

---

## INDICE

---

1	carte, atlanti, parametrizzazioni	2
1.1	Carte, Atlanti e Sfera di Riemann (in più salse).	2
1.2	Esempi di Superfici di Riemann.	6
1.2.1	Tori Complessi.	6
1.2.2	Grafici di Funzioni Polinomiali (Olomorfe).	8
1.2.3	Curve Proiettive.	9
2	funzioni olomorfe e meromorfe su sdr	11
2.1	Funzioni meromorfe su $\mathbb{T}_\Lambda$	16
2.1.1	La funzione $\wp$ di Weierstraß.	18
3	funzioni olomorfe e meromorfe tra sdr	28
3.1	Definizioni di Base.	28
3.2	Ramificazione di Mappe Olomorfe.	30
4	topologia delle sdr	35
4.1	Formula di Hurwitz.	35
4.2	Funzioni Meromorfe sulle curve algebriche.	37
4.2.1	Curve affini.	37
4.2.2	Curve proiettive.	38
4.3	Incollamento di Superfici di Riemann.	39
4.3.1	Curve Iperellittiche.	40
4.3.2	Struttura di $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ .	41

---

CARTE, ATLANTI, PARAMETRIZZAZIONI

---



---

INDICE

---

1.1	Carte, Atlanti e Sfera di Riemann (in più salse).	2
1.2	Esempi di Superfici di Riemann.	6
1.2.1	Tori Complessi.	6
1.2.2	Grafici di Funzioni Polinomiali (Olomorfe).	8
1.2.3	Curve Proiettive.	9

---

**Nota.** La retta complessa  $\mathbf{C}$  si penserà sempre dotata della topologia consueta, che coincide con la topologia euclidea (=indotta dalla norma euclidea) su  $\mathbf{R}^2$ . La topologia su un insieme  $X$  spesso è indicata con  $\tau_X$ . Indichiamo con  $\mathbf{C}^\times$ , come è consuetudine, il piano complesso privato dell'origine.

## 1.1 Carte, Atlanti e Sfera di Riemann (in più salse).

**Definizione 1.1** [CARTA COMPLESSA]: Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Una *carta complessa* (o semplicemente *carta*) è una terna  $(U, V, \varphi)$ , dove  $U \subseteq X$  e  $V \subseteq \mathbf{C}$  sono degli aperti nelle rispettive topologie e  $\varphi : U \rightarrow V$  è un omeomorfismo.

Se  $p \in U$ ,  $\varphi(p) \in V \subseteq \mathbf{C}$  si chiama *coordinata complessa di  $p$* . Se  $p \in U$  è tale che  $\varphi(p) = 0$ , la carta si dice *centrata in  $p$* . Affinchè la definizione data sia “sensata” in ambito topologico, due carte di uno stesso spazio topologico devono concordare sull’intersezione dei domini, nel senso che segue.

**Definizione 1.2** [CARTE COMPATIBILI]: Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico dotato di due carte complesse in  $p$ ,  $(U_1, V_1, \varphi_1)$  e  $(U_2, V_2, \varphi_2)$ . Tali carte si dicono *compatibili* se (alternativamente)

- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ;
- $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  e  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  è un biolomorfismo.

**Osservazione.** Si nota l'analogia che esiste con la geometria differenziale su varietà reali: la struttura complessa però è molto più fragile e difficile da preservare. Un esempio semplice (altri verranno nel seguito) si ha con

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}: (x, y) &\mapsto x + iy \\ \psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}: (x, y) &\mapsto \frac{x + iy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Infatti  $\varphi, \psi$  sono entrambe carte (addirittura globali) da  $\mathbf{R}^2$  a  $\mathbf{C}$ , ma non sono compatibili, perché  $\psi \circ \varphi^{-1}: z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$  non è olomorfa su tutto  $\mathbf{C}$  (se lo fosse lo sarebbe  $z \mapsto |z|$ ).

**Definizione 1.3** [ATLANTE]: Se  $X$  è uno spazio topologico, un *atlante complesso* su  $X$  è una famiglia di carte complesse indicizzata dall'insieme  $I$ ,

$$\mathfrak{A} = \{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$$

che siano a due a due compatibili e tali che  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

**Esempio 1.1.** Sulla sfera unitaria  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  c'è una struttura complessa data dalla proiezione stereografica dai due poli, che dà ad  $S^2$  un atlante complesso.

$S^2$  eredita da  $\mathbf{R}^3$  la topologia di sottospazio, che è di Hausdorff (in particolare, i punti sono chiusi sia in  $\tau_{\mathbf{R}^3}$  che in  $\tau_{S^2}$ ). Allora detti  $N = (0, 0, 1)$  e  $S = (0, 0, -1)$ , gli insiemi  $U_N = S^2 \setminus N$  e  $U_S = S^2 \setminus S$  sono aperti in  $S^2$ , e sono un suo ricoprimento.

Definiamo

$$\begin{aligned}\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbf{C}: (x, y, z) &\mapsto \frac{x + iy}{1 - z} \\ \varphi_S: U_S \rightarrow \mathbf{C}: (x, y, z) &\mapsto \frac{x - iy}{1 + z}\end{aligned} \tag{1.1}$$

confondendo in entrambi i casi piano reale e retta complessa: la prima mappa è la proiezione stereografica dal Polo Nord della sfera, la seconda è invece il coniugato della proiezioni stereografica dal Polo Sud. Non ci fosse stata questa coniugazione, la mappa di transizione sarebbe stata antiolomorfa.

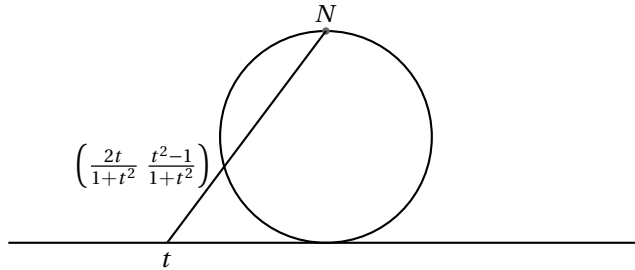


Figura 1: Proiezione stereografica  $S^1 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{R}$ .

**Lemma 1.1** [SFERA DI RIEMANN]:  $\varphi_N, \varphi_S$  sono omeomorfismi di  $U_N, U_S$  in  $\mathbf{C}$ .  $\varphi_N, \varphi_S$  sono carte compatibili.  $\{(U_N, \mathbf{C}, \varphi_N), (U_S, \mathbf{C}, \varphi_S)\} = \mathfrak{A}$  è un atlante di  $S^2$ , che con tale struttura si chiama *sfera di Riemann*.

*Dimostrazione.* Iniettività e suriettività si mostrano a mano con poca fatica, oppure ragionando geometricamente sul numero di intersezioni di una retta con una quadrica (un punto di intersezione è fissato a  $N$  o  $S$ , l'altro —per forza distinto se il punto sta nel piano  $z = 0$  identificato con  $\mathbf{C}$ — esiste ed è unico).

$$\begin{aligned}\varphi_N^{-1}(z) &= \frac{2}{|z|+1} (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, (|z|^2-1)/2), \\ \varphi_S^{-1}(z) &= \frac{2}{|z|+1} (\operatorname{Re} z, -\operatorname{Im} z, (-|z|^2+1)/2).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Ora,  $U_N \cap U_S = S^2 \setminus \{N, S\}$  e  $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbf{C}^\times$ : l'applicazione  $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}: \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  è continua (composizione di continue) e invertibile (l'inversa è  $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ , che coincide con  $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ ) e dunque un omeomorfismo. Si ha

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}: z \mapsto \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - i \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \quad (1.3)$$

dunque la funzione di transizione tra le carte coincide con l'inversione rispetto al cerchio unitario, una volta identificato  $\mathbf{R}^2 \cong \{x_3 = 0\} \cong \mathbf{C}$  con  $(x, y) \mapsto (x, y, 0) \mapsto x + iy$ , dal piano complesso bucato in sè. Tale applicazione è invertibile (anzi, involutoria) e olomorfa (composizione di olomorfe) in tutto il dominio, privo di singolarità (in  $z = 0$  avrebbe un polo di ordine 1).  $\square$

**Definizione 1.4** [ATLANTI EQUIVALENTI]: Sia  $X$  uno spazio topologico dotato di due atlanti  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ . Essi si dicono *equivalenti* se ogni carta di  $\mathfrak{A}$  è compatibile con ogni carta di  $\mathfrak{B}$ , o se l'unione dei due atlanti è ancora un atlante. Questa relazione è una equivalenza sull'insieme  $A_X$  degli atlanti complessi su  $X$ .

Chiameremo *strutture complesse* gli elementi del quoziente di  $A_X$  per questa relazione.

**Definizione 1.5** [SUPERFICIE DI RIEMANN]: Una *superficie di Riemann* è uno spazio topologico di Hausdorff  $X = (X, \tau)$ , connesso e a base numerabile, dotato di una struttura complessa. Se  $X$  è in più compatto, si dice che  $X$  è una *superficie di Riemann compatta*.

**Esempio 1.2.**  $(S^2, \{(U_N, \mathbf{C}, \varphi_N), (U_S, \mathbf{C}, \varphi_S)\})$  è una *superficie di Riemann compatta*. Tale superficie, risultante dall'unione disgiunta  $(\mathbf{C}^\times \amalg \mathbf{C}^\times)/\{z = 1/z\}$  di due copie del piano complesso bucato, incollate modulo la relazione che identifica punti immagine dell'inversione  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , è omeomorfa alla sfera  $S^2$ .

A certe condizioni si può indurre su un qualunque insieme  $X$  dotato delle “carte giuste” una topologia che lo renda una superficie di Riemann. Supponiamo di disporre di un ricoprimento numerabile  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  di  $X$ , e per ogni  $U_\alpha$  di una biiezione di insiemi  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbf{C}$ , i  $V_\alpha$  aperti di  $\mathbf{C}$ . Definiamo allora

$$\tau_\alpha = \{U \subseteq U_\alpha \text{ aperto} \iff \varphi_\alpha(U) \text{ è aperto in } \mathbf{C}\}$$

$(U_\alpha, \tau_\alpha)$  è allora uno spazio topologico tale che ogni  $\varphi_\alpha$  è un omeomorfismo (infatti ogni  $\varphi_\alpha$  è aperta per costruzione, e biiezioni aperte —o chiuse— sono omeomorfismi).

In generale se  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  e  $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow V_\beta$ , su  $U_\alpha \cap U_\beta$  vengono indotte due topologie diverse. In questo caso non si può fare nulla.

Se però la topologia indotta da  $\varphi_\alpha$  su  $U_\alpha \cap U_\beta$  è la stessa di quella indotta da  $\varphi_\beta$ , e (fatto indispensabile) se  $U_\alpha \cap U_\beta$  è aperto sia in  $U_\alpha$  che in  $U_\beta$ , esse si possono incollare in un'unica topologia su  $U_\alpha \cap U_\beta$ . Se poi questo accade per ogni coppia di carte  $\varphi_1, \varphi_2$ , le si possono incollare tutte, definendo su  $X$  una topologia:

$$\tau_X = \{V \subseteq X \text{ è aperto} \iff V \cap U_\alpha \text{ è aperto in } U_\alpha \text{ per ogni } \alpha \in A\}$$

**Esempio 1.3** (Spazi Proiettivi Complessi). Definiamo su  $\mathbf{C}^{n+1}$  la relazione

$$x \sim y \iff x = \lambda y \text{ per qualche } \lambda \in \mathbf{C}^\times$$

Il quoziente per questa relazione si dice spazio proiettivo complesso di dimensione  $n$ , e coincide con l'insieme delle rette per l'origine di  $\mathbf{C}^{n+1}$ . Il rappresentante di  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$  si indica con  $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ . Esiste allora una ovvia proiezione sul quoziente  $\pi: (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$ .

Lo spazio  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  si chiama retta proiettiva complessa. Mostriamo che  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  è una superficie di Riemann compatta.

Definiamo

$$\begin{aligned} U'_1 &= \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{[0 : 1]\}, & \varphi_1: U'_1 &\rightarrow \mathbf{C}: [x_0 : x_1] \mapsto x_1/x_0 \\ U'_2 &= \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{[1 : 0]\}, & \varphi_2: U'_2 &\rightarrow \mathbf{C}: [x_0 : x_1] \mapsto x_0/x_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Chiaramente  $U'_1 \cup U'_2 = \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  e  $\varphi_1, \varphi_2$  sono biiezioni ben definite (= indipendenti dai rappresentanti). Trasportiamo la topologia di  $\mathbf{C}$  su  $U'_1, U'_2$ :

$$U \subseteq U'_i \text{ è aperto} \iff \varphi_i(U) \subseteq \mathbf{C} \text{ è aperto.} \quad (1.5)$$

le due topologie così determinate coincidono in  $U'_1 \cap U'_2$ , dato che

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(V)) = \varphi_2(V) \implies (\varphi_1(V) \text{ aperto} \implies \varphi_2(V) \text{ aperto})$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(V)) = \varphi_1(V) \implies (\varphi_2(V) \text{ aperto} \implies \varphi_1(V) \text{ aperto})$$

in virtù del fatto che le composizioni  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  e  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  sono due biolomorfismi di  $\mathbf{C}^\times$  in sé, coincidenti e uno l'inverso dell'altro.

**Proposizione 1.1.** Dotata della topologia conseguente dalla definizione in 1.5, la retta proiettiva complessa è uno spazio di Hausdorff compatto.

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima che se  $p_1 \neq p_2$ , nessuno dei due stia in  $U'_1 \cap U'_2$ : allora per iniettività  $\varphi_1(p_1) \neq \varphi_1(p_2)$ , e queste immagini hanno due intorni disgiunti  $V_1, V_2$  in  $\mathbf{C}$ : se definiamo  $W_i = \varphi_i^{-1}(V_i)$ ,  $W_i$  è un intorno di  $p_i$  che non contiene l'altro punto. Supponiamo ora  $\{p_1, p_2\} = \{[0 : 1], [1 : 0]\}$ , e poniamo per esempio  $p_1 = [0 : 1]$  e  $p_2 = [1 : 0]$ . Allora  $p_2 \in U'_1$  con  $\varphi_1(p_2) = 0$ , e  $p_1 \in U'_2$  con  $\varphi_2(p_1) = 0$ . Definiamo  $W_i = \{q \in U'_i \mid |\varphi_i(q)| < 1\}$ :  $W_i$  è un aperto (controimmagine del disco unitario  $D(0, 1[$  mediante  $\varphi_i$ ) contenente  $p_2$  per  $i = 1$  e  $p_1$  per  $i = 2$ .  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ : se  $p \in W_1$ ,  $|\varphi_2(p)| = \frac{1}{|\varphi_1(p)|} > 1$  e allora  $p \notin W_2$ .

Se infine indichiamo con  $\overline{D(0,1]} = D(0,1]$  il disco unitario chiuso in  $\mathbf{C}$ , si nota che

$$\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) = \varphi_1^{-1}(D(0,1]) \cup \varphi_2^{-1}(D(0,1]) \quad (1.6)$$

Infatti se  $P = [x_0 : x_1]$  ci sono tre casi possibili: se  $|x_0| < |x_1|$  allora  $P \in \varphi_2^{-1}(D(0,1])$ . Se invece  $|x_1| < |x_0|$ , allora  $P \in \varphi_1^{-1}(D(0,1])$ , e se infine  $|x_0| = |x_1|$ ,  $P = [1 : 1]$  che sta in entrambi gli insiemi. Dunque  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  risulta da un'unione finita di immagini di compatti mediante omeomorfismi (che sono funzioni proprie con le loro inverse).  $\square$

*Accettiamo il fatto che  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  è uno spazio topologico a base numerabile, e otteniamo come  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  diventa una superficie di Riemann compatta identificabile con  $\widehat{\mathbf{C}}$ , compattificazione di Alexandrov della retta complessa (con un punto). Detto in altre parole:  $\varphi_1: U'_1 \rightarrow \mathbf{C}$  si estende ad una biiezione di insiemi  $\widehat{\varphi}_1: \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$  che diventa un omeomorfismo una volta data a  $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  la topologia di Alexandrov.*

## 1.2 Esempi di Superfici di Riemann.

### 1.2.1 Tori Complessi.

Scegliamo due numeri complessi  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ , linearmente indipendenti su  $\mathbf{R}$ . Definiamo poi  $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ . Questo insieme è un sottogruppo del gruppo additivo di  $\mathbf{C}$ , e coincide con il gruppo abeliano libero generato dai due  $\omega_1, \omega_2$ . Come sottospazio topologico esso ha la topologia discreta, e prende il nome di *reticolo* (se serve specificare,  $\Lambda$ -reticolo).

Consideriamo il quoziente  $\mathbb{T} = \mathbf{C}/\Lambda$  e la proiezione canonica su tale quoziente,  $\pi: z \mapsto z + \Lambda$ . Tale quoziente si chiama *toro complesso* sul reticolo  $\Lambda$ . Dotiamo  $\mathbb{T}$  della topologia quoziente rispetto a  $\pi$ :

$$U \subseteq \mathbb{T} \text{ è aperto} \iff \pi^{-1}(U) \text{ è aperto in } \mathbf{C}$$

**Lemma 1.2:** La proiezione  $\pi$  è continua per costruzione, e omeomorfismo locale (e solo locale, perché  $\pi$  non è iniettiva). Infine  $\mathbb{T}$  è compatto.

*Dimostrazione.* Preso  $V$  aperto di  $\mathbf{C}$ ,  $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Lambda} (V + \omega)$ . Ma allora  $\pi^{-1}(\pi(V))$  è una unione numerabile di (traslati di) aperti di  $\mathbf{C}$ : da ciò segue che (per la definizione di topologia quoziente)  $\pi(V)$  è aperto.

Dobbiamo ora trovare, dato  $z_0 \in \mathbf{C}$ , un intorno  $V_{z_0}$  ristretta  $\pi$  al quale quest'ultima sia iniettiva. Definiamo  $P = \{z \in \mathbf{C} \mid z = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2, 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\}$ :  $P$  è il parallelogramma pieno di lati  $\omega_1, \omega_2$ . Mostriamo ora che, se  $\dot{P}$  indica l'interno di  $P$ ,  $\pi|_{\dot{P}}$  è iniettiva: sia  $\pi(z_1) = \pi(z_2)$  per  $z_1, z_2 \in \dot{P}$ . Allora  $z_1 - z_2 = \gamma \in \Lambda$ . Ma da

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \\ z_2 &= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 \\ \gamma &= n\omega_1 + m\omega_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

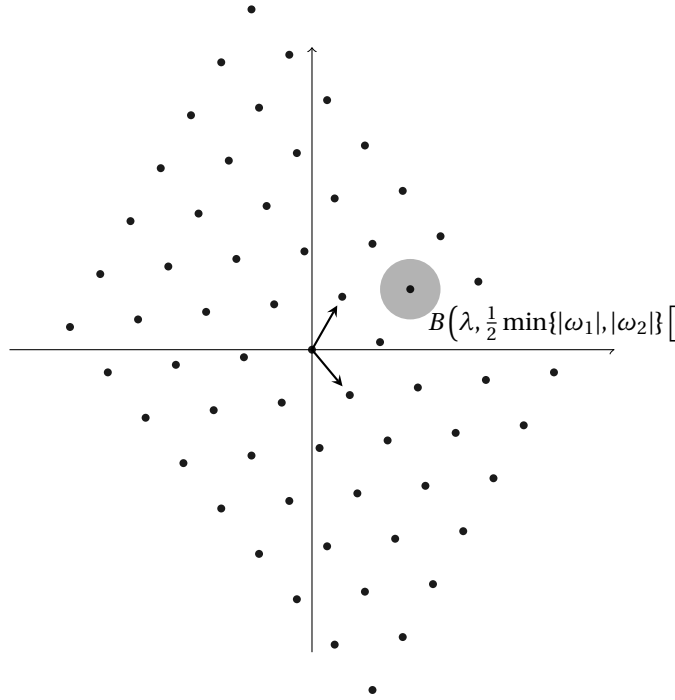
discende che  $(\alpha_1 - \alpha_2 - n)\omega_1 + (\beta_1 - \beta_2 - m)\omega_2 = 0$ , contro l'ipotesi di indipendenza.  $\square$

Se  $u \in \mathring{P}$ , consideriamo  $V_{z_0} = \mathring{P} + (z_0 - u)$ . Abbiamo che

- $z_0 \in V_{z_0}$ : se  $u = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$  infatti, si ha che per gli stessi  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $z_0 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + (z_0 - u)$ .
- $\pi(V_{z_0} = U_{z_0})$  è *aperto nel toro*: si applica la definizione di topologia quoziente su  $\mathbb{T}$ .
- $\pi_{V_{z_0}}^{U_{z_0}}: V_{z_0} \rightarrow U_{z_0}$  è un *omeomorfismo*: infatti  $\pi$  così ristretta e coristretta è continua, aperta e biiettiva.

