Exercises

Paolo Bettelini

Contents

1 Esercizi

Esercizio

Verificare per induzione che per ogni k,

$$D^k e^{-\frac{1}{x^2}} = P_k(x) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

con $x \neq 0$, dove P_k è un polinomio di grado minore o uguale a k in $\frac{1}{x^3}$. Dedurre inoltre che per tutte le k,

$$\lim_{x\to 0} D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0 = D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)(0)$$

Esercizio Studiare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} = f_+(x) & x > 0 \\ a \ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + e^{b\cos(x)-1} = f_-(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di derivabilità $f_+(x)$ è derivabile per $x > 0$ e quindi f è derivabile per $x > 0$. La funzione f_- è anch'essa derivabile per $x < 1$, in particolare per $x \leq 0$. Quindi, manca da studiare il punto $x = 0$. La continuità deve valere

$$\exists \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

l limite è dato da

$$\lim_{x\to 0^-} = f_-(0) = e^{b-1}$$

n quanto f_- è continua. Quindi, f è sempre continua a sinistra. L'altro limite è dato da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{x^2}{x} + e^{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\ln(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2}x^2 \ln(x)} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$x^2 \ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^2} \to 0$$

Quindi, il secondo limite è 1. Allora f è continua se e solo se $1 = e^{b-1}$, quindi $b = 1$. Poiché la derivabilità implica la continuità, deve essere $b = 1$. Inoltre devono esistere finite $D_-f(0) =$

$D_+f(0)$, quindi

$$D_-f(0) = D_-(f_-)(0) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{f_-(x)-f_-(0)}{x-0} = -a \\ Df_-(0) = -a \end{cases}$$

e quella sinsitra

$$D_+f(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_+(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$$

Concludiamo allora che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $b = 1$ e $a = -\frac{1}{2}$. In tal caso $f'(0) = \frac{1}{2}$. Se $b = 1$ e $a \neq \frac{1}{2}$, f è continua ma non derivabile e $x = 0$ abbiamo un punto angoloso.

Esercizio

Dimostrare che se f è continua, periodica e non costante, ammette un minimo periodo positivo. La funzione di Dirichlet è periodica di ogni razionale, quindi non ha un periodo minimo.

Esercizio

Scrivere la relazione fra $F_a(x)$ e $F_b(x)$ per $a \neq b$.

Esercizio Tra tutti i contenitori cilindrici di volume fissato V, trovare quello che ha superficie minima.

Abbiamo che

$$V = r^2\pi h$$

e

$$S = 2r^2\pi h + 2r\pi h$$

Vogliamo minimizzare S con V costante. Troviamo $h = \frac{V}{\pi r^2}$, e allora

$$\frac{S}{2} = \pi r^2 + \frac{V}{r}$$

I vincoli sono $r > 0$. Minimizziamo allora $f(r) = \frac{S}{2}$. La funzione è derivabile e quindi continua in $(0, +\infty)$. Notiamo che $f(r) \to \infty$ per $x \to 0^+$ e $x \to \infty$. Per estensione del teorema di Weierstrass al caso di funzioni definite su intervalli aperti che tendono ad infinito agli estremi, esiste un minimo assoluto in tale intervallo. Poiché f è derivabile in $(0, +\infty)$, tale minimo è assunto in un punto stazionario, per il teorema di Fermat. Abbiamo

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r^2}(2\pi r^3 - V)$$

Risolviamo quindi $f'(r) = 0$ e quindi

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/2}$$

Vi è un unico punto stazionario nell'intervallo, e quindi questo è il minimo assoluto.

Esercizio

Let

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{2} \leq x < 5 \right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \,|\, x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di E, F, $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il temrine $n+2$ cresce con n, quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approcciando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F. Allora siccome ci avviciamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$. Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1-z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.
- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il max non esiste in quando $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anchde il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.
- Posto $E + F = \{x + y \,|\, x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:
  1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
  2. $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$ non è maggiorante.

Nota: se $x < \mu$ allora posto $\varepsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \varepsilon$. Allora sia $\varepsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > e_1 > \sup E . \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_2 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$.
- Posto $-E = \{-x \,|\, x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E. Analogamente per il min.

