Functorial
Gēmaṭriyā

Not another exercises book in CT

P.B. & F.L. 29 marzo 2015 18:18

Indice

Capitolo 1

Cartesian Closed Categories

Exercise 1 (_1.tex)

Ogni categoria cartesiana chiusa con un oggetto zero è banale (corollario: **Sets** non ha un oggetto zero); resta vero quando la categoria è solo cartesiana?

Riflessione Una categoria è *chiusa* se ogni collezione di frecce tra una coppia di oggetti è un oggetto. Concretamente, si tratta di una categoria dotata di un funtore *hom interno* che individua tali hom-oggetti e di un oggetto *identità* per tale operazione. È necessario che certi assiomi vengano rispettati affinché tutto funzioni bene - ovvero mimando le proprietà che hanno gli esponenziali di insiemi.

Una categoria è *monoidale* se possiede una nozione di prodotto binario di oggetti il cui risultato sia un oggetto. Concretamente, si tratta di una categoria dotata di un funtore *prodotto* e di un oggetto *identità* per tale operazione. È necessario che certi assiomi vengano rispettati affinché tutto funzioni bene, ovvero esattamente come se fossimo in un monoide.

Una categoria è *monoidale chiusa* se è monoidale e chiusa in modo compatibile. Rozzamente, significa che l'esponenziazione ed il prodotto per un medesimo oggetto devono formare un'aggiunzione. Le bijezioni naturali coinvolte sono in effetti delle normali operazioni di currying, almeno finché si parla di categorie monoidali simmetriche: scelgo di ignorare la complessità introdotta dai vari gradi di commutatività possibili per il prodotto monoidale.

Come prima approssimazione posso pensare che il collegamento tra le proprietà delle categorie e le operazioni cruciali che permettono internamente sia

$$\begin{aligned} \text{chiusa} &\sim \text{esponenziale} \\ \text{monoidale} &\sim \text{prodotto} \\ \text{monoidale chiusa} &\sim \text{currying} \end{aligned}$$

Definizione 1.0.1. Una categoria *cartesiana (chiusa)* è una categoria monoidale (chiusa) il cui prodotto sia quello cartesiano. È pertanto necessariamente simmetrica.

Risposta Questo non è esattamente quello che chiedevi, ma è quanto più sono riuscito ad avvicinarmi.

Proposizione 1.0.1. ~~Ogni categoria monoidale simmetrica chiusa con un oggetto zero è equivalente a quella banale.~~ Falso!

Dimostrazione. Siano **C** una tale categoria, 1 l'unità, λ l'unitore sinistro e 0 un oggetto zero. Dati comunque due oggetti A e B si ha

$$\hom(A, B) \cong \hom(1 \otimes A, B) \cong \hom(1, [A, B]) \cong \hom(0, [A, B]) \cong \{\star\}$$

Il primo isomorfismo è $\hom(\lambda_A, 1_B)$, mentre il secondo esiste per aggiunzione. Il terzo (una precomposizione nella parte controvariante dell'hom-funtore) esiste perché 1 e 0 sono isomorfi essendo entrambi terminali. L'ultimo isomorfismo esiste perché 0 è iniziale.

Ogni funtore che abbia come codominio la categoria banale è trivilamente denso. L'unico funtore dal **C** alla categoria banale è pienamente fedele essendo gli hom-set di **C** dei singoletti. Dunque **C** è equivalente alla categoria banale. □

Nella dimostrazione uso il fatto che l'unità sia isomorfa all'oggetto terminale, generalmente falso. Comunque, è vero se la categoria è cartesiana quindi in quel caso quanto dico funziona.

In **C** tra ogni coppia ordinata di oggetti esiste un unico morfismo che dev'essere l'identità se gli oggetti non sono distinti. Allora per gli assiomi di categoria ogni composizione di morfismi con dominio e codominio uguali deve essere un'identità. Segue che tutti i morfismi che non sono identità sono isomorfismi, ovvero tutti gli oggetti della categoria sono isomorfi. Potevo sfruttare questo fatto per mostrare la densità di un funtore nella direzione opposta e concludere analogamente.

si, l'idea è esattamente questa:

$$0 \overset{(\star)}{\cong} A \times 0 \cong A \times 1 \cong A$$

sicché ogni oggetto è isomorfo allo zero, sicché ogni coppia di oggetti è vicendevolmente isomorfa. Il punto è che l'isomorfismo $(\star)$ vale di sicuro quando $- \times A$ commuta coi colimiti.

Che è proprio quando è un aggiunto sinistro - ovvero quando la categoria è chiusa. Got it.

È facile vedere che in effetti ogni categoria monoidale simmetrica chiusa ha un oggetto zero se e soltanto se è equivalente alla categoria banale.

Forse qui intendi cartesiana.

No, intendevo proprio scrivere questo.

Non so se questo sia vero, dovrei pensarci. Se una categoria è equivalente alla terminale, certamente e' cartesiana (è cocompleta), e ha uno zero (lo si dimostra) ma è anche chiusa?

Non è quello che intendevo dire. Più chiaramente:

$$\text{IS MON-SYM CLOSED} \Rightarrow (\text{HAS ZERO} \Leftrightarrow \text{IS TRIVIAL})$$

Se il prodotto è quello cartesiano, diventa l'affermazione che fai qui sotto.

No, questo è falso, per come lo enunci. Alcuni controesempi sono: gli insiemi e gli spazi puntati con lo smash product (googla), i moduli su un anello R, le categorie di fasci di moduli su uno spazio decente... Avevo posizionato male il sse. Potrebbe interessarti la definizione di AT-categoria, che sostanzialmente assiomatizza il fatto che cartesiane chiuse molto buone (i (pre)topos) e abeliane molto buone (moduli su un anello) sono classi "ortogonali" di categorie.

Il punto dell'esercizio è proprio che una categoria cartesiana con un oggetto zero (ce ne sono molte: gruppi abeliani, moduli su un anello, tutte le categorie abeliane, etc.) non può essere chiusa senza diventare equivalente alla terminale. E allora non c'è un hom interno rispetto al prodotto. Soprattutto perché il prodotto e il coprodotto sono isomorfi, in molti contesti dove c'è uno zero.

Corollario. **Sets** non ha un oggetto zero.

Dimostrazione. **Sets** è una categoria cartesiana chiusa, quindi è una categoria monoidale simmetrica chiusa. Per la proposizione precedente se avesse un oggetto zero essa sarebbe equivalente alla categoria banale e dunque tutti i suoi oggetti sarebbero tra loro isomorfi. **Sets** contiene l'insieme vuoto ed il singoletto, non isomorfi, quindi non contiene un oggetto zero. □

Proposizione 1.0.2. Il fatto che una categoria monoidale simmetrica abbia un oggetto zero non implica che sia equivalente a quella banale.

Dimostrazione. Basta presentare un controesempio: la categoria **Ab**. Col prodotto tensore di gruppi è monoidale simmetrica, l'oggetto zero è il gruppo triviale. È ovviamente non equivalente alla categoria triviale. □

Sì! Ovviamente ci sono molti altri controesempi. Quello che impedisce alla categoria *Ab* (come alle altre abeliane) di essere banale pur avendo un oggetto zero ed essendo cartesiana è che assieme alla presenza di uno zero (iniziale = terminale) ci sono i biprodotti (prodotto = coprodotto)

Morale

Ho una categoria monoidale simmetrica. Se è chiusa, un oggetto zero la banalizza. In generale, no. Il fatto che il prodotto sia quello cartesiano c'entra? Nella prima proposizione no. Nella seconda, forse, ma ci devo ancora pensare.

La risposta alla seconda domanda è che essere chiuse è essenziale: ci sono un sacco di categorie che sono solo cartesiane, e hanno uno zero senza essere banali. Il trucco è che in molti tra questi controesempi il prodotto non è solo un prodotto; è anche un coprodotto perchè le categorie sono additive.

Sulle vecchie domande/risposte si può sempre tornare; per il momento aggiungo la seconda domanda.

Exercise 2 (_2.tex)

La categoria dei poset (morfismi: funzioni monotone) è cartesiana chiusa; la categoria degli spazi metrici limitati (quelli dove $\sup_{x,y\in X} d(x,y) < \infty$, e con morfismi le funzioni lipschitziane) è cartesiana chiusa;

La categoria **Pos** ha come oggetti i poset, ovvero set dotati di relazioni binarie riflessive, antisimmetriche e transitive. Esse sono preservati dalle funzioni monotone, i morfismi della categoria.

Domanda: **Sets** è cartesiana chiusa. Ciò permette di inferire qualcosa in generale su di una categoria concreta se esiste un'aggiunzione free-forgetful?

Come sono fatti i prodotti, se ci sono?

Sets è una sottocategoria piena di **Pos**: i poset con relazioni vuote. Questo mi fa sospettare che ogni prodotto in **Pos** sia un prodotto di **Sets** dotato di una relazione adeguata a garantire monotonicità al **Sets**-prodotto cartesiano di morfismi monotoni. So che funziona, ma non so dire se sia un caso.

Non è un caso: esiste la nozione di *creare i limiti* per un funtore $U\colon \mathbf{C} \to Set$, la definizione precisa è su **CWM.V.1**. Siccome la definizione di creazione di limiti è sempre piuttosto dolorosa, provo a spiegarla in altri termini. Idealmente significa che esiste un modo canonico di dare a un universale in **Sets** una **C**-struttura che lo renda un universale in **C**; in altre parole si tratta di un modo formale di dire che "il prodotto di gruppi è il prodotto cartesiano dotato delle operazioni pointwise", oppure che "lo spazio topologico prodotto è il prodotto cartesiano con la massima topologia che rende continue le proiezioni insiemistiche". Solitamente funtori monadici creano i limiti (Prop. 1 p. 178 di *Sheaves in Geometry and Logic*, ma si dimostra anche a mano). Allora siccome i forgetful $U\colon \mathbf{C} \to Set$ da categorie algebriche sono tutti monadici (**CWM.VI.8**, Thm. 1)...
Sono contento tu l'abbia notato. Non è una cosa banale (per apprezzarla ci ho messo quasi tutta la tesi triennale).

Dati due poset A, B definiamo il loro prodotto come il prodotto cartesiano dei set soggiacenti, dotato della relazione

$$(a,b) \leq (a',b') \Leftrightarrow (a \leq a' \wedge b \leq b')$$

Questo prodotto quindi eredita dalla congiunzione logica l'associatività. Ci piace.

Con l'oggetto terminale di **Sets**, il singoletto 1, si costruisce facilmente quello di **Pos**, ovvero 1 dotato della relazione $1^2 \cong 1$ ~~(l'unica altra possibile è $\emptyset$ ma impedisce all'oggetto di essere terminale: non esistono morfismi da una relazione non vuota a quella vuota)~~.

Soprattutto perché la relazione vuota non è un ordine parziale!

Giusto. La riflessività fa in modo che il vuoto sia l'unico set ad ammettere il vuoto come relazione.

È immediato che si tratta dell'identità del prodotto, poiché trivializza la condizione logica corrispondente alla sua componente nella disgiunzione della definizione di prodotto.

A margine noto che l'oggetto iniziale è $\emptyset$ dotato della relazione $\emptyset^2 \cong \emptyset$. Non esiste oggetto zero poiché non esistono morfismi dall'oggetto terminale all'oggetto terminale.

Il corretto prodotto di morfismi è esattamente quello di **Sets**. Infatti l'ordine definito sul prodotto garantisce che il prodotto di funzioni monotone sia monotono, essendo

$$(f \times g)(a,b) \leq (f \times g)(a',b') \Leftrightarrow (f(a) \leq f(a') \wedge g(b) \leq g(b'))$$

Notiamo ora che la monotonia di un morfismo $f : A \times B \to C$ implica $\forall b \in B$ che

$$a \leq a' \Rightarrow f(a,b) \leq f(a',b)$$

e quindi l'isomorfismo di currying induce grazie all'ordine sui prodotti l'ordine puntuale sugli hom-set. Precisamente, se $f, g \in B^A$

$$f \leq g \Leftrightarrow f(a) \leq g(a) \quad \forall a$$

Ciò significa che abbiamo anche gli esponenziali e la categoria è cartesiana chiusa.

Cristallizziamo le idee. Fissato un oggetto B di **Pos** abbiamo l'aggiunzione $(- \times B) \dashv (-^B)$, i cui funtori danno prodotti ed esponenziali di **Sets** dotati delle relazioni viste sopra. Mostriamolo presentando esplicitamente le bijezioni naturali tra gli hom-set.

Per ogni coppia di oggetti A e C definiamo

$$\hom(A \times B, C) \xrightarrow{\gamma_{A,C}} \hom(A, C^B)$$

e la sua inversa come

$$(\gamma_{A,C} f)(a)(b) := f(a,b) \qquad (\gamma^{-1}_{A,C} g)(a,b) := g(a)(b)$$

per ogni $(a,b) \in A \times B$. Si tratta del currying di **Sets** ed ogni verifica sulla bijettività è immediata. Rimane da vedere se è naturale. Dati tre morfismi $f : Z \to A$, $g : C \to X$ ed $h \in \hom(A \times B, C)$, per ogni $z \in Z$ e $b \in B$ si ha

$$\left[\hom(f, g^B) \circ \gamma_{A,C}(h)\right](z)(b) = g\left(\gamma_{A,C} h(f(z))(b)\right) = g \circ h(f(z), b)$$

$$\left[\gamma_{Z,X} \circ \hom(f \times B, g)(h)\right](z)(b) = \gamma_{Z,X}\left[g \circ h \circ (f \times \mathrm{id}_B)\right](z)(b) = g \circ h(f(z), b)$$

e così concludiamo.

Ew. Vabè.

Spazi metrici limitati e funzioni lipschitziane

La categoria in esame ha come oggetti gli spazi metrici limitati, ovvero le coppie (X, d) dove X sia un set e d una metrica su di esso che abbia la proprietà

$$\sup_{x,x' \in X} d(x, x') < \infty$$

I morfismi sono le funzoni lipshitziane. Cioè, un morfismo $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è una funzione tra i set soggiacenti per cui esiste una costante non negativa K_f tale che per ogni coppia di punti (x, x') del dominio vale la seguente condizione metrica:

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K_f d_X(x, x')$$

Le verifiche degli assiomi di categoria sono straightforward.

Un fatto grazioso è che si possa scegliere $K_{f \circ g} = K_f K_g$. Cioè, l'assegnazione della costante di Lipschitz minima è funtoriale!

Interessante, non ci avevo mai pensato; che interpretazione ha la costante di Lipschitz in termini di spazi metrici come categorie arricchite?

Procediamo a verificare se è cartesiana chiusa.

Nuovamente, non faccio altro che pigliare quello che funzionava in **Sets** e dotarlo della giusta struttura aggiuntiva. Possibile che sia un caso? Di nuovo, **Sets** è una sottogategoria piena, data dagli spazi metrici con metriche costanti nulle, tra cui tutte le funzioni sono lipschitziane.

L'oggetto terminale è il set di cardinalità uno, dotato dell'unica metrica possibile.

Ingenuamente, decido che il prodotto tra spazi metrici sia il prodotto cartesiano dei set soggiacenti dotato della giusta p-metrica. L'oggetto terminale è l'unità indipendentemente dalla scelta di $1 \leq p \leq \infty$.