Dato che l'azione libera e propria di un gruppo discreto su uno spazio topologico di Hausdorff induce un quoziente di Hausdorff, il toro complesso è uno spazio  $T2$ . Inoltre è connesso e a base numerabile: usando le carte definite da  $\{\pi|_{V_z}^{-1}: U_z \rightarrow V_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ , siamo pronti a definire su  $\mathbb{T}$  una struttura di superficie di Riemann.

Dette (per brevità)  $(U_z, \varphi_z, V_z)$  tali carte, proviamone la compatibilità: siano  $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ ,  $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$  tali che  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Si ha  $t = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2): z \mapsto \varphi_2(\pi|_{V_2}^{-1})^{-1}(z) = \varphi_2(\pi(z))$ . Ora è facile osservare che  $\pi(t(z)) = \pi(z)$ , dunque  $t(z) - z = f(z)$  e  $f(\mathbb{C}) \subseteq \Lambda$ . Ma la funzione così determinata è continua, quindi deve essere costante (sulla componente connessa di  $U_1 \cap U_2$  che contiene  $\varphi_1^{-1}(z)$ ) in  $\Lambda$ , che è discreto. Di tali componenti connesse se ne può considerare una alla volta, dato che chiaramente due diverse componenti connesse sono disgiunte e la condizione di compatibilità si banalizza.



**Figura 2:** Sottogruppo discreto di  $\mathbb{C}$ : scelti due numeri complessi  $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti il sottogruppo  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  è privo di punti di accumulazione.

## 1.2.2 Grafici di Funzioni Polinomiali (Oloromorfe).

Sia  $U \subseteq \mathbf{C}$  un aperto connesso,  $\mathcal{O}(U)$  l'insieme delle funzioni olomorfe su  $U$  e  $g \in \mathcal{O}(U)$ . Definiamo

$$\Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in U\} \quad (1.8)$$

(grafico di  $g$ ).

$\Gamma_g$  ha una struttura complessa che la rende una superficie di Riemann. Definiamo  $\text{pr}_1: \Gamma_g \rightarrow U: (x, y) \mapsto x$ . Essa è olomorfa ed è l'inversa di  $\psi: U \rightarrow \Gamma_g: x \mapsto (x, g(x))$ . Allora  $\mathfrak{A}_{\Gamma_g} = \{(\Gamma_g, U, \text{pr}_1)\}$  (fatto di una carta sola) è un atlante di  $\Gamma_g$ .

Vorremmo ora applicare questo risultato allo studio di curve algebriche affini nel piano complesso  $\mathbf{C}^2$ : vedremo infatti che una curva affine "regolare" a sufficienza è una superficie di Riemann e le sue carte consistono di grafici di funzioni olomorfe.

Sia dunque  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$  un polinomio non costante (in particolare non costantemente nullo), e

$$\mathcal{C}_f = \{(X, Y) \in \mathbf{C}^2 \mid f(X, Y) = 0\} \quad (1.9)$$

(luogo degli zeri di  $f$ ).

È nota la definizione di *punto singolare* della curva definita dal polinomio  $(X, Y)$ . Tale curva si dice *non singolare* o *liscia* se non ha punti singolari. Altrettanto nota è la definizione di curva *irriducibile*. Vale il

**Teorema 1.1 :** Una curva liscia e irriducibile ha una struttura di superficie di Riemann (non compatta).

*Dimostrazione.* Il teorema del Dini assicura che se  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_f$  è tale che  $\frac{\partial f}{\partial Y}|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ , esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  in  $\mathbf{C}$ , un intorno  $W$  di  $(x_0, y_0)$  in  $\mathbf{C}^2$ , e una funzione  $g: U \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa, tali che  $\mathcal{C}_f \cap W = \Gamma_g$  (e un risultato analogo, cambiato ciò che va cambiato, vale se è  $\frac{\partial f}{\partial X}$  a non annullarsi in  $(x_0, y_0)$ ).

Dato che  $\mathcal{C}_f$  è liscia, otteniamo dunque  $X \in V_X \subseteq \mathbf{C}$ ,  $(X, Y) \in W_{XY} \subseteq \mathbf{C}^2$  e  $g \in \mathcal{O}(V_X)$  tale che  $\mathcal{C}_f \cap W = \Gamma_g$ .

$\Gamma_g$  è una superficie di Riemann con carta la proiezione sulla prima componente: allora

$$\{(\mathcal{C}_f \cap W_{XY}, V_X, \text{pr}_1)\}_{X \in U}$$

è una carta locale di  $\mathcal{C}_f$  attorno al punto  $(X, Y)$ . Tutto quanto si ripete analogamente se si esplicita  $X = h(Y)$ .

Le carte così determinate sono tra loro compatibili: prese due di queste,  $(U, V, \text{pr})$  e  $(U', V', \text{pr}')$ , tali che  $U \cap U' \neq \emptyset$  si hanno tre casi

1. Si è esplicitata in entrambi i casi  $Y = g(X)$ : allora  $\text{pr}|_{U \cap U'} = \text{pr}'|_{U \cap U'}$  la funzione di transizione è

$$\text{pr}' \circ \text{pr}^{-1}: \text{pr}(U \cap U') \rightarrow \text{pr}'(U \cap U'): x \mapsto \text{id}|_{V \cap V'}(x) = x$$

2. Se è esplicitata in entrambi i casi  $X = h(Y)$ . Con un ragionamento identico  $\text{pr}' \circ \text{pr}^{-1} = \text{id}|_{V \cap V'}$ .
3. Si esprime  $Y = g(X)$  in  $U$  e  $X = h(Y)$  in  $U'$ . In questo caso  $\text{pr}' \circ \text{pr}^{-1}(X) = g(X)$  e  $\text{pr}' \circ \text{pr}^{-1}(Y) = h(Y)$ : queste sono due mappe olomorfe, una inversa dell'altra.



Si conclude, osservando che  $\mathcal{C}_f$  è un chiuso di  $\mathbf{C}^2$ , a base numerabile e connesso (perché  $f$  è irriducibile: lo accettiamo).  $\square$

### 1.2.3 Curve Proiettive.

In 1.3 abbiamo definito  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^3 \setminus \{0\}) / \sim$ : tale insieme ha una struttura di spazio topologico ottenuta incollando tre copie di  $\mathbf{C}^2$  (identificato ad  $\mathbb{A}^2(\mathbf{C})$ ) mediante le carte  $\{(U_i, \mathbf{C}, \varphi_i)\}_{i=0,1,2}$

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_i \neq 0\} \quad \text{per } i = 0, 1, 2$$

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbf{C}: [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \frac{x_2}{x_i} \right) \quad (1.10)$$

Le  $\varphi_i$  sono ben definite e biettive. Poniamo su  $U_i$  la topologia che rende  $\varphi_i$  un omeomorfismo: analogamente al caso di  $\mathbb{P}_1(\mathbf{C})$  si mostra che le topologie così definite da  $\varphi_i, \varphi_j$  sono le stesse su  $U_i \cap U_j$  e che quindi  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  ammette una topologia definita da

$$U \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) \in \tau_{\mathbb{P}^2(\mathbf{C})} \iff U \cap U_i \in \tau_{U_i} \iff \varphi_i(U \cap U_i) \in \tau_{\mathbf{C}^2}$$

Se ora definiamo  $K = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  (*polidisco unitario in  $\mathbf{C}^2$* ), notiamo che  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C}) = \varphi_0^{-1}(K) \cup \varphi_1^{-1}(K) \cup \varphi_2^{-1}(K)$ : dunque  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  è compatto (unione di compatti).

Osserviamo ora che le curve algebriche proiettive (definite cioè da polinomi omogenei di grado  $\geq 1$  nelle variabili  $X_0, X_1, X_2$ ) sono delle superfici di Riemann compatte. Per mostrarlo ricordiamo le principali proprietà dei polinomi omogenei:

1. Se  $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]^h$ , per ogni  $\lambda \in \mathbf{C}^\times$  si ha  $F(\lambda X_0, \lambda X_1, \lambda X_2) = \lambda^{\deg F} F(X_0, X_1, X_2)$ , dunque la valutazione di  $F$  in un punto qualunque perde di senso proiettivo, mentre continua ad averne il fatto che  $F$  si annulli o meno (se  $\lambda \neq 0$ ,  $F(\lambda \underline{X})$  e  $F(\underline{X})$  si annullano negli stessi  $\lambda$ ).
2. Per ogni polinomio  $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]^h$  vale la formula di Eulero:  $(\deg F) F(X_0, X_1, X_2) = \sum_{i=0}^2 X_i \frac{\partial F(\underline{X})}{\partial X_i}$ .

Definiamo ora l'insieme  $\mathcal{C}_F = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) \mid F(X_0, X_1, X_2) = 0\}$  (*curva algebrica proiettiva* associata a  $F \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]^h$ ). Consideriamo ora  $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_F \cap U_i$ : ognuno di questi insiemi è lo "scheletro affine" della curva  $\mathcal{C}_F$ . Se ad essi ora applichiamo  $\varphi_i$  abbiamo (qui per  $\varphi_0$ )

$$\varphi_0(\mathcal{C}_F \cap U_0) = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{C}^2 \mid F(1, y_1, y_2) = 0\} = \mathcal{C}_{\tilde{F}_0}$$

$\varphi_i(\mathcal{C}_F \cap U_i)$  si dice allora *curva affine indotta* da  $F$  su  $U_i$ .

**Teorema 1.2 :** Se  $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]^h$  è irriducibile e non costante, e la curva proiettiva indotta  $\mathcal{C}_F$  è liscia, allora tale curva ha una struttura di superficie di Riemann.

Premettiamo alcuni lemmi (la cui dimostrazione è lasciata per esercizio):

- $\mathcal{C}_F$  è liscia  $\iff \varphi_i(\mathcal{C}_i)$  è una curva affine liscia;
- $F$  è irriducibile  $\iff F_0, F_1, F_2$  sono irriducibili come polinomi di due variabili  $((X, Y), (Z, Y)$  e  $(X, Z))$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo anzitutto che la topologia di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  induce su  $\mathcal{C}_F$  una topologia che lo rende uno spazio di Hausdorff compatto (perché sottospazio di un compatto) e a base numerabile. In più è connesso perché  $F$  è irriducibile. Non si può dedurre la chiusura di  $\mathcal{C}_F$  affermando che essa risulta da  $F^{\leftarrow}(\{0\})$ , dato che la “valutazione” di  $F$  in un punto non ha più un senso proiettivo. Osserviamo però anche che, nelle stesse notazioni di prima,  $\mathcal{C}_F = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , e ogni  $\mathcal{C}_i$  è chiuso in  $U_i$ . Allora, osservando che  $\varphi_i(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_{F_i}$  è chiuso si ottiene  $\mathcal{C}_F$  come unione di chiusi.

Se  $\mathcal{C}_F$  è liscia e irriducibile, ogni  $\mathcal{C}_{F_i}$  è irriducibile: ogni  $\mathcal{C}_{F_i}$  è allora una superficie di Riemann, dato che se  $p \in \mathcal{C}_F$ ,  $\varphi_i(p) \in \mathcal{C}_{F_i}$ , per qualche  $i$ , ed esiste una carta  $(U \in \tau_{\mathcal{C}_{F_i}}, V \in \tau_{\mathbb{C}}, \psi: U \rightarrow V)$  attorno a  $\varphi_i(p)$ . Per  $\mathcal{C}_F$  basta allora prendere le carte  $\{\varphi_i^{-1}(U), V, \psi \circ \varphi_i\}_{p \in \mathcal{C}_F}$ . Tali carte sono compatibili: se (per esempio)  $p \in U_0 \cap U_1 \cap \mathcal{C}_F = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1$ ,  $p = [x_0 : x_1 : x_2]$  con  $x_0 \neq 0 \neq x_1$  e  $\varphi_0(p) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \in \varphi_0(\mathcal{C}_0)$ . Supponiamo ora che esistano  $(W_0, V_0, \varphi_0)$  tali che  $V_0 \subseteq \mathbb{C}$ ,  $U_0 \subseteq \mathcal{C}_{f_0}$  e  $g \in \mathcal{O}(V_0)$ , di cui  $W_0$  è localmente il grafico (quindi si esprime  $Y = g(X)$ ). Allora  $W_0 = \Gamma_g \xrightarrow{\sim} V_0 \subseteq \mathbb{C}$  mediante  $\psi$ . Possiamo considerare anche aperti  $V_1 \subseteq \mathbb{C}$ ,  $W_1 \subseteq \mathcal{C}_{F_1}$  e una funzione olomorfa  $h \in \mathcal{O}(V_1)$  di cui  $W_1$  è localmente il grafico. Allora esiste  $\eta: W_1 = \Gamma_h \xrightarrow{\sim} V_1$ .

Consideriamo ora  $\eta \circ \psi^{-1}: \psi(W_0 \cap W_1) \rightarrow \eta(W_0 \cap W_1): x \mapsto \eta(\varphi_1([1 : x : g(x)])) = \eta\left(\frac{1}{x}, \frac{g(x)}{x}\right) = \frac{g(x)}{x}$ . Alla condizione  $x \neq 0$ , qui soddisfatta,  $\eta \circ \psi^{-1}$  è olomorfa perché lo è  $g$ . La sua inversa è  $\psi \circ \eta^{-1}: y \mapsto [h(y) : 1 : y] \mapsto \left(\frac{1}{h(y)}, \frac{y}{h(y)}\right) \mapsto \frac{1}{h(y)}$ .  $\square$

## FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE SU SDR

**Nota e Notazioni.** Si danno per note le proprietà e le definizioni di base dell'analisi complessa (funzioni olomorfe e loro proprietà, esistenza di sviluppi in serie di Laurent attorno a singolarità isolate, teoremi classici — residui, mappa aperta, massimo e minimo modulo, principio di identità... —). Nel seguito, indicheremo con  $D(z_0, r[$  il disco aperto di centro  $z_0$  e raggio  $r > 0$ , con  $D^\times(z_0, r[$  lo stesso disco, privato del centro, e con  $D(z_0, ]r, R[$  la corona circolare di centro  $z_0$  e raggi  $0 < r < R$ .

Se  $U \subseteq \mathbb{C}$  è aperto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa su  $U$  privato di un insieme discreto di punti, in ognuno dei quali  $f$  ha una singolarità polare, per ognuno di tali punti  $z_i$  esiste  $r_i > 0$  sufficientemente piccolo tale che  $f: D^\times(z_i, r_i[ \rightarrow \mathbb{C}$  sia olomorfa. Così ristretta,  $f$  converge uniformemente in  $D^\times(z_i, r_i[$ , e in ogni  $D(z_0, ]r, R[$  con  $0 < r < R < r_i$  alla serie bilatera (*serie di Laurent*)

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_i)^n \quad (2.1)$$

Diciamo *meromorfa* una tale funzione, olomorfa su  $U$  meno un insieme discreto di singolarità polari, e indichiamo con  $\mathcal{M}(U)$  l'insieme delle funzioni meromorfe su  $U$ . La scrittura su esposta permette di caratterizzare le singolarità isolate di una  $f \in \mathcal{M}(U)$  (cfr. anche la Proposizione 2.1).

**Definizione 2.1** [FUNZIONE OLOMORFA]: Sia  $X$  una superficie di Riemann,  $W \subseteq X$  aperto, e  $p \in W$ . Una funzione continua  $f: W \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *olomorfa* in  $p$  se esiste una carta  $(U, V, \varphi)$  di  $X$  attorno a  $p$ , tale che  $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap W) \rightarrow \mathbb{C}$  sia olomorfa in  $\varphi(p)$ . Una  $f: W \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *olomorfa in  $W$*  se lo è in ogni punto di  $W$ . In tal caso scriviamo  $f \in \mathcal{O}(W)$ .

**Lemma 2.1**: Sia  $X$  una superficie di Riemann,  $p \in W \subseteq X$  aperto.

1.  $f$  è olomorfa in  $p$  se e solo se per ogni carta  $(U, V, \varphi)$  di  $X$  tale che  $p \in U$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  è olomorfa in  $\varphi(p)$ ;
2.  $f$  è olomorfa in  $W$  se e solo se esiste una famiglia di carte  $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tale che  $W \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  e  $f \circ \varphi_i^{-1}$  è olomorfa su  $\varphi_i(U_i \cap W \subseteq V_i \subseteq \mathbb{C}$  per ogni  $i \in I$ .

Inoltre, se  $f: W \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa in  $p \in W$ , allora esiste un intorno  $W'$  di  $p$  in  $W$  tale che  $f \in \mathcal{O}(W')$ .

*Dimostrazione.* 1. Prese due carte in  $p$ ,  $(U_1, V_1, \varphi_1)$  e  $(U_2, V_2, \varphi_2)$ , notiamo che  $f \circ \varphi_1^{-1} = (f \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$  e  $f \circ \varphi_2^{-1} = (f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ . Dunque  $f \circ \varphi_1^{-1}$  è olomorfa se e solo se  $f \circ \varphi_2^{-1}$  è olomorfa.

2. Se una tale famiglia esiste, dato  $p \in W$  esso sta in  $U_i$  per qualche  $i \in I$ , ed esiste  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$  tale che  $f \circ \varphi_i^{-1}$  è olomorfa in  $\varphi_i(W \cap U_i)$ , dunque  $f$  è olomorfa in  $p$ , e  $f \in \mathcal{O}(W)$ .

Viceversa, se  $f$  è olomorfa in ogni punto di  $W$ ,  $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in W}$  è una famiglia di carte con le proprietà richieste.

L'ultima affermazione discende da una analoga proprietà per aperti di  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Esempio 2.1.** (1) Data una superficie di Riemann  $\mathcal{X}$  e una sua carta  $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ , essa è olomorfa (data un'altra carta  $\psi: U' \rightarrow V' \subseteq \mathbb{C}$  la composizione  $\varphi \circ \psi^{-1}$  è un biolomorfismo). (2) Somme, differenze e prodotti puntuali di funzioni olomorfe sono olomorfe.

Con tali operazioni, fissato un aperto  $W \subseteq \mathcal{X}$ , l'insieme  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W)$  delle funzioni olomorfe  $f: W \rightarrow \mathbb{C}$  su  $\mathcal{X}$  diventa un anello commutativo unitario (in realtà una  $\mathbb{C}$ -algebra). La corrispondenza  $W \mapsto \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W)$ , definisce un fascio di anelli (identificando  $\mathcal{X}$  con la categoria  $\text{Ouv}_{\mathcal{X}}$  dei suoi aperti: le restrizioni sono date da  $\rho_W^{W'}: \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W'): f \mapsto f|_{W'}$ , per ogni  $W' \subseteq W \in \tau_{\mathcal{X}}$ ).

