

# Exercises

Paolo Bettelini

## Contents

### 1 Esercizi

1

## 1 Esercizi

### Esercizio

Verificare per induzione che per ogni  $k$ ,

$$D^k e^{-\frac{1}{x^2}} = P_k(x) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

con  $x \neq 0$ , dove  $P_k$  è un polinomio di grado minore o uguale a  $k$  in  $\frac{1}{x^3}$ . Dedurre inoltre che per tutte le  $k$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} D^k \left( e^{-\frac{1}{x^2}} \right) = 0 = D^k \left( e^{-\frac{1}{x^2}} \right) (0)$$

### Esercizio Studiare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} = f_+(x) & x > 0 \\ a \ln \left( \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} \right) + e^{b \cos(x)-1} = f_-(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di derivabilità  $f_+(x)$  è derivabile per  $x > 0$  e quindi  $f$  è derivabile per  $x > 0$ . La funzione  $f_-$  è anch'essa derivabile per  $x < 1$ , in particolare per  $x \leq 0$ . Quindi, manca da studiare il punto  $x = 0$ . La continuità deve valere

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Il limite è dato da

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = f_-(0) = e^{b-1}$$

in quanto  $f_-$  è continua. Quindi,  $f$  è sempre continua a sinistra. L'altro limite è dato da

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{x^2}{x} + e^{(\sqrt{1+x^2}-1) \ln(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{2} x^2 \ln(x)} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$x^2 \ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^2} \rightarrow 0$$

Quindi, il secondo limite è 1. Allora  $f$  è continua se e solo se  $1 = e^{b-1}$ , quindi  $b = 1$ . Poiché la derivabilità implica la continuità, deve essere  $b = 1$ . Inoltre devono esistere finite  $D_- f(0) =$

$D_+f(0)$ , quindi

$$D_-f(0) = D_-(f_-)(0) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_-(x) - f_-(0)}{x - 0} = -a \\ Df_-(0) = -a \end{cases}$$

e quella sinistra

$$D_+f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_+(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Concludiamo allora che  $f$  è derivabile in  $x = 0$  se e solo se  $b = 1$  e  $a = -\frac{1}{2}$ . In tal caso  $f'(0) = \frac{1}{2}$ . Se  $b = 1$  e  $a \neq -\frac{1}{2}$ ,  $f$  è continua ma non derivabile e  $x = 0$  abbiamo un punto angoloso.

### Esercizio

Dimostrare che se  $f$  è continua, periodica e non costante, ammette un minimo periodo positivo. La funzione di Dirichlet è periodica di ogni razionale, quindi non ha un periodo minimo.

### Esercizio

Scrivere la relazione fra  $F_a(x)$  e  $F_b(x)$  per  $a \neq b$ .

**Esercizio** Tra tutti i contenitori cilindrici di volume fissato  $V$ , trovare quello che ha superficie minima.

Abbiamo che

$$V = r^2 \pi h$$

e

$$S = 2r^2 \pi h + 2r \pi h$$

Vogliamo minimizzare  $S$  con  $V$  costante. Troviamo  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ , e allora

$$\frac{S}{2} = \pi r^2 + \frac{V}{r}$$

I vincoli sono  $r > 0$ . Minimizziamo allora  $f(r) = \frac{S}{2}$ . La funzione è derivabile e quindi continua in  $(0, +\infty)$ . Notiamo che  $f(r) \rightarrow \infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow \infty$ . Per estensione del teorema di Weierstrass al caso di funzioni definite su intervalli aperti che tendono ad infinito agli estremi, esiste un minimo assoluto in tale intervallo. Poiché  $f$  è derivabile in  $(0, +\infty)$ , tale minimo è assunto in un punto stazionario, per il teorema di Fermat. Abbiamo

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r^2}(2\pi r^3 - V)$$

Risolviamo quindi  $f'(r) = 0$  e quindi

$$r = \left( \frac{V}{2\pi} \right)^{1/2}$$

Vi è un unico punto stazionario nell'intervallo, e quindi questo è il minimo assoluto.

### Esercizio

Let

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5 \right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di  $E$ ,  $F$ ,  $E \cup F$  e  $E \cap F$ .

