

# Fisica I

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1 Prodotti vettoriali</b>	<b>2</b>
<b>2 Forze apparenti</b>	<b>2</b>
<b>3 Flussi</b>	<b>2</b>
<b>4 Dinamica dei sistemi</b>	<b>3</b>
<b>5 Esercizi</b>	<b>6</b>
5.1 14 novembre . . . . .	6
5.2 5 Dicembre . . . . .	7
5.3 11 Dicembre . . . . .	7
5.4 18 dicembre (urti) . . . . .	11

# 1 Prodotti vettoriali

Il prodotto scalare ha lo stesso risultato in ogni base ortonormata

**Proposition** Proprietà del prodotto vettoriale

1.  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ ;
2.  $(\gamma \vec{a}) \wedge \vec{b} = \gamma(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

Consideriamo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , allora

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \\ \vec{b} &= b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}\end{aligned}$$

Sapendo che

$$\begin{aligned}\hat{x} \wedge \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{x} \wedge \hat{z} &= -\hat{y} \\ \hat{y} \wedge \hat{z} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Possiamo eseguire il prodotto esplicitamente

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &= a_x b_y \hat{z} + a_x b_z (-\hat{y}) + a_y b_x (-\hat{z}) + a_y b_z \hat{x} + a_z b_x \hat{y} + a_z b_y (-\hat{x}) \\ &= [a_y b_z - a_z b_y] \hat{x} + [a_z b_x - a_x b_z] \hat{y} + [a_x b_y - a_y b_x] \hat{z}\end{aligned}$$

## 2 Forze apparenti

Nel caso della terra, la forza di Coriolis è data da

$$\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

È sempre ortogonale all'asse di rotazione (l'equatore). Il suo modulo è dato da

$$F_c = m\omega^2 R \sin \alpha$$

dove  $\alpha$  è l'angolo compreso e  $R$  il raggio della terra. La componente verticale è  $m\omega^2 R \sin^2 \alpha$ .

## 3 Flussi

Il flusso in un campo di forza è definito come  $f_i = \vec{F} \cdot \vec{n} dA$  dove va definito l'orientamento del vettore normale  $\vec{n}$ . Per tutta la superficie chiusa il flusso è  $\sum_i f_i$ .

**Teorema Teorema del flusso di Gauss**

Il teorema di Gauss dice che se la forza  $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2} \hat{r}$ , allora il flusso sulla superficie chiusa è dato da

$$4\pi K$$

dove la sorgente è interna alla superficie, altrimenti il flusso è zero.

**Esempio** Se ci trovassimo sul fondo di un buco sulla superficie terrestre profondo  $R - r$ , quale gravità misureremmo?

Dobbiamo considerare la distribuzione della massa, cioè la densità  $\rho$  che è approssimativamente omogenea

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Possiamo immaginarci infinite sorgenti che esercitano su di noi una forza

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \sum_i G \frac{m \cdot dm_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Quindi il flusso è dato dalla somma

$$\sum_i -G m \cdot dm_i = -4\pi G m M$$

Noriamo che per calcolare il flusso dobbiamo fare

$$\sum_i (dS_i) \vec{F}_i \cdot \hat{n}_i = F \sum_i (dS_i) = 4F\pi r^2$$

dove  $\hat{n}_i$  è la normale. Quindi, la forza è data

$$\begin{aligned} F \cdot 4\pi r &= -gm \cdot 4\pi \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \right) \rho \\ F &= -G \frac{mM}{R^2} \left( \frac{r}{R} \right) \end{aligned}$$

È importante notare che per fare ciò abbiamo considerato le sorgenti della massa del volume racchiuso dalla superficie indotta dal punto in cui mi trovo (una sottosfera). Le superfici esterne non contribuiscono sempre per il teorema di Gauss.