Capisco che $p = \infty$ sia la scelta più semplice, ma non ho un motivo concreto perpreferirla.

Attento che ci sono spazi metrici la cui metrica non è una p-norma. È più semplice di quel che pensi mettere una metrica su $X \times Y$. E c'è anche un modo di metterla su $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \ldots$

Certo, ma il modo in cui definisco la metrica sul prodotto mica vincola l'esistenza di oggetti con metriche differenti. O no? Comunque, ho intuito come deve andare a finire. È che per questo esercizio invece che costruire prodotti ed esponenziali e mostrare l'aggiunzione voglio provare a capire come gli esponenziali inducono i prodotti, supponendo che l'aggiunzione esista. For fun. Ed anche perché presumo ci saranno situazioni in cui è più semplice definire la struttura pointwise sugli esponenziali ed indurre quella sui prodotti, invece che presentarle entrambe e sperare che combacino.

Allora ricapitolando: dati (X, d_X) e (Y, d_Y) definiamo

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) = N(d_X(x, x'), d_Y(y, y'))$$

dove $N\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una qualsiasi metrica che induca la topologia euclidea su $\mathbf{R}$. Il problema di stabilire quale di queste scelte sia canonica probabilmente è mal posto, perché ci sarà in ogni caso un'unica isometria tra due scelte N ed N'.

Ok. But let me take a detour.

Pointwise to componentwise - and back!

Immaginiamo di avere una categoria concreta e cartesiana chiusa i cui morfismi debbano rispettare una certa proprietà $\mathcal{G}$, nel senso che

$$f \in [A, B] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}(f)$$

L'isomorfismo naturale dell'aggiunzione altri non è che il currying:

$$[A \times B, C] \ni f \mapsto \hat{f} \in \left[A, C^B\right]$$

Immaginiamo ora che sugli esponenziali la proprietà morfismo sia definita puntualmente, ovvero

$$\mathcal{G}(\hat{f}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall b \in B)\mathcal{G}(\hat{f}(-)(b))$$

Segue che

$$\begin{aligned} \hat{f} \in \left[A, C^B\right] \quad & \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}(\hat{f}) \bigwedge (\forall a \in A)\mathcal{G}(\hat{f}(a)) \\ & \Leftrightarrow \quad (\forall b \in B)\mathcal{G}(\hat{f}(-)(b)) \bigwedge (\forall a \in A)\mathcal{G}(\hat{f}(a)(-)) \end{aligned}$$

ovvero

$$f \in [A \times B, C] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall b \in B)\mathcal{G}(f(-, b)) \bigwedge (\forall a \in A)\mathcal{G}(f(a, -))$$

Morale: *pointwise* sugli esponenziali corrisponde naturalmente a *componentwise* sui prodotti. Ciò permette di indurre anche le strutture degli oggetti da un lato all'altro dell'aggiunzione - precisamente, usando l'ultimo *ovvero*.

Tutto ciò è molto bello e non ci avevo mai pensato; non so se la propriet'a abbia un nome; non credo non sia nota. Posti dove cercherei:

- Lambek, Joachim, and Philip J. Scott, eds. *Introduction to higher-order categorical logic.* Vol. 7. Cambridge University Press, 1988.
- Barr, Michael, and Charles Wells. *Toposes, triples and theories.* Vol. 278. New York: Springer-Verlag, 1985.

Forse c'entra l'aggiunzione $\exists \dashv \forall$? Ovviamente la parte successiva la seguo, ma l'orgetta di quantificatori rende tutto abbastanza illeggibile.

Ordini parziali e funzioni monotone - REDUX

Facciamo un esperimento con **Pos**. La condizione di morfismo è la monotonicità, e per parlarne bastano le strutture di poset su domino e codominio (ovviamente, visto che si tratta esclusivamente di rispettarle):

$$f \in [A, B] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}(f) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a, a' \in A)(a \leq a' \Rightarrow f(a) \leq f(a'))$$

La proprietà di morfismo definita puntualmente per i morfismi verso gli esponenziali induce anche la struttura di poset su questi ultimi. Infatti se $\hat{f} \in \left[A, C^B\right]$, usando le strutture di poset su A, C ed almeno formalmente quella ancora ignota su C^B, abbiamo che

$$\begin{aligned}(\forall b \in B)\mathcal{G}(\hat{f}(-)(b)) &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall b \in B)(\forall a, a' \in A)(a \leq a' \Rightarrow \hat{f}(a)(b) \leq \hat{f}(a')(b)) \\ \mathcal{G}(\hat{f}) &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall a, a' \in A)(a \leq a' \Rightarrow \hat{f}(a) \leq \hat{f}(a'))\end{aligned}$$

e quindi $\mathcal{G}(\hat{f}) \Leftrightarrow (\forall b \in B)\mathcal{G}(\hat{f}(-)(b))$ implica che $\forall a, a' \in A$

$$\hat{f}(a) \leq \hat{f}(a') \quad\Leftrightarrow\quad (\forall b \in B)(\hat{f}(a)(b) \leq \hat{f}(a')(b))$$

proprio come ci aspetteremmo.

Per quanto detto in generale sappiamo già che una funzione il cui dominio è un prodotto è monotona se e solo se lo è ogni sua componente, ma qual è la struttura di poset che questa condizione induce sui prodotti? Essa è la congiunzione di

$$(\forall a \in A)(\forall b, b' \in B)(b \leq b' \Rightarrow f(a, b) \leq f(a, b'))$$

e

$$(\forall b \in B)(\forall a, a' \in A)(a \leq a' \Rightarrow f(a, b) \leq f(a', b))$$

ma ciò implica che scelti comunque $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$ valga

$$a \leq a' \wedge b \leq b' \quad\Rightarrow\quad f(a, b) \leq f(a', b')$$

che, valutata sull'identità restituisce

$$a \leq a' \wedge b \leq b' \quad\Rightarrow\quad (a, b) \leq (a', b')$$

La monotonicità delle proiezioni produce l'implicazione inversa e così l'ordine sui prodotti è completamente fissato ed è quello che ci aspetteremmo.

Spazi metrici limitati e funzioni lipschitziane - REPRISE

La condizione di morfismo dunque sarà

$$f \in [A, B] \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{G}(f) \quad\Leftrightarrow\quad (\exists K_f)(\forall a, a' \in A)(d_B(f(a), f(a')) \leq K d_A(a, a'))$$

La condizione di *puntualizzabilità* della proprietà di morfismo è che, per ogni $\hat{f} \in \left[A, C^B\right]$ valga

La cosa avrà pure un nome vero, mi sa.

$$(\forall b \in B)(\exists K_{\hat{f},b})(\forall a, a' \in A)(d_C(\hat{f}(a)(b), \hat{f}(a')(b)) \leq K_{\hat{f},b} d_A(a, a'))$$

se e soltanto se vale

$$(\exists K_{\hat{f}})(\forall a, a' \in A)(d_{[B,C]}(\hat{f}(a), \hat{f}(a')) \leq K_{\hat{f}} d_A(a, a'))$$

Probabilmente stando a districare i quantificatori uno trova la famiglia di metriche ammissibili. Siccome è una rogna, mi accontento di tagliare corto.

Sì, appunto; una possibile sbavatura di cui ti si potrebbe accusare è che questo metodo non definisce univocamente *cosa* dovrebbe essere $d_{[B,C]}$: d'altra parte l'idea intuitiva è che la condizione metrica sia realizzata per $d_{[B,C]}(f, g) := \sup_b d_C(fb, gb)$; probabilmente uno determina anche questo smanettando coi quantificatori. Resta inteso che uno dovrebbe verificare che $K_{\hat{f}} = \sup \ldots$

Exercise 3 (_3.tex)

La categoria Δ che ha per oggetti gli insiemi totalmente ordinati e finiti non è cartesiana (come dovrebbe essere fatto il prodotto?)

La categoria Δ non è cartesiana. Infatti, dalla monotonicità delle proiezioni

$$(a, b) \leq (a', b') \Rightarrow a \leq a' \wedge b \leq b'$$

e dalla totalità dell'ordine del prodotto

$$(a, b) \leq (a', b') \vee (a', b') \leq (a, b)$$

seguirebbe

$$a \leq a' \wedge b \leq b' \bigvee a' \leq a \wedge b' \leq b$$

ovvero

$$a \leq a' \vee b' \leq b \bigwedge a' \leq a \vee b \leq b'$$

che non è sempre vero.

Dunque; ti dico come l'ho fatto io. Dentro $\boldsymbol{\Delta}$ stanno gli insiemi *totalmente* ordinati con funzioni monotone annesse. Il prodotto cartesiano è totalmente ordinato dall'ordine lessicografico, quello sulle componenti non ordina totalmente $[1] \times [1]$ ($(1, 0)$ e $(0, 1)$ non sono confrontabili!), e però rispetto all'ordine lessicografico le proiezioni canoniche non sono monotone –avrebbero bisogno di quello sulle componenti– Insomma, è il lemma della coperta troppo corta.

Sì, stiamo dicendo esattamente la stessa cosa. Infatti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono proprio due elementi che rendono falsa la condizione che ho scritto - ovvero, sui quali supporre che valgano congiuntamente totalità e monotonia delle proiezioni porta ad un assurdo. Infatti la cosa che ho scritto vuol dire che non è possibile ordinare elementi del prodotto le cui componenti non siano ordinate concordemente tra loro.

Exercise 4 (_4.tex)

La categoria dei campi (pensata come sottocategoria piena degli anelli) non è cartesiana (un campo finito non può avere un numero arbitrario di elementi; e qual è la caratteristica del prodotto di due campi di diversa caratteristica?)

La categoria dei campi è una sottocategoria piena della categoria degli anelli, poiché un campo è un anello. Gli omomorfismi di anelli esistono solo se la caratteristica del codominio divide quella del dominio; la ragione è che essi preservano le unità additiva e moltiplicativa. I campi hanno solo zero e numeri primi come caratteristiche; la ragione è che se $p = 0$ non fosse primo potrei fattorizzarlo ed avrei un divisore dello zero, proibito in un campo.

Di più: gli *anelli integri* hanno zero o un primo come caratteristica. La ragione io la vedo così: nella categoria degli anelli (commutativi e unitari, coi morfismi che rispettano l'1) $\mathbb{Z}$ è un oggetto iniziale; la caratteristica di R è il generatore del nucleo dell'unico morfismo $\mathbb{Z} \to R$ univocamente determinato dal mandare 1 in 1_R. Siccome $\mathbb{Z}$ è un anello integro, questo generatore è un suo ideale primo, aka un numero primo.

Hm. Ok, non so l'algebra. Allora.
$\mathbb{Z}$ è iniziale in **Ring**. Infatti la proprietà di morfismo fissa univocamente una freccia, che esiste sempre, verso qualsiasi altro anello.
La preimmagine di un ideale primo tramite un omomorfismo di anelli è un ideale primo. L'anello zero è un ideale primo di un anello commutativo esattamente quando quest'ultimo è un dominio integrale. Segue che il kernel di $f : \mathbb{Z} \to R$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}$ se R è un dominio integrale. Gli ideali primi di $\mathbb{Z}$ sono tutti e solo i $p\mathbb{Z}$ per p primo o zero - ed il loro generatore è proprio p. La verifica che questi corrisponde alla caratteristica di R è immediata.
I campi sono domini integrali, quindi posso ragionare della loro caratteristica in **Cring** per quanto detto. Hm. Ok. Figo.

Dunque se i prodotti esistessero ci sarebbero le proiezioni ed il prodotto sarebbe obbligato ad avere la stessa caratteristica di ognuno dei fattori - ovvero, non possono esistere prodotti di campi con caratteristica differente. La categoria non è cartesiana.

~~Non ho capito lo scopo dell'hint sulla finitezza del numero di elementi di un campo finito.~~

Esiste esattamente un campo finito, a meno di isomorfismo, con p^n elementi, dove p è un primo e $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$; viceversa, un campo finito è *obbligato* ad avere per cardinalità la potenza di un primo: non può esistere un campo con 100 elementi. D'altra parte il prodotto di $\mathbb{F}_{25}$ ed $\mathbb{F}_4$ se esiste deve avere 100 elementi, assurdo. Questa è la ragione, tra l'altro, per cui $U : \mathit{Fields} \to \mathit{Set}$ non ha un aggiunto, dato un insieme di cardinalità arbitraria non esiste un campo che ha i suoi elementi "moltiplicati, addizionati e divisi liberamente".

Come controesempio mi sembra più semplice pensare che non esiste il campo prodotto se i fattori hanno caratteristiche differenti perché è impossibile che esistano le proiezioni, come dicevo, ma è solo perché non sono familiare con questi oggetti. Comunque, ora ho capito.
Tranne una cosa. Non ho capito perché il numero di elementi del prodotto *dovrebbe* essere il prodotto dei numeri di elementi dei fattori. In relazione all'ultima cosa che dici, ok, non ho una costruzione per produrre *campi liberi*, ovvero il forgetful U non è un aggiunto destro e quindi non posso affermare che $U(F \times G) = U(F) \times F(G)$, da cui seguirebbe la considerazione sulla taglia. Ma non capisco perché l'esistenza del prodotto, da sola, avrebbe quell'implicazione sul numero degli elementi.

Exercise 5 (_5.tex)

Se la categoria **Top** degli spazi topologici ha una struttura monoidale chiusa, allora $X \otimes Y$ ha come insieme sottostante il prodotto cartesiano, e l'oggetto unità è il terminale; in più, l'insieme sottostante all'hom interno $[X, Y]$ è l'insieme delle funzioni continue $X \to Y$. (potrebbe essere laborioso, ma tu non demordere)

Sia $U : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ un funtore il cui dominio sia una categoria monoidale chiusa. Date $D \dashv U \dashv I$, abbiamo due coppie di isomorfismi paralleli:

$$\begin{array}{lclcr}
U[A,B] & \cong & \mathbf{Sets}(\star, U[A,B]) & \cong & \mathbf{C}(D\star, [A,B]) \\
\mathbf{C}(A,B) & \cong & \mathbf{C}(1 \otimes A, B) & \cong & \mathbf{C}(1, [A,B]) \\
\mathbf{Sets}(U(X \otimes Y), Z) & \cong & \mathbf{C}(X \otimes Y, IZ) & \cong & \mathbf{C}(X, [Y, IZ]) \\
\mathbf{Sets}(UX \times UY, Z) & \cong & \mathbf{Sets}(UX, [UY, Z]) & \cong & \mathbf{C}(X, I[UY, Z])
\end{array}$$

Suturando le paia con Yoneda (usando $A \cong 1$) otteniamo

$$\begin{array}{lcr}
U[A,B] \cong \mathbf{C}(A,B) & \Leftrightarrow & D\star \cong 1 \\
U(X \otimes Y) \cong UX \times UY & \Leftrightarrow & [W, IZ] \cong I[UW, Z]
\end{array}$$

Ognuno dei due isomorfismi sinistri implica $U1 \cong \star$, lo si vede sviluppando per $A \cong 1$, $B \cong D\star$, $X = I\star$ ed $Y = 1$. Notiamo che le due doppie implicazioni sono totalmente indipendenti e poggiano ognuna su una sola delle due aggiunzioni, mai incrociate nei conti. Per finire, $U \vdash I$ garantisce l'esistenza di un oggetto terminale in $\mathbf{C}$, ovvero $T = I\star$.

