale

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

O equivalentemente in forma matriciale

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a)$$



Sia  $h = g \circ f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Calcoliamo il seguente, che è il prodotto della  $i$ -esima riga di  $Jg(f(a))$  per la  $j$ -esima colonna di  $Jf(a)$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

### Esempio

Siano  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Chiamiamo  $x, y$  le coordinate di  $f$  e  $u, v, w$  quelle di  $g$ . Sia  $h = g \circ f$  quindi  $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ . Calcoliamo per esempio

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = \frac{\partial g_2}{\partial u}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + \frac{\partial g_2}{\partial v}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x}(a)$$



### Esempio

Siano  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Chiamiamo le variabili di  $f$   $(\rho, \theta)$  e di  $g$  diciamo  $(x, y)$ . Definiamo  $f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . Sia  $h = g \circ f$  quindi  $h(\rho, \theta) = g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . Calcoliamo

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial g}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial g}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\frac{\partial g}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \sin \theta + \frac{\partial g}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \cos \theta$$



### Esercizio

Studiare la continuità e differenziabilità nell'origine di

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{1/4} \ln(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

al variare di  $\alpha$ . Il dominio è tutto  $\mathbb{R}^2$ . Cominciamo studiando il limite nell'origine. In coordinate polari

$$\begin{aligned} F(\rho, \theta) &= \frac{\rho^{1/4} |\cos \theta|^{1/4} \ln(1 + \rho^2)}{\rho^{2\alpha}} \leq \frac{\rho^{1/4} \ln(1 + \rho^2)}{\rho^{2\alpha}} \\ &= \rho^{\frac{1}{4}-2\alpha} \ln(1 + \rho^2) \leq \rho^{\frac{1}{4}-2\alpha+2} \end{aligned}$$

Quindi sicuramente tende a zero per  $\alpha < 9/8$ , dove  $f$  è continua. Per dimostrare che il bound è sharp supponiamo  $\alpha \geq 9/8$  e consideriamo il cammino  $x = 0$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= \frac{|x|^{1/4} \ln(1 + x^2)}{(x^2)^\alpha} \\ &= \frac{|x|^{1/4} \ln(1 + x^2)}{|x|^{2\alpha}} \sim |x|^{\frac{1}{4}+2-2\alpha} \end{aligned}$$

Da notare il modo necessario. Tale valore non tende mai a zero. Supponiamo  $\alpha < 9/8$  e studiamo la differenziabilità. Non conviene usare il teorema del differenziale totale quindi calcoliamo le derivate parziali. Chiaramente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Mentre

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{1/4} \ln(1 + x^2)}{x|x|^{2\alpha}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\frac{1}{4}+1-2\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\frac{5}{4}-2\alpha} \end{aligned}$$

che tende a zero per  $\alpha < \frac{5}{8}$ , altrimenti il limite non esiste. Quindi se  $\alpha \geq \frac{5}{8}$  la derivata parziale in 0 non esiste. Sia  $\alpha < 5/8$ , dove abbiamo il gradiente. Calcoliamo quindi questo limite.

$$\begin{aligned} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{|x|^{1/4} \ln(1 + h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)^{\alpha+1/2}} \end{aligned}$$

che tende a zero se e solo se  $\alpha + \frac{1}{2} < 9/8$  come detto prima, quindi  $\alpha < 5/8$ .



### Esercizio

Studiare se la seguente funzione è differenziabile nell'origine

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

### Teorema Teorema di Lagrange

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  open and  $[a, b] \subseteq \Omega$ . Let  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differentiable in  $\Omega$ . Then,  $\exists \alpha \in (a, b)$  such that

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\alpha)(b - a)$$



### Proof

Costruiamo una funzione che parametrizza il segmento  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$  e quindi

$$\varphi(t) = a + t(b - a)$$

che è differenziabile. Consideriamo la funzione  $F = f \circ \varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $F$  è continua in  $[0, 1]$  ed è differenziabile in  $(0, 1)$ . Ci ricollegiamo quindi al teorema di Lagrange in una variabile.

1.  $F(1) - F(0) = F'(\theta)(1 - 0)$ ;
2.  $F(1) = f(\varphi(1)) = f(b)$ ;
3.  $F(0) = f(a)$ ;
4.  $F'(t) = (f \circ \varphi)'(t) = Jf(\varphi(t))J\varphi(t) = \nabla f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ;
5.  $F'(\theta) = \nabla f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) = \nabla f(\varphi(\theta))(b - a)$ , basta porre  $a = \varphi(\theta)$ .

È falso per le funzioni a valori vettoriali.



### Teorema Teorema dell'incremento finito

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenziabile in  $\Omega$ . Sia  $[x, y] \subseteq \Omega$ . Allora

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{0 < t < 1} \|df(x + t(y - x))\|$$



### Proof Teorema dell'incremento finito

Consideriamo  $n = 1$ . Il teorema dice che data  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua su  $[a, b]$  e differenziabile su  $(a, b)$ . Se  $\|g'(x)\| \leq \alpha$  per tutte le  $x$  in  $(a, b)$ , allora

$$\|g(b) - g(a)\| \leq \alpha(b - a)$$

Poniamo  $v = g(b) - g(a)$  e definiamo la funzione ausiliaria  $\varphi(x) = g(x) \cdot v$  che ha forma  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\varphi$  è continua su  $[a, b]$  e differenziabile su  $(a, b)$ . Per il teorema di Lagrange  $\exists \theta \in (a, b)$  tale che  $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\theta)(b - a)$ . Quindi

$$g(b) \cdot v - g(a) \cdot v = g'(\theta) \cdot v(b - a) \leq \|g'(\theta)\| \cdot \|v\| \cdot (b - a)$$

per Cauchy-Schwarz. Usiamo il fatto che  $v = g(b) - g(a)$ . Sostituendo otteniamo

$$\|g(b) - g(a)\|^2 \leq \|g'(\theta)\| \cdot \|g(b) - g(a)\|(b - a)$$

Se  $g(b) = g(a)$  la disuguaglianza è automaticamente verificata. Supponiamo  $g(b) \neq g(a)$ , dividendo per  $\|g(b) - g(a)\|$  ottiene la tesi. Consideriamo ora il caso  $n > 1$ . Consideriamo la funzione ausiliaria  $\Psi(t) = f(x + t(y - x))$  che ha forma  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua in  $[0, 1]$  e differenziabile in  $(0, 1)$ . Per ciò che abbiamo appena mostrato sappiamo che  $\|\Psi(1) - \Psi(0)\| \leq \alpha(1 - 0)$  for

$$\alpha = \sup_{0 < t < 1} \|\Psi'(t)\|$$

Calcoliamo

$$\Psi'(t) = df(x + t(y - x))(y - x)$$

quindi otteniamo

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|df(x + t(y - x))(y - x)\| \leq \|y - x\| \leq \|y - x\| \sup_{0 < t < 1} \|df(x + t(y - x))\|$$



### Corollario

Let  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto connesso,  $f$  differenziabile in  $\Omega$ . Allora  $f$  è costante in  $\Omega$  se e solo se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$$

in  $\Omega$  per tutte le  $i, j$ .



### Proof

( $\Rightarrow$ ) Ovvio

( $\Leftarrow$ ) Sia  $x_0 \in \Omega$  e poniamo  $E_{x_0} = \{x \in \Omega \mid f(x) = f(x_0)\}$ . Vogliamo mostrare che  $E_{x_0} = \Omega$ . Basta mostrare che  $E_{x_0} \neq \emptyset$  in quanto  $x_0 \in E_{x_0}$  e che  $E_{x_0}$  è aperto e chiuso in  $\mathbb{R}^m$ . Mostriamo che  $E_{x_0}$  è aperto. Sia  $y \in E_{x_0}$ . Sicuramente  $\exists r > 0$  tale che  $B_r(y) \subseteq \Omega$ . Sia  $x \in B_r(y)$ .  $B_r(y)$  è convessa e quindi  $[x, y] \subseteq B_r(y)$ . Per il teorema dell'incremento finito

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{0 < t < 1} \|df(x + t(y - x))\| = 0$$

perché  $df = 0$ . Quindi  $f(x) = f(y) = f(x_0)$  e  $x \in E_{x_0}$ , cioè  $y$  è interno e quindi  $E_{x_0}$  è aperto.

### 3.3 Criteri di lipschitzianità



Sappiamo che per le funzioni di una variabile la derivata limitata è un criterio di lipschitzianità. Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenziabile.

#### Proposition

Sia  $f \in \text{Lip}_\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Allora

$$\|df(x)\| \leq \alpha$$

per tutte le  $x$  in  $\Omega$ .



#### Proof

Dobbiamo stimare la norma operatoriale del differenziabile. Basta mostrare che

$$\|df(x)v\| \leq \alpha \|v\|$$

per tutti i  $v$ . Basta farlo per ogni versore  $\|v\| = 1$ . Il differenziale è dato dalla derivata direzionale

$$\begin{aligned} \|df(x)v\| &= \|D_v f(x)\| = \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} \|f(x+tv) - f(x)\| \leq \alpha \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} \|tv\| = \alpha \|v\| \end{aligned}$$

che esiste per ipotesi. Siccome la norma è continua possiamo portarla dentro al limite



Aggiungendo un'ipotesi vale anche il viceversa in quanto dobbiamo usare il teorema dell'incremento finito. Dobbiamo richiedere che tutti i segmenti siano in  $\Omega$ , quindi ci serve  $\Omega$  convesso.

#### Proposition

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  e sia  $C \subseteq \Omega$  convesso. Supponiamo che  $\exists \alpha > 0$  tale che

$$\|df(x)\| \leq \alpha, \quad \forall x \in C$$

Allora,  $f \in \text{Lip}_\alpha(C)$ .



#### Proof

Abbiamo

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{0 < t < 1} \|df(x + t(y-x))\|$$

Abbiamo una cosa simile alla lipschitzianità ma non è una costante di Lipschitz in quanto dipende da  $x$  e  $y$ . Però per ipotesi

$$\sup_{0 < t < 1} \|df(x + t(y-x))\| \leq \alpha$$

quindi è lipschitziana



### Esempio

Sia  $f(t) = (\cos t, \sin t, \arctan t)$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^3$ . Verifichiamo se è lipschitziana e le migliori costanti. Nel dominio consideriamo la norma classica mentre nel codominio consideriamo le norme 1, 2,  $\infty$ . Calcoliamo la matrice

$$Jf(t) = f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare la norma  $\|Jf(t)\|$ . Con la norma due abbiamo

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2}$$

Il massimo è chiaramente  $\sqrt{2}$  che è la miglior costante di Lipschitz. Con la norma 1 abbiamo

$$\|f(t)\|_1 = |\sin t| + |\cos t| + \frac{1}{1+t^2}$$

Il valore del sup è difficile da trovare, possiamo stimarla ad essere minore di 3. Inoltre,  $\|f'(0)\|_1 = 2$  quindi possiamo ridurre il bound. Con la norma infinito abbiamo

$$\|f(t)\|_\infty = \max\{|\sin t|, |\cos t|, \frac{1}{1+t^2}\}$$

Ci serve il supremum su  $t \in \mathbb{R}$  del massimo di queste 3 funzioni. Sicuramente è minore o uguale di 1 in quanto le 3 funzioni lo sono. In  $t = 0$  otteniamo precisamente 1. Quindi il supremum è precisamente 1. È di Lipschitz (sempre) ma le costanti dipendono dalla norma, e non è mai una contrazione.

## 4 Derivate di ordini successive



Prendiamo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e consideriamo  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Fissiamo un versore  $v$  e prendiamo  $a \in \Omega$ . Supponiamo che la derivata direzionale  $D_v f$  esista in un intorno  $B_r(a)$ . Allora  $D_v f$  è una funzione definita in un aperto che contiene  $a$ . Quindi, possiamo farne a sua volta la derivata direzionale. Fissiamo un altro versore  $w \in \mathbb{R}^m$  e costruiamo la derivata direzionale nella direzione di  $w$  nel punto  $a$  se esiste.

$$D_w(D_v f)(a) \triangleq D_{w,v}^2 f(a)$$

In particolare, se come direzioni  $w$  e  $v$  scegliamo le direzioni degli assi cartesiani, queste derivate direzionali si chiamano derivate parziali seconde. Essa viene denotata come

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) \triangleq f_{x_j x_i}(a)$$

Se  $i \neq j$  si parla di derivate parziali secondo miste. Se  $i = j$  si usa la notazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$$

Possiamo quindi costruire  $n^2$  derivate parziali, con cui costruiamo una matrice quadrata.



### Definizione Matrice Hessiana

Quindi, se in  $a$  esistono tutte le derivate parziali seconde di  $f$  possiamo definire la matrice Hessiana.

$$Hf(a) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$



### Esempio

Sia  $f(x, y, z) = 3x^2y + xz^3$ . Allora

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6y & 6x & 3z^2 \\ 6y & 0 & 0 \\ 3z^2 & 0 & 6xz \end{pmatrix}$$





### Esempio

Sia  $f(x, y) = x^2 \sqrt[3]{y}$ . Abbiamo problemi di differenziabilità nell'asse  $x$ . Ma per  $y \neq 0$  vale

$$\nabla f = \left( 2x \sqrt[3]{y}, \frac{1}{3} \frac{x^2}{\sqrt[3]{y}} \right)$$

Fuori dall'asse  $x$  la funzione è differenziabile per il teorema del differenziale totale. Consideriamo un punto generico in  $(x_0, 0)$  dove  $f$  è identicamente nulla. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$$

L'altra invece dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x_0^2}{y^{2/3}} \\ &= \begin{cases} \infty & x_0 = 0 \\ 0 & x_0 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi se  $x_0 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

perché  $f(0, y) = 0$ .  $f$  è differenziabile nell'origine (ma non possiamo mostrare con il teorema del differenziale totale). Dobbiamo calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

che si risolve in coordinate polari. Non possiamo calcolare  $f_{xy}(0)$  perché dovrei calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x}$$

che non esiste. Invece  $f_{yx}(0)$  abbiamo

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = 0$$



Quindi l'esistenza di una derivata parziale mista non implica l'esistenza di quella con gli ordini scambiati.



### Esempio

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Abbiamo che  $f$  è continua in  $0, 0$  in quanto in coordinate polari

$$\left| \frac{\rho \cos \theta \rho^2 \sin^3 \theta}{\rho^2} \right| \leq \rho^2 \rightarrow 0$$

Calcoliamo il gradiente di  $f$  fuori dall'origine (ci serve per calcolare le derivate secondarie). Per  $(x, y) \neq (0, 0)$  abbiamo

$$f_x(x, y) = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$f_y(x, y) = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$f$  è sicuramente differenziabile fuori dall'origine. Inoltre  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$  perché  $f$  è costante negli assi. Per il teorema del differenziale totale  $f$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^2$ . Calcoliamo

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x} = 0$$

perché  $f_y(x, 0) = 0$ . Invece,

$$\begin{aligned} f_{yx}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^5/y^4 - 0}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$



Quindi anche se ambo le derivate miste esistono non coincidono necessariamente.

### Teorema Teorema di Schwarz

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aperto,  $a \in \Omega$  e  $v, w$  due versori in  $\mathbb{R}^m$ . Supponiamo che  $B_r(a)$  dove  $D_{v,w}^2 f$  e  $D_{w,v}^2 f$  esistono e siano continue in  $a$ . Allora  $D_{v,w}^2 f(a) = D_{w,v}^2 f(a)$ .



### Corollario

Se le derivate parziali esistono e sono continue in  $\Omega$ , allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

ovvero  $Hf(x)$  è simmetrica.

### Definizione Classe $\mathcal{C}^2$

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , allora  $f \in \mathcal{C}^2$  se tutte le derivate parziali prime e seconde di  $f$  esistono e sono continue in  $\Omega$ .



Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Possiamo definire le derivate superiori analogamente. Se  $f$  è differenziabile in  $\Omega$  è definito il differenziale  $df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dato da  $df(x)h = Jf(x)h$ . Fissato  $x$ , al variare di  $h$  ho un'applicazione lineare

$$df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^m)$$

che manda  $x \rightarrow df(x)$ . Questa non è in generale lineare in  $x$ .



### Definizione

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile due volte in  $a \in \Omega$  se  $f$  è differenziabile in  $\Omega$  e  $df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  è differenziabile in  $a$ .

### Proposition

1.  $f$  è differenziabile due volte in  $a$  se e solo se  $\partial f / \partial x_i$  è differenziabile in  $a$  per tutti gli  $i$ .
2. se  $f$  è differenziabile due volte in  $a$ , allora esistono tutte le seconde derivate parziali e posso scambiare l'ordine di derivazione.
3. se  $f$  è differenziabile due volte in  $a$ , allora
  - (a)  $D_v f$  è differenziabile in  $a$  per ogni  $v$ ;
  - (b)  $D_{v,w}^2 f(a) = D_{w,v}^2 f(a)$ ;
  - (c)

$$D_{v,w}^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i w_j$$

4. Se in un intorno di  $a$  esistono e sono continue tutte le derivate parziali, esistono tutte le derivate parziali seconde e sono continue in  $a$ , allora  $f$  è due volte differenziabile in  $a$ .
5. se  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  allora  $f$  è due volte differenziabile in  $\Omega$ .



### Definizione

Se  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è due volte differenziabile in  $a$ , allora  $d^2 f(a)$  indica il differenziale del differenziale di  $f$  nel punto  $a$ .

Quindi

$$d^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Questo significa che  $d^2 f(a)h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Cioè è lineare sia in  $h$  che in  $k$ , quindi bilineare  $k \rightarrow (d^2 f(a)h)k$ . Siccome è bilineare possiamo vederlo come  $d^2 f(a): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dato da  $d^2 f(a)(h, k) = (d^2 f(a)h)k$ . Possiamo dire che

$$d^2 f(a)(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j = h^t H f(a) k = (H f(a) k) h$$

dove  $H f(a)$  è un tensore. In particolare, se  $f$  è una funzione a valori reali

$$df(a)h = \nabla f(a)h, \quad d^2 f(a)(h, k) = h^t H f(a) k$$

è una forma bilineare (forma = valori reali). Quando  $h = k$  scriviamo una sola variabile. In tal caso

ottengo una forma quadratica che si scrive

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

Succede che per  $h \rightarrow 0$

$$\frac{d^2 f(a)(h)}{\|h\|^2}$$

è limitato.



### Esempio

Data una forma quadratica  $ax^2 + bxy + cy^2$  e consideriamo

$$\frac{ax^2 + bxy + xy^2}{ax^2 + bxy + xy^2}$$

che in coordinate polari diventa

$$a \cos^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta$$

che chiaramente è limitata da  $|a| + |b| + |c|$ .

## 4.1 Derivate $k$ -esime



Se per  $\{v^{(i)}\}$  vettori in  $\mathbb{R}^m$  esiste in  $B_\delta(a)$  le derivate direzionali

$$D_{v^{(k-1)}, \dots, v^{(1)}}^{k-1} f(x)$$

e se è derivabile in  $a$  lungo la direzione  $v^{(k)}$ , allora diremo che esiste la derivata  $k$ -esima. Se esistono continue tutte le derivate  $k$  esime possiamo permutare gli indici.

### Esempio

Con  $k = 3$  sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Possiamo scrivere  $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx}, f_{yyx}, f_{yxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$  che sono  $2^3$  derivate. Se vale il teorema di Schwarz molte di queste coincidono.



### Definizione

Diciamo che  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  se ogni derivata parziale di ordine  $\leq k$  esiste ed è continua in  $\Omega$ .

Chiaramente sono annidati.

## 4.2 Differenziabili $k$ -esimi

**Definizione** Differenziabile  $k$ -esimi

$$d^k f(a): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è un'applicazione lineare in ciascuno dei vettori di ingresso definita da

$$d^k f(a)(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_i}^{(i)}$$

Per Schwarz molte di queste derivate sono uguali. Ci interessa il caso in cui  $h^{(i)} = h^{(j)} = h$ . In questo caso abbiamo

$$d^k f(a)(h) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \geq 0 \\ \sum j_i = k}} \binom{k}{j_1 \cdots j_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_n^{j_n} \cdots \partial x_1^{j_1}}(a) h_1^{j_1} \cdots h_n^{j_n}$$

dove abbiamo usato il coefficiente multinomiale.

**Esempio**

Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k = 4$ . Allora

$$d^4 f(a)(h) = f_{xxxx} h_1^4 + f_{yyyy} h_2^4 + f_{zzzz} h_3^4 + h_1^3 h_2 (f_{xxxxy} + f_{xxxyx} + f_{xyxxx} + f_{yxxx}) + \cdots$$

Il termine nelle parentesi è pari a  $4f_{xxxxy}$ . E il valore

$$\binom{4}{3, 1, 0} = \frac{4!}{3!1!0!} = 4$$



$d^4 f(a)(h)$  è un polinomio omogeneo di grado  $k$  in  $h_1, \dots, h_n$ . Inoltre vale che

$$\frac{d^4 f(a)(h)}{\|h\|^k}$$

è limitato per  $h \rightarrow 0$ .



### Teorema Teorema di Taylor

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, siano  $a, x \in \Omega$  tale che  $[a, x] \subseteq \Omega$ . Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ . Allora,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{d^i f(a)(x-a)}{i!} \right) + R_k(x-a)$$

è il polinomio di Taylor di ordine  $k-1$  di  $f$  in  $a$ . Il resto è dato in forma di Peano come

$$R_k(x-a) = \frac{d^k f(a)(x-a)}{k!} + o(\|x-a\|^k)$$

per  $x \rightarrow a$ , oppure in forma di Lagrange (se al posto di fermarmi a  $k-1$  ci fossimo fermati a  $k$ )

$$R_k(x-a) = \frac{d^k f(y)(x-a)}{k!}$$

con  $y \in (a, x)$ . Inoltre, il polinomio di Taylor è l'unico polinomio di grado al più  $k$  tale che  $o(\|x-a\|^k)$  per  $x \rightarrow a$ .



Viene detto ordine del polinomio di Taylor e non grado in quanto il polinomio ha grado al più quello dato ma potrebbe essere minore.



### Esempio

Sia

$$f(x, y, z) = \ln(1 + xz^2 - y^3 e^{x+1}) + \sin \sqrt{1 - x^2 + xy - z \ln(1 + xy)}$$

Trovare lo sviluppo di MacLaurin al quarto ordine. Poniamo  $t = xz^2 - y^3 e^{x+1}$ , e osserviamo che  $t \rightarrow 0$  se  $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ . Possiamo dire

$$\begin{aligned} t &= xz^2 - y^3 e \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \right] \\ &= xz^2 - ey^3 - exy^3 + o(\|(x, y, z)\|^4) \end{aligned}$$

Sviluppiamo ora il logaritmo

$$\ln(1+t) = xz^2 - ey^3 - exy^3 + o(\|(x, y, z)\|^4)$$

in quanto tutti gli altri termini sono trascurabili. Esercizio: fare anche il seno e mettere assieme.

