Algebra lineare I

Paolo Bettelini

Contents

1 Algebra lineare

La moltiplicazione scalare di un vettore è un *omotetia*.

Definizione Spazio a prodotto interno

Uno *spazio a prodotto interno* è uno spazio vettoriale con la struttura aggiuntiva del dot product.

Definizione Ortogonalità

In uno spazio a prodotto interno, la nozione di *ortogonalità* è definita dalla nullità del product.

Definizione Spazio affine

Uno *spazio affine* è uno spazio vettoriale senza la nozione del punto di origine.

Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ necessita di un orientamento. Se consideriamo il prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$ nei piano bidimensionale $\mathbb{R}^2$, il prodotto ha forma di complesso. Il prodotto scalare e il prodotto dei complessi si uniscono nella struttura quaternionale.

I sistemi lineari possono essere interpretati come trovare l'intersezione delle varie rette, oppure possiamo vederlo come trovare i coefficienti lineari tali che la combinazione lineare (con tali coefficienti) dei vettori sia il vettore risultante. Possiamo quindi anche vederlo come trovare il vettore che moltiplicato dalla matrice del sistema ci restituisce il vettore voluto.

2 Algoritmo di eliminazione di Gauss

Lemma

Dato un sistema di equazioni con m equazioni e n indeterminata, l'eliminazione di Gauss non modifica le soluzioni del sistema.

Proof

Per la prima operazione, la dimostrazione in una direzione è banale. Per dimostrarla nell'altra direzione è sufficiente considerare le righe della matrice $E_i' = E_i + \lambda E_j$ dove l'apice indica la riga modificata. Siccome la riga che viene aggiunta rimane invariata $E_j = E'_j$ allora $E_i = E'_i - \lambda E'_j$ e quindi i calcoli nella direzione inversa sono gli stessi in quanto sto sempre aggiungendo un multiplo di un'altra riga. Quindi le soluzioni prima e dopo l'operazione rimangono invariate. Se il sistema originario non ha soluzioni, non ne ha nemmeno quello nuovo.

Nell'eliminazionne di gauss vogliamo raggiungere la matrice triangolare superiore. Distinguiamo i casi dove ci sono righe con tutti zero includendo o senza includere il termine noto. In tali casi abbiamo infiniti o finite soluzioni. Nel caso non sia possibile raggiungere la row echelon form, bisogna studiare i termini noti.

L'operazione della moltiplicazione scalare di una matrice ne modifica il determinante. Usando solo le altre due operazioni non è quindi facile giungere alla reduced row echelon form.

Le matrici elementari $E_{i,j}(\lambda)$ sono triangolari alte se $i < j$ e basse $i < j$. Il valore non deve essere sulla diagonale. Ripetere tale matrice $E_1 E_2 E_3 \cdots A = U$ è come moltiplicare A per una singola matrice (se non servono swap è triangolare inferiore). Se raggiunge la fine dell'eliminazione di gauss il risultato U è triangolare superiore. Il prodotto delle elementari è sostanzialmente le loro sovrapposizioni.

Esercizio

Dimostrare che il prodotto di matrici superiori o inferiori è superiore o inferiore.

Esercizio

Se A è invertibile, l'inverso è unico.

Esercizio

Le matrixi elementari sono invertibili e l'inversa di $E_{i,j}(\lambda)$ è $E_{i,j}(-\lambda)$

Esercizio

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ sono invertibili, allora AB e BA sono invertibili.

Siccome in $E_1 E_2 E_3 \cdots A = U$ il prodotto delle elementari è invertibili, possiamo portarlo a destra. Tale inversa è una matrice triangolare bassa. Abbiamo così dimostrato il

Teorema Fattorizzazione LU

Sia $Ax = B$ un sistema lineare non singolare dove non servono scambi. Allora il sistema è equivalente a

$$LUx = B$$

dove L è una matrice triangolare bassa con tutti 1 sulla diagonale principalmente, mentre U è una matrice triangolare alta con tutti i pivot sulla diagonale principale.

La fattorizzazione $A = LU$ permette di trasformare la soluzione di un sistema non singolare quadrato nelle soluzioni di due sistemi triangolari. Sia $y \triangleq Ux$. Allora dobbiamo risolvere $Ly = b$ che è un sistema triangolare inferiore nelle indeterminate y, e poi $Ux = y$ che è un sistema triangolare superiore nelle indeterminate x. Se otteniamo LU allora il resto è banale.

Per eseguire gli scambi di righe possiamo costruire una matrice che è come la matrice identità ma le righe dell'identità sono scambiate. Questa è detta matrice di permutazione elementare $P_{i,j}$. Tale matrice è invertibile e la sua inversa è sè stessa.

Quindi l'eliminazione di Gauss usa $E_{i,j}(\lambda)$ e $P_{i,j}$.

2.1 Algoritmi di Gauß-Jordan

Dopo aver ridotto la matrice a scalini, è possibile usare una versione dell'algoritmo di Gauss in senso inverso, cioè dal basso verso l'alto, per ottenere una matrice che in ogni colonna contenente un pivot abbia solo il pivot come numero non nullo, (questa matrice risultante è anche detta matrice a scalini in forma ridotta): basta usare ogni riga, partendo dall'ultima, per eliminare tutte le cifre diverse da zero che stanno sopra al pivot di questa riga. Infine, sempre con mosse di Gauss (moltiplicando righe), si può ottenere che ogni pivot abbia valore 1.

... Sia $\hat{E}DE$ è l'inversa di A. Se eseguo $\hat{E}DE$ sull'identità ottengo

$$\hat{E}DEI_n = \hat{E}DE = A^{-1}$$

sto quindi trasformando l'identità nell'inversa di A. Questa osservazione dà un metodo per il calcolo dell'inversa di una matrice non singolare (Metodo di Gauss-Jordan)

Teorema

Una matrice quadrata è non singolare se e solo se è invertibile.

Proof

($\Longrightarrow$) Se non è singolare, è invertibile per l'algoritmo di Gauß-Jordan.

($\Longleftarrow$) A invertibile, allora non esiste A^{-1} tale che $A^{-1}A = I_n$. Sappiamo $Ax = b$ implica $A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$ e quindi $x = A^{-1}b$ è l'unica soluzione di $Ax = b$, e quindi A è singolare.

3 Spazi vettoriali

L'insieme vuoto non è uno spazio per nessun campo (manca l'esistenza). Tuttavia, $V = \{0\}$ può essere uno spazio vettoriale su ogni campo F.

Proposition

Let $A \neq \emptyset$ be a set and let $\mathbb{F}$ be a field. Consider the set

$$\mathbb{F}^A \triangleq \{f\colon A \to \mathbb{F} \mid f \text{ is a function}\}$$

Consider the operations

$$+\colon \mathbb{F}^A \times \mathbb{F}^A \to \mathbb{F}^A$$

given by $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ and the operation

$$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F}^A \to \mathbb{F}^A$$

given by $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$. Then, $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^A, +, \cdot)$ is a vector space.

In uno spazio vettoriale l'identità additiva è unica, l'inverso additivo è unico.

$$
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{1,1} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{1,2} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{1,k} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{2,1} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{2,2} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{2,k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{j,1} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{j,2} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}_{j,k}
\end{pmatrix}
$$