Ora scendiamo nel concreto. La categoria **Top** è legata a **Sets** da tre funtori in aggiunzione $D \dashv U \dashv I$. Il funtore centrale U assegna ad uno spazio topologico il set soggiacente. D ed I dotano un set rispettivamente della topologia discreta e della topologia indiscreta. Ognuno è l'identità sui morfismi. Le bijezioni naturali denunciano la proprietà caratterizzante delle due topologie; ogni funzione con (co)dominio (in)discreto è continua.

Rimangono due controlli da fare. Noto solo che per come sono definiti i funtori, $DX \cong IX$ sse $X \cong \star$ e quindi 1 è terminale.

Da finire in modo bello, un giorno.

Exercise 6 (_6.tex)

Sia $\mathbf{C}$ una qualsiasi categoria piccola; mostrare che esiste una aggiunzione $\Delta \dashv \Gamma$, dove $\Delta\colon \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ è il funtore costante in $X \in \mathbf{Sets}$, $\Delta_X(C) \equiv X$ per ogni $C \in \mathbf{C}$ (hint: $\Delta = t^*\colon \mathbf{Sets}^{\{\bullet\}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ se $t\colon \mathbf{C} \to \{\bullet\}$ è il funtore terminale); descrivere l'azione di questo Γ su oggetti e morfismi di $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$.

Un funtore $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ induce un funtore tra le categorie dei prefasci $F^\star \in [\mathsf{PSh}(\mathbf{D}), \mathsf{PSh}(\mathbf{C})]$ dato dalla precomposizione con il funtore speculare $\tilde{F} \in [\mathbf{C}^{op}, \mathbf{D}^{op}]$ definito come $\tilde{F} := (-)^{op} \circ F \circ (-)^{op}$.

Sì, quello che stai dicendo è che esiste un(o pseudo)funtore $(-)^\star\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ che manda una categoria -fottiamocene delle taglie, o meglio, fissa due universi incapsulati- nella sua cat dei prefasci; come agisce sui morfismi di Cat tale pseudofuntore? Esattamente mandando F nel tuo $F^\star$. Ora, in quanto pseudofuntore esso rispetta le coppie aggiunte: questo è quello che ti impegni a mostrare dopo, ovvero che se $F \dashv G$ in Cat, allora $G^* \dashv F^*$. Tu ti metti a farlo sui soli rappresentabili, ma in realtà è vero più in generale in un modo più astratto: semplicemente dati $F\colon C \to D$, con un aggiunto destro $G\colon D \to C$ si ha che $\mathsf{Lan}_F \cong G^\star$ (ricorda che $\mathsf{Lan}_F \dashv F^\star$ *per definizione* di Lan_F!):

$$\begin{aligned}
\mathsf{Lan}_F(H) &\cong \int^A \hom_{\mathbf{D}}(FA, -) \times HA \\
(agg.) &\cong \int^A \hom_{\mathbf{D}}(A, G(-)) \times HA \\
(Yon) &\cong HG(-)
\end{aligned}$$

dove il primo step usa $F \dashv G$ e il secondo Yoneda ninja.

Se $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$, usando Yoneda e denotando con $\hat{X}$ ($\check{X}$) il (co)prefascio (co)rappresentato da X otteniamo due cascate di oggetti isomorfi:

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{D}^{op}(D, \tilde{F}C) & \mathbf{C}^{op}(\tilde{G}D, C) \\
\mathbf{D}(FC, D) & \mathbf{C}(C, GD) \\
\mathsf{PSh}(\mathbf{C})(\mathbf{C}(-, C), \mathbf{D}(-, D) \circ \tilde{F}) & \mathsf{CoPSh}(\mathbf{D})(\mathbf{D}^{op}(D, -), \mathbf{C}^{op}(C, -) \circ G) \\
\mathsf{PSh}(\mathbf{C})(\hat{C}, F^\star \hat{D}) & \mathsf{CoPSh}(\mathbf{D})(\check{C}, \tilde{G}^\star \check{D}) \\
\mathsf{CoPSh}(\mathbf{C})(\tilde{F}^\star \check{D}, \check{C}) & \mathsf{PSh}(\mathbf{D})(G^\star \hat{C}, \hat{D})
\end{array}$$

dove gli isomorfismi inferiori sono conseguenza del fatto che la corappresentabilità equivale alla rappresentabilità nella categoria opposta.

Unendo le colonne otteniamo quattro condizioni di aggiuntezza equivalenti:

$$\begin{array}{c}
\tilde{G} \dashv \tilde{F} \\
F \dashv G \\
G^\star \dashv F^\star \text{ sui rappresentabili} \\
\tilde{F}^\star \dashv \tilde{G}^\star \text{ sui corappresentabili}
\end{array}$$

Bene. Ora facciamo l'esercizio.

Sia C una categoria piccola e $t : \mathbf{C} \to \{\bullet\}$ l'unico funtore da essa verso l'Occhio di Sauron, la categoria terminale. I prefasci sull'Occhio sono funtori che selezionano ognuno dei set e la relativa identità. Precomporne uno con $\tilde{t}$ restituisce un prefascio che mappa l'intera $\mathbf{C}^{op}$ nell'oggetto e nell'identità che il primo individuava. Dunque essenzialmente $t^\star = \Delta$. Ma allora se esiste un'aggiunzione $\Delta \dashv \Gamma$ esiste anche $s \dashv t$ ed almeno sui rappresentabili $\Gamma = s^\star$.

Come ti dicevo, il punto è:

- Non sempre C ha un iniziale: in tal caso Γ esiste ma s no; dunque
- Non ogni aggiunzione tra categorie di prefasci è indotta da un'aggiunzione nel senso superiore: questo in gergo si dice "il 2-funtore $(-)^\star$ non è locally full", perché ogni funtore $F^\star$ ha Lan_F, e d'altra parte non è sempre vero che ogni Lan_F è isomorfa a G^* per qualche G (controesempio? questo va benissimo: C sarebbe forzata ad avere un iniziale).

Chi è, dunque, s? L'aggiunzione si riduce a

$$\mathbf{C}(s\bullet, B) \cong \{\bullet\}(\bullet, tB) \cong \{\bullet\}(\bullet, \bullet) \cong \star$$

ma ciò significa che $s\bullet$ dev'essere l'oggetto iniziale di $\mathbf{C}$, la cui esistenza è garantita dal fatto che s sia aggiunto sinistro e $\bullet$ sia iniziale. Per funtorialità si completa la definizione di s: esso individua l'oggetto iniziale di $\mathbf{C}$e la sua identità. Come agisce $s^\star$? Precomporre $\tilde{s}$ ad un prefascio su $\mathbf{C}$dà un prefascio che individua l'immagine dell'oggetto iniziale tramite il primo. Questo dà un'aggiunzione, ma solo sui prefasci rappresentabili! Infatti è immediato che in generale

$$\mathsf{PSh}(\mathbf{C})(\Delta_P, Q) \cong \mathsf{PSh}(\mathbf{C})(t^\star P, Q) \ncong \mathsf{PSh}(\{\bullet\})(P, s^\star Q) \cong \mathbf{Sets}(P, Qs\bullet)$$

Il conto pertanto non ha risolto l'esercizio ma era istruttivo ed ha fornito un buon controesempio, come dicevamo sopra. Ora ricominciamo daccapo.

Abbiamo bisogno della seguente

Proposizione 1.0.3. L'estensione di Kan destra (sinistra) lungo il funtore verso la categoria terminale è l'operazione di (co)limite.

Dimostrazione. Srotoliamo le definizioni. Detto $t\colon \mathbf{C} \to \{\bullet\}$ definiamo la precomposizione $t^\star\colon [\{\bullet\}, \mathbf{D}] \to [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$. Le estensioni di Kan allora ammontano alle aggiunzioni

$$\begin{array}{rcl} & [\mathbf{C}, \mathbf{D}](t^\star D, F) & \cong \quad [\{\bullet\}, \mathbf{D}](D, \mathsf{R}an_t F) \\ [\{\bullet\}, \mathbf{D}](\mathsf{L}an_t F, D) \quad \cong & [\mathbf{C}, \mathbf{D}](F, t^\star D) & \end{array}$$

Se $D : \bullet \mapsto d$ allora $t^\star D = \Delta_d$, il funtore costante su $\mathbf{C}$ con immagine d. Quindi

$$\begin{array}{rcl} & [\mathbf{C}, \mathbf{D}](\Delta_d, F) & \cong \quad \mathbf{D}(d, \mathsf{R}an_t F\bullet) \\ \mathbf{D}(\mathsf{L}an_t F\bullet, d) \quad \cong & [\mathbf{C}, \mathbf{D}](F, \Delta_d) & \end{array}$$

ovvero l'estensione sinistra (destra) (co)rappresenta i (co)coconi. Dunque per definizione di (co)limite

$$\mathsf{L}an_t(-)\bullet \cong \operatorname{colim} \qquad \mathsf{R}an_t(-)\bullet \cong \lim$$

□

Per quanto detto, $\Gamma = \mathsf{R}an_t(-)\bullet$ ed è ben definito poiché $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ è piccola e **Sets** è completa. Γ manda funtori nel loro limite e trasformazioni naturali nella freccia tra i limiti di dominio e codominio univocamente determinata per naturalità.

Bang! Molto bene. Adesso come esercizio bonus, usa il calcolo delle cofini per mostrare lo stesso risultato:

$$\mathrm{Lan}_t K \cong \int^C \hom_{\{\bullet\}}(tC, -) \times KC \qquad \mathrm{Ran}_t K \cong \int_C KC^{\hom(-,tC)}$$

Ok.

Proposizione 1.0.4. Se tutte le categorie coinvolte sono piccole ed il codominio dei funtori da estendere è (co)completo allora le estensioni di Kan esistono.

Basta meno, ma non mi sbilancio.

Dimostrazione.

$$\begin{array}{rlrl}
 & [\mathbf{B},\mathbf{D}](F, L^\star G) & [\mathbf{C},\mathbf{D}](R^\star F, G) & \cong \\
\cong & [\mathbf{B},\mathbf{D}](F, GL) & [\mathbf{C},\mathbf{D}](FR, G) & \cong \\
\cong & \int_{b:\mathbf{B}} \mathbf{D}(Fb, GLb) & \int_{c:\mathbf{C}} \mathbf{D}(FRc, Gc) & \cong \\
\cong & \int_{b:\mathbf{B}} [\mathbf{D}, \mathbf{Sets}](\mathbf{D}(Lb, -), \mathbf{D}(Fb, G-)) & \int_{c:\mathbf{C}} [\mathbf{D}, \mathbf{Sets}](\mathbf{D}(-, Rc), \mathbf{D}(F-, Gc)) & \cong \\
\cong & \int_{b:\mathbf{B}} \int_{s:\mathbf{Sets}} \mathbf{Sets}(\mathbf{D}(Lb, s), \mathbf{D}(Fb, Gs)) & \int_{c:\mathbf{C}} \int_{s:\mathbf{Sets}} \mathbf{Sets}(\mathbf{D}(s, Rc), \mathbf{D}(Fs, Gc)) & \cong \\
\cong & \int_{b:\mathbf{B}} \int_{s:\mathbf{Sets}} \mathbf{D}(\mathbf{D}(Lb, s) \times Fb, Gs) & \int_{c:\mathbf{C}} \int_{s:\mathbf{Sets}} \mathbf{D}(Fs, Gc^{\mathbf{D}(s, Rc)}) & \cong \\
\cong & \int_{s:\mathbf{Sets}} \int_{b:\mathbf{B}} \mathbf{D}(\mathbf{D}(Lb, s) \times Fb, Gs) & \int_{s:\mathbf{Sets}} \int_{c:\mathbf{C}} \mathbf{D}(Fs, Gc^{\mathbf{D}(s, Rc)}) & \cong \\
\cong & \int_{s:\mathbf{Sets}} \mathbf{D}(\int^{b:\mathbf{B}} \mathbf{D}(Lb, s) \times Fb, Gs) & \int_{s:\mathbf{Sets}} \mathbf{D}(Fs, \int_{C:\mathbf{C}} Gc^{\mathbf{D}(s, Rc)}) & \cong \\
\cong & [\mathbf{E},\mathbf{D}](\int^{b:\mathbf{B}} \mathbf{D}(Lb, -) \times Fb, G) & [\mathbf{F},\mathbf{D}](F, \int_{C:\mathbf{C}} Gc^{\mathbf{D}(-, Rc)}) &
\end{array}$$

e dunque

$$\mathrm{Lan}_L F \cong \int^{b:\mathbf{B}} \mathbf{D}(Lb, -) \times Fb \qquad \mathrm{Ran}_R G \cong \int_{C:\mathbf{C}} Gc^{\mathbf{D}(-, Rc)}$$

□

Osservazione 1.0.1. Se $L \dashv R'$ ed $L' \dashv R$ allora

$$\begin{array}{rclcl}
\int^{b:\mathbf{B}} \mathbf{D}(Lb, -) \times Fb & \cong & \int^{b:\mathbf{B}} \mathbf{D}(b, R'-) \times Fb & \cong & FR' \\
\int_{C:\mathbf{C}} Gc^{\mathbf{D}(-, Rc)} & \cong & \int_{C:\mathbf{C}} Gc^{\mathbf{D}(L'-, c)} & \cong & GL'
\end{array}$$

e pertanto

$$L \dashv R \qquad \Leftrightarrow \qquad R^\star \dashv L^\star$$

Ciò però si può mostrare anche chiedendo soltanto che le categorie siano tutte piccole.

Exercise 7 (_7.tex)

Sia X un insieme, $\mathcal{P}X$ il suo insieme delle parti guardato come categoria; mostrare che $\mathcal{P}X$ è cartesiana chiusa. Sia ora (X, τ) uno spazio topologico; mostrare che il reticolo degli aperti di X, $\mathbf{Op}(X)$, parzialmente ordinato dall'inclusione, è anche lei una categoria cartesiana chiusa.

Le idee ci sono tutte, ma un paio di sviste:

Dato un set X è possibile definire $\mathcal{P}X$, la categoria posetale (i.e. gli homset contengono al più un morfismo) i cui oggetti siano subset di X e tale che

$$\exists A \to B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

È immediato che l'oggetto iniziale è $\emptyset$ e quello terminale è X. Esistono vacuamente i (co)equalizzatori, dati dalle identità. Per questa ragione pullback e pushout coincidono rispettivamente con prodotti e coprodotti. Per vedere se esistono interpretiamo gli usuali diagrammi:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & B \\ A & A \cap B \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \cup B \arrow[dr, dotted] & B \arrow[l] \arrow[d] \\ A \arrow[u] \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Interpretando le frecce come inclusioni si spiegano i simboli. Il prodotto è il set massimale che sta in entrambi i fattori: l'intersezione. Il coprodotto è il set minimale che che li contiene entrambi: l'unione.

Dunque $\mathcal{P}X$ è una categoria bicompleta.

Ötcho. Cioè, sì, è vero: ma tu hai mostrato che esistono solo limiti e colimiti *finiti* con quello che hai detto. In un reticolo prodotti = meet, e coprodotti = join; e un reticolo è *completo* quando ammette join e meet arbitrari (visto che co/eq ci sono gratis la co/completezza è detectata dai solo co/prodotti). Allora $\mathcal{P}(X)$ ha meet e join arbitrari: $\bigcup X_i, \bigcap X_i$.

