

ALGEBRA OMOTOPICA,
CATEGORIE SUPERIORI,
EROSTRATISMO.

Indice

1	Categorie Modello.	3
1.1	Introduzione.	3
1.2	Fibrazioni e omotopie.	7
1.3	Strutture modello.	14
1.3.1	Ortogonalità di morfismi.	14
1.3.2	Esempi	17
1.3.3	Omotopie.	21
1.3.4	Funtori di Quillen, funtori derivati.	27
1.3.5	Una lunga digressione sul significato di questi assiomi.	27
1.4	Esempi di strutture modello.	30
1.4.1	La struttura modello su $\mathbf{CH}^+(R)$.	30
1.4.2	L'argomento degli oggetti piccoli.	33
1.4.3	L'argomento degli oggetti piccoli, ancora.	35
1.4.4	La struttura modello su Spc .	41
1.4.5	La struttura modello su Cat .	42
2	Insiemi Simpliciali.	47
2.1	“One category to rule them all”.	47
3	∞-Categorie.	48
4	Higher Algebra.	49

Capitolo 1

Categorie Modello.

CONVENZIONI DI VARIA NATURA. La categoria **Spc** degli spazi topologici è una qualsiasi sottocategoria **Top** degli spazi topologici dove valga l'isomorfismo naturale

$$C^0(X \times Y, Z) \cong C^0(X, C^0(Y, Z))$$

ottenuto topologizzando opportunamente l'insieme delle funzioni continue $Y \rightarrow Z$. Un modello per **Spc** consiste della categoria degli spazi topologici compattamente generati, e $C^0(Y, Z)$ è dotato della topologia compatta-aperta. Un'altra scelta molto frequente è considerare quegli spazi compattamente generati che sono anche CW-complessi. Tutte le mappe $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tra spazi puntati preservano, infine, il punto base. Tutti i sottospazi di \mathbb{R} ed \mathbb{R}^n , in particolare l'intervallo chiuso $I = [0, 1]$ sono pensati dotati della consueta topologia reale.

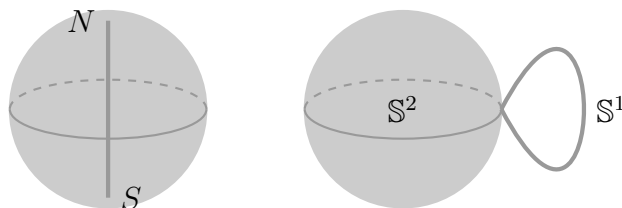
Oggetti piccoli

Piu reference piu esercizi, piu chiarezza nelle parti discorsive

1.1 Introduzione.

Chiunque inizi lo studio della Topologia Algebrica “classica” si scontra rapidamente con una asimmetria piuttosto marcata: un omeomorfismo $f: X \rightarrow Y$ tra spazi topologici è obbligato ad indurre isomorfismi tra tutti i gruppi di omotopia, essenzialmente perché $\pi_n: \mathbf{Spc} \rightarrow \mathbf{Grp}$ è un funtore per ogni $n \geq 0$.

D'altra parte, una mappa che induce isomorfismi tra tutti i gruppi di omotopia, come ad esempio quella che rende omotopicamente equivalenti i due spazi $X = \mathbb{S}^2 / \simeq$ (dove la relazione di equivalenza identifica i poli nord e sud) e $Y = \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$



non è affatto obbligata ad essere un omeomorfismo (questa in particolare non lo è, perché?). Questo denuncia il fatto che gli oggetti algebrici costruiti per catturare la geometria degli spazi topologici sono tutti invarianti di *omotopia* e non di omeomorfismo: se moralmente gli spazi sono classificati dai loro invarianti, e se gli stessi invarianti sono legati a spazi omotopicamente equivalenti, i “veri” isomorfismi, da un certo punto di vista, dovrebbero essere le mappe invertibili *a meno di omotopia*.

Ciò che vorremmo fare è definire una classe \mathcal{W} di *equivalenze omotopiche*, fatta da quelle funzioni continue che inducono isomorfismi tra tutti i π_n ; questa classe contiene tutti gli isomorfismi, è chiusa per composizione, e in effetti gode di una proprietà estremamente peculiare che implica la chiusura per composizione: non appena due tra i tre morfismi $f, g, g \circ f$ (supponendo tale composizione possibile) stanno in \mathcal{W} , allora vi sta anche il terzo.

Queste mappe dovrebbero essere trattate come isomorfismi e vorremmo che “lo diventino” in una categoria prodotta universalmente a partire da **Spc** (gli spazi topologici) e \mathcal{W} , a cui ci riferiamo come alla *localizzazione* di **Spc** rispetto a \mathcal{W} .

Il procedimento generale che esibisce la localizzazione di una generica categoria **C** rispetto a \mathcal{W} trova nella topologia la sua incarnazione più immediata, con una procedura che deve essere pensata come pesante generalizzazione di quella che produce l’omonima localizzazione $R[S^{-1}]$ di un anello commutativo R rispetto a un suo *sistema moltiplicativo* S , che riesce a costruire una nuova categoria, detta **categoria dell’omotopia**, dove le equivalenze omotopiche sono *davvero* invertibili.

Si chiama “categoria dell’omotopia” per la ragione che uno si aspetta: su ogni insieme di mappe continue **Spc**(X, Y) è definita una relazione di equivalenza, che è proprio la classica relazione di omotopia; la categoria dell’omotopia ha gli stessi oggetti, e per morfismi tra due oggetti esattamente la classi di omotopia tra mappe continue.

Ora, la parte che solitamente non si racconta mai è che la storia non finisce affatto qui: dentro la categoria **Spc** io posso isolare altre classi di morfismi: le **fibrazioni** (da pensare come una generalizzazione del

concetto di “rivestimento”: i rivestimenti sono esattamente le fibrazioni a fibra discreta) e le **cofibrazioni** (che come suggerisce il nome sono “la nozione duale” a quella di fibrazione: se le prime erano suriezioni, queste vanno pensate come qualcosa che somiglia alla classe delle inclusioni di sottospazi chiusi).

Queste due classi non sono scorrelate da quella delle equivalenze deboli, ne’ sono indipendenti tra loro: una qualsiasi mappa continua $f: X \rightarrow Y$ può essere fattorizzata come la composizione di due mappe, $p \circ i$,

$$X \xrightarrow{i} A(f) \xrightarrow{p} Y$$

dove i è una cofibrazione e p è *sia* una fibrazione che un’equivalenza omotopica; $A(f)$ è uno spazio ottenuto funtorialmente a partire dalla terna (X, Y, f) .

Questo ha il pregio di creare un paradigma che è esportabile ad altri contesti, o in altre parole tutto quello che è stato detto sinora è stato detto a proposito di

- certe mappe che voglio invertire (le equivalenze omotopiche),
- del mio modo di invertirle (la teoria della *localizzazione* di categorie), e implicitamente del modo che ho di presentare con “generatori e relazioni” questa localizzazione (ossia attraverso la relazione di omotopia tra oggetti),
- dell’esistenza di altre due classi di mappe che “si comportano bene” rispetto ai dati che avevo già inserito nella teoria, ovvero sono mattoni fondamentali in cui posso scomporre ogni morfismo $f: X \rightarrow Y$.

Nulla impedisce di dare una definizione generale: cos’è una categoria dove possiedo gli stessi dati (una classe di morfismi che voglio trattare come isomorfismi (le chiamo “equivalenze deboli”), e due classi ausiliarie che mi permettono di poter trattare quello che ottengo dopo il processo di inversione formale come una vera categoria dell’omotopia, dove le mappe sono classi di equivalenza modulo una certa relazione — perché nel caso di **Spc** è vero che posso farlo, ma in generale non è scontato)?

