Geometria Differenziale

(senza pretese)

Questo documento è nato per ammazzare il tempo durante una serie di pomeriggi svuotati di impegni. Era da tempo che progettavo un riordino di certi concetti, che è culminato nella riscrittura (e in una certa "sistemazione formale", che adeguasse i concetti al mio modo di intuire i fatti che leggevo) di un manoscritto che mi è stato gentilmente regalato da un compagno di corso. Restano, è ovvio, validi tutti gli avvertimenti che mi premuro di allegare ai frutti delle mie elucubrazioni: nulla di tutto questo è originale, quasi tutto è impreciso, inelegante, laddove non sia irrecuperabilmente, integralmente errato. Tanto più che le interpolazioni completamente dovute alla mia mano sono afflitte da un grosso difetto di disomogeneità: a volte le carte vanno da un aperto alla varietà, a volte viceversa. Ho cercato di unificare notazione e concetto per qualche giorno, ma altri impegni mi hanno poi distolto dall'impresa. Esiste sicuramente un modo di evitare certe sconcezze grafico–concettuali, che nel contempo metta al riparo dal rischio di perdersi in un nebuloso *non–sense* fatto di definizioni di cui poi non si vede nessuna incarnazione: esiste, ma io non l'ho (per ora) trovato.

Un punto imprecisato di $\mathbb{S}^2$, 1 gennaio 2010.

0 Richiami e notazioni

Introduzione. Dato un insieme X indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ la collezione di tutti i sottoinsiemi di X. Chiamiamo $\mathcal{P}(X)$ *insieme delle parti* oppure *insieme potenza* di X. Le operazioni insiemistiche di unione e intersezione inducono sull'insieme delle parti una struttura di reticolo, oppure (è equivalente) di insieme ordinato, con la relazione di inclusione. E' ad una sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$ che chiederemo alcune proprietà di stabilità, al fine di costruire una *struttura topologica* su X.

Definizione 0.1 [Topologia]**:** *Una* topologia *sull'insieme X è una sottofamiglia $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che*

- $\varnothing, X \in \mathcal{O}$*;*
- *Se Λ è un insieme arbitrario che indicizza una successione $\lambda \mapsto A_\lambda$ di elementi di $\mathcal{O}$, si ha $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$ (*stabilità per unioni arbitrarie*);*
- *Se (A_n) è una famiglia* finita *di elementi di $\mathcal{O}$ si ha $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{O}$ (*stabilità per intersezioni finite*).*

Gli elementi di $\mathcal{O}$ si dicono aperti*, e si dice che un aperto* è intorno *di ogni suo punto $a \in A$.*

Osservazione. L'operazione di complementazione induce su $\mathcal{P}(X)$ un antiautomorfismo di reticoli (dualità di De Morgan) che rende possibile una definizione alternativa di topologia: si tratta di una sottofamiglia $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che

- $\varnothing, X \in \mathcal{C}$;
- $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$ per ogni famiglia di indici $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$;
- $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{O}$ per ogni famiglia *finita* di indici $(A_j)_{j=1}^n$.

L'equivalenza delle due definizioni è facile da provare, alla luce della sunnominata dualità di De Morgan.

Una topologia su un insieme è univocamente determinata dall'assegnazione dei suoi aperti o dei suoi chiusi. Uno *spazio topologico* è una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$, dove $\mathcal{O}_X$ è una topologia su X. Dato un insieme X, la collezione di tutte le topologie su X è un insieme, parzialmente ordinato dalla relazione $\preceq$ di *finezza*: $\mathcal{O} \preceq \mathcal{Q}$ se $\mathcal{Q}$ se tutti gli aperti di $\mathcal{O}$ sono aperti di $\mathcal{Q}$.

Definizione 0.2 [Base]**:** *Una* base *di una topologia è un sottoinsieme B della topologia $\mathcal{O}$ tale che ogni elemento di $\mathcal{O}$ sia unione arbitraria di elementi di B.*

Uno spazio topologico si dice *a base numerabile* se esiste una base B di $\mathcal{O}$ che è un insieme di cardinalità numerabile.

Definizione 0.3 [Funzione Continua]**:** *Dati due spazi topologici $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ è ben nota*[1] *la definizione di* morfismo di spazi topologici *(o* funzione continua*): $f\colon X \to Y$ è continua se per ogni aperto $V \in \mathcal{O}_Y$ si ha $f^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{O}_X$ (la controimmagine di un aperto mediante f è ancora un aperto).*

Spesso si scrive che f è continua quando $f^{\leftarrow}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_X$, con ovvio significato della notazione.

Definizione 0.4 [Topologia Indotta]**:** *Dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{O}_X)$ e un sottoinsieme $S \subset X$, si può dotare naturalmente S di una topologia $\mathcal{O}_S = \{S \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X\}$, fatta dalle tracce di aperti di X su S: la topologia così ottenuta si dice* topologia indotta *da X su S.*

La topologia indotta da X su S è la più piccola che rende continua la funzione di inclusione $\iota\colon S \hookrightarrow X$.

Definizione 0.5 [Topologia Prodotto]**:** *Consideriamo due spazi topologici $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$: il prodotto cartesiano $X \times Y$ può essere dotato in modo canonico di una struttura topologica, ponendo $\mathcal{O}_{X\times Y} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{O}_X,\ B \in \mathcal{O}_Y\}$.*

Su $X \times Y$ vi sono delle ovvie mappe canoniche di *proiezione* $\pi_X\colon X \times Y \to X$, $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$: la topologia prodotto è la topologia meno fine a rendere continue le proiezioni. Se $f\colon X \to Y_1 \times Y_2$ è una funzione, essa è continua se e solo se lo sono le sue proiezioni[2]: deve commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl] \arrow[d, "f"] \arrow[dr] & \\
Y_1 & Y_1 \times Y_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"'] & Y_2
\end{tikzcd} \tag{1}$$

[1]Pur se a prima vista non molto naturale: a questo proposito...

[2]L'insieme di questi fatti equivale a dire che il prodotto di spazi topologici così definito è un *prodotto* in **Top**, la categoria degli spazi topologici.

Non è difficile osservare che, se $f\colon X \to Y$ è funzione tra spazi topologici, e tanto più difficile per f essere continua quanto più fine è la topologia sull'insieme di arrivo, e tanto meno fine è quella sull'insieme di partenza. Non è banale allora quando, raffinando la topologia su Y, f resta continua: studiamo in particolare la topologia *più fine* su Y che rende continua f.

Definizione 0.6 [Topologia Quoziente]**:** *La* topologia quoziente *su Y rispetto a $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ è data da*

$$\mathcal{O}_f = \{U \subset Y \mid f^{\leftarrow}(U) \in \mathcal{O}_X\}$$

E' chiara la proprietà di massimalità: se $\mathcal{A}$ è un'altra topologia che rende f continua, $\mathcal{O}_f$ la contiene.

Esauriti questi preliminari (volti per lo più a fissare le notazioni del seguito, anche se forse perderemo in fretta questa abitudine), partiamo con il discorso introduttivo principale.

---

1 Teoria delle Superfici Reali.

Raccogliamo alcune definizioni di partenza, e risultati di base, relativi alla teoria delle superficie in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1.1 [Superficie Regolare]**:** *Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice* superficie regolare *se, per ogni $p \in S$, esistono un intorno $V \subset \mathbb{R}^3$ e una mappa $\varphi(\cdot)\colon U \to V \cap S$ da un aperto U di $\mathbb{R}^2$ in $V \cap S$ (che, nella topologia indotta su S, è aperto) tale che*

1. *$\varphi(\cdot)$ sia (infinitamente) differenziabile, ossia se scriviamo*

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

   le funzioni $x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)\colon U \to \mathbb{R}$ sono (infinitamente) differenziabili in U;

2. *φ sia un omeomorfismo con l'immagine $\varphi(U)$;*

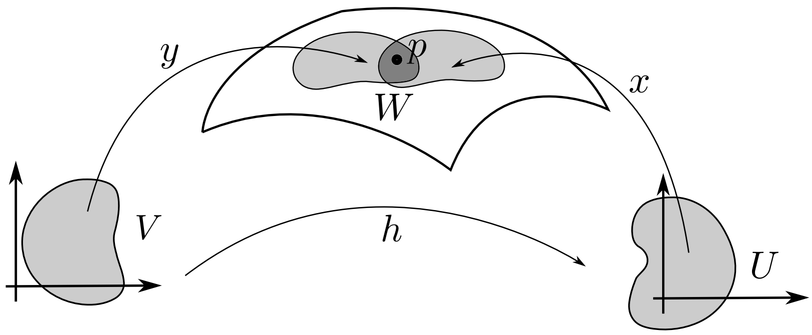
3. *per ogni* $q \in U$ *il differenziale* $\mathrm{d}\varphi_q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *sia iniettivo. Ciò equivale a chiedere che il rango dello jacobiano di* $\varphi(\cdot)$,

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2. *Ancora, è equivalente chiedere che in ogni punto di* U *si abbia* $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \neq 0$.

La mappa $\varphi(\cdot)$ *si chiama* parametrizzazione locale *di* S. *L'intorno* $V \cap S$ *di* p *in* S *si chiama* intorno coordinato.

Si mostra che la definizione è ben posta a meno di $\mathcal{C}^\infty-$diffeomorfismi, nel senso che se $p \in S$ superficie regolare, e $\varphi(\cdot) \colon U \to S$, $\psi(\cdot) \colon V \to S$, tali che $p \in W = \varphi(U) \cap \psi(V)$, allora la mappa $\eta = \varphi^{-1} \circ \psi \colon \psi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W)$ è un diffeormorfismo.



Funzioni differenziabili. Se $f \colon V \subset S \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su un aperto V di S, superficie regolare in $\mathbb{R}^3$, essa si dice *differenziabile* in $p \in V$ se esiste una parametrizzazione locale $\varphi \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, con $p \in \varphi(U) \subset V$ tale che la composizione $f \circ \varphi \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sia differenziabile in (un intorno di) $\varphi^{-1}(p) \in U$. La definizione è ben posta (non dipende da $\varphi(\cdot)$), infatti presa un'altra parametrizzazione $\psi(\cdot)$, il cambio di coordinate è diffeomorfismo: $f \circ \psi = f \circ \varphi \circ \eta$ (che è ancora $\mathcal{C}^\infty-$differenziabile).

Questa definizione si riesce a estendere facilmente al caso di una mappa tra due superfici regolari: $f \colon S_1 \to S_2$ si dice *differenziabile in* $p \in S_1$ se esistono due parametrizzazioni $\varphi_1 : U_1 \to S_1$, $\varphi_2 : U_2 \to S_2$, con

$p \in \varphi_1(U_1)$, $f(\varphi_1(U_1)) \subset \varphi_2(U_2)$, tali che $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 \colon U_1 \to U_2$ sia differenziabile come usuale mappa di aperti in $q = \varphi_1^{-1}(p)$. In sostanza, si impone la commutazione a

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "f"] & S_2 \\ U_1 \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi_2^{-1}\circ f\circ\varphi_1"'] & U_2 \arrow[u, "\varphi_2"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

La mappa di aperti $\widetilde{f} = \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ si dice *espressione locale* di f.

Due superfici regolari S_1, S_2 si dicono *diffeomorfe* se esiste una biiezione differenziabile in entrambi i versi da S_1 a S_2.