Ok. Avevo la sensazione che parlando di (co)completezza di categorie si intendesse implicitamente la finitezza - per questo non avevo specificato. Registrato.

Definiamo il complemento di A come l'oggetto A^c massimale per cui $A \cap A^c$ sia iniziale.

Yep, e allora diciamolo bene:

$$A^c = \bigcup \{W \mid W \cap A = \varnothing\}$$

Ora possiamo occuparci di calcolare la parte destra dell'aggiunzione

$$\mathcal{P}X(A \cap B, C) \cong \mathcal{P}X(A, [B, C])$$

ovvero risolvere in $[B, -]$ la condizione

$$A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq [B, C]$$

Disegnando un diagramma di Venn si vede subito che dev'essere

$$[B, -] = B^{\mathrm{c}} \cup -$$

Da cui $A^{\mathrm{c}} = [A, \varnothing]$, e mettendo insieme la caratterizzazione precedente di A^{c} si ha che $[A, B] = \ldots$

Modificando la precedente in $A^{\mathrm{c}} = \bigcup\{W \mid W \cap A \subseteq \varnothing\}$ intuisco che $[A, B] = \bigcup\{W \mid W \cap A \subseteq B\}$. A posteriori in effetti ha perfettamente senso; se non ricordo male in logica dovrebbe rappresentare la proposizione massimale tale che A implica B. Makes sense.

L'unità è pertanto il terminale X.

Abbiamo concluso la descrizione della categoria cartesiana chiusa

$$(\mathcal{P}X, - \cap -, -^{\mathrm{c}} \cup -, X)$$

Notiamo che è stata indispensabile la presenza dei coprodotti per costruire l'aggiunzione.

By the way: trovo la mia caratterizzazione oscena. Mi riservo pertanto di rifarla. Nel prossimo esercizio, però, visto che qui non devo farci altro.

Occupiamoci ora del reticolo degli aperti di uno spazio topologico. È immediato pensarlo come categoria posetale i cui oggetti siano gli aperti ed i cui unici morfismi siano le inclusioni (non strette, visto che servono le identità). La situazione è molto simile a prima. La categoria è posetale, quindi ci sono i (co)equalizzatori. L'interpretazione dei diagrammi di (co)prodotto è la medesima: il prodotto è l'intersezione ed il coprodotto è l'unione. Ricordando che una topologia dev'essere chiusa per unioni arbitrarie ed intersezioni finite abbiamo immediatamente che la categoria è finitamente completa e cocompleta. Anche l'aggiunto che dà la chiusura è formalmente il medesimo e per scriverlo abbiamo bisogno esattamente di un'unione arbitraria ed un'intersezione finita:

$$[B, C] = \bigcup\{X \mid X \cap B \subseteq C\}$$

In parole, l'aggiunzione dice che l'intersezione di A e B sta in C se e solo se A sta nel più grande aperto la cui intersezione con B stia in C.

Col reticolo degli aperti uno deve stare attento: un'intersezione arbitraria può compromettere la proprietà di essere aperto. Col reticolo delle parti invece la cosa è passata quasi sotto silenzio: nessuna operazione di unione o intersezione può compromettere la proprietà di essere sottinsieme grazie al fatto che l'insieme delle parti è per definizione completo. Comunque, al netto di tutto finora pare che sia necessaria chiusura per join arbitrari e meet finiti affinché la categoria costruita su un reticolo sia cartesiana chiusa.

Exercise 8 (_8.tex)

Siano X, Y insiemi, $\mathcal{P}X, \mathcal{P}(X \times Y)$ gli insiemi delle parti guardati come categorie; consideriamo $\pi_X \colon X \times Y \to X$ la proiezione su uno dei fattori: mostrare che esiste una terna di aggiunti

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}X \arrow[d, "\pi^*" description] \\
\mathcal{P}(X \times Y). \arrow[u, bend left=50, "\exists"] \arrow[u, bend right=50, "\forall"']
\end{tikzcd} \qquad \exists \dashv \pi^* \dashv \forall$$

Per definire in modo appetibile le categorie di cui abbiamo bisogno ci serve la

Proposizione 1.0.5. Se $\mathbf{C}$ è piccola e $\mathbf{D}$ è completa e cartesiana chiusa allora $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ è cartesiana chiusa.

Dimostrazione. Se esiste un funtore esponenziale tale che

$$\mathbf{D}^{\mathbf{C}}(F \times G, H) \cong \mathbf{D}^{\mathbf{C}}(F, H^G)$$

allora Yoneda mi dice che se $\mathbf{C}$ fosse $\mathbf{D}$-arricchita

$$H^G(c) \cong \mathbf{D}^{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(c, -), H^G) \cong \mathbf{D}^{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(c, -) \times G, H) \cong \int_{x \colon \mathbf{C}} \mathbf{D}((\mathbf{C}(c, -) \times G)x, Hx)$$

D'altra parte $\mathbf{D}$ è completa ed il prodotto in $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ può essere definito pointwise. Inoltre, essa è cartesiana chiusa. Quindi

$$H^G(c) \cong \int_{x \colon \mathbf{C}} \mathbf{D}(\mathbf{C}(c, x) \times Gx, Hx) \cong \int_{x \colon \mathbf{C}} \mathbf{D}(\mathbf{C}(c, x), Hx^{Gx}) \cong \int_{x \colon \mathbf{C}} \left(Hx^{Gx}\right)^{\mathbf{C}(c,x)}$$

e siccome $\mathbf{D}$ è anche dotata naturalemente di un **Sets**-cotensore possiamo concludere

$$H^G(c) \cong \int_{x \colon \mathbf{C}} \prod_{\mathbf{C}(c,x)} Hx^{Gx}$$

Notiamo che l'ultima espressione non ha bisogno di alcuna struttura arricchita per essere scritta: sono sufficienti le proprietà di $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ dell'enunciato. Allora adottiamola come definizione del funtore esponenziale e verifichiamo che funziona correttamente!

$$\begin{array}{lclcl}
\mathbf{D}^{\mathbf{C}}(F, H^G) & \cong & \int_{c:\mathbf{C}} \mathbf{D}(Fc, H^G c) & \cong & \int_{c:\mathbf{C}} \mathbf{D}\left(Fc, \int_{x:\mathbf{C}} \prod_{\mathbf{C}(c,x)} Hx^{Gx}\right) \\
& \cong & \int_{c:\mathbf{C}} \int_{x:\mathbf{C}} \prod_{\mathbf{C}(c,x)} \mathbf{D}\left(Fc, Hx^{Gx}\right) & \cong & \int_{x:\mathbf{C}} \mathbf{D}\left(\int^{c:\mathbf{C}} \coprod_{\mathbf{C}(c,x)} Fc, Hx^{Gx}\right) \\
& \cong & \int_{x:\mathbf{C}} \mathbf{D}\left(\int^{c:\mathbf{C}} Fc \times \mathbf{C}(c, x), Hx^{Gx}\right) & \cong & \int_{x:\mathbf{C}} \mathbf{D}(Fx, Hx^{Gx}) \\
& \cong & \int_{x:\mathbf{C}} \mathbf{D}(Fx \times Gx, Hx) & \cong & \int_{x:\mathbf{C}} \mathbf{D}((F \times G)x, Hx) \\
& \cong & \mathbf{D}^{\mathbf{C}}(F \times G, H) & &
\end{array}$$

L'unica passaggio meno che elementare necessita l'uso del **Sets**-tensore naturale di $\mathbf{D}$. □

Il secondo ingrediente è Obj, il funtore che assegna ad una categoria piccola il set dei suoi oggetti, e ad un funtore la funzione che ne rappresenta l'azione sui set di oggetti. Ci interessa il suo aggiunto sinistro:

$$\mathbf{Cat}(\underline{S}, C) \cong \mathbf{Sets}(S, \mathrm{Obj}(C))$$

Si vede immediatamente che $\underline{(-)}$ deve assegnare ai set le categorie discrete di cui essi costituiscono la collezione di oggetti. Inoltre manda le funzioni nei funtori la cui azione sia descritta da esse - ciò è possibile farlo univocamente poiché i domini sono discreti e le identità vengono rispettate.

Sì: un risultato un po' più liscio è il seguente: esiste una stringa di aggiunzioni

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cat} \arrow[r, bend left=60, "\pi_0"] \arrow[r, bend right=15, "\mathrm{Obj}"'] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\perp"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\perp"] & \mathbf{Sets} \arrow[l, bend right=15, "\underline{(-)}"'] \arrow[l, bend left=60, "\mathcal{G}"]
\end{tikzcd}$$

dove $\pi_0 \colon Cat \to Sets$ è il funtore che manda C nell'insieme delle sue componenti connesse, $\underline{(-)}$ il funtore che manda un insieme nella categoria discreta su quell'insieme, $\mathrm{Obj}(-)$ manda una categoria nell'insieme dei suoi oggetti e $\mathcal{G}$ è il funtore che manda un insieme X nel gruppoide connesso generato da X, ovvero nel gruppoide che ha per oggetti esattamente gli elementi di X, e tra ogni coppia di oggetti esattamente un isomorfismo.
Ciò ti da molte più informazioni su cosa fa chi a chi.

Bello! Avevo provato a proseguire la catena di aggiunzioni così, ma non mi era riuscito.

Possiamo finalmente iniziare! Definiamo il funtore che manda un set nella categoria delle sue parti come

$$\mathcal{P} = [\underline{(-)}, \mathbf{2}]$$

Allora per la proposizione precedente abbiamo immediatamente che le categorie delle parti sono cartesiane chiuse. Infatti tutte le categorie sono piccole per definizione e le proprietà di $\mathbf{2}$ si verificano facilmente ricordando che essa è

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop left] \arrow[r] & 1 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

La categoria $\mathcal{P}$ è in pratica la categoria dei *funtori caratteristica* dei subset di X, nel senso che un oggetto è nel subset corrispondente esattamente quando la sua immagine tramite il funtore caratteristica è 1.

Ecco, qui non capisco cosa hai fatto, o meglio *perché* lo hai fatto: sostanzialmente stai dicendo che le funzioni $X \to \{0,1\}$ sono in corrispondenza con i funtori $\underline{X} \to \mathbf{2}$; d'altra parte nessuna delle due cose ti ha dato davvero delle informazioni aggiuntive: $\underline{X}$ è solo un modo di guardare X come una categoria –discreta–, e la frase precedente a questa nota credo significhi solo che per ogni $F \colon \underline{X} \to \mathbf{2}$, $\{F^{-1}0, F^{-1}1\}$ è una partizione di X. La qual cosa identifica unicamente un sottoinsieme $U \subset X$;

L'ho fatto perché

- mi piaceva;
- mi evita di parlare di sottoggetti o di sottocategorie piene di mono o altre cose che trovavo meno cristalline e che non avevo voglia di toccare;
- mi dava una costruzione molto pulita per il funtore *categoria delle parti di un insieme*;
- mi permette di vedere gratuitamente che la categoria delle parti è cartesiana chiusa.

La struttura di **2** trivializza la condizione di naturalità riducendola all'esistenza - ovvero, si ha un'inclusione esattamente quando tutte le componenti della trasformazione naturale esistono.

La trasformazione naturale... tra chi e chi?

I morfismi di $\mathcal{P}X$ devono essere le inclusioni tra i subset di X, moralmente.
Se prendo una freccia di $\mathcal{P}X$, diciamo $\eta\colon \chi_A \to \chi_B$, essa deve rispettare la naturalità; essendo la categoria discreta ho solo quadrati del tipo

$$\begin{tikzcd} \chi_A x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "\chi_A \mathrm{id}_x"'] & \chi_B x \arrow[d, "\chi_B \mathrm{id}_x"] \\ \chi_A x \arrow[r, "\eta_x"'] & \chi_B x \end{tikzcd}$$

Cioè, mi basta che esista per ogni $x \in \underline{X}$ una freccia

$$\chi_A x \xrightarrow{\eta_x} \chi_B x$$

Essa deve essere una freccia di **2** e quindi l'unico caso in cui non esiste è quando $\chi_A x = 1$ e $\chi_B x = 0$. Ovvero, quando x è in A ma non in B, ovvero quando l'inclusione è impossibile. Le componenti della trasformazione naturale rendono conto, punto per punto, dell'esistenza di un'inclusione.

Esse sono in bijezione con gli elementi del set che soggiace all'oggetto. L'ostruzione all'esistenza di una trasformazione naturale è l'impossibilità per le componenti di essere $1 \to 0$ ovvero il set soggiacente al dominio non puo avere elementi che quello a codominio non ha. Questo riproduce esattamente le normali inclusioni.

Una funzione $f : X \to Y$ induce un funtore $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ che a sua volta induce la precomposizione $\underline{f}^\star : [\underline{Y}, \mathbf{2}] \to [\underline{X}, \mathbf{2}]$. Gli aggiunti destro e sinistro di quest'ultima sono le estensioni di Kan destra e sinistra lungo $\underline{f}$. Richiamando le notazioni della consegna

$$\exists_f A \cong \mathrm{Lan}_{\underline{f}} A \cong \int^{x:\underline{X}} \underline{Y}(\underline{f}x, -) \times Ax \qquad \forall_f A \cong \mathrm{Ran}_{\underline{f}} A \cong \int_{x:\underline{X}} Ax^{\underline{Y}(-,\underline{f}x)}$$

Poiché stiamo integrando su categorie discrete è possibile scrivere le (co)fini come (co)prodotti. Possiamo fare lo stesso in modo naturale anche coi **Sets**-(co)tensori su **2**. Usando la notazione di join e meet, particolarmente adatta a **2**, abbiamo

$$\exists_f A \cong \bigvee_{x \in \underline{X}} \bigvee_{n \in \underline{Y}(\underline{f}x, -)} Ax \qquad \forall_f A \cong \bigwedge_{x \in \underline{X}} \bigwedge_{n \in \underline{Y}(-, \underline{f}x)} Ax$$

Essendo $\underline{Y}$ discreta, il (co)prodotto su di essa è unario se la variabile libera è $\underline{fx}$ e nullario altrimenti. In pratica, sono identici. Confondendo gli oggetti categoriali con quelli set teoretici e gli insiemi con le loro caratteristiche possiamo allora scrivere

$$\exists_f A = \{y \in Y | \exists x \in A, y = f(x)\} \qquad \forall_f A = \{y \in Y | \forall x \in A, y = f(x)\}$$

e dire che le estensioni scritte sopra sono i funtori caratteristica di questi insiemi.

Il caso particolare della consegna dà per $P \subseteq X \times Y$

$$\exists P = \{x \in X | \exists (x', y) \in P, x = x'\} \qquad \forall P = \{x \in X | \forall (x', y) \in P, x = x'\}$$

che corrispondono alle quantificazioni sulla proposizione rappresentata da P.

Exercise 9 (_9.tex)

La categoria degli insiemi e funzioni è tale per cui ogni $\mathbf{Sets}_{/X}$ è ancora cartesiana chiusa: descrivere esplicitamente la struttura cartesiana chiusa di $\mathbf{Sets}_{/X}$ e l'isomorfismo

$$\mathbf{Sets}_{/X}(f \otimes g, h) \cong \mathbf{Sets}_{/X}(f, [g, h])$$

valido per f, g, h funzioni verso l'insieme X.