In una categoria siffatta posso dare tutte le definizioni cui ero abituato in topologia e che credevo fossero *ineliminabilmente* legate alla topologia: posso *interpretare* una teoria (l’omotopia) in un *modello* (la categoria dove quell’omotopia viene realizzata). La teoria dell’omotopia è invece inerente a un dato algebrico, che io sovrainpongo ad una categoria in cui voglio definire relazioni di omotopia, sistemi di invarianti, fibrazioni, rappresentazioni. . .

L’idea non dovrebbe essere nuova a chiunque si sia chiesto per quale ragione la nozione di omotopia topologica induce una nozione di omotopia

tra i complessi di (co)omologia di quegli spazi topologici. Questa semplice idea (il fatto cioè che “*shapes*” and “*invariants*” could be attributed to many other algebraic and combinatorial structures having at first sight no geometrical nature) sta dietro la definizione di una **struttura modello** su una categoria qualsiasi.

L'importanza di questo processo di assiomatizzazione fu compresa molto rapidamente: in una famosa prolusione tenuta da J. Whitehead al congresso internazionale dei matematici nel 1950, l'idea di una teoria dell'*omotopia algebrica*, ossia di una assiomatizzazione delle tecniche della Topologia Algebrica, viene così definita ([Bau89]):

In homotopy theory, spaces are classified in terms of homotopy classes of maps, rather than individual maps of one space in another. Thus, using the word *category* in the sense of S. Eilenberg and S. Mac Lane, a homotopy category of spaces is one in which the objects are topological spaces and the “mappings” are not individual maps but rather *homotopy classes* of ordinary maps. [...] The ultimate object of algebraic homotopy is to construct a purely algebraic theory, which is equivalent to homotopy theory in the same sort of way that ‘analytic’ is equivalent to ‘pure’ projective geometry.

A motivare la proposta di Whitehead fu il successo nell'assiomatizzare la più semplice teoria dell'omologia, da parte di S. Eilenberg e N. Steenrod ([ES45]): sarebbe stato possibile arrivare ad una analoga sistemazione per le teorie dell'omotopia? E che significato avrebbe avuto una tale assiomatizzazione? Quali ci si doveva aspettare fossero i reali confini del linguaggio della teoria dell'omotopia?

Il linguaggio delle categorie, nato essenzialmente al fine di poter pronunciare la frase “esiste una trasformazione naturale dall'omotopia all'omologia (la *mappa di Hurewicz*)” stava per vivere il suo Rinascimento a distanza di una ventina d'anni: P. J. Hilton, nel suo *Homotopy Theory and Duality* ([HS65]), così scrive.

[...] Finally we remark that one would try to define the notions of cone, suspension, loop space, etc. for the category \mathbf{C} and thus place “duality” on a strict logical basis. It would seem therefore that we should consider an abstract system formalizing the category of spaces, its homotopy category and the homotopy functors connecting them.

Sarebbe stato compito di D. Quillen, due anni dopo, raccogliere questo oneroso testimone e realizzare la fondamentale intuizione di Hilton: la teoria dell'omotopia *deve essere basata* sull'idea che le proprietà di “forma” e “invarianza per omotopia” possano essere attribuite a classi di oggetti estremamente più generali degli spazi topologici, a patto che nella categoria di forme (**Shapes**) che li raccoglie convivano e interagiscano tre classi di morfismi:

- Una classe di *equivalenze deboli*, il cui ruolo è diventare gli *isomorfismi* nella *categoria dell'omotopia* di **Shapes**;
- Una classe di *fibrazioni*, il cui ruolo è di comportarsi analogamente a (una generalizzazione della nozione di) rivestimenti topologici, *rialzando* le *omotopie* che si possono definire in **Shapes** in maniera puramente diagrammatica.
- Una classe di *cofibrazioni*, che assolvono la funzione *duale* a quella delle fibrazioni, *estendendo* le omotopie in **Shapes**.

Scarno fino a questo punto, tale paradigma assume un ruolo ubiquitario in tutte le branche della Geometria e dell'Algebra. Lo scopo di questa nota è convogliare in un'unica fonte esempi e costruzioni elementari e meno elementari che aiutino il lettore ad orientarsi in una teoria che ha avuto crescita superesponenziale negli ultimi anni, e che promette, negli anni seguenti, di toccare da vicino il senso stesso in cui interpretiamo le strutture della Matematica (si veda, a questo proposito, la definizione di *brave new algebra*, anche **qui**, e il garagantuesco progetto **HoTT**).

1.2 Fibrazioni e omotopie.

Definizione 1.2.1. Siano X, Y spazi topologici puntati.

Una *omotopia rossa* tra due mappe continue $f, g: X \rightarrow Y$ consiste di una funzione continua $\hat{H}: X \times I \rightarrow Y$ tale che il diagramma seguente sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} & & \\
 i_0 \downarrow & \searrow f & \\
 X \times I & \xrightarrow{\hat{H}} & Y \\
 i_1 \uparrow & \nearrow g & \\
 X \times \{1\} & &
 \end{array}$$

Osservazione 1.2.1. Una omotopia rossa tra f e g associa ad ogni t una funzione continua $H_t = H(-, t): X \rightarrow Y$, tale che $H_0 = f, H_1 = g$, e consiste dunque di un cammino continuo nello spazio $C^0(X, Y)$, avente per estremi f e g .

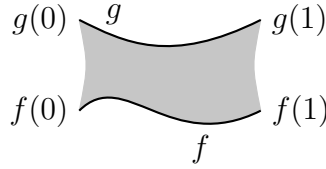
Definizione 1.2.2. Siano X, Y spazi topologici puntati.

Una *omotopia blu* tra due mappe continue $f, g: X \rightarrow Y$ consiste di una funzione continua $\tilde{H}: X \rightarrow Y^I = C^0(I, Y)$ tale che il diagramma

seguente sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \\
 & \nearrow f & \uparrow q_0 \\
 X & \xrightarrow{\tilde{H}} & Y^I \\
 & \searrow g & \downarrow q_1 \\
 & & Y
 \end{array}$$

Osservazione 1.2.2. Di nuovo, indaghiamo il significato geometrico di una omotopia blu tra f e g . Essa consta di una funzione che ad ogni $x \in X$ associa un cammino continuo di estremi $f(x)$ e $g(x)$, che li congiunge nello spazio Y :



Osservazione 1.2.3. Lo spazio topologico $C^0(I, Y)$ è detto *spazio dei cammini* di Y , e dotato della topologia compatta-aperta ammette due ovvie mappe continue $q_0, q_1: Y^I \rightrightarrows Y$ che mandano un cammino γ rispettivamente nel suo punto iniziale $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ in Y .

Le due definizioni così enunciate sono, ovviamente, strettamente correlate, al netto di una operazione (probabilmente intraducibile in italiano) chiamata *currying* di una funzione $X \times I \rightarrow Y$ in una funzione $X \rightarrow Y^I$ e viceversa.

- Da una parte, avendo una omotopia rossa $\hat{H}: X \times I \rightarrow Y$ che soddisfa le relazioni $\hat{H} \circ i_0 = f, \hat{H} \circ i_1 = g$ della Definizione 1.2.1 possiamo definire una nuova funzione

$$\hat{H}_\beta: X \xrightarrow{\eta_X} (X \times I)^I \xrightarrow{\hat{H}^I} Y^I$$

dove η_X è definita mandando $x \in X$ nella funzione $I \rightarrow X \times I: t \mapsto (x, t)$, e \hat{H}^I è la mappa di composizione a sinistra con \hat{H} ;

- D'altra parte, avendo una omotopia blu $\tilde{H}: X \rightarrow Y^I$ che soddisfa alle relazioni della Definizione 1.2.2 possiamo definire un'altra funzione

$$\tilde{H}_\epsilon: X \times I \xrightarrow{\tilde{H} \times I} Y^I \times I \xrightarrow{\epsilon_Y} Y$$

dove $\tilde{H} \times I$ è l'ovvia funzione $(x, t) \mapsto (\tilde{H}(x), t)$ ed ϵ_Y è la mappa di valutazione che manda $f: I \rightarrow Y, t \in I$ in $f(t) \in Y$.