- $E$  è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è  $\frac{1}{2}$ , mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi  $\sup E = 5$ , ma non vi è un massimo.
- $F$  è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché  $x_n > 0$ . Per verificare  $\sup$  e  $\inf$ , è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il termine  $n+2$  cresce con  $n$ , quindi  $\frac{1}{n+2}$  decresce al crescere di  $n$  e quindi  $x_n$  cresce approssimando 1. Allora con  $n=1$  il termine assume il valore più piccolo, ossia  $\frac{2}{3}$ , quindi il minimo di  $F$ . Allora siccome ci avviciniamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare  $\sup F = 1$ . Il massimo di  $F$  non esiste. Rimane da far vedere che se  $z < 1$  allora  $z$  non è maggiorante di  $F$  cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché  $\frac{1}{n+2} < 1 - z$  cioè  $n > \frac{1}{1-z} - 2$ . Quindi  $z$  non è maggiorante e  $\sup E = 1$ .

- Verificare che  $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$ . Abbiamo che  $\sup E \leq \sup F$ . In  $\sup$  è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi  $\sup E \cup F = 5$ . Tuttavia, il  $\max$  non esiste in quanto  $5 \notin E \cup F$ . Analogamente,  $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$ . Questo valore è anche il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi  $F \subseteq E$ . Consideriamo allora  $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali  $n$  vale che  $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$ ? Abbiamo  $4(n+2) \leq 5(n+1)$  e quindi  $n \geq 3$ . Allora  $\sup E_1 \cap F = 1$  e non vi è massimo, mentre  $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$  che è anche il minimo.

- Posto  $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$  mostrare  $\sup E + F = \sup E + \sup F$ . Supponiamo quindi che  $\sup E$  e  $\sup F$  siano finiti. Siccome, per definizione,  $\forall e \in E, e \leq \sup E$  e  $\forall f \in F, f \leq \sup F$ , abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di  $\sup$  dicendo che  $\mu$  è pari a  $\sup E$  se:

1.  $\forall x \in E, x \leq \mu$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$  non è maggiorante.

**Nota:** se  $x < \mu$  allora posto  $\varepsilon = \mu - x$  risulta  $x = \mu - \varepsilon$ . Allora sia  $\varepsilon > 0$ . Diciamo che esistono  $e_1 \in E$  e  $f_1 \in F$  tali che  $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$ . Poiché  $\sup E$  è, appunto, il supremum, esiste per definizione una  $e_1 \in E$  tale che  $e_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2}$ . Analogamente, esiste  $f_1 \in F$  tale che  $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$ . Da cui  $e_1 + f_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$ .

- Posto  $-E = \{-x \mid x \in E\}$  mostrare che  $\sup -E = -\inf E$  e  $\inf -E = -\sup E$ .

Dimostrare che il  $\max$  esiste se e solo se  $\sup E$  è finito e appartiene a  $E$ . Analogamente per il  $\min$ .

### Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{n^2+1} \mid n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore. Studiamo quindi per quali indici vale  $x_n \leq x_{n+1}$ . Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$
$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono  $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$ . Di conseguenza, l'espressione è negativa per  $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$ . Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che  $14^2 < 201 < 15^2$ , e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e  $\frac{27}{2}$ . Allora, tutte le  $n$  intere che soddisfano l'equazione sono  $n = 13$ . Ne consegue che se  $n \geq 14$ ,  $x_n > x_{n+1}$ . Il massimo è quindi  $x_{14}$ .

### Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1}{\sqrt{n^3+1} + \log n}$$

### Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2} + \cos(1/n) + \log n}{(n + \sqrt{n})^2 - \sqrt{n}}$$

### Esercizio

$$a_n = \log\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \log n}\right)\right) \left(\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2\right)$$

### Esercizio

$$a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3 - \log n}{\sqrt{n^4 + n}}}$$

### Esercizio

Sia  $\{b_n\}$  una successione e sia  $\{b_{n \pm k_0}\}$  la successione traslata di  $\pm k$ . Dimostrare che  $\lim b_n$  esiste se e solo se  $\lim b_{n \pm k_0}$  esiste e che i limiti sono uguali.

**Esempio**

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

**Esercizio**

Calcolare

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2 \cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{7} \right)^{n+1} + \frac{2}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5}{7} \right)^{n+2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

**Esercizio**

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1 + 1/n)^n + \sin n}{(n + \sqrt{n})^3 + \log \left( \frac{n}{n+1} \right)}$$

Notiamo che  $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$ . Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n + \frac{\sin n}{n} \right)}{n^3 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^3 + \frac{1}{n^3} \log \left( \frac{n}{n+1} \right) \right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con  $p = 1$ , allora la serie diverge.