Se $\mathbf{Cat}$ è la categoria fatta da categorie (piccole) e funtori tra esse, provare che $\mathbf{Cat}_{/X}$ non è cartesiana chiusa se $X = \{0 \to 1 \to 2\}$ (hint: mostrare che essa è cartesiana –i prodotti sono dati dai pullback– ma che il funtore prodotto $X \otimes -$ non rispetta i colimiti, cosa che farebbe se avesse come aggiunto destro l'hom interno).

Usando notazioni e risultati dell'esercizio precedente sappiamo immediatamente che $[\underline{X}, \mathbf{Sets}]$ è cartesiana chiusa, con prodotti ed esponenziali eseguiti pointwise su $\mathbf{Sets}$. Mostriamo che è equivalente a $\mathbf{Sets}_{/X}$ e quindi anche quest'ultima è cartesiana chiusa.

Consideriamo il funtore $F : \mathbf{Sets}_{/X} \to [\underline{X}, \mathbf{Sets}]$ definito come segue (pedice ed apice di una barra verticale giustapposta ad una funzione denoteranno restrizione e corestrizione):

$$(a\colon A \to X) \mapsto (Fa\colon x \mapsto a^{-1}(x))$$
$$(f\colon a \to b) \mapsto \left(Ff\colon (Ff)_x = f|_{(Fa)x}^{(Fb)x}\right)$$

Sia invece $G\colon [\underline{X}, \mathbf{Sets}] \to \mathbf{Sets}_{/X}$ definito così (il coprodotto è inteso come quello della categoria freccia su $\mathbf{Sets}$):

$$(A\colon \underline{X} \to \mathbf{Sets}) \mapsto \left(\coprod_{x \in X} (Ax \to \{x\})\right)$$
$$(\eta\colon A \to B) \mapsto \left(\coprod_{x \in X} \eta_x \colon GA \to GB\right)$$

Verificare che le due composizioni sono funtori identici è immediato grazie alle proprietà elementari di set e funzioni. Prima GF

$$(a\colon A \to X) \mapsto \left(\coprod_{x \in X} (a^{-1}(x) \to \{x\})\right)$$
$$(f\colon a \to b) \mapsto \left(\coprod_{x \in X} f|_{a^{-1}(x)}^{b^{-1}(x)} \colon a \to b\right)$$

e poi FG

$$(A\colon \underline{X} \to \mathbf{Sets}) \mapsto (FGA\colon x \mapsto (GA)^{-1}(x) = Ax)$$
$$(\eta\colon A \to B) \mapsto \left(FG\eta\colon (FG\eta)_x = G\eta|_{(FGA)x}^{(FGB)x} = \eta_x\right)$$

Ecco. Abbiamo l'equivalenza.

Srotolando il prodotto e l'esponenziale otteniamo

$$a \otimes b = G(Fa \times Fb) = \coprod_{x \in X} \left(a^{-1}(x) \times b^{-1}(x) \to \{x\}\right)$$

$$[a, b] = G(Fa^{Fb}) = \coprod_{x \in X} \left(b^{-1}(x)^{a^{-1}(x)} \to \{x\}\right)$$

Per aprire l'isomorfismo dell'aggiunzione passiamo attraverso l'equivalenza ed usiamo il currying di **Sets** pointwise. Schematicamente, compongo gli isomorfismi seguenti

$$(f \otimes g, h) \cong (Ff \times Fg, Fh) \cong (Ff, Fh^{Fg}) \cong (f, [g, h])$$

per trovare una bijezione tra i morfismi orizzontali che fanno commutare

$$\begin{tikzcd} \coprod_{x\in X} f^{-1}(x) \times g^{-1}(x) \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes g"] & H \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \coprod_{x\in X} h^{-1}(x)^{g^{-1}(x)} \arrow[d, "{[g,h]}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Più in dettaglio,

$$\begin{aligned} \left(z : \coprod_{x \in X} f^{-1}(x) \times g^{-1}(x) \to H\right) &\mapsto \left(Fz : (Fz)_x = z|^{h^{-1}(x)}_{f^{-1}(x) \times g^{-1}(x)}\right) \\ &\mapsto \left(F\hat{z} : (F\hat{z})_x = \hat{z}|^{h^{-1}(x)^{g^{-1}(x)}}_{f^{-1}(x)}\right) \\ &\mapsto \left(\hat{z} : F \to \coprod_{x \in X} h^{-1}(x)^{g^{-1}(x)}\right) \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio è l'usuale currying. Per leggere l'isomorfismo nella direzione opposta basta girare le frecce.

Puff. Non sono sceso nei dettagli ovvi, sennò non se ne usciva più. L'essenziale dovrebbe esserci.

Osservazione 1.0.2. Questo risultato si rifrasa dicendo che **Cat** non è *localmente cartesiana chiusa*, ovvero non tutte le slice $\mathbf{Cat}/\mathbf{C}$ sono cartesiane chiuse.

Esso è una motivazione per il *teorema di Conduché*: dico che un oggetto $\mathbf{C}$ di **Cat** è *esponenziabile* se $\mathbf{C} \times -$ ha un aggiunto destro $(-)^{\mathbf{C}}$; il teorema di Conduché dice che un funtore $F \colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ è esponenziabile in $\mathbf{Cat}/\mathbf{C}$ se e solo se per ogni $f \in \hom(\mathbf{D})$ e ogni fattorizzazione $F(f) = a \circ b$, esistono a', b' tali che $F(a') = a, F(b') = b$. Non ti chiedo di provare questo, bensì il

Teorema 1.0.1 (Bonus)**.** Per ogni $\mathbf{C}$ piccola, $[\mathbf{C}, \mathbf{Sets}]$ è localmente cartesiana chiusa.

(hint: mostrare che $[\mathbf{C}, \mathbf{Sets}]/F \cong [\mathbf{A}_F, \mathbf{Sets}]$ per ogni $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$.)

Dimostrazione. La categoria $[\mathbf{C}, \mathbf{Sets}]/F$ ha come oggetti le trasformazioni naturali verso $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$. Un morfismo $\phi \colon \alpha \to \beta$ è una trasformazione naturale tale che $\alpha = \beta\phi$ (si tratta di composizione verticale, componentwise.)

~~Sia $\mathbf{A}_F$ la categoria che ha come oggetti quelli di $\mathbf{C}$ e per morfismi $\mathbf{A}_F(x, y) = \mathbf{Sets}(Fx, Fy)$. Si chiama *immagine piena* di F, e tenere gli oggetti originali a dispetto del nome serve a fare in modo che immagini di frecce non componibili non lo diventino.~~

Qualcosa non mi torna, perché non capisco dove mandi i morfismi di $\mathbf{A}_F$: se definisci $\mathbf{A}_F(x, y) = \mathbf{Sets}(Fx, Fy)$, nulla ti assicura che una funzione $f : Fx \to Fy$ venga da $\varphi: x \to y$ in $\mathbf{C}$; questo è vero se F è pieno. In generale poi deve anche essere fedele perché φ sia univocamente determinata.

Sì, avevo scritto male. Intendevo il set delle immagini dei morfismi tra x ed y tramite F. Comunque, falsa partenza.

Sia $\mathbf{A}_F$ la categoria degli elementi di F. Ovvero, la categoria comma $(\star|F)$ intendedo che $\star$ sia il funtore dalla categoria terminale in $\mathbf{Sets}$, costante sul terminale di $\mathbf{Sets}$. Gli oggetti sono funzioni $x : \star \to Fc$, o equivalentemente delle coppie (c, x) con $c \in \mathbf{C}$ ed $x \in Fc$. I morfismi da (c, x) a (c', x') sono funzioni $f : c \to c'$ tali che $(Ff)x = x'$.

$\mathbf{A}_F$ è piccola, quindi $[\mathbf{A}_F, \mathbf{Sets}]$ è cartesiana chiusa. Costruiamo allora l'equivalenza

$$\psi : [\mathbf{A}_F, \mathbf{Sets}] \to [\mathbf{C}, \mathbf{Sets}]/F$$

Intenderemo il coprodotto di frecce come quello della categoria delle frecce.

Un funtore $A \in [\mathbf{A}_F, \mathbf{Sets}]$ induce il funtore $\hat{A} \in [\mathbf{C}, \mathbf{Sets}]$ così definito su oggetti e morfismi di $\mathbf{C}$:

$$\hat{A}c = \coprod_{x \in Fc} Ax \qquad \hat{A}f = \coprod_{x \in Fc} A(f_x)$$

dove intendiamo che f_x sia $f : c \to d$ vista come morfismo di $\mathbf{A}_F$ con dominio (c, x).

L'immagine di A tramite l'equivalenza sarà la trasformazione naturale

$$\psi A : \hat{A} \to F \qquad (\psi A)_c = \coprod_{x \in Fc} (Ax \to \{x\})$$

mentre l'immagine di una trasformazione naturale $\eta : A \to B$ sarà la trasformazione naturale

$$\psi\eta : \hat{A} \to \hat{B} \qquad (\psi\eta)_c = \coprod_{x \in Fc} \eta_x$$

ψ è densa, poiché la corrispondenza iniziale tra funtori è biunivoca a meno di un isomorfismo naturale. ψ è pienamente fedele, poiché esiste sempre un unico modo di scrivere come coprodotto le componenti dei morfismi della categoria slice.

Non sarò pedante perché mi pare che *si veda*.

□

Vediamo se riesco a fissare il punto finale senza spoilerarlo: mostra che

- Denotando qui e altrove $\mathbf{n}$ come la categoria con esattamente n oggetti e frecce componibili
$$\{1 \to 2 \to \cdots \to (n-1) \to n\}$$
si ha che il diagramma
$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddr] & & \mathbf{2} \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
\mathbf{2} \arrow[rrrr] \arrow[drr] & & & & \mathbf{3} \arrow[dll, equal] \\
& & \mathbf{3} & &
\end{tikzcd}$$
è un pushout in $\mathbf{Cat}/\mathbf{3}$ (la X dell'esercizio è proprio $\mathbf{3}$), se il quadrato superiore è definito da (notazioni autoesplicative)
$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] \arrow[d] & \{1 \to 2\} \arrow[d] \\
\{0 \to 1\} \arrow[r] & \{0 \to 1 \to 2\}
\end{tikzcd}$$
- Mostra come agisce $- \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \downarrow \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$ su questo pushout.
- Mostra che il diagramma che risulta *non* è un pushout in $\mathbf{Cat}/\mathbf{3}$.

(Co)prodotti in una slice ammontano a pullback (pushout) nella categoria sottostante. Date due frecce nella slice F, G verso l'oggetto $Z\colon \mathbf{H} \to \mathbf{3}$ si ha dalle condizioni di morfismo su esse che $ZF(0 \to 1) = 0 \to 1$ e $ZG(0 \to 1) = 1 \to 2$. Dalla commutatività del quadrato si ottiene $F1 = G0$. D'altra ciò implica che $Z(F0 \to F1 = G0 \to G1) = 0 \to 1 \to 2$ quindi la freccia universale è determinata univocamente ed il quadrato sopra è un pushout. Agiamo ora per pullback lungo il funtore verticale di destra:
$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \{0 \to 2\} \arrow[ddd] \\
& \emptyset \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[d] & \{2\} \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& \{1\} \arrow[r] \arrow[dl] & \{1 \to 2\} \arrow[dr] & \\
\{0 \to 1\} \arrow[rrr] & & & \{0 \to 1 \to 2\}
\end{tikzcd}$$
Il quadrato sopra di certo non è un pushout perché dimentica che deve esserci una freccia tra le immagini di 0 e 2. E bon.

Capitolo 2

Sheaves

Exercise 10 (_18.tex)

Sia X uno spazio topologico. Mostrare che la corrispondenza che associa $U \subseteq X$ aperto all'insieme

$$\mathcal{C}^0(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \text{ continua}\}$$

è un funtore $\mathcal{C}^0 : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{Sets}$, che soddisfa le seguenti due proprietà:

- Per ogni $U \in \mathbf{Op}(X)$ e ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di U, chiamando $\rho = \rho_{VW} = F(W \subseteq V)$ la funzione indotta tra $F(V)$ ed $F(W)$, si ha

$$\forall i \in I \big(\rho_{U,U_i}(f) = \rho_{U,U_i}(g)\big) \quad \Rightarrow \quad f = g$$

- Per ogni $U \in \mathbf{Op}(X)$ e ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di U, data una famiglia di funzioni continue $\{f_i : U_i \to \mathbb{R}\}$ tali che

$$\rho_{U_i,U_{ij}}(f_i) = \rho_{U_j,U_{ij}}(f_j)$$

  per ogni $i, j \in I$, allora esiste una funzione continua $f : U \to \mathbb{R}$ (e come corollario del primo punto, è unica) tale che $\rho_{U,U_i}(f) = f_i$ per ogni $i \in I$.

Queste condizioni sono le *condizioni di fascio*.

Definizione 2.0.2. Ogni funtore controvariante $F : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{Sets}$ che soddisfi le stesse due proprietà, per ogni elemento dell'insieme $F(U)$, si dice un *fascio* su X.

Denotiamo con $i_{U,V}$ l'unico morfismo di $\mathbf{Op}(X)(U, V)$, ovvero la mappa (continua) di inclusione. Allora $\rho_{V,U} = C^0(i_{U,V}) : C^0(V) \to C^0(U)$ è la precomposizione con $i_{U,V}$ e manda una funzione continua di dominio V nella sua restrizione ad U, che denoteremo $f|_U = f \circ i_{U,V}$.

Scriviamo in modo un po' più suggestivo le proprietà da verificare.

La prima. Dato comunque un aperto $U \in \mathbf{Op}(X)$ ed un suo ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ e due funzioni continue $f, g \in C^0(U)$,

$$(\forall i \in I)\,(f|_{U_i} = g|_{U_i}) \Rightarrow (f = g)$$

ovvero, se due funzioni continue coincidono ristrette ad ognuno degli aperti di un ricoprimento del dominio allora coincidono sull'intero dominio. È immediata da dimostrare, negata e srotolata:

$$(\exists x \in U)(f(x) \neq g(x)) \Rightarrow (\exists i \in I)(\exists y \in U_i)(f|_{U_i}(y) \neq g|_{U_i}(y))$$

infatti basta scegliere i tale che $x \in U_i$, ovviamente possibile per le proprietà del ricoprimento, ed $y = x$.

La seconda. Dato comunque un aperto $U \in \mathbf{Op}(X)$ ed un suo ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ ed una famiglia di funzioni continue $\{f_i \colon U_i \to \mathbb{R}\}$,

$$(\forall i, j \in I)\left(f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}\right) \Rightarrow (\exists! f \in C^0(U) \colon (\forall i \in I)(f|_{U_i} = f_i))$$

La dimostrazione è leggermente più delicata. L'unicità di f è immediata grazie alla prima proprietà. L'esistenza si potrebbe avere definendola come $f(x) = f_i(x)$ per ogni $x \in U_i$, possibile proprio per la condizione di compatibilità sulle intersezioni. Ma la continuità? Vale la pena di dedicare un poco di spazio al

Lemma 2.0.1 (Pasting)**.** Siano X ed Y due spazi topologici, $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di un aperto $U \subseteq X$ ed $\{f_i \colon U_i \to Y\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni continue. Se $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ per ogni $i, j \in I$ allora esiste un'unica mappa continua $f \colon U \to Y$ tale che $f|_{U_i} = f_i$ per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. Mostriamo che la funzione esiste, è unica ed ha la proprietà cercata. Imponiamo quest'ultima puntualmente definendo $f(x) = f_i(x)$ con un i tale che $x \in U_i$. Un tale i esiste grazie alle proprietà del ricoprimento, e se la scelta non è univoca è comunque irrilevante grazie alla compatibilità sulle intersezioni chiesta per ipotesi. Inoltre questa è l'unica definizione possibile che rispetti la proprietà di restrizione.