Esercizio 1.2.1. Dimostrare che \hat{H}_β è una omotopia blu; dimostrare che \tilde{H}_ρ è una omotopia rossa; dimostrare che (con ovvio significato delle notazioni) $(\hat{H}_\beta)_\rho = \hat{H}$ e $(\tilde{H}_\rho)_\beta = \tilde{H}$.

Questo risultato stabilisce una biiezione tra l'insieme delle omotopie rosse e delle omotopie blu e permette dunque di identificare i due insiemi, parlando solo di *omotopie* tra due funzioni $f, g: X \rightarrow Y$. Essere omotopi mediante una omotopia rossa o blu è una relazione di equivalenza su $C^0(X, Y)$ (provarlo!) denotata come $f \simeq g$, compatibile con la composizione a destra e a sinistra per ogni funzione continua (e componibile) in **Spc** (provare cioè che se $f \simeq g$, allora $k \circ f \simeq k \circ g$ e $f \circ h \simeq g \circ h$ ogni volta che queste composizioni hanno senso in **Spc**).

Osservazione 1.2.4. Le omotopie rosse e le omotopie blu si corrispondono mediante l'*aggiunzione*

$$C^0(X \times I, Y) \cong C^0(X, Y^I).$$

Esercizio 1.2.2. Dimostrare che la funzione $\varphi: C^0(X \times I, Y) \cong C^0(X, Y^I)$ definita da $\varphi(f: X \times I \rightarrow Y) = f^I \circ \eta_X$ è una biiezione di inversa $g \mapsto \epsilon_Y \circ (g \times I)$, nelle stesse notazioni di prima che definiscono ϵ_Y, η_X . Se gli insiemi $C^0(X \times I, Y)$ e $C^0(X, Y^I)$ sono dotati della topologia compatta-aperta, φ è un omeomorfismo.

Osservazione 1.2.5. Il linguaggio diagrammatico in cui abbiamo espresso la relazione di omotopia, e la generalità di questo ultimo risultato, porta a sospettare che si possa estendere la nozione di “omotopia di cammini” a un contesto più generale di quello topologico. Effettivamente, arrivare a questa generalizzazione è il punto della lezione.

Procediamo ad investigare le proprietà degli spazi individuati dalle definizioni di omotopia rossa e omotopia blu: come detto in precedenza lo spazio Y^I è lo *spazio dei cammini* (*path-space*) di Y , e consiste dell'insieme di tutte le funzioni $\gamma: I \rightarrow Y$ (cammini, appunto) dotato della topologia compatta aperta.

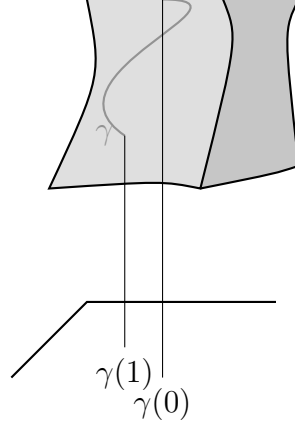
Osservazione 1.2.6. L'ovvia mappa diagonale $\Delta: Y \rightarrow Y \times Y: y \mapsto (y, y)$ ammette una *fattorizzazione* attraverso lo spazio dei cammini di Y : esiste cioè una coppia di funzioni continue

$$Y \xrightarrow{j} Y^I \xrightarrow{p} Y \times Y$$

la cui composizione è Δ ; è ovvio come queste mappe siano definite: j manda $y \in Y$ nel cammino costante in y , diciamo c_y , mentre p manda un cammino $\gamma \in Y^I$ nella coppia $(\gamma(0), \gamma(1))$ fatta dai suoi punti iniziale e finale.

Esercizio 1.2.3. La mappa j è iniettiva (ovvio) e ammette una inversa omotopica (esiste cioè una funzione continua $Y^I \rightarrow Y$ tale che le composizioni $r \circ j$ e $j \circ r$ siano omotope alle identità dei rispettivi domini/codomini).

(Hint: provare a definire $r: \gamma \mapsto \gamma(1)$).



Osservazione 1.2.7. La mappa $Y^I \rightarrow Y \times Y$ è una *fibrazione di Serre*: ciò significa che ha la seguente *proprietà di lifting*: comunque sia dato un quadrato commutativo di funzioni continue

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{u} & Y^I \\ i_0 \downarrow & \nearrow a & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{v} & Y \times Y \end{array}$$

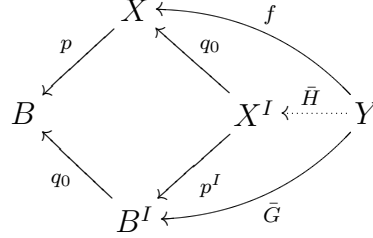
dove i_0 include il disco $D^n \subset \mathbb{R}^n$ in $D^n \times \{0\}$, esiste una ulteriore funzione continua $a: D^n \times I \rightarrow Y^I$ che rompe il quadrato in due triangoli commutativi.

Dimostrazione. L'assegnazione di un diagramma come sopra consiste nel dato di un cammino continuo in Y tra ogni coppia di elementi $(v(z, t)_1, v(z, t)_2)$ ¹ questo è esattamente quanto serve per definire $a: D^n \times I \rightarrow Y^I$ come la mappa che manda (z, t) nel cammino $I \rightarrow Y$ di estremi $v(z, t)$.

□

¹Non è del tutto immediato che questo sia vero. Se supponiamo che esista $(\bar{z}, \bar{t}) \in D^n \times I$ tale che non vi sia un cammino continuo tra $v(\bar{z}, \bar{t})_0$ e $v(\bar{z}, \bar{t})_1$, allora \bar{t} deve essere strettamente positivo. D'altra parte allora possiamo prendere il cammino $\gamma: [0, \bar{t}] \rightarrow Y: s \mapsto v(\bar{z}, s)_0$ e il cammino $\beta: [0, \bar{t}] \rightarrow Y: s' \mapsto v(\bar{z}, s)_1$; la composizione di cammini $\gamma \cdot u(\bar{z}) \cdot \beta$ congiunge $v(\bar{z}, \bar{t})_0$ e $v(\bar{z}, \bar{t})_1$, dando un assurdo: ogni coppia di punti $v(z, t)$ è agli estremi di un cammino.

Esercizio 1.2.4. Una mappa in **Spc** si dice avere la *proprietà di rialzamento delle omotopie* (HLP) rispetto a $Y \in \mathbf{Spc}$ quando in ogni diagramma commutativo di frecce solide

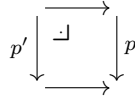


esiste una omotopia blu $\bar{H}: Y \rightarrow X^I$ che *rialza* l'omotopia $\bar{G}: Y \rightarrow B^I$. Mostrare che $p: X \rightarrow B$ è una fibrazione di Serre se e solo se ha la HLP rispetto a tutti i dischi $D^n \in \mathbf{Spc}$. (Sugg.: vedere [Bau89]; $H: Y \times I \rightarrow X$, $G: Y \times I \rightarrow B$ sono i *mate* di \bar{H} , \bar{G} nelle aggiunzioni $C^0(Y \times I, X) \cong C^0(Y, X^I)$, $C^0(Y \times I, B) \cong C^0(Y, B^I)$).