## 5 Ottimizzazione



Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un sottoinsieme qualunque e sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Definizione

Sia  $a \in \Omega$  è un punto di massimo assoluto per  $f$  in  $\Omega$  se  $f(x) \leq f(a) \forall x \in \Omega$ . Invece  $a$  è punto di massimo relativo (o locale) per  $f$  se esiste  $U$  intorno di  $a$  tale che  $a$  è punto di massimo assoluto per  $f$  in  $\Omega \cap U$ . Analogamente forte per il minore stretto.

Se  $\Omega$  è un aperto, il problema di cercare massimi e minimi di  $f$  in  $\Omega$  si chiama ottimizzazione libera.

### Teorema Teorema di Fermat

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $a \in \Omega$  un punto estremante per  $f$ . Se  $f$  è differenziabile in  $a$ , allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

Cioè  $\nabla f = 0$ .

### Proof Teorema di Fermat

Supponiamo che  $a$  sia estremante per  $f$ . Allora  $a$  è estremante anche a tutti le restrizioni di rette che passano per  $a$ . In particolare prendiamo  $\gamma_i(t) = a + te_i$  paralleli agli assi cartesiani. Sia  $\varphi_i$  la restrizione di  $f$  a tali rette. Quindi  $\varphi_i = f \circ \gamma_i$ . Le funzioni  $\varphi_i$  hanno un punto estremante in  $t = 0$ . Inoltre,  $\varphi_i$  sono differenziabili in quanto composizione di funzioni differenziabili. Allora, per il teorema di Fermat in una variabile vale  $\varphi_i'(0) = 0$ . Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi_i'(0) &= (f \circ \gamma_i)'(0) = \nabla f(\gamma_i(0)) \circ \gamma_i'(0) \\ &= \nabla f(a) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\end{aligned}$$

Tale condizione è necessaria ma non sufficiente.



### Esempio

Siano  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $g(x, y) = x^2 - y^2$ . Per entrambe  $\nabla f(0, 0) = \nabla g(0, 0) = 0$ . Tuttavia, l'origine è estremante per  $f$  ma non per  $g$ . Mentre non lo è per  $g$ , che ha un punto di sella.

### Definizione Punti stazionari

Se  $f$  è differenziabile in  $a \in \Omega$  e se  $\nabla f(a) = 0$ , diremo che  $a$  è punto stazionario o punto critico per  $f$ .

### Definizione Punto di sella

Se  $f$  è differenziabile in  $a \in \Omega$  e  $a$  è un punto stazionario che non è estremante, allora è un *punto di sella*.

Vogliamo avere strumenti per trovare questi punti. Non ha senso studiare il segno della derivata in quanto ce ne sono molteplici. Possiamo considerare i differenziali secondi, che sono forme bilineari, e studiare il segno della forma quadratica associata.



Per le funzioni di una variabile possiamo considerare l'espansione di Taylor e studiare l'incremento (dove il primo termine si annulla siccome siamo in un intorno di un punto stazionario)

$$f(x) - f(a) = (x - a)^2 \left[ \frac{1}{2} f''(a) + o(1) \right]$$

da cui seguono i casi del segno. Vogliamo fare un procedimento analogo. Sia  $f$  differenziabile 2 volte Allora per  $h \rightarrow 0$

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^t H f(a) h + o(\|h\|^2)$$

Se  $a$  è punto critico, l'incremento di  $f$  ha la forma

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} h^t H f(a) h + o(\|h\|^2) = \|h\|^2 \left[ \frac{h^t H f(a) h}{\|h\|^2} + o(1) \right]$$

Dobbiamo quindi studiare il segno della funzione

$$F(h) = \frac{h^t H f(a) h}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|^2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

$F$  è il quoziente di due polinomi omogenei di grado 2. Quindi  $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è omogenea di grado zero  $F(\lambda h) = F(h)$ . Ciò significa che  $F$  è costante su tutti i punti di ciascuna retta passante per l'origine (a parte nell'origine). Vogliamo dimostrare che  $F$  ammette massimi e minimi assoluti. Notiamo che se restringiamo il dominio ad un disco (non-degenere), i valori che questa funzione assume rimangono gli stessi, non importa quanto piccolo il cerchio. Ci restringiamo quindi a

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$$

e allora  $F$  rispetto a  $S$  cioè  $S \rightarrow \mathbb{R}$  ammette massimo e minimo assoluti, in quanto  $F$  è continua e  $S$  è compatto, quindi per Weierstrass. Allora esistono  $m, M \in \mathbb{R}$  tale che  $m \leq F(h) \leq M$  per tutte le  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $m, M$  sono

$$m \leq \frac{h^t H f(a) h}{\|h\|^2} \leq M$$

per tutte le  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e quindi

$$m\|h\|^2 \leq h^t H f(a) h \leq M\|h\|^2$$

per tutte le  $h \in \mathbb{R}^n$ . Possiamo quindi dedurre che se  $m > 0$  allora  $a$  è un punto di minimo relativo, se  $M < 0$  allora  $a$  è un punto di massimo relativo, se invece  $m < 0 \wedge M > 0$  allora  $h^t H f(a) h$  cambia segno e quindi  $a$  è un punto di sella. Se  $mM = 0$ , c'è almeno una retta lungo la quale il termine di secondo grado si annulla. In questo caso  $o(1)$  non è più trascurabile e non possiamo concludere niente.





### Esempio

Sia

$$f(x, y) = (x - y)^2 + \varphi$$

dove  $\varphi$  è un polinomio composto da monomi di grado maggiore o uguale a tre. Chiaramente  $f$  è differenziabile in 0 e  $f(0, 0) = 0$  quindi è punto critico. Calcoliamo

$$f_x = 2(x - y) + \varphi_x$$

$$f_y = -2(x - y) + \varphi_y$$

$$f_{xx} = 2 + \varphi_{xx}$$

$$f_{xy} = -2 + \varphi_{xy}$$

$$f_{yy} = 2 + \varphi_{yy}$$

Molte di queste derivate nell'origine scompaiono in dato il grado del polinomio. Quindi

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Scegliendo  $h = (1, 1)$  abbiamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Scegliendo  $\varphi(x, y) = x^{16}$ . Con questa scelta  $f$  ha un minimo in  $0, 0$ . Se però scelgo  $\varphi(x, y) = x^{15}$  questa ha un punto di sella nell'origine.



Studiamo  $h^t Hf(a) h$ . In generale, se  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una forma quadratica, allora  $Q(v) = v^t A v$  dove  $A$  è una matrice  $n \times n$  simmetrica. Per il teorema spettrale reale, se  $A$  è simmetrica, allora  $A$  ha  $n$  autovalori reali

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

ed esiste una rotazione  $R$  tale che  $A = R^t D R$  dove  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Quindi,

$$\begin{aligned} Q(v) &= v^t A v = v^t R^t D R v \\ &= \tilde{v}^t D \tilde{v} \\ &= \sum \lambda_i \tilde{v}_i^2 \end{aligned}$$

ponendo  $\tilde{v} = R v$ . Quindi

$$\lambda_1 \|\tilde{v}\|^2 \leq Q(v) \leq \lambda_n \|\tilde{v}\|^2$$

Siccome  $R$  è una rotazione, quindi un'isometria, preserva la norma, quindi  $\|\tilde{v}\| = \|R v\| = \|v\|$ . Allora

$$\lambda_1 \|v\|^2 \leq Q(v) \leq \lambda_n \|v\|^2$$

Possiamo quindi dedurre che se  $\lambda_1 > 0$ ,  $Q$  è definita positiva. Se  $\lambda_m < 0$ ,  $Q$  è definita negativa. Se  $\lambda_1 \lambda_n < 0$ , allora  $Q$  è indefinita, se  $\lambda_1 \lambda_n = 0$ , allora  $Q$  è semidefinita.

Questa era la dimostrazione del seguente teorema.



### Teorema

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aperto e  $a \in \Omega$  punto critico per  $f$  ed  $f$  differenziabile due volte in  $a$ . Allora,

1.  $Hf(a)$  è definita positiva, allora  $a$  è punto di minimo relativo forte;
2.  $Hf(a)$  è definita negativa, allora  $a$  è punto di massimo relativo forte;
3.  $Hf(a)$  è indefinita, allora  $a$  è un punto di sella;
4. se  $a$  è punto di massimo relativo, allora  $Hf(a)$  è semidefinita negativa;
5. se  $a$  è punto di minimo relativo, allora  $Hf(a)$  è semidefinita positiva.



Se la matrice Hessiana è semidefinita, non possiamo fare nulla.

Per  $n = 2$  possiamo determinare il segno di  $Hf(a)$  senza trovare gli autovalori

$$\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$$

Se  $f_{xx} = f_{yy} = 0$  allora la forma quadratica è indefinita. Supponiamo quindi che  $f_{xx} \neq 0$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} &= f_{xx} \left( h^2 + 2hk \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right) + k^2 f_{yy} \\ &= f_{xx} \left( h^2 + 2hk \frac{f_{xy}}{f_{xx}} + k^2 \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}^2} \right) - k^2 \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}^2} + k^2 f_{yy} \\ &= f_{xx} \left( h + k \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) \\ &= f_{xx} \left( h + k \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} \det Hf(a) \end{aligned}$$

il segno di quest'ultimo è completamente determinato dal segno del determinante e di  $f_{xx}$ .

### Teorema

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  due volte differenziabile,  $a$  punto critico. Allora:

1. se  $\det Hf(a) < 0$  allora  $a$  è punto di sella;
2. se  $\det Hf(a) > 0$  e  $f_{xx} > 0$  allora  $a$  è punto di minimo;
3. se  $\det Hf(a) > 0$  e  $f_{xx} < 0$  allora  $a$  è punto di massimo;

Se è nullo il criterio è inutile.

Notiamo che se il determinante è positivo allora  $f_{xx}$  e  $f_{yy}$  hanno lo stesso segno. Infatti  $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  e quindi  $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2 \geq 0$ .

Per  $n = 2$  il segno di  $Hf(a)$  può essere determinato mediante il criterio dei minori principali di nord-ovest.



### Esempio

Sia  $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 4x + 7$ . Chiaramente  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Abbiamo  $f_x = 2x - 4$  e  $f_y = -4y$ ,  $f_{xx} = 2$  e  $f_{yy} = -4$ . Le prime due derivate si annullano per

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$$

quindi in  $(2, 0)$ . Abbiamo

$$Hf(a)(2, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

quindi  $(2, 0)$  è punto di sella.

### Esempio

Sia  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$ . Chiaramente  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Abbiamo  $f_x = 4x^3 + 4y - 4x$  e  $f_y = 4y^3 + 4x - 4y$ .

$$\begin{cases} x^3 + y - x = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^3 - 2y = 0 \end{cases}$$

quindi i punti sono  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Abbiamo  $f_{xx} = 12x^2 - 4$  e  $f_{xy} = 4$  e  $f_{yy} = 12y^2 - 4$ . Dato

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Per i punti con le radici

$$Hf(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è non-negativo, e pure  $f_{xx}$ , quindi questi punti sono di minimo. Nell'origine abbiamo

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo. In questo caso studiamo l'incremento  $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = x^4 + y^2 - 2(x - y)^2$ . Consideriamo  $f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2$  che ha un massimo per  $x = 0$ . Consideriamo  $f(x, x) = 2x^4$  che ha pure un minimo in  $x = 0$ . Quindi  $(0, 0)$  è un punto di sella.



### Esempio

Sia  $f(x, y) = x^2y - y^2$ . Chiaramente  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Abbiamo  $f_x = 2xy$  e  $f_y = x^2 - 2y$ . I punti critici sono solo l'origine. Abbiamo  $f_{xx} = 2y$  e  $f_{xy} = 2x$  e  $f_{yy} = -2$ . Ma matrice è data da

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$$

e nell'origine

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo. Quindi il criterio è inutile. Consideriamo la restrizione di  $f$  alle rette passanti per l'origine.  $f(x, mx) = mx^3 - m^2x^2$  che ha un punto di massimo per  $x = 0$  per tutte le  $m$ . Notiamo  $f(0, y) = -y^2$  che ha un punto di max in  $y = 0$ . Ma non è legittimo concludere che  $f$  ha un massimo nell'origine. Studiamo il segno dell'incremento  $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = y(x^2 - y)$ . Questa funzione è non-negativa se e solo se  $y > 0$  e  $x^2 > y$  oppure se  $y < 0$  e  $x^2 < y$ . Ma la seconda non è possibile. Quindi  $f$  ha un punto di sella nell'origine. Infatti ogni intorno dell'origine contiene punti in cui  $f(x, y) > 0$  e punti in cui  $f(x, y) < 0$ . Per esempio  $f(x, x^2/2)$  ha un minimo per  $x = 0$ .

La ricerca degli estremanti può essere fatta anche in coordinate polari. Se  $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  i punti critici corrispondono a

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

per  $\rho > 0$ . Dobbiamo tuttavia trattare  $\rho = 0$  cioè l'origine separatamente.



### Esempio

Sia

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x} - 4 \ln(1 + y)$$

quindi

$$f_x = 1 - \frac{y^2}{x^2} \quad f_y = \frac{2y + 2y^2 - 4x}{x(1 + y)}$$

Si annullano entrambi in  $(0, 0), (1, 1), (3, -3)$  ma l'unico punto accettabile è  $(1, 1)$ . Abbiamo  $f_{xx} = 2y^2/x^2$ ,  $f_{xy} = -2y/x^2$  e  $f_{yy} = 2/x + 4/(1 + y)^2$ . Da questo

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{x^3} & -\frac{2y}{x^2} \\ -\frac{2y}{x^2} & \frac{2}{x} + \frac{4}{(1+y)^2} \end{pmatrix}$$

e nel punto

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è maggiore di zero e  $f_{xx} > 0$ . Quindi  $(1, 1)$  è un punto di minimo

## 6 Teorema della funzione implicita



Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e consideriamo  $S = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ . Vogliamo studiare per quali condizioni l'equazione definisce implicitamente una funzione  $y(x)$  oppure  $x(y)$ .

### Definizione

La funzione  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervallo reale, è definita implicitamente dall'equazione  $F(x, y) = 0$  se:

1.  $(x, \varphi(x)) \in \Omega$  per tutte le  $x$ ;
  2.  $F(x, \varphi(x)) = 0$  per tutte le  $x$
- o analogamente per la  $y$ .



Per esempio  $F(x, y) = y - x^2$ . La soluzione è una parabola. In generale vogliamo che in ogni intorno di ogni punto possiamo esprimere i punti come una funzione di  $x$  o di  $y$ . Nel caso della parabola ciò è possibile ma solo per una variabile nel punto  $x = 0$ . Nel caso della parabola, dato un intervallo  $y$  ho infinite funzioni possibili: cioè per ogni  $x$  posso associare  $\sqrt{y}$  oppure  $-\sqrt{y}$ . Se richiedo che le funzioni siano continue, ottengo solamente due funzioni possibili: la parte di sopra e la parte di sotto. Adottando un approccio locale, sotto opportune supposizioni, l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente localmente un'unica funzione di variabile  $y$  oppure  $x$ .



### Esempio

Sia  $F(x, y) = x^2 - y^2$ . Gli zeri sono chiaramente le bisettrici. Scegliendo un punto della forma  $(5, 5)$  va tutto bene: esiste un intorno nel quale l'equazione  $F = 0$  definisce implicitamente un'unica funzione  $y = x$  oppure  $x = y$ . Abbiamo tuttavia un problema nell'origine. L'insieme delle soluzioni non rappresenta il grafico di nessuna funzione. Ce ne possono essere infinite.

### Esempio

L'equazione  $F(x, y) = x^2 + y^2$  si annulla solo nell'origine. Quindi questa non definisce implicitamente nessuna funzione.

### Esempio

Sia  $F(x, y) = x^3 - y^2$ . I suoi zeri sono dati da una curva con cuspide nell'origine.



Nella circonferenza unitaria posso esprimere una funzione locale di ambo le variabili tranne nelle 4 intersezioni con gli assi. In due posso esplicitarla solo per la  $x$  mentre negli altri 2 solamente per la  $y$ . Consideriamo l'espansione di Taylor. Sia  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tale che  $F(x_0, y_0) = 0$ . Sviluppiamo  $F$  al primo ordine:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

Nel caso lineare, quindi quello dove possiamo trascurare l'ordine piccolo, abbiamo l'uguaglianza con zero quando

$$0 = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Possiamo isolare  $y$  se  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  e in questo caso

$$y = y_0 - \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

Mi aspetto che valga anche il caso non-lineare aggiungendo  $o(\|x - x_0\|)$ .  
 Se consideriamo quindi il gradiente di  $F = x^2 + y^2 + 1$  che si annulla nella circonferenza, abbiamo  $\nabla F = (2x, 2y)$ . Notiamo quindi che ciò si annulla quando  $x = y = 0$  e  $(0, 0) \notin F^{-1}(0)$ . In tutti gli altri punti possiamo quindi esprimere una funzione localmente. Per esempio nel punto  $(1, 0)$  non posso esplicitare una funzione locale per  $y$  ma posso esplicitarla per  $x$ .



#### **Teorema** Teorema della funzione implicita o teorema del Dini

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $\Omega$ ,  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tale che  $F(x_0, y_0) = 0$ . Supponiamo che esistano in  $\Omega$  la derivata  $F_y$  e che sia continua nel punto  $(x_0, y_0)$ . Se  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  allora esistono  $\delta, \sigma > 0$  tale che:

1.  $F_y \neq 0$  in  $\overline{B}_\delta(x_0) \times \overline{B}_\sigma(y_0)$ ;
2. esiste un'unica  $\varphi: \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \overline{B}_\sigma(y_0)$  definita implicitamente dall'equazione  $F(x, y) = 0$ .  
 Inoltre essa è continua in  $\overline{B}_\delta(x_0)$ .



Il teorema ci sta dando una dipendenza funzionale, cioè per ogni  $x$  nella bolla esiste una unica  $y$  nella seconda bolla tale che  $F(x, y) = 0$ . Inoltre la funzione locale eredita tutte le regolarità di  $F$ .



### Proof

Sappiamo che  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  (supponiamo senza perdita di generalità che sia non-negativo) e  $F_y$  è continua in  $(x_0, y_0)$ . Per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno in cui questa derivata si mantiene diversa da zero. Esistono quindi  $\sigma, \tilde{\delta} > 0$  tali che

$$\overline{B}_{\tilde{\delta}}(x_0) \times \overline{B}_{\sigma}(y_0) \subseteq \Omega$$

e inoltre

$$F_y(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{B}_{\tilde{\delta}} \times \overline{B}_{\sigma}(y_0) \subseteq$$

che è un rettangolino. Consideriamo i valori che la funzione assume nella retta verticale  $x = x_0$ . Quindi consideriamo la restrizione  $F(x_0, y)$ . Sappiamo che questa restrizione si annulla nel punto dato, sopra è non-negativa e sotto è non-positiva, in quanto è monotona crescente. Cioè siccome  $F_y > 0$  abbiamo che  $F(x_0, y_0 - \sigma) < 0$  e  $F(x_0, y_0 + \sigma) > 0$ . Siccome  $F$  è continua su tutto  $\Omega$ , esiste un intorno quindi  $\delta > 0$  tale che

$$F(x, y_0 - \sigma) < 0, \quad \forall x \in \overline{B}_{\delta}(x_0)$$

e

$$F(x, y_0 + \sigma) > 0, \quad \forall x \in \overline{B}_{\delta}(x_0)$$

Consideriamo  $x \in \overline{B}_{\delta}(x_0)$  e consideriamo la restrizione  $F(x, -)$ , ossia le rette verticali.  $F(x, y_0 - \sigma) < 0$  e  $F(x, y_0 + \sigma) > 0$  e inoltre  $F_y > 0$  in  $\overline{B}_{\delta}(x_0) \times \overline{B}_{\sigma}(y_0)$ . Siccome  $F$  è continua e  $F(x, -)$  è monotona crescente, esiste un singolo punto  $y$  in cui si annulla  $F(x, y) = 0$ . Allora per ogni  $x \in \overline{B}_{\delta}(x_0)$  esiste un'unica  $y \in \overline{B}_{\sigma}(y_0)$  tale che  $F(x, y) = 0$ . Abbiamo quindi definito la funzione implicita. Ci resta da mostrare la continuità. Se  $\{x_n\} \rightarrow x$  con  $x$  punto della bolla, vogliamo che  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ . Consideriamo una generica sottosuccessione  $\varphi(x_{n_k})$ . Da questa sotto-succesione vogliamo estrarre una sottosuccessione che converge a  $\varphi(x)$ . Notiamo che  $\varphi(x_{n_k}) \in \overline{B}_{\sigma}(y_0)$  che è compatto. Siccome è compatto posso estrarre una sottosuccessione convergente.  $\exists n_{k_j}$  tale che  $\varphi(x_{n_{k_j}}) \rightarrow y$ . Sappiamo solo che  $y \in \overline{B}_{\sigma}(y_0)$ . Vogliamo quindi mostrare che  $y = \varphi(x)$ . Sappiamo che per tutti i  $j$

$$0 = F(x_{n_{k_j}}, \varphi(x_{n_{k_j}}))$$

e se prendiamo  $j \rightarrow \infty$

$$F(x_{n_{k_j}}, \varphi(x_{n_{k_j}})) \rightarrow F(x, y) = 0$$

per continuità di  $F$  questo deve essere 0. Per l'unicità della funzione implicita, deve essere  $y = \varphi(x)$ .



Per  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , la dimostrazione è la medesima in quanto la monotonia è usata solamente sull'ultima variabile e la funzione ha valore reali.

Se invece la funzione ha valori in  $\mathbb{R}^m$  non possiamo più usare la monotonia. Questa versione generalizzata non si chiama più teorema del Dini perché usa un altro argomento.



