Dimitri Ara: *Foncteurs lax normalisés entre n-catégories strictes*

[traduco in italiano] [tra parentesi [ ] metto commenti miei]

(Lavoro "molto recente" con G. Maltsiniotis)

Scopo: definire una nozione di funtore lasco (lax) normalizzato tra n-categorie strette.

Motivazione: teoria dell'omotopia delle n-categorie strette.

Caso $n=1$. $F, G : C \to D$ funtori. Un'omotopia tra F e G è data da $H : C \times \Delta_1 \to D$ tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} C\times\{1\} \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "G"] & & \\ & C\times\Delta_1 \arrow[r, "H"] & D \\ C\times\{0\} \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "F"'] & & \end{tikzcd}$$

Se $N : Cat \to \hat{\Delta}$ è il nervo, troviamo che NF e NG sono omotopi.

$\boxed{n=2}$ $F, G : C \to D$ siano 2-funtori stretti tra 2-categorie.

$N : \underline{2\text{-}Cat} \to \hat{\Delta}$ sia il nervo.

Esempio: $C = D = $ $\begin{tikzcd} & 2 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow"] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$; $F = ! \mapsto 0$, $G = id$

Ma: NF e NG sono omotopi, ma non esiste un'omotopia stretta tra F e G. $\rightsquigarrow$ servono omotopie lasche.

In $n=2$, ~~lui~~ si riesce a definire $H : C \times \Delta_1 \to D$ oplax normalizzato.

Teorema (Chiche (del Hoyo)): $N : \underline{2\text{-}Cat} \to \hat{\Delta}$ sia il nervo. N induce un'equivalenza:

$$\bar{N} : 2\text{-}Cat[W_{Thom}^{-1}] \xrightarrow{\sim} Ho(\hat{\Delta}),$$

con $W_{Thom} = N^{-1}(W_{\hat{\Delta}})$

Domanda: dimostrare un risultato simile per $n \geq 3$. C'è bisogno di n-funtori laschi

---

Più in dettaglio il caso $n=2$.

Def: un 2-funtore oplax normalizzato $F : C \to D$ è dato da:

- $x \in C \longmapsto F(x) \in D$
- $(x \xrightarrow{u} y) \longmapsto (F(x) \xrightarrow{F(u)} F(y))$
- $\Downarrow\alpha \longmapsto \Downarrow F(\alpha)$

] morfismo di 2-grafi.

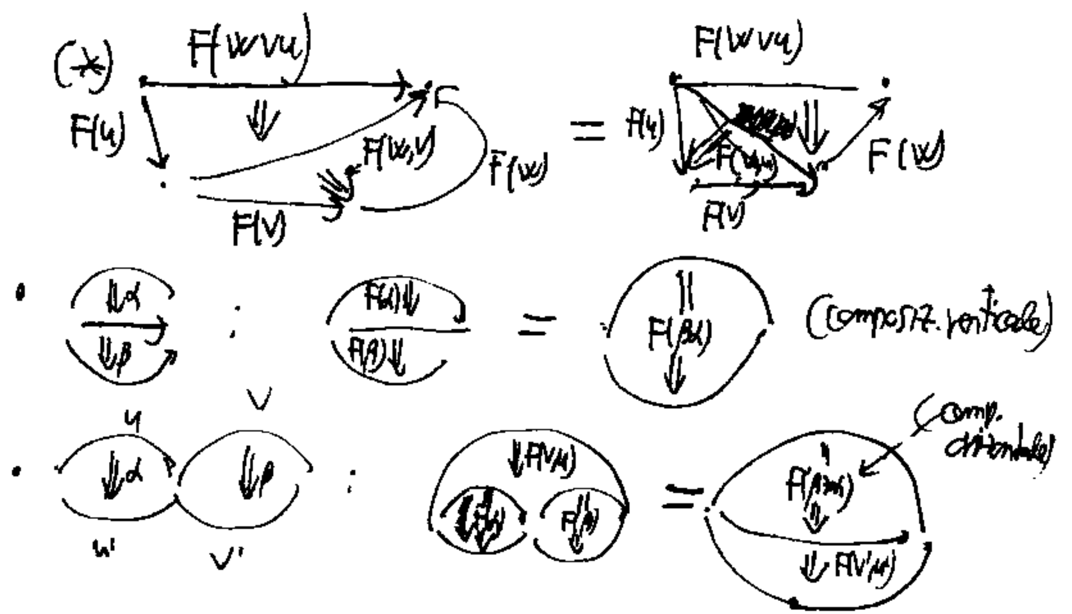
- $x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z \longmapsto$ $\begin{tikzcd} & F(z) \\ F(x) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[r, phantom, shift left=3, "F(v{,}u)\Downarrow"] & F(y) \arrow[u] \end{tikzcd}$ ($F(v,u)$ una 2-freccia.)

tali che:

- $F(1_x) = 1_{F(x)}$
- $F(u,1) = 1 = F(1,u)$
- $F(1_u) = 1_{F(u)}$

] normalizzazione

- $\cdot \xrightarrow{u} \cdot \xrightarrow{v} \cdot \xrightarrow{w} \cdot$:



Nota: (*) $\iff$  (tetraedri)

Osservazione chiave: se C è una 1-categoria, un funtore oplax normalizzato $C \to D$ [qui D una 1-Cat, o una 2-Cat?] è la stessa cosa di un morfismo $NC \to ND$ in $\hat{\Delta}$ (nervi negli insiemi simpliciali).