Ricordiamo il

**Teorema 2.1** [MASSIMO E MINIMO MODULO]: Supponiamo  $K \Subset \mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{O}(\tilde{K})$ . La funzione  $z \mapsto |f(z)|$  è continua, quindi ammette massimo e minimo assoluti: se  $z_M = \max_{z \in K} |f(z)|$  e  $z_m = \min_{z \in K} |f(z)|$ , deve essere  $z_M, z_m \in \partial K$ .

**Osservazione.** Se  $U \subseteq \mathbb{C}$  è aperto e  $f \in \mathcal{O}(U)$  non è costante,  $z \mapsto |f(z)|$  non ha massimo in  $U$ .

Altra conseguenza è che se  $\mathcal{X}$  è uno spazio compatto, ed  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)$ , allora  $f$  è costante (sull'unica componente connessa di  $\mathcal{X}$ ).

Da questo si deduce il

**Teorema 2.2:** Se  $\mathcal{X}$  è una superficie di Riemann compatta, si ha l'isomorfismo di  $\mathbb{C}$ -algebre  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \cong \mathbb{C}$ .

**Proposizione 2.1.** Sia  $\mathcal{X}$  una superficie di Riemann,  $p \in W \subseteq \mathcal{X}$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(W \setminus \{p\})$ . Presa una carta  $(U, V, \varphi)$  e notato  $z_0 = \varphi(p) \in V$  esiste un  $r > 0$  tale che  $D(z_0, r) \subseteq \varphi(U \cap W) \subseteq V \subseteq \mathbb{C}$  e per ogni  $z \in D^\times(z_0, r)$  esiste per  $f$  uno sviluppo in serie di Laurent analogo a quello in 2.1:

$$(f \circ \varphi^{-1})(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad (2.2)$$

**Osservazione.** L'ordine della singolarità  $z_0$  per  $f$  non dipende dalla carta scelta. Più prolissamente, sia  $N = \text{ord}_{z_0}(f \circ \varphi^{-1})$ . Allora se  $(U', V', \psi)$  è un'altra carta di  $\mathcal{X}$  attorno a  $p$ ,  $\text{ord}_{z_0}(f \circ \psi^{-1}) = N$ .

È allora ben definito  $\text{ord}_p f = N$ .

Vi sono vari casi:

- $N \geq 0$ : la singolarità  $z_0$  si dice *eliminabile*. Più in particolare, se  $N > 0$  la singolarità è uno zero di ordine  $N$  per  $f$ :  $N$  è il più piccolo intero tale che il limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \circ \psi^{-1})(z) / (z - z_0)^N$  (per qualunque carta  $\psi: U \rightarrow V$  di  $f$ ) esista finito e non nullo. Se  $p$  è uno zero di ordine  $N$  per  $f$ , ed  $f$  è olomorfa e non costantemente nulla nel suo dominio, l'insieme  $Z(f)$

degli zeri di  $f$  è chiuso (perché controimmagine di un chiuso attraverso una funzione continua) e discreto (per il teorema di identità delle funzioni ologomorfe, se  $f \not\equiv 0$ ,  $Z(f)$  non può avere punti di accumulazione).

- $N < 0$ : la funzione  $f$  ha in  $p$  un *polo* di ordine  $-N$ : esiste allora un ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $W$  fatto di aperti connessi, tali che per ogni  $U_i$  esistono  $h_i, k_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$  ologomorfe, con  $k_i \not\equiv 0$  in  $U_i$  (e dunque con  $Z(k_i)$  discreto), tali che  $f(z) = h_i(z)/k_i(z)$  per ogni  $z \in U_i \setminus Z(k_i)$ . I poli di  $f$  sono esattamente gli zeri di  $g$ : se in più  $\mathcal{X}$  è una superficie di Riemann compatta, tali zeri sono in numero finito (ogni sottoinsieme discreto di un compatto è finito).

Se  $\mathcal{X}$  è una superficie di Riemann e  $W \subseteq \mathcal{X}$  è aperto, denotiamo con  $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}(W)$  l'insieme delle funzioni meromorfe su  $W$ .  $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}(W)$  è un campo (in generale non è il campo dei quozienti di  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W)$ ) e caratterizza  $\mathcal{X}$  a meno di biologomorfismo (nel senso che due superfici  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  tali che  $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \cong \mathcal{M}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y})$  sono isomorfe).

**Teorema 2.3:** Esiste un isomorfismo di  $\mathbb{C}$ -algebre  $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}(X)$ .

*Dimostrazione.* Definiamo il morfismo di *valutazione*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{C}(X) &\rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \\ r(X) = \frac{f(X)}{g(X)} &\mapsto \Phi(r) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\Phi(r)(p)$  essendo definito mediante la carta  $\varphi_0$ , su  $U_0 \setminus Z(g)$ , da  $[1 : z] = \varphi_0^{-1}(p) \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ .  $\Phi(r)$  è una funzione ologomorfa dove definita, e ha un insieme non vuoto e finito di singolarità polari, in numero pari a  $\deg g$ .

Per studiare il comportamento di  $\Phi(r)$  attorno a  $[0 : 1]$  va usata l'altra carta  $\varphi_1^{-1}$ :

$$\Phi(r)(\varphi_1^{-1}(t)) = \Phi(r)([t : 1]) = \Phi(r)([1 : 1/t]) = \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}$$

Per provare che così definita  $\Phi(r)$  è meromorfa, scriviamo (se  $m = \deg f$  e  $n = \deg g$ )

$$\frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i X^{m-i}}{\sum_{i=0}^n b_i X^{n-i}}, \quad \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = t^{n-m} \frac{\sum_{i=0}^m a_i t^i}{\sum_{i=0}^n b_i t^i}$$

e studiamo il comportamento di  $f/g$  attorno a  $\infty_{\mathbb{C}}$  studiando equivalentemente il comportamento di  $f(1/t)/g(1/t)$  attorno a 0. Possono verificarsi tre casi:

1. Se  $n > m$ ,  $\Phi(r)([t : 1])$  è ologomorfa in  $[0 : 1]$  e ha uno zero di ordine  $n - m$ ;
2. Se  $n = m$ ,  $\Phi(r)([t : 1])$  è ologomorfa e non nulla in  $[0 : 1]$ ;
3. Se  $n < m$ ,  $\Phi(r)([t : 1])$  ha un polo di ordine  $n - m$  in  $[0 : 1]$ .

In tutti e tre i casi, la funzione  $\Phi(r) : [1 : z] \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$  è meromorfa su  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Negli zeri di  $g$  (e solo in quei punti) ha poli di ordine  $\text{ord}_{z_i} g$  (si può ovviamente

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\Phi(r)} & \mathbb{C} \\ \varphi_0 \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$

supporre che  $\gcd(f, g) = 1$ . In altre parole,  $\Phi(r)$ , definita su  $U_0$  attraverso la carta  $(U_0, \mathbf{C}, \varphi_0)$ , si estende ad una  $\overline{\Phi(r)} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ .

È immediato notare che  $\Phi: \mathbf{C}(X) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  è un morfismo di anelli, e che essendo tali anelli dei campi, detto morfismo è iniettivo ( $\ker \Phi$  deve essere un ideale di  $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ ).

La suriettività si prova costruttivamente: se  $f$  è meromorfa su  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , sia  $J = (Z(f) \cup P(f)) \cap U_0$ ,  $P(f)$  indicando l'insieme dei poli di  $f$ :  $J$  è un insieme finito. Se poi indichiamo  $e_i = \text{ord}_{z_i} f$  per ogni  $z_i = [a_{0i} : a_{1i}] \in J$ , consideriamo la funzione razionale

$$g(X) = \prod_{i=1}^n \left( X - \frac{a_{1i}}{a_{0i}} \right)^{e_i} \quad (2.4)$$

(ha senso perché  $a_{0i} \neq 0$  se  $z_i \in U_0$ ).

Ora,  $\Phi(g) \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  e si ha  $\text{ord}_{z_i} \Phi(g) = e_i$ : in  $U_0$   $\Phi(g)$  non ha nè altri zeri nè altri poli. Inoltre  $\frac{f}{\Phi(g)} \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  e  $\text{ord}_{z_i} \frac{f}{\Phi(g)} = e_i - e_i = 0$ , dunque  $\frac{f}{\Phi(g)} \neq 0$  in tutto  $U_0$ , e non ha poli. Allora è oloedorfa con la sua inversa (moltiplicativa)  $\frac{\Phi(g)}{f}$ .

Sia ora  $P = [0 : 1]$ ; si hanno tre casi distinti.

1. Se  $\text{ord}_P(f/\Phi(g)) = 0$ , allora  $\frac{f}{\Phi(g)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  e dunque è costante:  $f = \lambda \Phi(g) \iff \Phi(\lambda g) = g$ , dunque  $\Phi$  è suriettiva.
2. Se  $\text{ord}_P(f/\Phi(g)) > 0$ ,  $\frac{f}{\Phi(g)}$  è ancora oloedorfa su  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , con uno zero in  $P$ , dunque dovrebbe essere costantemente zero, e ciò è assurdo.
3. Se infine  $\text{ord}_P(f/\Phi(g)) < 0$ ,  $\text{ord}_P(\Phi(g)/f) > 0$ , dunque  $\Phi(g)/f \equiv 0 \Rightarrow \Phi(g) = 0 \Rightarrow g = 0$  per iniettività, assurdo.  $\square$

**Osservazione.** Sia  $r(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \in \mathbf{C}(X)$ ,  $m = \deg f$  e  $n = \deg g > 0$ . Supponiamo  $f(X) = a \prod (X - \alpha_i)^{e_i}$  e  $g(X) = b \prod (X - \beta_j)^{d_j}$ , scritti "fedelmente", ossia tali che  $e_i \neq e_k$ ,  $d_j \neq d_h$  se  $i \neq k$ ,  $j \neq h$  e che  $\sum e_i = m$ ,  $\sum d_j = n$ . Osserviamo che

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^1(\mathbf{C})} \text{ord}_P \Phi(r) = \sum_{i=1}^s \text{ord}_{[1:\alpha_i]} \Phi(r) + \sum_{j=1}^t \text{ord}_{[1:\beta_j]} \Phi(r) + \text{ord}_{[0:1]} \Phi(r)$$

dato che  $[1 : \alpha_1], \dots, [1 : \alpha_s]$  sono zeri e poli di  $\Phi(r)$  in  $U_0$  e  $[1 : \beta_1], \dots, [1 : \beta_t]$  zeri e poli di  $\Phi(r)$  in  $U_1$ .

Ciò considerato, notando che  $\text{ord}_{[1:\alpha_i]} \Phi(r) = e_i$ ,  $\text{ord}_{[1:\beta_j]} \Phi(r) = -d_j$  e  $\text{ord}_{[0:1]} \Phi(r) = n - m$ , si ha  $\sum_{P \in \mathbb{P}^1(\mathbf{C})} \text{ord}_P \Phi(r) = 0$ .

Abbiamo provato la

**Proposizione 2.2.** Se  $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^\times$ , allora  $\sum_{P \in \mathbb{P}^1(\mathbf{C})} \text{ord}_P f = 0$ .

*Divisori.*

Dato un insieme  $X = \{x_i\}_{i \in I}$  di generatori di un gruppo abeliano  $(G, +)$ , ogni elemento di  $G$  si scrive  $g = \sum_i n_i x_i$ , per un unico insieme finito di interi  $n_i$ ;

ogni  $g \in G$  è dunque univocamente determinato da questi interi, e si può identificare con una sequenza  $(n_i)_{i \in I} \in \mathbf{Z}^I$  quasi ovunque nulla. Dato un insieme non vuoto  $X$ , questo fatto suggerisce come definire il *gruppo libero su  $X$* , ponendo  $F(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}$ : ogni elemento di  $F(X)$  si scriverà allora come una somma formale  $\sum_{x \in X} a_x x$ , dove quasi tutti gli interi  $a_x$  sono nulli. La somma di elementi di  $F(X)$  è definita componente per componente.

**Definizione 2.2** [GRUPPO DEI DIVISORI]: Il *gruppo dei divisori* di una superficie di Riemann  $\mathcal{X}$  è il gruppo abeliano libero generato dall'insieme dei punti di  $\mathcal{X}$ . Si indica tale gruppo con  $\text{Div}(\mathcal{X})$ . Ogni elemento  $D \in \text{Div}(\mathcal{X})$  è allora una somma formale di punti di  $\mathcal{X}$ ,  $\sum_{P \in \mathcal{X}} n_P(P)$ .

Possiamo quindi definire un morfismo di gruppi  $\text{div}: \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Div}(\mathcal{X})$  che manda ogni  $f$  nel suo *divisore associato*  $\text{div } f = \sum_{P \in \mathcal{X}} (\text{ord}_P f) P$ .

Se  $f$  ha in  $P_1, \dots, P_s$  zeri di ordine  $e_1, \dots, e_s$  e in  $Q_1, \dots, Q_r$  poli di ordine  $d_1, \dots, d_r$ , allora  $\text{div } f = \sum_{i=1}^s e_i P_i - \sum_{j=1}^r d_j Q_j$ : essendo  $\text{ord}: \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{Z}$  un morfismo di gruppi,  $\text{div}$  lo è pure.

### Sequenze Esatte Corte.

La categoria dei gruppi possiede un oggetto zero, il gruppo identico, tale per cui per ogni  $G \in \text{Ob}_{\text{Grp}}$  esiste un'unica freccia  $G \rightarrow \text{id}$  (insiemisticamente, quella che manda ogni  $g \in G$  nell'unico elemento di  $\text{id}$ ) e un'unica freccia  $\text{id} \rightarrow G$  (insiemisticamente, quella che manda l'unico elemento di  $\text{id}$  in  $e_G$ , neutro per l'operazione di gruppo di  $G$ ).

Per ogni coppia di oggetti  $G, H \in \text{Ob}_{\text{Grp}}$  esiste allora una freccia  $G \rightarrow H$ , composizione delle due frecce  $G \rightarrow \text{id} \rightarrow H$  (detto in altre parole, nessun  $\text{Hom}(G, H)$  è vuoto). La freccia ottenuta come tale composizione si dice freccia zero tra  $G$  e  $H$ , e si scrive  $0_{GH}: G \rightarrow H$ . Se non c'è pericolo di confusione si omettono i pedici dallo zero.

Nella sottocategoria  $\text{Ab}$  di  $\text{Grp}$  si indica con  $0$  l'oggetto zero.

**Definizione 2.3** [SEQUENZA ESATTA DI GRUPPI (ABELIANI)]: Diciamo *sequenza* di gruppi abeliani una coppia  $\mathcal{S} = ((A_n)_{n \in \mathbf{Z}}, (f_n)_{n \in \mathbf{Z}})$  di gruppi abeliani e morfismi

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \longrightarrow \cdots \quad (2.5)$$

Tale che  $\ker f_n \supseteq \text{im } f_{n-1}$ . Una sequenza  $\mathcal{S}$  si dice *esatta* se per ogni  $n \in \mathbf{Z}$  si ha  $\ker f_n = \text{im } f_{n-1}$ .

Alcuni esempi:

- La sequenza  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$  è esatta se e solo se  $f: A \rightarrow B$  è iniettiva;
- La sequenza  $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  è esatta se e solo se  $g: B \rightarrow C$  è suriettiva;
- La sequenza  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  è esatta se e solo se  $f$  è iniettiva,  $g$  è suriettiva e  $\ker g = \text{im } f$ .

Se  $A \leq B$ , la sequenza  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$  è esatta. Ancora, la sequenza  $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$  è esatta.

Ora, se  $\mathcal{X}$  è una superficie di Riemann compatta, c'è una sequenza esatta di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^{\times} \cong \mathbf{C}^{\times} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^{\times} \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(\mathcal{X}) \quad (2.6)$$

ove con  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^{\times}$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^{\times}$  si indica il gruppo (moltiplicativo) degli invertibili di  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$  e la seconda freccia è un'inclusione (ogni olomorfa è meromorfa).

Per provare che  $\ker \text{div} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^{\times}$  basta ricordare che se  $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^{\times}$  e  $\text{div} f = 0$ , allora  $\text{ord}_P f = 0$  per ogni  $P$  in  $\mathcal{X}$ : ciò vuol dire che  $f \equiv \lambda \neq 0$ , dunque  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})^{\times} \cong \mathbf{C}^{\times}$ .

Nel caso particolare in cui  $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  la sequenza si allunga in

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{\times} \cong \mathbf{C}^{\times} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{\times} \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C})) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbf{Z} \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

e resta esatta, dato che  $\text{deg}$  è suriettiva e  $\ker \text{deg} = \text{im div}$ : se  $D$  è un divisore di grado 0,  $\sum_{P \in \mathbb{P}^1(\mathbf{C})} d_P = 0$ , esiste  $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{\times}$  tale che  $\text{div} f = D$ .

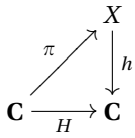
Infatti se  $D = d_1 P_1 + \dots + d_k P_k$  e  $P_i = [a_{0i} : a_{1i}]$ , basta definire  $f([X_0 : X_1]) = \prod_{i=1}^k (a_{1i} X_0 - a_{0i} X_1)^{d_i}$ , visibilmente meromorfa e tale che  $\text{div} f = D$ ,  $\text{deg div} f = 0$ .

L'esattezza di quella sequenza implica allora quella di

$$0 \rightarrow \mathbf{C}^{\times} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{\times} \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbf{C})) \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

L'isomorfismo che ne consegue,  $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{\times} / \mathbf{C}^{\times} \cong \text{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  indica che una funzione meromorfa non costantemente nulla su  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  è univocamente determinata dal suo divisore a meno della moltiplicazione per una costante complessa non nulla (in generale questo è falso: consegue dall'allungamento della sequenza 2.6 nella sequenza 2.7, che implica l'esattezza di 2.8).

## 2.1 Funzioni meromorfe su $\mathbb{T}_{\Lambda}$



Fissato un reticolo  $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 \leq \mathbf{C}$ , con  $\omega_1, \omega_2$  numeri complessi linearmente indipendenti su  $\mathbf{R}$ ,  $\mathcal{X} = \mathbf{C}/\Lambda$  è una superficie di Riemann compatta (cfr. il Lemma 1.2 e segg.) che si chiama *toro complesso*. Se  $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_{\Lambda}}(\mathbb{T}_{\Lambda})$ , il diagramma a lato commuta non appena definiamo  $H = h \circ \pi$ , chiamando  $\pi$  la proiezione naturale sul quoziente. È facile vedere che  $H$  è meromorfa su  $\mathbf{C}$  se e solo se  $h$  è meromorfa, e i poli di  $h$  sono le immagini mediante  $\pi$  dei poli di  $H$ . Osserviamo che

- $z$  è un polo o uno zero di  $h$  se e solo se per ogni  $\omega \in \Lambda$ ,  $z + \omega$  è un polo o uno zero di  $h$ ;
- Se  $z$  non è un polo di  $H$  e  $\omega \in \Lambda$ ,  $H(z + \omega) = h(\pi(z + \omega)) = h(\pi(z)) = H(z)$ : allora  $H$  è invariante per traslazione di elementi di  $\Lambda$ .

**Definizione 2.4** [FUNZIONE ELLITTICA]: Fissato un reticolo  $\Lambda$ , chiamiamo  $\Lambda$ -*ellittiche* tutte le funzioni dotate di queste due proprietà, e  $E(\Lambda)$  l'insieme di tutte le funzioni  $\Lambda$ -ellittiche.