Questa proprietà all'apparenza molto formale permette di dimostrare piuttosto rapidamente alcune proprietà di stabilità della classe \mathfrak{Fib} delle fibrazioni di Serre:

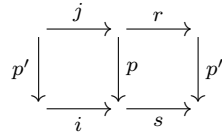
Proposizione 1.2.1. La classe \mathfrak{Fib} delle fibrazioni di Serre è chiusa per composizione, pullback, prodotti e retratti: più in dettaglio,

- Se $p, q \in \mathfrak{Fib}$ sono due mappe continue componibili, allora la loro composizione è ancora una fibrazione di Serre;
- Se $p \in \mathfrak{Fib}$, e viene dato un diagramma di pullback



anche $p' \in \mathfrak{Fib}$;

- Se viene data una famiglia $p_i: X_i \rightarrow Y_i$ di fibrazioni di Serre, la funzione indotta $\prod_i p_i: \prod_i X_i \rightarrow \prod_i Y_i$ è ancora una fibrazione di Serre
- Se disponiamo di un diagramma commutativo come



tale che $rj = 1$, $si = 1$ e $p \in \mathfrak{Fib}$, allora anche $p' \in \mathfrak{Fib}$.

La dimostrazione di questi fatti non ha alcun sapore topologico, risultando da un argomento puramente formale che sfrutta la nozione di *ortogonalità* tra morfismi di una categoria.

Prima di introdurre tale nozione avanziamo timidamente una ipotesi: se le omotopie rosse e blu tra $f, g: X \rightarrow Y$ si corrispondono mediante una biiezione, una viene definita mediante l'oggetto dei cammini di Y , e l'altra mediante un "cilindro" su X , ovvero tramite lo spazio $X \times I$ con la topologia prodotto (nessun bisogno di giustificare la scelta del nome!); non è che il cilindro su X ha proprietà duali a quelle dell'oggetto dei cammini?

In effetti sì:

Proposizione 1.2.2. Esiste una fattorizzazione della mappa *codiagonale* $\nabla: X \amalg X \rightarrow X$,

$$X \amalg X \xrightarrow{i} X \times I \xrightarrow{\pi} X$$

(definita mandando ogni elemento di $X \amalg X$ in sé stesso) tale che $X \times I$ abbia le seguenti proprietà:

- La mappa $i: X \amalg X \rightarrow X \times I$ è iniettiva;
- La mappa $\pi: X \times I \rightarrow X$ è una fibrazione di Serre *aciclica* (ovvero induce isomorfismi tra tutti i gruppi di omotopia).

Osservazione 1.2.8. La mappa π è una fibrazione di Serre: se viene dato un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{u} & X \times I \\ i_0 \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow \pi \\ D^n \times I & \xrightarrow{v} & X \end{array}$$

definire $\gamma: D^n \times I \rightarrow X \times I: (p, t) \mapsto (v(p, t), u(p)_2)$, dove $u(p) = (u(p)_1, u(p)_2) \in X \times I$. Che sia aciclica è facile quando ci si sia ricordati che tutti i gruppi di omotopia di un prodotto sono il prodotto dei gruppi di omotopia dei fattori, e che l'intervallo I è uno spazio contrattile.

Esercizio 1.2.5. Il lettore più zelante può divertirsi a notare che questa dimostrazione non ha praticamente niente di topologico; in effetti è un fatto generale (l'argomento è identico) che la mappa di proiezione canonica $X \times A \rightarrow X$ ha sempre la proprietà di lifting a destra di ogni inclusione $i_{a_0}: B \rightarrow A \times B: b \mapsto (a_0, b)$.

Osservazione 1.2.9. La teoria duale a quella delle fibrazioni è quella delle *cofrazioni* di Serre: se le prime sono una classe di mappe suriettive

e continue, le seconde vanno pensate come particolari inclusioni di sottospazi $A \subset X$, anch'esse soggette a una proprietà di lifting (stavolta a *sinistra*): una mappa $i: A \rightarrow X$ è una *cofibratura di Serre* se in ogni quadrato commutativo (chiamato *problema di lifting* nella definizione della prossima sezione) della forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & B \end{array}$$

dove $p: E \rightarrow B$ è una fibrazione di Serre che induce isomorfismi tra tutti i gruppi di omotopia $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$, esiste il lifting tratteggiato (detto *soluzione* al problema di lifting).

Esercizio 1.2.6. ([Bau89]) Mostrare che un problema di lifting determinato da una mappa $i: A \rightarrow X$ in **Spc**,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y^I \\ i \downarrow & & \downarrow q_0 \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ammette una soluzione se e solo se $i: A \rightarrow X$ ha la seguente proprietà di *estensione delle omotopie* rispetto a Y : per ogni diagramma a frecce solide

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & i \nearrow & & f \searrow & \\ A & & & & Y \\ & j_0 \searrow & & & \\ & & A \times I & & \\ & & \nearrow i \times I & \nearrow G & \\ & & X \times I & \cdots \rightarrow & Y \end{array}$$

esiste una omotopia rossa $X \times I \rightarrow Y$ che rende commutative tutte le parti del diagramma.

Finora abbiamo mostrato quanto segue:

Proposizione 1.2.3. Ad ogni spazio $X \in \mathbf{Spc}$ sono associate una mappa diagonale $X \rightarrow X \times X$ e una *codiagonale* $X \amalg X \rightarrow X$; per queste mappe esistono delle fattorizzazioni

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & X^I \twoheadrightarrow X \times X \\ X \amalg X & \longrightarrow & X \times I \xrightarrow{\sim} X \end{array}$$

dove la prima mappa è chiamata una *cofibratura (aciclica, o “banale”)*, e la seconda è una *fibrazione (aciclica, o “banale”)*.

Ora, il passo successivo di questa indagine è chiedersi: non è che magari esiste un modo di fattorizzare *ogni* funzione $f: X \rightarrow Y$ in **Spc** in una composizione di cofibrazione aciclica + fibrazione e di cofibrazione + fibrazione aciclica?

La risposta sarà sì. La possibilità di operare questa fattorizzazione (e qualche altra ipotesi tecnica ausiliaria) darà a **Spc** una *struttura modello*.

1.3 Strutture modello.

1.3.1 Ortogonalità di morfismi.

Definizione 1.3.1. Sia **C** una categoria; diciamo che un morfismo $f: X \rightarrow Y$ è *ortogonale a destra*, o che ha la *proprietà di lifting a destra* rispetto a un morfismo $g: A \rightarrow B$ (equivalentemente, che g è ortogonale a sinistra a f , o che ha la proprietà di lifting a sinistra rispetto a f), e scriviamo $g \perp f$, se in ogni quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & \nearrow a & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

in cui g compare a sinistra ed f a destra, esiste un *unico* “rialzamento” a che spezza il quadrato in due triangoli commutativi.

Notazione 1.3.1. Un quadrato commutativo come quello sopra è un *problema di lifting* per f, g , e la loro collezione viene denotata con $\text{sq}(g, f)$; la freccia a che fa da rialzamento viene detta *soluzione* al problema di lifting. In questa terminologia, $g \perp f$ se e solo se ogni problema di lifting in $\text{sq}(g, f)$ ha un’unica soluzione.

Definizione 1.3.2. Similmente, diciamo che f è *debolmente* ortogonale a destra a g se nello stesso diagramma, esiste *almeno* una soluzione al problema di lifting determinato dal quadrato. Denotiamo la relazione di ortogonalità debole con $g \boxtimes f$.