### Esempio

Sia  $F(x, y) = x^2y + e^{x+y}$ . Vogliamo descrivere globalmente il luogo degli zeri. Chiaramente  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Le derivate sono  $F_x = 2xy + e^{x+y}$  e  $F_y = x^2 + e^{x+y}$ . Sicuramente la seconda derivata non si annulla mai. Possiamo anche dire che  $F_y > 0$ . Fissato  $x$ , nelle direzioni delle rette verticali la funzione è monotona crescente. Per controllare se c'è uno zero studiamo i due limiti

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y, x), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y, x)$$

Se il primo limite è non-positivo, mentre il secondo è non-negativo allora esiste un  $y = \varphi(x)$  tale che  $F(x, \varphi(x)) = 0$ . Calcoliamo quindi

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y, x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -\infty & x \neq 0 \end{cases}$$

mentre l'altro

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y, x) = +\infty$$

sempre. Se  $x \neq 0$  sicuramente esiste uno zero in mezzo. Se  $x = 0$ , siccome la funzione cresce e quindi non c'è nessuno zero. Questo ci indica che il dominio della funzione implicita è  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Studiamo ora il segno di  $\varphi$ . Calcoliamo  $F(x, 0)$ . Se  $F(x, 0) > 0$  allora  $\varphi(x) < 0$ , se  $F(x, 0) < 0$  allora  $\varphi(x) > 0$  per la monotonia. E ovviamente se  $F(x, 0) = 0$  allora  $\varphi = 0$ . E siccome  $F(x, 0) = e^x > 0$ , quindi la nostra funzione implicita è sempre negativa. Calcoliamo i 4 limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$$

Se questo esiste allora appartiene a  $[-\infty, 0]$ . Facciamo un taglio con delle rette orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, -c)$$

per  $c > 0$ . Quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, -c) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-c} - x^2c = -\infty$$

In particolare,  $F(x, -c) < 0$  per  $x$  in un intorno di  $-\infty$ . Quindi,  $-c < \varphi(x) < 0$ . Ma  $c$  è arbitrario, quindi il limite è  $0^-$ . Calcoliamo ora il limite in zero. Consideriamo  $c > 0$  e calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x, -c) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x-c} - x^2c = e^{-c} > 0$$

Quindi il limite è  $-\infty$  da entrambi i lati. Quindi c'è un asintoto verticale. Facciamo ora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, -c) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-c} - x^2c = +\infty$$

quindi per ogni  $c > 0$ . Per la derivata abbiamo  $F(x, \varphi(x)) = 0$ , e quindi

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x)$$

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

Dal punto di vista computazionale conviene considerare direttamente l'espressione  $x^2y(x) + e^{x+y(x)}$  e derivare rispetto ad  $x$

$$0 = 2xy + x^2y' + e^{x+y}(1 + y') = y'(x^2 + e^{x+y}) + 2xy + e^{x+y}$$

$$y'(x) = -\frac{2xy + e^{x+y}}{x^2 + e^{x+y}}$$

Possiamo usare il fatto che  $x^2y + e^{x+y} = 0$  identicamente sul grafico di  $\varphi$ . Quindi,  $e^{x+y} = -x^2y$  e allora possiamo scrivere

$$y'(x) = -\frac{2xy - x^2y}{x^2 + e^{x+y}} = -xy \frac{2 - x}{x^2 + e^{x+y}}$$

il cui unico punto critico è  $x = 2$ , mentre l'altro non è da considerare in quanto la funzione non





La condizione che il limite di  $F(x, mx + q) = 0$  non è sufficiente affinché  $mx + q$  sia asintoto obliquo di  $\varphi(x)$ .



### Esercizio

Sia  $F(x, y) = -xe^y + 2y - 1$ . Dimostrare che nell'intorno di  $(0, \frac{1}{2})$ , le soluzioni di  $F(x, y) = 0$  definiscono implicitamente una funzione  $y = y(x)$ . Trovare successivamente lo sviluppo di MacLaurin al secondo ordine di  $y = y(x)$  in  $x = 0$ . Notiamo che il problema è ben post in quanto  $F(0, \frac{1}{2}) = 0$ . La condizione che garantisce l'esistenza di questa funzione è che  $F_y \neq 0$ . Abbiamo  $F_y = -xe^y + 2$  e  $F_y(0, \frac{1}{2}) = 2 \neq 0$ . Quindi per il teorema della funzione implicita esiste un'unica funzione  $y = y(x)$  tale che  $F(x, y(x)) \equiv 0$ . Per lo sviluppo di MacLaurin abbiamo sicuramente  $y(0) = \frac{1}{2}$ . Calcoliamo la derivata

$$\frac{d}{dx} [F(x, y(x))] = -e^x - xe^y y' + 2y' = 0$$

In particolare per  $x = 0$  abbiamo  $-e^{y(0)} - 0 + 2y'(0) = 0$  quindi  $y'(0) = e^{\frac{1}{2}}/2$ . Per trovare il termine successivo deriviamo nuovamente

$$\frac{d^2}{dx^2} [F(x, y(x))] = -e^y y' - e^y y' - x(\dots) + 2y'' = 0$$

Da cui otteniamo  $0 = -2e^{y(0)}y'(0) + 2y''(0)$  e ricaviamo quindi  $y''(0) = \frac{e}{2}$ . Quindi

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{4}ex^2 + o(x^2)$$



### Esercizio

Dimostrare che l'equazione  $x^2e^z + y^2 + z = 0$  definisce implicitamente una funzione  $z = z(x, y)$  nell'intorno di  $(0, 0, 0)$ . Determina successivamente la natura di  $(x, y) = (0, 0)$  per la funzione  $z$ . Sia  $F(x, y, z) = x^2e^z + y^2 + z$ . Osserviamo che  $F(0, 0, 0) = 0$  quindi il problema è ben posto. Per verificare che la funzione esplicita esista dobbiamo trovare la derivata  $F_z = x^2e^z + 1 > 0$ . In particolare,  $F_z(0, 0, 0) \neq 0$  e quindi possiamo applicare il teorema della funzione implicita. Calcoliamo le derivate di  $z = z(x, y)$ . Abbiamo  $F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$ . Le derivate sono

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} [F(x, y, z(x, y))] &= 2xe^z + x^2e^z z_x + z_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} [F(x, y, z(x, y))] &= x^2e^z z_y + 2y + z_y = 0\end{aligned}$$

Abbiamo  $z_x(0, 0) = 0$  e  $z_y(0, 0) = 0$ , quindi  $(0, 0)$  è un punto critico per  $z$ . Dobbiamo calcolare le seconde derivate parziali, che sono tre:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} [F(x, y, z(x, y))] &= 2e^z + x(\dots) + 2x(\dots) + z_{xx} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [F(x, y, z(x, y))] &= x^2(\dots) + 2 + z_{yy} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [F(x, y, z(x, y))] &= 2x(\dots) + z_{xy} = 0\end{aligned}$$

Nel punto  $(0, 0)$  troviamo  $z_{xx} = -2$ ,  $z_{yy}(0, 0) = -2$  e  $z_{xy}(0, 0) = 0$ . La matrice Hessiana nell'origine è quindi data da

$$H_z(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Quindi  $(0, 0)$  è un punto di massimo relativo. Esercizio: mostrare che questo punto è un punto di massimo assoluto, quindi stabilire il dominio della funzione implicita e mostrare che  $z < 0$  tranne nell'origine. Calcolare

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} z(x, y)$$

bisogna quindi calcolare il limite di  $F(x, y, -c)$ , che possiamo calcolare in coordinate polari.



Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y \cos(xz) - x^2 - 1 = 0 \\ y \sin(xz) - x = 0 \end{cases}$$

vogliamo studiare l'insieme delle soluzioni del sistema. Al massimo possiamo aspettarci di trovare espressioni di due variabili in funzione della terza. Abbiamo quindi una funzione

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \cos(xz) - x^2 - 1 \\ y \sin(xz) - x \end{pmatrix}$$

e vogliamo studiare  $F^{-1}(\{(0, 0)\})$ . Sviluppiamo quindi la funzione al primo ordine

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + dF(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

Il primo termine è nullo. Inoltre  $dF(x_0, y_0)$  è rappresentabile da  $Jf(x_0, y_0)$  che possiamo scrivere come  $[F_x \mid F_y]$  a blocchi dove  $F_x$  ha  $n$  colonne e  $F_y$  ne ha  $m$  (e ovviamente  $m$  righe). Abbiamo quindi

$$F(x, y) = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

Ci interessa il valore  $F(x, y) = 0$  (trascurando l'o-piccolo). Se  $F_y$  è invertibile possiamo isolarla

$$F(x, y) = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$y = y_0 - F_y(x_0, y_0)^{-1} \circ F_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$

quando  $F_y$  è invertibile. Questo chiaramente è il caso lineare. Ci aspettiamo che il medesimo avvenga in un contesto non linear ma solo localmente. Nell'esempio abbiamo

$$Jf = \begin{pmatrix} -yz \sin(xz) - 2x & \cos(xz) & -xy \sin(xz) \\ yz \cos(xz) - 1 & \sin(xz) & xy \cos(xz) \end{pmatrix}$$

Voglio stabilire se  $F(x, y, z) = 0$  permetti di esplicitare due variabili rispetto alla terza nell'intorno di  $(0, 1, 0)$ . Abbiamo  $F(0, 1, 0) = (0, 0)$ . La matrice in questo punto ha rango 2

$$Jf(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'unica sottomatrice che realizza il rango è la prima matrice  $2 \times 2$  di sinistra, quindi  $F = (0, 0)$  definisce implicitamente  $x = x(z)$  e  $y = y(z)$ .



#### **Teorema Teorema della funzione implicita**

Sia  $\Omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  aperto,  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ,  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sia  $F$  continua in  $\Omega$ . Allora esiste  $F_y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  in  $\Omega$ , continua in  $(x_0, y_0)$ . Sia  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F_y(x_0, y_0) \in \text{GL}(\mathbb{R}^m)$ . Allora  $\exists r, R > 0$  tale che  $\forall x \in \overline{B_r}(x_0)$ , esiste un'unica  $y \in \overline{B_R}(y_0)$ ,  $y = \varphi(x)$  tale che  $F(x, y) = 0$ . Inoltre,  $\varphi$  è continua in  $\overline{B_r}(x_0)$ .



è un disaccordo locale in quanto dobbiamo trovare i raggi sufficientemente piccoli.

### Proof

Introduciamo la funzione  $T(x, y) = y - F_y(x_0, y_0)^{-1}F(x, y)$ . Quindi  $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La definizione ha senso in quanto  $F_y(x_0, y_0)$  è invertibile. Consideriamo  $x$  come parametro. Ci chiediamo se  $T$  ha un punto fisso rispetto ad  $y$ . Supponiamo che  $y$  sia un punto fisso di  $T$ . Quindi  $T(x, y) = y$ , che è equivalente a dire che  $F_y(x_0, y_0)^{-1}F(x, y) = 0$ , quindi per forza  $F(x, y) = 0$  in quanto possiamo moltiplicare per l'inverso che esiste. Se dimostro che  $T$  ammette un unico punto fisso rispetto ad  $y$ , allora abbiamo che  $\forall x$ , esiste un unico  $y$  tale che  $F(x, y) = 0$ . Vogliamo dimostrare che  $T$  porta uno spazio metrico in sé e che è una contrazione (di fattore  $\delta < 1$  con  $\delta$  uniforme rispetto ad  $x$ ). Vogliamo che  $T(x, -): \overline{B_R}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  sia una contrazione per tutte le  $x \in \overline{B_r}(x_0)$ .

1. Mostriamo che è una contrazione. Visto che  $\overline{B_R}(y_0)$  è convesso, basta stimare  $T_y$ . Siccome  $T(x, y) = y - F_y(x_0, y_0)^{-1}F(x, y)$ . Allora  $T_y = I - F_y(x_0, y_0)^{-1}F_y(x, y)$ . Questo perché il differenziale del primo termine diventa la matrice identica, mentre per il secondo la matrice che moltiplica esce dalla derivata per linearità.

$$\begin{aligned} \|T_y(x, y)\| &= \|I - F_y(x_0, y_0)^{-1}F_y(x, y)\| \\ &= \|F_y(x_0, y_0)^{-1}(F_y(x_0, y_0) - F_y(x, y))\| \\ &\leq \|F_y(x_0, y_0)^{-1}\| \cdot \|F_y(x_0, y_0) - F_y(x, y)\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  perché  $F_y$  è continua in  $(x_0, y_0)$ . Quindi esistono  $r, R > 0$  tale che per tutte le  $x \in \overline{B_r}(x_0)$  e per tutte le  $y \in \overline{B_R}(y_0)$

$$\|T_y(x, y)\| \leq \delta < 1$$

e  $\delta$  arbitrario. In particolare

$$\sup_{\substack{x \in \overline{B_r}(x_0) \\ y \in \overline{B_R}(y_0)}} \|T_y(x, y)\| \leq \delta$$

e  $\delta$  è uniforme rispetto ad  $x$ .

2. Mostriamo che esistono  $r, R > 0$  tali che per tutte le  $x \in \overline{B_r}(x_0)$  e per tutte le  $y \in \overline{B_R}(y_0)$   $T(x, -): \overline{B_R}(y_0) \rightarrow \overline{B_R}(y_0)$ . Vogliamo mostrare quindi che  $\|T(x, y) - y_0\| \leq R$ . Scegliamo  $R$  come al punto precedente. Voglio mostrare che esiste  $r > 0$  tale che la condizione è soddisfatta. Sia  $y \in \overline{B_R}(y_0)$ . Spezziamo in due pezzi

$$\|T(x, y) - y_0\| \leq \|T(x, y) - T(x, y_0)\| + \|T(x, y_0) - y_0\|$$

Il primo termine lo possiamo stimare mediante il teorema dell'incremento finito in  $y$ ,

$$\begin{aligned} \|T(x, y) - T(x, y_0)\| &\leq \|y - y_0\| \cdot \sup_{0 < t < 1} \|T_y(x, y_0 + t(y - y_0))\| \\ &\leq R \cdot \delta \end{aligned}$$

vogliamo che il secondo sia minore o uguale di  $(1 - \delta)R$ . Non possiamo più modificare  $R, \delta$  ma solo  $r$

$$\begin{aligned} \|T(x, y_0) - y_0\| &= \|F_y(x_0, y_0)^{-1}F(x, y_0)\| \\ &\leq \|F_y(x_0, y_0)^{-1}\| \cdot \|F(x, y_0)\| \\ &= \|F_y(x_0, y_0)^{-1}\| \cdot \|F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

che tende a zero per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  perché  $F$  è continua. Abbiamo quindi i raggi tali che

$$\|F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\| \leq \frac{(1 - \delta)R}{\|F_y(x_0, y_0)^{-1}\|}$$

Possiamo quindi applicare il teorema delle contrazioni (variante con parametro), inoltre il punto fisso dipende con continuità da  $x$  e quindi la funzione implicita è continua.



Notiamo che ho usato le bolle chiuse in quanto mi serve uno spazio metrico completo. Vediamo se riusciamo a garantire l'esistenza anche su bolle aperte. In realtà mi è servita solamente la chiusura della bolla nella  $y$ ,  $\exists r_0, r_0 > 0$  tali che  $\forall x \in B_{r_0}(x_0)$ ,  $\exists! y \in B_{R_0}(y_0)$  tale che  $F(x, y) = 0$ . Si può scegliere  $R_0 = R$  a patto di rimpicciolire  $r_0$ .  $\exists r_0 > 0$  tale che  $\varphi(B_{r_0}(x_0)) \subseteq B_R(y_0)$  per la continuità di  $\varphi$  in  $x_0$ , e quindi abbiamo mostrato l'esistenza e l'unicità della funzione implicita anche sostituendo le bolle chiuse con bolle aperte.

Supponiamo di avere  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . È possibile che esistano due mappe distinte  $\varphi, \psi$  definite implicitamente da  $F = 0$  ed entrambe passanti per  $(x_0, y_0)$ ? Può succedere per esempio per  $F = x^2 - y^2$ , ma in questo caso il gradiente di  $F$  in  $(0, 0)$  è il vettore nullo, quindi non posso applicare il teorema della funzione implicita. Ma, anche in  $(1, 1)$  posso definire più di una funzione implicita, come

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = \begin{cases} -x & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

il problema è che non sono entrambe continue.



### Corollario

Con le ipotesi del teorema della funzione implicita, siano  $\varphi, \psi$  due funzioni definite implicitamente da  $F(x, y) = 0$  in un intorno di  $x_0$  tali che  $\varphi(x_0) = y_0 = \psi(x_0)$ . Allora se  $\varphi, \psi$  sono continue,  $\varphi \equiv \psi$  in  $U(x)$ .



### Proof

Sfruttiamo la continuità delle due mappe implicite. Prendiamo  $r, R$  come nel teorema della funzione implicita. Troviamo  $r_0 < r$  tale che

$$\varphi(\overline{B_{r_0}(x_0)}) \cup \psi(\overline{B_{r_0}(x_0)}) \subseteq \overline{B_R(y_0)}$$

Possiamo trovare un tale raggio in quanto possiamo trovarlo per ciascuna delle mappe, in quanto continue, e poi prendere il minimo. Per il teorema della funzione implicita sono unici gli zeri della mappa  $F(x, y)$  relativi alla stessa  $x$  contenuti in  $\overline{B_r(x_0)} \times \overline{B_R(y_0)}$ . Quindi  $F(x, \varphi(x)) = 0 = F(x, \psi(x))$  ma  $(x, \varphi(x))$  e  $(x, \psi(x))$  sono in  $\overline{B_r(x_0)} \times \overline{B_R(y_0)}$  quindi vale l'unicità per  $x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}$ .



Studiamo ora la differenziabilità della funzione implicita. Per esempio per  $F = y - |x|$ , valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita, ma la funzione  $y = |x|$  non è differenziabile. Dobbiamo aggiungere delle ipotesi anche alla  $x$ . Differenziando la condizione otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= F(x, \varphi(x)) \\ 0 &= F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x)) \circ d\varphi(x) \end{aligned}$$

Siccome  $F_y \in GL(\mathbb{R}^n)$  ed è continua in  $(x_0, y_0)$ , e  $GL(\mathbb{R}^n)$  è aperto,  $F_y(x, \varphi(x)) \in GL(\mathbb{R}^n)$  in un intorno di  $x_0$ . Deduciamo che deve essere

$$d\varphi(x) = -F_y(x, \varphi(x))^{-1} \circ F_x(x, \varphi(x))$$



### Teorema

Sia  $(x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  aperto, dove le variabili le chiamiamo  $x$  per le prime variabile e  $y$  per quelle successive, sia  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$ . Sia  $\varphi: U(x) \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $\varphi(x_0) = y_0$ ,  $F(x, \varphi(x)) = 0$  per tutte le  $x \in U(x)$ . Sia  $F$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$ ,  $F_y(x_0, y_0) \in \text{GL}(\mathbb{R}^m)$ . Allora,  $\varphi$  è differenziabile in  $x_0$  e

$$d\varphi(x) = -F_y(x, \varphi(x))^{-1} \circ F_x(x, \varphi(x))$$



Da questa formula segue che  $\varphi$  ha la stessa regolarità di  $F$ .

### Proof

Dobbiamo mostrare che

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) + F_y(x, \varphi(x))^{-1} F_x(x, \varphi(x))h = o(\|h\|)$$

per  $h \rightarrow 0$ . Possiamo sostituire  $\varphi(x_0) = y_0$ . Poniamo

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x_0, h) &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) + F_y(x, \varphi(x))^{-1} F_x(x, \varphi(x))h \\ &= F_y(x_0, y_0)^{-1} [F_y(x_0, y_0)(\varphi(x_0 + h) - y_0) + F_x(x_0, y_0)h]\end{aligned}$$

ma la parentesi quadra è pari al differenziabile applicato a qualcosa

$$F_y(x_0, y_0)(\varphi(x_0 + h) - y_0) + F_x(x_0, y_0)h = dF(x_0, y_0)(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)$$

Ma noi sappiamo che  $F$  è differenziabile in  $(X_0, y_0)$ , quindi  $F(x_0 + v, y_0 + w) - F(x_0, y_0) - dF(x_0, y_0)(v, w) = o(\|v - w\|)$ . Adesso, nella parentesi quadra sommo  $F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - F(x_0, y_0) = 0 - 0$ . Quindi otteniamo

$$\begin{aligned}&F_y(x_0, y_0)(\varphi(x_0 + h) - y_0) + F_x(x_0, y_0)h \\ &= F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - F(x_0, y_0) - dF(x_0, y_0)(h, \varphi(x_0 + h) - y_0) = o(\|(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)\|)\end{aligned}$$

Siccome  $F_y(x_0, y_0)^{-1}$  è un operatore lineare fissato,

$$\|\Delta\varphi(x_0, h)\| = o(\|(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)\|)$$

per  $((h, \varphi(x_0 + h) - y_0)) \rightarrow (0, 0)$ . Ma per la continuità di  $\varphi$ , se  $h \rightarrow 0$ , allora  $(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)$  tende a  $(0, 0)$ , quindi

$$\|\Delta\varphi(x_0, h)\| = o(\|(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)\|)$$

per  $h \rightarrow 0$ . Abbiamo dimostrato che  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che

$$\|h\| \leq \delta \implies \|\Delta\varphi(x_0, h)\| \leq \varepsilon \|(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)\|$$

Consideriamo il vettore  $(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)$ . Aggiungiamo e sottraiamo  $F_y(x_0, y_0)^{-1} F_x(x_0, y_0)h$  alla seconda componente. Otteniamo

$$\begin{aligned}(h, \varphi(x_0 + h) - y_0) &= (h, \Delta\varphi(x_0, h) - F_y(x_0, y_0)^{-1} F_x(x_0, y_0)h) \\ &= (h, \Delta\varphi(x_0, h) - A_0 h) = (h, -A_0 h) + (0, \Delta\varphi(x_0, h))\end{aligned}$$

Possiamo usare la norma di ciò sulla disuguaglianza triangolare.

$$\begin{aligned}\|(h, \varphi(x_0 + h) - y_0)\| &\leq \|(h, -A_0 h)\| + \|(0, \Delta\varphi(x_0, h))\| \\ &\leq C\|h\| + \|\Delta\varphi(x_0, h)\|\end{aligned}$$

Quindi deduciamo che

$$\begin{aligned}\|\Delta\varphi(x_0, h)\| &\leq C\varepsilon\|h\| + \varepsilon\|\Delta\varphi(x_0, h)\| \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon}\|h\|\end{aligned}$$

quindi abbiamo dimostrato che per  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\|h\| < \delta$  vale

$$\|\Delta\varphi(x_0, h)\| \leq \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon}\|h\|$$

quindi  $\Delta\varphi(x_0, h) = o(\|h\|)$  per  $h \rightarrow 0$ .