Vogliamo mostrare la biiezione di insiemi

$$E(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda) \quad (2.9)$$

Si è già visto che per ogni  $h$  meromorfa,  $H = h \circ \pi$  definisce una funzione ellittica. Viceversa, sia  $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione  $\Lambda$ -ellittica, e  $P \in \mathbb{T}_\Lambda$  tale che  $P = \pi(z)$  per  $z \notin \mathcal{P}(H)$ : è facile vedere che  $h$  è ben definita perché  $H$  è ellittica. Se poi  $H$  è meromorfa su  $\mathbb{C}$ , essa è olomorfa a meno di un insieme discreto di punti di ordine finito: nell'immagine di tutti questi mediante  $\pi$ , la funzione  $h$  è olomorfa, dunque  $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$ .

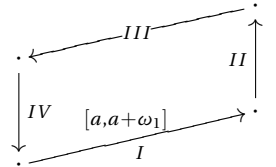
**Teorema 2.4:** Sia  $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$ , e  $\text{div } h = n_1(P_1) + \dots + n_k(P_k)$ . Si ha

1.  $\sum_{P \in \mathbb{T}_\Lambda} \text{Res}_P h = 0$ ;
2.  $\deg \text{div } h = 0 = \sum_s n_s(P_s)$ ;
3.  $n_1 P_1 + \dots + n_k P_k = 0$  come somma di punti sul toro.

**Osservazione.** In (1) la somma è finita, perché finito è l'insieme dei punti di  $\mathbb{T}_\Lambda$  tali che  $\text{Res}_P h \neq 0$ .

In (3) si sottintende quanto segue:  $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{C}/\Lambda$  è naturalmente dotato, in quanto gruppo quoziente di  $\mathbb{C}$ , di una operazione tra le classi che lo rende un gruppo: se  $P = z + \Lambda$ ,  $Q = w + \Lambda$ ,  $P + Q = (z + w) + \Lambda$ . Nel seguito chiamiamo *somma di punti sul toro* questa operazione.

*Dimostrazione.* (1) Se  $a \in \mathbb{C}$  definiamo  $\overline{P_a}$  il traslato mediante  $a$  del parallelogramma definito nel Lemma 1.2. Allora  $\pi|_{\overline{P_a}}: \overline{P_a} \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda$  è suriettiva: scegliamo  $a \in \mathbb{C}$  tale che esistano  $a_1, \dots, a_k \in \mathring{P_a}$  con  $\pi(a_i) = P_i$  polo di  $h$ . Allora se  $H = h \circ \pi$ ,  $\sum_{P \in \mathbb{T}_\Lambda} \text{Res}_P h = \sum_{i=1}^k \text{Res}_{a_i} H$ . Ma per il teorema dei residui questo è uguale (a meno di un fattore  $2\pi i$ ) all'integrale  $\int_{\partial \overline{P_a}} H(z) dz$ , ossia all'integrale lungo il circuito disegnato a lato: mostriamo che, se  $I_j$  indica l'integrale lungo il lato  $j$ -esimo,  $I_1 + I_3 = 0 = I_2 + I_4$ . Si ha



$$\int_0^1 H(a + t\omega_1)\omega_1 dt - \int_0^1 H(a + t\omega_1 + \omega_2)\omega_1 dt = 0$$

ricordando che  $H$  è ellittica.

(2) Se  $n_i = \text{ord}_{a_i} h$ , ricordando che  $\text{ord}_{a_i} h = \text{Res}_{a_i} \frac{H'}{H}$ , si ha

$$\sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k \text{Res}_{a_i} \frac{H'}{H}.$$

Se ora definiamo  $G(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}$ , otteniamo una funzione meromorfa ed ellittica (perché anche  $H'(z)$  lo è). Dunque  $\sum_i \text{Res}_{a_i} G = 0$ .

(3) Definiamo  $F(z) = z \cdot G(z)$  (nelle notazioni del punto 2):  $F$  è meromorfa, ma non ellittica. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{a_i} F(z) &= \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{a_i} (zG(z)) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{a_i} (z - a_i)G(z) + \\ &+ \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{a_i} a_i G(z) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{a_i} a_i G(z) = \sum_{i=1}^k a_i n_i \end{aligned}$$

Ma ora per il Teorema dei residui si ha anche

$$\sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{a_i} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{P_a}} z \cdot \frac{H'(z)}{H(z)} dz$$

e l'integrale di linea lungo i lati del parallelogramma  $\overline{P_a}$ , numerati come al punto 1, è tale che

$$I_1 + I_3 = \omega_2 \int_0^1 G(a + t\omega_1) \omega_1 dt = \omega_2 \cdot 2\pi i \oint_{\gamma} \frac{h'}{h} = \omega_2 \cdot \operatorname{ind}_{\gamma}(z) \in \mathbf{Z}\omega_2$$

(dato che l'indice di avvolgimento di una curva attorno a un punto è un multiplo intero di  $2\pi i$ ). Analogamente  $I_2 + I_4 \in \mathbf{Z}\omega_1$ , e dunque  $I = \sum_{j=1}^4 I_j = m\omega_1 + n\omega_2 \in \Lambda$ .  $\square$

Nel caso dei tori la sequenza 2.8 si allunga in

$$0 \rightarrow \mathbf{C}^{\times} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{T}_{\Lambda}}(\mathbb{T}_{\Lambda})^{\times} \xrightarrow{\operatorname{div}} \operatorname{Div}^0(\mathbb{T}_{\Lambda}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{T}_{\Lambda} \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

( $\Sigma$  è un morfismo suriettivo, dato che  $\Sigma: (P) - (\overline{0}) \mapsto P$ ). Abbiamo il

**Teorema 2.5 :** La sequenza 2.10 è esatta.

Dunque una funzione meromorfa sul toro è univocamente determinata dal suo divisore, a meno di della moltiplicazione per una costante non nulla.

### 2.1.1 La funzione $\wp$ di Weierstraß.

Per provare il Teorema 2.5 ci mancano parecchie informazioni sul comportamento della freccia  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_{\Lambda}}(\mathbb{T}_{\Lambda})^{\times} \xrightarrow{\operatorname{div}} \operatorname{Div}^0(\mathbb{T}_{\Lambda})$ : un primo passo verso la dimostrazione consiste nell'esibire una funzione meromorfa non costante sul toro complesso. L'esempio è dovuto a K. Weierstraß(1854—56).

**Definizione 2.5** [FUNZIONE  $\wp$ ]: Dato un reticolo  $\Lambda \leq \mathbf{C}$ , che pensiamo fissato una volta per tutte, definiamo la funzione  $\wp_{\Lambda}: \mathbf{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbf{C}$ :  $z \mapsto \wp_{\Lambda}(z)$ , dove  $\wp(z)$  è la somma della serie

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^{\times}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad (2.11)$$

ove si indica  $\Lambda^{\times} = \Lambda \setminus \{0\}$ .

**Teorema 2.6:** La serie 2.11 che definisce  $\wp(z)$  è assolutamente convergente per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ , e uniformemente convergente in ogni compatto di  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ .

*Dimostrazione.* Sia  $R > 0$ , e indichiamo con  $\overline{D_R}$  il disco chiuso di centro 0 e raggio  $R$ . Definiamo

$$\Lambda_R = \{\omega \in \Lambda \mid |\omega| < 2R\};$$

chiaramente  $\Lambda_R$  è un insieme finito. Siano ora  $z \in D_R$ ,  $\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_R$ : vorremmo mostrare che  $\left| \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_R} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \right| < +\infty$ , e lo faremo per confronto. Abbiamo che, isolando il termine generale,

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z||2\omega - z|}{|\omega|^2|z-\omega|^2} \leq \frac{R|2\omega - z|}{|\omega|^2|z-\omega|^2} \leq \frac{R\frac{5}{2}|\omega|}{|\omega|^2|z-\omega|^2}$$

dato che  $|2\omega - z| \leq 2|\omega| + |z| \leq 2|\omega| + \frac{|\omega|}{2} = \frac{5}{2}|\omega|$  e  $|z-\omega| = |\omega - z| \geq ||\omega| - |z|| \geq ||\omega| - |\omega|/2| = \frac{|\omega|}{2}$ . Allora

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{R\frac{5}{2}|\omega|}{\frac{|\omega|^4}{4}} = \frac{10R}{|\omega|^3}$$

**Lemma 2.2:** Sia  $\Lambda$  un reticolo discreto in  $\mathbb{C}$  e  $\omega = m\omega_1 + n\omega_2 \in \Lambda$ . Allora esiste  $\delta_\Lambda$  tale che  $|\omega|^2 \geq \delta_\Lambda(n^2 + m^2)$ .

*Dimostrazione.* Notiamo che la condizione di indipendenza lineare è equivalente alla condizione  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ . Possiamo quindi trattare l'unico caso in cui si deve trovare  $\delta_\Lambda$  tale che  $|n(a + ib) + m|^2 \geq \delta_\Lambda(n^2 + m^2)$ , con  $b \neq 0$ . Una volta che ci si sia ricondotti a  $n^2(a^2 + b^2) + 2am + m^2 \geq \delta(n^2 + m^2)$ , ponendo  $x = \frac{n}{m}$ , si ha  $x^2(a^2 + b^2) + 2ax + 1 \geq \delta(x^2 + 1)$ , si ottiene un polinomio in  $x$  il cui discriminante (funzione polinomiale di  $\delta$ ) deve essere sempre non positivo: questi sono i valori voluti.  $\square$

In virtù del Lemma 2.2, abbiamo allora

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{10R}{\delta^2} \frac{1}{(n^2 + m^2)^{3/2}}$$

e cioè

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z|^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_R} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \frac{1}{|z|^2} + \sum_{\omega \in \Lambda_R^c} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| + \sum_{\omega \notin \Lambda_R} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \\ &\leq A + B \sum_{(n,m) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^\times} \frac{1}{(n^2 + m^2)^{3/2}} \\ &\leq A + 2B \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\times} \frac{1}{(n^2 + m^2)^{3/2}} \\ &\leq A + B' \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\max(n,m)=k} \frac{1}{(n^2 + m^2)^{3/2}} \\ &= A + B' \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2(k+1)}{k^3} \end{aligned}$$

dato che se  $m = k$ ,  $n$  può assumere  $k + 1$  valori, e viceversa. A questo punto si conclude, perchè la serie  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2(k+1)}{k^3}$  è convergente per confronto asintotico.  $\square$

**Lemma 2.3 :** La funzione  $z \mapsto \wp(z)$  è meromorfa su  $\mathbb{C}$ , olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ , in ogni  $\omega \in \Lambda$  ha un polo; in più  $\wp'(z)$  è ellittica.

*Dimostrazione.* L'assoluta convergenza della serie che definisce  $\wp(z)$  permette di derivare termine a termine:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\omega \in \Lambda^\times} \frac{1}{(z-\omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

Ora, se  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  e  $\omega \in \Lambda$ , notiamo che  $\wp(z + \omega)$  è definita da una serie che, a meno di un riordino, è la stessa che definisce  $\wp'(z)$ : data l'assoluta convergenza di  $\wp(z)$ , anche  $\wp(z)$  è assolutamente convergente, ed è dunque immune da riordini di quel tipo:  $\wp'(z + \omega) = \wp'(z)$ .

A  $\wp'$  si associa dunque una funzione meromorfa non costante sul toro  $\mathbb{T}_\Lambda$ , con un polo di ordine 3 in 0.  $\square$

Notiamo altresì che  $\wp(-)$  è una funzione pari: con un conto diretto

$$\begin{aligned} \wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^\times} \left( \frac{1}{(-z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{-\omega \in \Lambda^\times} \left( \frac{1}{(z+(-\omega))^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

e di nuovo, questa è  $\wp(z)$  a meno di un riordino.

**Osservazione.** Anche  $\wp(z)$  è ellittica, ma una sostituzione ingenua non porta a nulla: ragioniamo come segue.

Se  $\omega \in \Lambda$  e  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ , supponiamo  $2\omega \notin \Lambda$ : definiamo  $g(z) = \wp(z + \omega) - \wp(z)$ .  $g$  è una funzione meromorfa su  $\mathbb{T}_\Lambda$ : la sua derivata è  $g'(z) = \wp'(z + \omega) - \wp'(z) \equiv 0$ , dunque  $g(z) = c_\omega$  su tutto  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ : tale  $c_\omega$  in realtà è indipendente da  $\omega$ , come appare chiaro valutando  $g$  in  $-\omega/2 \notin \Lambda$ :

$$g\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right) = 0$$

Se poi  $\omega \in 2\Lambda$ ,

$$\wp(z + \omega) = \wp(z + \lambda + \lambda) \stackrel{*}{=} \wp(z + \lambda) = \wp(z)$$

dove in  $(*)$  si è usato il fatto che se  $z$  non è polo di  $\wp$ , non lo è nemmeno  $z + \lambda$ .

Induttivamente, lo si prova per ogni potenza di 2: ogni  $\omega \in \Lambda$  si scrive come  $2^k \gamma$ , per  $\gamma \notin 2\Lambda$ , e iterando  $k$  volte il procedimento si conclude.

*Divisori di  $\wp(z)$  e  $\wp'(z)$ .*

Certamente  $\text{div } \wp'(z)$  comincia con  $3(\bar{0})$ , e sappiamo (Teorema 2.4) che  $\deg \text{div } \wp' = 0$ . Allora  $\wp'$  deve avere tre zeri, eventualmente coincidenti, la cui molteplicità complessiva deve essere (esattamente) 3.

**Proposizione 2.3.** Gli zeri di  $\wp'(z)$  sono esattamente quei punti  $x \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  tali che  $2x \in \Lambda$ : se  $\Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z}$  essi sono tre (tra loro distinti):

$$e_1 = \left( \frac{\overline{\omega_1}}{2} \right), \quad e_2 = \left( \frac{\overline{\omega_2}}{2} \right), \quad e_{12} = \left( \frac{\overline{\omega_1 + \omega_2}}{2} \right)$$

*Dimostrazione.* Se  $x \in \{e_1, e_2, e_{12}\}$  si osserva che  $\wp'(-\bar{x}) = \wp'(\bar{x}) = -\wp'(\bar{x})$ , ciò che implica  $\wp'(x) = 0$ .

Dunque

$$\operatorname{div} \wp' = -3(\bar{0}) + (\bar{e}_1) + (\bar{e}_2) + (\bar{e}_{12}). \quad \square$$

Per quanto riguarda il divisore di  $\wp(z)$ , sappiamo che deve cominciare col polo di ordine 2 in 0, e che deve perciò avere due zeri, eventualmente coincidenti, la cui molteplicità complessiva è esattamente due. Tali zeri però sono più difficili da trovare. Ricorriamo dunque a una astuzia: se  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ , definiamo  $g_\alpha(z) = \wp(z) - \wp(\alpha)$ . Tale funzione è evidentemente meromorfa sul toro  $\mathbb{T}_\Lambda$ , e si annulla in  $(\bar{\alpha})$  (per costruzione) e in  $(-\bar{\alpha})$  (per parità, se  $\alpha \notin 2\Lambda$ ). In tal caso

$$\operatorname{div} g_\alpha = -2(\bar{0}) + (\bar{\alpha}) + (-\bar{\alpha}). \quad (2.13)$$

Se invece  $\bar{\alpha} = -\bar{\alpha}$ ,  $2\alpha \in \Lambda$  e si è già visto che  $g'_\alpha(\bar{\alpha}) = \wp'(\bar{\alpha}) = 0$ . Allora  $\bar{\alpha}$  è uno zero di ordine (esattamente) due, e  $\operatorname{div} g_\alpha = -2(\bar{0}) + 2(\bar{\alpha})$ .

*Caratterizzazioni Algebriche di  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$ .*

**Definizione 2.6** [COEFFICIENTI  $G_{2k}$ ]: Sia  $k \geq 2$  un intero. Definiamo il numero complesso

$$G_{2k} = \sum_{\omega \in \Lambda^\times} \frac{1}{\omega^{2k}} \quad (2.14)$$

**Osservazione.** È facile provare che la serie converge assolutamente: ci si riconduce al Lemma 2.2 e si scrive

$$G_{2k} = \sum_{\omega \in \Lambda^\times} \frac{1}{|n\omega_1 + m\omega_2|^{2k}} \leq \sum_{\omega \in \Lambda^\times} \frac{1}{\delta(n^2 + m^2)^k}$$

per il  $\delta > 0$  lì determinato. La serie  $\sum_{\omega \in \Lambda^\times} \frac{1}{\delta(n^2 + m^2)^k}$  corrisponde, a meno di un riordino degli interi positivi, a  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$ .

**Definizione 2.7 :** Definiamo i numeri complessi  $g_2 = 60G_4$  e  $g_4 = 140G_6$ .

Abbiamo ora tutti gli strumenti per enunciare il

**Teorema 2.7 :** Si verificano tre fatti sorprendenti:

- Si ha l'isomorfismo di  $\mathbb{C}$ -algebre

$$\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda) \cong \mathbb{C}(\wp, \wp') \quad (2.15)$$

(algebra delle funzioni razionali espresse come rapporto di polinomi in  $\wp, \wp'$ );

- Si ha l'isomorfismo di  $\mathbf{C}$ -algebre

$$\mathbf{C}(\wp, \wp') \cong \mathbf{C}(X)[Y] / (Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_4). \quad (2.16)$$

In altre parole,  $\wp$  e  $\wp'$  *non* sono algebricamente indipendenti su  $\mathbf{C}$ . Infatti dall'isomorfismo appena enunciato si ha  $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_4$ , e dunque il morfismo di anelli determinato da  $X \mapsto \wp$  e  $Y \mapsto \wp'$  ha per nucleo esattamente l'ideale  $(f) = (Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_4) \triangleleft \mathbf{C}(X)[Y]$ .

- Sia  $F(X_0, X_1, X_2) = f^h = X_1^2X_2 - 4X_0^3 + g_2X_0X_2^2 + g_4X_2^3$ , e  $\mathcal{C}_F$  la curva proiettiva associata. Allora  $\mathcal{C}_F$  è liscia, irriducibile e dunque una superficie di Riemann, isomorfa a  $\mathbb{T}_\Lambda$ . Tale superficie di Riemann si dice *curva  $\Lambda$ -ellittica*.

**Osservazione.** Cerchiamo uno sviluppo in serie di  $\wp$  e  $\wp'$  attorno ai poli (i punti del reticolo  $\Lambda$ ). Definiamo la funzione  $g: z \mapsto \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \in \Lambda^\times} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$ ;  $g(z)$  è olomorfa in 0 (vale 0) e funzione pari: ciò significa che per ogni  $k \geq 0$ ,  $g^{(2k+1)}(0) = 0$ , e  $g^{(2k)}(z) = (2k+1)! \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^{2k+2}}$ , ciò che implica  $g^{(2k)}(0) = (2k+1)!G_{2(k+1)}$ .

Ma allora

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)G_{2(k+1)} z^{2k}$$

e dunque

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)G_{2(k+1)} z^{2k}; \quad |z| < \min_{\omega \in \Lambda^\times} |\omega| = R \quad (2.17)$$

e derivando termine a termine,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k+1)G_{2(k+1)} z^{2k-1}; \quad |z| < R. \quad (2.18)$$

**Dimostrazione.** Definiamo  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e \subset \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  come l'insieme delle funzioni meromorfe *pari* sul toro  $\mathbb{T}_\Lambda$ . Osserviamo che

1.  $\wp(z) \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$ ;
2.  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$  è un sottocorpo di  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$ .

Dalla Teoria elementare dei Campi è noto che se  $K \leq L$  (ossia se esiste un morfismo di campi, necessariamente iniettivo, ma non suriettivo, tra  $K$  ed  $L$ ), allora  $L$  è un  $K$ -spazio vettoriale la cui dimensione  $\dim_K L$  si dice *grado* dell'estensione.