Esercizio 1.3.1. Mostrare questa catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} f \boxtimes f &\iff f \text{ è un isomorfismo} \\ &\iff (\text{per ogni } g \in \text{hom}(\mathbf{C})), (f \boxtimes g) \wedge (g \boxtimes f). \end{aligned}$$

Mostrare che se $F \dashv G: \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D}$ sono due funtori aggiunti, allora $Ff \boxtimes g$ in **D** se e solo se $f \boxtimes Gg$ in **C** (sugg.: la soluzione al problema di lifting $f \boxtimes Gg$ è il *mate* della soluzione a $Ff \boxtimes g$ attraverso l’aggiunzione $\text{hom}(FX, Y) \cong \text{hom}(X, GY)$, e viceversa).

Esercizio 1.3.2. Mostrare che se $f: X \rightarrow Y$, $g: A \rightarrow B$, allora $g \perp f$ (resp., $g \boxdot f$) se e solo se nel diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}(B, X) & \xrightarrow{\text{hom}(u, X)} & \text{hom}(A, X) \\
 \downarrow \text{hom}(B, f) & \searrow \text{dotted} & \downarrow \text{hom}(A, f) \\
 & P & \\
 & \downarrow & \\
 \text{hom}(B, Y) & \xrightarrow{\text{hom}(u, Y)} & \text{hom}(A, Y)
 \end{array}$$

la mappa indotta $\text{hom}(B, X) \rightarrow P \cong \text{hom}(B, Y) \times_{\text{hom}(A, Y)} \text{hom}(A, X)$ è una biiezione (resp., suriettiva).

Osservazione 1.3.1. Nel seguito tratteremo solo problemi di lifting che ammettono una soluzione in questo senso più debole: proponiamo comunque per prima la definizione più forte perché tra poco si parlerà di “sistemi di fattorizzazione *deboli*” (sono gli unici a cui siamo interessati, ma ci sono anche quelli *forti*): in che modo giustificare questa attenuazione se non presentando la dicotomia tra ortogonalità forte (unicità della soluzione al problema di lifting) e debole (*esistenza* di una soluzione)?

Definizione 1.3.3. Data una classe \mathcal{K} di morfismi di \mathbf{C} , chiamiamo \mathcal{K}^\boxdot la classe di tutti i morfismi che sono ortogonali a destra a ciascun elemento di \mathcal{K} . Similmente, ${}^\boxdot\mathcal{K}$ è la classe di tutti i morfismi di \mathbf{C} che sono ortogonali a sinistra a ogni $k \in \mathcal{K}$.

Esercizio 1.3.3. Dimostrare che

1. ${}^\boxdot(-)$ e $(-)^{\boxdot}$ definiscono delle funzioni monotone decrescenti

$$\mathcal{P}(\text{hom}(\mathbf{C})) \rightarrow \mathcal{P}(\text{hom}(\mathbf{C}));$$

2. ${}^\boxdot(\mathcal{K}^\boxdot), ({}^\boxdot\mathcal{K})^\boxdot \supset \mathcal{K}$;
3. ${}^\boxdot\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ se e solo se $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^\boxdot$, e ${}^\boxdot(\mathcal{K}^\boxdot)^\boxdot = \mathcal{K}^\boxdot, {}^\boxdot({}^\boxdot\mathcal{K})^\boxdot = {}^\boxdot\mathcal{K}$.

Esercizio 1.3.4. Determinare \mathcal{K}^\boxdot in ognuno dei seguenti casi:

- $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ e $\mathcal{K} = \{\emptyset \rightarrow \{\emptyset\}\}$;
- $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ e $\mathcal{K} = \{f: X \rightarrow Y \mid \text{suriettiva}\}$;
- $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ e $\mathcal{K} = \{[0] \rightarrow [1]\}$, se $[n]$ indica l'insieme $\{0, \dots, n\}$ con $n + 1$ elementi.

Proposizione 1.3.1. Per ogni $\mathcal{K} \subset \text{hom}(\mathbf{C})$, la classe \mathcal{K}^\boxdot è *cosatura*, ovvero valgono le seguenti proprietà:

- \mathcal{K}^\square contiene tutte le frecce identiche e tutti gli isomorfismi. In più se $p, q \in \mathcal{K}^\square$ sono due mappe continue componibili, allora la loro composizione è ancora in \mathcal{K}^\square ;
- Se $p \in \mathcal{K}^\square$, e viene dato un diagramma di pullback come quello a fianco, anche $p' \in \mathcal{K}^\square$;
- Se viene data una famiglia $p_i: X_i \rightarrow Y_i$ in \mathcal{K}^\square , la funzione indotta $\prod_i p_i: \prod_i X_i \rightarrow \prod_i Y_i$ è ancora in \mathcal{K}^\square ;
- Se disponiamo di un diagramma commutativo come

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ p' \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & j & \xrightarrow{\quad} & r & \xrightarrow{\quad} & \\ p' \downarrow & & & & p & \downarrow & p' \\ & & i & \xrightarrow{\quad} & s & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

tale che $rj = 1$, $si = 1$ e $p \in \mathcal{K}^\square$, allora anche $p' \in \mathcal{K}^\square$.

(Queste proprietà ricordano qualcosa?)

Proposizione 1.3.2. Per ogni $\mathcal{K} \subset \text{hom}(\mathbf{C})$, la classe ${}^\square\mathcal{K}$ è *satura*, ovvero valgono le seguenti proprietà:

- ${}^\square\mathcal{K}$ contiene tutte le frecce identiche e tutti gli isomorfismi. In più se $p, q \in {}^\square\mathcal{K}$ sono due mappe continue componibili, allora la loro composizione è ancora in ${}^\square\mathcal{K}$;
- Se $p \in {}^\square\mathcal{K}$, e viene dato un diagramma di psuhout come quello a fianco, anche $p' \in {}^\square\mathcal{K}$;
- Se viene data una famiglia $p_i: X_i \rightarrow Y_i$ in ${}^\square\mathcal{K}$, la funzione indotta $\prod_i p_i: \prod_i X_i \rightarrow \prod_i Y_i$ è ancora in ${}^\square\mathcal{K}$;
- Se disponiamo di un diagramma commutativo come

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ p \downarrow & \ulcorner & \downarrow p' \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & j & \xrightarrow{\quad} & r & \xrightarrow{\quad} & \\ p' \downarrow & & & & p & \downarrow & p' \\ & & i & \xrightarrow{\quad} & s & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

tale che $rj = 1$, $si = 1$ e $p \in {}^\square\mathcal{K}$, allora anche $p' \in {}^\square\mathcal{K}$.

Definizione 1.3.4. Un *sistema di fattorizzazione* in una categoria \mathbf{C} consta di due classi di morfismi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ con le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{E} = {}^\square\mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \mathcal{E}^\square$ (ovvero $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sono classi *ortogonali*);
2. Ogni morfismo $f: X \rightarrow Y$ in \mathbf{C} può essere fattorizzato come una composizione $m \circ e$, con ovvio significato delle lettere scelte (ovvero $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sono classi *fattorizzanti*).

Esercizio 1.3.5. Una coppia di classi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ in $\text{hom}(\mathbf{C})$ che soddisfa solo l'assioma di ortogonalità si dice una *prefattorizzazione*. Dedurre dall'ultimo punto dell'esercizio 1.3.3 che ogni classe di morfismi $\mathcal{S} \subset \text{hom}(\mathbf{C})$ genera naturalmente *due* prefattorizzazioni (destra e sinistra, rispettivamente) $(\square(\mathcal{S}^\square), \mathcal{S}^\square), (\square\mathcal{S}, (\square\mathcal{S})^\square)$.