## 4 Dinamica dei sistemi

.... In particolare, se non vi sono forze esterne, il momento angolare totale si conserva. Ciò è dipendente dall'origine in quanto se avessi  $\vec{r}_i + \vec{T}$  al posto di  $\vec{r}_i$ , il nuovo momento angolare sarebbe

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \sum_i \vec{F}'_i \wedge m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i + \vec{T}) \wedge m_i \vec{v}_i \\ &= \vec{L} + \vec{T} \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i \\ &= \vec{L} + \vec{T} \wedge \vec{Q} \end{aligned}$$

La sua derivata sarebbe

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}'}{dt} &= \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{T} \wedge \sum_i \vec{f}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i + \vec{T} \wedge \sum_i \vec{f}_i \\ &= \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{f}_i \end{aligned}$$

per la prima legge cardinale. Quindi la derivata è indipendente dal sistema di riferimento.

Notiamo che  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{R}$ . Allora la velocità anche cambia per il centro di massa, quindi  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge m_1 \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{R}) \wedge m_1 (\vec{v}'_i + \vec{V}) \\ &= \vec{L}' + \left( \sum_i m_1 \vec{r}'_i \right) \wedge \vec{V} + \vec{R} \wedge \sum_i m_i \vec{v}'_i + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V}\end{aligned}$$

Se ora valutiamo la quantità di moto nel centro di massa otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{Q}' &= \sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{V}) m_i \\ &= \vec{Q} - \vec{V} \sum_i m_i = 0\end{aligned}$$

che è nulla per definizione. La quantità di moto del centro di massa vista dal centro di massa è zero. Allora, abbiamo dimostrato che il termine

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

Ora valutiamo

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \vec{r}'_i &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) m_i \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{R} \sum_i m_i = 0\end{aligned}$$

Di nuovo, dalla definizione di  $\vec{R}$ , tale termine è zero. Siccome questi due termini sono nulli, in definitiva abbiamo

$$\vec{L} = \vec{L}' + M \vec{R} \wedge \vec{V}$$

e la variazione

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{L}'}{dt} + M \frac{d\vec{R}}{dt} \wedge \vec{V} + M \vec{R} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{R} \wedge \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{R} \wedge \sum_i \vec{f}_i\end{aligned}$$

usando la prima e la seconda legge cardinale della dinamica. Allora troviamo

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i - \vec{R} \wedge \sum_i \vec{f}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \wedge \vec{f}_i \\ &= \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{f}_i\end{aligned}$$

Quindi la seconda legge cardinale della dinamica vale anche nel sistema non inerziale del centro di massa.  
Se consideriamo la variazione dell'energia cinetica di tutte le particelle otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{dE_c}{dt} &= \sum_i \frac{1}{2} \cdot 2m_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}_i \\ &= \sum_i \vec{v}_i \cdot \left[ \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j} + \vec{f}_i \right] \\ &= \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_{i,j} + \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{f}_i\end{aligned}$$

che non si semplifica come nell'altro caso.

## 5 Esercizi

### 5.1 14 novembre

**Esercizio** Un ascensore sale con accelerazione costante  $A = -0.1g$ ; all'interno dell'ascensore si trova un piano inclinato, con inclinazione  $\alpha$  rispetto all'orizzontale e lunghezza  $l$ . Alla sommità del piano inclinato viene posto, con velocità nulla, un corpo di massa  $m$  che scende scivolando lungo il piano. Si calcoli il modulo  $v$  della velocità relativa all'ascensore che il corpo possiede quando giunge in fondo al piano, supponendo che tra il corpo e il piano esiste attrito con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_D$ .