**Esercizio**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x \sin x}{x^3 \cos(x) - (e^x - 1)^2} = 2$$

**Esercizio**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-x)^2 + x^3\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Poiché  $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ ,  $\sin \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Inoltre,  $x^3 \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \sim x^{7/2}$ , quindi a numeratore raggruppiamo  $x^{7/2}$ . Per il denominatore  $1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x}$ .

$$\begin{aligned}\sqrt{x}x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)^2 &\sim x^{5/2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Riscriviamo allo l'espressione come

$$\begin{aligned}&= \frac{x^{7/2} \left\{ x^{-7/2} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + x^{1/2} \sin\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) \right\}}{x^2 \left\{ x^{-2} x^{1/2} (\sqrt{x^2+1}-x)^2 + x \cos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right\}} \\ &\sim 2x^{3/2} \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x-1}$$

la forma di indecisione è  $1^\infty$ . Allora usiamo la forma esponenziale

$$e^{(2x-1) \log\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)}$$

Vogliamo usare  $\log(1+f(x)) \sim f(x)$  con  $f(x) \rightarrow 0$ . Allora scriviamo

$$e^{(2x-1) \log\left(1 - \frac{6}{4x+5}\right)}$$

dove l'esponente è asintotico a  $-3$ . Allora il limite è pari a  $e^{-3}$ .

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sin^2(x) \log(1 + \tan^4(\frac{x}{1+x^4}))}{(e^{2 \sin^4 x} - 1) \left( \sqrt[6]{1 + \frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1 \right)}$$

Abbiamo:

1.  $\sin(x^2) \sim x^2$
2.  $\tan(1 + \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2})) \sim \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2}) \sim \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 \sim x^4$
3.  $e^{2 \sin^4(x)} - 1 \sim 2 \sim x^4 \sim 2x^4$
4.  $\sqrt[6]{1 + \frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1 \sim \frac{1}{6}x^2$

XXX

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(1 + 2x)}{\sqrt[6]{1+x} - \sqrt[6]{1-x}}$$

Scriviamo l'asintotico con l'o-piccolo:

1.  $\sin x = x(1 + o(1))$
2.  $\log(1 + 2x) = 2x(1 + o(1))$

Allora

$$\begin{aligned}\sin x - \log(1 + 2x) &= x + xo(1) - 2x - 2xo(1) \\ &= -x + xo(1) = -x(1 + o(1))\end{aligned}$$

Al denominatore abbiamo

$$(1 + 1x)^{1/6} - 1 = \frac{1}{6}x(1 + o(1))$$

e allora

$$(1 + 1x)^{1/6} = 1 + \frac{1}{6}x(1 + o(1))$$

Trasformiamo analogamente l'altro termine e troviamo

$$\sqrt[6]{1+x} - \sqrt[6]{1-x} = \frac{1}{3}x(1 + o(1)) \sim \frac{1}{3}x$$

e quindi il limite fa  $-3$ .

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{2}{3}x} - \cos \sqrt{x}}{(\tan(2x))^\alpha}$$

Il primo termine è pari a  $1 + \frac{2}{3}x(1 + o(1))$ , il secondo  $1 - \frac{1}{2}x(1 + o(1))$ . Abbiamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{2}{3}x(1 + o(1)) - 1 + \frac{1}{2}x(1 + o(1))}{(2x)^\alpha} \sim \frac{7}{3 \cdot 2^{\alpha+1} x^{1-\alpha}} = \begin{cases} 0^+ & \alpha < 1 \\ \frac{7}{12} & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x \left(\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Conviene razionalizzare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left[\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right] \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sin x \left[\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]} = \frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{\sin x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Sostituiamo la variabile  $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi} \left[\cos \left(y + \frac{\pi}{2}\right) + y^2\right]}{y}$$

Notiamo che  $\cos \left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(y) \sim -y$ . Quindi,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi}(-y)}{y} = -\sqrt{2\pi}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1} & x > 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo allora i limiti dalla due direzioni.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

L'altro limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1} = \frac{\infty}{0^+} = +\infty$$

Quindi il limite generale non esiste.