Occupiamoci ora della continuità. Se V è un aperto di Y allora per definizione di continuità $f_i^{-1}(V)$ è un aperto di U_i. La preimmagine è anche un aperto di U, poiché è subset aperto di un subset aperto di U. Per la definizione di f possiamo scrivere l'uguaglianza

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$$

ma siccome un'unione arbitraria di aperti è aperto concludiamo. □

Sì; probabilmente $Y = \mathbb{R}$ per te, ma ovviamente i numeri reali non hanno un ruolo davvero particolare.

La proprietà cercata segue immediatamente.

In effetti dalla seconda proprietà segue la prima. Basta pensare alle funzioni come definite univocamente dal pasting delle restrizioni agli aperti di un ricoprimento. Dunque nel caso del fascio delle funzioni continue tra aperti di uno spazio topologico la seconda proprietà garantisce la prima. Curioso! Naturalmente questo sarà falso in generale.

No, aspetta. Supponiamo che la seconda condizione di fascio valga. Allora la famiglia $\{f|_{U_i} \colon U_i \to \mathbb{R}\}_{i \in I}$ delle restrizioni di $f \colon U \to \mathbb{R}$ agli aperti del ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ determina f univocamente. Dunque se un'altra funzione g ha la medesima restrizione, aperto per aperto, ho $g = f$. Ovvero, la prima condizione. Mi sta sfuggendo qualcosa?

Risolto. La prima implica l'unicità della seconda. E infatti è più corretto scrivere la seconda senza unicità! (Warning: la consegna è stata corretta.)

Exercise 11 (_19.tex)

Mostrare che le seguenti corrispondenze sono fasci su uno spazio topologico $X \supseteq U$:

- $U \mapsto \mathcal{C}^k(U)$ per $k \in [0, \infty] \cup \{\omega\}$ se X è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$;
- $U \mapsto H(U) =$ funzioni olomorfe su U, se X è una varietà complessa;
- $U \mapsto \Omega^p(U) = \{p\text{-forme differenziali su } U\}$ se X è una varietà differenziabile di dimensione finita, e $p \in \{0, \dots, \dim X\}$;
- $U \mapsto \mathfrak{Der}(U)$, le *derivazioni* su U, ovvero le mappe $\mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ che sono lineari e Leibniz.

Mostrare che le seguenti corrispondenze non sono fasci su X:

- $U \mapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid |f(x)| < M_f \ \forall x \in U\}$ se $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$;
- $U \mapsto {}^{H(U)}\!\big/_{\operatorname{im} \frac{\partial}{\partial z}}$ se $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Funzioni differenziabili su varietà differenziabili

Una varietà si presenta come uno spazio topologico secondo numerabile ed Hausdorff munito di un atlante. Un atlante è un ricoprimento i cui aperti siano muniti ognuno di un omeomorfismo (carta) verso $\mathbb{R}^n$, per qualche n che si dice dimensione della varietà.

Gli atlanti catturano l'idea di essere *localmente omeomorfi ad* $\mathbb{R}^n$. L'hausdorfficità non è misteriosa. Secondo numerabile vuol dire che la topologia deve avere una base numerabile. È una richiesta molto forte, ma non ne ho mai colto la necessità.

Vorrò una giustificazione fascio-teoretica delle proprietà topologiche richieste, se esiste.

Questa è una definizione piuttosto grezza di varietà topologica. Arricchendola di una nozione di differenziabilità si ottengono le varietà differenziabili. Porchettiamo per capire come dovrebbero essere fatte usando l'unica cosa che abbiamo: la differenziabilità negli spazi euclidei. La ragionevolezza suggerisce un'unica definizione.

Siano X ed Y due varietà topologiche di dimensioni m ed n. Siano $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ due loro aperti. Diremo che una funzione $f : U \to V$ è di classe $\mathcal{C}^k$ in $p \in U$, i.e.

$$f \in \mathcal{C}^k_p(U, V)$$

se scelte comunque due carte $\alpha : A \to \mathbb{R}^m$ in X e $\beta : B \to \mathbb{R}^n$ in Y, tali che $p \in A$ ed $f(p) \in B$, vale

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\alpha(p)}(\alpha(A \cap U), \beta(B \cap V))$$

Diremo che f è di classe $\mathcal{C}^k$ se lo è in ogni punto. Ovvero $f \in \mathcal{C}^k(U, V)$ se $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{C}^k(\alpha(A \cap U), \beta(B \cap V))$ per ogni coppia di carte.

Non avevo mai visto definire le cose in questo ordine prima. Trovo che chiarifichi l'usuale definizione di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. Infatti essa ammonta a chiedere che l'identità sia $\mathcal{C}^k$. Ancora meno misterioso della richiesta di differenziabilità sulle mappe di transizione, a mio parere.

Perché non me l'aveva detto nessuno? In questo modo la definizione actually makes sense!

Dalla definizioni date è immediato che la composizione di due funzioni, una $\mathcal{C}^p$ ed una $\mathcal{C}^q$, è almeno di classe $\mathcal{C}^{\min(p,q)}$.

Da ora lavoriamo in un un'unica varietà differenziabile X di classe $\mathcal{C}^k$. Denotiamo con $i_{U,V}$ l'unico morfismo di $\mathbf{Op}(X)(U,V)$, ovvero la mappa di inclusione. Allora $\mathcal{C}^k(i_{U,V})\colon \mathcal{C}^k(V) \to \mathcal{C}^k(U)$ è la precomposizione con essa.

In una varietà $\mathcal{C}^k$ le inclusioni sono $\mathcal{C}^k$ (si tratta di restrizioni dell'unità, ovvero delle mappe di transizione). La precomposizione preserva la classe di differenziabilità e quindi anche l'operazione di restrizione la preserva: $\mathcal{C}^k$ allora è proprio un funtore ed utilizzeremo l'usuale notazione per le restrizioni.

La condizione di fascio è la seguente. Per ogni aperto $U \subseteq X$ ed ogni famiglia di funzioni $f_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$ con $i \in I$ tale che i domini siano un ricoprimento aperto di U,

$$(\forall i, j \in I)\left(f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}\right) \Rightarrow (\exists! f \in C^k(U)\colon (\forall i \in I)(f|_{U_i} = f_i))$$

L'esistenza è immediata definendo f puntualmente identica alle f_i, evitando ambiguità grazie alla condizione di compatibilità. L'unicità deriva dal fatto che è l'unica definizione possibile che realizza la condizione richiesta ad f. Inoltre, la classe di differenziabilità è una proprietà che abbiamo definito puntualmente quindi f la eredita dalle f_i per costruzione.

In effetti bastava usare la definizione locale di continuità nell'esercizio precedente per abbreviarlo.

Funzioni olomorfe su varietà complesse

Procediamo per analogia col caso precedente. Costruiamo un prototipo di varietà complessa di dimensione n come uno spazio topologico secondo numerabile ed Hausdorff, localmente omeomorfo al cerchio unitario aperto di $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$.

È naturale tentare di definire la nozione di funzione olomorfa tra oggetti di questo tipo. Prendiamo X ed Y di dimensioni m ed n e due aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$. Diremo che una funzione $f\colon U \to V$ è olomorfa in $p \in U$, i.e.

$$f \in H_p(U, V)$$

se scelte comunque due carte $\alpha\colon A \to \mathbb{D}^m$ in X e $\beta\colon B \to \mathbb{D}^n$ in Y, tali che $p \in A$ ed $f(p) \in B$, vale

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} \in H_{\alpha(p)}(\alpha(A \cap U), \beta(B \cap V))$$

Diremo che f è olomorfa se lo è in ogni punto. Ovvero $f \in H(U, V)$ se $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} \in H(\alpha(A \cap U), \beta(B \cap V))$ per ogni coppia di carte.

Ricordiamo che una funzione $h\colon Y \subseteq \mathbb{C}^m \to Z \subseteq \mathbb{C}^n$ è olomorfa in un punto se in esso si annulla la derivata di Wirtinger di ogni sua componente. Sarà olomorfa se tale condizione vale sull'intero dominio.

Definiamo dunque una varietà complessa come un oggetto di questo genere tale che l'identità sia olomorfa.

No, davvero. Qui sta succedendo *qualcosa*.

Riguardo alle condizioni di fascio? La regola della catena garantisce che la composizione preservi l'olomorficità. Il resto delle verifiche sono una riscrittura dell'esercizio precedente poiché abbiamo definito tutte le proprietà localmente.

Holy sh— io induco una proprietà definita localmente ed allora se ce l'ha l'identità ce l'hanno tutte le mappe tra aperti!

Un *incubo* su X consta di un oggetto di $\mathbf{Top}_{/X}$; i morfismi $(E, h) \to (E', h')$ di $\mathbf{Top}_{/X}$ sono dati da triangoli commutativi

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & E' \arrow[dl, "h'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Una *sezione* di un incubo $(E, h\colon E \to X)$ su X consiste di un elemento generalizzato di (E, h), ovvero di un morfismo $(X, 1_X) \to (E, h)$.

Exercise 12 (_19.tex)

Mostrare che per ogni inclusione di un aperto $i\colon U \subseteq X$, la corrispondenza

$$U \mapsto \left\{ \begin{array}{c} U \\ \downarrow{\scriptstyle s} \\ E \end{array} \;\middle|\; \begin{tikzcd} U \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, hook, "i"] & & E \arrow[dl, "h"] \\ & X & \end{tikzcd} \right\}$$

dove $i\colon U \subseteq X$, definisce un fascio su X.

Andiamo in $\mathbf{Top}$. Prendiamo un fibrato $p : E \to B$. Possiamo restringerlo ad un aperto $U \subseteq B$ con un pullback lungo l'inclusione:

$$\begin{tikzcd} p^{\leftarrow}(U) \arrow[r] \arrow[d, "i^\star_{UB}p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "i_{UB}"'] & B \end{tikzcd}$$

Consideriamo il funtore $S_p : \mathbf{Op}(B) \to \mathbf{Sets}$ che manda U nella collezione delle sezioni di $i^\star_{UB}p$. Esso manda un'inclusione i nella funzione agente come la precomposizione $s \mapsto s \circ i$ sulle sezioni. Le verifiche di funtorialità sono immediate.

S_p è il fascio delle sezioni locali del fibrato p. Ma è davvero un fascio? Vogliamo che per ogni aperto U di B ed ogni famiglia di sezioni $s_i \in S_p(U_i)$ indiciata da $i \in I$ i cui domini formino un ricoprimento aperto di U valga

$$(\forall i, j \in I)(f_i \circ i_{U_{ij}, U_i} = f_j \circ i_{U_{ij}, U_j}) \Rightarrow (\exists! f \in S_p(U))(\forall i \in I)(f \circ i_{U, U_i} = f_i)$$

dove denotiamo $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Esistenza, unicità e continuità di f si mostrano esattamente come già fatto in precedenza. Basta solo verificare che $f \in S_p(U)$, ovvero $i^\star_{UB}p \circ f = \mathrm{id}_U$, ma ciò è vero puntualmente per definizione.

Forme differenziali su varietà differenziabili

Data una varietà X consideriamo il fibrato $\Lambda^p(T^\star X) \to X$ (cioè dalla p-esima potenza esterna del fibrato cotangente). Il funtore Ω^p è esattamente il *fascio* delle sue sezioni locali.

Was that too cheap?

Derivazioni

Mi sto incaloppiando su come restringere le derivazioni - non sul senso, ma su come scriverlo bene. Ci devo pensare un attimo.

Prefascio delle funzioni localmente limitate

Consideriamo le funzioni $f_i = \pi_1|_{B_i}$ dove intendiamo che B_i sia la palla aperta di centro $(i, 0, \dots)$ e raggio unitario, per $i \in \mathbb{N}$. Esse sono tutte limitate ed il loro incollamento esiste unico ma non è limitato, quindi non abbiamo un fascio.

Moralmente quello che succede è che sto rendendo troppo rigidi i pezzi per gli incollamenti. Difatti l'ostruzione è che l'incollamento non esiste. Cioè, viene meno la seconda condizione di fascio.

Prefascio delle funzioni olomorfe sminquiate

Consideriamo per $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ il seguente prefascio:

$$U \overset{F}{\mapsto} H(U) \big/ \operatorname{im} \frac{\partial}{\partial z}$$

L'olomorficità equivale a richiedere l'esistenza di antiderivate locali. Il set a denominatore del quoziente contiene esattamete le funzioni che hanno antiderivata globale. Quindi, questo prefascio assegna ad U le funzioni complesse che hanno antiderivata locale ma non globale.

Moralmente quello che succede è che sto rendendo troppo flessibili i pezzi per gli incollamenti. Infatti mi aspetto che venga meno la prima condizione di fascio, cioè l'unicità dell'incollamento.

Il modo più rapido è mostrare due funzioni differenti con restrizioni agli aperti di un ricoprimento del dominio identiche.

Hnnng. Non mi viene, ora.

La topologia (più precisamente il gruppo fondamentale, o il primo gruppo di (co)omologia) di U dice quali forme differenziali hanno soluzione o no, sia in ambito reale che in ambito complesso; in questo caso è utile osservare che la condizione di separazione si enuncia così:

> Per ogni $U \in \mathbf{Op}(X)$, e ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di U, se $s \in F(U)$ è zero su ogni U_i, $s|_{U_i} = 0$, allora $s = 0$

(è immediato: $s|_{U_i} = t|_{U_i} \iff (s - t)|_{U_i} = 0$). Questo ti sta dicendo che la domanda si rifrasa come: per il prefascio dato, è vero che per ogni U, e ogni ricoprimento di tale U, quando $s|_{U_i} = 0$ allora $s = 0$? La risposta è no: prendi $U = \mathring{D}(0, 1[$ (il disco bucato di centro l'origine) e come $s \in FU$ prendi la funzione $\frac{1}{z}$; allora, su ogni ricoprimento di tale U la funzione è la derivata di qualcuno, e quindi diventa zero in quel conucleo: scegli un ramo di $\log z$. E però –dimostralo o ricordatelo da Metodi!– globalmente $s \neq 0$, ovvero $\frac{1}{z}$ non è la derivata di nessuno.