Consideriamo un sistema di riferimento storto sul piano inclinato. Abbiamo quindi una forza apparente  $\vec{F}_A$ . Scrivendo l'equazione di Newton e l'accelerazione otteniamo

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin \alpha + mA \sin \alpha - \mu_D R \\ 0 = -mg \cos \alpha - mA \cos \alpha + R \end{cases}$$

dove  $R$  è la reazione vincolare. Dalla seconda ricaviamo

$$R = m(g + A) \cos \alpha$$

e quindi

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= m(g + A) \sin \alpha - \mu_D m(g + A) \cos \alpha \\ &= m(g + A)(\sin \alpha - \mu_D \cos \alpha) \\ &= \frac{11}{10}g(\sin \alpha - \mu_D \cos \alpha) \end{aligned}$$

Integriamo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{11}{10}g(\sin \alpha - \mu_D \cos \alpha)(t - t_0)$$

e quindi

$$x(t) = \frac{11}{20}g(\sin \alpha - \mu_D \cos \alpha)(t - t_0)^2$$

allora

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{11}{20}g(\sin \alpha - \mu_D \cos \alpha)}}$$

e sostituendo nella velocità troviamo  $v(t) \rightarrow v(x)$

$$v(x) = \sqrt{\frac{11}{5}(\sin \alpha - \mu_D \cos \alpha)gx}$$

e allora troviamo  $v(l)$  sostituendo  $x = l$ .

**Esercizio** Una pallina si trova ferma alla base di un piano inclinato di  $\alpha$  rispetto all'orizzontale e di altezza  $h$ , montato sopra un carrello. Il carrello viene messo in movimento con accelerazione costante  $A$  per un intervallo di tempo  $\tau$ , dopodiché il carrello prosegue di moto uniforme. Si determinino i valori di  $A$  per i quali la pallina, scivolando senza attrito lungo il piano inclinato, ne raggiunge la sommità.

Il moto va descritto in due fasi distinte. Consideriamo un sistema di riferimento storto sul piano inclinato. Abbiamo quindi una forza apparente  $\vec{F}_A$ .

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sin \alpha + mA \cos \alpha & t \leq \tau \\ m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sin \alpha & t > \tau \end{cases}$$

La velocità e la posizione al tempo  $\tau$  è data da

$$v(\tau) = \tau(A \cos \alpha - g \sin \alpha)$$

e

$$x(\tau) = \frac{1}{2}(A \cos \alpha - g \sin \alpha)\tau^2$$

Queste sono le condizioni iniziali per il secondo sistema. Integrando troviamo

$$v(t) = v(\tau) - g \sin \alpha(t - \tau)$$

e

$$x(t) = x(\tau) + v(\tau)(t - \tau) - \frac{1}{2}g \sin \alpha(t - \tau)$$

Troviamo il tempo  $t^*$  per cui la velocità è nulla, quindi  $v(t) = 0$  cioè quando la pallina si ferma

$$v(\tau) - g \sin \alpha(t^* - \tau) = 0$$

$$t^* = \tau + \frac{v(\tau)}{g \sin \alpha}$$

la posizione in cui la pallina si ferma è

$$x(t^*) = x^* = x(\tau) + \frac{1}{2} \frac{v^2(\tau)}{g \sin \alpha}$$

Quindi la pallina raggiunge la cima se  $x^* \sin \alpha \geq h$ . Abbiamo quindi la disequazione

$$\frac{1}{2}(A \cos \alpha - g \sin \alpha)\tau^2 \sin \alpha + \frac{(A \cos \alpha - g \sin \alpha)^2 \tau^2}{2g} \geq h$$

che ha soluzioni

$$A \geq \frac{g \sin \alpha + \sqrt{g^2 \sin^2 \alpha + \frac{8hg}{\tau^2}}}{2 \cos \alpha}$$

**Esercizio** Un punto materiale di massa  $m$  è appeso tramite una molla di costante elastica  $k$  ad un supporto che avanza con accelerazione  $a$ . Calcolare l'allungamento della molla.

**Esercizio** Un piano inclinato 3-4-5 è fissato su una piattaforma rotante. Un blocco è posizionato a riposo sul piano e il coefficiente d'attrito statico fra il blocco e il piano è  $\mu_s$ . Il blocco è inizialmente alla distanza di 40 cm dal centro della piattaforma. Trovare il valore minimo della velocità angolare  $\omega$  che impedisce al blocco di cadere sulla piattaforma.