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{x^2+1} \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore.
Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$
$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2)-(n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il maggiornate e supremum è quindi x_{14}.

Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right)+1}{\sqrt{n^3+1}+\log n}$$

Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2}+\cos(1/n)+\log n}{(n+\sqrt{n})^2-\sqrt{n}}$$

Esercizio

$$a_n = \log\left(1+\sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+\log n}\right)\right)\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)$$

Esercizio

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3-\log n}{\sqrt{n^4+n}}}$$

Esercizio

Sia $\{b_n\}$ una successione e sia $\{b_{n\pm k_0}\}$ la successione traslata di $\pm k$. Dimostrare che $\lim b_n$ esiste se e solo se $\lim b_{n\pm k_0}$ esiste e che i limiti sono uguali.

Esempio
Considera
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$
Allora
$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$
Quindi
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}$$

Esercizio
Calcolare
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2\cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\
&= \frac{1}{7^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\
&= \frac{1}{7^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} + \frac{2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{n+2} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Esercizio
Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1+1/n)^n + \sin n}{(n+\sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$
Notiamo che $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$. Notiamo allora che
$$a_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\}} \sim \frac{1}{n}$$
Siccome la serie armonica è una serie-p con $p = 1$, allora la serie diverge.

Esercizio
Calcolare
$$\lim_{x\to 0} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x\sin x}{x^3\cos(x) - (e^x-1)^2} = 2$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)^2 + x^3\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$, $\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Inoltre, $x^3 \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim x^{7/2}$, quindi a numeratore raggruppiamo $x^{7/2}$. Per il denominatore $1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x}x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)^2 &\sim x^{5/2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}} \to 0\end{aligned}$$

Riscriviamo allo l'espressione come

$$\begin{aligned}&= \frac{x^{7/2}\left\{x^{-7/2}x^3\big(1-\frac{1}{x}\big)^3 + x^{1/2}\sin(\frac{1}{x^{1/2}})\right\}}{x^2\left\{x^{-2}x^{1/2}\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)^2 + x\cos\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}} \\ &\sim 2x^{3/2} \to +\infty\end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} = \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x-1}$$

la forma di indecisione è 1^∞. Allora usiamo la forma esponenziale

$$e^{(2x-1)\log\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)}$$

Vogliamo usare $\log(1+f(x)) \sim f(x)$ con $f(x) \to 0$. Allora scriviamo

$$e^{(2x-1)\log\left(1-\frac{6}{4x+5}\right)}$$

dove l'esponente è asintotico a -3. Allora il limite è pari a e^{-3}.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin^2(x)\log(1+\tan^4(\frac{x}{1+x^4}))}{\big(e^{2\sin^4 x}-1\big)\left(\sqrt[6]{1+\frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}}-1\right)}$$

Abbiamo:

1. $\sin(x^2) \sim x^2$
2. $\tan(1+\tan^4(\frac{x^2}{1+x^2})) \sim \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2}) \sim \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 \sim x^4$
3. $e^{2\sin^4(x)}-1 \sim 2 \sim x^4 \sim 2x^4$
4. $\sqrt[6]{1+\frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}}-1 \sim \frac{1}{6}x^2$

XXX

Esercizio

Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\log(1+2x)}{\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}$$
Scriviamo l'asintotico con l'o-piccolo:

1. $\sin x = x(1+o(1))$
2. $\log(1+2x)=2x(1+o(1))$

Allora
$$\begin{aligned}\sin x-\log(1+2x)&=x+xo(1)-2x-2xo(1)\\&=-x+xo(1)=-x(1+o(1))\end{aligned}$$
Al denominatore abbiamo
$$(1+1x)^{1/6}-1=\frac{1}{6}x(1+o(1))$$
e allora
$$(1+1x)^{1/6}=1+\frac{1}{6}x(1+o(1))$$
Trasformiamo analogamente l'altro termine e troviamo
$$\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}=\frac{1}{3}x(1+o(1))\sim\frac{1}{3}x$$
e quindi il limite fa -3.