### Esercizio

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F_1 = (y+3)s - \arctan(s+t) + 2x = 0 \\ F_2 = \sin(s+t) + 3y - x(t+3) = 0 \end{cases}$$

Mostriamo verificare se nell'intorno  $(x, y, s, t) = (0, 0, 0, 0)$  definisce implicitamente una funzione. Quindi  $F = (F_1, F_2): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Calcoliamo  $JF(x, y, s, t)$

$$JF(x, y, s, t) = \begin{pmatrix} 2 & s & y+3 - \frac{1}{1+(s+t)^2} & -\frac{1}{1+(s+t)^2} \\ -(t+3) & 3 & \cos(s+t) & \cos(s+t) - x \end{pmatrix}$$

Nell'origine abbiamo

$$JF(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi scegliere arbitrariamente due variabili qualsiasi rispetto alle altre, ad esempio  $s = s(x, y)$  e  $t = t(x, y)$ . Calcoliamo il differenziale in  $(0, 0)$

$$d\varphi(x_0) = -F_y(x_0, y_0)^{-1} \circ F_x(x_0, y_0)$$

Siccome  $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ , allora  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$  in un intorno di  $(0, 0)$ .

$$J_{(x,y)}F(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad J_{(s,t)}F(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E l'inverso è dato da

$$J_{(s,t)}F(0, 0, 0, 0)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi il differenziabile

$$d\varphi(x_0)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 \\ 1/3 & -2 \end{pmatrix}$$

## 6.1 Teorema della funzione inversa

Posso determinare che una funzione reale è invertibile se è strettamente monotona. Il medesimo concetto non funziona tuttavia in dimensioni superiori. Chiaramente un operatore lineare da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  per essere invertibile serve  $m = n$ . Esistono anche funzioni invertibili da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . In generale data una funzione non lineare da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  qual'è la condizione per la (locale) invertibilità.

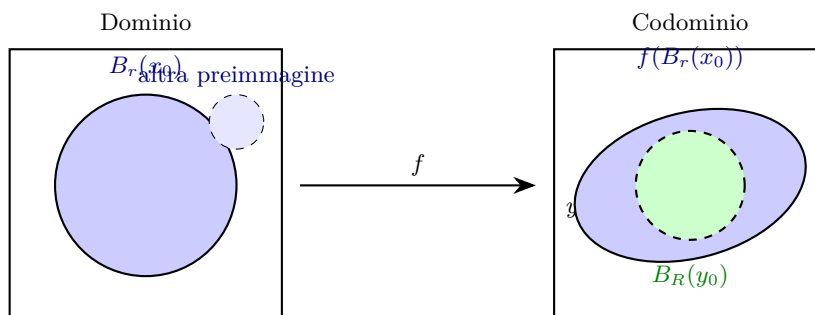
Per essere invertibile imponiamo che le dimensioni del dominio e del codominio siano le medesime:

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  aperto e sia  $x_0 \in \Omega$ , e  $y_0 = f(x_0)$ . Costruiamo una funzione ausiliaria  $F(x, y) = f(x) - y$ . È banale esplicitare le soluzioni di  $F = 0$  rispetto alla  $y$ , ma noi vorremmo farlo rispetto alla  $x$ , per invertire la funzione localmente. Per il teorema della funzione implicita è possibile scrivere  $x = x(y)$  localmente se  $F_x(x_0, y_0) \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ . Ciò deve essere  $df(x_0) \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ . Allora esistono  $r, R > 0$  tali che  $\forall y \in B_R(y_0)$  esiste un'unica  $x$  tale che  $x = g(y) \in B_r(x_0)$  tale che  $f(x) = y$ . Inoltre abbiamo un'espressione per  $dg$ : sappiamo che  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \implies g \in \mathcal{C}^1(B_R(y_0))$  e

$$\begin{aligned} dg(y) &= -df(x_0)^{-1} \circ (-I) \\ &= -F_x(g(y), y)^{-1} \circ F_y(g(y), y) \\ &= -df(x)^{-1} \circ (-I) \\ &= df(x)^{-1} = df(g(y))^{-1} \end{aligned}$$



Notiamo che  $f$  NON stabilisce una biiezione fra  $B_r(x_0)$  e  $B_R(y_0)$ . Dal teorema abbiamo che  $B_R(y_0) \subseteq f(B_r(x_0))$  solamente, quindi l'immagine della bolla del dominio può essere più grande. Inoltre, la preimmagine della bolla del codominio, non è necessariamente tutta contenuta nella prima, ci potrebbero essere una preimmagine fuori. Il teorema mi dice che  $f$  stabilisce una biiezione fra  $f^{-1}(B_R(y_0)) \cap B_r(x_0)$  e  $B_R(y_0)$ . Notiamo che questi insiemi sono entrambi aperti.



### Teorema Teorema della funzione inversa

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  aperto e sia  $x_0 \in \Omega$ , e  $y_0 = f(x_0)$ . Inoltre,  $df(x_0) \in GL(\mathbb{R}^n)$ . Allora, esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  e  $V$  intorno di  $y_0$  aperti tali che  $f: U \rightarrow V$  è un diffeomorfismo.

### Esempio Diffeomorfismo locale non implica diffeomorfismo globale

Sia  $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$  definita su  $\mathbb{R}^2$ . È un diffeomorfismo locale? Basta verificare che il differenziale sia invertibile.

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Il determinante è sempre positivo, quindi è sempre invertibile. Quindi,  $f$  ha un diffeomorfismo locale. Tuttavia, la funzione non è iniettiva, in quanto è per esempio periodica, quindi non è invertibile e non vi è diffeomorfismo globale. (Cosa che invece funziona con le funzioni reali di una variabile)

### Corollario

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $df(x) \in GL(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $x \in \Omega$ . Allora,  $f(\Omega)$  è aperto.

### Proof

Sia  $y_0 \in f(\Omega)$ . Vogliamo mostrare che  $y_0$  è intorno di  $f(\Omega)$ . Per definizione  $\exists x_0 \in \Omega$  tale che  $y_0 = f(x_0)$  e per ipotesi il differenziabile in quel punto è invertibile. Per il teorema della funzione inversa esistono quindi intorni  $U$  di  $x_0$  e  $V$  di  $y_0$  aperti tale che la funzione rispetta  $f: U \rightarrow V$  è un diffeomorfismo. In particolare,  $y_0 \in V = f(U) \subseteq f(\Omega)$ . Quindi sono tutti punti interni.

In particolare, se  $df(x) \in GL(\mathbb{R}^n)$  per tutte le  $x \in \Omega$ , allora  $f$  è una mappa aperta. Infatti a volte questo si chiama teorema della mappa aperta.

Come detto, in una funzione di una variabile l'invertibilità della derivata è sufficiente per l'invertibilità, mentre in molteplici variabili l'invertibilità del differenziale mi garantisce solo l'invertibilità locale. Possiamo aggiungere la condizione di iniettività per garantire l'invertibilità globale.

### Corollario

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $df(x) \in GL(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $x \in \Omega$  e  $f$  iniettiva in  $\Omega$ . Allora,  $f^{-1} \in C^1(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$  e  $f: \Omega \rightarrow f(\Omega)$  è un diffeomorfismo.

### Proof

L'iniettività garantisce l'esistenza di  $f^{-1}: f(\Omega) \rightarrow \Omega$  e  $f(\Omega)$  è aperto. Sia  $y_0 = f(x_0) \in f(\Omega)$ . Per il teorema della funzione inversa  $\exists r, R > 0$  tali che  $f: f^{-1}(B_R(y_0)) \cap B_r(x_0) \rightarrow B_r(y_0)$  è un diffeomorfismo. In particolare, l'inverso di questa funzione è differenziabile. Ma essendo  $f$  iniettiva, questa inversa locale deve coincidere con l'inversa globale, e quindi  $f^{-1}: f(\Omega) \rightarrow \Omega$  è differenziabile.

## 6.2 Trasformazioni di coordinate



Le trasformazioni di coordinate mediante mappe affini sono diffeomorfismi. Tuttavia, non tutte le trasformazioni, come per esempio le coordinate polari, sono affinità. Queste trasformazioni devono essere biunivoche. Per esempio le coordinate polari vanno ristrette a  $\theta \in (0, 2\pi]$  e  $\rho \neq 0$ . Per riacquistare la suriettività dobbiamo togliere l'origine dal codominio.

### Definizione Trasformazione di coordinate

Una trasformazione di coordinate di  $\mathbb{R}^n$  è un diffeomorfismo globale il cui dominio deve essere un insieme "grosso".

$f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  è differenziabile, ma l'inversa non è continua. Infatti il seguente limite non esiste (considerando  $\theta \in (-\pi, \pi]$ )

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} f^{-1}(x, y)$$

possiamo considerare i due cammini circolari dal sopra e dal sotto. Per rendere  $f$  un omeomorfismo, consideriamo  $f: (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ .



Inoltre abbiamo

$$J_f(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

che ha determinante  $\rho > 0$ . Per le coordinate cilindriche consideriamo

$$f: (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\}$$

la funzione è biiettiva in questo dominio e inoltre

$$J_f(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è il medesimo. Quindi è anch'essa un diffeomorfismo globale. Per le coordinate sferiche  $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, \theta)$  ho

$$f(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

con definizione

$$f: (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\}$$

Il Jacobiano è dato da

$$J_f(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è  $\rho^2 \sin \varphi > 0$ .

## 7 Estremi vincolati

Notiamo che in generale, siccome il gradiente punta nella direzione di massima crescita, dobbiamo studiare i punti in cui la direzione del gradiente della funzione è ortogonale alla retta tangente del vincolo (esempio con cerchio unitario e piano  $x + y$ ). Per trovare lo spazio tangente al vincolo usiamo il teorema della funzione implicita (perché magari non abbiamo la funzione direttamente).

### Esempio

Consideriamo come varietà  $M = \Phi^{-1}(0)$  dove  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $m < n$ . Ho  $m$  equazioni in  $n$  incognite  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ . Se tutto va bene, dato il sistema dei  $\Phi_i(x) = 0$ , possiamo isolare  $m$  incognite in funzione delle altre  $m - n$ . Sia  $k = m - n$  la dimensione di  $M$  (se tutto va bene) come varietà.

Sia  $x_0 \in M$ ,  $d\Phi(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $J_\Phi(x_0)$  è una matrice di tipo  $m \times n = (n - k) \times n$ . Possiamo applicare il teorema della funzione implicita se e solo se  $J_\Phi(x_0)$  è massi, o cioè  $\text{rank } J_\Phi(x_0) = n - k$ , ovvero se  $d\Phi(x_0)$  è suriettivo. In questo caso, a meno di permutare le variabili posso scrivere  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $x = (z, y)$  con  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$  e  $\Phi_y(x_0) \in \text{GL}(\mathbb{R}^{n-k})$ .  $M$  in un intorno di  $x_0$  può essere scritta nel modo seguente  $(z, y) \in M$  se e solo se  $y = \varphi(z)$  dove  $\varphi$  è la funzione implicita. Se  $\Phi$  è di classe  $\mathcal{C}^1$ , lo è pure  $\varphi$ , quindi possiamo sviluppare  $\varphi$  al primo ordine

$$y - y_0 = d\varphi(z_0)(z - z_0) + o(\|z - z_0\|)$$

Otengo lo spazio tangente trascurando l'ò-piccolo e traslando nell'origine

$$T_{x_0}M = \{(v, w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-n} \mid w = d\varphi(z_0)v\} = \{(v, d\varphi(z_0)v)\}$$

### Teorema

Sia  $\Phi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\Phi \in \mathcal{C}'(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$  tale che  $\Phi(x_0) = 0$ ,  $d\Phi(x_0)$  suriettivo. Sia  $M = \Phi^{-1}(0)$ . Allora,  $T_{x_0}M = \ker d\Phi(x_0)$ .

### Proof

Sappiamo che  $d\varphi(z_0) = -\Phi_y(x_0)^{-1} \circ \Phi_z(x_0)$ .  $w = d\varphi(z_0)v$  se e solo se  $\Phi_y(x_0)w = -\Phi_z(x_0)v$  se e solo se  $\Phi_z(x_0)v + \Phi_y(x_0)w = 0$  se e solo se  $d\Phi(x_0)(v, w) = 0$  se e solo se  $(v, w) \in \ker d\Phi(x_0)$ .

### Definizione

Se  $M = \Phi^{-1}(0)$ ,  $\Phi(x) = 0$  e  $d\Phi(x_0)$  è surgettiva, allora  $x_0$  è un punto regolare di  $M$ .

### Esempio

Sia  $M = S^1$ , quindi  $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ,  $M\Phi^{-1}(0)$ . Dobbiamo calcolare il kernel di  $d\Phi(x_0, y_0)$ .

$$d\Phi(x_0, y_0)(v, w) = \nabla\Phi(x_0, y_0)(v, w) = 0 \implies T(x_0, y_0)M = \nabla\Phi(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0)$$

Abbiamo che

$$\nabla\Phi(x_0, y_0) = (0, 0) \iff (x_0, y_0) = (0, 0)$$

ma  $(0, 0) \notin M$ , quindi  $S^1$  è regolare.

$$T_{(x,y,z)}S^1 = \{(v, w) \mid (x_0, y_0)(v, w) = 0\} = \{x_0v + y_0w = 0\} = \{(\lambda y_0 - \lambda x_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (y_0, x_0) \rangle$$

### Esempio

Sia  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M = \Phi^{-1}(0)$ .  $d\Phi(x_0)v = \nabla\Phi(x_0)v = 0$  se e solo se  $v \perp \nabla\Phi(x_0)$ .  $T_{x_0}M = \nabla\Phi(x_0)^\perp$ . Lo spazio tangente agli insiemi di livello di  $\Phi$  è lo spazio ortogonale a  $\nabla\Phi(x_0)$  (se è non

nullo, cioè se  $x$  è un punto regolare).

### Esempio

Sia  $\Phi(x, y, z) = xyz^2 + 1$ ,  $M = \Phi^{-1}(0)$ . Esistono punti  $(x, y, z)$  di  $M$  tale che  $(1, 1, 0) \in T_{(x, y, z)}M$  e  $(0, 1, 1) \in T_{(x, y, z)}M$ ?  $\nabla\Phi(x, y, z) = (yz^2, xz^2, 2xyz)$ . Se si annulla almeno una delle tre coordinate deve annullarsi  $\implies (x, y, z) \notin M$  perché  $\Phi(x, y, z) = 0$  e quindi  $M$  è regolare. Devo quindi imporre che  $\Phi(x, y, z) = 0$ , che  $\nabla\Phi(x, y, z)(1, 1, 0) = 0$  e che  $\nabla\Phi(x, y, z)(0, 1, 1) = 0$ .

$$\begin{cases} xyz^2 + 1 = 0 \\ yz^2 + xz^2 = 0 \\ xz^2 + 2xyz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xyz^2 + 1 = 0 \\ z^2(y + x) = 0 \\ xz(z + 2y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \\ -4y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

quindi  $P \equiv (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $Q \equiv (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ . Siccome  $\dim T \times M = 2$  implica  $T_pM = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle = T_aM$ . Consideriamo il caso generale  $\Phi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .  $M = \Phi^{-1}(0)$ . Ci aspettiamo che, se  $x_0$  è un punto regolare, che  $M$  sia  $k$ -dimensionale (per lo meno in un intorno di  $x_0$ )

$$M = \begin{cases} \Phi_1(x) = 0 \\ \Phi_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$$

vogliamo caratterizzare  $T_{x_0}M = \ker d\Phi(x_0)$ . Vale  $d\Phi(x_0)v = 0$  se e solo se  $J\Phi(x_0)v = 0$  se e solo se

$$\begin{pmatrix} \nabla\Phi_1(x_0) \cdot v \\ \vdots \\ \nabla\Phi_{n-k}(x_0) \cdot v \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} \nabla\Phi_1(x_0) \cdot v \\ \vdots \\ \nabla\Phi_{n-k}(x_0) \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

meaning that  $v \in T_{x_0}M$  if and only if  $v_1 \nabla\Phi_i(x_0) = 0$ . Cioè,  $T_{x_0}M^\perp = \langle \nabla\Phi_1(x_0), \dots, \nabla\Phi_{n-k}(x_0) \rangle$  ovvero  $T_{x_0}M = \langle \nabla\Phi_1(x_0), \dots, \nabla\Phi_{n-k}(x_0) \rangle^\perp$  e  $\nabla\Phi_1(x_0), \dots, \nabla\Phi_{n-k}(x_0)$  sono l.i. perché i triangoli delle righe di  $J_\Phi(x_0)$  e per ipotesi  $J_\Phi(x_0) = \text{rank } n - k$ .

### Esempio

Sia

$$\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 + 3z \\ xz + y^2 \end{pmatrix}$$

$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Posto  $M = \Phi^{-1}(0, 0)$ , trovare  $T_{(0,0,0)}M$ .

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 3 \\ z & 2y & x \end{pmatrix}, \quad J_\Phi(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank } J_\Phi(0, 0, 0) = 1$ , quindi non è massimo.  $\dim \ker d\Phi(0, 0, 0) = 2$ , ma  $k = 1$ . Il problema è che il punto non è regolare.

### Esempio

Sia  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $M = \Phi^{-1}(0)$ . Supponiamo che  $0 \in M$ , cioè che  $\Phi(0) = 0$  e che

$$J_\Phi(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare  $T_0M$ . Abbiamo  $\text{rank } d\Phi(0) = 2$  è massimo, e quindi  $0$  è un punto regolare di  $M$ .

$$(T_0M)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Sia  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ . Devo imporre l'ortogonalità alle righe della matrice  $J_\Phi(0)$

$$\begin{cases} -x + y + w = 0 \\ 2x + z - w = 0 \end{cases}$$

Risolviamo  $z, w$  in funzione di  $x, y$ .

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e

$$T_0M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \\ -x - y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

### Definizione

$M \subseteq \mathbb{R}^m$  è una sottovarietà  $k$ -dimensionale se  $\forall x_0 \in M$ , esiste  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto,  $x_0 \in V$  ed esiste  $\Phi \in C^1(V, \mathbb{R}^{m-k})$  tale che  $M \cap V = \Phi^{-1}(0)$  e  $d\Phi(x_0)$  sia suriettivo.

Dato  $M$  sottovarietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ , vorrei definire lo spazio tangente ad  $M$  in  $x_0$  come  $\ker d\Phi(x_0)$ , dove  $\Phi$  è una funzione definita in un intorno di  $x_0$  come nella definizione. Il problema è che lo stesso  $M$  può essere descritto da molte  $\Phi$  diverse.

### Esempio

Sia  $M = \{(x, y) \mid y = 0\}$ ,  $\Phi(x, y) = y$ .  $\Xi(x, y) = y(x^2 + 1)$ ,  $\Psi(x, y) = y(x^2 + y^2)$ .  $\nabla\Phi = (0, 1)$ , quindi  $(0, 0)$  è un punto regolare per questo  $\Phi$ .  $\nabla\Psi = (2xy, 3y^2)$ ,  $(0, 0)$  non è un punto regolare.

### Definizione

Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  una sottovarietà  $k$ -dimensionale se  $\forall x_0 \in M$  esiste un intorno di  $x_0$  e una funzione  $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  (di cui le variabili le chiamiamo  $x$  e  $y$ ) tale che  $(z, y) \in M$  se e solo se  $y = \varphi(z)$  (a mano di permutazioni delle variabili).

Le due definizioni sono equivalenti: sia  $\Phi$  tale che  $M = \Phi^{-1}(0)$  nell'intorno di  $x_0$  e  $d\Phi(x_0)$  sia suriettivo. Allora per il teorema della funzione implicita esiste la  $\varphi$  della seconda definizione. Viceversa, se  $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  definisce  $M$  localmente, basta scegliere  $\Phi(z, y) = y - \varphi(z)$  e la funzione  $\Phi$  soddisfa la definizione precedente di sottovarietà. Vogliamo dare una definizione dello spazio tangente che sia indipendente dalla scelta di  $\Phi$ . Consideriamo un cammino  $\gamma$  sulla sottovarietà  $M$ , cioè un'applicazione derivabile  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tale che  $\gamma(0) = x_0$ .  $\dot{\gamma}(0)$  è un vettore in  $\mathbb{R}^n$  ed è tangente al supporto di  $\gamma$  in  $x_0$ . Facendo variare il cammino otteniamo tutti e soli i vettori tangenti ad  $M$  in  $x_0$ , cioè

$$T_{x_0}M = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ cammino} \mid \gamma(0) = x_0\}$$

Vogliamo dimostrare che questa definizione di spazio tangente coincide con quelle vecchie, cioè con

$\ker d\Phi(x_0)$  dove  $\Phi^{-1}(0) = M \cap V$ . Poniamo

$$X = \{\dot{\gamma} \mid \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ cammino} \wedge \gamma(0) = x_0\}$$

Sia  $x \in X$ , cioè  $v = \dot{\gamma}(0)$  con  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  cammino tale che  $\gamma(0) = x_0$  e sia  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_0), \mathbb{R}^{n-k})$  tale che  $M \cap \mathcal{U}(x_0) = \Phi^{-1}(0)$  e  $d\Phi(x_0)$  sia suriettivo. Verifichiamo che  $v \in \ker d\Phi(x_0)$ . Consideriamo  $\Phi \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  è la funzione identicamente nulla perché per ipotesi  $\gamma$  è un cammino in  $M$ , quindi  $\gamma(t) \in M$  per tutte le  $t$ , e allora  $\Phi(\gamma(t)) = 0$ . Calcoliamo  $(\Phi \circ \gamma)'(0)$

$$0 = (\Phi \circ \gamma)'(0) = d\Phi(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = d\Phi(x_0)v \implies v \in \ker d\Phi(x_0)$$

Dobbiamo dimostrare l'inclusione opposta, cioè che se  $v \in \ker d\Phi(x_0)$  allora esiste  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tale che  $\gamma(0) = x_0$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Se non fossimo vincolati a stare in  $M$  potremmo scegliere  $\gamma(t) = x_0 + tv$ . Vogliamo definire una curva  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tale che  $\gamma(0) = x_0$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Siccome  $d\Phi(x_0)$  è suriettivo per ipotesi, possiamo applicare il teorema della funzione implicita, esiste quindi localmente  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  tale che  $(z, y) \in M \cap V$  se e solo se  $y = \varphi(z)$ . Cioè, localmente vicino ad  $x_0$ , riesco a scrivere  $M$  come il grafico di una funzione di  $k$  variabili (a meno di permutare le variabili). Allora possiamo dividere  $v = (\alpha, \beta)$  dove  $\alpha$  sono le prime  $k$  componenti e  $\beta$  sono le  $n - k$  componenti successive. La condizione che  $(\alpha, \beta) \in \ker d\Phi(x_0)$ , cioè che sia vettore tangente, è che  $\beta = d\varphi(x_0)\alpha$ . Per costruire la curva, per le prime  $k$  componenti scegliamo le rette, e di conseguenza le altre componenti devono essere  $\varphi$  delle prime. Quindi definiamo

$$\gamma(t) = (z_0 + t\alpha, \varphi(z_0 + t\alpha)) \in M, \quad \forall t$$

e inoltre  $\varphi(0) = (z_0, \varphi(z_0)) = (z_0, y_0) = x_0$ . Verifichiamo che sia effettivamente tangente, quindi calcoliamo la derivata usando la chain rule

$$\dot{\gamma}(t) = (\alpha, d\varphi(z_0 + t\alpha)\alpha)$$

e per  $t = 0$

$$\dot{\gamma}(0) = (\alpha, d\varphi(z_0)\alpha) = (\alpha, \beta) = v$$

### Esempio Sottovarietà

La sfera unitaria è una sottovarietà  $(n - 1)$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

### Esempio Sottovarietà

Il cilindro è una sottovarietà in  $\mathbb{R}^3$ . Abbiamo  $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$  e  $\nabla\Phi(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ . Quest'ultima si annulla nei punti dell'asse  $z$ , ma  $\Phi(0, 0, z) \neq 0$  e quindi tutti i punti sono regolari. Lo stesso vale per tutte le quadriche singolari (cono e quadriche che si spezzano, come piani che si intersecano)

### Esempio Toroid

Il toro è una superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$  in quanto si può scrivere come luogo di zeri. Il toro non può essere una quadrica in quanto una retta può intersecare un toro in al più di quattro punti, quindi è una superficie algebrica, cioè luogo degli zeri di un polinomio di quarto grado.