Piano tangente a S. Ricordando la condizione 3 di (1.1), data una superficie regolare S e una sua parametrizzazione $\varphi(\cdot)\colon U \to S$ ha senso definire il *piano tangente* in p a S come

$$T_pS := \mathrm{d}\varphi_q(\mathbb{R}^2)$$

ove al solito $q = \varphi^{-1}(p)$. Data l'iniettività di $\mathrm{d}\varphi_q$ infatti T_pS è un piano affine in $\mathbb{R}^3$, ed è facile mostrare che esso non dipende dalla parametrizzazione scelta. Se $p = \varphi(q)$ i due vettori $\{\partial_u\varphi(q), \partial_v\varphi(q)\}$ formano una base di T_pS. La nozione di piano tangente è intimamente connessa a quella di curva differenziabile con sostegno su S, nel senso che segue.

Una curva $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to S$ si dice *differenziabile in* t_0 se esiste una parametrizzazione $\varphi\colon U \to S$ tale che $\alpha(t_0) \in \varphi(U)$ e $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, dove $u(\cdot), v(\cdot)\colon I \to \mathbb{R}$ sono differenziabili in t_0 (la funzione $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ è detta *pull–back* di α, ed è definita in modo tale che $\varphi \circ \bar{\alpha} = \alpha$).

E' facile mostrare che T_pS coincide con l'insieme dei vettori tangenti in p alle curve differenziabili tracciate su S e passanti per p: si ha infatti che

$$\dot{\alpha}(t_0) = \dot{u}(t_0)\partial_u\varphi(q) + \dot{v}(t_0)\partial_v\varphi(q) \in T_pS$$

(è il vettore di coordinate $(\dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0)) = \dot{\bar{\alpha}}(t_0)$ nella base naturale indotta dalla parametrizzazione) e viceversa se $w \in T_pS$ si ha $w = \lambda\partial_u\varphi(q) + \mu\partial_v\varphi(q)$, ove $q = (u_0, v_0)$, posto $\alpha(t) = \varphi(u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t)$, si ha $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = w$.

Differenziale di una applicazione tra superfici. Sia $f\colon S_1 \to S_2$ un'applicazione differenziabile tra due superfici regolari. Sia $p \in S_1$. Per quanto osservato sopra, ogni vettore $w \in T_pS_1$ è il vettore tangente $\dot\alpha(t_0)$ di una qualche curva differenziabile α che ha sostegno su S, tale che $\alpha(t_0) = p$. Se definiamo la curva $\beta(t) := f(\alpha(t))$, abbiamo $\beta(t_0) = f(p)$ e $\dot\beta(t_0) \in T_{f(p)}S_2$. Potendosi mostrare che $\dot\beta(t_0)$ è un vettore indipendente dalla scelta di α, si definisce una mappa

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_p\colon T_pS_1 &\to T_{f(p)}S_2 \\ \mathrm{d}f_p(w) = \dot\beta(t_0) &= \mathrm{d}f(\alpha(t_0))\dot\alpha(t_0) \end{aligned} \tag{3}$$

Si mostra direttamente che tale mappa è lineare: $\mathrm{d}f_p(\cdot)$ si dice *differenziale* di f in p.

Osservazione. Siano S_1, S_2 superfici regolari, $f\colon S_1 \to S_2$, $p \in S_1$, $\varphi\colon U_1 \to S_1$, $\psi\colon U_2 \to S_2$ due parametrizzazioni locali di S_1, S_2 tali che $\varphi(U_1) \ni p$, $\psi(U_2) \ni f(p)$. Sia poi $q = (q_1, q_2)$ tale che $\varphi(q) = p$, e $\widetilde{f}(u, v)$ l'espressione locale di f. Allora $\mathrm{d}f_p\colon T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ ha matrice

$$\operatorname{Jac}\widetilde{f}(q) = \begin{pmatrix} \partial_u \widetilde{f}_1(q) & \partial_v \widetilde{f}_1(q) \\ \partial_u \widetilde{f}_2(q) & \partial_v \widetilde{f}_2(q) \end{pmatrix} \tag{4}$$

nelle basi $\{\partial_u\varphi, \partial_v\varphi\}$ su T_pS_1, $\{\partial_u\psi, \partial_v\psi\}$ su $T_{f(p)}S_2$.

Prima forma fondamentale. La restrizione dell'applicazione bilineare standard (di matrice identica nella base canonica di $\mathbb{R}^3$) induce su ogni piano tangente un prodotto scalare denotato con $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_p$. Questo induce a sua volta in modo naturale una *norma* su T_pS, definita da

$$\mathbf{I}_p(w) := \langle w \,|\, w \rangle_p = \|w\|_p^2 \tag{5}$$

questa applicazione bilineare si dice *prima forma fondamentale* di S.

La prima forma fondamentale ha una naturale espressione in coordinate locali: se $\varphi\colon U \to S$ è una parametrizzazione, e $p \in varphi(U)$, $p = \varphi(q)$, ogni $w \in T_pS$ è combinazione lineare dei vettori di base $\{\partial_u\varphi(q), \partial_v\varphi(q)\}$: $w = \lambda\partial_u\varphi(q) + \mu\partial_v\varphi(q)$, pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p(w) &= \langle \lambda\partial_u\varphi(q) + \mu\partial_v\varphi(q) \,|\, \lambda\partial_u\varphi(q) + \mu\partial_v\varphi(q) \rangle_p = \\ &= \langle \partial_u\varphi(q) \,|\, \partial_u\varphi(q) \rangle \lambda^2 + 2 \langle \partial_u\varphi(q) \,|\, \partial_v\varphi(q) \rangle \lambda\mu + \langle \partial_v\varphi(q) \,|\, \partial_v\varphi(q) \rangle \mu^2 := \\ &:= E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 \end{aligned} \tag{6}$$

dove $E(u,v) = \langle \partial_u\varphi(q) \,|\, \partial_u\varphi(q)\rangle$, $F(u,v) = \langle \partial_u\varphi(q) \,|\, \partial_v\varphi(q)\rangle$, $G(u,v) = \langle \partial_v\varphi(q) \,|\, \partial_v\varphi(q)\rangle$. Le funzioni (differenziabili al variare di $p \in \varphi(U)$) $E(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)$ sono i *coefficienti metrici* della prima forma fondamentale di S. Si osservi che $\mathbf{I}_p(w)$ si può anche esprimere come

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Notiamo che la matrice della prima forma fondamentale (che è, per inciso la matrice di Grahm del prodotto scalare canonico nella base naturale di T_pS) è definita positiva grazie alla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

Lunghezze, Angoli, Aree. La prima forma fondamentale di S permette di calcolare, in modo intrinseco (cioè senza far ricorso ad argomenti coinvolgenti l'immersione di S in $\mathbb{R}$ì3) la *lunghezza di curve su* S, l'*angolo* tra due curve su S e di misurare l'*area* di una regione di S:

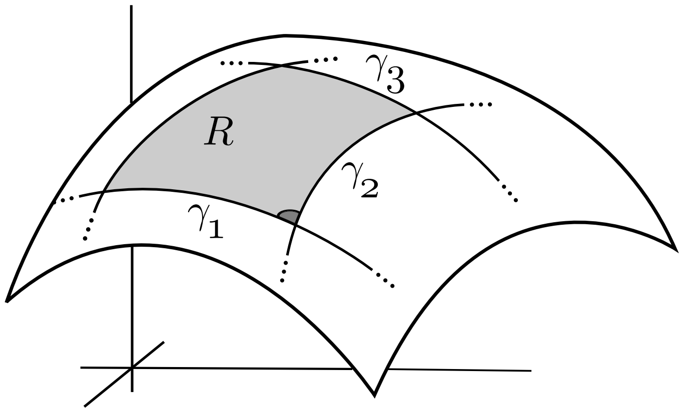
- Prendiamo come al solito una parametrizzazione $\varphi\colon U \to S$, e sia $\alpha(t) = \varphi(\bar{\alpha}(t))\colon [a,b] \to S$ ($\bar{\alpha} = (u(t), v(t))$ è il pull–back di α) una curva differenziabile di estremi p_1, p_2 su S. La lunghezza di α è definita dal funzionale $\mathcal{L}\colon \mathscr{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}$ ($\mathscr{C}^\infty(p)$ è definito informalmente come l'insieme delle curve differenziabili a supporto contenuto in S),
$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \,\mathrm{d}t;$$
poiché si ha $\dot{\alpha}(t) = \partial_u\varphi\dot{u} + \partial_v\varphi\dot{v}$ abbiamo che
$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

- L'*angolo* ϑ tra due curve regolari in $\mathscr{C}^\infty(p)$, $\alpha\colon I \to S$, $\beta\colon J \to S$, che si intersecano in t_0 si definisce intuitivamente come l'angolo formato su T_pS dai rispettivi vettori tangenti:
$$\cos\vartheta = \frac{\left\langle \dot{\alpha}(t_0) \,|\, \dot{\beta}(t_0) \right\rangle_p}{\|\dot{\alpha}(t_0)\| \left\|\dot{\beta}(t_0)\right\|}$$

in particolare l'angolo tra due curve coordinate di una parametrizzazione locale φ[3] è dato da

$$\cos\vartheta_{\mathrm{c}} = \frac{\langle \partial_u\varphi \,|\, \partial_v\varphi\rangle}{\|\partial_u\varphi\| \, \|\partial_v\varphi\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Da ciò segue immediatamente che una superficie ha curve coordinate tra loro ortogonali se e solo se $F \equiv 0$ (ossia se la matrice di $\mathbf{I}_p$ nella base naturale è diagonale).



- Diciamo *dominio su* S un sottoinsieme D di S aperto e connesso nella topologia indotta, tale che esista un omeomorfismo $h\colon \mathbb{S}^1 \to \partial D$, differenziabile almeno a tratti. Se D è un dominio su S, diremo *regione di* S la chiusura di D, $\overline{D}$. Siamo ora interessati al calcolo dell'*area* di una regione di S.

  Sia $\varphi\colon U \to S$ una parametrizzazione di S, $R \subset \varphi(U)$ una regione di S. Diciamo $Q = \varphi^{\leftarrow}(R)$: allora l'area di R è data (grazie ad una formula analoga in Analisi Matematica e alla formula del cambio di variabili: l'integrale si suppone alla Lebesgue per evitare fastidi) da

$$\mu(R) := \iint_{\varphi^{\leftarrow}(R)} \|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{9}$$

  e poiché $\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|^2 = \|\partial_u\varphi\|^2 \, \|\partial_v\varphi\|^2 - \langle \partial_u\varphi \,|\, \partial_v\varphi\rangle^2$, si ha anche

$$\mu(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

[3]Le *curve coordinate* sono definite come le curve in $\mathscr{C}^\infty(p)$ che hanno per pull–back una delle rette coordinate $u = $cost., $v = $cost.

Il calcolo di lunghezze, angoli e aree si risolve dunque completamente *tornando indietro* (*pulling–back…*) all'aperto coordinato che parametrizza S.

Seconda Forma Fondamentale. Sia S una superficie regolare, $\varphi\colon U \to S$ una parametrizzazione locale. Per ogni $p = \varphi(q) \in \varphi(U)$ il vettore

$$\mathrm{N}(p) := \frac{\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi}{\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|} \tag{10}$$

è normale a T_pS e di norma unitaria. Abbiamo allora una mappa differenziabile $\mathrm{N}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni $p \in \varphi(U)$ un versore $\mathrm{N}(p)$.