Esercizio

Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{2}{3}x}-\cos\sqrt{x}}{(\tan(2x))^{\alpha}}$$
Il primo termine è pari a $1+\frac{2}{3}x(1+o(1))$, il secondo $1-\frac{1}{2}x(1+o(1))$. Abbiamo allora
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{2}{3}x(1+o(1))-1+\frac{1}{2}x(1+o(1))}{(2x)^{\alpha}}\sim\frac{7}{3\cdot 2^{\alpha+1}x^{1-\alpha}}=\begin{cases}0^+ & \alpha<1\\ \frac{7}{12} & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$$

Esercizio

Calcolare
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x\left(\sqrt{x}-\frac{\pi}{2}\right)}$$
Conviene razionalizzare
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left[\cos x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sin x\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]}=\frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{\sin x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$
Sostituiamo la variabile $y=\frac{\pi}{2}$
$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2\pi}\left[\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+y^2\right]}{y}$$
Notiamo che $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(y)\sim -y$. Quindi,
$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2\pi}(-y)}{y}=-\sqrt{2\pi}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 1}\begin{cases}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{x-1} & x>1\\ \sin(\frac{\pi}{2}x) & x<1\end{cases}$$

Calcoliamo allora i limiti dalla due direzioni.

$$\lim_{x\to 1^-}\sin(\frac{\pi}{2}x)=1$$

L'altro limite

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{x-1}=\frac{\infty}{0^+}=+\infty$$

Quindi il limite generale non esiste.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\left[1+\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{x^3+\tan^2 x}}$$

Scriviamo la forma esponenziale

$$\lim_{x\to 0^+}\exp\left\{\frac{x+1}{x^3+\tan^2 x}\log\left(1+\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)\right)\right\}$$

Il primo termine è asintotico a $\frac{1}{x^2}$, mentre il logaritmo è asintotico a $\sin(\frac{x^\alpha}{x+1})$ che è asintotico a $\frac{x^\alpha}{x+1}$.

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha-2}=\begin{cases}+\infty & \alpha>2\\ e & \alpha=2\\ 1 & \alpha<2\end{cases}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2+x}\right)\right\}^{\frac{\tan x}{\log(1+1+x^2)}}$$

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

con $A>0$. Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n=\frac{A^n}{n!}>0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{A^n}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{A^n}=\frac{A}{n+1}\to 0$$

Quindi la serie converge, e converge a e^A-1.

Esempio

Consider
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^2}+(\log n)^n+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^n+e^{3n\log n}+\left(n+\frac{1}{n}\right)^{17}}$$
che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotito. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad e. Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora $(\log n)^n = e^{n\log\log n}$. Allora chiaramente e^{n^2} domincia sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo $n^n = e^{n\log n}$ come termine dominante.
$$a_n = \frac{e^{n^2}\left\{1+e^{n\log\log(n)-n^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot e^{-n^2}\right\}}{e^{3n\log n}\left\{1+e^{-2n\log n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{17}\cdot e^{-3n\log n}\right\}}\sim\frac{e^{n^2}}{e^{3n\log n}}$$
Allora
$$e^{n\log\log n-n^2}=e^{-n^2\left\{1-\frac{\log\log n}{n^2}\right\}}\to\infty$$
quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice
$$\left(e^{n^2-3n\log n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{n\left(1-\frac{3\log n}{n}\right)}\to\infty>1$$

Esempio

Studiare il carattere di
$$\sum^{\infty}\frac{n^{n\log n}}{(2n)!}$$
che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che $(2n+2)! = (2n+2)(2n+2)(2n)!$ e $(n+1)\log(n+1) = n\log(n+1)+\log(n+1) = n[\log n+\log(1+1/n)]+\log(n+1)$. Il rapporto è dato da
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{(n+1)^{(n+1)\log(n+1)}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^{n\log n}}\\&=\frac{(n+1)^{n\log n}\cdot(n+1)^{n\log(1+1/n)+\log(n+1)}}{n^{n\log n}}\end{aligned}$$
Con
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\log n}\cdot(n+1)^{n\log(1+1/n)}\cdot(n+1)^{\log(n+1)}$$
troviamo
$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\log n}\cdot(n+1)^{n\log(1+1/n)}(n+1)^{\log(n+1)}$$
Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

