Analisi III

Paolo Bettelini

Contents

1 Successione di funzioni

Definizione Successione di funzioni

Una *successione di funzioni* è una famiglia di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite su un dominio comune $f_n\colon D \to \mathbb{R}$.

Definizione Convergenza in un punto

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione converge in un punto x_0 se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) < \infty$$

Definizione Convergenza puntuale

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge puntualmente* ad una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ se

$$\forall x \in D,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Quindi la successione converge in ogni punto, ma la velocità di convergenza può dipenderere dal punto.

Definizione Convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione *converge uniformemente* ad una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ se

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

per $n \to \infty$.

Quindi la velocità di convergenza è la stessa in ogni punto.

Definizione Convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. La successione è *uniformemente di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n, m > N, \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

A partire da un certo indice, tutte le funzioni della successione sono molto vicine tra loro in modo uniforme su tutto D, indipendentemente dalla funzione limite.

Teorema Convergenza uniforme e convergenza uniformemente di Cauchy

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. Se la successione è uniformemente di Cauchy allora è uniformemente convergente.

Teorema

Sia $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni R-integrabili dove $f_n \to f$ in $[a,b]$. Allora f è R-integrabile e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema

Sia $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

1. $\exists x_0 \in [a,b]$ tale che f_n converge in x_0;
2. f_n' converge uniformemente in g a $[a,b]$.

Allora,

1. f_n converge uniformemente a f in $[a,b]$;
2. f è derivabile;
3. $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

2 Serie di funzioni

Definizione Convergenza uniforme

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente* ad una funzione $S(x)$ se la successione delle somme parziali

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converge uniformemente a $S(x)$, ovvero se

$$\sup_{x\in D} |S_N(x) - S(x)| \to 0$$

per $N \to \infty$.

È più forte della convergenza puntuale.

Definizione Convergenza totale

Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge totalmente* su un insieme D se la serie di norme

$$\sum ||f_n||_\infty$$

converge.

Ricordiamo che in generale la norma

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e per $p = \infty$

$$||f||_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

Teorema

Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura e

$$f_n \colon X \to [0; +\infty)$$

con $f_n \geq f_{n+1}$ Allora

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\lim_n f_n) \, d\mu$$

Sia per esempio $f_n = \chi_{\{1\}} + \chi_{\{n\}}$. Allora la funzione converge puntualmente in quanto l'1 si sposta sempre più a destra. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = 2 \to 2$$

Se invece $f_n \geq f_{n+1}$ allora $f_n = \chi_{\{n, n+1, \cdots\}}$, allora tende a zero. Tuttavia, l'integrale di f_n è infinito in quanto la misura dell'insieme è infinita.

Proof

Abbiamo

$$f_n \leq f_{n+1} \cdots \leq f, \quad f = \lim_n f_n$$

Quindi

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

quindi anchde la successione degli integrali è monotona e ammette limite. Il limite sarà sempre più piccolo dell'ultimo valore.

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

Facciamo ora il caso $\geq$. Sia $0 \leq \varphi \leq f$ una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad a_i \geq 0$$

e prendiamo $c \in (0, 1)$. Consideglliamo gli insiemi

$$A_n = \{f_n \geq c\varphi\}$$

Tali insiemi sono misurabili, in quanto sto moltiplicando una funzione misurabile per una costante e l'insieme $\{f \geq g\}$ è come dire $\{f - g \geq 0\}$. Sappiamo

1. $A_n \in A_{n+1}$ in quanto $c\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$;
2. $\bigcup A_n = X$. Sia $x \in X$. Se $\varphi(x) = 0$ allora è in A_n. Se invece $\varphi(x) > 0$, ma siccome $\varphi \leq f$, e $c < 1$, allora

$$c\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$$

   La succesione, da un certo posto in poi, è più grande di $c\varphi(x)$ (ne basta uno), quindi $x \in A_n$.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} E_i &= E_i \cap X \\ &= E_i \cap (\bigcup A_n) \\ &= \bigcup_n (E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Quindi $E_i \cap A_n \subseteq E_i \cap A_{n+1}$ è una successione di insiemi che si sta allargando. Quindi, la misura dell'union è il limite.

$$\mu(E_i) = \lim_{n\to\infty} E_i \cap A_n$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{A_n} \varphi \, d\mu \\ = c \int_X \varphi \chi_{A_n} \, d\mu = c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \end{aligned}$$

Facciamo ora il limite

$$\begin{aligned} \lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq c \lim_n \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i \cap A_n) \\ = c \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(E_i) = c \int_X \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X \varphi \, d\mu$$

vale per tutti i $c \in (0, 1)$, e allora possiamo usare il supremum

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \varphi \, d\mu$$

Non solo vale per ogni c, ma per ogni funzione semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$. In particolare anche per il supremum. Il supremum di questi integrali al variare di tutte le funzioni semplici minori di f è l'integrale di f, cioè la definizione

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu$$

Mettendo assieme le due cose otteniamo l'uguaglianza

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Corollario

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

Siccome i termini sono tutti positivi, la successione delle serie parziale è monotona.