Se la superficie S ammette in ogni punto un campo di versori normali, e se tale campo vettoriale è differenziabile su tutto il dominio, S si dice *orientabile.* La scelta di una *orientazione* su S è la scelta di un tale campo differenziabile. Esistono superfici non orientabili: quella di dimensione minima è il *nastro di Möbius* in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1.2 [Mappa di Gauss]**:** *Sia S una superficie dotata dell'orientazione* N*: quest'applicazione, vista come* $\mathrm{N}\colon S \to \mathbb{S}^2$*, si dice* mappa di Gauss *di S.*

Il differenziale dN_p di N in $p \in S$ è lineare da T_pS a $T_{\mathrm{N}(p)}\mathbb{S}^2 = T_pS$ (visto come piano parallelo), e quindi possiamo pensare che $\mathrm{dN}_p \in \mathrm{End}(T_pS)$. Si mostra direttamente che dN_p è autoaggiunto: ossia

$$\langle \mathrm{dN}_p(x) \,|\, y\rangle_p = \langle x \,|\, \mathrm{dN}_p(y)\rangle_p\,, \qquad \forall\, x, y \in T_pS$$

Definizione 1.3 [Seconda Forma Fondamentale]**:** *La* seconda forma fondamentale $\mathrm{I\!I}_p$ *in T_pS è definita da*

$$\mathrm{I\!I}_p(w, w) := -\,\langle \mathrm{dN}_p(w) \,|\, w\rangle\,, \qquad \forall\, w \in T_pS \tag{11}$$

Anche la seconda forma fondamentale di S ha un'espressione in coordinate locali: se φ è una parametrizzazione di S abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{I\!I}_p(\partial_u\varphi, \partial_u\varphi) &= -\,\langle \mathrm{dN}_p(\partial_u\varphi) \,|\, \partial_u\varphi\rangle = -\,\langle \partial_u\mathrm{N} \,|\, \partial_u\varphi\rangle = \langle \mathrm{N} \,|\, \partial_{uu}\varphi\rangle\\
\mathrm{I\!I}_p(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi) &= -\,\langle \mathrm{dN}_p(\partial_u\varphi) \,|\, \partial_v\varphi\rangle = -\,\langle \partial_u\mathrm{N} \,|\, \partial_v\varphi\rangle = \langle \mathrm{N} \,|\, \partial_{uv}\varphi\rangle\\
\mathrm{I\!I}_p(\partial_v\varphi, \partial_u\varphi) &= -\,\langle \mathrm{dN}_p(\partial_v\varphi) \,|\, \partial_v\varphi\rangle = -\,\langle \partial_v\mathrm{N} \,|\, \partial_v\varphi\rangle = \langle \mathrm{N} \,|\, \partial_{vv}\varphi\rangle
\end{aligned}$$

Se allora poniamo $e = \langle \mathrm{N} \,|\, \partial_{uu}\varphi \rangle$, $f = \langle \mathrm{N} \,|\, \partial_{uv}\varphi \rangle$, $g = \langle \mathrm{N} \,|\, \partial_{vv}\varphi \rangle$, otteniamo i *coefficienti metrici* della seconda forma fondamentale di S (rispetto alla base naturale su T_pS).

Particolare importanza acquistano gli invarianti di similitudine di dN_p: definiamo allora

Definizione 1.4 [Curvatura Media, Curvatura Gaussiana]**:** *Sia $p \in S$ superficie regolare, $\mathrm{dN}_p \colon T_pS \to T_pS$ il differenziale della mappa di Gauss. Si definiscono la* curvatura gaussiana *K e la* curvatura media *H come*

$$K(p) := \det \mathrm{dN}_p \qquad H(p) := -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathrm{dN}_p$$

Le curvature di S si scrivono in funzione dei coefficienti metrici della prima e seconda forma fondamentale di S:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}$$

Si ha però un risultato non banale, dovuto a Gauss:

Teorema 1.1 [Egregium di Gauss]**:** *La curvatura gaussiana di S è* intrinseca*, si esprime cioè in funzione dei coefficienti metrici della sola prima forma fondamentale, e delle loro derivate prime e seconde*[4].

Dimostrazione. Per brevità cominceremo ad indicare $\varphi_w = \partial_w\varphi$. Se S è una superficie liscia con una carta (U, φ), la terna $\{\varphi_u, \varphi_v, \mathrm{N}\}$ è in ogni punto una base di $\mathbb{R}^3$: dunque le derivate dei vettori del riferimento si devono poter esprimere come combinazioni lineari dei vettori del riferimento stesso: supponiamo $S \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{N} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$, e cambiamo notazioni intendendo $(u, v) = (u_1, u_2)$ e con φ_j la derivata rispetto a u_j. Allora devono esistere delle funzioni $\Gamma_{ij}^h, \eta_{ij}, \alpha_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tali che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma_{ij}^1\varphi_1 + \Gamma_{ij}^2\varphi_2 + \eta_{ij}\mathrm{N} \\ \dfrac{\partial(\mathrm{N} \circ \varphi)}{\partial x_j} = \alpha_{1j}\varphi_1 + \alpha_{2j}\varphi_2 \end{cases} \tag{$\star$}$$

[4] Vale la pena di riportare il testo come enunciato dallo stesso Gauss nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*: "Formula itaque [...] sponte perducit ad egregium theorema: *si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicantur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*"

in particolare le α_{ij} devono coincidere con le entrate della matrice dell'applicazione di Weingarten, e le η_{ij} sono i coefficienti della seconda forma fondamentale. Le funzioni $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ sono dette *coefficienti di Christoffel* della carta φ: grazie alla regola di Schwarz per le derivate di ordine superiore al primo ne otteniamo la simmetria rispetto agli indici in basso.

Lemma 1.1 : *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie liscia e sia $\varphi \colon U \to S$ una sua carta. Per ogni $i, j = 1, 2$ si ha*

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{ij}^1\\ \Gamma_{ij}^2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1}\\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2}\end{pmatrix}$$

ove con g_{ij} si sono indicate le entrate della prima forma fondamentale: $E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$. Esplicitando queste relazioni con le notazioni di Gauss si ha

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1\\ \Gamma_{11}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_1}\\ \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{12}^1\\ \Gamma_{12}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{22}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_2}\end{pmatrix} \tag{12}$$

La dimostrazione si ottiene moltiplicando scalarmente le $(\star)$ per φ_1, φ_2: ad esempio se fissiamo $i = j = 1$ otteniamo

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \langle \varphi_{11} \,|\, \varphi_1 \rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\langle \varphi_1 \,|\, \varphi_1 \rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u_1}\\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \langle \varphi_{11} \,|\, \varphi_2 \rangle = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\langle \varphi_1 \,|\, \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_1 \,|\, \varphi_{12} \rangle = \dfrac{\partial F}{\partial u_1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u_2}\end{cases}$$

In maniera analoga si giunge a determinare le altre. □

Corollario. I coefficienti di Christoffel si riescono ad esprimere come quantità relate ai soli coefficienti metrici g_{ij} e alle loro derivate del primo e secondo ordine. Risulta allora immediato che ogni altra quantità che si riesca a scrivere con i soli simboli di Christoffel è intrinseca alla superficie. Proprio questa sarà la strada che seguiremo, mostrando che i coefficienti della seconda forma fondamentale si riescono a scrivere con i coefficienti di Christoffel.

Teorema 1.2 [Gauss–Codazzi–Mainardi]**:** *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie liscia, (U, φ) una sua carta, allora vale*

$$\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r)\right] \tag{G}$$

$$\frac{\partial \eta_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial \eta_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}(\Gamma_{12}^r\eta_{r1} - \Gamma_{11}^r\eta_{r2}) = 0 \tag{CM1}$$

$$\frac{\partial \eta_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial \eta_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}(\Gamma_{22}^r\eta_{r1} - \Gamma_{21}^r\eta_{r2}) = 0 \tag{CM2}$$

La dimostrazione procede derivando le $(\star)$ rispetto a u_k:

$$\varphi_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k}\varphi_1 + \Gamma_{ij}^1\varphi_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k}\varphi_2 + \Gamma_{ij}^2\varphi_{2k} + \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial u_k}\mathrm{N} + \eta_{ij}\mathrm{N}_k$$

che per le stesse $(\star)$ è uguale a

$$\begin{aligned}\varphi_{ijk} = {} & \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k}\varphi_1 + \Gamma_{ij}^1(\Gamma_{1k}^1\varphi_1 + \Gamma_{1k}^2\varphi_2 + \eta_{1k}\mathrm{N}) + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k}\varphi_2 + \Gamma_{ij}^2(\Gamma_{1k}^1\varphi_1 + \Gamma_{1k}^2\varphi_2 + \eta_{2k}\mathrm{N}) + \\ & + \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial u_k}\mathrm{N} - \eta_{ij}(\alpha_{1k}\varphi_1 + \alpha_{2k}\varphi_2) = \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1\Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2\Gamma_{2k}^1 - \eta_{ij}\alpha_{1k}\right]\varphi_1 + \\ & + \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1\Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2\Gamma_{2k}^2 - \eta_{ij}\alpha_{2k}\right]\varphi_2 + \left[\Gamma_{ij}^1\eta_{1k} + \Gamma_{ij}^2\eta_{2k} + \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial u_k}\right]\mathrm{N}\end{aligned}$$

ora scambiando j e k otteniamo

$$\begin{aligned}\varphi_{ikj} = {} & \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1\Gamma_{1j}^1 + \Gamma_{ik}^2\Gamma_{2j}^1 - \eta_{ik}\alpha_{1j}\right]\varphi_1 + \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^1}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1\Gamma_{1j}^2 + \Gamma_{ik}^2\Gamma_{2j}^2 - \eta_{ik}\alpha_{2j}\right]\varphi_2 + \\ & + \left[\Gamma_{ik}^1\eta_{1j} + \Gamma_{ik}^2\eta_{2j} + \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial u_j}\right]\mathrm{N}\end{aligned}$$

e invocando il teorema di Schwarz già usato prima, abbiamo che i coefficienti di φ_{ijk} e φ_{ikj} devono essere funzionalmente coincidenti. Ma allora otteniamo tre uguaglianze

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1\Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2\Gamma_{2k}^1 - \eta_{ij}\alpha_{1k} =& \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1\Gamma_{1j}^1 + \Gamma_{ik}^2\Gamma_{2j}^1 - \eta_{ik}\alpha_{1j} \\
\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1\Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2\Gamma_{2k}^2 - \eta_{ij}\alpha_{2k} =& \frac{\partial \Gamma_{ik}^1}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1\Gamma_{1j}^2 + \Gamma_{ik}^2\Gamma_{2j}^2 - \eta_{ik}\alpha_{2j} \\
\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1\Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2\Gamma_{2k}^2 - \eta_{ij}\alpha_{2k} =& \Gamma_{ik}^1\eta_{1j} + \Gamma_{ik}^2\eta_{2j} + \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial u_j}
\end{aligned}$$

riordinando i termini dell'ultima, si ottengono le relazioni di Codazzi–Mainardi scritte in (CM). Le altre due, con manipolazioni simili, porgono

$$\begin{aligned}
\eta_{22}\alpha_{11} - \eta_{12}\alpha_{12} =& \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^1 - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^1) \\
\eta_{22}\alpha_{21} - \eta_{21}\alpha_{22} =& \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^2 - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^2)
\end{aligned}$$

se ora definiamo

$$T_r = \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r)$$

abbiamo la forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{22} \\ -\eta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{22} \\ -\eta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

ricordando la relazione tra le matrici delle forme fondamentali e quella dell'applicazione di Weingarten. Poi, prendendo la prima entrata, si ottengono le relazioni di (G). A questo punto segue la tesi originaria, perché $K = \frac{\eta_{11}\eta_{22}-\eta_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$, e il numeratore $\det \mathbf{II}\varphi_p$ si può esprimere con i soli coefficienti di Christoffel. $\square$