Esempio

Considera
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$
Il criterio della radice non funziona. Infatti,
$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$

Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come

$$\begin{aligned} n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\log\left(n^{\log n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\log n)^2} \to 1 \end{aligned}$$

Allora il limite è $L = 1$, quindi il criterio è inconclusivo. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a^{\sqrt{n}\log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n}\log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}}\right\}} \end{aligned}$$

L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio $\sum \frac{1}{n^2}$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2\log n - \sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right\}} \end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2\log n - \sqrt{n}\log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{2\log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \to -\infty\right\}$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \to 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie converge.

Con radici abbiamo

$$\left[\frac{n^n}{(2n)!}\right]^{1/n} = \frac{n}{\left[(2n)^{2n}\cdot 2^{-2n}\cdot\sqrt{4\pi n}(1+o(1))\right]^{1/n}}$$
$$= \frac{n}{(2n)^2\cdot e^{-2}(4\pi)^{\frac{1}{2n}}\cdot n^{\frac{1}{2n}}(1+o(1))^{\frac{1}{n}}} \to 0$$

E quindi converge

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^2}+n^n}{(n^2)!+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2}+n^n = e^{n^2}+e^{n\log n} = e^{n^2}\left\{1+e^{n\log n-n^2}\right\}\sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned}(n^2)!+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} &= (n^2)^{n^2}\cdot e^{-n^2}\cdot\sqrt{2\pi n^2}(1+o(1))+e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= e^{2n^2\left\{\log n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}}(1+o(1))+e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= e^{2n^2\left\{\log n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}}\left\{1+o(1)+e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-2n^2\{\cdots\}}\right\}\\ &\sim e^{2n^2\left\{\log n-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}} = (n^2)^{n^2}e^{-n^2}\sqrt{2\pi n^2}\end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{(n^2)^{n^2}e^{-n^2}\sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum b_n$ e

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{(n^2)^n e^{-n}(2n)^{\frac{1}{2n}}n^{1/n}}\\ &= \frac{e^{2n}}{n^{2n}(2n)^{1/n}n^{1/n}} \to 0\end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

Esempio

Verificare per quali valori di $\alpha > 0$,

$$f(x) = \begin{cases}|x|^\alpha\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x = 0\end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$. f è continua per ogni $\alpha > 0$ per il teorema dei due carabinieri. Infatti,

$|f(x)| \leq |x|^\alpha \to 0 = f(0)$ per $x \to 0$. Il rapporto è dato da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x|^{\alpha-1} \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot \cos\frac{1}{x} \to \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \nexists & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Per ogni α, f è derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e

$$f'(x) = D[|x|^\alpha \cos\frac{1}{x}] = |x|^{\alpha-2}\left\{\alpha|x|\mathrm{sgn}x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right\}$$

Quindi $f'(0)$ esiste per $\alpha > 1$, f' è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 2$.

Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - x\ln(1+x) + 3x}{\sin(x) + 3x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x(x - \ln(1+x) + 3)}{x(\frac{\sin x}{x} + 3x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{0 - 0 + 3}{1 + 0} = 3\end{aligned}$$

Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\left(e^{x^2} - 1\right)}{(1 - \cos(x))[\ln(1+\sqrt{x})]^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x(1+o(1))x^2(1+o(1))}{\frac{x^2}{2}(1+o(1))\sqrt{x}(1+o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4(1+2o(1)+o^2(1))}{1+o^2(1)+3o(1)+o^3(1)} = 4\end{aligned}$$

Esercizio

Considera $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[e^{-x^n} - 1 + \ln(\cos(x^n))\right] &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1)) + \ln(1 + \cos(x^n) - 1)\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1)) + \ln\left(1 - \frac{x^{2n}}{2}(1+o(1))\right)\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1)) - \frac{x^{2n}}{2}(1+o(1))\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{x^2}\left[x^n\left(1 + \frac{x^n}{2}\right)(1+o(1))\right]\end{aligned}$$

Nel caso $n > 0$ abbiamo

$$\begin{cases} 0 & n > 2 \\ -2 & n = 2 \\ -\infty & 0 < m < 2 \end{cases}$$

Nel caso $n = 0$ il limite è $-\infty$, mentre se $n < 0$ il limite non è ben definito.