Vogliamo calcolare il grado di  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  su  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$ :

**Lemma 2.4:**  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  è una estensione di grado finito di  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$ , e

$$\left[ \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda) : \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e \right] = 2 \quad (2.19)$$

Una base di  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  su  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$  è  $\{1, \wp'\}$ .

Va mostrato che ogni funzione meromorfa in  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  si scrive in modo unico come combinazione lineare a coefficienti in  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$  di 1 e  $\wp'(z)$ . Sia allora  $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$ . Definiamo la funzione ellittica pari  $f_1(z) = \frac{1}{2}(h(z) + h(-z))$  e l'ellittica dispari  $f_2(z) = \frac{1}{2}(h(z) - h(-z))$ . Visibilmente  $h = f_1 + f_2$  e  $h = f_1 + \frac{f_2}{\wp'}\wp'$ : si osservi ora che il rapporto di funzione dispari è pari, per concludere.

Per mostrare l'indipendenza lineare, scriviamo  $f(z) + \wp'(z)g(z)$  per due ellittiche pari  $f$  e  $g$ . Ciò implica che se  $g(z) \neq 0$ ,  $\wp'(z) = -\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$ . Ciò è visibilmente assurdo, perché  $\wp'$  è dispari. Allora deve essere  $g \equiv 0$ , ciò che implica  $f \equiv 0$ .

Ora dobbiamo mostrare che

**Lemma 2.5:**  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e \cong \mathbf{C}(\wp)$  (e dunque  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda) \cong \mathbf{C}(\wp, \wp')$ ).

È evidente che estensioni monogene di campi isomorfi sono isomorfe. Chiamamente  $\mathbf{C}(\wp) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e$ ; il viceversa richiede un piccolo argomento.

Sia  $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e \setminus \mathbf{C}$ . Allora  $\text{div } h = \sum_i n_i (P_i)$  con  $n_i \in \mathbf{Z}, P_i \in \mathbb{T}_\Lambda$ . Si ha

$$\text{div } h = n(\bar{0}) + n_1(\bar{Q}_1) + \cdots + n_k(\bar{Q}_k) + m_1(\bar{P}_1) + \cdots + m_l(\bar{P}_l)$$

con  $n$  eventualmente nullo, e  $\bar{Q}_i = -\bar{Q}_i, \bar{P}_i \neq -\bar{P}_i$  sul toro. Notiamo che ogni  $n_i$  è pari (perché?)

Definiamo la funzione meromorfa

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^k (\wp(z) - \wp(Q_i))^{n_i/2} \prod_{j=1}^l (\wp(z) - \wp(P_j))^{m_j}$$

notando che  $\text{div}(\wp(z) - \wp(P_i)) = -2(\bar{0}) + (\bar{P}_i) + (-\bar{P}_i)$ , si ha

$$\text{ord}_0 \varphi = \sum_{i=1}^k (-2) \frac{n_i}{2} + \sum_{j=1}^l (-2) m_j = -\sum_{i=1}^k n_i - 2 \sum_{j=1}^l m_j$$

Ma ora  $\text{ord}_0 h = -(\sum \text{ord}_{P_i} h + \sum \text{ord}_{-P_i} h + \sum \text{ord}_{Q_j} h)$  (perché  $\text{div } h = 0$ ), ossia  $\text{ord}_0 h = -\sum_{i=1}^k n_i - 2 \sum_{j=1}^l m_j$ . Dunque  $h$  e  $\varphi$  avendo gli stessi poli e gli stessi zeri, degli stessi ordini, deve essere  $h = \lambda \varphi \in \mathbf{C}(\wp)$  per  $\lambda \in \mathbf{C}^\times$ .

Dunque  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e = \mathbf{C}(\wp) = E$  e  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda) = E(\wp') = \mathbf{C}(\wp, \wp')$ , estensione di grado 2 di  $E$ .  $\square$

Per provare che  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)^e \cong \mathbf{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_4)$  bisogna provare che  $\wp, \wp'$  sono funzionalmente dipendenti e che  $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ . Osserviamo che  $(\wp')^2$  è pari: ci sarà allora una funzione razionale  $\frac{f(\wp)}{g(\wp)}$  che la esprime in termini di  $\wp$ . Intorno a 0 si può scrivere (grazie a 2.17)

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \mathcal{O}_0(z^6) \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \mathcal{O}_0(z^5) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si calcola allora

$$\begin{aligned}\wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 9G_4 \frac{1}{z^2} + 15G_6 + \mathcal{O}_0(z^2) \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 24G_4 \frac{1}{z^2} - 80G_6 + \mathcal{O}_0(z^2)\end{aligned}\quad (2.21)$$

intendendo con  $\mathcal{O}_{x_0}(z^n)$  la classe delle funzioni definite all'intorni di  $x_0$  che sono limitate in un intorno di  $x_0$ . Allora  $(\wp')^2 - \wp^3 = -60G_4 \frac{1}{z^2} - 140G_6 + \mathcal{O}_0(z^2)$ .

Ciò considerato, la funzione  $h(z) = (\wp'(z))^2 - \wp^3(z) + 60G_4\wp(z) + 140G_6$  è olomorfa in 0 (perché  $h \in \mathcal{O}_0(z^2)$ ), e dunque limitata —anzi, infinitesima— in un intorno di 0), dunque in ogni  $\omega \in \Lambda$ , dunque in tutto  $\mathbf{C}$ . Ma allora  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  e deve dunque essere costante. Siccome  $h(0) = 0$ , deve essere  $h \equiv 0$ .

Si conclude notando che  $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$  è irriducibile su  $\mathbf{C}(X)[Y]$ : per far sì che  $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$  si fattorizzi, il polinomio  $-4X^3 + g_2X + g_3$  dovrebbe avere radici coincidenti in  $\mathbf{C}$ . Mostriamo che così non può essere.

Si ha  $\text{div}(\wp')^2 = -6(\bar{0}) + 2((\bar{e}_1) + (\bar{e}_2) + (\bar{e}_{12}))$ : se definiamo

$$f(z) = (\wp(z) - \wp(e_1))(\wp(z) - \wp(e_2))(\wp(z) - \wp(e_{12})),$$

abbiamo che  $\text{div } f = \text{div}(\wp')^2$ . Allora  $(\wp')^2 = 4\wp - g_2\wp - g_3 = \lambda f$  per  $\lambda \in \mathbf{C}^\times$  (determinarlo non è fondamentale, ma osservare che  $f$  è monico in  $\wp$  fa arguire che  $\lambda = 4$ ). Essendo distinte le immagini di  $e_i$  mediante  $\wp$  per  $i = 1, 2, 12$  abbiamo che le funzioni  $\wp - \wp(e_i)$  sono diverse per ogni  $i = 1, 2, 12$  e  $q(T) = 4T^3 - g_2T - g_3$  ha tre radici distinte in  $\mathbf{C}$ .  $\square$

**Corollario.** Ciò porge delle relazioni algebriche non banali tra  $g_2$  e  $g_3$ , quella per cui il discriminante  $\Delta_q(g_2, g_3) = g_2^3 - 27g_3 \neq 0$ , e tra le  $\wp(e_i)$ , quelle per cui  $\wp(e_1) + \wp(e_2) + \wp(e_{12}) = 0$ .

Tutto il comparto teorico finora esposto è necessario a mostrare il

**Teorema 2.8 :** La sequenza di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda) \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}^0(\mathbb{T}_\Lambda) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{T}_\Lambda \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

è esatta.

Abbiamo mostrato tutto il necessario, tranne l'inclusione  $\ker \Sigma \subseteq \text{im div}$ , ossia che se  $D = \sum n_i(P_i) \in \text{Div}^0(\mathbb{T}_\Lambda)$  e  $\sum n_i P_i = \bar{0}$  su  $\mathbb{T}_\Lambda$ , allora esiste  $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  tale che  $\text{div } f = D$ .

**Definizione 2.8** [FUNZIONE  $\xi(z)$ ]: Sia  $U \subseteq \mathbf{C} \setminus \Lambda$  un aperto connesso. Definiamo

$$\xi(z) = \int_\gamma \wp(z) dz = -\frac{1}{z} - \sum_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{z - \omega} + \frac{z}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right)$$

per un qualunque circuito  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ .

**Osservazione.** La definizione di  $\xi(z)$  è ben posta, dato che  $\wp$  ha residuo nullo in tutti i poli. Data la convergenza della serie, l'integrale si fa termine a termine. Il termine  $\frac{1}{\omega}$  serve a garantire la suddetta convergenza.



**Definizione 2.9** [FUNZIONE  $\sigma(z)$ ]: Sia  $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \Lambda$  un aperto connesso. Definiamo

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\omega^2}\right)$$

**Osservazione.** La funzione  $\xi(z)$  è meromorfa su  $\mathbb{C}$ , con poli semplici in ogni  $\omega \in \Lambda$ . La funzione  $\sigma(z)$  è olomorfa su  $\mathbb{C}$ , con zeri semplici in ogni  $\omega \in \Lambda$ .

**Proposizione 2.4.** Se  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  si ha

- $\xi'(z) = \wp(z)$ ;
- $d(\log \sigma(z)) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = -\xi(z)$ ;
- Sia  $\xi(z)$  che  $\sigma(z)$  sono funzioni dispari.

*Dimostrazione.* Tutte le dimostrazioni sono immediate, si fanno svolgendo il conto.  $\square$

Nè  $\xi(z)$  nè  $\sigma(z)$  sono ellittiche: esistono delle relazioni più complicate tra  $\sigma(z)$  e  $\sigma(z + \omega)$  e tra  $\xi(z)$  e  $\xi(z + \omega)$ . Vorremmo esplicitarle:

- Se  $\omega \in \Lambda$  notiamo  $g_\omega(z) = \xi(z) - \xi(z + \omega)$ , per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ . Allora  $g'_\omega(z) = \xi'(z) - \xi'(z + \omega) = \wp(z) - \wp(z + \omega) = 0$  e dunque  $g_\omega(z) \equiv \eta(\omega)$  (costante che dipende da  $\omega$ ). Le relazioni  $\xi(z) = \xi(z + \omega_1) + \eta(\omega_1) = \xi(z) = \xi(z + \omega_2) + \eta(\omega_2)$  caratterizzano completamente ogni  $\xi(z + \omega)$ , dato che con un ragionamento induttivo ci si riconduce sempre al caso  $\eta(z + \omega_i)$ .

**Teorema 2.9** [LEGENDRE]: Si ha  $2\pi i = \eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1$ , dove  $\eta_i = \eta(\omega_i)$ .

*Dimostrazione.* Si può scegliere  $a \in \mathbb{C}$  tale che, se  $\bar{P}_a$  è il parallelogramma chiuso con un vertice in  $a$ ,  $\bar{P}_a \cap \Lambda = \{\omega\}$ . Allora

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}_\omega \xi(z) &= \int_{\partial \bar{P}_a} \xi(z) dz \\ 2\pi i(-1) &= \int_{[0,1]} \xi(a + t\omega_1) \omega_1 dt + \int_{[0,1]} \xi(a + \omega_1 t + \omega_2 t) \omega_2 dt \\ &\quad - \int_{[0,1]} \xi(a + \omega_2 + t\omega_1) \omega_1 dt - \int_{[0,1]} \xi(a + t\omega_2) \omega_2 dt = \\ &= -\eta_1 \omega_2 + \eta_2 \omega_1 \end{aligned} \quad \square$$

- Per trovare una relazione analoga con  $\sigma(z)$  poniamo  $g_i(z) = \frac{\sigma(z + \omega_i)}{\sigma(z)}$  per  $i = 1, 2$ . Si ha

$$\begin{aligned} d \log g_i(z) &= d \log \sigma(z + \omega_i) - d \log \sigma(z) \\ &= -\xi(z + \omega_i) + \xi(z) = \eta_i \end{aligned}$$

Allora  $\frac{g'_i(z)}{g_i(z)} = \eta_i$ , ciò che implica  $g_i(z) = c_i \exp(\eta_i z)$ . A questo punto  $\sigma(z + \omega_i) = c_i \sigma(z) \exp(\eta_i z)$  valutato in  $-\omega_i/2$  vale

$$c_i \sigma\left(-\frac{\omega_i}{2}\right) \exp\left(\frac{-\eta_i \omega_i}{2}\right) = \sigma(\omega_i/2)$$

ciò che implica  $c_i = -\exp\left(\frac{\eta_i \omega_i}{2}\right)$ , dato che  $\sigma$  è dispari.

Abbiamo allora le relazioni

$$\sigma(z + \omega_i) = -\exp\left(\frac{\eta_i \omega_i}{2}\right) \exp(\eta_i z) \sigma(z) = -\exp\left(\eta_i \left(z + \frac{\omega_i}{2}\right)\right) \sigma(z)$$

per i generatori del reticolo  $\omega_1, \omega_2$ . Tali relazioni permettono di recuperare (induttivamente) il fatto che  $\sigma(z + \omega) = \sigma(z + n\omega_1 + m\omega_2) = (-1)^{n+m} \exp(\eta_1(\frac{\omega_1}{2} + z)n) \exp(\eta_2(\frac{\omega_2}{2} + z)m) \sigma(z)$ .

La funzione  $\sigma$  così introdotta permette di definire funzioni meromorfe che abbiano un divisore dato: supponiamo dati degli interi  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$  e dei numeri complessi  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$  con  $\pi(a_i) = P_i \in \mathbb{T}_\Lambda$ , possiamo costruire il divisore  $D = \sum n_i (P_i)$ . Definiamo dunque la funzione meromorfa

$$f(z) = \prod_{i=1}^k \sigma(z - a_i)^{n_i} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \quad (2.23)$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \omega_j)}{f(z)} &= \prod_{i=1}^k \frac{\sigma(z - a_i + \omega_j)^{n_i}}{\sigma(z - a_i)^{n_i}} \\ &= \prod_{i=1}^k (-1)^{n_i} \exp\left(\eta_j n_i \left(z - a_i + \frac{\omega_j}{2}\right)\right) \frac{\sigma(z - a_i)^{n_i}}{\sigma(z - a_i)^{n_i}} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^k n_i} \exp\left(\eta_j \left(\left(z + \frac{\omega_j}{2}\right) \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k n_i a_i\right)\right) \end{aligned}$$

relazione che, a condizione che  $(\heartsuit) \sum_{i=1}^k n_i a_i = 0 = \sum_{i=1}^k n_i$ , porge  $\frac{f(z + \omega_j)}{f(z)} = 1$ , ossia che  $f \in E(\Lambda) \cong \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$ , e ha divisore esattamente  $D$ . Ci viene allora suggerito un modo per costruire una funzione meromorfa sul toro  $\mathbb{T}_\Lambda$ , una volta dato il suo divisore.

La condizione  $(\heartsuit)$  è verificata su  $\mathbb{T}_\Lambda$  (cfr. il Teorema 2.4) e dunque  $f(z + \omega) = f(z + n\omega_1 + m\omega_2) = f(z)$ , inducendo su  $m, n$ .

Siamo ora pronti alla

*Dimostrazione (del Teorema 2.8).* Dato il divisore  $D = n_1(P_1) + \dots + n_k(P_k)$  tale che  $\sum n_i = 0$  e  $\sum n_i a_i = \tilde{\omega} \in \Lambda$  (ossia la somma è zero sul toro), scegliamo  $a_i \in \pi^{\leftarrow}(P_i)$  in modo che  $\sum n_i a_i = 0 \in \mathbb{C}$  (e non solo nel toro). Poniamo allora  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = n_1 - 1$ ,  $m_i = n_i$  per  $i = 2, \dots, k$  e  $d_0 = a_1 - \tilde{\omega}$ ,  $d_1 = a_1$ ,  $d_i = a_i$  per  $i = 2, \dots, k$ . Si osservi che  $d_j \in \pi^{\leftarrow}(P_j)$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ .

Allora  $\sum m_i = 1 + n_1 - 1 + \sum_{i=2}^k n_i = 0$  e  $\sum m_i d_i = -\tilde{\omega} + \sum n_i a_i = 0$  (in  $\mathbb{C}$ ).

Dunque possiamo definire la funzione  $f_D(z) = \prod_{i=1}^k \sigma(z - d_i)^{m_i} \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}_\Lambda}(\mathbb{T}_\Lambda)$  tale che  $\operatorname{div} f_D = D$ .  $\square$

**Osservazione.** Non ha senso operare calcolando  $\operatorname{div} f(z) = \operatorname{div} \prod_{i=1}^k \sigma(z - a_i)^{n_i} = \sum_{i=1}^k \operatorname{div} \sigma(z - a_i)^{n_i}$  perché di  $\sigma$  *non* ha senso calcolare il divisore (non è, presa da sola, una funzione ellittica).

## FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE TRA SDR

## INDICE

3.1	Definizioni di Base.	28
3.2	Ramificazione di Mappe Olomorfe.	30

**Nota.** Le superfici di Riemann formano la classe degli oggetti di una categoria SR, i cui morfismi ci impegniamo ora a definire. La nozione naturale di morfismo tra superfici di Riemann usa le carte, analogamente alla nozione di morfismo tra varietà differenziabili reali.

## 3.1 Definizioni di Base.

**Definizione 3.1** [MORFISMI E ISOMORFISMI]: Siano  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  due superfici di Riemann,  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  una funzione,  $p \in \mathcal{X}$ . Allora,  $f$  si dice *olomorfa* in  $p$  se esistono carte  $(U, V, \varphi)$  di  $\mathcal{X}$  attorno a  $p$  e  $(U', V', \varphi')$  di  $\mathcal{Y}$  attorno a  $f(p)$  tali che nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & U' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & V' \end{array}$$

la composizione  $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$  sia olomorfa come usuale funzione tra aperti di  $\mathbb{C}$ .

Diremo semplicemente *olomorfa* (o *morfismo di superfici di Riemann*) una funzione  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  che è olomorfa in ogni  $p \in \mathcal{X}$ .

Una funzione biiettiva  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tra due superfici di Riemann si dice *isomorfismo* o *biolomorfismo* se è olomorfa assieme alla sua inversa: in tal caso le due superfici  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  si identificano a ogni fine pratico (come è uso fare in ogni categoria). Quando  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  sono isomorfe come superfici di Riemann, si scrive  $\mathcal{X} \cong^{\text{SDR}} \mathcal{Y}$ .

**Lemma 3.1 :** Sia  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  una funzione tra due superfici di Riemann. Allora  $f$  è olomorfa in  $p$  se e solo se per ogni carta  $(U, V, \varphi)$  di  $\mathcal{X}$  attorno a  $p$  e  $(U', V', \varphi')$  di  $\mathcal{Y}$  attorno a  $f(p)$  si ha che  $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$  è olomorfa.

*Dimostrazione.* Si procede analogamente al caso di funzioni olomorfe su superfici di Riemann (cfr. Lemma 2.1).  $\square$

**Lemma 3.2 :** Se  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è un morfismo di superfici di Riemann, allora  $f$  è continua e aperta.

*Dimostrazione.* Se  $(U, V, \varphi), (U', V', \varphi')$  sono carte opportune attorno a  $p \in \mathcal{X}$  e  $f(p) \in \mathcal{Y}$ , si ha  $f|_U = (\varphi')^{-1} \circ (\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ , composizione di funzioni continue e aperte, perché olomorfe.  $\square$

**Lemma 3.3 :** Se  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è un morfismo biiettivo di superfici di Riemann allora è un omeomorfismo.