Osservazione (Formula di Brioschi per il calcolo di K)**.** Vale la relazione esplicita

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & E \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}\right] \quad (13)$$

Dimostrazione. E' un conto diretto (parecchio tedioso). □

---

2 Superfici Astratte

Se $U, V \overset{\text{ap}}{\subset} \mathbb{R}^n$ è nota la definizione di applicazione $\mathcal{C}^k(U,V)$. Sono di facile dimostrazione i risultati seguenti:

- Se $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ è di classe $\mathcal{C}^k$, ogni sua restrizione a $V \subset U$, $F|_V\colon V \to \mathbb{R}^m$ resta di classe $\mathcal{C}^k$. In particolare l'identità di $\mathbb{R}^n$ in sè è di classe $\mathcal{C}^\infty$, e dunque tutte le inclusioni $\iota_S\colon S \subset \mathbb{R}^n$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$.
- La composizione di applicazioni $\mathcal{C}^h, \mathcal{C}^k$ è una applicazione di classe $\mathcal{C}^{\min(h,k)}$.

Un *diffeomorfismo* di classe $\mathcal{C}^k$ è una biiezione $F\colon U \to V$ ove $U, V \overset{\text{ap}}{\subset} \mathbb{R}^n$ tale che sia F sia la sua inversa siano di classe $\mathcal{C}^k$.

Questa nozione si estende naturalmente al caso in cui $F\colon X \to Y$ sia una generica funzione di insiemi: se $X \subset \mathbb{R}^n$

- $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ si dice *di classe* $\mathcal{C}^k$ se per ogni $x \in X$ esistono un intorno aperto U_x di x e una mappa tra aperti $\phi_x\colon U_x \to \mathbb{R}^m$ che sia $\mathcal{C}^k$ nel senso usuale.
- se $X, Y \subset \mathbb{R}^m$, $F\colon X \to Y$ si dice $\mathcal{C}^k$ se la composizione di F con l'inclusione canonica è di classe $\mathcal{C}^k$ nel senso sopra detto.
- $F\colon X \to Y$ si dirà *diffeomorfismo* di classe $\mathcal{C}^k$ se è biiettiva e di classe $\mathcal{C}^k$ in entrambi i versi.

- Composizione/restrizione di applicazioni $\mathcal{C}^k$ è $\mathcal{C}^k$.

Definizione 2.1 [Carta Locale]**:** *Sia* $(X, \mathcal{O}_X)$ *uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. Una* carta locale *o* n–sistema di coordinate locali *è una coppia* (U, ϕ_U) *ove* U *è un aperto di* X *e* ϕ_U *è un omeomorfismo da* U *in un aperto di* $\mathbb{R}^n$*. Due carte* $(U, \phi_U), (V, \phi_V)$*si dicono* differenzialmente $\mathcal{C}^k$–compatibili *se la funzione*

$$\phi_V \circ \phi_u^{-1} \colon \phi_U(U \cap V) \to \phi_V(U \cap V)$$

è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$*.*

Le funzioni componenti di una carta $\phi_U(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ *si dicono* coordinate locali *in* U*. Talvolta* U *si dirà* aperto coordinatizzato *da* ϕ_U*.*

Osservazione. Ovviamente se due carte sono $\mathcal{C}^k$–compatibili sono anche $\mathcal{C}^h$–compatibili per ogni $h \leq k$.

Definizione 2.2 : *La funzione* $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ *si dice* mappa di transizione *dalle coordinate di* U *a quelle di* V*. Quel che si chiede a due carte compatibili è di essere uguali a meno di un diffeomorfismo di classe* $\mathcal{C}^k$*.*

Definizione 2.3 [Atlante]**:** *Un* n–atlante differenziabile *di classe* $\mathcal{C}^k$ *nello spazio topologico* X *è una famiglia fi* n*–carte locali* $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *tale che* $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *sia un ricoprimento di* X *e che le carte locali siano tutte a due a due differenzialmente* $\mathcal{C}^k$ *compatibili.*

Definizione 2.4 [Varietà differenziale di classe $\mathcal{C}^k$]**:** *Una varietà differenziale di classe* $\mathcal{C}^k$ *è uno spazio topologico di Hausdorff* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a base numerabile dotato di un* n*–atlante differenziabile di classe* $\mathcal{C}^k$*. Si dice anche che tale atlante definisce su* X *una struttura di varietà differenziabile di classe* $\mathcal{C}^k$*.*

La *dimensione* della varietà è la dimensione di un qualunque aperto nel quale una carta mappa aperti della varietà X. Tale nozione è ben posta perché se $(U, \phi), (V, \psi)$ sono due carte la mappa di transizione è un diffeomorfismo tra aperti dello stesso $\mathbb{R}^n$ e dunque conserva la dimensione: la funzione $x \mapsto \dim_x X$ che manda x nella dimensione di X in un intorno di x è costante su ogni componente connessa di X (e dunque su tutto X se ci limitiamo a studiare varietà connesse).

Osservazione. Da ora in poi "differenziabile" e "di classe $\mathcal{C}^\infty$" diventano sinonimi: le diversità col caso $\mathcal{C}^k$ sono minime, e costituiscono un facile esercizio di interpolazione vigile.

Definizione 2.5 [Atlanti Equivalenti]**:** *Due atlanti* $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu\in M}$ *si dicono* equivalenti *se la loro unione*

$$\{(U_\lambda, V_\mu; \phi_\lambda, \psi_\mu)\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$$

è ancora un atlante differenziabile. Equivalentemente due atlanti sono equivalenti se ciascuna carta dell'uno è differenzialmente compatibile con ciascuna carta dell'altro. L'unione di tutti gli n–atlanti equivalenti di una varietà data si dice il suo atlante massimale.

Facciamo alcuni esempi:

1. $\mathbb{R}^n$ stesso è una varietà differenziabile di dimensione n: un suo atlante è dato dall'unica carta $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$.

2. Ogni $U \overset{\text{ap}}{\subset} \mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile di dimensione n: un suo atlante è dato dall'unica carta (U, ι), ove ι è l'inclusione canonica $\mathrm{id}\,|_U$.

3. Più in generale ogni aperto di X nella topologia indotta dall'ambiente è una varietà differenziabile della stessa dimensione. Se $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ è un atlante di X, un atlante della sottovarietà $S \subset X$ è dato da
$$\{(U_\lambda \cap S, \phi_\lambda|_{U_\lambda\cap S})\}_{\lambda\in\Lambda_S}$$
ove $\Lambda_S = \{\lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap S \neq \varnothing\}$.

4. Ogni sottoinsieme D discreto in uno spazio topologico X è una varietà di dimensione 0, e ha come atlante la famiglia $\{(\{p_i\}, \phi_i)\}_{i\in I}$, ove $\{p_i\}_i$ è una enumerazione degli elementi di D e $\phi_i \colon \{p_i\} \to \{0\}$ manda p_i in 0.

L'importanza della definizione data è la possibilità di estendere gli strumenti del Calcolo a funzioni tra sottoinsiemi qualunque (purchè abbastanza regolari) dei vari spazi euclidei.

Definizione 2.6 [Varietà Diffeomorfe – Morfismo di Varietà]: *Siano X, Y due varietà differenziabile di dimensioni n, m. Una applicazione $F\colon X \to Y$ si dice* differenziabile *o* morfismo di varietà *se nel diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\bullet"] & \mathbb{R}^m \\ X \cap U_\lambda \arrow[u, "\phi_\lambda"] \arrow[r, "F"] & Y \cap V_\mu \arrow[u, "\psi_\mu"'] \end{tikzcd}$$

l'applicazione $\psi_\mu \circ F \circ \phi_\lambda^{-1}$ è differenziabile come mappa di aperti usuali. Se tale funzione è un diffeomorfismo, F, F^{-1} sono diffeomorfismi di varietà.

Alcune costruzioni che generalizzano le definizioni appena date:

- Se $\{M_\beta\}_{\beta \in B}$ è una famiglia di varietà differenziabile, l'unione disgiunta $\coprod_{\beta \in B} M_\beta$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile indotta dall'atlante
$$\mathcal{A} = \coprod_{\beta \in B} A_\beta$$
ove gli A_β sono atlanti degli M_β.
- Se M, N sono varietà differenziabile possiamo porre sul prodotto cartesiano $M \times N$ una naturale struttura di varietà differenziabile. Siano $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$ e $\{(V_\mu, \psi_\mu)\}$ atlanti di M ed N rispettivamente. Allora un atlante di $M \times N$ è definito da
$$\{(U_\lambda \times V_\mu, \phi_\lambda \times \psi_\mu)\}$$
ove $\phi_\lambda \times \psi_\mu \colon U_\lambda \times V_\mu \to \mathbb{R}^{m+n}$ manda $(p, q) \in U_\lambda \times V_\mu$ in $\phi_\lambda(p), \psi_\mu(q))$ (con questa definizione di "prodotto", se $(U', \phi'_U), (V'; \psi'_V)$ sono carte locali su X, Y diverse da $(U, \phi_U), (V; \psi_V)$ esse sono compatibili).
- Sia M una varietà differenziabile, e G un gruppo che agisce su M in modo liscio (cioè per ogni $g \in G$ la mappa $m \mapsto g \star m$ è differenziabile), propriamente discontinuo e senza punti fissi (i.e. per ogni $m \in M$ esiste un intorno aperto A di m tale che $(g \star A) \cap A \neq \varnothing \implies g = \mathrm{id}_G$, tale aperto viene detto *aperto buono*). Allora il quoziente dato dall'insieme delle orbite sotto l'azione di G ha una naturale struttura di varietà differenziabile: un atlante

di $X = M/G$ è dato da tutte le carte del tipo $(\pi(U), \phi_U \circ \pi|_U^{-1})$ al variare di U tra gli aperti buoni (π è la proiezione sul quoziente).