XXX

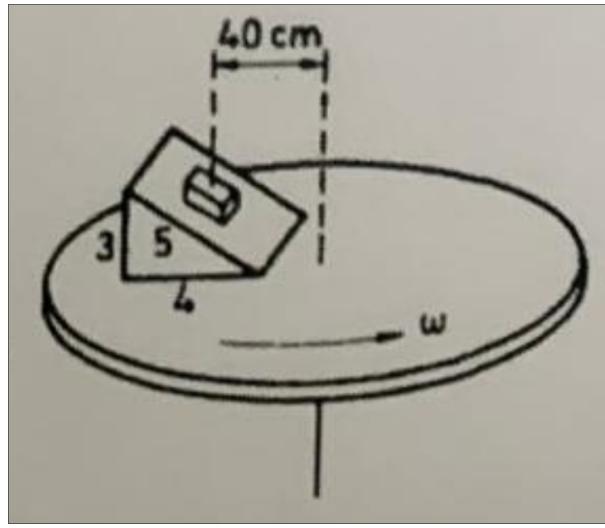
## 5.2 5 Dicembre

## 5.3 11 Dicembre

**Esercizio 7.1**

Per ogni punto della traiettoria la pallina deve soddisfare la legge di Newton, affinché il giro della morte si completi, in particolare nel punto  $B$ , dove la forza è data da

$$mg + N - m \frac{v^2}{R} = 0$$



Da cui ricaviamo la reazione vincolare

$$N = m \frac{v^2}{R} - mg$$

la reazione vincolare in  $B$  deve essere maggiore o uguale a zero, come condizione limite per completare il giro della morte. Quindi,

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} - mg &\geq 0 \\ v^2 &\geq Rg \end{aligned}$$

Ora, leghiamo la velocità con l'altezza di partenza. Consideriamo la conservazione dell'energia. Nel punto iniziale l'energia è  $mgh$  e in  $B$  è  $\frac{1}{2}mv_b^2 + 2mgR$ . Allora ricaviamo

$$h = 2R + \frac{1}{2} \frac{v_b^2}{g}$$

Il valore minimo è allora

$$h \geq 2E + \frac{1}{2} \frac{Rg}{g} = \frac{5}{2}R$$

L'energia iniziale è la medesima con la quale la molla viene schiacciata. Abbiamo allora

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2$$

e quindi la compressione è data da

$$x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}$$

### Esercizio 7.2

Vi sono la forza elastica, quella di gravità, e il vincolo della pallina sul piatot. La legge di Newton del piatto, fino a quanto stanno a contatto, abbiamo

$$m'a = -m'g + -kx - N$$

e quella della pallina

$$ma = -mg + N$$

Troviamo quindi

$$\begin{cases} mm'a = -mm'g - kmx - mN \\ mm'a = -mm'g + m'N \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$N = \frac{-kmX}{m+m'} = -\frac{kmX}{M}$$

Calcoliamo la compressione iniziale per cui piatto e pallina superano quota zero. L'energia iniziale è solo quella potenziale della molla  $E_i = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$ . Essa deve pari a quella finale, che deve essere sufficiente per almeno arrivare a quota zero con velocità nulla.

$$\frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = Mg\Delta L$$

da cui

$$\Delta L = \frac{2Mg}{k}$$

### Esercizio 7.3

Il corpo rimarrà fermo se  $T \leq F_{att} = \mu_s mg = 2\mu_s mg$ . La tensione è data da

$$T - mg \cos \theta - m \frac{v^2}{l} = 0$$

che è l'equazione di Newton per la sferetta. La tensione è massima quando  $\theta = 0$ , quindi

$$T_{\max} = mg + m \frac{v^2}{l}$$

Chiamiamo  $v_{\max}$  la velocità per  $\theta = 0$ . L'energia iniziale è data da

$$E_i = mg(l - l \cos \theta_0)$$

dove fissiamo lo zero al punto minimo. Abbiamo allora

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mg(l - l \cos \theta_0)$$

Da cui ricaviamo

$$v_{\max}^2 = 2gl(1 - \cos \theta_0)$$

Allora la tensione massima è data da

$$\begin{aligned} T_{\max} &= mg + m \frac{2gl(1 - \cos \theta_0)}{l} \\ &= 3mg - 2mg \cos \theta_0 \end{aligned}$$