Exercise 13 (_20.tex)

- Mostrare che $F\colon \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{Sets}$ è un fascio su X se e solo se per ogni $U \in \mathbf{Op}(X)$ e ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di U, nel seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & FU_i \arrow[r] & F(U_i \cap U_j) \\
FU \arrow[ur] \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[dr] & \prod_i FU_i \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, shift left, "v"] \arrow[r, shift right, "w"'] & \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \arrow[u] \arrow[d] \\
 & FU_j \arrow[r] & F(U_i \cap U_j)
\end{tikzcd}$$

  $(F(U), \epsilon)$ è l'equalizzatore della coppia di frecce parallele

$$v, w\colon \prod FU_i \to \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

  indotte dalla proprietà universale del prodotto.
- Mostrare che $F(\varnothing) \cong \{*\}$ (il singoletto);
- Ogni prefascio su uno spazio con la topologia banale è un fascio. Ogni prefascio su uno spazio discreto è un fascio; più precisamente,

$$\mathbf{Sh}(X) = \mathbf{Sets}_{/X}$$

Parte uno

Denoto le intersezioni degli aperti del ricoprimento come $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e le immagini delle inclusioni e la loro azione come $\rho_{WV} = F(V \subseteq W)\colon f \to f|_V$.

$$\begin{tikzcd}
 & FU_k \arrow[r, "\rho_{U_k U_{kl}}"'] & F(U_{kl}) \\
FU \arrow[ur, "\rho_{UU_k}"] \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[dr, "\rho_{UU_l}"'] & \prod_i FU_i \arrow[u, "\pi_k"'] \arrow[d, "\pi_l"] \arrow[r, shift left, "v"] \arrow[r, shift right, "w"'] & \prod_{i,j} F(U_{ij}) \arrow[u, "\pi_{kl}"] \arrow[d, "\pi_{kl}"'] \\
 & FU_l \arrow[r, "\rho_{U_l U_{kl}}"] & F(U_{kl})
\end{tikzcd}$$

Seguendo il quadrato superiore in senso orario e quello inferiore in senso inverso abbiamo rispettivamente

$$(f_i)_{i \in I} \mapsto f_k \mapsto f_k|_{U_{kl}}$$
$$(f_i)_{i \in I} \mapsto f_l \mapsto f_l|_{U_{kl}}$$

L'unico modo di farli commutare per ogni k ed l è dunque

$$v\colon (f_i)_{i \in I} \mapsto (f_i|_{U_{ij}})_{i,j \in I}$$
$$w\colon (f_i)_{i \in I} \mapsto (f_j|_{U_{ij}})_{i,j \in I}$$

Il loro equalizzatore è il seguente set munito dell'ovvia inclusione:

$$i\colon \mathrm{Eq}(v,w) = \left\{ (f_i)_{i\in I} \in \prod_i FU_i \colon (f_i|_{U_{ij}})_{i,j\in I} = (f_j|_{U_{ij}})_{i,j\in I} \right\} \to \prod_i FU_i$$

Dalla commutatività dei triangoli per ogni k ed l otteniamo

$$\epsilon\colon f \mapsto (f|_{U_i})_{i\in I}$$

Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} FU \arrow[r, tail, "\epsilon"] \arrow[d, dotted, two heads, "\eta"'] & \prod_i FU_i \\ \mathrm{Eq}(v,w) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

La prima condizione di fascio equivale a chiedere che per ogni ricoprimento di ogni aperto ϵ sia mono. La seconda condizione di fascio equivale a chiedere che per ogni ricoprimento di ogni aperto esista un epi η che faccia commutare il triangolo.

Supponiamo che (FU, ϵ) sia isomorfo all'equalizzatore. Allora il triangolo commuta per un'unico isomorfismo η. Esso è anche epi. $\epsilon = i\eta$ è mono poiché lo è i essendo un equalizzatore.

Supponiamo che valgano le condizioni di fascio. Allora $i\eta = \epsilon$. Ma $i = \epsilon\eta^{-1}$ quindi esso è mono. E siccome $\eta = i^{-1}\epsilon$ esso è iso: (FU, ϵ) è isomorfo all'equalizzatore.

Nella seconda parte non avevo realmente bisogno di usare il fatto che η fosse epi per dire che i è mono. Qualsiasi equalizzatore lo è. Credo che l'apparente ridondanza sia dovuta al fatto che l'ho già costruito esplicitamente, quindi non ho bisogno di provarne l'esistenza.

Parte due

Gli unici ricoprimenti del vuoto sono formati da copie del vuoto. Dunque per trovare $S = F(\varnothing)$ basta prendere un triangolo del diagramma della consegna e risolverlo in **Sets**:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, tail, "\epsilon"] \arrow[dr, equal] & \prod_i S \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Essendo π una proiezione, ϵ deve mandare S per intero nel relativo fattore affinché il triangolo commuti. D'altro canto ciò deve valere per ogni proiezione. Quindi dev'esserci un solo fattore: $\prod_i S \cong S$. Concludiamo che $F(\varnothing) \cong \{*\}$, l'unico set che soddisfa la richiesta.

Parte tre

Sia S un set. Se I e D sono i funtori che muniscono i set di topologia rispettivamente indiscreta e discreta, è immediato che

$$\mathbf{Op}(IS) \cong \{\varnothing \to S\} \qquad \mathbf{Op}(DS) \cong \mathcal{P}(S)$$

Osservazione 2.0.3. Gli equalizzatori prodotti dai ricoprimenti sono insensibili alla presenza di aperti uguali tra loro nella collezione. Infatti la condizione di compatibilità obbliga le due relative componenti ad essere identiche. Identificherò ricoprimenti equivalenti in questo senso. Una conseguenza immediata è che l'unico ricoprimento del vuoto è formato dal solo vuoto.

Osservazione 2.0.4. Il ricoprimento di un aperto formato dal solo aperto banalizza le condizioni di fascio

Un prefascio F su $\mathbf{Op}(IS)$ è un fascio. Gli unici due aperti sono $\varnothing$ ed S. L'unico ricoprimento da controllare è $\{\varnothing, S\}$ per S, ma si vede subito che esiste l'isomorfismo

$$FS \cong \left\{(f_\varnothing, f_S) \in F\varnothing \prod FS \colon f_\varnothing = f_S|_\varnothing\right\}$$

In pratica tutti gli incollamenti sono possibili ma sono banali a causa dell'estrema rigidità dei pezzi che hanno dimensione massima oppure nulla. Abbiamo visto che $F(\varnothing)$ è l'oggetto terminale di **Sets** e quindi anche l'immagine dell'unica inclusione è fissata. Il dato del fascio ammonta al solo set FS ed una trasformazione naturale verso G si riduce ad un'unica funzione $FS \to GS$ che fa commutare un triangolo banale. Concludiamo che

$$\mathbf{PSh}(IS) \cong \mathbf{Sh}(IS) \cong \mathbf{Sets}_{/\star} \cong \mathbf{Sets}$$

~~Un prefascio F su $\mathbf{Op}(DS)$ è un fascio.~~

O no?
Consideriamo $S = \{x, z\}$. Prendiamo un prefascio definito così, per un set A:

$$F\colon \begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \{x\} \arrow[d] \\ \{y\} \arrow[r] & \{x,y\} \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} \star & A \arrow[l] \\ A \arrow[u] & A \times A \times A \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Lo dimostrerò tra un attimo, ma se F fosse un prefascio dovrebbe valere $F\{x,y\} \cong F\{x\} \times F\{x\}$, condizione falsa appena A è più grande di un singoletto.

Quando un prefascio F su $\mathbf{Op}(DS)$ è un fascio? Qualsiasi fascio rispetta $F\varnothing = \star$, quindi assumiamo che sia vero. La conseguenza immediata è che tutte le restrizioni al vuoto coincidono. Qualsiasi aperto è ricoperto dalla collezione dei singoletti dei suoi punti, dunque deve valere (la condizione di compatibilità è trivializzata dal fatto che tutte le restrizioni al vuoto sono identiche)

$$FU \cong \left\{(f_u)_{u\in U} \in \prod_{u\in U} F\{u\}\right\} \cong \prod_{u\in U} F\{u\}$$

Insomma, il fascio è completamente determinato dalle immagini dei singoletti. Ma allora possiamo concludere che

$$\mathbf{PSh}(DS) \ncong \mathbf{Sh}(DS) \cong [\underline{S}, \mathbf{Sets}] \cong \mathbf{Sets}_{/S}$$

Credo che avessi inteso dire questo, nella consegna.

Exercise 14 (_21.tex)

- "$X \mapsto \mathbf{Sh}(X)$ è esso stesso un fascio", ovvero se $U \subseteq X$ esiste una restrizione $\boldsymbol{\rho}_U \colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(U)$, e scriviamo $\boldsymbol{\rho}_U(F) = F|_U$.
- Se $X = \bigcup U_i$ è un ricoprimento aperto di uno spazio X, e viene dato un fascio F_i su ciascun U_i, tale che

$$F_i|_{U_i \cap U_j} = F_j|_{U_i \cap U_j}$$

  allora esiste un unico fascio F su X, a meno di isomorfismo, tale che $F|_{U_i} = F_i$.
- Se $\mathfrak{B}(X)$ è una base di $\mathbf{Op}(X)$, allora ogni fascio su $\mathfrak{B}(X)$ ammette un'unica estensione a un fascio su tutto X. Hint: questo è un risultato di densità:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}(X) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbf{Sets} \\ \mathbf{Op}(X) \arrow[ur, dotted, "\mathrm{Lan}_\iota F"'] & \end{tikzcd}$$

  e il risultato suona come $\mathrm{Lan}_\iota \colon \mathbf{Sets}^{\mathfrak{B}(X)} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{Op}(X)}$ induce un'equcat tra le rispettive categorie dei fasci.

Esperimento-time!

Prendo un mono in **Sets**:

$$i_{UX} \colon U \hookrightarrow X$$

Se vado in **Top** munendo X della topologia τ allora posso indurre la topologia sottospazio su U:

$$\tau_U = \{U \cap V | V \in \tau\}$$

Se $U \in \tau$ succede una cosa cruciale grazie alla chiusura ed è giustificata una nuova notazione:

$$\tau|_U := \tau_U \subseteq \tau$$

Ora considero il reticolo $\mathbf{Op}(X)$, intendendo X munito della topologia τ. La definizione usata ha una conseguenza notevole: presi comunque $U, V \in \tau$,

$$U \subseteq V \Rightarrow \tau|_U \subseteq \tau|_V$$

Sono in atto varie corrispondenze funtoriali, si intuisce.

Iniziamo a srotolare la matassa. Le topologie sono chiuse per intersezioni finite, quindi $\mathbf{Op}(X)$ ha i pullback:

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

L'operazione di indurre sugli aperti la topologia sottospazio è dunque catturata dal funtore pullback:

$$i^\star_{UX} \colon \mathbf{Op}((X, \tau)) \to \mathbf{Op}((U, \tau|_U))$$

Grazie al gluing lemma esso gode della proprietà equivalente a $U \subseteq V \Rightarrow \tau|_U \subseteq \tau|_V$, ovvero

$$i^\star_{UV} i^\star_{VX} = i^\star_{UX}$$

È doveroso a questo punto definire il funtore controvariante $i^\star_X$ su $\mathbf{Op}(X)$ come

$$i^\star_X : \begin{cases} U & \mapsto & i^\star_{UX} \\ U \subseteq V & \mapsto & i^\star_{UV} \end{cases}$$

Esso ricorda molto un fascio. Le condizioni di compatibilità ed esistenza univoca degli incollamenti dovrebbero essere

$$i^\star_{(U\cap V)V} i^\star_{VX} = i^\star_{(U\cap V)X} = i^\star_{(U\cap V)U} i^\star_{UX} \qquad i^\star_{UV} i^\star_{VX} = i^\star_{UX}$$

Uhm. Ci sono quasi. Forse però non è il modo migliore di vederlo. Ed in effetti stavo solo giocando - non avevo un piano.

Parte uno

Fisso uno spazio topologico (X, τ). Dato $U \in \tau$, l'inclusione di set induce la topologia sottospazio $\tau|_U$ su U ed una mappa continua ed aperta:

$$i_U : U \to X \qquad \rightsquigarrow \qquad i_U : (U, \tau|_U) \to (X, \tau)$$

Allora posso definire un funtore agente come l'identità e dichiarare che la restrizione di fasci cercata è la precomposizione:

$$I_U : \mathbf{Op}(U, \tau|_U) \to \mathbf{Op}(X, \tau) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boldsymbol{\rho}_U = I^\star_U$$

È immediato che la restrizione funzioni: i ricoprimenti di un aperto nella topologia sottospazio sono esattamente i ricoprimenti del medesimo aperto nella topologia iniziale, quindi le condizioni di fascio reggono a fortiori.

Parte due

Proposta: sfruttare il prodotto di funtori che ho a disposizione in questa situazione e definire

$$F = \coprod_{i\in I} F_i(I_i \cap -)$$

Esso è un fascio. Rispetta a vista la condizione sulle restrizioni. L'esistenza dell'isomorfismo con gli equalizzatori è garantita componente per componente da quella degli F_i grazie al fatto che il prodotto di funtori è definito puntualmente. Assieme alla compatibilità dei fasci sulle intersezioni, ciò garantisce che è definito univocamente, a meno di isomorfismo.

Questa soluzione non mi piace. Oltretutto, *credo* che funzioni, ma mi sento confuso dai dettagli. Cioè: non c'è niente che potrebbe andare storto, ma non sto vedendo che tutto va dritto. Comunque sospetto che la cosa si chiarirà da sé nei prossimi esercizi.

Ok. Quello che trovo nella prossima parte corrobora l'idea, ma continua a non piacermi il modo.

Esperimento-time!

Immaginiamo di avere un funtore $\iota\colon \mathbf{B} \to \mathbf{T}$ tra due categorie arricchite su un cosmo di Bénabou $\mathbf{V}$, ed un funtore $F\colon \mathbf{B} \to \mathbf{V}$.

Allora l'estensione

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbf{V} \\ \mathbf{T} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_\iota F"'] & \end{tikzcd}$$

esiste e si calcola con una cofine ed il tensore naturale di $\mathbf{V}$:

$$\mathrm{Lan}_\iota F \cong \int^b \mathbf{T}(\iota b, -) \cdot Fb$$

Diremo che $\mathbf{B}$ è una *base* per $\mathbf{T}$ se valgono

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}(-,=) & \cong & \mathbf{T}(\iota -, \iota =) \\ \mathbf{T}(-,=) & \cong & \int^b \mathbf{T}(-,\iota b) \cdot \mathbf{T}(\iota b, =) \end{array}$$

In tal caso Lan_ι è un'equivalenza. Infatti, denotando con $\iota^\star$ la precomposizione,

$$\begin{array}{rcllcl} [\iota^\star \circ \mathrm{Lan}_\iota]\, F & \cong & \int^b \mathbf{T}(\iota b, \iota -) \cdot Fb & & & \\ & \cong & \int^b \mathbf{B}(b,-) \cdot Fb & & \cong & F \\ [\mathrm{Lan}_\iota \circ \iota^\star]\, F & \cong & \int^b \mathbf{T}(\iota b, -) \cdot F\iota b & & & \\ & \cong & \int^b \mathbf{T}(\iota b, -) \cdot \int^u \mathbf{T}(u, \iota b) \cdot Fu & & & \\ & \cong & \int^u \left(\int^b \mathbf{T}(u,\iota b) \cdot \mathbf{T}(\iota b, -)\right) \cdot Fu & & & \\ & \cong & \int^u \mathbf{T}(u,-) \cdot Fu & & \cong & F \end{array}$$

Parte tre

La situazione da trattare è un caso particolare di quanto appena visto:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}^{\mathrm{op}}(X) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\iota^{\mathrm{op}}"'] & \mathbf{Sets} \\ \mathbf{Op}^{\mathrm{op}}(X) \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_{\iota^{\mathrm{op}}} F"'] & \end{tikzcd}$$

La prima condizione di base è soddisfatta. Infatti per dualità è equivalente all'ovviamente vera

$$\mathfrak{B}(X)(-,=) \cong \mathbf{Op}(X)(\iota -, \iota =)$$

La seconda condizione di base è equivalente per dualità a

$$\mathbf{Op}(-,=) \cong \int^b \mathbf{Op}(X)(-,\iota b) \times \mathbf{Op}(X)(\iota b, =)$$

Se mostriamo che vale, abbiamo vinto. Come fare?