Per mostrare ciò bisogna mostrare che nel diagramma

$$
\begin{tikzcd}
M/G \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"] & M/G \\
U \arrow[u, "\pi|_U"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[u, "\pi|_V"'] \arrow[l, "\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V"'] \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^m & \mathbb{R}^m \arrow[l, "\bullet"]
\end{tikzcd}
$$

l'applicazione $\phi \circ \pi|_U^{-1} \circ \pi|_V \circ \psi^{-1}$. ove $(U, \phi), (V, \psi)$ sono due carte date, è differenziabile. A sua volta ciò equivale a mostrare che $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V$ è differenziabile. Se $u \in U$, $v \in V$ sono tali che $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V(v) = u$, cioè $\pi|_V(v) = \pi|_U(u)$, allora $u \in [v]$, cioè esiste $g \in G$ tale che $u = g \star v$. Per continuità dell'azione di gruppo esiste tutto un intorno W di v tale che $g \star W \subset U$, e $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V(W) \subseteq U$. Per ogni altro $w \in W$ si ha $\pi(g \star w) = \pi(w) = \pi|_U(\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V(w))$, ed essendo $\pi|_U$ biiettiva, in particolare iniettiva, su W si ha $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V \equiv g \star \#$, moltiplicazione per g, liscia per ipotesi.

Definizione 2.7 [Superficie]**:** *Uno spazio topologico X tale che per ogni $x \in X$ esiste $U \overset{\text{ap}}{\subset} X$, intorno di x che sia omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^2$ si dice* superficie.

Definizione 2.8 : *$S \subset \mathbb{R}^n$ si dice* superficie *se per ogni $p \in S$ esistono $U \overset{\text{ap}}{\subset} \mathbb{R}^2$, $V \overset{\text{ap}}{\subset} \mathbb{R}^n$ e un omeomorfismo $f\colon U \to S \cap V$. L'applicazione f si dice* carta locale *o* parametrizzazione *di S.*

La definizione di atlante è la stessa: una famiglia di carte $\{(U_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sia un ricoprimento aperto di S e tale che tutte le carte siano a due a due differenzialmente compatibili (cioè

$$f_\mu^{-1} \circ f_\lambda \colon f_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to f_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

è un diffeomorfismo.

Alcuni esempi geometrici

1. Un piano affine $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ è generato da due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, che possiamo senza perdita di generalità supporre ortogonali e di norma unitaria,e passa per un dato punto p_0. Allora σ si parametrizza con un'unica carta $(\mathbb{R}^2, f)$, ove

$$f\colon (u,v) \longmapsto p_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

l'inversa si scrive facilmente come $g\colon p \longmapsto ((p-p_0)\cdot\mathbf{a}, (p-p_0)\cdot\mathbf{b})$. Inoltre f, g sono continue, dunque omeomorfismi.

Osservazione. Componendo queste stesse mappe con l'inclusione canonica, si trova che ogni $U \subset \sigma$ è una superficie omeomorfa al piano su cui vive.

2. La sfera $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 1\}$. Ne offriamo diverse parametrizzazioni:

— **Parametrizzazione geografica**: presi due angoli (ϕ, ϑ) (longitudine e latitudine), costruiamo la carta

$$f(\vartheta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\phi \\ \cos\vartheta\sin\phi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

che manda diffeomorficamente $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times]0, 2\pi[$ in $\mathbb{S}^2 \backslash \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y = 0\}$. Una seconda carta si ottiene dalla prima con la composizione di due rotazioni (quindi resta diffeomorfismo), una di π attorno all'asse z e una di $\pi/2$ attorno a x:

$$g(\vartheta,\phi) = R^x_{\pi/2} \circ R^z_{\pi} \circ f(\vartheta,\phi) = \begin{pmatrix} -cos\vartheta\cos\phi \\ -\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta\sin\phi \end{pmatrix}$$

— **Parametrizzazione cartesiana** Esplicitando la terza variabile in funzione delle altre due si ha $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, due carte che parametrizzano $\mathbb{S}^2 \setminus \{z = 0\}$: allo stesso modo esplicitando $x(y,z)$ e $y(x,z)$ si ottengono altre 4 carte con cui ricoprire tutta $\mathbb{S}^2$.

— **Parametrizzazione stereografica**: diamo una parametrizzazione per la generica $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. L'idea è considerare

$\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$, ove $N = \mathbf{e}_{n+1}$, $S = -\mathbf{e}_{n+1}$ sono i due *poli* della sfera, e definire le due funzioni

$$\begin{aligned} \phi_N \colon \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \\ \phi_S \colon \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{14}$$

definite da $\phi_N(P) = (N \vee P) \cap \{x_{n+1} = 0\}$, $\phi_S(P) = (S \vee P) \cap \{x_{n+1} = 0\}$. Prendiamo ϕ_N: la retta $N \vee P$ è quella di equazione parametrica $(t\mathbf{x}, 1 + t(x_{n+1} - 1))$: deve essere allora $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$, che implica $t = \frac{1}{1-x_{n+1}}$. Allora

$$\phi_N(\mathbf{x}, x_{n+1}) = \frac{\mathbf{x}}{1 - x_{n+1}} \overset{\iota_{\mathbb{R}^{n+1}}}{\hookrightarrow} \frac{(\mathbf{x}, 0)}{1 - x_{n+1}}$$

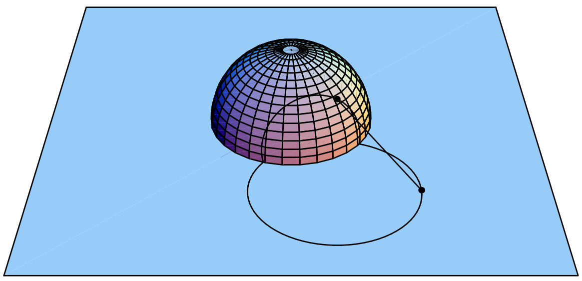
le componenti di $\phi_(P)$ sono funzioni razionali delle coordinate di $(\mathbf{x}, x_{n+1})$, dunque continue nel loro dominio. L'inversa di ϕ_N è la funzione che manda $P' = \mathbf{x}$ in $(N \vee P') \cap \mathbb{S}^2$: si ha

$$N \vee P' = (t\mathbf{x}, (1 - t)) \in \mathbb{S}^2 \iff t^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2t + t^2 = 0$$

cioè $t = \frac{2}{1+\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$: allora

$$\phi_N^{-1}(P') = \left(\frac{2\mathbf{x}}{1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1}{1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \right)$$

funzione visibilmente differenziabile per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si noti che $\phi_N(N) = \infty_n$, nel senso che questa mappa induce una compattificazione (detta *di Alexandrov*) di $\mathbb{R}^n$. Considerazioni analoghe portano a scrivere $\phi_S(\mathbf{x}, x_{n+1}) = \frac{\mathbf{x}}{1+x_{n+1}}$ e $\phi_S^{-1}(P') = \left(\frac{2\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}, \frac{1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} \right)$



Osservazione. Si possono dare carte geografiche e cartesiane per la sfera $\mathbb{S}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1\}$?

Osservazione (La sfera come superficie di Riemann)**.** Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ con l'isomorfismo usuale $\jmath\colon (x, y) \mapsto x + iy$. Allora possiamo interpretare le mappe ϕ_N, ϕ_S come applicazioni da $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ in $\mathbb{C}$, ponendo

$$\phi_N(\mathbf{p}) = \frac{p_1}{1-p_3} + i\frac{p_2}{1-p_3} \qquad \phi_S(\mathbf{p}) = \frac{p_1}{1+p_3} + i\frac{p_2}{1+p_3}$$

Si trova subito che l'inversa di ϕ_N è

$$\phi_N^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\Big(2\,\mathrm{Re}z, 2\,\mathrm{Im}z, |z|^2 - 1\Big)$$

e se $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è il coniugio, e poniamo $\psi = \sigma \circ \phi_S$ si ha

$$\psi^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\Big(2\,\mathrm{Re}z, -2\,\mathrm{Im}z, 1 - |z|^2\Big)$$

E' allora facile osservare che la composizione $\phi_N \circ \psi^{-1}$ è un biolomorfismo (involutorio) di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in sè:

$$\Theta(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Da ciò segue che $\mathbb{S}^2$ è una varietà complessa di dimensione (complessa) 1, ossia una *superficie di Riemann*: prende il nome di *sfera di Riemann* (la costruzione classica del biolomorfismo si trova, tra le altre in [1]).

Tori reali. Consideriamo l'azione libera e propriamente discontinua, senza punti fissi, di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme delle orbite rispetto a questa azione può essere dotato della topologia quoziente, di modo che $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 =: \mathbb{T}^2$ sia continua.

Notiamo che π è una mappa aperta: se $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto si ha infatti

$$\pi^{\leftarrow}(\pi(A)) = \bigcup_{\zeta \in \mathbb{Z}^2} (\zeta + A)$$

e poichè $\zeta + A$ è aperto per ogni ζ, la tesi segue. Costruiamo ora su $\mathbb{T}^2$ una struttura di varietà differenziabile reale: sia $\epsilon > 0$ tale che $\|\zeta\| > 2\epsilon$

per ogni $\zeta \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sia $p \in \mathbb{T}^2$, $p = \pi(x)$ per qualche $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Sia poi $D(x, \epsilon)$ il disco aperto di centro x e raggio ϵ.

$\pi|_{D(x,\epsilon)}$ è iniettiva, continua e aperta, dunque è un omeomorfismo sull'immagine. Se poniamo $U = \pi|_{D(x,\epsilon)}(D(x,\epsilon))$, $\phi = \pi|_{D(x,\epsilon)}^{-1}$, allora (U, ϕ) è una carta locale attorno a p. Sia ora $p \in U_1 \cap U_2$, $U_1 = \pi|_{D(x_1,\epsilon)}(D(x_1,\epsilon))$, $U_2 = \pi|_{D(x_2,\epsilon)}(D(x_2,\epsilon))$. Se poniamo $T(x) = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(x)$, abbiamo $T(x) = \phi_2(\pi(x))$, da cui $\pi(T(x)) = \pi(x)$, per ogni $x \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$. Da ciò segue che

$$T(x) = x + \zeta(x), \qquad \zeta(x) \in \mathbb{Z}^2$$

Ma ora, $\zeta\colon \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{Z}^2$ è continua su un discreto, dunque è costante. Pertanto i cambi di coordinate T sono traslazioni, in particolare sono differenziabili.

Osservazione. $\mathbb{T}^2$ si dice *toro reale di dimensione 2*. Come mostrare che è compatto?

Germi di funzioni. Sia $\mathcal{C}^\infty(p, S)$ l'anello delle funzioni differenziabili in un intorno di $p \in S$. Diciamo che f, g *hanno lo stesso germe* in p se esiste un intorno V di p dove $f \equiv g$. Questa relazione è un'equivalenza (verifica diretta). Indichiamo con $[f]$ la classe di equivalenza di f in $\mathscr{C}^\infty(p) = \mathcal{C}^\infty(p, S)/\sim$: è possibile dotare questo quoziente di una naturale struttura di $\mathbb{R}$–algebra, ponendo

$$[f] + [g] = [f + g]$$
$$\alpha[f] = [\alpha f]$$
$$[f][g] = [fg].$$

Definizione 2.9 [Anello Differenziale, Derivazione]**:** *Un* anello differenziale (commutativo) *è un anello unitario* $(R, +, \cdot)$ *dotato di una operazione* $\partial\colon R \to R$ *lineare e Leibniz:*

$$\partial(a + b) = \partial(a) + \partial(b)$$
$$\partial(a \cdot b) = \partial(a) \cdot b + a \cdot \partial(b)$$

L'applicazione $\partial\colon R \to R$ *si dice* R*–*derivazione.

In quanto segue però una derivazione sarà una applicazione $v\colon \mathscr{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}$ che sia lineare e Leibniz (si può aggirare l'ostacolo mostrando che. . . ?).