*Dimostrazione.* La funzione  $f^{-1}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  è continua, perché  $f$  è mappa aperta.  $\square$

**Esempio 3.1** (Funzione olomorfa associata a  $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ ). Sia  $\mathcal{X}$  una superficie di Riemann compatta, e  $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ . Sia poi  $P(f)$  l'insieme dei poli di  $f$ . Definiamo la funzione  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  come

$$x \mapsto \begin{cases} [1 : f(x)] & \text{se } x \notin P(f) \\ [0 : 1] & \text{se } x \in P(f) \end{cases}$$

$F$  è un morfismo di superfici di Riemann: infatti se  $x \notin P(f)$ , sia  $(U, V, \varphi)$  carta di  $\mathcal{X}$  attorno a  $x$  tale che  $U \cap P(f) = \emptyset$  e  $(U_0, \mathbb{C}, \varphi_0)$  carta di  $F(x)$  (contenuto in  $U_0$  per costruzione).

Allora  $\varphi_0 \circ F \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \varphi_0([1 : f(\varphi^{-1}(z))]) = f(\varphi^{-1}(z))$ , che è olomorfa su  $V$  (dato che lo è  $f$ ).

Se poi  $x$  è un polo per  $f$ , si prendono carte  $(U, V, \varphi)$  di  $\mathcal{X}$  attorno a  $x$  e  $(U_1, \mathbb{C}, \varphi_1)$  carta di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  attorno a  $f(x) = [0 : 1]$ .

Possiamo pensare che  $f$  sia l'unico polo di  $f$  in  $U$  (a meno di restringerlo), e che  $\varphi(x) = 0$ . Si noti che  $f \circ \varphi^{-1}$  ha un polo in zero: allora  $\varphi_1 \circ F \circ \varphi^{-1}$  ha uno zero in 0, ed è dunque olomorfa.

**Esempio 3.2** ( $\mathbb{S}^2 \stackrel{\text{SDR}}{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ). Entrambe le superfici sono omeomorfe (con mappe che sono olomorfismi) a  $\hat{\mathbb{C}}$ , compattificazione a un punto della retta complessa. La mappa che realizza il biolomorfismo è

$$f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): (x, y, z) \mapsto [1 - z : x + iy],$$

di inversa

$$f^{-1}: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{S}^2: [x_0 : x_1] \mapsto \left( \frac{2\operatorname{Re}(x_0 \bar{x}_1)}{|x_0|^2 + |x_1|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(x_0 \bar{x}_1)}{|x_0|^2 + |x_1|^2}, \frac{|x_0|^2 - |x_1|^2}{|x_0|^2 + |x_1|^2} \right).$$

**Esempio 3.3** (Il caso dei tori). Sia  $\mathcal{X} = \mathbb{T}_{\Lambda}$ . Sappiamo che  $\mathbb{T}_{\Lambda}$  è una superficie di Riemann compatta e che  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}_{\Lambda}}(\mathbb{T}_{\Lambda}) = \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)$ .

Esiste una curva proiettiva cui  $\mathbb{T}_{\Lambda}$  è isomorfo come superficie di Riemann.

**Teorema 3.1 :** Sia  $\Phi: \mathbb{T}_{\Lambda} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  la funzione definita da

$$\Phi(x) = \begin{cases} [\wp(x) : \wp'(x) : 1] & \text{se } x \neq \bar{0} \\ [0 : 1 : 0] & \text{se } x = \bar{0} \end{cases}$$

Allora

- $\Phi$  è ben definita (si intende  $\wp(x) = \wp(z)$  per qualche  $z \in \pi^{-1}(x)$ ) e iniettiva;
- $\Phi(\mathbb{T}_\Lambda) = \mathbb{C}_F$ , dove  $\mathbb{C}_F$  è la curva proiettiva definita da  $X_1^2 X_2 - 4X_0^3 + g_2 X_0 X_2^2 + g_3 X_2^3$ ;
- $\Phi|_{\mathbb{C}_F}: \mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathbb{C}_F$  è un isomorfismo di superfici di Riemann.

*Premettiamo alcuni lemmi alla dimostrazione.*

**Lemma 3.4:** Se  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  sono superfici di Riemann e  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è biiettiva e olomorfa, allora  $F^{-1}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  è olomorfa.

*Dimostrazione.* Se  $(U, V, \varphi), (U', V', \varphi')$  sono carte opportune attorno a  $p \in \mathcal{X}$  e  $F(p) \in \mathcal{Y}$ ,  $\varphi' \circ F|_U \circ \varphi^{-1} = g$ , (bi)olomorfa in  $V$ . Ma allora  $F|_U^{-1} = \varphi^{-1} \circ g^{-1} \circ \varphi'$ , olomorfa anch'essa perché composizione di olomorfe.  $\square$

**Lemma 3.5:** Siano  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  superfici di Riemann, di cui  $\mathcal{X}$  compatta, ed  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  funzione olomorfa e non costante. Allora  $F$  è suriettiva e anche  $\mathcal{Y}$  è compatta.

*Dimostrazione.*  $F$  è olomorfa, dunque mappa aperta (per le topologie su  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ ).  $\mathcal{X}$  è aperto (banalmente), ergo  $F(\mathcal{X})$  è un aperto di  $\mathcal{Y}$ . Ma  $\mathcal{X}$  è anche compatto, dunque  $F(\mathcal{X})$  è compatto, in particolare (dato che  $\mathcal{Y}$  è di Hausdorff) è chiuso.  $F(\mathcal{X})$  dunque è chiusoaperto in uno spazio connesso, ciò che implica  $F(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ .  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 3.1.* Osserviamo preliminarmente che mostrando che  $\Phi$  è ben definita e iniettiva, olomorfa e tale che  $\Phi(\mathbb{T}_\Lambda) \subseteq \mathbb{C}_F$  si conclude, perché per il Lemma 3.5  $\Phi$  è anche suriettiva (dato che i tori sono compatti, cfr. il Lemma 1.2) e per il Lemma 3.4  $\Phi^{-1}: \mathbb{C}_F \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda$  è olomorfa.

Si verifica immediatamente a mano che  $\mathbb{C}_F$  è una curva liscia. Ora, per mostrare l'iniettività di  $\Phi$  supponiamo  $\Phi(\bar{z}_1) = \Phi(\bar{z}_2)$ ; se  $\bar{z}_1 = \bar{0}$ , si conclude subito che  $\bar{z}_2 = \bar{0}$ . Supponiamo allora  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \neq \bar{0}$ :  $\wp(\bar{z}_1) = \wp(\bar{z}_2)$  e  $\wp'(\bar{z}_1) = \wp'(\bar{z}_2)$ , che implica  $\bar{z}_1 = \pm \bar{z}_2$ . La possibilità  $\bar{z}_1 = -\bar{z}_2$  è però vietata dal fatto che  $\wp'$  è una funzione dispari.

Ora,  $\Phi(\mathbb{T}_\Lambda) \subseteq \mathbb{C}_F$  perché  $[0 : 1 : 0] \in \mathbb{C}_F$  e per la relazione polinomiale non banale tra  $\wp$  e  $\wp'$  trovata al Teorema 2.7, nell'isomorfismo 2.16.  $\square$

## 3.2 Ramificazione di Mappe Olomorfe.

**Lemma 3.6:** Sia  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  una mappa olomorfa non costante tra due superfici di Riemann  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , e  $p \in \mathcal{X}$ . Allora esiste un unico  $m \geq 1$  tale che per ogni carta  $(U', V', \varphi')$  di  $\mathcal{Y}$  centrata in  $F(p)$ , esista una carta  $(U, V, \varphi)$  di  $\mathcal{X}$  centrata in  $p$ , per cui  $g(z) = (\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1})(z) = z^m$ , per ogni  $z \in V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $(U', V', \varphi')$  una carta di  $\mathcal{Y}$  centrata in  $F(p)$ . Sia  $(U_1, V_1, \varphi_1)$  una carta di  $\mathcal{X}$  centrata in  $p$  tale che  $F(U_1) \subseteq U'$ , e  $g = \varphi' \circ F \circ \varphi_1^{-1}$  ammetta lo sviluppo di Taylor  $\gamma(w) = \sum_{m \geq 1} c_m w^m$ , con  $c_m \neq 0$ .

Allora  $\gamma(w) = w^m g(w)$ , con  $\text{ord}_0 g = 0$ . Dunque per continuità esiste tutto un intorno dove  $g$  non è zero: sia  $V$  tale intorno. Troviamo ora una funzione olomorfa  $h: V \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $h(w)^m = g(w)$ , dato che in un opportuno intorno

di zero è determinata, dal non annullarsi di  $g$ , una scelta continua di  $g(w)^{\frac{1}{m}}$ .

Si può scrivere allora  $(\varphi' \circ F \circ \varphi_1^{-1})(w) = \left(c_m^{\frac{1}{m}} w h(w)\right)^m$ , dato che

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ F \circ \varphi_1^{-1})(w) &= c_m w^m (1 + u(w)) \\ &= \left(c_m^{\frac{1}{m}} w (1 + u(w))^{\frac{1}{m}}\right)^m \\ &= \left(c_m^{\frac{1}{m}} w \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/m}{k} u(w)^k\right)^m \end{aligned}$$

e  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/m}{k} u(w)^k$  è proprio la  $h(w)$  cercata.

In più osserviamo che  $\eta: w \mapsto c_m^{\frac{1}{m}} w h(w)$  è localmente invertibile, dato che che  $\eta'(0) \neq 0$  (fare il conto). Allora esiste un intorno di 0,  $V_0 \subseteq V$  tale che  $\eta|_{V_0}$  è biolomorfa sull'immagine. Sia  $W = \eta(V_0)$ , e  $\eta(w) =: z$  (lo si vede come cambio di coordinate).

Definiamo  $U = (\eta \circ \varphi_1)^{-1}(W) \subseteq \mathcal{X}$ . Allora  $(U, V, \eta \circ \varphi_1)$  è la carta richiesta, dato che  $(\varphi' \circ F \circ (\eta \circ \varphi_1)^{-1})(z) = (\eta(w))^m = z^m$ .  $\square$

**Definizione 3.2 :** L'intero così determinato si dice *molteplicità* di  $F$  in  $p$ , e si denota  $\text{mult}_p F$ .

**Esempio 3.4.** Se  $\mathcal{X}$  è una superficie di Riemann, ogni sua carta vista come morfismo di superfici di Riemann ( $\mathbb{C}$  lo è banalmente) ha molteplicità 1.

Per calcolare  $\text{mult}_p F$  a partire da una carta qualunque, supponiamo  $(\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1})(z) = \gamma(z) = \gamma(z_0) + \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ , se  $z_0 = \varphi(p)$ ; in tali notazioni  $\text{mult}_p F = m = \inf\{n \geq 1 \mid c_n \neq 0\}$ . Si nota immediatamente che vale anche  $\text{mult}_p F = \text{ord}_{z_0} h' + 1$ .

**Corollario.** Se  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è un morfismo di superfici di Riemann non costante e  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  sono compatte, allora  $\{p \in \mathcal{X} \mid \text{mult}_p F \geq 2\}$  è finito (discreto perché contenuto in  $Z(f)$ , e finito perché contenuto in un compatto).

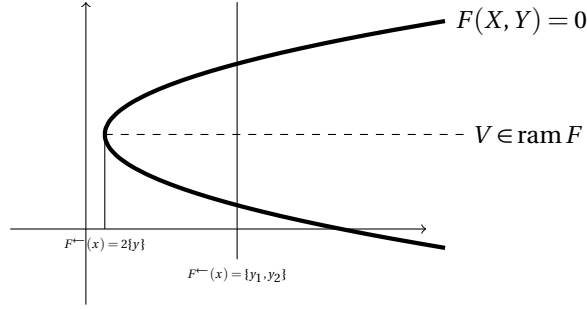
Ciò significa che per tutti gli  $y \in \mathcal{Y}$  a meno di un numero finito  $F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$ , dove tutti gli  $x_i$  hanno molteplicità 1.

Un punto  $p \in \mathcal{X}$  tale che  $\text{mult}_p F \geq 2$  si dice *punto di ramificazione per  $F$* , e  $y \in \mathcal{Y}$  tale che esista  $p \in F^{-1}(y)$  di ramificazione per  $F$  si dice (*punto*) *ramo* di  $F$ .

**Esempio 3.5.** Consideriamo la parabola di equazione generica  $F(X, Y) = X - aY^2 - bY - c$ : in generale troviamo due punti nella fibra di ogni punto  $x \in \mathbb{R}$ , tranne che nel vertice, dove la molteplicità si alza e  $\text{mult}_V F = 2$ .

**Proposizione 3.1.** Sia  $F(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]_{\geq 1}$ , irriducibile. Allora la curva affine definita da  $F$  (cfr. 1.2.2) è liscia ed è una superficie di Riemann (non compatta). Consideriamo la proiezione  $\psi: \mathcal{C}_F \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \mapsto x$ . Allora un punto  $p$  è di ramificazione per tale funzione se e solo se  $\frac{\partial F}{\partial Y}(p) = 0$  (non si ottengono informazioni sulla molteplicità esatta che va determinata in altri modi).

*Dimostrazione.* Se  $\frac{\partial F}{\partial Y}(p) = 0$ , allora  $\frac{\partial F}{\partial X}(p) \neq 0$ , dato che  $\mathcal{C}_F$  è liscia. Ma allora esistono  $(U, V, \varphi)$  carta di  $\mathcal{C}_F$  attorno a  $p$ ,  $V \subseteq \mathbb{C}$ , e  $h: V \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $U = \Gamma_h$  (ossia  $\text{pr}_1: \Gamma_h \xrightarrow{\sim} V$ ).



Ora,  $(\psi \circ \text{pr}_1^{-1})(y) = \psi(h(y), y) = h(y)$ , ciò che implica  $\text{mult}_p \psi = 1 + \text{ord}_{y_0} h$ . Allora  $\text{mult}_p \psi > 1$ , non appena  $h'(y_0) = 0$ : per il Teorema della funzione implicita si ha però  $h'(y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial Y}(p)}{\frac{\partial F}{\partial X}(p)} = 0$ .  $\square$

**Esempio 3.6.** Se  $G(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]^h$  è un polinomio omogeneo e irriducibile,  $\mathcal{C}_G$  è una curva liscia in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . La funzione  $\psi: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): [x : y : z] \mapsto [x : z]$  è olomorfa (non definita in  $[0 : 1 : 0]$  se esso appartiene alla curva). Un punto  $p = [x_0 : x_1 : x_2]$  è di ramificazione per  $\psi$  se e solo se  $\frac{\partial F}{\partial Y}(p) = 0$ .

*Dimostrazione.* Del tutto analoga a quanto fatto prima.  $\square$

**Esempio 3.7.** Sia  $\mathcal{X}$  una superficie di Riemann compatta,  $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ ,  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  l'olomorfa associata a  $f$  (cfr. Esempio 3.1). Se  $x \in \mathcal{X}$  si ha

- $\text{mult}_x F = \text{ord}_x(f - f(x))$ , se  $x \notin P(f)$ ;
- $\text{mult}_x F = -\text{ord}_x f$  se  $x \in P(f)$ .

Infatti, se  $x$  non è un polo di  $f$ , e prendiamo una carta  $(U, V, \psi)$  di  $\mathcal{X}$  attorno a  $x$  (la carta attorno a  $F(x)$  è fissata ad essere  $(U_0, \mathbb{C}, \varphi_0)$ , dato che  $F(x) \in U_0$ ) si ha

$$(\varphi_0 \circ F \circ \psi^{-1})(z) = \varphi_0([1 : f(\psi^{-1}(z))]) = f(\psi^{-1}(z))$$

e allora se indichiamo  $\psi(x) = z$ , si ha  $\text{mult}_x F = \text{ord}_z h' + 1 = \text{ord}_z(h - h(z)) = \text{ord}_x(f - f(x))$ .

Se invece  $x \in P(f)$ , di ordine  $m$ , in tutto un intorno bucato di  $z = \psi(x)$  si scrive

$$(\varphi_0 \circ F \circ \psi^{-1})(w) = (w - z)^{-m} g(w)$$

con  $\text{ord}_z g = 0$ . Se però  $x$  è polo per  $f$ , cambia la carta attorno a  $F(x) = [0 : 1]$ . Prendiamo  $(U_1, \mathbb{C}, \varphi_1)$  e otteniamo

$$(\varphi_1 \circ F \circ \psi^{-1})(w) = \varphi_1([1 : f(\psi^{-1}(w))]) = \frac{1}{f(\psi^{-1}(w))} = \frac{(w - z)^m}{g(w)}$$

che ha uno zero di ordine  $m$  in  $z$ . Dunque  $\text{mult}_x F = m = -\text{ord}_x f$ .

**Teorema 3.2:** Siano  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  due superfici di Riemann compatte,  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  olomorfa e non costante. Allora per ogni  $y \in \mathcal{Y}$  definiamo la funzione  $\deg_{(-)} F: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{Z}: y \mapsto \sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{mult}_x F$ .

Tale mappa è costante in  $\mathcal{Y}$ , ossia per ogni  $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$   $\deg_{y_1} F = \deg_{y_2} F = \deg F \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ .



*Dimostrazione.* Osserviamo preliminarmente che  $\deg: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$  è costante non appena è localmente costante, perché  $\mathcal{Y}$  è connesso e  $\mathbf{Z}$  discreto.

Cominciamo col mostrare due casi particolari del teorema in oggetto.

- Sia  $m \geq 1$ ,  $D = B(0, 1[$  e  $f: D \rightarrow D: z \mapsto z^m$ . Se  $y \in D^\times = D \setminus \{0\}$ ,  $\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{mult}_x f$ , dove  $f^{-1}(y) = \{x \in D \mid x^m = y\} = \{y^{\frac{1}{m}}, \zeta_m y^{\frac{1}{m}}, \zeta_m^2 y^{\frac{1}{m}}, \dots, \zeta_m^{m-1} y^{\frac{1}{m}}\}$ , dove  $y^{\frac{1}{m}}$  è una radice  $m$ -esima di  $y$  e  $\zeta_m$  è una radice primitiva  $m$ -esima dell'unità. **Si nota che  $\text{mult}_x f = m$ .**

- Consideriamo ora il caso in cui siano dati  $m_1, \dots, m_n$  interi positivi, e costruiamo  $U = \coprod_{i=1}^n D$ , nelle notazioni della costruzione precedente (è l'unione disgiunta di  $n$  dischi aperti). Definiamo la funzione  $f: U \rightarrow D: (z, i) \mapsto z^{m_i}$ . Dimostriamo che  $\deg_y f = \sum_{i=1}^n m_i$ .

Sia  $y = 0$ :  $f^{-1}(0) = \{0_{(1)}, \dots, 0_{(n)}\}$  e  $\text{mult}_{0_{(i)}} f = m_i$ , dunque la tesi segue.

Se invece  $y \neq 0$ ,  $f^{-1}(y) = \coprod_{i=1}^n \{y^{\frac{1}{m_i}} \zeta_{m_i}^k\}_{k=1, \dots, m_i}$  (cfr. ancora l'esempio precedente), e ognuno degli insiemi  $\{y^{\frac{1}{m_i}} \zeta_{m_i}^k\}$  è fatto da  $m_i$  elementi distinti; dunque la tesi segue ( $\#f^{-1}(y) = \sum m_i$ : l'unione va pensata disgiunta, nel senso che se qualche  $m_j = m_i$  per  $i \neq j$  devono contarsi due volte).

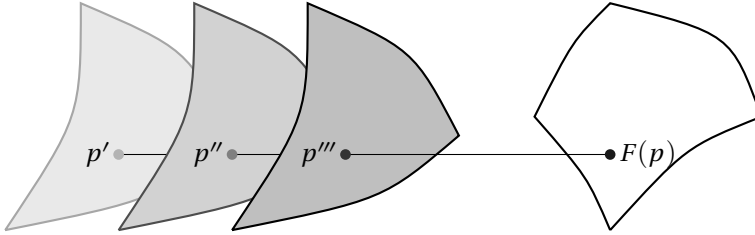


Figura 3: Fibra di un punto mediante una funzione olomorfa.