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 &= r^2 \\ (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 &= 4R^2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

e otteniamo una quartica.

Torniamo quindi agli estremi vincolati. Sia  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  il vincolo, che supponiamo essere una sottovarietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ . Supponiamo  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Vogliamo ottimizzare  $f|_M$ .  $f$  ha un massimo locale vincolato ad  $M$  in  $x_0$  se  $f|_M$  ha un massimo locale in  $x_0$ , ovvero se esiste un  $V$  aperto tale che  $x_0 \in V$  e  $f(x) \leq f(x_0)$  per tutte le  $x \in V \cap M$ .

### Teorema

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  aperto e  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  il vincolo, che supponiamo essere una sottovarietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $x_0 \in M$  un punto di estremo locale per  $f$  vincolato ad  $M$ . Allora,  $\nabla f(x_0) \cdot v = 0$  per tutte le  $v \in T_{x_0}M$ .

Il teorema afferma che la condizione necessaria affinché  $x_0$  sia punto di estremo vincolato è che le derivate direzionali di  $f$  siano nulle in tutte le direzioni tangent al vincolo.

### Definizione Punto critico vincolato

$x_0$  è punto critico di  $f$  vincolato ad  $M$  se  $\nabla f(x_0) \cdot v = 0$  per tutte le  $v \in T_{x_0}M$ .

Questi potrebbero quindi non essere estremanti, è solo una condizione necessaria.

### Proof

Usiamo la caratterizzazione dello spazio tangente con i cammini. Sia  $v \in T_{x_0}M$ . Allora  $v = \dot{\gamma}(0)$  con  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  e  $\gamma(0) = x_0$ . Consideriamo  $f \circ \gamma$ . Per ipotesi,  $f$  ha un punto estremante in  $x_0$  vincolato da  $M$ , quindi anche  $f \circ \gamma$  ha un punto estremante in  $x_0$  siccome  $\gamma(t) \in M$  per tutte le  $t$ . Abbiamo quindi una funzione reale di una variabile che ha un punto estremante in  $t = 0$ , ed è differenziabile, quindi

$$(f \circ \gamma)'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \dot{\gamma}(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$$

Dall'arbitrarietà segue la tesi.

Nel caso (degli esercizi) dove  $M = \Phi^{-1}(0)$  con  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $m < n$  e  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dato da  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ . In questo caso se  $x_0$  è un punto regolare di  $M$ ,  $T_{x_0}M = \ker d\Phi(x_0)$  e sappiamo che

$$[\ker d\Phi(x_0)]^\perp = \langle \nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_m(x_0) \rangle$$

$x_0$  è punto critico vincolato su

$$\nabla f(x_0) \in [\ker d\Phi(x_0)]^\perp = \langle \nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_m(x_0) \rangle$$

Cioè  $x_0$  è punto critico vincolato su  $\nabla f(x_0)$  è combinazione lineare di  $\nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_m(x_0)$ , cioè esistono  $\lambda_i$  tali che

$$\nabla f(x_0) = \sum_i \lambda_i \nabla \Phi_i(x_0)$$

Questo equivalente a risolvere  $m+n$  equazioni in  $m+n$  incognite, cioè dobbiamo imporre che  $x$  stia nel vincolo e trovare sia gli  $x$  che i  $\lambda$

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) = \sum_i \lambda_i \nabla \Phi_i(x_0) \\ \Phi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x) = 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi trovare i punti critici ma ci manca un criterio del secondo ordine per determinare se sono punti estremanti e di che tipo.

### Esercizio

Sia  $f(x, y) = xy$ . Troviamo i punti critici di  $f$  vincolati a  $\Phi(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ . Dobbiamo inizialmente verificare che il vincolo sia regolare. Il gradiente

$$\nabla \Phi(x, y) = (2x - y, 2y - x)$$

che si annulla per

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$

siccome la matrice associata è non singolare, il gradiente si annulla se e soltanto se  $(x, y) = (0, 0)$ . Ma questo punto non fa parte del vincolo  $\Phi(0, 0) \neq 0$ . Quindi, il vincolo è regolare. I punti critici vincolari sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = \lambda(2x - y) \\ x = \lambda(2y - x) \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Siccome le prime due sono lineari possiamo riscriverle come

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & -1 - \lambda \\ 1 + \lambda & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'unica speranza di avere un punto critico è che il determinante si annulli, quindi

$$\begin{aligned} -4\lambda^2 + (1 + \lambda)^2 &= \\ (1 + \lambda + 2\lambda)(1 + \lambda - 2\lambda) &= 0 \\ (3\lambda + 1)(1 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi serve  $\lambda = 1$  oppure  $\lambda = -1/3$ . Cominciamo con  $\lambda = 1$ ,

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 2x - y \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo  $y = x$  e  $x^2$ . Quindi i punti critici sono  $A = (1, 1)$  e  $B = (-1, -1)$ . Impostiamo ora  $\lambda = -1/3$ , abbiamo

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ 3y = 2x - y \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo  $x = -y$  e  $x = \pm 1/\sqrt{3}$ . Quindi otteniamo i punti critici  $C = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$  e  $D = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ . Abbiamo  $f(A) = f(B) = 1$  e  $f(C) = f(D) = -1/3$ . Se il vincolo è compatto, quindi per Weierstrass sappiamo che c'è un massimo e un minimo assoluto, e quindi è ovvio quali siano quali. Il vincolo è chiuso in quanto è  $\Phi^{-1}(0)$  con  $\Phi$  continua (preimmagine di un chiuso è chiuso su funzione continua). Per mostrare che il vincolo è limitato studiamo il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \Phi(x, y)$$

Supponiamo che il limite sia per esempio 7, quindi esiste  $\varepsilon > 0$  tale che esiste  $R > 0$  tale che per  $\|x\| > R$ ,  $|\Phi(x, y) - 7| < \varepsilon$ , e quindi in particolare i valori di  $\Phi$  sono diversi da zero fuori da tale bolla, e quindi la  $\Phi$  si può annullare solamente nella bolla di raggio  $R$ , ed è quindi limitato. Per il limite prendiamo come candidato la curva  $\Phi(x, 0) = x^2 - 1 \rightarrow \infty$ . Calcoliamo il limite con delle stime e lo minoriamo con qualcosa che tende a infinito

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \Phi(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x^2 - xy + y^2 - 1 \\ &\geq \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} + y^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Se lo facessimo in coordinate polari possiamo usare il fatto che  $\sin \theta \cos \theta \leq 1/2$ .



### Esercizio

Trovare i punti di minima distanza dall'origine della curva  $x^2y = 1$ . Dobbiamo massimizzare la funzione della distanza dall'origine, quindi  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Buttiamo via la radice per semplicità. Il vincolo è quindi  $\Phi = x^2y - 1 = 0$ . Possiamo parametrizzare il vincolo come grafico di funzione  $y = 1/x^2$ . Allora dobbiamo massimizzare la funzione  $g(x) = f(x, 1/x^2) = x^2 + 1/x^4$ . (oppure  $y^2 + 1/y$ ). Facciamolo con i moltiplicatori di Lagrange come esercizio. Assicuriamoci che il vincolo sia regolare, quindi il gradiente  $\nabla\Phi = (2xy, x^2) = (0, 0)$  se e solo se siamo nei punti della forma  $(0, y)$ , che però non fanno parte del vincolo. Quindi, il vincolo è regolare. Dobbiamo quindi risolvere

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda xy \\ 2y = \lambda x^2 \\ x^2y = 1 \end{cases}$$

Otteniamo i casi  $x = 0$  e  $\lambda y = 1$ . Nel primo caso le tre equazioni non sono soddisfatte in contemporanea, ma nell'altro caso otteniamo i punti  $(\pm\sqrt[6]{2}, 1/\sqrt[3]{2})$  e  $\lambda = \sqrt[3]{2}$ . Il vincolo è illimitato quindi non possiamo applicare Weierstrass, e quindi non possiamo garantire facilmente se c'è un minimo. Chiaramente  $f$  in questi punti coincide ed è positivo. Per risolvere questo problema consideriamo una bolla di raggio  $R$  sufficiente grande, e provare che la funzione sul bordo della bolla assume valori grandi. Visto che la funzione è la distanza, il valore sul bordo è sempre  $R^2$  che tende ad infinito, quindi il minimo avviene all'interno della bolla.

### Esercizio

Fra tutti i parallelepipedi di superficie finita, dimostrare che il cubo è quello di volume massimo. Abbiamo  $V(x, y, z) = xyz$  e la superficie è  $S = 2xy + 2xz + 2yz > 0$ . Abbiamo  $\Phi(x, y, z) = xy + xz + yz - S/2$ . Verifichiamo che il vincolo sia regolare.  $\nabla\Phi(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) = (0, 0, 0)$  se e solo se  $x = y = z = 0$ , quindi è regolare. Si potrebbe pure esplicitare il vincolo ma usiamo i moltiplicatori di Lagrange. Abbiamo  $\nabla V = (yz, xz, xy) = \lambda \nabla\Phi$ . Il sistema è

$$\begin{cases} yz = \lambda(y + z) \\ xz = \lambda(x + z) \\ xy = \lambda(x + y) \\ xy + xz + yz = \frac{S}{2} \end{cases}$$

Deve essere  $\lambda, x, y, z \neq 0$ . Se fosse  $\lambda = 0$  avremmo  $S = 0$  che è assurdo. Se una variabile si annulla, tutte le altre due si annulla e ciò non è possibile nel vincolo. Moltiplichiamo la prima equazione per  $x$  e la seconda per  $y$ , quindi  $xyz = \lambda(xy + xz) = \lambda(xy + yz)$ . Quindi,  $xy + xz = xy + yz$  cioè  $xz = yz$  cioè  $x = y$ . Per simmetria, facendo la stessa cosa sulla terza equazione otteniamo  $x = z$ . Quindi  $x = y = z$  che è il cubo. Per trovare il valore del lato sfruttiamo l'ultima equazione, quindi  $x = \sqrt{S/6}$  da cui possiamo trovare il volume. Dobbiamo mostrare che ciò è un massimo. Possiamo pure prendere  $x, y, z \geq 0$  in quanto se ci troviamo sui piani coordinati il parallelepipedo è degenere, e non è massimo sicuramente. Quindi, il vincolo è chiuso in quanto preimmagine di 0. Tuttavia, il vincolo non è limitato in quanto  $xy + xz + yz = S/2$  (è un iperbolide ellittico) e una sua sezione è un'iperbole quindi è illimitata. Per esempio sezionando con il piano  $z = 0$ . Non possiamo quindi usare il teorema di Weierstrass. Consideriamo quindi l'intersezione del vincolo con una bolla chiusa di raggio  $\sqrt{3}$ . Scegliamo questo raggio per semplicità per i prossimi conti, quindi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2$ . Considerando  $R$  sufficientemente grande, siamo su un compatto e che quindi ammette massimo. Il massimo si può trovare o all'interno o sul bordo. Dobbiamo escludere che si trovi sul bordo. Guardiamo quanto fa il volume sul bordo della bolla, e mostriamo che tende a zero

$$V|_{\partial B_{\sqrt{3}R}} \rightarrow 0$$

Sulla frontiera della bolla  $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$ , quindi almeno uno dei tre quadrati deve essere maggiore di  $R^2$  (il motivo per cui abbiamo scelto quel coefficiente). Scegliamo senza perdita di

generalità  $x^2 \geq R^2$ . Siccome  $xz + yz + xy = S/2$  deve essere  $xz \leq S/2$  e  $xy \leq S/2$  e quindi  $z \leq S/(2x)$  e  $y \leq S/(2x)$ . Il volume è dato da

$$V(x, y, z) = xyz \leq x \frac{S}{2x} \frac{S}{2x} = \frac{S^2}{4x} \leq \frac{S^2}{4R} \rightarrow 0$$

per  $R \rightarrow \infty$ .

### Esercizio

Vogliamo determinare gli estremi di  $f(x, y, z) = x^2 - x + y^2 + y(z + x - 1)$  vincolato da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Anche in questo caso è possibile parametrizzare il vincolo ma lo facciamo con i moltiplicatore di Lagrange. Verifichiamo che il vincolo è determinare. Il vincolo è determinato da

$$\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x + y + z - 1 \end{pmatrix}$$

Per verificare che sia regolare verifichiamo che la Jacobiana abbia rango massimo, cioè 2

$$J_{\Phi}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che abbiamo un minore  $2 \times 2$  sulla destra che si annulla se e solo se  $y = 0$ , mentre se prendiamo il minore con la prima colonna e terza colonna, si annulla se e solo se  $x = 0$ . Quindi il rango è minore di due se e solo se  $x = y = 0$ . Ma se  $x = y = 0$  allora la prima equazione non è soddisfatta, quindi il vincolo è regolare. Il gradiente è dato da  $\nabla f(x, y, z) = (2x + y - 1, 2y + z + x - 1, y)$ . Il sistema è  $\nabla f = \lambda \nabla \Phi_1 + \mu \nabla \Phi_2$

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = \lambda 2x + \mu \\ 2y + z + x - 1 = \lambda 2y + \mu \\ y = \lambda \cdot 0 + \mu \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Dalla terza  $y = \mu$  e semplifichiamo

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = \lambda 2x + y \\ 2y + z + x - 1 = \lambda 2y + y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo la quinta nella terza e ricaviamo  $2\lambda y = 0$ , quindi o  $\lambda = 0$  oppure  $y = 0$ . Supponendo  $\lambda = 0$  otteniamo  $x = \frac{1}{2}$  e  $y = \pm\sqrt{3}/2$  e  $z = \frac{1}{2} \mp \sqrt{3}/2$ . Quindi abbiamo trovato i punti critici

$$A \equiv \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right), \quad B \equiv \left( \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right),$$

Se invece supponiamo  $y = \mu = 0$  otteniamo  $x = \pm 1$ ,  $z = 1 - x$

$$\lambda = \frac{2x - 1}{2x} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

quindi abbiamo anche i punti critici

$$C \equiv (1, 0, 0), \quad D \equiv (-1, 0, 2),$$

Il vincolo è l'intersezione fra un cilindro ed un piano, quindi un'ellisse, quindi compatto. Per dire che è limitato potremmo dire  $|x|, |y| \leq 1$  e  $|z| \leq 1 + |x| + |y| \leq 3$ . Chiaramente è chiuso in quanto preimmagine di di zero tramite funzione continua. Possiamo applicare Weierstrass. Abbiamo i seguenti punti

$$f(A) = f(B) = -\frac{1}{4}, \quad f(C) = 0, \quad f(D) = 2$$

quindi  $A, B$  sono punti di minimo assoluto e  $D$  di massimo assoluto. Per l'altro punto serve un criterio del secondo ordine, per stabilirne la natura. Nel caso dell'ottimizzazione libera  $x_0$  era un punto critico se  $df(x_0)v = 0$  per tutte le  $v \in \mathbb{R}^n$ . Se  $x_0$  era critico, guardavamo il segno di  $d^2f(x_0)$  come applicazione bilineare  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Questo  $x_0$  è punto critico vincolato se  $df(x_0)v = 0$  per tutti i  $v \in T_{x_0}M$ . Come criterio del second'ordine dovremo stabilire il segno della forma bilineare  $d^2f(x_0) - [\lambda_1 d^2\Phi_1(x_0) + \dots + \lambda_m d^2\Phi_m(x_0)]$  sui vettori di  $T_{x_0}M$ . Dobbiamo quindi trovare lo spazio tangente al vincolo. In questo caso, il vincolo è una curva, quindi lo spazio tangente deve avere dimensione 1. Lo spazio tangente è lo spazio ortogonale allo generato dai gradienti di  $\Phi$

$$T_{x_0}M = \langle \nabla\Phi_1(x_0), \nabla\Phi_2(x_0) \rangle^\perp$$

Siccome siamo in  $\mathbb{R}^3$  basta prendere  $\nabla\Phi_1(x_0) \wedge \nabla\Phi_2(x_0)$ . Calcoliamo quindi

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2y, -2x, 2x - 2y)$$

Nel punto critico questo è

$$T_{(1,0,0)}M = \langle (0, -2, 2) \rangle^\perp$$

Ci serve quindi  $d^2f(C) - \lambda d^2\Phi_1(C) - \mu d^2\Phi_2(C)$  che è rappresentabile dalla matrice  $Hf(C) - \lambda H\Phi_1(C) - \mu H\Phi_2(C)$ . Abbiamo

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H\Phi_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$Hf(C) - \frac{1}{2}H\Phi_1(C) - 0 \cdot H\Phi_2(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo quindi stabilire il segno di

$$\begin{aligned} v^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} v &= t \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= t^2(-4) = -4t^2 \leq 0 \end{aligned}$$

quindi è definita negativa e  $C$  è un punto di massimo locale.

### **Teorema** Criterio del secondo ordine

sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $M$  il vincolo dato dai punti di annullamento di

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x) = 0 \end{cases}$$

con  $m < n$  e  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$  dove  $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $x_0 \in M$  punto regolare (cioè il rango del differenziabile di  $\Phi(x_0)$  è  $m$ ). Sia  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ,  $x_0$  punto critico di  $f$  vincolato ad  $M$ . Per la condizione primo ordine  $df(x_0) \equiv 0$  su  $T_{x_0}M$ , ovvero  $\exists! \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tale che

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \Phi_i(x_0)$$

Definiamo

$$A \triangleq d^2 f(x_0) - \sum \lambda_i d^2 \Phi_i(x_0)$$

che è una forma bilineare  $A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a cui è associata la matrice

$$\mathbb{A} \triangleq Hf(x_0) - \sum \lambda_i H\Phi_i(x_0)$$

Abbiamo i seguenti casi:

1. se  $x_0$  è minimo locale vincolato, allora  $A \geq 0$  su  $T_{x_0}M$  (semidefinita positiva, cioè  $A(v, v) \geq 0$  nello spazio tangente);
2. se  $(A(v, v) > 0)$ , per  $v \in T_{x_0}M$  e  $v \neq 0$ , allora  $x_0$  è punto di massimo locale vincolato.
3. se  $A$  è indefinito su  $T_{x_0}M$ , allora  $x_0$  è un punto di sella vincolato.

e gli altri casi analoghi per i massimi.

### Esercizio

Sia  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e il vincolo dato da  $M = \Phi^{-1}(0)$  per  $\Phi(x, y, z) = z^2 - xy - 1$ . Ottimiamo  $f$  sul vincolo  $M$ . Verifichiamo che il vincolo sia regolare. Il gradiente è  $\nabla \Phi(x, y, z) = (-y, -x, 2z)$  che si annulla se solo se  $x = y = z = 0$  che non fa parte del vincolo. Quindi è regolare ed è una sotto varietà. Il vincolo è chiuso (gratis) ma non è limitato in quanto per  $z = 0$  è un'iperbole. Troviamo i punti critici  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ . Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = 2\lambda z \\ x^2 = 1 + xy \end{cases}$$

Dalla terza otteniamo che  $z = 0$  oppure  $\lambda = 1$ . Nel caso di  $z = 0$  otteniamo

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2y = -\lambda x \\ 2x = -\lambda y \\ x^2 = 1 + xy \end{cases}$$

Se prendiamo le due equazioni lineari, sono omogenee, e quindi per avere una soluzione il determinante della matrice associata deve annullare, quindi

$$\det \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix} = 0$$

cioè  $\lambda = \pm 2$ . Per  $\lambda = 2$  otteniamo quindi i punti critici  $C \equiv (1, -1, 0)$  e  $D \equiv (-1, 1, 0)$ . Per  $\lambda = -2$  otteniamo  $x = y$  e quindi  $x^2 + 1 = 0$  che è assurda. Invece, nel caso  $\lambda = 1$  otteniamo il

sistema

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2x = -y \\ 2y = -x \\ z^2 = 1 + xy \end{cases}$$

come prima facendo lo stesso ragionamento del sistema, ma il determinante non è nullo e quindi l'unica soluzione è  $x = y = 0$ , quindi otteniamo i punti critici  $A \equiv (0, 0, 1)$  e  $B \equiv (0, 0, 1)$ . Se consideriamo una bolla di raggio  $R$ , la funzione ha valore  $R^2$  su tali punti, che tende a infinito. Quindi il massimo assoluto vincolato ad una bolla si ottiene sulla frontiera, e un punto minimo deve essere per forza nella parte interna. Abbiamo che  $f(A) = f(B) = 1$  e  $f(C) = f(D) = 2$ . Chiaramente  $A$  e  $B$  sono punti di minimo assoluto. Per gli altri punti dobbiamo usare il criterio del secondo ordine. Troviamo lo spazio tangente.

$$T_C M = \nabla \Phi(C)^\perp = \langle (1, -1, 0) \rangle^\perp$$

che sono tutti i punti  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  tale che  $u - v = 0$ , quindi tutti i punti della forma  $(u, u, w) \in \mathbb{R}^3$ . Le matrici hessiane sono

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hf - \lambda H\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e abbiamo

$$(u \quad u \quad w) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u \\ w \end{pmatrix} = 8u^2 - 2w^2$$

è indefinita, quindi  $C$  è una sella vincolata. Risolviamo l'esercizio eliminando il vincolo:  $z^2 = 1 + xy$  e quindi ottimizziamo  $g(x) = x^2 + y^2 + 1 + xy$  nel dominio  $D = \{(x, y) \mid 1 + xy \geq 0\}$ .  $D$  non è un insieme di livello per una funzione  $\Phi$ , ma è chiuso e  $D = D^\circ \cup \partial D$ . Se  $x_0$  è un punto di minimo locale per  $g|_D$  e se  $x_0 \in D^\circ$  allora  $x_0$  è un punto di minimo libero per  $g$ , cioè  $x_0$  può essere determinato facendo ottimizzazione libera su  $D^\circ$ . Se  $x_0 \in \partial D$  in particolare  $x_0$  è punto di minimo per  $g|_{\partial D}$  cioè  $x_0$  può essere determinato facendo ottimizzazione vincolata su  $\partial D$ . Una volta trovati i punti critici vincolati di  $g$  su  $\partial D$ , per stabilire la natura bisogna tenere conto anche del comportamento di  $g$  all'infinito. Il gradient  $\nabla g = (2x + y, 2y + x)$  si annulla se e solo se  $x = y = 0$ . Ora facciamo ottimizzazione vincolata nel bordo. La frontiera è data da  $\partial D = \{(x, y) \mid 1 + xy = 0\}$ . Possiamo parametrizzare il bordo con  $\varphi(x) = g(x, -1/x) = x^2 + 1/x^2$ . Abbiamo

$$\varphi' = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

da cui troviamo che  $(-1, 1)$  e  $(1, -1)$  sono punti di minimo relativo per  $g|_{\partial D}$ . Ma, considerando il cammino  $\varphi(t) = (-t, t)$  si ottiene che  $g \circ \varphi = t^2 + 1$  che cresce in un intorno di  $t = 1$  ed in un intorno di  $t = -1$ , quindi questi due punti sono punti di sella.

