

# Differential geometry

Paolo Bettelini

## Contents

1 Differential geometry	1
-------------------------	---

## 1 Differential geometry

### Definizione Curva parametrizzata di classe $\mathcal{C}^k$

Una curva parametrizzata su  $\mathbb{R}^n$  è una funzione  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $I$  intervallo reale (con più di un punto) e con  $\sigma$  di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Le derivate sono generalmente definite per l'interno dell'intervallo. La classe  $\mathcal{C}^k$  è definita su un estremo dell'intervallo, per esempio  $[a, b]$ , se  $\sigma$  può essere prolungata a funzione  $\tilde{\sigma}$  di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $(a - \varepsilon, b) = I_\varepsilon$ , cosicché  $a \in I_\varepsilon$ . In tal caso  $\sigma'(a)$  è ben definito come  $\tilde{\sigma}'(a)$ .

Per parametrizzare un segmento fra  $A$  e  $B$  possiamo scrivere  $P = (1 - t)A + tB$  oppure  $P = \lambda A + \mu B$  dove  $\lambda + \mu = 1$ , che viene detta combinazione lineare affine. Se richiediamo anche che  $\lambda, \mu \geq 0$  allora si chiamano combinazioni convesse. Quest'ultima si generalizza al  $k$ -simplesso.

### Definizione $k$ -simplesso in $\mathbb{R}^n$

Sia  $n \geq k$ . Consideriamo  $k + 1$  punti  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  in posizione lineare generale, cioè non appartenenti ad un sottospazio affine di dimensione minore o uguale a  $r - 1$ . Allora il  $r$ -simplesso di tali vertici è

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i \mid \lambda_j \geq 0 \wedge \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

### Definizione Sottospazi affini in forma parametrica

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sottospazio vettoriale di dimensione  $r \leq n$  e  $P_0 \in \mathbb{R}^n$ . Allora

$$L = \{P_0 + u \mid u \in U\} = P_0 + U$$

è il sottospazio affine di direzione  $U$  e passante per  $P_0$ .

Questi sono una generalizzazione della retta. Fissata una base  $u_1, \dots, u_r$  di  $U$ , otteniamo la parametrizzazione lineare

$$L = \left\{ P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

cioè  $\sigma: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  dato da

$$\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i$$

è una parametrizzazione completa di  $L$ . Chiaramente  $P_0$  può essere arbitrariamente scelto fra i punti di  $L$  e la base può essere scelta arbitrariamente fra i punti di  $U$ . Il passaggio alle coordinate affini

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_r) &= P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \\ &= P_0 - \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i P_0 \right) + \sum_{i=1}^r t_i \underbrace{(P_0 + \lambda_i)}_{\in L}\end{aligned}$$

Chiamando  $P_i = P_0 + u_i$  possiamo scrivere

$$\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i$$

cosicché

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$$

che sono tanti parametri. Così si possono ottenere i punti all'interno dei simplessi con  $\lambda_i \geq 0$ .

### Definizione Baricentro di un insieme di punti

Dati  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^n$  arbitrari, il loro baricentro è dato dalla combinazione affine

$$B = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n P_i$$

che è la media aritmetica.

### Teorema Teorema di geometria euclidea

Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle rette mediane, e divide ciascuna mediana in due parti una lunga  $\frac{1}{3}$  dell'altra.

Fisicamente, il motivo per cui si incontrano è dato dal fatto che il baricentro di un segmento è il suo punto medio. Il baricentro del segmento di una delle mediane è una media pesata a  $\frac{2}{3}$ .

#### Proof

Sia  $B = \frac{1}{3}(P_0 + P_1 + P_2)$ . Consideriamo la retta  $P_0B = \{(1-t)P_0 + tB\}$ , cioè

$$P_0B = \left(1 - t + \frac{t}{3}\right) P_0 - \frac{t}{3}P_1 + \frac{t}{3}P_2$$

che sta sul lato  $[P_1, P_2]$  se e solo se  $1 - t + t/3 = 0$ , cioè  $t = 1/2$ . Quindi,

$$\left(1 - t + \frac{t}{3}\right) P_0 + \frac{t}{3}P_1 + \frac{t}{3}P_2 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$$

per  $t = 1/2$ , che è il punto medio  $M_{1,2}$  fra  $P_1$  e  $P_2$ . Analogamente lo stesso vale per ogni mediana  $P_iM_{j,k}$ . Quindi le tre mediane si incontrano nel baricentro. Inoltre, vediamo come scrivere  $B$  come combinazione affine fra  $P_0$  e  $M = M_{1,2}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 = (1-t)P_0 + tB|_{t=\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}P_0 + \frac{3}{2}B\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo  $B = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}M$ .

Lo stesso teorema vale per i simplessi di dimensione superiore. Per il tetraedro la mediana parte dal baricentro di ogni faccia, cioè il baricentro del triangolo. Quindi abbiamo una sorta di successione di punti di baricentro, e la mediana viene spezzata in due parti con rapporto  $\frac{1}{4}$ .