Dimostrato questo, se  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è una mappa olomorfa e non costante tra due superfici di Riemann compatte, e  $y \in \mathcal{Y}$ , si  $\{x_1, \dots, x_m\} = F^{-1}(y)$ .

Possiamo scegliere carte  $(U', V', \varphi')$  di  $\mathcal{Y}$  attorno a  $y$  e  $(U_i, V_i, \varphi_i)$  di  $\mathcal{X}$  attorno a  $x_i$ , centrate negli  $x_i, y$ , tali che in quelle coordinate locali  $F$  coincida con la mappa  $z \mapsto z^{m_i}$ , per degli interi  $m_i$  univocamente determinati (cfr. Teorema 3.6). In più a meno di restringere gli  $U_i$ , possiamo supporre che  $U_i \cap U_j \emptyset$  se  $i \neq j$ , di modo che  $F^{-1}(U') = \coprod U_i$ . A questo punto si applica il ragionamento su esposto, e  $\sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{mult}_x F \equiv m$ .

Resta da mostrare solo che non esistono altri  $x \in F^{-1}(y)$  non contenute negli  $U_i$  così ristretti. Se così fosse infatti avremmo modo di trovare una successione  $(x_k)$  di punti di  $\mathcal{X}$  contenuta in  $\mathcal{X} \setminus (\coprod U_i)$  tale che  $f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$ . Essendo  $\mathcal{X}$  uno spazio topologico (sequenzialmente) compatto, possiamo estrarre da  $(x_k)$  una sottosuccessione convergente in  $\mathcal{X}$ , sia  $(x_{k_s}) \subset \mathcal{X}$ . Ma allora, essendo  $F(x_k) \rightarrow y$ ,

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(x_{k_s}) = F\left(\lim_{s \rightarrow \infty} x_{k_s}\right) = F(x).$$

ciò che implica  $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$ , assurdo.  $\square$

**Corollario.** Se  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  sono superfici di Riemann compatte ed  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è olomorfa e non costante,  $F$  è isomorfismo se e solo se  $\deg F = 1$ .

*Dimostrazione.* Se  $F$  è isomorfismo, è iniettiva, ossia  $\deg F = 1$ . Viceversa, se  $\deg F = 1$ ,  $F$  è iniettiva. Ma per il Lemma 3.5  $F$  è anche suriettiva, dunque biiettiva. Essendo olomorfa (Lemma 3.4) è un isomorfismo.  $\square$

**Lemma 3.7:** Sia  $\mathcal{X}$  una superficie di Riemann compatta. Supponiamo che esista una funzione  $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$  non costante, che ha un solo polo, di ordine 1. Allora  $\mathcal{X} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.* Definiamo la funzione olomorfa associata a  $f$ ,  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  (cfr. l'Esempio 3.1), che manda  $x \in \mathcal{X}$  in  $[1 : f(x)]$  e l'unico polo in  $[0 : 1]$ . Allora  $\deg F = \deg_{[0:1]} F = \text{mult}_P F = -\text{ord}_P f = 1$ . Dunque  $F$  è un isomorfismo.  $\square$

**Teorema 3.3 :** Sia  $\mathcal{X}$  una superficie di Riemann compatta,  $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$  non costante. Allora

$$\sum_{Q \in \mathcal{X}} \text{ord}_Q f = 0 \quad (\iff \deg \text{div} f = 0 \text{ su } \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{T}_{\Lambda})$$

*Dimostrazione.* Sia  $Z = \{x_1, \dots, x_n\}$  l'insieme degli zeri di  $f$  e  $P = \{y_1, \dots, y_m\}$  l'insieme dei suoi poli.  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  sia l'olomorfa associata a  $f$ . Allora

$$d = \deg F = \deg_{[1:0]} F = \sum \text{mult}_{x_i} F = \sum \text{ord}_{x_i} f, \quad F^{\leftarrow}([1:0]) = Z \Rightarrow d = - \sum \text{ord}_{y_j} f$$

$$\text{Ma allora } \deg \text{div} f = \sum \text{ord}_{x_i} f + \sum \text{ord}_{y_j} f = d - d = 0. \quad \square$$

INDICE
 

---

4.1	Formula di Hurwitz.	35
4.2	Funzioni Meromorfe sulle curve algebriche.	37
4.2.1	Curve affini.	37
4.2.2	Curve proiettive.	38
4.3	Incollamento di Superfici di Riemann.	39
4.3.1	Curve Iperellittiche.	40
4.3.2	Struttura di $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ .	41

---

## 4.1 Formula di Hurwitz.

**Intro.** Supponiamo note (finchè non mi viene voglia, oppure ho tempo) le principali definizioni relative alle triangolazioni su superfici. È noto che l'insieme delle triangolazioni di una superficie è parzialmente ordinato dalla relazione di finezza, per la qual  $\tau \preceq \sigma$  se e solo se ogni triangolo di  $\tau$  è un triangolo di  $\sigma$ .

**Teorema 4.1 :** Se  $\tau = \{V, L, F\}$  è una triangolazione di una superficie topologica compatta  $S$ , indicando con  $V$  l'insieme dei vertici, con  $L$  l'insieme dei lati e con  $F$  l'insieme delle facce, e con le lettere minuscole le relative cardinalità, il numero intero

$$\chi(S) = v - l + f$$

(=caratteristica di Eulero di  $S$ ) non dipende da  $\tau$  (nel senso che se  $\tau' = \{V', L', F'\}$  è un'altra triangolazione di  $S$ ,  $\chi(S)' = v' - l' + f' = \chi(S)$ ).

**Teorema 4.2 :** Siano  $S_1, S_2$  due superfici topologiche triangolabili. Allora  $S_1 \stackrel{\text{hom}}{\cong} S_2$  se e solo se  $S_1, S_2$  sono entrambe orientabili o entrambe no, e  $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ .

**Esempio 4.1.** Per la sfera  $S^2$  e la triangolazione *blabla* si ha  $v = 4, l = 6, f = e$  e  $\chi = 2$ .

**Esempio 4.2.** Per il toro  $\mathbb{T}_L$  (con  $L = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ ) e la triangolazione *blabla* si ha  $v = 4, l = 12, f = 8$  e  $\chi = 0$ .

**Teorema 4.3 :** Le superfici di Riemann sono trinagolabili e orientabili.

**Definizione 4.1** [GENERE DI UNA SUPERFICIE]: Sia  $S$  superficie topologica orientabile e triangolabile. Definiamo

$$g(S) = \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) \quad (4.1)$$

**Teorema 4.4** [HURWITZ]: Siano  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  due superfici di Riemann compatte,  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  una mappa olomorfa non costante. Allora

$$2g(\mathcal{X}) - 2 = (\deg F)(2g(\mathcal{Y}) - 2) + \sum_{p \in \mathcal{X}} (\text{mult}_p F - 1) \quad (4.2)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo una triangolazione  $\tau$  di  $\mathcal{Y}$  tale che tutti i punti rami di  $F$  siano vertici (a meno di raffinare una triangolazione  $\sigma$  già esistente questo si può fare). Notiamo con  $v, l, f$  il numero di vertici lati e facce di  $\tau$ .

“Sollevando” mediante  $F$  la triangolazione di  $\mathcal{Y}$  ne otteniamo una su  $\mathcal{X}$ , che è fatta di  $(\deg F)l = l'$  lati, e  $(\deg F)f = f'$  facce, dato che per ogni punto su un lato o su una faccia di  $\tau$  ci sono  $\deg F$  punti nella sua controimmagine mediante  $F$  (ed esattamente  $\deg F$  per come è stata scelta la triangolazione, tale cioè che tutti i punti ramo siano nei vertici).

Sia ora  $q \in \mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \#F^{\leftarrow}(q) &= \sum_{p \in F^{\leftarrow}(q)} 1 = \sum_{p \in F^{\leftarrow}(q)} (1 - \text{mult}_p F + \text{mult}_p F) \\ &= \sum_{p \in F^{\leftarrow}(q)} (1 - \text{mult}_p F) + \sum_{p \in F^{\leftarrow}(q)} \text{mult}_p F \\ &= \deg F - \sum_{p \in F^{\leftarrow}(q)} (\text{mult}_p F - 1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ora, se  $V_{\mathcal{Y}}$  indica l'insieme dei vertici della triangolazione su  $\mathcal{Y}$ ,  $v' = \sum_{q \in V_{\mathcal{Y}}} \#F^{\leftarrow}(q)$ , ossia

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{q \in V_{\mathcal{Y}}} \left( \deg F - \sum_{p \in F^{\leftarrow}(q)} (\text{mult}_p F - 1) \right) \\ &= (\deg F)v - \sum_{q \in V_{\mathcal{Y}}} \sum_{p \in F^{\leftarrow}(q)} (\text{mult}_p F - 1) \\ &= (\deg F)v - \sum_{p \in \mathcal{X}} (\text{mult}_p F - 1); \end{aligned} \quad (4.4)$$

e infine

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{X}) - 2 &= -\chi(\mathcal{X}) = -v' + l' - f' \\ &= -(\deg F)v + \sum_{p \in \mathcal{X}} (\text{mult}_p F - 1) + (\deg F)l - (\deg F)f \\ &= (\deg F)(-v + l - f) + \sum_{p \in \mathcal{X}} (\text{mult}_p F - 1) \\ &= (\deg F)(2g(\mathcal{Y}) - 2) + \sum_{p \in \mathcal{X}} (\text{mult}_p F - 1) \quad \square \end{aligned}$$

Vi sono delle immediate applicazioni di questo teorema se  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è una funzione olomorfa non costante tra superfici di Riemann compatte (nessuna di queste ipotesi è ridondante).

1. Se  $\mathcal{Y} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  e  $\deg F \geq 2$ , allora  $F$  è ramificata;
2. Se  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  sono tori, allora  $F$  non è ramificata;
3.  $g(\mathcal{X}) \geq g(\mathcal{Y})$ .

*Dimostrazione.* Con ordine:

1.  $g(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 0$  e  $\deg F \geq 2$ . Allora, invocando il teorema 4.4

$$2g(\mathcal{X}) - 2 = (\deg F)(-2) + \sum_{p \in \mathcal{X}} (\text{mult}_p F - 1)$$

Se  $F$  fosse ramificata  $g(\mathcal{X}) = -\deg F + 1 \leq -1$ , assurdo (il genere di una superficie è sempre non negativo, e nullo solo per le sfere, e in questo caso solo per la sfera di Riemann  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ).

2.  $g(\mathcal{X}) = g(\mathcal{Y}) = 1$ . Allora per Hurwitz  $\sum_{p \in \mathcal{X}} (\text{mult}_p F - 1) = 0$ , e  $\text{mult}_p F = 1$  per ogni  $p \in \mathcal{X}$ .
3. Il teorema di Hurwitz implica che

$$2g(\mathcal{X}) - 2 \geq (2g(\mathcal{Y}) - 2)(\deg F) \stackrel{\deg F \geq 1}{\geq} 2(g(\mathcal{Y}) - 1)$$

il che implica la tesi.  $\square$

## 4.2 Funzioni Meromorfe sulle curve algebriche.

### 4.2.1 Curve affini.

Se  $F(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$  è irriducibile e privo di punti singolari (in modo che  $\mathcal{C}_F = F^{-1}(0)$  sia una superficie di Riemann), le proiezioni  $x: \mathcal{C}_F \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \mapsto x$  e  $y: \mathcal{C}_F \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \mapsto y$  sono mappe olomorfe su  $\mathcal{C}_F$  (confondendo funzioni coordinate e coordinate vere, una si ramifica dove la derivata rispetto all'altra si annulla).

Se ora  $G \in \mathbb{C}[X, Y]$  viene visto come funzione polinomiale  $G: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , anche  $G|_{\mathcal{C}_F}: \mathcal{C}_F \rightarrow \mathbb{C}$  è una mappa olomorfa. Supponiamo ora  $H \in \mathbb{C}[X, Y] \setminus \{0\}$ . Ha senso pensare a  $\frac{G}{H}: \mathcal{C}_F \rightarrow \mathbb{C}$  come ad una funzione meromorfa su  $\mathcal{C}_F$  che ha per poli gli zeri di  $H$ . Per saperne di più si invoca il

**Teorema 4.5** [NULLSTELLENSATZ]: Se  $H \in \mathbb{C}[X, Y] \setminus \{0\}$  è tale che  $H(x, y) = 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathcal{C}_F$  allora  $H = F \cdot M$  per  $M \in \mathbb{C}[X, Y] \setminus \{0\}$ .

Se  $f_1 = \frac{G_1}{H_1}$  e  $f_2 = \frac{G_2}{H_2}$  sono funzioni meromorfe su  $\mathcal{C}_F$  tali che  $F \nmid H_1 H_2$ , vorremmo identificarle non appena  $f_2 - f_1$  è costantemente nullo sulla curva, ossia non appena  $f_2 - f_1 = K \cdot F$  per  $K \in \mathbb{C}[X, Y] \setminus \{0\}$ , condizione equivalente a  $F \mid H_2 G_1 - H_1 G_2$ .

## 4.2.2 Curve proiettive.

Per una curva proiettiva definita da  $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]^h$ ,  $F$  irriducibile e senza punti singolari, di grado  $d \geq 1$ , possiamo invocare subito il teorema 2.2 e caratterizzare le funzioni olomorfe come le costanti. Consideriamo allora due polinomi omogenei non costanti, dello stesso grado,  $G, H \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]^h_d$ , tali che  $F \nmid H$  (o equivalentemente, dato il Nullstellensatz, tali che esiste  $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathcal{C}_F$  tale che  $H(x_0, x_1, x_2) \neq 0$ ). La funzione  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}: (x, y, z) \mapsto \frac{G(x, y, z)}{H(x, y, z)}$  è meromorfa su  $\mathcal{C}_F$  e induce una funzione  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ : la prima asserzione si verifica notando che  $\frac{G(\lambda(x, y, z))}{H(\lambda(x, y, z))} = \frac{\lambda^d G(x, y, z)}{\lambda^d H(x, y, z)}$ , la seconda notando che per il teorema di Bézout  $H(x_0, x_1, x_2) = 0$  per esattamente  $d \cdot \deg F$  punti sulla curva  $\mathcal{C}_F$ .

*Rette e Coniche.*

**Rette Proiettive.** Consideriamo  $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]^h_1$ ,  $F(X_0, X_1, X_2) = aX_0 + bX_1 + cX_2$  per  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Allora  $\mathcal{C}_F \stackrel{\text{SdR}}{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

Infatti, se supponiamo (a meno di permutare le coordinate) che  $a \neq 0$ , e definiamo  $\varphi: \mathcal{C}_F \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): [x : y : z] \mapsto [y : z]$ ,  $\varphi$  è olomorfa (perché coincide con una proiezione) e biiettiva (di inversa  $psi: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_F: [x : y] \mapsto [(-b/a)x + (-c/a)y : x : y]$ ). Per concludere, resta da osservare che, a priori,  $\varphi$  non è definita in  $[1 : 0 : 0]$ , ma che tale punto non appartiene a  $\mathcal{C}_F$ .

**Coniche.** Consideriamo la funzione polinomiale  $F: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}: [x : y : z] \mapsto ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$ , derivante dal polinomio omogeneo e non costantemente nullo a coefficienti complessi  $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]^h_2$ . Si conosce l'espressione "matriciale" di  $F(x, y, z)$  come  $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , e le correlazioni tra le proprietà algebriche di  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$  e quelle geometriche di  $\mathcal{C}_F$ . Ad esempio  $\mathcal{C}_F$  è una curva liscia se e solo se  $\det A \neq 0$ .

Si può trascrivere nel linguaggio delle superfici di Riemann un classico teorema di algebra lineare, che afferma che sul campo complesso esiste un'unica classe di congruenza (ossia una sola orbita per l'azione  $(A, S) \mapsto A^t S A$  di  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ) su  $\text{Sym}_n(\mathbb{C})$ . In maggior dettaglio si ha il

**Teorema 4.6 :** Siano  $A, M \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ ,  $A$  simmetrica. Se  $B = M^t A M$  e consideriamo le coniche  $F_A = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $F_B = (x \ y \ z) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , allora  $\mathcal{C}_{F_A} \stackrel{\text{SdR}}{\cong} \mathcal{C}_{F_B}$ .

*Dimostrazione.* Si osservi anzitutto che  $B$  è una matrice simmetrica (in conseguenza del fatto che  $(M, A) \mapsto M^t A M$  è una azione). Definiamo poi  $\varphi: \mathcal{C}_{F_B} \rightarrow \mathcal{C}_{F_A}: [x : y : z] \mapsto [M(x, y, z)]$  (intendendo con ciò che si prende l'omogeneizzato del vettore  $M(x, y, z)$ ). Con un conto diretto si verifica che per ogni  $p \in \mathcal{C}_{F_B}$   $\varphi(p) \in \mathcal{C}_{F_A}$ . In più  $\varphi$  è olomorfa, non costante e biiettiva (l'inversa insiemistica è  $\psi: \mathcal{C}_{F_A} \rightarrow \mathcal{C}_{F_B}: [x : y : z] \mapsto [M^{-1}(x, y, z)]$ ).  $\square$

**Corollario.** Per il Teorema Spettrale, se  $A \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) \cap \text{Sym}_3(\mathbb{C})$ , si ha l'isomorfismo  $\mathcal{C}_{F_A} \stackrel{\text{SdR}}{\cong} \mathcal{C}_{F_I}$ , indicando con  $F_I$  il polinomio  $X^2 + Y^2 + Z^2$  associato alla matrice identica.

**Teorema 4.7:** Sia  $A \in \text{GL}_3(\mathbf{C}) \cap \text{Sym}_3(\mathbf{C})$ ,  $F_A$  il polinomio associato. Allora  $\mathcal{C}_{F_A} \stackrel{\text{SdR}}{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

*Dimostrazione.* Basta mostrarlo per  $F(x, y, z) = xz - y^2$  (ottenibile da  $F_I$  con un facile cambio di variabili). Definiamo  $\varphi: \mathcal{C}_F \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C}): [x : y : z] \mapsto \begin{cases} [x : y] \\ [y : z] \end{cases}$  a seconda che  $x \neq 0$  oppure  $z \neq 0$ . È facile notare che  $\varphi$  è ben definita, olomorfa e non costante, e ha per inversa insiemistica la funzione  $\psi: \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}_F: [x : y] \mapsto [x^2 : xy : y^2]$ .  $\square$

### 4.3 Incollamento di Superfici di Riemann.

Siano  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  due superfici di Riemann,  $U \subseteq \mathcal{X}, V \subseteq \mathcal{Y}$  due loro aperti: essi ereditano una struttura di superficie di Riemann con la topologia indotta e la restrizione delle carte. Possiamo allora considerare una mappa biolomorfa  $\varphi: U \rightarrow V$  come isomorfismo di superfici di Riemann.