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ 1 + \sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right) \right]^{\frac{x+1}{x^3 + \tan^2 x}}$$

Scriviamo la forma esponenziale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left\{ \frac{x+1}{x^3 + \tan^2 x} \log \left( 1 + \sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right) \right) \right\}$$

Il primo termine è asintotico a  $\frac{1}{x^2}$ , mentre il logaritmo è asintotico a  $\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)$  che è asintotico a  $\frac{x^\alpha}{x+1}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ e & \alpha = 2 \\ 1 & \alpha < 2 \end{cases}$$

### Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2+x}\right) \right\}^{\frac{\tan x}{\log(1+x^2)}}$$

### Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con  $A > 0$ . Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \rightarrow 0$$

Quindi la serie converge, e converge a  $e^A - 1$ .



### Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotico. Al numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad  $e$ . Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora  $(\log n)^n = e^{n \log \log n}$ . Allora chiaramente  $e^{n^2}$  domina sull'altro termine. Analogamente, al denominatore abbiamo  $n^n = e^{n \log n}$  come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log \log n - n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2} \right\}}{e^{3n \log n} \left\{ 1 + e^{-2n \log n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n \log n} \right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n \log n}}$$

Allora

$$e^{n \log \log n - n^2} = e^{-n^2 \left\{ 1 - \frac{\log \log n}{n^2} \right\}} \rightarrow \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left( e^{n^2 - 3n \log n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{n \left( 1 - \frac{3 \log n}{n} \right)} \rightarrow \infty > 1$$

### Esempio

Studiare il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n \log n}}{(2n)!}$$

che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che  $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$  e  $(n+1) \log(n+1) = n \log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$ . Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1) \log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n \log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n \log n} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}}{n^{n \log n}} \end{aligned}$$

Con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$

troviamo

$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} (n+1)^{\log(n+1)}$$

Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$

Il criterio della radice non funziona. Infatti,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$

Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come

$$\begin{aligned} n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n} \log(n^{\log n})} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\log n)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Allora il limite è  $L = 1$ , quindi il criterio è inconclusivo. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a^{\sqrt{n} \log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n} \log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

### Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2 \log n - \sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2 \log n - \sqrt{n} \log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{2 \log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\} \rightarrow -\infty$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

### Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie converge.

Con radici abbiamo

$$\begin{aligned}\left[\frac{n^n}{(2n)!}\right]^{1/n} &= \frac{n}{\left[(2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n}(1+o(1))\right]^{1/n}} \\ &= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2} (4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} (1+o(1))^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

E quindi converge

### Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + n^n}{(n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n \log n} = e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log n - n^2} \right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned}(n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= (n^2)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2}(1+o(1)) + e^{n^2 \log(1+\frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} (1+o(1)) + e^{n^2 \log(1+\frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} \left\{ 1 + o(1) + e^{n^2 \log(1+\frac{1}{n}) - 2n^2 \left\{ \dots \right\}} \right\} \\ &\sim e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} = (n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}\end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{(n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che  $\sum a_n$  ha lo stesso carattere di  $\sum b_n$  e

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{(n^2)^n e^{-n} (2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}} \\ &= \frac{e^{2n}}{n^{2n} (2n)^{1/n} n^{1/n}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

### Esempio

Verificare per quali valori di  $\alpha > 0$ ,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in  $x = 0$ .  $f$  è continua per ogni  $\alpha > 0$  per il teorema dei due carabinieri. Infatti,

$|f(x)| \leq |x|^\alpha \rightarrow 0 = f(0)$  per  $x \rightarrow 0$ . Il rapporto è dato da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \nexists & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Per ogni  $\alpha$ ,  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$f'(x) = D[|x|^\alpha \cos \frac{1}{x}] = |x|^{\alpha-2} \left\{ \alpha |x| \operatorname{sgn} x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right\}$$

Quindi  $f'(0)$  esiste per  $\alpha > 1$ ,  $f'$  è continua in  $x = 0$  se e solo se  $\alpha > 2$ .

### Esercizio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \ln(1+x) + 3x}{\sin(x) + 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - \ln(1+x) + 3)}{x(\frac{\sin x}{x} + 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0 + 3}{1 + 0} = 3 \end{aligned}$$

### Esercizio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) (e^{x^2} - 1)}{(1 - \cos(x)) [\ln(1 + \sqrt{x})]^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 + o(1))x^2(1 + o(1))}{\frac{x^2}{2}(1 + o(1))\sqrt{x}(1 + o(1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 + 2o(1) + o^2(1))}{1 + o^2(1) + 3o(1) + o^3(1)} = 4 \end{aligned}$$