È di grande utilità sapere che un sistema di fattorizzazione in una categoria \mathbf{C} è generato a destra o a sinistra da una certa classe di morfismi \mathcal{S} ; ad esempio è possibile controllare le proprietà di ortogonalità su un insieme a volte molto piccolo (a volte addirittura un singoletto).

1.3.2 Esempi

Mono ed Epi in Sets.

Questo esempio tornerà utile in seguito. Se viene assegnato un quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ m \downarrow & & \downarrow e \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

dove $m \in \text{MONO}$, $e \in \text{EPI}$, definiamo un lifting $v: B \rightarrow X$ come segue:

- Se $b = m(a)$ per qualche $a \in A$, questo a è unico, dunque possiamo porre $v(b) = f(a)$.
- Se b cade fuori dell'immagine di m , scegliamo una qualsiasi inversa destra di e , diciamo $j: Y \rightarrow X$, e allora $ev = g$ è automaticamente soddisfatta se $v = jg$.

Ogni funzione $f: X \rightarrow Y$ si fattorizza, poi, come una composizione $f = \pi_Y \circ (1, f)$, dove

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(1, f)} & X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y \\ x & \longmapsto & (x, f(x)) \longmapsto f(x) \end{array}$$

Proiettivi ed Epi in $\text{Mod}(R)$.

Se R è un anello unitario, indichiamo con $\text{MOD}(R)$ la categoria dei moduli destri e dei loro morfismi $M_R \rightarrow N_R$; un morfismo di R -moduli si dice *proiettivo* se è un monomorfismo con conucleo proiettivo (sicché un R -modulo è proiettivo se e solo se $P \rightarrow 0$ è un morfismo proiettivo). La coppia $(\text{PROJ}, \text{EPI})$ (i secondi sono gli epimorfismi) è un sistema di fattorizzazione debole in $\text{MOD}(R)$:

- Anzitutto mostriamo che $\text{PROJ} = {}^\square\text{EPI}$: da una parte, se $i \in {}^\square\text{EPI}$, è un monomorfismo (spezzante) perché

$$\begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ i \downarrow & \nearrow \exists p & \downarrow \\ B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Questo fatto implica che $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{k} \text{coker}(i) \rightarrow 0$ spezza, e dato che qualsiasi sequenza esatta corta avente $\text{coker}(i)$ alla fine è isomorfa a questa, $\text{coker}(i)$ è proiettivo. Dall'altro lato, se $i: A \rightarrow B$ è un monomorfismo (spezzante) con conucleo proiettivo (diciamolo P), $B \cong i(A) \oplus P \xrightarrow{(f \ r \ h)} X$ definisce il lifting desiderato in

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

dove $p: X \rightarrow Y$ è un epimorfismo qualsiasi, r una inversa sinistra di i , $h: P \rightarrow X$ un qualsiasi lifting ottenuto sfruttando il fatto che P è proiettivo.

- Mostrare che esiste una fattorizzazione $(\text{PROJ}, \text{EPI})$ per ogni morfismo $f: X \rightarrow Y$ in $\text{MOD}(R)$ è leggermente più difficile: un metodo per costruire passo passo la fattorizzazione è usare l'argomento degli oggetti piccoli (vedi §1.4.2); d'altra parte al fine della dimostrazione è sufficiente esibire ciò che tale algoritmo produce.

Osserviamo preliminarmente che il funtore dimenticante $U: \text{MOD}(R) \rightarrow \mathbf{Sets}$ ammette un aggiunto sinistro F , che *crea* la struttura di R -modulo libero su ogni insieme X^2 . Ricordando poi che gli R -moduli liberi sono tutti proiettivi, abbiamo che ogni inclusione del tipo $A \hookrightarrow A \oplus \hat{F}$, dove $\hat{F} \in \text{MOD}(R)$ è libero, appartiene a PROJ . Un buon candidato per fare da fattorizzazione di $f: X \rightarrow Y$ è allora

$$X \xrightarrow{i_X} X \oplus FU(Y) \xrightarrow{(f \ \epsilon_Y)} Y$$

dove $\epsilon_Y: FUY \rightarrow Y$ è la counità della aggiunta $F: \mathbf{Sets} \rightleftarrows \text{MOD}(R): U$.

Ciò che resta da dimostrare a questo punto è che la freccia $X \oplus FUY \rightarrow Y$ è un epimorfismo. Questo è immediato: per come ϵ_Y è definita, nella controimmagine di $y \in Y$ c'è sempre almeno $(0, (0, y)) \in X \oplus FU(Y)$.

²Si tratta semplicemente del funtore che manda un insieme I nel modulo $R^{(I)} \cong \bigoplus_{i \in I} R$, guardato come modulo nel modo ovvio.

Esercizio 1.3.6 (Proiettivi ed epi in $T\text{-ALG}$). Sia \mathbf{V} una categoria finitamente cocompleta, che ammette un funtore fedele $U: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Sets}$, il quale ha un aggiunto sinistro $F: \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{V}$, con la proprietà che le algebre per la monade $T = FU$ siano una categoria *isomorfa* a \mathbf{V} . Esempi di queste categorie \mathbf{V} , dette *monadiche*, sono tutte le categorie di strutture algebriche finitarie (magmi, semigrupperi, monoidi (abeliani), gruppi (abeliani), ...).

Mostrare che in \mathbf{V} esiste sempre un sistema di fattorizzazione $(\text{PROJ}, \text{EPI})$, definendo PROJ come la classe dei retratti di morfismi del tipo $A \hookrightarrow A \amalg FX$, dove FX è l'oggetto libero sull'insieme X . (hint: la counità $FU \rightarrow 1$ è sempre un epimorfismo perché U è fedele).

Mono e fibrazioni banali.

In $\text{MOD}(R)$ esiste un sistema di fattorizzazione $(\text{MONO}, \text{RLP}(\text{MONO}))$, dove MONO è la classe dei monomorfismi, e $\text{RLP}(\text{MONO})$ è detta la classe delle *fibrazioni banali*.

Quadrati cartesiani.

Per ogni categoria \mathbf{C} la categoria $\mathbf{C}^{[1]}$ delle frecce di \mathbf{C} ha per morfismi $u \Rightarrow v$ i quadrati commutativi

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ u \downarrow & \begin{array}{c} f_0 \\ \star \end{array} & \downarrow v \\ & \xrightarrow{\quad f_1 \quad} & \end{array}$$

Esiste un funtore canonico $p: \mathbf{C}^{[1]} \rightarrow \mathbf{C}$ che manda un morfismo $u \Rightarrow v$ in $f_1: \text{trg}(u) \rightarrow \text{trg}(v)$; su $\mathbf{C}^{[1]}$ esiste allora un sistema di fattorizzazione $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ dove \mathcal{E} è la classe $p^\leftarrow(\text{ISO}(\mathbf{C}))$ e \mathcal{M} è la classe dei quadrati come (\star) che sono anche dei pullback.

Esercizio 1.3.7. Data una classe $\mathcal{K} \subset \text{hom}(\mathbf{C})$, la sua *saturazione* ${}_s\langle \mathcal{K} \rangle$ consta della minima classe satura contenente \mathcal{K} ; se \mathcal{K} è un insieme, ${}_s\langle \mathcal{K} \rangle$ esiste sempre. Mostrare che $\square({}_s\langle \mathcal{K} \rangle) = \square \mathcal{K}$.

Esercizio 1.3.8. Provare un risultato duale per \mathcal{K}^\square e la sua *cosaturazione* $\langle \mathcal{K} \rangle_s$.