### Esempio

Ottimizziamo  $f(x, y) = 2 + y + x^2 + 2xy$  su  $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ . Questo è un insieme compatto e limitato quindi  $f|_D$  ammette massimo e minimo assoluti. Calcoliamo i punti critici liberi in  $D^\circ$ . Il gradiente  $\nabla f(x, y) = (2x + 2y, 1 + 2x)$  si annulla se e solo se  $x = -1/2$  e  $y = 1/2$ , e  $(-1/2, 1/2) \in D^\circ$ . Abbiamo

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è  $-4$  quindi è un punto di sella, quindi il massimo e minimo assoluto si trovano sulla frontiera  $\partial D$ . Consideriamo  $M_1 = \{(x, 1) : -1 \leq x \leq 1\}$  e  $\alpha(x) = f(x, 1) = x^2 + 2x + 3$ .

Di cui  $\alpha'(x) = 2(x+1)$  che si annulla se e solo se  $x = -1$  e  $\alpha'(x) \geq 0$  per  $x \in [-1, 1]$ .  $M_2 = \{(x, x^2) \mid -1 \leq x \leq 1\}$  e  $\beta(x) = f(x, x^2) = 2(x^3 + x^2 + 1)$ , di cui  $\beta'(x) = 2x(3x+2)$  che si annulla se e solo se  $x = 0$  oppure  $x = -2/3$ .  $(0, 0)$  e  $(-1, 1)$  sono punti di minimo vincolati a  $\partial D$ ,  $(-2/3, 4/9)$  e  $(1, 1)$  sono punti di massimo vincolati a  $\partial D$ . Di tutti questi punti dobbiamo stabilire la natura rispetto a tutto  $D$ . Calcoliamo  $f(A) = 2$ ,  $f(E) = 6$ ,  $f(C) = 2$  e  $2 < f(B) < 6$ . Quindi,  $E$  è punto di massimo e assoluto mentre  $A, C$  sono punti di minimo assoluto. Resta da studiare la natura di  $B$ .

$$\nabla f(B) = \left(-\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}\right)$$

In un intorno di  $B$  il vincolo è il luogo degli zeri della funzione  $\Phi(x, y) = y - x^2$ . Notiamo che  $\partial\Phi/\partial y = 1 \neq 0$  (infatti il vincolo può essere esplicitato rispetto ad  $y$ ). In particolare, le rette verticali intersecano la frontiera in uno e un solo punto in un intorno di  $B$ , che è un punto di massimo locale se esiste  $U$  intorno aperto di  $B$  tale che  $\forall x \in U \cap D, f(x) \leq f(B)$ . Sia  $x \in U \cap D$  e consideriamo la retta verticale che passa per  $x$  e interseca  $\partial D$  (esiste ed è unica pur di prendere  $U$  sufficientemente piccolo). Osserviamo che  $\frac{\partial f}{\partial y}(B) < 0$  e quindi per continuità è minore di zero in tutto  $U \cap D$  per  $U$  sufficientemente piccolo. Consideriamo la linea spezzata che congiunge  $x$  a  $B$  tramite un segmento verticale fra  $x$  e la frontiera e poi tramite un pezzo di  $\partial D$ . Per l'arbitrarietà di  $x$ ,  $B$  è un punto di massimo relativo.

## 8 Equazioni differenziali

Un'equazione differenziabile è un'equazione la cui incognita è una funzione  $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  che compare insieme a qualche sua derivata. Se  $n > 1$  si parla di equazione derivata parziale, se  $n = 1$  si parla di equazione differenziale ordinaria. Quando si riesce ad esplicitare rispetto alle derivate di ordine massimo, si parla di equazione differenziale in forma normale.

$$y^{(k)} = F(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

### Definizione

La funzione  $y = y(x)$  è una soluzione nell'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  dell'equazione differenziabile  $y' = f(x, y)$  se

1.  $y$  è derivabile in  $I$ ;
2.  $(x, y(x)) \in \Omega$  per  $x \in I$ ;
3.  $y'(x) = f(x, y(x))$  per  $x \in I$ ;

### Esempio

The equation  $y' = f(x)$  where

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

has no solution in any interval containing  $x = 0$ .

In generale, le soluzioni di un'equazione differenziali sono tante, di solito  $\infty$ . L'integrale generale di un'equazione differenziale è la famiglia di tutte le soluzioni di un'equazione. Di solito si considera un problema di Cauchy.

### Teorema Teorema di esistenza e unicità locale

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $(x, y_0) \in \Omega$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  e  $\partial f / \partial y$  sono continue in  $\Omega$  (in particolare se  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ ), allora esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  in cui è definita una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Supponiamo che  $f$  soddisfi le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Allora, i grafici di due soluzioni distinte dell'equazione  $y' = f(x, y)$  non possono intersecarsi. Se ciò succedesse, considerando il problema di Cauchy con condizione iniziale nel punto di intersezione, avremmo due soluzioni.

### 8.1 Equazioni a variabili separabili

Sia  $y' = h(x)k(y)$  dove  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k: J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I, J$  intervalli tali che  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ . Supponiamo che  $h \in \mathcal{C}'(I)$ ,  $k \in \mathcal{C}'(J)$ , così che se  $f(x, y) = h(x)k(y)$ ,  $f \in \mathcal{C}'(I \times J)$ . In questo caso c'è esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy.

Nel caso particolare  $k(y_0) = 0$ , allora la funzione  $y = y_0$  è soluzione del problema di Cauchy. Se  $k(y_0) \neq 0$ , allora  $k(y) \neq 0$  per  $y \in V(y_0)$ . In particolare, se  $y(x)$  è la soluzione del problema di Cauchy, si ha che

$k(y(x)) \neq 0$  per  $x \in U(x_0)$ . Quindi in  $U(x_0)$  possiamo dividere per  $k(y(x))$ . Possiamo quindi integrare

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)}{k(y(x))} &= h(x) \\ \int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{k(y(t))} dt &= \int_{x_0}^x h(t) dt \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{k(s)} ds &= \int_{x_0}^x h(t) dt\end{aligned}$$

ponendo  $y(t) = s$  nell'integrale a sinistra.

### Esempio

Considera

$$\begin{cases} y' &= e^{x-y} \\ y(0) &= a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Abbiamo che  $h(x) = e^x$  e  $k(y) = e^{-y}$  con  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Siccome  $k(y) \neq 0$  allora non ci sono soluzioni costanti. Separando otteniamo  $e^y = e^x - C$  e imponendo il punto iniziale  $C = e^a - 1$ . Otteniamo quindi  $y = \ln(e^x + e^a - 1)$ , che è definita per  $e^x > 1 - e^a$ . Se  $1 - e^a \leq 0$  la disuguaglianza è sempre soddisfatta. Se  $a \geq 0$ , allora  $I = \mathbb{R}$ . Se  $a < 0$ , allora  $1 - e^a > 0$ ,  $x > \ln(1 - e^a)$ , e  $I = (\ln(1 - e^a), +\infty)$ . Per  $a < 0$  c'è un asintoto verticale.

## 8.2 Equazioni differenziali del primo ordine

### Teorema

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $I$ . Allora, il problema

$$\begin{cases} y' + p(x)y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione, definita in  $I$  data da

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \left[ y_0 + \int_{x_0}^x q(t) e^{\int_{x_0}^t p(s) ds} dt \right]$$

### Proof

todo

## 8.3 Equazioni di Bernoulli

Considera  $y' + a(x)y + b(x)y''^\delta = 0$  con  $\delta \neq 0, 1$ . Allora  $y' = a(x)y - b(x)y^\delta = f(x, y)$  con  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
TODO



## 9 Curve

La parametrizzazione del cerchio  $(\cos t, \sin t)$  è analoga a quella dell'iperbole  $(\cosh t, \sinh t)$ . Questo lo si vede dalle identità  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  cioè  $x^2 + y^2 = 1$  e quindi analogamente  $x^2 - y^2 = 1$ . Ma la forma dell'iperbole data ha due rami, ma una funzione connessa, quale la curva, deve mandare aperti in aperti e  $\mathbb{R}$  è connesso. Infatti questa parametrizza solamente un ramo.

### Definizione Equivalenza fra curve

Vedi [analisiIII.pdf](#). Nozione più debole che dice solo che la mappa è un omeomorfismo e che la composizione è l'altra curva. In generale la nozione la si può estendere a  $k$ -diffeomorfismo.

### Esempio

Le curve  $(t, t)$  e  $(t^3, t^3)$  su  $-1 \leq t \leq 1$  sono equivalenti nel senso  $\mathcal{C}^0$ , ma non è  $\mathcal{C}^1$  perché se facessi l'inverso della seconda otterrei la radice cubica che non è differenziale in 0.

Possiamo quindi sempre supporre che una curva sia parametrizzata su  $([0, 1])$ .

### Definizione Equivalenza orientata

Siano  $\gamma, \varphi$  due curve definiamo l'equivalenza equiorientata

$$\varphi \overset{+}{\sim} \gamma$$

se sono equivalenti e la mappa omeomorfa fra gli intervalli è crescente. Analogamente decrescente con il meno.

Solo quella con il  $+$  è una relazione di equivalenza. Per esempio  $\gamma \overset{-}{\sim} -\gamma$  cambia l'orientazione.

Per concatenare due curve le parametrizziamo entrambe per avere dominio  $[0, 1]$  e poi le concateniamo percorrendo ciascuna al doppio della velocità. La concatenazione di due curve  $\mathcal{C}^1$  non è necessariamente  $\mathcal{C}^1$ , ma è  $\mathcal{C}^1$  a tratti.

Consideriamo una curva chiusa  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Affinché  $\gamma$  sia  $\mathcal{C}^1$  non basta che l'applicazione  $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ . Bisogna anche imporre che il valore della derivata nei due estremi coincida.

### Esempio

Consideriamo la curva data dal grafico della funzione  $y = |x|$  con  $-1 \leq x \leq 1$ . Questa può essere parametrizzata con una curva di classe  $\mathcal{C}^1$ , per esempio  $\gamma(t) = (t^3, |t|^3)$  con  $-1 \leq t \leq 1$ . Tuttavia, in  $t = 0$  il sostegno di  $\gamma$ . Quindi, non è sufficiente richiedere la regolarità della parametrizzazione. Il problema in questo esempio è che  $\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$ .



Definizione da analisi 3:

### Definizione Curva semplice

Una curva  $\varphi$  si dice *semplice* se

$$a \leq t_1 < t_2 \leq b \wedge \varphi(t_1) = \varphi(t_2) \implies t_1 = a \wedge t_2 = b$$

Quindi può coincidere solo agli estremi. Possiamo dire che la curva deve essere iniettiva tranne negli estremi, cioè sia iniettiva su  $[a, b)$  e  $(a, b]$ , altrimenti potrebbe toccarsi solo da un lato, come con il simbolo del numero 6.

**Esempio** In generale non è possibile identificare una curva con il suo sostegno

Sia  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  per  $t \in [0, 2\pi]$  oppure  $[0, 3\pi]$  hanno lo stesso sostegno.

Se una curva è semplice, allora è possibile identificarla con il suo sostegno.

**Teorema**

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue e semplici tale che  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\gamma$ . Allora  $\gamma \sim \varphi$ .

**Proof**

Supponiamo che le due curve non siano chiuse. Sia  $\Gamma = \text{Im}\gamma = \text{Im}\varphi$ . Vogliamo definire un omeomorfismo  $h: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  tale che  $\gamma \circ h = \varphi$ . Osserviamo che  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$  è continua e suriettiva. Inoltre  $\gamma$  è anche iniettiva, perché è semplice e non chiusa. Se mostriamo che  $\gamma^{-1}$  è continua, allora è un omeomorfismo (analogamente per  $\varphi$ ). A questo punto basta scegliere  $h = \gamma^{-1} \circ \varphi$ . Resta da dimostrare che  $\gamma^{-1}: \Gamma \rightarrow [a, b]$  è continua, osservo che  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$  è chiuso. Ciò è vero per il teorema da compatto ad Hausdorff. Se invece le curve sono chiuse, perdiamo l'iniettività. In tal caso dobbiamo quindi togliere il punto critico.



**Definizione Curva regolare**

Una curva  $\varphi$  si dice *regolare* se  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$  e  $\|\varphi'(t)\| \neq 0$  per  $t \in I$ .

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e sia  $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ . Allora  $\dot{x} \neq 0$  o  $\dot{y} \neq 0$ . Supponiamo ad esempio che  $\dot{x} \neq 0$ . Allora possiamo localmente invertire la funzione  $x(t)$ . Sia  $t(x)$  la sua inversa. Possiamo usare questa funzione inversa per riparametrizzare  $\gamma$  usando  $x$  come parametro

$$\varphi(x) = \gamma(t(x)) = (x, y(t(x))) = (x, f(x))$$

cioè abbiamo parametrizzato localmente  $\gamma$  come grafico di una funzione di una variabile. In particolare, se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva regolare,  $\gamma$  può essere localmente parametrizzata come grafico di una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , con  $f$  di classe  $\mathcal{C}^1$ . A questo punto sono sicuro che il sostegno di  $\gamma$  abbia una retta tangente. Inoltre, se  $\gamma$  è una curva regolare, allora è anche localmente semplice in un intorno di ogni suo punto, in quanto ogni curva data da un grafico di funzione è sempre semplice. Cioè in  $(t, f(t))$  la prima componente  $t$  è iniettiva quindi è iniettiva.

Se  $\gamma$  è una curva regolare, non è semplice (lo è solo necessariamente localmente, non globalmente).

**Esercizio**

La curva grafico della funzione  $y = x^{2/3}$  può essere parametrizzata in modo semplice e regolare? Posso farla semplice e di classe  $\mathcal{C}^1$ , per esempio  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Ma non è regolare in quanto  $\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$ . Se esiste una tale parametrizzazione, potremmo localmente scriverla nell'origine come un grafico di una funzione  $\mathcal{C}^1$ , ma questa funzione non lo è.

Può capire che una curva non sia regolare per una scelta "sbagliata" della parametrizzazione. Per esempio  $\gamma(t) = (t^3, t^3)$  per  $-1 \leq t \leq 1$ . Ma chiaramente questa è un segmento e se avessi scelto  $(t, t)$  sarebbe venuta regolare. C'è un modo naturale di scegliere quella più bella.

**Definizione**

Diciamo che una curva è un arco regolare se è di classe  $\mathcal{C}^1$ , semplice e regolare.

In tal caso se  $\gamma(x) = (x, f(x))$  con  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  allora  $\dot{\gamma}(x) = (1, f'(x))$  che non si può annullare.

Se  $\gamma$  è regolare la retta tangente al sostegno nel punto  $\gamma(t_0)$  è la retta

$$x = \gamma(t_0) + t\dot{\gamma}(t_0)$$

Vedi [analisiIII.pdf](#) per la definizione di lunghezza di una curva.

### Esempio Curva non rettificabile

Sia  $\gamma(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, 0) & t = 0 \\ (t, t \cos(\frac{\pi}{t})) & t > 0 \end{cases}$$

Consideriamo come partizione

$$\Pi_N = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Sui punti della partizione (tranne l'origine) il coseno assume i valori  $\pm 1$ . Sia  $P_k = \gamma(1/k)$ . Calcoliamo

$$\|P_k - P_{k-1}\|^2 = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right)^2$$

Il contributo del primo addendo è quello di una serie convergente, infatti

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{k(k-1)}$$

che è la serie di Mengoli. Vogliamo mostrare che la variazione diverge, e per fare ciò consideriamo solo il secondo addendo.

$$L(\gamma, \Pi_N) = \sum_{k=1}^N \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2} \geq \sum_{k=1}^N \left| \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right| \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

per  $N \rightarrow \infty$ .



### Proposition

Se  $\varphi$  è una curva lipschitziana, allora è rettificabile.

### Proof

Abbiamo che

$$\forall t, s \in I, \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq L|t - s|$$

quindi

$$\begin{aligned} L(\varphi, P) &= \sum_{i=1}^n \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n L|t_i - t_{i-1}| = L(b - a) \end{aligned}$$

e allora  $L(\varphi) \leq L(b - a)$ .

### Teorema

Se  $\gamma \sim \varphi$  allora  $L(\gamma) = L(\varphi)$  con  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Proof**

Per ipotesi esiste  $h$  diffeomorfismo (basta che sia un omeomorfismo) tale che  $\gamma \circ h = \varphi$ . Essendo  $h$  monotona e biunivoca, manda partizioni di  $[a, b]$  in partizioni di  $[\alpha, \beta]$ , quindi vi è una corrispondenza biunivoca. Siccome le due immagini delle curve sono le medesime le loro lunghezze devono coincidere.

**Teorema**

Sia  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$  (che sono di Lipschitz). Allora  $\varphi$  è rettificabile e

$$L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$$

(Come l'abbiamo vista ad analisi 3?)

**Proof**

Sia  $\delta > 0$  allora

$$\gamma(t + \delta) - \gamma(t) = \int_t^{t+\delta} \dot{\gamma}(\tau) d\tau$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|\gamma(t + \delta) - \gamma(t)\| &= \left\| \int_t^{t+\delta} \dot{\gamma}(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_t^{t+\delta} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

Data quindi una partizione  $P$

$$\begin{aligned} L(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \\ &= \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \end{aligned}$$

Ma dobbiamo ancora verificare l'altra disuguaglianza. Siccome  $\gamma$  è continua, per il teorema di Lagrange

$$\int_t^{t+\delta} \dot{\gamma}(\tau) d\tau = \delta \|\dot{\gamma}(t + \delta\theta)\|$$

per qualche  $\delta \in (0, 1)$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 \left| \|\gamma(t+\delta) - \gamma(t)\| - \int_t^{t+\delta} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \right| &= \left| \|\gamma(t+\delta) - \gamma(t) - \delta\dot{\gamma}(t+\delta\theta)\| \right| \\
 &= \left\| \gamma(t+\delta) - \gamma(t) - \delta\dot{\gamma}(t+\delta\theta) \right\| \\
 &= \left\| \int_t^{t+\delta} [\dot{\gamma}(\tau) - \dot{\gamma}(\tau+\delta\theta)] d\tau \right\| \\
 &= \int_t^{t+\delta} \|\dot{\gamma}(\tau) - \dot{\gamma}(\tau+\delta\theta)\| d\tau
 \end{aligned}$$

Siccome la curva è continua è anche uniformemente continua, quindi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \delta > |t - s| \implies \|\gamma(t) - \gamma(s)\| < \varepsilon$$

Sia  $\delta < \delta_\varepsilon$ . Allora nell'integrale  $\tau \in [t, t+\delta]$ ,  $t+\delta\theta \in [t, t+\delta]$  e quindi  $|\tau - (t+\delta\theta)| < \delta < \delta_\varepsilon$ . Possiamo quindi applicare l'uniforme continuità all'integranda. Se  $\delta < \delta_{varepsilon}$  allora

$$\left| \|\gamma(t+\delta) - \gamma(t)\| - \int_t^{t+\delta} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \right| \leq \int_t^{t+\delta} \|\dot{\gamma}(\tau) - \dot{\gamma}(t+\delta\theta)\| d\tau \leq \varepsilon\delta$$

Ma conosciamo il segno dell'argomento del modulo, infatti abbiamo detto prima che quel termine è minore dell'integrale della norma della derivata, quindi

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_t^{t+\delta} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau - \|\gamma(t+\delta) - \gamma(t)\| \leq \varepsilon\delta \\
 \int_t^{t+\delta} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau &\leq \|\gamma(t+\delta) - \gamma(t)\| + \varepsilon\delta
 \end{aligned}$$

Scegliamo quindi una partizione  $\Pi$  con la proprietà che  $|\Pi| < \delta_{varepsilon}$ , cioè che  $|t_k - t_{k-1}| < \delta_{varepsilon}$ . Allora abbiamo

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \leq \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| + \varepsilon(t_k - t_{k-1})$$

Sommando su  $k$  si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt &\leq \sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| + \varepsilon(b-a) \\
 &= L(\gamma, \Pi) + \varepsilon(b-a) \leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a)
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a)$$

ma siccome  $\varepsilon$  è arbitrariamente piccolo segue la tesi.

Questo vale anche per le curve  $\mathcal{C}^1$  a tratti, basta suddividere le distanze.