Se a questo punto definiamo come *vettore tangente* in p a S una derivazione di $\mathscr{C}^\infty(p)$, e con T_pS l'insieme di tutti i vettori tangenti siffatti, T_pS acquista naturalmente struttura di spazio vettoriale, in quanto sottospazio del duale di $\mathscr{C}^\infty(p)$.

Notiamo che se $v \in T_pS$ esiste una curva differenziabile con supporto su S tale che $\alpha(t_0) = v$. Allora se poniamo

$$v([f]) := \frac{\mathrm{d}f(\alpha(t))}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}$$

si ottiene effettivamente una $\mathbb{R}$–derivazione di $\mathscr{C}^\infty(p)$.

3 Strutture Riemanniane

Definizione 3.1 : *Sia S una superficie astratta. Una* metrica (o struttura) riemanniana *su S è una corrispondenza $p \mapsto \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_p$ che associa ad ogni punto $p \in S$ un prodotto scalare su T_pS, che dipende differenziabilmente da p nel senso che segue: se (U, φ) è una carta locale attorno a p e $\partial_1\varphi|_q, \partial_2\varphi|_q$ sono i campi coordinati, allora le funzioni*

$$g_{ij}(p) = \langle \partial_i\varphi\,|\,\partial_j\varphi\rangle$$

sono differenziabili in U: g (che come notato prima è la matrice di Grahm del prodotto scalare nella base naturale di T_pS, dunque definita positiva in ogni punto di U) è in modo naturale assimilabile a un tensore simmetrico di rango 2, dato che si può scrivere $\mathbf{v} = v_1\partial_1\varphi + v_2\partial_2\varphi$, $\mathbf{w} = w_1\partial_1\varphi + w_2\partial_2\varphi$ e

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w})(p) = \sum_{i,j=1}^{2} v_i w_j g_{ij}(p)$$

Una superficie geometrica *sarà invece il dato di una superficie astratta S e di una struttura riemanniana su S.*

E' chiaro che questa condizione non dipende dalla carta φ. Denoteremo una struttura riemanniana su S con $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ o indifferentemente con g. Questa nozione permette di definire, analogamente a quanto visto per le superfici reali, la *lunghezza* di un arco di curva su S e la *distanza* tra due punti su S (concetto però più delicato).

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\langle\dot\alpha(t)\,|\,\dot\alpha(t)\rangle_{\alpha(t)}}\,\mathrm{d}t \qquad d\colon S\times S \to \mathbb{R},\ (p,q) \mapsto \inf_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{L}(\alpha)$$

ove Γ è l'insieme degli archi di curva differenziabili almeno a tratti che uniscono p a q.

Definizione 3.2 [Isometria]**:** *Siano* (S_1, g_i), (S_2, g_2) *due superfici geometriche. Un diffeomorfismo* $F\colon S_1 \to S_2$ *si dice* isometria *se vale*

$$g_2(\mathrm{d}F_p(v), \mathrm{d}F_p(w))(F(p)) = g_1(v, w)(p) \tag{15}$$

per ogni $v, w \in T_pS$ *e per ogni* $p \in S_1$*. Si dice invece* isometria locale *in* p *una* $F\colon S_1 \to S_2$ *tale che esiste* U *intorno di* p *in* S_1 *tale che* $F\colon U \to F(U)$ *sia un diffeomorfismo che verifica la (15).*

Diamo alcuni esempi di superfici geometriche.

- Se S è il piano reale $\mathbb{R}^2$, con l'unica carta $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id})$, abbiamo

  $$g_{ij}(p) = \langle \partial_i \,\mathrm{id} \,|\, \partial_j \,\mathrm{id} \rangle = \delta_{ij}$$

  $g(\cdot)$ definisce allora la *struttura euclidea standard* su $\mathbb{R}^2$.

- Sulla sfera $\mathbb{S}^2$ con le carte stereografiche, chiamiamo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ le coordinate locali nella carta ϕ_N e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ quelle nella carta ϕ_S. Definiamo

  $$\begin{gathered} g_{\mathbf{x},11}(p) = \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} = g_{\mathbf{x},22}(p) \\ g_{\mathbf{x},12}(p) = 0 = g_{\mathbf{x},21}(p) \\ g_{\mathbf{y},11}(p) = \frac{4}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2} = g_{\mathbf{y},22}(p) \\ g_{\mathbf{y},12}(p) = 0 = g_{\mathbf{y},21}(p) \end{gathered}$$

  Non è difficile controllare che le $g_{\mathbf{x},ij}, g_{\mathbf{y},hk}$ definiscono una struttura riemanniana su $\mathbb{S}^2$: basta notare che lo jacobiano della mappa di transizione $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$ è

  $$\mathrm{Jac}(\mathrm{d}(\phi_N \circ \phi_S^{-1}))(u, v) = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} -u^2 + v^2 & -2uv \\ -2uv & u^2 - v^2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

  e che tra le $g_{\mathbf{x},hk}, g_{\mathbf{y},ij}$ sussiste la relazione

  $$g_{\mathbf{y},ij} = \sum_{h,k=1}^{2} \frac{\partial x_h}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} g_{\mathbf{x},ij},$$

ossia $g_{\mathbf{y}} = J^t g_{\mathbf{x}} J$, ove $J = \mathrm{Jac}(\mathrm{d}(\phi_N \circ \phi_S^{-1}))$. La metrica così definita su $\mathbb{R}^2$ si dice *stereografica*. Essa è dotata di alcune interessanti proprietà geometriche: osserviamo anzitutto che le antimmagini di meridiani sulla sfera sono semirette uscenti dall'origine in $\mathbb{R}^2$. E' ragionevole allora che la loro lunghezza, rispetto alla metrica stereografica sul piano sia π. E infatti se $\bar{\alpha}(t) = (at, bt)$ abbiamo

$$\mathcal{L}(f(\bar{\alpha}(t)) = \mathcal{L}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\mathbf{I}(\dot{\alpha})}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$$

Con un identico ragionamento sui pull–back la lunghezza stereografica dei paralleli parametrizzati da $\beta(t) = f(r\cos t, r\sin t)$ è

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1+r^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi r}{1+r^2}.$$

Il fatto che $\mathcal{L}(\beta) \xrightarrow{r\to\infty} 0$ è in accordo col fatto intuitivo per cui la lunghezza stereografica delle circonferenze, all'aumentare del raggio, diventa sempre più piccola.

Altra proprietà interessante è che la metrica stereografica è *conforme* (ossia rispetta gli angoli). Ciò segue dal fatto che l'angolo tra due vettori di ℝì2 calcolato rispetto alla metrica euclidea e rispetto alla metrica stereografica è lo stesso.

- (Semipiano di Poincaré – Piano iperbolico). Sia

$$S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \right\};$$

S è un aperto del piano reale e quindi è banalmente una superficie astratta (con l'unica carta data dall'inclusione canonica). Definiamo

$$g_{11}(x,y) = \frac{1}{y^2} = g_{22}(x,y)$$
$$g_{12} = 0 = g_{21}$$

Le g_{ij} definiscono su S una struttura riemanniana. Denotiamo da ora S con $\mathbf{H}$ (mediante la consuetudine classica). La superficie geometrica $(\mathbf{H}, g)$ si dice *semipiano di Poincaré*. Un conto diretto (usando (13)) mostra che $K_{\mathbf{H}} = -1$.

Si è visto che il piano e la sfera hanno una struttura (più o meno nascosta) di superfici di Riemann: possiamo notare infatti che $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$, e pensare $\mathbf{H}$ come aperto di $\mathbb{C}$, varietà di dimensione complessa 1. Sia ora

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

il disco di raggio 1 nel piano di Gauss. Definiamo la metrica

$$\tilde{g}(u, v) = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}\mathbb{I}$$

per ogni $z = u + iv \in \Delta$. La metrica riemanniana così definita prende il nome di *metrica iperbolica*, e la superficie geometrica $(\Delta, \tilde{g})$ si dice *disco iperbolico*. E' da notare che la mappa

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

è un biolomorfismo tra $\mathbf{H}$ e Δ (si mostra anche, direttamente, che $f : (\mathbf{H}, g) \to (\Delta, \tilde{g})$ è una isometria).

Strutture Complesse su Superfici. Definiamo l'*operatore di Laplace–Beltrami* sulla superficie geometrica (S, g) come l'analogo del laplaciano che già si conosce dalla teoria degli operatori differenziali vettoriali: lì $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$, e qui, se f è una funzione differenziabile in un intorno di $p \in S$,

$$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \tag{17}$$

dove $|g| = |\det g|$, e g^{ij} è la componente ij della matrice inversa di g. La condizione di armonicità per f è allora

$$\triangle f = 0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=1}^{2} g^{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{j=1}^{2} g^{2j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{18}$$

Se poniamo

$$\omega_1 = -\sqrt{|g|} \sum_{j=1}^{2} g^{2j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad \omega_2 = \sqrt{|g|} \sum_{j=1}^{2} g^{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

la condizione (18) diventa $\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} = 0$, che si traduce nella chiusura della forma differenziale $\Omega = \omega_1 \mathrm{d}x_1 + \omega_2 \mathrm{d}x_2$.

Supponiamo ora di avere una soluzione all'equazione $\triangle f = 0$ in un intorno convesso U di $p \in S$, tale che $\mathrm{d}f_p \neq \underline{0}$. Poichè U è convesso e Ω è ivi chiusa, è anche esatta, ossia esiste una h tale che $\Omega = \mathrm{d}h$ su U. Se in

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = -\sqrt{|g|}\sum_{j=1}^{2} g^{2j}\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{19}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = \sqrt{|g|}\sum_{j=1}^{2} g^{1j}\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{20}$$

esplicitiamo $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ troviamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sqrt{|g|}\left(g^{22}\frac{\partial h}{\partial x_2} + g^{12}\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) \tag{21}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\sqrt{|g|}\left(g^{21}\frac{\partial h}{\partial x_2} + g^{11}\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) \tag{22}$$

Ora, dalle (19,20) otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1} = \sqrt{|g|}\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Notiamo che $\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ è il prodotto scalare indotto da g sul duale del piano tangente a S. Pertanto l'equazione precedente diventa

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1} = \sqrt{|g|}\,\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle\,.$$

Allo stesso modo da (21,22) si trovano le

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1} = \sqrt{|g|}\,\langle \mathrm{d}h\,|\,\mathrm{d}h\rangle$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} = \sqrt{|g|}\,\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}h\rangle$$

Quindi su U si hanno le identità $\langle \mathrm{d}h\,|\,\mathrm{d}h\rangle = \langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle$ e $\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}h\rangle = 0$. Poiché $\mathrm{d}f_p \neq 0$ possiamo assumere (a meno di restringere U) che $\mathrm{d}f$ sia diverso da zero su U. Pertanto

$$\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle = \langle \mathrm{d}h\,|\,\mathrm{d}h\rangle > 0, \qquad \langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}h\rangle = 0$$

Poniamo

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2) \\ y_2 = h(x_1, x_2) \end{cases};$$

le (y_1, y_2) definiscono coordinate locali su U, e si dicono *coordinate isoterme*. Infatti

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \sqrt{|g|}\,\langle \mathrm{d}f \,|\, \mathrm{d}f \rangle > 0$$