Definizione 1.3.5. Una *struttura modello* su una categoria \mathbf{C} che sia completa e cocompleta, consta della scelta di tre classi di morfismi, $\text{WK}, \text{COF}, \text{FIB} \subset \text{hom}(\mathbf{C})$ tali che

- La classe WK delle *equivalenze deboli* goda della *proprietà 3-per-2*: date due frecce componibili qualsiasi, diciamo f, g , non appena due tra $\{f, g, gf\}$ appartengono a WK, allora vi appartiene anche il terzo.
- Le coppie $(\text{WK} \cap \text{COF}, \text{FIB})$ e $(\text{COF}, \text{WK} \cap \text{FIB})$ sono entrambe sistemi di fattorizzazione debole su \mathbf{C} .

Definizione 1.3.6. Ci riferiamo (specie nel seguito) alla coppia (\mathbf{C}, Mod) , dove $\text{Mod} = \{\text{WK}, \text{COF}, \text{FIB}\}$ come a una *teoria dell'omotopia*, e a \mathbf{C} come a una *categoria modello*. La *categoria dell'omotopia* di una categoria modello \mathbf{C} consiste della *localizzazione* di \mathbf{C} rispetto alla classe WK, ovvero della categoria $\text{Ho}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}[\text{WK}^{-1}]$ universale rispetto alla proprietà di aver reso invertibili i morfismi di WK.

Localizzazione di Gabriel-Zisman.

Se \mathbf{C} è una categoria piccola e \mathcal{W} una classe di frecce, definiamo la *localizzazione* di \mathbf{C} rispetto a \mathcal{W} mediante la seguente proprietà universale:

La localizzazione di \mathbf{C} rispetto a una classe di morfismi $\mathcal{W} \subseteq \text{hom}(\mathbf{C})$ consta di un funtore $J: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ verso una categoria $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ dove tutti i morfismi di \mathcal{W} sono diventati invertibili, e che è iniziale rispetto alla proprietà di mandare ogni elemento di \mathcal{W} in un isomorfismo.

Detta in altri termini, la localizzazione di \mathbf{C} rispetto a \mathcal{W} consta di una categoria $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ che riceve un funtore da \mathbf{C} , il quale rende invertibili tutti i morfismi di \mathcal{W} , e tale per cui ogni volta che sia dato un diagramma come

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{C} & \\ J \swarrow & & \searrow F \\ \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}] & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbf{D} \end{array}$$

in cui $F(\mathcal{W}) \subseteq \text{Iso}(\mathbf{D})$, allora esiste un unico modo di completarlo a un triangolo commutativo con $\tilde{F}: \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}] \rightarrow \mathbf{D}$.

Osservazione 1.3.2. La definizione della localizzazione $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ funziona per *qualsiasi* scelta di \mathcal{W} , e d'altra parte senza perdita di generalità si può supporre che \mathcal{W} contenga tutti gli isomorfismi (dato che ogni funtore deve invertire *almeno* loro!) e che sia chiusa per composizione (perché la classe dei morfismi invertiti da qualsiasi funtore G , diciamo $\Sigma(G)$, è certamente chiusa per composizione).

Osservazione 1.3.3. L'esistenza di una localizzazione per la coppia $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$, a certe ipotesi insiemistiche piuttosto noiose da esplicitare, esiste sempre, ma è raramente maneggevole. In generale, è difficile persino il problema dello stabilire se $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}](X, Y)$ sia fatto o meno da un solo elemento.

L'ultima osservazione suggerisce una procedura estremamente involuta per costruire $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$: effettivamente, la costruzione proposta in [?] poggia la sua validità su un certo numero di quozienti per relazioni di equivalenza naturali ma difficili da caratterizzare in modo esplicito.

Il trucco è, in una parola sola, aggiungere formalmente gli inversi mancanti.

Dimostrazione. Ecco uno schizzo della costruzione di $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Consideriamo una categoria che ha gli stessi oggetti di \mathbf{C} , e dove assieme a tutti i morfismi di \mathbf{C} abbiamo aggiunto un simbolo w^{-1} per ogni $w \in \mathcal{W}$; consideriamo poi l'insieme delle parole nell'alfabeto dei *morfismi contigui*

$$A \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} B$$

così creato (ogni $f_i \in \text{hom}(\mathbf{C}) \cup \mathcal{W}^{-1}$) e quozientiamo questo insieme (che diventa un monoide parziale rispetto alla ovvia regola per giustapporre stringhe contigue) rispetto alla relazione di equivalenza che

- Cancella le identità;
- Compone morfismi contigui;
- Cancella ogni occorrenza di ww^{-1} e di $w^{-1}w$ per ogni $w \in \mathcal{W}$.

Appare evidente che questa categoria risulta come quoziente di un grafo orientato, diciamolo \mathfrak{Q} . Allora il funtore $J: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ è definito dall'identità, sugli oggetti, e dalla composizione

$$\text{hom}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{hom}(\mathbf{C}) \cup \mathcal{W}^{-1} \rightarrow \text{Path}(\mathfrak{Q}) \rightarrow \text{hom}(\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}])$$

sui morfismi. Risulta evidente che questo sia un funtore, grazie alle relazioni che definiscono il passaggio al quoziente $\mathfrak{Q} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$; allo stesso modo verificare la proprietà universale di $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ è una verifica standard. \square

1.3.3 Omotopie.

Definizione 1.3.7 (Cilindri). Sia \mathbf{C} una categoria modello. Un *oggetto cilindro* per A consta di $A \wedge I \in \mathbf{C}$ che fattorizza la codiagonale in una coppia pi fatta da cofibrazione-equivalenza debole:

$$A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow[p]{\sim} A$$

Osservazione 1.3.4. In una categoria modello ogni oggetto ammette un oggetto cilindro, ottenuto come la fattorizzazione (COF, FIB \cap WK) della mappa codiagonale.

Proposizione 1.3.3. Se A è cofibrante (ovvero se il morfismo iniziale $\emptyset \rightarrow A$ è una cofibrazione), allora le mappe $i_\epsilon: A \xrightarrow{\iota_\epsilon} A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ (per $\epsilon = 0, 1$) sono cofibrazioni acicliche.

Dimostrazione. Esercizio. □

Definizione 1.3.8. Due morfismi $f, g: A \rightarrow X$ in \mathbf{C} sono *omotope a sinistra* (e scriviamo $f \stackrel{L}{\sim} g$) se esiste un oggetto cilindro $A \wedge I$ e un morfismo $\tilde{H}: A \wedge I \rightarrow X$ (una *omotopia sinistra*) tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f \amalg g} & X \\ i_0 \amalg i_1 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \\ A \wedge I & & \end{array}$$

sia commutativo.

Proposizione 1.3.4. Se A è cofibrante, allora $\stackrel{L}{\sim}$ è una relazione di equivalenza (e una congruenza) su $\text{hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Dimostrazione. Qualsiasi sia A , $\stackrel{L}{\sim}$ è sempre riflessiva e simmetrica; per provare che è transitiva, operiamo come segue. Disponiamo di omotopie sinistre

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{(f,g)} & X \\ i \downarrow & \nearrow H & \\ A \wedge I & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{(g,h)} & X \\ i' \downarrow & \nearrow H' & \\ A \wedge I' & & \end{array}$$

con le quali possiamo costruire il pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_1} & A \wedge I \\ i'_0 \downarrow & & \downarrow j' \\ A \wedge I' & \xrightarrow{j} & P \end{array}$$

Considerando che $(\text{COF} \cap \text{WK}, \text{FIB})$ è un sistema di fattorizzazione in \mathbf{C} , deduciamo che c'è un diagramma di equivalenze deboli

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_1} & A \wedge I \\
 i'_0 \downarrow & & \downarrow j' \\
 A \wedge I' & \xrightarrow{j} & P \\
 & \searrow p' & \swarrow p \\
 & & A
 \end{array}$$