### Esercizio

Sostituiamo  $2y = \sinh(t)$  in

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+4y^2} \, dy &= \int \frac{1}{2} \sqrt{\cosh^2(t)} \cosh(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int \cosh^2(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} (t + \sinh(t) \cosh(t)) + C\end{aligned}$$

che abbiamo risolto per parti.

## 9.1 Parametrizzazione naturale (lunghezza d'arco)

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare tale che  $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  e  $\dot{\gamma} \neq 0$ . Sia

$$h(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

che è ben definita per ogni  $t \in [a, b]$ . Tale funzione manda  $[a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$  ed è derivabile

$$\frac{dh}{dt}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$$

quindi è anche strettamente crescente e invertibile, è pure un diffeomorfismo. Possiamo quindi usarla come cambiamento parametro  $s = h(t)$  e definiamo

$$\varphi(s) = \gamma(h^{-1}(s))$$

dove  $\varphi: [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La derivata è data da

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{d\gamma}{dt}(h^{-1}(s)) \cdot \frac{dh^{-1}}{ds}(s) \\ &= \dot{\gamma}(h^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\frac{dh}{dt}(h^{-1}(s))} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(h^{-1}(s))}{\|\dot{\gamma}(h^{-1}(s))\|} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato una parametrizzazione il cui vettore tangente è sempre un vettore. In particolare

$$L(\varphi|_{[a, b]}) = \int_a^b |\varphi'(\tau)| d\tau = b - a$$

tale parametro  $s$  si chiama parametro arco o lunghezza d'arco o ascisse curvilinea. D'ora in avanti usiamo  $\gamma'$  per intendere derivata rispetto a questo parametro.

### Esempio

Consideriamo l'elica

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, bt), \quad R > 0, b \in \mathbb{R}, t \in [0, 2\pi]$$

Poniamo

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{R^2 + b^2} d\tau \\ &= t\sqrt{R^2 + b^2} \end{aligned}$$

Quindi possiamo invertire la funzione con

$$\varphi(s) = \gamma\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}\right) = \begin{pmatrix} R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \\ R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \\ \frac{bs}{\sqrt{R^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

per  $s \in [0, \sqrt{R^2 + b^2}]$ .

### Teorema

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  archi regolari. Allora  $\varphi \sim \gamma$  in senso  $\mathcal{C}^1$  se e solo se i supporti coincidono.

### Proof

Una direzione è ovvia. Supponiamo che abbiamo il medesimo sostegno. Senza perdita di generalità supponiamo che le curve siano parametrizzate su ascisse curvilinea. Abbiamo che  $L = L(\gamma) = L(\varphi)$  in quanto le curve sono semplici e quindi la lunghezza è una nozione puramente geometrica e quindi date dal sostegno. Abbiamo quindi  $\gamma, \varphi: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\gamma = \Gamma$ . Sia  $p \in \Gamma$  tale che  $p \neq \gamma(0) \wedge p \neq \gamma(L)$ . Cosifacendo esiste un unico  $s \in [0, L]$  tale che  $p = \gamma(s)$ . Inoltre esiste un unico  $s' \in [0, L]$  tale che  $p = \varphi(s')$ . Allora abbiamo che o  $s = s'$  oppure  $s = L - s'$ . Nel primo caso  $\gamma(s) = \varphi(s') = \varphi(s)$ , nel secondo caso abbiamo  $\gamma(s) = \varphi(s') = \varphi(L - s)$  per  $s \in [0, L]$  quindi  $\varphi \sim \gamma$ .



## 9.2 Integrali curvilinei

### Definizione Integrale curvilineo

Sia  $\Gamma$  una curva in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo  $\Gamma \subseteq \Omega$ . Allora l'integrale curvilineo è dato da

$$\int_{\Gamma} f ds \triangleq \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Se la curva non è semplice l'integrale esiste comunque ma perdiamo l'interpretazione geometrica in alcuni casi.

### Teorema

Se  $\gamma \sim \varphi$ ,

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\varphi} f ds$$

### Proof

Indichiamo con  $t$  le variabili di  $[a, b]$  e con  $\xi$  quelle di  $[\alpha, \beta]$ . Per ipotesi esiste  $h: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  diffeomorfismo tale che  $\varphi = \gamma \circ h$ . Consideriamo il caso  $h' < 0$  (l'altro è un po' più facile). Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\xi)) \|\dot{\varphi}(\xi)\| d\xi &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(h(\xi))) \|\dot{\gamma}(h(\xi)) h'(\xi)\| d\xi \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(h(\xi))) \|\dot{\gamma}(h(\xi))\| |h'(\xi)| d\xi \\ &= - \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \end{aligned}$$

ponendo  $t = h(\xi)$ . Siccome  $h$  è decrescente  $h(\alpha) = b$  e  $h(\beta) = a$ .

### Esempio

Sia  $\Gamma$  una curva parametrizzata da  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $f(x, y, z) = z^3$ . Calcoliamo l'integrale di  $f$  su questa funzione. Abbiamo  $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$  e quindi  $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} t^3 \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2} \pi^4 \end{aligned}$$

### Esempio

Sia  $\Gamma$  una curva parametrizzata da  $\gamma(t) = (t, t^2)$  per  $t \in [0, 1]$  e  $f(x, y) = xy$ . Abbiamo  $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$  e la sua norma è data da  $\sqrt{1 + 4t^2}$ . Abbiamo dunque l'integrale

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \, ds &= \int_0^1 f(t, t^2) \sqrt{1 + 4t^2} \, dt \\ &= \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt\end{aligned}$$

ponendo  $u = 1 + 4t^2$  otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \, ds &= \frac{1}{32} \int_1^5 (u^{3/2} - u^{1/2}) \, du \\ &= \frac{25\sqrt{5} + 1}{120}\end{aligned}$$

Dato un insieme di punti  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  reali allora il baricentro è

$$G = \frac{1}{n} \sum P_i$$

Se  $\Gamma$  è una curva, il baricentro di  $\Gamma$  è dato da

$$x_G = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \, ds$$

e analogamente

$$y_G = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} y \, ds$$

Se avessimo anche una densità

$$x_G = \frac{1}{\int_{\Gamma} \delta \, ds} \int_{\Gamma} \delta \cdot x \, ds$$

### Esempio

Calcoliamo il baricentro dell'insieme  $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}$ . Abbiamo quindi una semicirconferenza.  $\Gamma$  è parametrizzata da  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  per  $t \in [0, \pi]$ . La lunghezza ce l'abbiamo senza integrale, è  $\pi$ . Per simmetria la coordinata delle ascisse del baricentro è nulla. Quindi dobbiamo solo calcolare

$$y_G = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} y \, ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot 1 \, dt = \frac{2}{\pi}$$

### Esercizio

Calcolare il baricentro del pezzo (destra) di catenario che viene usato nel file sulla catenaria.

## 10 Forme differenziali



### Definizione Forme differenziali (1-forme)

Una forma differenziale è una applicazione  $\omega: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)'$  dove  $\Omega$  è aperto e  $\omega$  è almeno continua.



### Definizione Integrale su curva

Consideriamo una forma differenziale di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti e  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Allora definiamo

$$\int_{\gamma} \omega \triangleq \int_a^b \omega(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$



### Esempio

Nel piano  $\mathbb{R}^2$  consideriamo  $\omega(x, y)(v, w) = (2y - x)v + x^2w$  che è una forma differenziale. Fissati  $x, y$ ,  $\omega$  è lineare in  $v, w$ . Consideriamo  $\gamma(t) = (t, t^2)$  e calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 \omega(t, t^2)(1, 2t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 - t) \cdot 1 + t^2 \cdot 2t dt = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### Teorema

Se  $\gamma, \varphi$  sono  $\mathcal{C}^1$  a tratti e sono equivalenti, allora

$$\int_{\gamma} \omega = \pm \int_{\varphi} \omega$$

dove il segno derivata dall'equivalenza per orientamento delle due curve.

### Proof

Supponiamo che  $\varphi = \gamma \circ h$  con  $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  diffeomorfismo. Quindi  $h$  o è strettamente crescente o strettamente decrescente. Facciamo il caso con  $h' < 0$  che è più difficile. Abbiamo

l'integrale

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi} \omega &= \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}(\tau) d\tau \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\gamma(h(\tau))) (\gamma \circ h)'(\tau) d\tau \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\gamma(h(\tau))) \dot{\gamma}(h(\tau)) h'(\tau) d\tau \\
 &= \int_{h(\beta)}^{h(\alpha)} \omega(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\
 &= \int_b^a \omega(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\
 &= - \int_{\gamma} \omega
 \end{aligned}$$

usando  $h(\tau) = t$ .

In particolare

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

### Teorema

$$\int_{\gamma+\varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\varphi} \omega$$



### Definizione

Un campo vettoriale è una funzione  $F: \omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  almeno continua.

Dato un tale campo  $F$  posso associare una forma differenziale  $\omega$  ponendo  $\omega(x)v = F(x) \cdot v$ . Se  $\alpha \in (\mathbb{R}^n)'$  per il teorema di Riesz esiste un solo  $w \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\alpha(v) = w \cdot v$ . Quindi dato  $\omega(x) \in (\mathbb{R}^n)'$  esiste un unico  $F(x) \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\omega(x)v = F(x) \cdot v$  e  $\omega$  è continua in  $x$  se e solo se  $F$  è continua in  $x$ . Possiamo quindi parlare di campi vettoriali o forme differenziali in egualmodo.

Se  $F$  è un campo possiamo definire l'integrale della forma differenziale associata al campo vettoriale su una curva come

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

che è pure detto il lavoro fatto da un campo. A volte l'integranda viene denominata  $F \cdot T ds$ .



Possiamo decomporre una forma differenziale sulla base del duale

$$\omega(x) = \sum F_i(x) dx_i$$

In generale se  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  allora  $df$  è una forma differenziale, e il campo associato è  $\nabla f$ . Chiaramente  $\nabla x_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) = e_i$  e quindi  $dx_i$  è il duale di  $e_i$ . Abbiamo quindi che

$$\omega(x)v = \sum F_i(x)dx_i = \sum F_i(x) \cdot v_i = F(x) \cdot v$$



### Definizione

Diciamo che  $\omega$  è una forma differenziale esatta se  $w = df$  per qualche  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , detta primitiva o potenziale. Analogamente diremo che il campo vettoriale è conservativo se è gradiente di una funzione.

Se  $\Omega$  è connesso, tutti gli infiniti potenziali differiscono di una costante. Diciamo che  $\Omega$  è un dominio se è un aperto connesso.

Supponiamo che  $w = df$  sia una forma differenziale esatta e sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva  $\mathcal{C}^1$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Cioè l'integrale di  $\omega$  dipende solo dagli estremi della curva.



### Esempio Forma non esatta

Consideriamo il campo vettoriale  $F(x, y) = (x^2y, x)$ . Questo non è un campo conservativo. Per assurdo supponiamo che lo sia e che quindi esista  $f$  tale che  $F(x, y) = \nabla f$ . Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

ma le sue derivate sono derivabili, quindi  $f \in \mathcal{C}^2$ . Ma allora deve valere il teorema di Schwarz, ma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

che non coincidono, che è assurdo.

### Teorema Condizione necessaria

Sia  $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  un campo conservativo. Allora,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

per  $x \in \Omega$ .

**Proof**

Per ipotesi  $F = \nabla f$  con  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ . Allora vale il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Ma  $F = \nabla f$  significa che  $F_i(x) = \partial f / \partial x_i(x)$ . Quindi deve valere la tesi.

**Teorema Forma differenziale irrotazionale**

Sia  $F \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  irrotazionale se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

per tutte le  $i, j$ . Per le forme differenziali si dice forma chiusa (e si scrive  $d\omega = 0$  cioè la derivata esterna).

Il nome deriva dall'operatore di rotore che per  $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è definito come il campo vettoriale costruito nel modo seguente

$$\text{rot} F \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Il teorema che abbiamo appena visto è che se  $\omega$  esatta allora è chiusa (oppure se il campo è conservativo allora è irrotazionale).

3,4 Dicembre

## 11 Integrali

Definendo gli integrali doppi otteniamo come bonus il fatto che possiamo definire l'area di un dominio piano. Quando generalizziamo l'idea di funzioni a scala, usando partizioni di dominio di dimensioni superiori, abbiamo il problema di sfiorare fuori dal bordo.



### Definizione

Sia  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rettangolo e sia  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata in  $Q$ . Siano  $\Pi_X = \{a = x_0, < x_1 < \dots < x_n = b\}$  e  $\Pi_Y = \{c = y_0, < y_1 < \dots < y_m = d\}$  due partizioni. Sia quindi  $\Pi = \Pi_X \times \Pi_Y$  una partizione di  $Q$ . Denotiamo  $x_h$  e  $y_k$  le coordinate dei rettangoli delle rispettive variabili, quindi abbiamo  $n \times m$  rettangolini

$$Q_{hk} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k]$$

Poniamo

$$m_{hk} \triangleq \inf_{Q_{hk}} f, \quad M_{hk} \triangleq \sup_{Q_{hk}} f$$

e

$$|Q_{hk}| = (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})$$

l'area di un rettangolino. Definiamo quindi

$$s(\Pi) \triangleq \sum_{h,k} |Q_{hk}| m_{hk}, \quad S(\Pi) \triangleq \sum_{h,k} |Q_{hk}| M_{hk}$$

Definiamo l'integrale superiore e inferiore

$$\overline{\iint_Q} f(x, y) dx dy \triangleq \sup_{\Pi} S(\Pi), \quad \underline{\iint_Q} f(x, y) dx dy \triangleq \inf_{\Pi} s(\Pi)$$

Se i due coincidono allora diciamo che  $f$  è Riemann-integrabile in  $Q$ .



Chiaramente la funzione di Dirichlet generalizzata

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

non è Riemann-integrabile.

### Proposition

Se  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste partizione  $\Pi$  tale che  $S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon$ , allora  $f$  è integrabile.

### Teorema

Se  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora è integrabile in  $Q$ .

### Proof

$f$  è continua in  $Q$  (compatto) quindi è uniformemente continua, cioè  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Basta scegliere  $\Pi$  in modo tale che  $\text{diam} Q_{hk} < \delta$  per tutti gli  $h, k$ . Abbiamo quindi

$$S(\Pi) - s(\Pi) = \sum_{h,k} |Q_{hk}| (M_{hk} - m_{hk}) \leq \varepsilon \sum_{h,k} |Q_{hk}| = |Q| \varepsilon \rightarrow 0$$

### Definizione

Sia  $Z \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato. Diciamo che  $Z$  è trascurabile (di misura nulla) se  $\forall \varepsilon > 0$  esistono  $Q_1, \dots, Q_n$  rettangoli tali che

1.  $Z \subseteq \bigcup Q_i$ ;
2.  $\sum |Q_i| < \varepsilon$

Non è quella di Lebesgue. Un insieme finito è trascurabile.

Consideriamo ora un segmento, per esempio parallelo alle ascisse. Anche questo è trascurabile in quanto è ricopribile da un solo rettangolo di altezza  $\varepsilon$ . Anche se il segmento è orientato in un'altra direzione, possiamo considerare un ricoprimento di quadratini di area  $\varepsilon$ , di cui quindi ne servono  $L/(\sqrt{2}\varepsilon)$  dove  $L$  è la lunghezza. Quindi ne servono  $N \sim \frac{1}{\varepsilon}$  e quindi l'area è  $\sim \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 \rightarrow 0$ .

Il grafico di una funzione  $y = f(x)$  non è in generale trascurabile. Se è Riemann-integrabile su  $[a, b]$ , lo è di sicuro. In tal caso, possiamo considerare funzioni a scala arbitrariamente vicine al grafico, quindi  $S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon$ . Possiamo costruire dei rettangolini usando la differenza fra le funzioni a scala superiori e inferiori

$$\sum_j (x_j, x_{j-1})(M_j - m_j) < \varepsilon$$

e i rettangolini contengono il grafico di  $f$ , quindi è trascurabile.

Se  $Z$  è un insieme con interno non vuoto, allora non è trascurabile. In tal caso contiene almeno una bolla.

Nella definizione di insieme trascurabile richiedo che  $Z \subseteq \bigcup Q_i$ . In generale però non deve essere racchiuso nell'interno. Non lede la generalità se richiediamo che  $Z$  sia contenuto nell'interno di  $\bigcup Q_i$ , in quanto possiamo sempre aumentare leggermente le grandezze dei rettangoli (stesso centro ma raddoppiando i lati e  $|2Q_i| = 4|Q_i|$ ). Possiamo quindi assumere ciò d'ora in avanti e ci verrà comodo. Inoltre non richiediamo che i rettangoli provengano da una partizione prodotto, e possono appunto sovrapporsi. Senza ledere la generalità possiamo supporre che derivino da una partizione prodotto. Infatti, basta aumentare il numero di rettangoli per separare i punti di overlap. Quindi due rettangoli che si sovrappongono possono diventare 7 nuovi rettangoli. In questo modo, la somma delle aree diminuisce in quanto non conto molteplici volte gli overlap, ma l'area totale decresce quindi va bene comunque.

### Esempio

Sia

$$Z = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

Questo insieme non è trascurabile in quanto, se consideriamo una partizione prodotto, la partizione deve coprire tutto  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Ma quindi l'area totale è 1, quindi non è trascurabile. Infatti  $\partial Z = [0, 1] \times [0, 1]$ .

### Teorema

Sia  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e sia

$$D_f = \{(x, y) \in Q \mid f \text{ è discontinua nel punto} \}$$

Se  $\mu(D_f) = 0$  allora  $f$  è integrabile.

### Proof

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e costruiamo una partizione prodotto. I punti di  $D_f$  sono ricoperti da alcuni rettangoli della partizione, e siccome  $\mu(D_f) = 0$  possiamo scegliere  $\Pi$  in modo che la somma delle aree di questi rettangoli siano minori di  $\varepsilon$ . Senza perdita di generalità supponiamo che i punti di discontinuità siano contenuti negli interni dei rettangolini che li contengono. Nei rettangolini



che non contengono punti di discontinuità, la funzione è continua. Sui rettangoli che contengono punti di  $D_f$ ,  $f$  è limitata (come ovunque) e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{h,k \\ \cup Q_{h,k} \supseteq D_f}} &\leq \sum_{\substack{h,k \\ \cup Q_{h,k} \supseteq D_f}} 2 \sup_Q(|f|) \\ &\leq 2 \sup_Q(|f|) \varepsilon \end{aligned}$$

Il contributo della differenza fra la somma superiore e inferiore è quindi trascurabile. Consideriamo ora il contributo a  $S(\Pi) - s(\Pi)$  dovuto ai rettangoli in cui  $f$  è continua. Siccome l'insieme di questi rettangoli è compatto e  $f$  è continua, allora  $f$  è uniformemente continua. Raffiniamo eventualmente la partizione possiamo supporre che  $\text{diam} Q_{h,k} < \delta$ . Per lo stesso ragionamento utilizzato in precedenza  $S(\Pi) - s(\Pi) \leq \mu(Q)\varepsilon$ , quindi in totale

$$S(\Pi) - s(\Pi) \leq 2 \sup_Q(|f|) \varepsilon + \varphi \mu(Q) \rightarrow 0$$

Sia  $Q = [a, b] \times [c, d]$  e sia  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile. Vogliamo stabilire se esiste una formula del tipo

$$\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

### Esempio

Sia  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  e consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1_{\mathbb{Q}}(x) & y = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente  $f$  è Riemann integrabile in  $Q$ , ma se fisso  $y = \frac{1}{2}$  la funzione non è integrabile. In questo caso può pure andare bene in quanto uno dei due integrali non è valido solo in un punto, ma in generale possiamo fare esempi peggiori.

### Teorema Teorema di Fubini

Sia  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile. Se  $\forall y \in [c, d]$  Esiste

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

cioè se  $f(\cdot, y)$  è integrabile in  $[a, b]$ , allora  $F$  è integrabile in  $[c, d]$  e vale

$$\iint_Q f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d F(y) \, dy$$

### Proof Teorema di Fubini

Fissiamo per  $Q$  una partizione prodotto  $\Pi = \Pi_X \times \Pi_Y$ . Fissiamo un rettangolo  $Q_{h,k}$  e fissiamo  $y \in [y_{k-1}, y_k]$ . In questo quadratino consideriamo la striscia con  $y$  fissato, maggioriamo con il sup

sulla striscia e poi con il sup di tutto il quadratino (e rispettivamente sup)

$$\begin{aligned} \sum_h (x_h - x_{h-1}) m_{h,k} &\leq \\ \sum_h (x_h - x_{h-1}) \inf_{x \in [x_{h-1}, x_h]} f(x, y) &\leq F(y) \leq \sum_h (x_h - x_{h-1}) \sup_{x \in [x_{h-1}, x_h]} f(x, y) \\ &\leq \sum_h (x_h - x_{h-1}) M_{h,k} \end{aligned}$$

Per integrare scriviamo

$$\sum_{h,k} |Q_{h,k}| m_{h,k} \leq \sum_k (y_k - y_{k-1}) \inf_{y \in [y_{k-1}, y_k]} F(y) \leq \sum_k (y_k - y_{k-1}) \sup_{y \in [y_{k-1}, y_k]} F(y) \leq \sum_{h,k} |Q_{h,k}| M_{h,k}$$

$$s(f, \Pi) \leq s(F, \Pi_Y) \leq S(F, \Pi_Y) \leq S(f, \Pi)$$

Per ipotesi  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\Pi$  tale che  $S(f, \Pi) - s(f, \Pi) < \varepsilon$ . Ma allora  $S(F, \Pi_Y) - s(F, \Pi_Y) < \varepsilon$  e quindi  $F$  è integrabile su  $[c, d]$  e vale l'uguaglianza tra gli integrali.

In particolare se  $f \in \mathcal{C}(Q)$ , allora  $f$  è integrabile su  $Q$  e pure la sua restrizione  $f(\cdot, y)$  è continua su  $[a, b]$ , e quindi  $F$  è definita.