Vabbuò. Faccio il conto scemo, senza girarci tanto attorno.

La cofine della condizione da verificare è il coequalizzatore di

$$\coprod_{b\to b'} \mathbf{Op}(X)(u, \iota b) \times \mathbf{Op}(X)(\iota b', v) \rightrightarrows \coprod_b \mathbf{Op}(X)(u, \iota b) \times \mathbf{Op}(X)(\iota b, v)$$

D'altra parte tutte le categorie coinvolte sono posetali e le componenti dei coprodotti sono vuote o singoletti. Eliminando identità di prodotti e coprodotti possiamo riscrivere

$$\coprod_{b,b'\colon u\to\iota b\to\iota b'\to v} \star \rightrightarrows \coprod_{b\colon u\to\iota b\to v} \star$$

L'unico modo di coequalizzare tutte le frecce, se esistono, è mandarle in un singoletto. Se invece $v \to u$ non è l'identità, non esistono frecce da equalizzare. Pertanto concludiamo che un coequalizzatore è $\mathbf{Op}(u, v)$ ed abbiamo quanto desiderato.

Quanto detto finora riguarda prefasci. Parliamo ora di fasci.

Exercise 15 (_23.tex)

Mostrare che ogni funzione continua $f\colon X \to Y$ induce un funtore

$$f_*\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$$

che ha un aggiunto sinistro $f^*\colon \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$ (hint: definire f_* mediante $f^{-1}\colon \mathbf{Op}(Y) \to \mathbf{Op}(X)$, e trovare f^* come sua estensione di Kan sinistra.

Determinare l'aggiunzione $f^* \dashv f_*$ nel caso in cui $f\colon X \to *$ è la funzione terminale da X verso il punto; in tal caso

$$\mathbf{Sh}(X) \leftrightarrows \mathbf{Sh}(*) = \mathbf{Sets}\dots$$

(hint: ricorda l'esercizio **6**).

Exercise 16 (_24.tex)

La categoria dei fasci su uno spazio X ha un oggetto terminale $\mathbf{1}$; mostrare che esiste un isomorfismo di algebre di Heyting

$$\mathrm{Sub}_{\mathbf{Sh}(X)}(\mathbf{1}) \cong \mathbf{Op}(X) = \{U \subseteq X \mid U \text{ aperto}\}$$

Lo spazio etalé di un fascio.

L'equivalenza $\mathbf{Sh}(\underline{X}) \cong \mathbf{Sets}_{/X}$, e la presenza di un funtore $\mathbf{Top}_{/X} \to \mathbf{Sh}(X)$ suggerisce che si possa pensare un fascio su uno spazio X come una sorta di "spazio" che lo "riveste".

Questo è vero. Si fa così.

Exercise 17 (_25.tex)

Mostrare che esiste una aggiunzione

$$\mathsf{st}_x \dashv \mathsf{sky}_x : \mathbf{PSh}(X) \leftrightarrows \mathbf{Sets}$$

dove $\mathsf{st}_x : \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sets}$ è il funtore che manda F in

$$\varinjlim_{U \supseteq \{x\}} F(U)$$

e sky_x è il funtore che manda un insieme A nel prefascio

$$\mathsf{sky}_x(A) : U \mapsto \begin{cases} A & \text{se } x \in U \\ * & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\mathsf{st}_x(F)$ è la *spiga* del prefascio F.

Exercise 18 (_25.tex)

Mostrare che $\mathsf{sky}_x(A)$ è un fascio, sicché l'aggiunzione si restringe a $\mathbf{Sh}(X)$; $\mathsf{st}_x(F) = F_x$ è la spiga del fascio F.

Le proprietà di un fascio sono altamente determinate dalle proprietà congiunte dell'insieme delle sue spighe:

Exercise 19 (_25.tex)

Mostrare che un morfismo $\eta \colon F \Rightarrow G$ tra fasci su X è un iso/mono/epi se e solo se lo è ciascun $\mathsf{st}_x\eta \colon F_x \to G_x$.

Definizione 2.0.3. Un incubo $p \colon E \to X$ è un *omeomorfismo locale* se soddisfa la seguente proprietà:

> per ogni $y \in E$ esiste un intorno aperto $U_y \subseteq E$ tale che $p|_{U_y}$ è un omeomorfismo sull'immagine: $p|_{U_y} \colon U_y \cong p(U_y)$.

Exercise 20 (_25b.tex)

- Se $p \colon E \to X$ è un omeomorfismo locale, p è una mappa aperta (manda aperti in aperti);
- Un incubo $p \colon E \to X$ su X è un omeomorfismo locale se e solo se p e $\langle p, p\rangle \colon E \times_X E \to X$ sono mappe aperte.
- Se $U \in \mathbf{Op}(X)$, l'insieme
$$\{s(U) \mid s \in \Gamma_p(U),\ U \in \mathbf{Op}(X)\}$$
è una base di aperti per la topologia di E;
- Se $\varphi \colon (E, p) \to (F, q)$ è un morfismo di incubi che sono omeomorfismi locali, anche φ è un omeomorfismo locale.

Questo ultimo punto induce a definire una sottocategoria $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ degli omeomorfismi locali (spazi *étale* su X).

Exercise 21 (_25c.tex)

La corrispondenza $\Gamma\colon \acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ definisce un funtore che ha un aggiunto sinistro $\Lambda\colon \mathbf{Sh}(X) \to \acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(X)$: dato F

- Costruiamo lo spazio $\Lambda F = \coprod_{x\in X} F_x$, unione disgiunta di tutte le spighe di F (per ora è solo un insieme);
- Ogni $s \in F(U)$ induce una funzione $\hat{s}\colon U \to \Lambda F$ definita mandando $x \in U$ in $s_x \in F_x$[a];
- Definiamo su ΛF una topologia: una base di aperti è fatta da

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\Lambda F)_{s,U} &= \{\hat{s}(U) \mid s \in FU,\ U \in \mathbf{Op}(X)\}\\ &= \{s_x \mid x \in U,\ U \in \mathbf{Op}(X)\}\end{aligned}$$

  Mostrare che è davvero una base; la topologia che genera è la più fine a rendere tutte le $\hat{s}$ funzioni continue.
- Per questa topologia, l'ovvia funzione $p\colon \Lambda F \to X$ la cui fibra sopra $x \in X$ è F_x è un omeomorfismo locale.
- Mostrare che esiste un omeomorfismo

$$(E, q) \to (\Lambda\Gamma E, p)$$

  di incubi su X; questa è la *counità* della aggiunzione $\Lambda \dashv \Gamma$;
- Mostrare che esiste una trasformazione naturale $\eta\colon 1 \Rightarrow \Gamma\Lambda$; mostrare che $F \in \mathbf{PSh}(X)$ è un fascio se e solo se ogni $\eta_F\colon F \to \Gamma\Lambda F$ è un isomorfismo.
- Mostrare che valgono le identità triangolari per (ϵ, η), ovvero che le composizioni

$$\Gamma \xrightarrow{\eta*\Gamma} \Gamma\Lambda\Gamma \xrightarrow{\Gamma*\epsilon} \Gamma$$
$$\Lambda \xrightarrow{\Lambda*\eta} \Lambda\Gamma\Lambda \xrightarrow{\epsilon*\Lambda} \Lambda$$

  sono le identità dei rispettivi funtori.

[a] Ogni elemento di FU ha una immagine canonica nel colimite $F_x = \varinjlim_{V\supseteq\{x\}} FV$; dato $s \in FU$, denotiamo tale immagine con s_x.

Exercise 22 (_25d.tex)

Sia

$$\Lambda\colon \mathbf{Ps} \leftrightarrows \mathbf{Bd}\colon \Gamma$$

una aggiunzione; supponiamo che

- se $B \in \mathbf{Bd}$, allora $(\eta * \Gamma)_B\colon \Gamma B \to \Gamma\Lambda\Gamma B$ è un isomorfismo;
- se $P \in \mathbf{Ps}$, allora $(\epsilon * \Lambda)_P\colon \Lambda\Gamma\Lambda P \to \Lambda P$ è un isomorfismo.

Allora $\Lambda \dashv \Gamma$ si restringe a una equivalenza tra le immagini essenziali di Λ e Γ.

Capitolo 3

Topoi

Capitolo 4

Cetera

4.1 Stray questions

Isbell Duality

Sia $\mathbf{C}$ una categoria piccola; definiamo due funtori

$$\mathcal{O}\colon [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets}] \longrightarrow [\mathbf{C}, \mathbf{Sets}]^{\mathrm{op}}$$
$$\mathrm{Spec}\colon [\mathbf{C}, \mathbf{Sets}]^{\mathrm{op}} \to [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets}]$$

ponendo $\mathcal{O}(F)\colon c \mapsto \mathsf{Nat}(F, \hom(-, c))$ e $\mathrm{Spec}(G)\colon c \mapsto \mathsf{Nat}(G, \hom(c, -))$.
Mostrare che $\mathcal{O} \dashv \mathrm{Spec}$.

Limit creation

Da qui nasce la seguente mail:

```
Credo tu possa divertirti a mostrare che il funtore dimenticante
U\colon \mathbf{Ab}\to \bf Set crea i prodotti; praticamente allo
stesso modo dimostri che crea i limiti, e praticamente allo stesso
modo lo fai per ogni aggiunzione F\colon \mathcal{C}\leftrightarrows
\mathbf{Set}\colon U da \cal C concreta per U monadico.

A dirti che il carrier del prodotto e' il prodotto dei carrier e'
il fatto che U, essendo un aggiunto destro, rispetta i limiti:
```

$$U(A \times B) \cong UA \times UB$$

```
(idem con U(\varprojlim A_i)). Adesso pero' potresti avere diversi
modi di mettere su \varprojlim UA_i una struttura di oggetto di
\cal C (di gruppo, gruppo abeliano, etc). Qui interviene la monadicita';
il risultato provato su "Sheaves in Geometry" ti mostra che esiste solo
un modo (grazie all'universalita' del limite) di mettere sul set
\varprojlim UA_i la struttura che vuoi.
```

Lipschitz functor

Da qui nasce la seguente mail:

```
Per quanto riguarda la lipschitzianita': e' interessante, non ci avevo
mai riflettuto. Che conseguenza potrebbe avere in termini di "spazi
metrici come categorie arricchite"? Dovrebbe esserci un funtore
```

$$\mathrm{Lip}\colon [0,\infty]\text{-}\mathcal{C}at \to [0,\infty]$$

```
ma quali proprieta' lo caratterizzano?
```

Componentwise $\dashv$ pointwise

C'è una questione sulle categorie concrete e cartesiane chiuse che merita approfondimento. Poi, ci sarebbe anche un conto da finire.

CMS: terminal vs identity

Da qui sono andato a parare su http://www.scienzematematiche.it/forum/viewtopic.php?f=6&t=4977.

The adjoint combinatorillion

Esposizione

Ogni terna di funtori aggiunti $A \dashv B \dashv C$ genera due aggiunzioni tra la monade BA e la comonade BC e tra la comonade AB e la monade CB:

$$\hom(BAx, y) \cong \hom(Ax, Cy) \cong \hom(x, BCy)$$

Una quaterna di aggiunti $A \dashv B \dashv C \dashv D$ genera quanto segue:

- 2 terne di aggiunti $BA \dashv BC \dashv DC$ e $AB \dashv CB \dashv CD$;
- 4 aggiunzioni, perché ciascuna delle precedenti terne ne genera due:

$$BCBA \dashv BCDC \qquad CBAB \dashv CBCD \qquad \dots$$

Feel free to find a pattern for

$$F_1 \dashv F_2 \dashv F_3 \dashv \cdots \dashv F_n$$

Soluzione

Consideriamo una catena di n aggiunti:

$$F_1 \dashv F_2 \dashv F_3 \dashv \cdots \dashv F_n$$

Vogliamo formare dei funtori componendoli. Affinché domini e codomini siano compatibili dobbiamo alternare indici pari e dispari.

Astraiamo il problema: si tratta di formare delle stringhe alternando lettere di due alfabeti. Se essi hanno p e d lettere, allora il numero di stringhe di lunghezza $k > 0$ è

$$S(p, d, k) = p^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} + p^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

Nel nostro caso i due alfabeti sono composti dai funtori con indice pari e da quelli con indice dispari. Essi sono rispettivamente $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ e $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Il numero di composizioni di lunghezza fissata $k > 0$ è quindi

$$S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, k\right)$$

Prendere l'aggiunto destro (sinistro) di una composizione equivale ad invertire l'ordine ed aumentare (diminuire) gli indici di uno. Dunque una composizione che non usa gli ultimi $r > 0$ (i primi $l > 0$) funtori ha un aggiunto destro (sinistro) che non usa gli ultimi $r - 1$ (i primi $l - 1$) funtori. Allora per ricorsione esso sta in una catena di aggiunzioni con almeno r (l) funtori alla propria destra (sinistra). Il caso di bordo $r = 0$ ($l = 0$) non pone alcuna restrizione. Non usare gli ultimi $r \geq 0$ funtori significa diminuire il numero di funtori utilizzabili di r. Non usare i primi $l \geq 0$ funtori significa diminuire di $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ il numero di funtori con indice pari e di $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$ il numero di funtori con indice dispari.

Allora abbiamo subito il numero di composizioni di $k > 0$ funtori, appartenenti ad una catena di $n > 0$ aggiunti, che stanno in una catena di aggiunzioni con almeno $n > r \geq 0$ ($n > l \geq 0$) funtori alla propria destra (sinistra):

$$F(n, k, l, r) = S\left(\left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil, k\right)$$

Adesso possiamo produrre facilmente il numero di composizioni di lunghezza k che stanno in una catena di aggiunti con esattamente r (l) funtori alla propria destra (sinistra):

$$G(n, k, l, r) = F(n, k, l, r) - F(n, k, l, r + 1) - F(n, k, l + 1, r) + F(n, k, l + 1, r + 1)$$

Il numero di catene di j aggiunzioni tra funtori che siano composizioni di k funtori di una catena di n aggiunzioni è invece calcolabile come

$$H(n, k, j) = G(n, k, 0, j - 1) = G(n, k, j - 1, 0)$$

Una veloce implementazione in Haskell:

```
fl = floor
ce = ceiling
s p d k = p^(fl(k/2)) * d^(ce(k/2)) + d^(fl(k/2)) * p^(ce(k/2))
f n k l r = s ((fl((n-r)/2))-(fl(l/2))) ((ce((n-r)/2))-(ce(l/2))) k
g n k l r = (f n k l r)-(f n k l (r+1))-(f n k (l+1) r)+(f n k (l+1) (r+1))
h n k j = g n k (j-1) 0
```