### Esercizio

Considera  $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} [e^{-x^n} - 1 + \ln(\cos(x^n))] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} [-x^n(1 + o(1)) + \ln(1 + \cos(x^n) - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \left[ -x^n(1 + o(1)) + \ln \left( 1 - \frac{x^{2n}}{2}(1 + o(1)) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \left[ -x^n(1 + o(1)) - \frac{x^{2n}}{2}(1 + o(1)) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{x^2} \left[ x^n \left( 1 + \frac{x^n}{2} \right) (1 + o(1)) \right] \end{aligned}$$

Nel caso  $n > 0$  abbiamo

$$\begin{cases} 0 & n > 2 \\ -2 & n = 2 \\ -\infty & 0 < n < 2 \end{cases}$$

Nel caso  $n = 0$  il limite è  $-\infty$ , mentre se  $n < 0$  il limite non è ben definito.

### Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{1 - e^{-x^2}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indeterminazione  $\frac{0}{0}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \cos x - 1 + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}(1 + o(1)) + x^2\right)}{\frac{x^2}{2}(1 + o(1))} = 1$$

### Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin(2x))^{\frac{1}{\ln(1 + \cos(x + \frac{\pi}{4}))}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indecisione  $1^\infty$ . Facciamo un cambio di variabile  $t = x - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin \left( 2 \left( t + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right)^{\frac{1}{\ln(1 + \cos(x + \frac{\pi}{4}))}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{1}{\ln(1 - \sin t)} \cdot \ln(\cos(2t)) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{\ln(1 + \cos(2t) - 1)}{\ln(1 - \sin t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{\ln(1 - 2t^2)}{1 - t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{-2t}{t} \right\} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

### Esercizio

Studia la continuità di

$$f(x) = (\ln |x|)^{-1}$$

### Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx$$

Allora sostituiamo  $t = e^x$  quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{t} \frac{1}{1 + t} dt \\ &= \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} dt \\ &= \log |t| - \log |t + 1| + C \\ &= \log \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) + C \end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}} dx$$

Allora abbiamo

$$\int \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^2 + 2e^x + 5} dx$$

Sostituiamo  $t = e^x$  e otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 5} &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t+1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{e^x + 1}{2} \right\} \end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) dx$$

Cominciamo sostituendo  $t = x^{-\frac{1}{2}}$  e proseguiamo per parti

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{3}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) dx &= \int t^3 \arctan(t) (-2t^{-3}) dt \\ &= -2 \int \arctan(t) \cdot 1 dt \\ &= -2 \left[ t \arctan(t) - \int \frac{t}{1+t^2} dt \right] \\ &= -2t \arctan(t) + \int \frac{2t}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Sostituiamo  $v = 1 + t^2$

$$\int \frac{2t}{1+t^2} dt = \int \frac{dv}{v} = \log(1+t^2) + C$$

Allora il risultato è

$$-2x^{-\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log(1+x^{-1}) + C$$

### Esercizio

$$\begin{aligned} \int \log(x^2 + 4) dx &= x \log(x^2 + 4) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx \\ &= x \log(x^2 + 4) - 2 \int 1 - \frac{4}{x^2 + 4} dx \\ &= x \log(x^2 + 4) - 2x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

### Esercizio

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$$

Sostituiamo  $x+1 = t^2$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{2t}{t \cdot (t^2 - 1)} dt \\ &= 2 \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} \\ &= \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t+1} \\ &= \log |t-1| - \log |t+1| + C \\ &= \log \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C\end{aligned}$$

### Esercizio

Procediamo per parti

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) dx &= 2x^{\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) - \int \frac{2x^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})}{1+x^{-1}} dx \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log |1+x| + C\end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

Sostituiamo  $t = \sqrt{x}$  e poi procediamo per parti

$$2 \int \arcsin(t) dt = t \arcsin(t) - 2 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Sostituiamo ora  $v = 1 - t^2$

$$t \arcsin(t) + \int v^{-\frac{1}{2}} dv = \sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + C$$

### Esercizio

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + 3e^x + 2}$$

Sostituiamo  $t = e^x$

$$\int \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

**Esercizio**

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} dx$$

Sostituiamo  $t = x + 1$ .

**Esercizio**

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} dx$$

Sostituiamo  $t = e^x$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1+t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt &= \int \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{t} dt + \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \arctan(t) + \int \frac{-t}{1+t^2} + \frac{1}{t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + \ln(e^x) + \arctan(e^x) \end{aligned}$$