Definiamo una relazione di equivalenza su  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} = \{(x, 1) \mid x \in \mathcal{X}\} \cup \{(y, 2) \mid y \in \mathcal{Y}\}$ :

$$\begin{aligned} (a, \epsilon), (b, \epsilon'), (a, \epsilon) \sim (b, \epsilon') \\ \iff \\ (\epsilon = \epsilon', a = b) \vee (\epsilon = 0, \epsilon' = 1, (a, b) \in U \times V = U \times \varphi(U)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

e indichiamo con  $\mathcal{Z} = (\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}) / \sim = (\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}) / \varphi$  il quoziente mediante questa relazione. Risulta, come è facile notare

$$\mathcal{Z} = (\mathcal{X} \setminus U) \sqcup (Y \setminus V) \sqcup_{x \in U} \{(x, \varphi(x))\}$$

ed è facile verificare che quella relazione è effettivamente una equivalenza. Si ha il

**Teorema 4.8:** Siano  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  due superfici di Riemann,  $\varphi: U \rightarrow V$  un isomorfismo tra due loro aperti. Se si considera  $\mathcal{Z} = (\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}) / \varphi$  con la topologia quoziente per la relazione introdotta in 4.3,  $\mathcal{Z}$  ha un'unica struttura complessa. Se poi  $\mathcal{Z}$  è uno spazio di Hausdorff, allora è una superficie di Riemann.

*Dimostrazione.* La composizione di immersione nel coprodotto e proiezione sul quoziente per  $\varphi$  dà due frecce  $\mathcal{X} \xrightarrow{j_X} \mathcal{Z} \xleftarrow{j_Y} \mathcal{Y}$  che sono continue (per costruzione) e **biittive**. Prendiamo ora una carta  $(W, M, \psi)$  di  $\mathcal{X}$ : dalla composizione di  $\psi$  e  $j_X$  risulta una carta  $\psi \circ j_X^{-1}: j_X(W) \rightarrow M$ . L'unione  $\{(j_X(W_\alpha), M_\alpha, \psi_\alpha \circ j_X^{-1})\} \cup \{(j_Y(W_\beta), M_\beta, \psi_\beta \circ j_Y^{-1})\}$  per carte  $(W_\alpha, M_\alpha, \psi_\alpha)$  di  $\mathcal{X}$  e  $(W_\beta, M_\beta, \psi_\beta)$  di  $\mathcal{Y}$  dà un atlante complesso di  $\mathcal{Z}$ :

1. Chiaramente se  $\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha = \mathcal{X}$  e  $\bigcup_{\beta \in B} W_\beta = \mathcal{Y}$ ,  $\text{bigcup}_{\alpha, \beta} W_\alpha \amalg W_\beta$  è un ricoprimento di  $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$  (aperto per definizione della topologia sul coprodotto, che risulta dall'incollamento delle due topologie).
2. Le carte indotte da  $\mathcal{X}$  sono a due a due compatibili, così come quelle indotte da  $\mathcal{Y}$ ; l'unica compatibilità da verificare è quindi quella tra una carta

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{j_X} & Z \\
 & \searrow \varphi & \uparrow j_Y \\
 & & V
 \end{array}$$

$(j_X(W_\alpha), M_\alpha, \psi_\alpha \circ j_X^{-1})$  e una carta  $(j_Y(W_\beta), M_\beta, \psi_\beta \circ j_Y^{-1})$ . Se  $j_X(W_\alpha) \cap j_Y(W_\beta) = T \neq \emptyset$ ,  $T \subseteq j_X(U) = j_Y(V)$  e  $(\psi_\beta \circ j_Y^{-1}) \circ (j_X \circ \psi_\alpha^{-1}) = \psi_\beta \circ (j_Y^{-1} \circ j_X) \circ \psi_\alpha^{-1}$  che è olomorfa perché composizione di olomorfe ( $j_Y^{-1} \circ j_X$  coincide con  $\varphi$ ).  $\square$

**Esempio 4.3.** Se  $\mathcal{X} = \mathcal{X} = \mathcal{Y}$ ,  $U = \mathbf{C}^\times = V$ , definiamo  $\varphi: U \rightarrow V: z \mapsto \frac{1}{z}$ . Allora  $\mathcal{Z} \cong_{\text{Sdr}} \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  (cfr. anche l'Esempio 1.3).

**Esempio 4.4.** Se  $\mathcal{X} = \mathcal{X} = \mathcal{Y}$ ,  $U = \mathbf{C}^\times = V$ , definiamo  $\text{id}: U \rightarrow V: z \mapsto z$ ; allora  $\mathcal{Z}' = (\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}) / \text{id}$  ha una struttura complessa ma non è una superficie di Riemann, perché non è uno spazio di Hausdorff.

Prendiamo infatti  $W$  intorno di  $0_{\mathcal{X}}$ ,  $W'$  intorno di  $0_{\mathcal{Y}}$ .  $W \cap j_X(U) \neq \emptyset$  perché  $j_X(U) = \mathcal{Z} \setminus \{0_{\mathcal{X}}, 0_{\mathcal{Y}}\} = j_Y(V)$  e  $W$  contiene punti diversi da  $0_{\mathcal{X}}$ . Ora,  $j_X^{-1}(W \cap j_X(U)) = j_X^{-1}(W) \cap U \subseteq U$  ed esiste in  $W \cap j_X(U)$  un disco bucato  $D^\times(p, \epsilon]$  per qualche  $p \in W \cap j_X(U)$ ,  $\epsilon > 0$ . Allo stesso modo  $j_Y^{-1}(W \cap j_X(U)) = j_Y^{-1}(W \cap j_Y(V)) \subseteq V$  e contiene un disco bucato  $D^\times(q, \delta]$ . Ora

$$\emptyset \neq (W \cap j_X(U)) \cap (W' \cap j_Y(V)) = W \cap W' \cap j_X(U) \subseteq W \cap W'.$$

#### 4.3.1 Curve liperellittiche.

**Esempio 4.5** (Rivestimenti olomorfi doppi di  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ ). Fissiamo un intero  $g \geq 1$ , e  $2g+2$  numeri complessi distinti  $a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_{2g+2}$ . Definiamo  $f(x) = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i)$  e  $F(x, y) = y^2 - f(x)$ ; sia  $\mathcal{C}_F$  la curva affine associata a  $F$ .

Notiamo che  $\mathcal{X} = \mathcal{C}_F$  è una superficie di Riemann, dato che  $\mathcal{C}_F$  è liscia e irriducibile ( $f$  è privo di zeri ripetuti, ciò che implica la tesi: se supponessimo  $F(X, Y) = (Y + g(X))(Y + h(X))$  allora  $g = -h$  e  $f = h^2$ , il che è assurdo).

La mappa olomorfa  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{C}: (x, y) \mapsto x$  si ramifica esattamente in  $(a_1, 0)$ ,  $(a_2, 0), \dots, (a_{2g+2}, 0)$ : in tali punti  $\varphi$  ha molteplicità esattamente due.

Infatti, se  $p = (a_i, 0)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}(p) = -f'(a_i) \neq 0$ , dunque per noti teoremi esistono un intorno di  $0$   $W \subseteq \mathbf{C}$ , un intorno di  $p$   $U \subseteq \mathbf{C}^2$  e una funzione  $h: W \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa tali che  $U \cap \mathcal{C}_F = \Gamma_h$  e  $\text{pr}_2: \Gamma_h \rightarrow W$  è un omeomorfismo. Allora  $h: W \rightarrow \mathbf{C}$  è  $\varphi$  scritta nelle coordinate locali così determinate, e

$$\text{mult}_{(a_i, 0)} \varphi = \text{ord}_0 h' + 1 = 1 + 1 = 2$$

dato che  $h'(0) = 0$  e  $h''(0) = \frac{2}{f'(a_i)} \neq 0$ . Consideriamo ora  $U = \{(x, y) \in \mathcal{X} \mid x \neq 0\} \subseteq \mathcal{X}$ . Se  $(x, y) \in U$  ha senso scrivere

$$\frac{y^2}{x^{2g+2}} = \left(1 - \frac{a_1}{x}\right) \dots \left(1 - \frac{a_{2g+2}}{x}\right)$$

Definiamo  $G(u, w) = w^2 - g(u)$ , dove  $g(u) = \prod_{i=1}^{2g+2} (1 - a_i u)$ .  $\mathcal{Y} = \mathcal{C}_G$  è una superficie di Riemann e

$$\psi: U \rightarrow V: (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}}\right)$$

è un isomorfismo tra  $U$  e  $V = \{(u, w) \in \mathcal{Y} \mid u \neq 0\}$  (ha jacobiano invertibile). Allora  $\mathcal{Z} = (\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}) / \psi$  ammette un'unica struttura complessa.



**Lemma 4.1 :**  $\mathcal{Z}$  così determinato è una superficie di Riemann compatta.

*Dimostrazione.* **L'Hausdorffezza per ora mi sfugge.** Per la compattezza, troviamo che

$$\mathcal{Z} = \left( \{(x, y) \in \mathcal{X} \mid |x| \leq 1\} \amalg \{(u, w) \in \mathcal{Y} \mid |u| \leq 1\} \right) / \psi$$

dato che ovviamente  $\mathcal{Z}$  contiene quell'insieme, e se  $j_X(x, y) \in \mathcal{Z}$ ,  $|x| \leq 1$  oppure, se  $|x| > 1$ ,  $|u| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1$ , e dunque in ambo i casi  $j_X(x, y) \in \left( \{(x, y) \in \mathcal{X} \mid |x| \leq 1\} \amalg \{(u, w) \in \mathcal{Y} \mid |u| \leq 1\} \right) / \psi$ .  $\square$

Vorremmo ora definire una funzione olomorfa  $\tilde{\psi}: p \mapsto [1 : x]$  come per ogni  $p \in j_X(\mathcal{X})$  che si scriva quindi come  $j_X(x, y)$ . Da  $j_X(\mathcal{X})$  restano fuori due punti:

$$\mathcal{Z} \setminus j_X(\mathcal{X}) = j_Y(\mathcal{Y} \setminus V) = j_Y(\{(0, w) \mid w^2 = 1\}) = \{j_Y(0, 1), j_Y(0, -1)\}$$

e quindi per immagine di tali punti scegliamo il punto all'infinito di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Calcoliamo  $\deg \tilde{\psi}$ : è piuttosto evidente che per ogni  $[1 : a_i]$  ha nella controimmagine un unico punto di molteplicità due, e in ogni altro punto diverso da  $[1 : a_i]$  ci sono esattamente due punti (è, questo, anche il caso di  $[0 : 1]$ , che ha per controimmagine  $\{j_Y(0, 1), j_Y(0, -1)\}$ ).

Se ora applichiamo la formula di Hurwitz (cfr. 4.2) abbiamo

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{Z}) - 2 &= (\deg \tilde{\psi})(2g(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) - 2) + \sum_{p \in \mathcal{Z}} (\text{mult}_p \tilde{\psi} - 1) \\ &= 2(-2) + 2g + 2 = 2g - 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Abbiamo ottenuto così una superficie di Riemann di genere  $g$

**Esempio 4.6.** Si può fare una costruzione analoga con un polinomio di grado dispari: siano  $g \geq 1$  un intero, e  $a_1, \dots, a_{2g+1}$  numeri complessi tutti distinti. Allora  $H(x, y) = y^2 - h(x)$  è un polinomio liscio e irriducibile che definisce una superficie di Riemann  $\mathcal{X} = \mathcal{C}_H$ . Se  $U = \{(x, y) \in \mathcal{X} \mid x \neq 0\}$ , possiamo scrivere, per ogni  $(x, y) \in U$

$$y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_{2g+1}) \iff \left( \frac{y}{x^{g+1}} \right) = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{a_1}{x} \right) \dots \left( 1 - \frac{a_{2g+1}}{x} \right)$$

e si può definire il polinomio (liscio e irriducibile)  $S(u, w) = w^2 - u \prod_{i=1}^{2g+1} (1 - u a_i)$ . La mappa  $\psi: U \rightarrow V: (x, y) \mapsto \left( \frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}} \right)$  è un isomorfismo tra  $U$  e  $V$ , e analogamente a prima  $\mathcal{Z}' = (\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}) / \psi$  è uno spazio di Hausdorff compatto, dunque una superficie di Riemann compatta.

Definita  $\tilde{\psi}$  analogamente a prima, ci si accorge però che  $\tilde{\psi}(j_X(0, 0)) = [0 : 1]$  per quell'unico punto, che quindi è di ramificazione assieme a  $j_X(a_1, 0), \dots, j_X(a_{2g+1}, 0)$ . Per la formula di Hurwitz si ha  $2g(\mathcal{Z}') - 2 = 2(-2) + \sum_i (\text{mult}_{j_X(a_i, 0)} \tilde{\psi} - 1) + (\text{mult}_{j_X(0, 0)} \tilde{\psi} - 1) = 2g - 2$ , e dunque  $g(\mathcal{Z}') = g$ .

#### 4.3.2 Struttura di $\mathcal{M}(\mathcal{Z})$ .

Consideriamo, come è stato finora, due superfici di Riemann  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  e un isomorfismo  $\varphi: U \rightarrow V$  tra due suoi aperti. Vorremmo poter definire una mappa olomorfa  $\alpha: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{M}$  per una qualunque altra superficie di Riemann  $\mathcal{M}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{M} & & \\ & \nearrow & \uparrow \alpha & \nwarrow & \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{j_X} & \mathcal{Z} & \xleftarrow{j_Y} & \mathcal{Y} \\ \\ U \subseteq \mathcal{X} & \xrightarrow{\alpha_X} & \mathcal{M} & & \\ \downarrow \varphi & & \parallel & & \\ V \subseteq \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha_Y} & \mathcal{M} & & \end{array}$$

Per la proprietà universale del coprodotto, questa può essere univocamente fissata dal dato di due frecce  $\alpha_X: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\alpha_Y: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}$ . Data  $\alpha: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{M}$ , definiamo  $\alpha_X = \alpha \circ j_X$  e  $\alpha_Y = \alpha \circ j_Y$ , in modo che si abbia  $\alpha_X|_U = \alpha_Y \circ \varphi$ .

Se viceversa supponiamo date le mappe olomorfe  $\alpha_X: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\alpha_Y: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}$ , tali che  $\alpha_Y \circ \varphi = \alpha_X|_U$ , determiniamo un'unica  $\alpha: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{M}$  ponendo  $\alpha(x) = \beta(u)$  per un  $u \in \pi^{-1}(x)$  ( $\pi: \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \rightarrow (\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y})/\varphi$  è la proiezione al quoziente per  $\varphi$ , e  $\beta: \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}: p \mapsto \alpha_X(p)$  o  $\alpha_Y(p)$  a seconda che  $p \in \mathcal{X}$  o  $p \in \mathcal{Y}$ , è la mappa determinata dal coprodotto). La mappa  $\alpha$  così definita è ben posta, per la condizione di compatibilità: se  $u \sim u'$ ,  $u' = \varphi(u)$ , e allora

$$\frac{\beta(u)}{\alpha_X(u)} = \alpha(\pi(u)) = \alpha(x) = \alpha(\pi(u')) = \frac{\beta(u')}{\alpha_Y(u')}$$

Riprendendo in mano l'Esempio 4.5 possiamo concludere quanto segue: disponiamo di

$$\begin{aligned}\alpha_X: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): (x, y) &\mapsto [1 : x] \\ \alpha_Y: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): (u, w) &\mapsto [u : 1]\end{aligned}$$

Inoltre per ogni  $(x, y) \in U$  si ha

$$(\alpha_Y \circ \varphi)(x, y) = \alpha_Y\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}}\right) = \left[\frac{1}{x} : 1\right] = [1 : x] = \alpha_X(x, y)$$

Esiste dunque un'unica  $\alpha: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  (che coincide con  $\tilde{\psi}$ ) tale che  $\alpha_X = \alpha \circ j_X$  e  $\alpha_Y = \alpha \circ j_Y$ . Per giunta si ritrova il risultato relativo ai “poli” di  $\tilde{\psi}$ : abbiamo infatti che  $\mathcal{Z} \setminus j_X(\mathcal{X}) = \{j_Y(0, \pm 1)\} = \{p_1, p_2\}$  e

$$\begin{aligned}\alpha(p_1) &= \alpha(j_Y(0, 1)) = \alpha_Y(0, 1) = [0 : 1] \\ \alpha(p_2) &= \alpha(j_Y(0, -1)) = \alpha_Y(0, -1) = [0 : 1]\end{aligned}$$

dove  $[0 : 1]$  è il punto all'infinito della retta complessa.

La mappa  $\alpha$  induce, ora, un morfismo di corpi tra  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$  e  $\mathcal{M}(\mathcal{Z})$ , che è il *pullback* di  $\alpha$ :

$$\alpha^*: \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{Z}): f \mapsto \alpha^*(f) = f \circ \alpha \quad (4.7)$$

Tale morfismo è iniettivo, e l'immagine  $\alpha^*(\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{Z})$  ne è un sotto-corpo isomorfo a  $\mathbb{C}(t)$ .

Possiamo quindi pensare a  $L = \mathcal{M}(\mathcal{Z})$  come estensione di  $K = \mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})))$ , e volerne calcolare il grado. Dobbiamo perciò studiare più attentamente la struttura di  $L$ .

*Automorfismi di  $\mathcal{Z}$ .*

Definiamo le mappe olomorfe

$$\begin{aligned}\sigma_X: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}: (x, y) &\mapsto j_X(x, -y) \\ \sigma_Y: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}: (u, w) &\mapsto j_Y(u, -w)\end{aligned} \quad (4.8)$$

tali che

$$(\sigma_Y \circ \varphi)(x, y) = \sigma_Y\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^{g+1}}\right) = j_X(x, -y) = \sigma_X(x, y)$$

esiste dunque un'unica  $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  olomorfa, tale da fattorizzare  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  mediante  $j_X$  e  $j_Y$ , e tale che  $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ . Quest'unica  $\sigma$  è tale che per  $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ,  $\alpha \circ \sigma = \alpha$ .

Ora, le funzioni meromorfe su  $\mathbb{Z}$  che sono anche nell'immagine di  $\alpha^*$  (ossia che si possono pensare come meromorfe su  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ) sono tutte e sole quelle  $\sigma$ -invarianti:

**Lemma 4.2 :** Sia  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})$ . Allora  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$  se e solo se  $\sigma^*(f) = f \circ \sigma = f$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f = \alpha^*(g)$ , per  $g \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ . Allora  $\sigma^*(f) = \sigma^*(\alpha^*(g)) = g \circ \alpha \circ \sigma = g \circ \alpha = f$ . Viceversa, supponiamo  $f \in L$  tale che  $f \circ \sigma = f$ .

Definiamo  $g \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ :  $p \mapsto g(p) = f(q)$  per qualche  $q \in \mathbb{Z}$ , tale che  $\alpha(q) = p$ . Tale  $g$  è ben definita: se  $q' \in \alpha^{-1}(p)$ ,  $q' = j_X(x, -y)$  e  $q' = \sigma(q)$ ; allora  $f(q') = f(\sigma(q)) = f(q)$ .  $\square$

**Lemma 4.3 :** Il grado  $[L:K]$  è 2.

*Dimostrazione.* Se  $f \in L$ , definiamo  $f^+ = \frac{1}{2}(f + \sigma^*f) \in L$ ; è facile notare che  $f^+ \in K$ . Analogamente definiamo  $f^- = \frac{1}{2}(f - \sigma^*f)$ ; è facile notare che  $\sigma^*f^- = -f^-$ .

Se consideriamo  $\gamma: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \mapsto y$ , essa si estende ad una funzione meromorfa su  $\mathbb{Z}$ , che non appartiene a  $K$ : si osserva infatti che  $\sigma^*(\gamma) = -\gamma$ . Ora, se  $f \in L$ ,  $f = f^+ + f^-$  e  $f^+ + f^- = f^+ + \frac{f^-}{\gamma}\gamma$ . Dato che  $\frac{f^-}{\gamma} \in K$  (ancora per il lemma precedente), si conclude che  $\{1, \gamma\}$  è un sistema di generatori di  $L$  come estensione di  $K$ .  $\square$

**Osservazione.** Il gruppo  $G = \{\text{id}_{\mathbb{Z}}, \sigma\}$  coincide con  $\text{Gal}(L|K)$ .