### Esercizio

Sia  $Q = [0, 1] \times [0, 3]$  e

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xy & y \leq x^2 \\ x^3 + 2x^2y & y > x^2 \end{cases}$$

La funzione è continua sicuramente tranne sul grafico di  $y = x^2$ . Tale bordo è una funzione integrabile e quindi trascurabile in quanto insieme di misura nulla, quindi  $f$  è integrabile. La funzione  $f(x, \cdot)$  è integrabile in quanto continua tranne che al massimo in un singolo punto. Quindi vale il teorema di Fubini. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^3 f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} 2xy \, dy + \int_{x^2}^3 (x^3 + 2x^2y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 + 9x^2 - x^6) \, dx \end{aligned}$$



### Esercizio

Sia  $f(x, y) = x^{-3}e^{\frac{y}{x}}$  e  $Q = [1, 2] \times [0, 1]$ . Non abbiamo problemi e la funzione è continua nel dominio, quindi è integrabile. È anche limitata in quanto su un compatto. Integriamo prima rispetto alla  $y$

$$\begin{aligned}\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_0^1 x^{-3} e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx \\ &= \int_1^2 x^{-2} (e^{\frac{1}{x}} - 1) \, dx \\ &= \int_1^2 x^{-2} e^{\frac{1}{x}} \, dx - \int_1^2 x^{-2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} + \sqrt{e} + e\end{aligned}$$

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Siccome è limitato è sicuramente contenuto in un rettangolo  $Q$ . Possiamo pure scegliere un rettangolo tale che  $D$  sia contenuto nel suo interno. Definiamo ora una funzione ausiliaria

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in Q \setminus D \end{cases}$$

Definiamo quindi

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \triangleq \iint_Q \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy$$

La definizione è ben posta, cioè indipendente da  $Q$ , in quanto l'integrale sulla intersezione dei rettangoli è nullo.

Anche se  $f$  è continua (in cui caso vogliamo che sia integrabile), il bordo di  $D$  potrebbe essere non trascurabile, e quindi  $\tilde{f}$  non sarebbe integrabile. Dobbiamo quindi imporre che il bordo sia trascurabile.

### Esempio

Sia  $D = (Q \cap [0, 1])^2 \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ . Prendiamo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x, y) = 1$ . Tale funzione è continua, ma  $f$  è la funzione di Dirichlet e non è integrabile. Infatti, il bordo è  $[0, 1] \times [0, 1]$  e non è trascurabile.

### Definizione Misura di Peano-Jordan

Diciamo che  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è misurabile su  $D$  se

$$\exists \iint_Q 1 \, dx \, dy$$

e diciamo

$$\mu(D) \triangleq \iint_Q 1 \, dx \, dy$$

### Teorema

$D$  è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se  $\partial D$  è trascurabile.

Quindi o  $f = 1$  è integrabile o ha misura nulla.

### Proof

Sia  $\Pi$  una partizione prodotto di un quadrato  $Q$  contenente  $D$ , e calcoliamo  $S(\Pi) - s(\Pi)$ . Se  $Q_{hk} \subseteq D^\circ$ , allora il contributo di tale rettangolino è la sua area, quindi inf e sup coincidono, quindi il contributo in  $S(\Pi) - s(\Pi)$  è nullo. Se  $Q_{hk} \subseteq (Q \setminus D)^\circ$ , vale lo stesso ragionamento, il contributo è nullo. Allora i contributi sono dati da quelle che intersecano sia  $D$  che il suo complementare, quindi  $Q_{hk} \cap D \neq \emptyset$  e  $Q_{hk} \cap (Q \setminus D) \neq \emptyset$ . Il contributo di questi è

$$S(\Pi) - s(\Pi) = \sum_{\substack{h,k \\ Q_{hk} \cap D \neq \emptyset \\ Q_{hk} \cap (Q \setminus D) \neq \emptyset}} |Q_{h,k}| \cdot 1$$

Siccome il quadratino interseca punti di  $D$ , il suo sup è 1, mentre il suo inf è 0 in quanto interseca punto del complementare. Per avere  $\mu(\partial D) = 0$  vogliamo che

$$\sum_{\substack{h,k \\ Q_{h,k} \cap \partial D \neq \emptyset}} |Q_{h,k}| < \varepsilon$$

Abbiamo due famiglie diverse di indici

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{(h,k) \mid Q_{h,k} \cap D \neq \emptyset \wedge Q_{h,k} \cap (Q \setminus D) \neq \emptyset\} \\ \mathcal{F}' &= \{(h,k) \mid Q_{h,k} \cap \partial D \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Chiaramente  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ . L'altra inclusione non è vera in quanto ci può essere un quadratino che tocca solamente il bordo in uno dei suoi lati. Tuttavia, possiamo modificare la partizione riducendola, fino a che  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ , quindi vale la tesi. Esercizio: dimostrare che se  $Q_{h,k} \cap D \neq \emptyset$  e  $Q_{h,k} \cap (Q \setminus D)$  allora  $Q \cap \partial D \neq \emptyset$ .

### Teorema

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  misurabile,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  limitata,  $f$  continua su  $D^\circ$ . Allora,  $f$  è Riemann integrabile su  $D$ .

### Proof

Sia  $Q$  un rettangolo tale che  $Q^\circ \supseteq \overline{D}$ .  $Q = D^\circ \sqcup \partial D \sqcup (Q \setminus D)^\circ$ . Sia  $\tilde{f}$  l'estensione nulla di  $f$  a  $Q$ . Notiamo che in  $D$ ,  $f \equiv \tilde{f}$  e quindi  $f \equiv \tilde{f}$  anche su  $D^\circ$ . Inoltre  $\tilde{f} \equiv 0$  su  $(Q \setminus D)^\circ$  e quindi è continua anche su  $(Q \setminus D)^\circ$ . Dunque, l'insieme delle discontinuità di  $f$  è contenuto in  $\partial D$ , che per ipotesi ha misura nulla, quindi è integrabile su  $D$ .

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato,  $Z \subseteq \mathbb{R}^2$  trascurabile. Supponiamo che  $f: D \cup Z \rightarrow \mathbb{R}$  sia limitata. Allora,  $f$  è Riemann integrabile su  $D$  se e solo se lo è anche su  $D \cup Z$  se e solo se lo è anche su  $D \setminus Z$ . Anche per unione finita di insiemi trascurabili.

Sia  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  limitata con  $D$  limitato. In generale non c'è una correlazione fra l'integrabilità su  $D$  e sulla sua chiusura. Però, se  $D$  è misurabile, allora  $f$  è integrabile su  $D$  se e solo se lo è su  $\overline{D}$ . Questo è dato dal fatto che  $\overline{D} = \partial D \cup D$ .

Può succedere che  $f$  sia integrabile su  $D$  anche se  $D$  non è misurabile. Per esempio se  $f \equiv 0$ . Anche se ho un dominio di misura nulle, tutte le funzioni sono integrabili e hanno integrale nullo. In tal caso basta prendere una partizione prodotto  $\Pi$ , possiamo ricoprire il dominio con un numero finito di rettangoli con area  $< \varepsilon$ . Per tutti gli altri rettangoli, il contributo in  $S(\Pi) - s(\Pi)$  è nullo.

### Definizione Dominio semplice

Siano  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua such that  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  on  $[a, b]$ . Diciamo che  $D = \{(x, y) \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

$x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$  è un dominio *y-semplce* o *normale rispetto all'asse y*. Analogamente per l'altro asse.

Un dominio di questo tipo è misurabile in quanto  $\partial D$  è l'unione di quattro pezzi (2 grafici e 2 segmenti) che sono tutti Riemann integrabili in quanto le funzioni sono continue, e quindi misurabile.

### Teorema

Sia  $D$  un dominio *y-semplce* e  $f$  come sopra. Supponiamo che  $f$  sia limitata e continua in  $D^\circ$ . Allora

$$\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

### Proof

Possiamo racchiudere il dominio in un rettangolo  $Q$  e consideriamo  $\tilde{f}$  l'estensione nulla di  $f$  a  $Q$ . Ovviamente  $\tilde{f}$  è integrabile in quanto  $D$  è misurabile. Dobbiamo mostrare che  $\forall x \in [a, b], \tilde{f}(x, \cdot)$  è integrabile in  $[c, d]$  dove  $[c, d]$  è il lato del rettangolo  $Q$ . Chiaramente  $\tilde{f}$  ha al più due discontinuità, e quindi integrabile in quanto continua altrove. Quindi vale il teorema di Fubini e vale il teorema

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_Q \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_c^{\alpha(x)} 0 \, dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy + \int_{\beta(x)}^d 0 \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \, dx \end{aligned}$$

### Teorema

Siano  $f, g$  due funzioni integrabili su un dominio  $D$  misurabile e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora

1.  $\alpha f + \beta g$  è integrabile e vale la somma (linearità);
2. se  $f \leq g$  allora vale anche con gli integrali (monotona);
3. se  $|f|$  è integrabile allora il valore assoluto dell'integrale è minore dell'integrale di  $|f|$ .
4. Teorema della media: se  $m = \inf_D f$  e  $M = \sup_D f$ , allora

$$m \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq M$$

5. se  $D$  è compatto e connesso e  $f$  è continua, allora esiste  $(x_0, y_0) \in D$  tale che

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = f(x_0, y_0)$$

6. se  $D = D_1 \cup D_2$  tale che  $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ , allora

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy$$



### Esercizio

Calcolare il volume del cilindroide definito da  $z = xy$  nel dominio

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{4} \wedge x^2 + y^2 - 25 \leq 0\}$$

Chiaramente dobbiamo prendere il modulo per assicurarci un valore positivo

$$\iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy$$

Il dominio è un cerchio di raggio 5 centrato nell'origine, tagliando da una retta (e dall'asse delle ascisse). Siamo quindi nel primo quadrante. Notiamo che il punto  $(4, 3)$  si trova sulla circonferenza. Sezioniamo tale area orizzontalmente

$$\begin{aligned} \iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy &= \int_0^3 y \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} x \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \frac{25}{2} \left(1 - \frac{1}{9}y^2\right) dy \\ &= \frac{225}{8} \end{aligned}$$



### Esercizio

Calcolare

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi \wedge \sqrt{x} < y\sqrt{\pi}\}$$

e  $f(x, y) = \frac{\sin(y^2)}{y}$ . Notiamo che il denominatore non si annulla mai, ma l'origine è un punto di accumulazione quindi ci si può avvicinare. Dobbiamo verificare che  $f$  sia limitata. Sicuramente  $f > 0$ , inoltre

$$\frac{y^2}{y} \leq \frac{y^2}{y} = y \rightarrow 0$$

quindi è limitata e nell'origine si può allungare per continuità.

$$\begin{aligned} \iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{y^2} \frac{\sin(y^2)}{y} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2) y \, dy \\ &= \frac{1}{2} (-\cos \pi + \cos 0) = 1 \end{aligned}$$



### Esercizio

Calcolare, al variare di  $\alpha > 1$ ,

$$\iint_D \frac{x^2}{y} dx dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \mid x > 0 \wedge x^\alpha < y < x\}$$

Siccome  $x^\alpha < x$  allora deve essere  $x < 1$ . Il dominio è quindi l'intersezione nel primo quadrante fra  $y = x$  e  $y = x^\alpha$ . In generale il limite di questa funzione nell'origine non esiste, ma dobbiamo considerare solamente le direzioni che stanno nel dominio. Possiamo notare che

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} \leq \frac{x^2}{x^\alpha} = x^{2-\alpha}$$

quindi se  $\alpha \leq 2$  va tutto bene. Se  $\alpha > 2$ , la funzione è illimitata. Infatti, se  $\varepsilon > 0$  è tale che  $2 - 2 + \varepsilon < \alpha$ , allora  $f(t, t^{2+\varepsilon}) = 1/t^\varepsilon \rightarrow \infty$ . Quindi la funzione è limitata solo per  $1 < \alpha \leq 2$ . Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \iint_D |f(x, y)| dx dy &= \int_0^1 \int_{x^\alpha}^x \frac{x^2}{y} dy dx \\ &= (1 - \alpha) \int_0^1 x^2 \ln(x) dx \\ &= \frac{\alpha - 1}{9} \end{aligned}$$



### Esercizio

Scambiare l'ordine di integrazione in

$$\int_{-1}^1 \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx$$

Abbiamo che  $|x| = \sqrt{2-x^2}$  se e solo se  $x = \pm 1$ . Il dominio di integrazione è quindi una fetta di circonferenza verso l'alto. Per sezionarlo orizzontalmente dobbiamo spezzarlo in due

$$\iint_D |f(x, y)| dx dy = \int_0^1 \int_{-y}^y f(x, y) dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx dy$$



### Esercizio

Calcolare

$$\iint_{\{x^2+y^2 < 1\}} (x - y) \cos(x^2 + y^2) dx dy$$

Notiamo che  $f(x, y) = -f(-x, -y)$  e il dominio è simmetrico, allora l'integrale fa zero.

## 11.1 Integrali tripli

La teoria si estende in maniera completamente analoga. Ora, il grafico di una funzione integrabile  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è un insieme di misura nulla.



### Esempio

Consideriamo l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$$

è un 3-simplesso standard, anche detto tetraedo fondamentale dell'ottante positivo. Vogliamo calcolare

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Possiamo sezionarlo per strati  $z \in [0, 1]$

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz$$

Alternativamente possiamo sezionarlo per fili. Consideriamo la proiezione del dominio sul piano  $xy$ . Consideriamo dei fili verticali che arrivano fino all'estremo del dominio  $z = 1 - x - y$ . Quindi un singolo filo va da 0 a  $1 - x - y$ . Abbiamo quindi

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_T \left( \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy$$

dove  $T$  è la base, cioè  $\{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$

Abbiamo quindi 2 modi di sezionare un integrale doppio e 6 di sezionarne uno triplo.

In generale, se

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in T, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

abbiamo

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_T \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$$





### Esempio

Calcolare il volume del 3-simple standard. Dobbiamo integrare la funzione 1. Cominciamo per strati

$$\begin{aligned}\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \iint_{D_z} 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} 1 - z - y \, dy \, dz = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Facciamolo ora per fili

$$\begin{aligned}\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz &= \iint_T \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \, dx \, dy \\ &= \iint_T 1 - x - y \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dy \, dx = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

### Esercizio

L'ipervolume dell' $n$ -simpleso è  $1/n!$ .

## 12 19/12/25

Sia  $\sigma: \bar{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $A$  aperto connesso (limitato per quando vogliamo calcolare gli integrali). Imponiamo l'iniettività tranne che sui punti del bordo, cioè  $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$  e  $\sigma(u_1, v_1) = \sigma(u_2, v_2)$  allora  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \partial A$ . Abbiamo che  $\sigma_u, \sigma_v$  costituiscono una base di  $T_{\sigma(u,v)}\Sigma$ . Definiamo  $\sigma_u \wedge \sigma_v$  come il vettore normale alle superfici, che è per forza non nullo, cioè stiamo completando una base. In particolare,  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|$  rappresenta l'area del parallelogramma, quindi abbiamo

$$dS = \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv$$

Quindi se vogliamo integrare

$$\text{Area}(S) \triangleq \iint_{\Sigma} dS = \iint_A \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv$$

Se  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  il suo integrale di superficie

$$\iint_{\Sigma} f dS \triangleq \iint_A f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv$$

dove  $\sigma: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione semplice e regolare di  $\Sigma$ .

### Esempio

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo definire una parametrizzazione cartesiana per tale grafico, cioè  $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Abbiamo che  $\sigma_x = (1, 0, f_x)$  e  $\sigma_y = (0, 1, f_y)$  e quindi

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

e quindi la norma è data da  $\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$ .

### Esempio Cilindro circolare retto

Abbiamo  $x^2 + y^2 = R^2$  con  $R > 0$  si può parametrizzare usando le coordinate cilindriche. Abbiamo  $\sigma(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $z \in \mathbb{R}$ . Se consideriamo un cilindro limitato, per esempio  $z \in [-1, 1]$ , otteniamo una superficie con bordo, altrimenti il cilindro illimitato non ha bordo. Possiamo costruire tale oggetto prendendo una striscia di piano e identificando i due lati. Calcoliamo la normale al cilindro:

$$\sigma_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0), \quad \sigma_z = (0, 0, 1)$$

e quindi

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

la cui norma è  $R$ . Quindi  $dS = R d\theta dz$ . L'area è quindi

$$\iint_{[0, 2\pi] \times [-1, 1]} R d\theta dz = R 2\pi - 2$$

Notiamo che partendo da un foglio di carta, possiamo identificare punti per formare un cilindro o una sfera, ma per la sfera serve che il foglio sia elastico, a differenza del cilindro. Questo è legato alla lunghezza d'arco, che non esiste per le superfici, proprio perché serve qualcosa di elastico e che quindi non rispetta l'area e le lunghezze. Oltre al cilindro c'è il cono e la rigata delle tangenti come superficie sviluppabile. Per essere sviluppabile serve che la curvatura di Gauss sia nulla.

### Esempio Toro

Il toro con  $r < R$  è dato dalla rotazione di una circonferenza rispetto ad un asse che non lo

interseca. La sua parametrizzazione è

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$$

con  $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ . Questo si può formare identificando i lati di un foglio a forma di tubo. Calcoliamo la sua area. Abbiamo

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = ((R + r \cos \varphi)r \cos \theta \cos \varphi, (R + r \cos \varphi)r \sin \theta \cos \varphi, (R + r \cos \varphi)r \sin \varphi)$$

e la sua norma è  $(R + r \cos \varphi)r$ , quindi l'area è data da

$$\iint_{[0, 2\pi]^2} (R + r \cos \varphi)r \, d\theta \, d\varphi = 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \cos \varphi) \, d\varphi = (2\pi r)(2\pi R)$$

### Esempio Möbius strip

Il bordo del nastro è una curva che è connessa, è una sola componente. Per parametrizzarlo prendiamo una circonferenza sul piano  $xy$  e un segmento centrato su un punto della circonferenza, e facciamo ruotare il segmento e man mano che ruota lo facciamo anche girare con la metà della velocità

$$\sigma(u, v) = \left( \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \right)$$

con  $u \in [0, 2\pi]$  e  $v \in [-1, 1]$ .

Se invece invertiamo l'ordine degli altri due lati invertendo l'orientamento otteniamo la bottiglia di Klein, che non si può immergere in  $\mathbb{R}^3$ .

### Esempio Integrale di superficie

Calcolare

$$\iint_{\Sigma} \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \, dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

Abbiamo il grafico di un paraboloide iperbolico come superficie, quindi  $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ . Allora

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

Il dominio di integrazione è l'intersezione fra il complementare di un cerchio e l'ellisse data. Questa ellisse ha semiasse 2 rispetto alle  $x$  e 1 rispetto a  $y$ . Il dominio sono quindi quattro pezzi simmetrici, di cui ne chiamiamo uno  $A$  e poi moltiplichiamo per 4.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \, dS &= \iint_A \frac{x^2 - y^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy \\ &= \iint_A x^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

Per calcolare questo integrale calcoliamo l'integrale sull'ellisse e sottraiamo quello sul cerchio  $I_1 - I_2$ . Calcoliamo quello sul cerchio usando le coordinate polari

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} x^2 \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Per fare  $I_2$  schiacciamo l'ellisse in un cerchio, quindi componiamo un'omotetia e poi le coordinate polari, quindi la trasformazione è

$$\begin{cases} x = 2\rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

il cui Jacobiano è

$$J\Phi = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & -2\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

il cui determinante è  $2\rho$ . Abbiamo quindi

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\rho \cos \theta)^2 2\rho d\rho d\theta = 2\pi$$

Quindi l'integrale totale è  $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{4}\pi$ .

## 12.1 Flussi

Sia  $\Sigma$  una superficie orientabile,  $F$  un campo vettoriale definito su  $\Sigma$ . Per la definizione vera serve una 2-forma. Vogliamo misurare la quantità di "fluido" che scorre attraverso la superficie. Mi interessano le componenti normali alla superficie, quindi definiamo. Dobbiamo poter scegliere il vettore normale in maniera consistente, quindi serve che sia orientabile (a meno che non facciamo un rivestimento doppio).

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} F \cdot m \, dS &\triangleq \iint_A F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_A F(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \, du \, dv \end{aligned}$$

Cambiando l'orientazione si inverte il segno del flusso.

### Esempio

Calcoliamo il flusso del campo  $F(x, y, z) = (0, 0, z)$  uscente dalla sfera di raggio  $R$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{S_R} F \cdot m_z \, dS &= \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi}} (0, 0, R \cos \varphi) \cdot (R \sin \varphi (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)) \, d\theta \, d\varphi \\ &= R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

che è anche il volume della sfera.

### Esempio

Calcoliamo il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro

$$\Sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

del campo  $F(x, y, z) = (\sin z, y, x^2)$ . La parametrizzazione è  $\sigma(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$  con

$0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq z \leq 1$ . Abbiamo  $\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$  e l'integrale è

$$\begin{aligned} \iint_{S_R} F \cdot m_z \, dS &= \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1}} F(\sigma(\theta, z)) \cdot \sigma_\theta \wedge \sigma_z \, d\theta \, d\varphi \\ &= \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1}} (R \sin z \cos \theta + R^2 \sin^2 \theta) \, d\theta \, d\varphi \\ &= R\pi^2 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il flusso uscente dai due "tappi". Dobbiamo parametrizzare i tappi. Quello superiore con  $\sigma(x, y) = (x, y, 1)$  e  $\sigma(x, y) = (x, y, -1)$ . Il normale esterno è  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$ . Quindi il flusso attraverso il tappo superiore è

$$\begin{aligned} \iint_{S_R} F(x, y, 1) \cdot k \, dS &= \iint_{S_R} F(x, y, 1) \cdot k \, dx \, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

e quello inferiore è

$$- \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 \, dx \, dy$$

quindi si annullano.

### Teorema Teorema della divergenza o di Gauss

Sia  $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, connesso, limitato e semplice rispetto a tutti gli assi,  $\partial\Omega$  ipersuperficie regolare orientabile,  $F \in C'(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  cioè è  $C'$  su un aperto che contiene  $\overline{\Omega}$ . Allora,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n = \int_{\partial\Omega} F \cdot m_e \, dS$$

dove

$$\operatorname{div} F = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

dove  $F_i$  sono le componenti di  $F$ .

(Come si generalizza la normale di una ipersuperficie, e in pratica come si calcola? Con il determinante). Prima avevamo dei campi la cui divergenza era 1, quindi usciva il volume.

Il teorema fondamentale del calcolo è un caso particolare del teorema della divergenza (nella dimostrazione viene usato il teorema fondamentale del calcolo).

L'ipotesi che il dominio debba essere semplice rispetto a tutti gli assi può essere rilassata. Dato un dominio che non è semplice rispetto a tutti gli assi, possiamo spezzarlo e scomporre l'integrale su pezzi di dominio che sono semplici rispetto a tutti gli assi. Per ciò dobbiamo notare che il flusso sul "taglio" non è nullo, ma siccome hanno direzione opposta si elidono. Quindi possiamo rilassare la condizione all'unione finita di domini semplici rispetto a tutti gli assi.