Come si esprime la metrica g in queste coordinate? Non è difficile trovare che si ha

$$g^{11}_{\mathbf{y}} = \langle \mathrm{d}f \,|\, \mathrm{d}f \rangle = g^{22}_{\mathbf{y}}, \qquad g^{12}_{\mathbf{y}} = g^{21}_{\mathbf{y}} = 0$$

e ricordando che g^{ij} è la componente ij della matrice inversa di g, otteniamo che su U g ha un'espressione del tipo $\lambda(y)\mathbb{I}$, ove $\lambda(y) = \langle \mathrm{d}f \,|\, \mathrm{d}f \rangle^{-1}$, che è compatibile con il cambio di coordinate: se in U' ci sono coordinate (y'_1, y'_2) si ha

$$g' = \begin{pmatrix} \lambda'(y') & 0 \\ 0 & \lambda'(y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \lambda(y) & 0 \\ 0 & \lambda(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = J^t g J$$

se $J = \operatorname{Jac}\tau$, con τ mappa di transizione tra due carte nell'intersezione dei dominî. Esplicitando le relazioni nascoste nel prodotto di matrici lì sopra si ottiene

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial y'_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'_2}{\partial y_1}\right)^2\right]\lambda(y) &= \lambda'(y') \\ \left[\left(\frac{\partial y'_1}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'_2}{\partial y_2}\right)^2\right]\lambda(y) &= \lambda'(y') \\ \frac{\partial y'_1}{\partial y_1}\frac{\partial y'_1}{\partial y_2} + \frac{\partial y'_2}{\partial y_1}\frac{\partial y'_2}{\partial y_2} &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

ossia in ogni punto di U deve valere una (e una sola) tra le relazioni seguenti

$$\begin{cases} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} = \frac{\partial y'_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial y'_2}{\partial y_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial y'_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_1}{\partial y_2} = \frac{\partial y'_2}{\partial y_1} \end{cases}$$

che sono equivalenti alle relazioni di (anti)olomorfia per τ. Da ultimo, si usa un argomento di connessione per mostrare che in U solo una delle precedenti relazioni può sussistere. In conclusione si ha il

Teorema 3.1 : *Ogni punto di una superficie geometrica (S, g) ha un intorno in cui esistono coordinate isoterme. Il legame tra due sistemi di coordinate isoterme su uno stesso intorno è espresso da una funzione olomorfa o antiolomorfa.*

Corollario. Su ogni superficie geometrica orientabile (S, g) esiste una struttura di superficie di Riemann (cfr. [4] per una prova).

A Costruzione di $T^{\spadesuit}_{\clubsuit}(V)$

Nel seguito, ogni spazio vettoriale è di dimensione finita sul (su un) corpo $\mathbb{K}$. Definiamo come spazio duale di V lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V su $\mathbb{K}$: si scrive $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.

La dimensione (su $\mathbb{K}$) di V è

$$\dim_{\mathbb{K}} V^* = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} V \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{K}} V$$

Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, una base di V^* è fatta da $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, ove $v_j^* \colon V \to \mathbb{K}$ è definita da $v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$, intendendo δ_{ij} come il simbolo di Kronecker.

Lo spazio V è (non canonicamente) isomorfo al suo duale, mediante la mappa che manda $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ in $u^* = \sum_{i=1}^n \zeta_i v_i^*$.

Definizione A.1 [Applicazione Bilineare]**:** *Siano U, V spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$, in particolare sia $\dim_{\mathbb{K}} U = m, \dim_{\mathbb{K}} V = n$. Una applicazione bilineare tra U e V è una applicazione $g \colon U \times V \to \mathbb{K}$ che sia lineare in ciascuna delle due variabili. L'insieme $\mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K})$ delle applicazioni bilineari da $U \times V$ in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e vale*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} U \cdot \dim_{\mathbb{K}} V = mn$$

Una sua base è costituita dall'insieme delle applicazioni ϵ_{ij} definite da

$$\epsilon_{ij}(u_r, v_s) = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) = (r, s) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Una applicazione bilineare non degenere tra V e il suo duale si dice dualità: l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \circ \colon V \times V^* &\to \mathbb{K} \\ (v, \xi) &\longmapsto v \circ \xi = \xi(v) \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

è non degenere: essa si dice dualità canonica tra V e V^*. Fissato un vettore $v \in V$, essa si "fattorizza" come $\varphi_v = \circ(v, \cdot) \colon V^* \to \mathbb{K}$: è la mappa che manda ξ in $\xi(v)$ per $v \in V$ fissato. In tal modo $\varphi_v \in \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K}) =: V^{**}$. Gli spazi V e V^{**} sono allora canonicamente isomorfi mediante la mappa di "valutazione" $\mathrm{ev}_v \colon V \to V^{**}$ che manda v in φ_v.

Osservazione. na data applicazione bilineare g non degenere induce gli isomorfismi di spazi vettoriali

$$\mathrm{Hom}(V, U^*) \cong \mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}(U, V^*)$$

dati dalle mappe $v \mapsto g(\cdot, v)$ e $u \mapsto g(u, \cdot)$

Dietro queste relazioni così piacevolmente simmetriche si nasconde una struttura molto più generale, chiamata *prodotto tensoriale* $U \otimes V$ dei due spazi U e V. Di esso esistono varie definizioni, ordinate per generalità e astrattezza crescente.

Definizione A.2 [Prodotto tensoriale di due spazi vettoriali]: *Si definisce*

1. *$U \otimes V$ è lo spazio vettoriale una cui base è fatta dalle mn scritture formali $\{u_i \otimes v_j\}_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$.*

2. *$U \otimes V$ è lo spazio vettoriale $\mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K})^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K}), \mathbb{K})$. Un elemento di $U \otimes V$ si può allora pensare come un morfismo di spazi vettoriali che manda $\alpha \in \mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K})$ in $\alpha(u, v)$ per fissati $u, v \in U \times V$. Resta allora definita una mappa*

$$\begin{aligned} \otimes \colon U \times V &\to U \otimes V \\ (u, v) &\mapsto u \otimes v \end{aligned}$$

di modo che $(u \otimes v)(\alpha) = \alpha(u, v)$. Tale mappa permette di definire, dualmente, il prodotto di due elementi di U^*, V^* come $\xi \otimes \eta \in \mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K}) = U^* \otimes V^*$, di modo che $\xi \otimes \eta(u, v) = (\xi \circ u)(\eta \circ v)$

3. *$U \otimes V$ è l'unico spazio vettoriale che soddisfi alla proprietà universale seguente: comunque dati un terzo spazio vettoriale Z di dimensione finita e una applicazione bilineare $g\colon U \times V \to Z$ esiste un'unica $\phi\colon U \otimes V \to Z$ lineare, tale che risulti $g = \phi \circ \otimes$. Deve insomma commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "g"'] & U \otimes V \arrow[dl, "\phi"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Delle tre definizioni date l'ultima è la più utile perchè permette di mostrare all'istante che valgono le proprietà formali di

- Associatività: $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$
- Commutatività: $U \otimes V \cong V \otimes U$

Inoltre (fatto implicitamente usato nella seconda definizione), si trova facilmente che $U \otimes V$ e $U^* \otimes V^*$ sono in dualità, i.e. $(U \otimes V)^* \cong U^* \otimes V^*$. Quest'ultimo fatto in particolare si mostra esibendo l'applicazione (bilineare non degenere, la verifica è immediata) definita da $(v \otimes u, v^* \otimes u^*) \mapsto (v \circ v^*)(u \circ u^*)$: notando poi che data una $g\colon V \times U \to Z$ bilineare non degenere l'applicazione $v \mapsto g(v, \cdot)$ mette in isomorfismo $\mathrm{Bil}(V \times U, Z)$ con $\mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(U, Z))$, la proprietà universale del prodotto tensoriale si può riscrivere

$$\mathrm{Hom}(V \otimes U, Z) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(U, Z)) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, Z))$$

Mettendo insieme questi due risultati si ha

$$V^* \otimes U^* \cong \mathrm{Hom}(V \otimes U, \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(U, \mathbb{K})) \cong \mathrm{Hom}(V, U^*)$$

e ponendo U in luogo di U^* si conclude che $V^* \otimes U \cong \mathrm{Hom}(V, U)$.

A $v^* \otimes w$ corrisponde l'applicazione $x \mapsto (v^* \circ x)w$. Questa corrispondenza si estende poi per linearità. Mettendo assieme tutto quanto si mostra l'associatività, di modo che

$$\begin{aligned}(V \otimes U) \otimes Z \cong \mathrm{Hom}(V^* \otimes U, Z) \cong \mathrm{Hom}(V^*, \mathrm{Hom}(U^*, Z)) \cong \\ \cong V \otimes \mathrm{Hom}(U^*, Z) \cong V \otimes (U \otimes Z)\end{aligned}$$

Osservazione. Lo spazio $\mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, Z)$ coincide con $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, Z)$, così come lo spazio delle applicazioni r–lineari da $V_1 \times \dots V_r$ su Z coincide con $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_r, Z)$: la prova si fa per induzione.

La trattazione diventa interessante nel caso particolare in cui $U = V$: in tal caso possiamo costruire la successione di spazi $\{V^{\otimes j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ e $\{V^{*\otimes j}\}_{j\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} V^{\otimes j} := V \otimes \dots \otimes V & j\text{volte} \\ V^{*\otimes j} := V^* \otimes \dots \otimes V^* & j\text{volte} \end{cases}$ e a partire da questi definire

$$T_h(V) := V^{\otimes h} \qquad T^k(V) := V^{*\otimes k} \qquad T_h^k(V) := T_h(V) \otimes T^k(V)$$

e la loro somma diretta infinita

$$T_\bullet(V) := \bigoplus_{h \in \mathbb{N}} T_h(V) \qquad T^\bullet(V) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} T^k(V) \qquad T(V) := \bigoplus_{(h,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} T_h^k(V)$$

Notiamo alcune cose:

- $\dim_{\mathbb{K}} T(V) = \infty$, dato che $\dim_{\mathbb{K}} T_h^k(V) = (\dim_{\mathbb{K}} V)^{h+k}$, successione divergente non appena $\dim_{\mathbb{K}} V > 0$.
- Resta definita una operazione binaria in $T(V)$, tra elementi dei vari $T^k(V)$, $T_h(V)$:

$$\begin{aligned} \otimes \colon T^i(V) \times T^j(V) &\to T^{i+j}(V) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Ora $(T(V), \otimes)$ è un'algebra associativa su $\mathbb{K}$: essa prende il nome di algebra tensoriale su V. A questo punto la sua struttura di anello permette di definire molti oggetti già noti come quozienti di $T(V)$ modulo suoi opportuni ideali. Qualche esempio di particolare interesse:

- L'algebra simmetrica (covariante):

$$\bigodot(V) := T_\bullet(V)/\langle v \otimes u - u \otimes v\rangle$$

  Non è difficile mostrare che l'algebra simmetrica è isomorfa all'algebra dei polinomi nelle indeterminate $X_1, \dots, X_{\dim_{\mathbb{K}} V}$; un esempio di questa corrispondenza si nota nel momento in cui a una forma bilineare $g\colon V \times V \to \mathbb{K}$ corrisponde un polinomio (omogeneo) di secondo grado nelle variabili $X_1, \ldots, X_{\dim_{\mathbb{K}} V}$. Non è difficile definire un operazione di simmetrizzazione di modo che il prodotto simmetrico di una k-upla di vettori sia

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

($\mathfrak{S}(n)$ è il gruppo delle permutazioni di n oggetti).