Tale forza deve essere minore o uguale a quella di attrito

$$\begin{aligned} 3mg - 2mg \cos \theta_0 &\leq 2\mu_s mg \\ \theta_0 &\leq \arccos \left( \frac{3 - 2\mu_s}{2} \right) \end{aligned}$$

**Esercizio 7.4**

Il momento angolare è

$$L_0 = mvR = m\omega R^2$$

che è costante. In particolare  $L_0 = m\omega_1 R_1^2$ . Allora,

$$\omega(R) = \omega_1 \left( \frac{R_1}{R} \right)^2$$

Quindi, la tensione della fune è pari a

$$\begin{aligned} T &= m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\omega_1^2 \left( \frac{R_1}{R} \right)^4 R \\ &= m\omega_1^2 R_1 \left( \frac{R_1}{R} \right)^3 \end{aligned}$$

La tensione massima ci dà la condizione per il raggio minimo

$$T_{\max} = m\omega_1^2 R_1 \left( \frac{R_1}{R_{\min}} \right)^3$$

da cui ricaviamo

$$R_{\min} = \left( \frac{m\omega_1^2 R_1^4}{T_{\max}} \right)^{1/3}$$

Per ciò che concerne il lavoro abbiamo

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega_1^2 R_1^2 \left[ \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned}$$

per il teorema dell'energia cinetica.

**Esercizio 7.5**

Il momento nella direzione  $\hat{z}$  si conserva in quanto  $\vec{r} \wedge m\vec{g}$  è prtagonale all'asse  $z$ . Abbiamo

$$L_{0,az} = |\vec{r}_A \wedge m\vec{v}_0| = mv_0 R \sin \theta$$

e

$$L_{0,bz} = mvR$$

Allora otteniamo la conservazione del momento angolare

$$v = v_0 \sin \theta$$

L'energia è anche conservata. La condizione minima è che la velocità sia nulla in cima alla bacinella. In tal caso, la velocità verticale è nulla alla fine.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2 + mgR$$

e quindi

$$v_0^2 = \frac{2gR}{\cos \theta}$$

**Esercizio 7.6****Esercizio 7.7**

$$\int_r^\infty \frac{k}{r^3} dr$$

**5.4 18 dicembre (urti)****Esercizio 8.1**

Il volo dei proiettili è soggetto solo alla forza peso, e dopo l'urto il centro di massa delle due masse si muoverà di moto parabolico. Abbiamo quindi che

$$m \frac{d\vec{V}_c}{dt} = m\vec{g}$$

dove  $\vec{V}_c$  è la velocità del centro di massa. Possiamo allora scrivere

$$\begin{cases} m\vec{a}_{cx} = 0 \\ m\vec{a}_{cy} = -mg \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{v}_{cx}(t) = v_0 \cos \alpha \\ \vec{v}_{cy}(t) = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{x}_{cx}(t) = v_0 \cos \alpha t \\ \vec{x}_{cy}(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$y_c = x_c \tan \alpha = \frac{gx_c^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

da cui troviamo la soluzione

$$x_c = \frac{2v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha$$

Questo punto del centro di massa è la media pesata dei due punti di atterraggio

$$x_c \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

E quindi troviamo

$$\frac{3}{2}x_c - \frac{x_2}{2}$$

**Esercizio 8.2**

Abbiamo la conservazione

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_{10} + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{20} = 0$$

Proiettando l'equazione della quantità di moto sull'asse delle ascisse troviamo

$$p_x = m_1 v_{10} - \frac{1}{2} m_1 v_{20} = 0$$

Il corpo 1 ha

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \implies \begin{cases} v_x = v_{10} \\ v_y = -gt \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = v_{10} t \\ y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Il momento in cui tocca terra è  $\bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  e quindi

$$\bar{x}_1 = x_1(\bar{t}) = v_{10} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Per il corpo 2 analogamente abbiamo

$$\begin{cases} x_2 = v_{20}t \\ y_2 = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

quindi

$$\bar{x}_2 = x_2(\bar{t}) = -v_{20} \sqrt{\frac{2h}{g}} = -2v_{10} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La distanza è allora

$$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 3v_{10} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

da cui ricaviamo  $v_{10}$  e  $v_{20}$ .