Definiamo $i_2 : \Delta \to \underline{2\text{-Cat}}$. A $\Delta_n = [n]$ associamo la 2-categoria $i_2[n] = i_2(\Delta_n)$ seguente:

$ob = \{0, \dots, n\}$

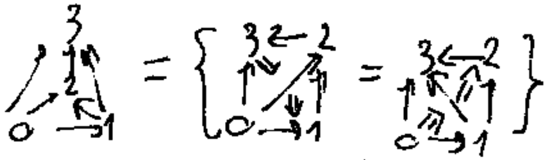
$\underline{Hom}(i,j)$ = insieme ordinato per inclusione dei sottoinsiemi $S \subseteq \{0,\dots,n\}$ t.c. $\min S = i$, $\max S = j$.

Dunque abbiamo: $N_{i_2} : 2\text{-Cat} \longrightarrow \hat{\Delta}$

$C \longmapsto [\Delta_n \longmapsto Hom_{2\text{-Cat}}(i_2(\Delta_n), C)]$

In dimensioni piccole:

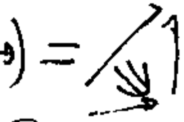
$i_2(\Delta_0) = *$; $i_2(\Delta_1) = 0 \to 1$; $i_2(\Delta_2) = $ $0 \overset{\Downarrow}{\to} 1 \to 2$;

$i_2(\Delta_3) =$ 

Allora un funtore oplax normalizzato tra 2-Cat $F : C \to D$ corrisponde ad un morfismo $NC \to ND$ [penso che intenda $N = N_{i_2}$].

[A questo punto, per quello che ho capito, l'idea è quella di utilizzare categorie A di "schemi di composizione", e poi funtori definiti su A che spieghino ~~gli~~ le proprietà che vuoi sulle composizioni].

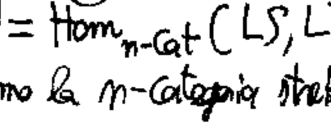
Caso $n=2$: vogliamo definire $i_c, i_S : A \to 2\text{-Cat}$ [c sta per "cellulare", S sta per "smaglare"?]

$i_c(\to\to) = \to\to$ $\quad i_S(\to\to) =$ 

poi due nervi $N_{i_c}, N_{i_S} : 2\text{-Cat} \to \hat{A}$, e a quel punto un funtore $F : C \to D$ oplax normalizzato corrisponde a ~~un~~ un morfismo $N_{i_c} C \to N_{i_S} D$ in $\hat{A}$.

Possiamo prendere $A = \Theta_2$, ove Θ_n = categoria Θ_n di Joyal:

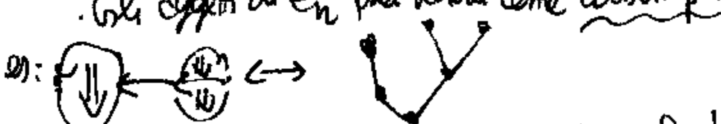
- $ob\,\Theta_n$ = schemi di composizioni globulari di altezza $h \le n$

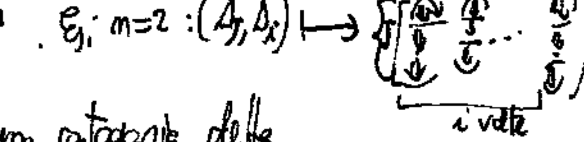
$h=0 : *$; $h=1$ $\to \to \cdot \to \cdot \cdot \to$; $h=2$:  ; … ; h qualunque: hai cose tipo 

- Morfismi di Θ_n: $Hom_{\Theta_n}(S,T) = Hom_{n\text{-Cat}}(LS, LT)$, ove con LS (e analogam. LT) indichiamo la n-categoria stretta libera su S.

Oss.: $\Theta_1 = \Delta$.

Gli oggetti di Θ_n puoi vederli come alberi planari finiti livellati

es: 

Con Θ_3 si ottiene una buona nozione di 3-funtore lasco [se non ho capito male]. Già con Θ_4, NO. Come fare? Si ha un funtore: $\Delta^n \to \Theta_n$, tale che $(\Delta_{i_n}, \dots, \Delta_{i_1}) \longmapsto$  $i_n \times \dots \times i_1$. Es: $n=2 : (\Delta_j, \Delta_i) \longmapsto$ i volte

- L'immagine di questo funtore è una categoria, detta Ξ_n:

$\underbrace{\Xi_n \subseteq \Theta_n \hookrightarrow n\text{-Cat}}_{i_c}$, poi si definisce $i_S : \Xi_n \to n\text{-Cat}$ ("lungo tecnico")

$\rightsquigarrow F : C \to D$ oplax norm $\longleftrightarrow N_{i_c} C \to N_{i_S} D \in \hat{\Xi}_n$.