Lemma Lemma di Fatou

Sia $f_n \colon X \to [0, +\infty)$ misurabili, allora

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

(l'integrale esiste sempre)

Proof

Consideriamo

$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k$$

chiaramente $g_n \leq g_{n+1} \to \liminf f_n$ e sono misurabili. Consideriamo allora l'integrale

$$\lim \int_X g_n \, d\mu = \int_X \liminf f_n \, d\mu$$

e per il teorema della convergenza monotona e definizione di lim inf

$$\begin{aligned} \int_X \liminf f_n \, d\mu &= \lim_n \int_X (\inf_n k \geq n f_k) \, d\mu \\ &\leq \liminf \int_X f_n \, d\mu \end{aligned}$$

Definizione Integrabilità di una funzione positiva

Sia $f \colon X \to [0; +\infty)$ misurabile. Allora f è *integrabile* su X se

$$\int_X f \, d\mu \leq \infty$$

Diciamo che $f \in L^1(\{X, \Sigma, \mu\})$. Per esempio $\{1/n^2\} \in L^1(\mathbb{N})$ ma $\{1/n\} \notin L^1(\mathbb{N})$

Definizione Integrabilità di una funzione

Sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ misurabile. Allora f è *integrabile* se f^+ e f^- sono integrabili (che sono entrambe funzioni positive).

Dobbiamo tuttavia definire l'integrale di una funzione di segno arbitraria. Sia allora

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

Consideriamo per esempio

$$f = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$$

Allora

$$f^+ = (1, 0, \frac{1}{3}, 0)$$

e

$$f^- = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$$

L'integrale non converge in quanto i due integrali non convergono (le serie divergono per confronto asintotico).

Proposition

Siano $f, g \in L^1$.

1. $\alpha f + \beta b \in L^1$ e
$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$
Quindi lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale.
2.
$$f \leq g \implies \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$$
3. $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$. Infatti $f^+ f^- = |f|$ e per la direzione inserva abbiamo $0 \leq f^+ \leq |f|$. Ma se l'integrale del modulo è finito allora lo sarà anche quello di f^+ che è più piccolo. Lo stesso vale per la parte negativa.
4. Se f è misurabile allora lo è anche $|f|$, ma il viceversa non è vero. Per esempio sia $X = \{a, b, c\}$ e $\Sigma = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Sia allora
$$f = \begin{cases} 1 & x = a \vee x = b \\ -1 & x = c \end{cases}$$
Chiaramente $\{f < 0\} = \{c\}$ non è misurabile, ma $|f| = 1$ per tutte le x e le funzioni costanti sono sempre misurabili.
5.
$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$
Infatti
$$\begin{aligned} \left| \int_X (f^+ - f^-)\, d\mu \right| &= \left| \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f^+\, d\mu \right| + \left| \int_X f^-\, d\mu \right| \\ &= \int_X f^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu \\ &= \int_X (f^+ + f^-)\, d\mu \\ &= \int_X |f|\, d\mu \end{aligned}$$

Teorema Teorema della convergenza dominante

Sia $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $f = \lim_n f_n$. Supponiamo che ci sia $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ in X. Allora
$$\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Proof

f_n sono integrabili in quanto $|f_n| \leq g$ che è integrabili, quindi sarà finito anche l'integrale del modulo, e f è integrabile perché ciò vale anche per il limite. Allora $|f - f_n| \leq 2g$ quindi $2g - |f - f_n| \geq 0$. Siccome quest'ultima è una successione positiva posso applicare il lemma di Fatou
$$\int_X \liminf (2g - |f - f_n|)\, d\mu \leq \liminf \int_X (2g - |f - f_n|)\, d\mu$$

Ma per le proprietà dei lim inf possiamo estrarre la costante

$$\begin{aligned}\int_X 2g - \lim|f-f_n| = \int_X 2g &\\ &\le \liminf\left(\int_X 2g\,d\mu - \int_X |f-f_n|\,d\mu\right)\\ &= \int_X 2g\,d\mu - \limsup\int_X |f-f_n|\,d\mu\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_X 2g\,d\mu &\le \int_X 2g\,d\mu - \limsup\int_X |f-f_n|\,d\mu\\ \limsup\int_X |f-f_n|\,d\mu \le 0&\end{aligned}$$

Ma quindi questo limite deve essere ed essere uguale a zero

$$\int_X |f-f_n|\,d\mu = 0$$

Infine, usando il modulo

$$\lim\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| \le \lim\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

siccome è tutto positivo deve essere

$$\lim\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| = 0$$

Se $A \subset X$ con A integrabile e $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, f è integrabile in A se $f\chi_A$ è integrabile. Chiaramente definiamo

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu$$

Quindi per vedere se è integrabile nel sottoinsieme la estendiamo su tutto lo spazio con la funzione caratteristica e integriamo.

Costruiamo ora una misura su R (la misura di Lebesuge). Vogliamo che sia invariante per traslazione $\mu(A) = \mu(A+c)$ dove c è una costante. Vorremmo anche che $\mu([b,a]) = b-a$. Tuttavia, non è possibile costruire tale misura su tutto $\mathbb{R}$. Sia allora $I = (a,b)$ (non cambia se incluso o meno) e denotiamo $l(I) = b-a$. Sia anche $E \subset \mathbb{R}$. Diamo la *misura esterna*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)\,|\,E \subset \bigcup_n I_n\right\}$$

Alcune proprietà di questa ipotetica misura

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\mu^*(\{x\}) = 0$ dove $\{x\} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$;
3. se E numerabile, allora $\mu^*(E) = 0$

$$\begin{aligned}E &\subset \{x_n\}\\ I_n &= \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\\ E &\subset \bigcup I_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \\
&= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

4. $\mu^*(E+x) = \mu^*(E)$ (invariante per traslazione).
5. subadditività
$$\mu^*\left(\bigcup E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$$
6. $\mu^*(I) = b - a$

Se tutto fosse vero, abbiamo quello che cerchiamo, ma in realtà quando gli insiemi sono disgiunti l'ugualgianza non vale, quindi non esiste tale misura.

Vale sempre $\mu^*(I) \leq b - a$ perché c'è l'inf, c'è sempre un ricoprimento. La misura esterna è almeno quel valore, magari più piccolo, vale lo stesso.