### Esercizio 8.3

La distanza iniziale è  $L_0 - \Delta L$  e dopo che il filo viene tagliato le masse si cominciano a muovere con velocità  $v_1$  e  $v_2$ . Visto che la forza della molla è interna, la quantità di moto lungo le ascisse si conserva. Quindi,

$$p = -v_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

Allora

$$|v_2| = \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{v_1}{2}$$

con direzione opposta. L'energia del sistema vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k \Delta L^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,\max}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\max}^2 + 0 \\ K \Delta L &= \frac{3}{2} m_1 v_{1,\max}^2 \\ v_{1,\max} &= \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m_1}} \\ v_{2,\max} &= \sqrt{\frac{k}{6m_1}} \end{aligned}$$

### Esercizio 8.4

Conservazione della quantità di moto

$$\vec{p} + M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = (M+m)\vec{v}_1 + m\vec{v}_{2,r}$$

la proiezione nell'ascisse è data da

$$(M+m)v_1 - mv_{2,r} \cos \alpha = 0$$

Da cui ricaviamo

$$v_{2,r} = \frac{M+m}{m \cos \alpha} v_1$$

Chiamiamo  $A = m \cos \alpha$ . Dal teorema di Pitagora generalizzato

$$v_2^2 = v_1^2 + v_{2,r}^2 - 2v_1 v_{2,r} \cos \alpha$$

L'energia potenziale del cuneo non cambia quindi

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \\ 2gh &= \frac{v_1^2}{A} + \frac{v_1^2}{A^2 \cos^2 \alpha} - \frac{2v_1^2}{A} \\ 2gh &= v_1^2 \left( \frac{1}{A^2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{A} \right) \\ v_1 &= \frac{\sqrt{2gh} A \cos \alpha}{\sqrt{1 - A^2 \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

### Esercizio 8.5

La quantità di moto e l'energia cinetica si conservano. Le velocità sono tutte parallele. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} m_1 v_0 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_0^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ v_1 &= \frac{m_1 v_0 - m_2 v_2}{m_1} \\ m_1 v_0^2 &= m_1 \left( v_0^2 + \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 v_2^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_2 v_0 \right) + m_2 v_2^2 \\ 0 &= v_2 \left[ \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2 - 2v_0 \right] \\ v_2 &= \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{v_0}{2} \\ v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -\frac{v_0}{2} \end{aligned}$$

La traiettoria è data da

$$y = h - \frac{gx^2}{2v_2^2}$$

che deve essere nulla quando  $x = d$ , da cui

$$v_2 = \sqrt{\frac{g}{2h}}d$$

e quindi

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g}{h}}d$$

### Esercizio 8.6

L'energia iniziale è

$$E_1 = \frac{1}{2}kh^2$$

appena prima di colpire  $m_2$  abbiamo

$$E_2 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}k\Delta L^2$$

con  $\Delta L = d - L_0$ . Abbiamo quindi  $E_1 = E_2$  per la conservazione dell'energia da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}(h^2 - \Delta L^2)}$$

L'urto è elastico e centrale quindi

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -\frac{v_0}{2}$$

Quindi l'energia subito dopo l'urto è

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}k\Delta L^2 \\ &= \frac{1}{8}m_1v_0^2 + \frac{1}{2}k\Delta L^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{4}\Delta L^2\right) \end{aligned}$$

Calcoliamo allora la massima compressione, quindi

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{1}{2}k\Delta L_{\max}^2 = E_3 \\ \Delta L_{\max} &= \frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{4}d - L_0^2 \end{aligned}$$