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \ln(\cos x + x^2)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}+1}{1-e^{-x^2}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} ln(1+\cos x - 1 + x^2)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}+1}{\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(1+e^{-\frac{x^2}{2}}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}(1+o(1))+x^2\right)}{\frac{x^2}{2}(1+o(1))} = 1$$

Esercizio

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin(2x))^{\frac{1}{\ln\left(1+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indecisione 1^∞. Facciamo un cambio di variabile $t = x - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}} &= \lim_{t\to 0}\exp\left\{\frac{1}{\ln(1-\sin t)}\cdot\ln(\cos(2t))\right\}\\
&= \lim_{t\to 0}\exp\left\{\frac{\ln(1+\cos(2t)-1)}{\ln(1-\sin t)}\right\}\\
&= \lim_{t\to 0}\exp\left\{\frac{\ln(1-2t^2)}{1-t}\right\}\\
&= \lim_{t\to 0}\exp\left\{\frac{-2t}{t}\right\} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Esercizio

Studia la continuità di

$$f(x) = (\ln|x|)^{-1}$$

Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

Allora sostituiamo $t = e^x$ quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{t}\frac{1}{1+t}\,dt\\
&= \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt\\
&= \log|t| - \log|t+1| + C\\
&= \log\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x+2+e^{-x}}\,dx$$

Allora abbiamo

$$\int \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^2 + 2e^x + 5}\,dx$$

Sostituiamo $t = e^x$ e otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 5} &= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t+1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left\{\frac{e^x + 1}{2}\right\}\end{aligned}$$

Esercizio

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$

Cominciamo sostituendo $t = x^{-\frac{1}{2}}$ e proseguiamo per parti

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{3}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}})\,dx &= \int t^3 \arctan(t)(-2t^{-3})\,dt \\ &= -2\int \arctan(t)\cdot 1\,dt \\ &= -2\left[t\arctan(t) - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt\right] \\ &= -2t\arctan(t) + \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt\end{aligned}$$

Sostituiamo $v = 1 + t^2$

$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dv}{v} = \log(1+t^2) + C$$

Allora il risultato è

$$-2x^{-\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log(1 + x^{-1}) + C$$

Esercizio

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+4)\,dx &= x\log(x^2+4) - 2\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx \\ &= x\log(x^2+4) - 2\int 1 - \frac{4}{x^2+4}\,dx \\ &= x\log(x^2+4) - 2x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Esercizio

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx$$

Esercizio

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$$

Sostituiamo $x+1=t^2$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{2t}{t\cdot(t^2-1)}\,dt \\ &= 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} \\ &= \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t+1} \\ &= \log|t-1| - \log|t+1| + C \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C\end{aligned}$$

Esercizio

Procediamo per parti

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}})\,dx &= 2x^{\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}}) - \int \frac{2x^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})}{1+x^{-1}}\,dx \\ &= 2x^{\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log|1+x| + C\end{aligned}$$

Esercizio

$$\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

Sostituiamo $t=\sqrt{x}$ e poi procediamo per parti

$$2\int \arcsin(t)\,dt = t\arcsin(t) - 2\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Sostituiamo ora $v=1-t^2$

$$t\arcsin(t) + \int v^{-\frac{1}{2}}\,dv = \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + C$$

Esercizio

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+3e^x+2}$$

Sostituiamo $t=e^x$

$$\int \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

Esercizio

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\, dx$$

Sostituiamo $t = x + 1$.

Esercizio

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx$$

Sostituiamo $t = e^x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+t}{1+t^2}\frac{1}{t}\, dt &= \int \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{t}\, dt + \int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \arctan(t) + \int \frac{-t}{1+t^2} + \frac{1}{t}\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + \ln(e^x) + \arctan(e^x)
\end{aligned}$$