- L'algebra antisimmetrica (o esterna, di cui dopo segue una costruzione alternativa più "analitica"):

$$\bigwedge(V) := T_\bullet(V)/\langle v \otimes v \rangle$$

  Tale spazio è sempre di dimensione finita, e precisamente $\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge_k(V) = \binom{n}{k}$, ove $n = \dim_{\mathbb{K}} V$. In particolare la dimensione è 0 non appena $k > n$.

L'algebra simmetrica $\bigwedge(V)$ può anche essere definita come spazio vettoriale delle forme r–lineari alternanti da $V \times \cdots \times V$ su $\mathbb{K}$. Se A è un insieme, indichiamo come di consueto con $A \times \cdots \times A = A^k$ il prodotto cartesiano di k copie di A. Ora, dati una qualunque applicazione $f\colon A^k \to B$, un elemento$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ ($k \leq n$) e una funzione $I\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$, scriviamo $f(\underline{x}_I)$ per indicare $f(x_{I(1)}, \ldots x_{I(k)})$: chiameremo la funzione $I(\cdot)$ un multiindice di ordine k. Elenchiamo alcune proprietà dei multiindici:

- Anzitutto, se $k = n$ ed I è biiettiva, essa coincide con una permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$, insieme che è un gruppo rispetto all'operazione di composizione, e sugli elementi del quale resta definito un epimorfismo di gruppi detto parità:

$$\begin{gathered} \operatorname{sgn} : \mathfrak{S}(n) \to \{\pm 1\} \\ \operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{gathered}$$

- Dati due numeri naturali $k \leq n$ indichiamo con $\mathcal{I}_n^k$ l'insieme delle funzioni strettamente crescenti $I\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$: se $k \leq$

$n \leq r$, $I \in \mathcal{I}_n^k$, $J \in \mathcal{I}_r^n$ la funzione composta $J \circ I$ appartiene a $\mathcal{I}_r^k$. se poi I, J sono due generici multiindici (non necessariamente crescenti), definiamo il loro *vee*

$$I \vee J \colon \{1, \ldots, h+k\} \to \{1, \ldots, n\}$$
$$I \vee J(x) = \begin{cases} I(x) & \text{se} 1 \leq x \leq h \\ J(x-h) & \text{se} h+1 \leq x \leq h+k \end{cases}$$

- In particolare se $I \in \mathcal{I}_{h+k}^h$ e $J \in \mathcal{I}_{h+k}^k$ sono tali che $\operatorname{im} I \cap \operatorname{im} J = \varnothing$, il loro vee sta in $\mathfrak{S}(h+k)$ e possiamo calcolarne la parità: avremo in particolare una proprietà di antisimmetria, $\operatorname{sgn}(I \vee J) = (-)^{hk} \operatorname{sgn}(J \vee I)$ e date $I \in \mathcal{I}_{h+k}^h$, $J \in \mathcal{I}_{h+k}^k$, $I' \in \mathcal{I}_{h+k+l}^{h+k}$ e $K \in \mathcal{I}_{h+k+l}^l$, tali che $\operatorname{im} I' \cap \operatorname{im} K = \varnothing = \operatorname{im} I \cap \operatorname{im} J$, si ha
$$\operatorname{sgn}((I' \circ I) \vee (I' \circ J) \vee K) = \operatorname{sgn}(I \vee J) \operatorname{sgn}(I' \vee K)$$
- Data poi $I \in \mathcal{I}_{h+k}^h$ esiste una unica funzione $cI \in \mathcal{I}_{h+k}^k$ tale che $i \vee cI \in \mathfrak{S}(h+k)$. La corrispondenza $c \colon \mathcal{I}_{h+k}^h \to \mathcal{I}_{h+k}^k$ è biunivoca e involutoria (provare).

Definizione A.3 [SPAZIO DELLE k-FORME]**:** *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n: per ogni $2 \leq k \leq n$ indichiamo con $\Lambda^k(V^*)$ l'insieme delle applicazioni k-lineari alternanti $\lambda \colon V^k \to \mathbb{R}$. Chiameremo gli elementi di $\Lambda^k(V^*)$ k-forme alternanti o semplicemente k-forme. Ogni $\Lambda^k(V^*)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e la sua dimensione è $\binom{n}{k}$: infatti fissata una base di V, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, un elemento di $\Lambda^k(V^*)$ è univocamente determinato dai valori assunti sulle k-uple $v_I = (v_{I(1)}, \ldots, v_{I(k)})$, al variare di $I \in \mathcal{I}_n^k$.*

Definizione A.4 [PRODOTTO ESTERNO DI k-FORME]**:** *Date $\lambda \in \Lambda^h(V^*)$, $\mu \in \Lambda^k(V^*)$, si definisce il loro prodotto esterno ponendo*

$$\lambda \wedge \mu(x_1, \ldots, x_{h+k}) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{h+k}^h} \operatorname{sgn}(I \wedge cI) \lambda(x_I) \mu(x_{cI})$$

Questa operazione gode di alcune proprietà fondamentali:

- *Alternanza: $\mu \wedge \lambda = (-)^{hk} \lambda \wedge \mu$;*

- *Linearità:* $(a\lambda + b\mu) \wedge \nu = a(\lambda \wedge \nu) + b(\mu \wedge \nu)$;
- *Associatività:* $(\lambda \wedge \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge (\mu \wedge \nu)$.

La (tediosa) prova di questi fatti è lasciata al lettore volenteroso.

A questo punto, presa la base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ di V, denotiamo con v_I^* la k-forma $v_{I(1)}^* \wedge \cdots \wedge v_{I(k)}^*$. Si verifica che vale, per ogni k-upla di vettori $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in V^k$,

$$v_I^*(\underline{x}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{k} (v_{I(j)}^* \circ x_{\sigma(j)})$$

Le applicazioni $v_I^* = v_{I(1)}^* \wedge \cdots \wedge v_{I(k)}^*$ formano, al variare di $I \in \mathcal{I}_n^k$, una base di $\Lambda^k(V^*)$.

Possiamo allora definire l'insieme

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{i=0}^{n} \Lambda^i(V^*)$$

esso è detto algebra esterna sullo spazio vettoriale V^*: risulta dalla somma diretta delle i-esime algebre esterne, al variare di $i = 1, \ldots n$. Dotata del prodotto esterno, questa struttura diventa (appunto) un'algebra associativa su $\mathbb{R}$. Dato l'isomorfismo canonico di bidualità, possiamo considerare anche l'algebra esterna su V, fatta dalle k-forme su V^*. Inoltre possiamo definire una applicazione k-lineare alternante $\pi_k \colon V^k \to \Lambda^k(V)$ che manda $(x_1, \ldots, x_k)$ in $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$. Allora vale la

Proposizione A.1 (Proprietà Universale del prodotto esterno)**.** Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e $1 \leq k \leq n$. Per ogni spazio vettoriale W, ed ogn applicazione k-lineare alternante $\Delta \colon V^k \to W$ esiste un unico omomorfismo $\phi \colon \Lambda^k(V) \to W$ tale che $\Delta = \phi \circ \pi_k$, ovvero tale che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\pi_k"] \arrow[d, "\Delta"'] & \Lambda^k(V) \arrow[dl, "\phi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Fissata infatti una base di V, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, si pone $\phi(v_{I(1)} \wedge \cdots \wedge v_{I(k)}) = \Delta(v_{I(1)}, \dots, v_{I(k)})$ al variare del multiindice $I \in \mathcal{I}_n^k$. In tal modo Δ e $\phi \circ \pi_k$ coincidono sulle k-uple, dunque coincidono su tutto $V \times \cdots \times V$.

Da ciò discende che il dato di una applicazione k-lineare alternante $\lambda \colon V^k \to W$ è il dato di un omomorfismo di spazi vettoriali $\phi \in \mathrm{Hom}(\Lambda^k(V), W)$: in particolare $\Lambda^k(V^*) = \mathrm{Hom}(\Lambda^k(V), \mathbb{R})$, e quindi esiste una dualità canonica tra $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda^k(V^*)$. In tale dualità, se $x_1^*, \dots x_k^*$ sono vettori di V^* e $y_1, \dots, y_k$ sono vettori di V si ha

$$(x_1^* \wedge \cdots \wedge x_k^*) \circ (y_1 \wedge \cdots \wedge y_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \mathrm{sgn}\,(\sigma) \prod_{j=1}^{k} x_j^* \circ y_{\sigma(j)}$$

In particolare le k-forme $\{v_{I(1)} \wedge \cdots \wedge v_{I(k)}\}_{I \in \mathcal{I}_n^k}$ e $\{v_{I(1)}^* \wedge \cdots \wedge v_{I(k)}^*\}_{I \in \mathcal{I}_n^k}$ sono basi duali al variare di $I \in \mathcal{I}_n^k$. Questo fatto porge un utile criterio di indipendenza lineare: una k-upla di vettori è linearmente indipendente se e solo se la sua k-forma associata $w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$ è diversa da zero.

Conseguenza dell'universalità della proprietà del prodotto esterno, è la seguente:

Proposizione A.2. Sia $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Per ogni $k = 0, \dots, v$ esiste un unico omomorfismo $\Lambda^k(V) \to \Lambda^k(W)$ tale che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\phi \times \cdots \times \phi"] \arrow[d, "\pi_k"'] & W^k \arrow[d, "\pi_k"] \\ \Lambda^k(V) \arrow[r, "\Lambda^k(\phi)"'] & \Lambda^k(W) \end{tikzcd}$$

($\phi \times \cdots \times \phi$ è definita da $(v, \dots, v) \mapsto (\phi(v), \dots, \phi(v))$) e l'applicazione $\Lambda^k(\phi) \colon \Lambda(V) \to \Lambda(W)$, ottenuta sommando gli omomorfismi $\Lambda^0(\phi), \dots \Lambda^n(\phi)$ sia un omomorfismo di algebre.

Dimostrazione. Nel caso $k = 0, 1$ la tesi è banalmente vera: se $k \geq 2$ l'applicazione composta $V \times \cdots \times V \xrightarrow{\phi \times \cdots \times \phi} W \times \cdots \times W \xrightarrow{\pi_k} \Lambda^k(W)$ è k-lineare ed alternante. Quindi, per la proprietà universale, esiste un unico omomorfismo $\Lambda^k(\phi)$ che rende commutativo il diagramma. $\square$

Bibliografia minima

[1] Rick Miranda, "Algebraic Curves & Riemann's Surfaces", *Graduate Studies in Mathematics series*, 5, AMS (1995).

[2] Otto Forster, "Lectures on Riemann's Surfaces", *Graduate Texts in Mathematics 82*, Springer–Verlag 1981.

[3] William Boothby, "An introduction to differential manifolds and Riemannian Geometry", *Pure and Applied Mathematics 120*, 1986.

[4] Jurgen Jost, "Compact Riemann Surfaces: An Introduction To Contemporary Mathematics", Springer–Verlag.

[5] John Lee, "Introduction to Smooth Manifolds", *Graduate Texts in Mathematics*, Springer–Verlag.