In particolare esiste una fattorizzazione di $\nabla: A \amalg A \rightarrow A$ in

$$A \amalg A \xrightarrow{(j_0, j_1)} P \xrightarrow{t} A$$

con $t \in \text{WK}$ e (j_0, j_1) indotta da $j_0: A \xrightarrow{i_0} A \wedge I \xrightarrow{j'} P$ e $j_1: A \xrightarrow{i'_1} A \wedge I' \xrightarrow{j} P$. A questo punto la proprietà universale dei pushout implica l'esistenza di $K: P \rightarrow X$ nel diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_1} & A \wedge I \\
 i'_0 \downarrow & & \downarrow j' \\
 A \wedge I' & \xrightarrow{j} & P \\
 & \searrow H' & \swarrow H \\
 & & X
 \end{array}$$

Questa K non è una omotopia sinistra, ma questo si può correggere usando la $(\text{COF}, \text{FIB} \cap \text{WK})$ -fattorizzazione di $A \amalg A \rightarrow P$ in $A \amalg A \xrightarrow{(t_0, t_1)} P' \xrightarrow{u} P$; dato che $ut_\epsilon = j_\epsilon$, concludiamo che $Ku: P' \rightarrow X$ è l'omotopia sinistra cercata tra f e h . \square

Ci riferiamo a $\pi^L(A, X)$ come all'insieme $\text{hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$ quozientato per la relazione di equivalenza $\stackrel{L}{\sim}$; anche nel caso A non sia cofibrante, indichiamo allo stesso modo $\pi^L(A, X)$ l'insieme quoziente rispetto alla relazione di equivalenza generata da $\stackrel{L}{\sim}$.

Proposizione 1.3.5. Se $X \in \mathbf{C}$ è fibrante e A, B sono oggetti qualsiasi, allora la composizione di morfismi in \mathbf{C} scende al quoziente dando

$$\pi^L(B, A) \times \pi^L(A, X) \rightarrow \pi^L(B, X).$$

Dualizzare completamente questa teoria porta alla definizione di *omotopia destra* tra morfismi f, g di una categoria modello \mathbf{C} :

Definizione 1.3.9 (Cammini). Sia \mathbf{C} una categoria modello. Un *oggetto dei cammini* per X consta di un oggetto $X^I \in \mathbf{C}$ che fattorizza la diagonale in una coppia qr fatta da equivalenza debole-fibrazione:

$$A \amalg A \xrightarrow[r]{\sim} A \wedge I \xrightarrow[q]{\twoheadrightarrow} A$$

Osservazione 1.3.5. In una categoria modello ogni oggetto ammette un oggetto dei cammini, ottenuto come la fattorizzazione $(\text{COF} \cap \text{WK}, \text{FIB})$ della mappa diagonale.

Esercizio 1.3.9. Dare la definizione di *omotopia destra* tra $f, g: A \rightarrow X$; mostrare che Se X è fibrante (ovvero se il morfismo terminale $X \rightarrow 1$ è una fibrazione), allora le mappe $p_\epsilon: X^I \xrightarrow{\iota_\epsilon} X \times X \rightarrow X$ (per $\epsilon = 0, 1$) sono fibrazioni acicliche. Mostrare che se X è fibrante, $f \stackrel{R}{\sim} g$ è una relazione di equivalenza (e una congruenza) su $\text{hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$; se A è cofibrante, e X, Y qualsiasi, la composizione di morfismi in \mathbf{C} scende al quoziente dando

$$\pi^R(A, X) \times \pi^R(X, Y) \rightarrow \pi^R(A, Y).$$

Proposizione 1.3.6. Se A è cofibrante, $f \stackrel{L}{\sim} g$ implica $f \stackrel{R}{\sim} g$; se X è fibrante, $f \stackrel{R}{\sim} g$ implica $f \stackrel{L}{\sim} g$.

Dimostrazione. Avendo una omotopia sinistra $H: A \wedge I \rightarrow X$ tale che

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{(f,g)} & X \\ (i_0, i_1) \downarrow & \nearrow H & \\ A \wedge I & & \end{array}$$

sia commutativo, sfruttando il fatto che $i_0: A \rightarrow A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ è una fibrazione aciclica, otteniamo un lift nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{rf} & X^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow (p_0, p_1) \\ A \wedge I & \xrightarrow{(fs, H)} & X \times X \end{array}$$

dove $X \xrightarrow{r} X^I \xrightarrow{\langle p_0, p_1 \rangle} X \times X$ e X^I è un oggetto dei cammini per X . È facile controllare che Ji_1 è l'omotopia destra voluta tra f e g .

L'altra dimostrazione è duale. □

Corollario. Se A è cofibrante e X fibrante, le relazioni di equivalenza $\stackrel{L}{\sim}, \stackrel{R}{\sim}$ su $\text{hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$ coincidono.

La costruzione della categoria dell'omotopia di una categoria modello si basa su due punti fondamentali:

- Ogni oggetto $X \in \mathbf{C}$ ha una *approssimazione fibrante* ottenuta fattorizzando $X \rightarrow 1$ come $X \xrightarrow{\sim} RX \rightarrow 1$, dove $RX \rightarrow 1$ è una fibrazione; dualmente, ogni oggetto $A \in \mathbf{C}$ ha una *approssimazione cofibrante* ottenuta fattorizzando $\emptyset \rightarrow A$ come $\emptyset \rightarrow QA \xrightarrow{\sim} A$, dove $\emptyset \rightarrow QA$ è una cofibrazione.
- La categoria $\tilde{\mathbf{C}}$ costruita con gli stessi oggetti di \mathbf{C} e dove $\tilde{\mathbf{C}}(A, X) := \mathbf{C}(RQA, RQX)_{/\sim}$ ha la proprietà universale di $\mathbf{C}[\mathbf{WK}^{-1}]$.

La localizzazione di \mathbf{C} rispetto a \mathbf{WK} dipende solo da quest'ultima classe di morfismi; d'altra parte la presenza di fibrazioni e cofibrazioni assicura che $\mathbf{C}[\mathbf{WK}^{-1}]$ si possa realizzare internamente all'universo di riferimento, dato che $\mathbf{C}[\mathbf{WK}^{-1}](X, Y)$ è (isomorfo a) un insieme, per qualsiasi $X, Y \in \mathbf{C}[\mathbf{WK}^{-1}]$: per dimostrarlo, operiamo come segue.

Esercizio 1.3.10. Se $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, allora esiste $\tilde{f} \in \mathbf{C}(QX, QY)$ per cui il quadrato

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{\tilde{f}} & QY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

sia commutativo; questa scelta dipende solo dalla classe di omotopia (destra o sinistra; è lo stesso perché QX è cofibrante) di f .

Esercizio 1.3.11. Se $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, allora esiste $\hat{f} \in \mathbf{C}(RX, RY)$ per cui il quadrato

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ RX & \xrightarrow{\hat{f}} & RY \end{array}$$

sia commutativo; questa scelta dipende solo dalla classe di omotopia (destra o sinistra; è lo stesso perché RY è fibrante) di f .

Conseguenza immediata di questi risultati è che, denotando con \mathbf{C}_f (\mathbf{C}_c) la sottocategoria degli oggetti fibranti (cofibranti) di \mathbf{C} , esistono dei funtori

$$R: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_f / \sim^R \quad Q: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_c / \sim^L$$

i quali, ristretti a $\mathbf{C}_{cf} = \mathbf{C}_c \cap \mathbf{C}_f$ danno luogo a funtori

$$R': \mathbf{C}_c / \sim^L \rightarrow \mathbf{C}_{cf} / \sim \quad Q': \mathbf{C}_f / \sim^R \rightarrow \mathbf{C}_{cf} / \sim.$$

Gli ultimi due lemmi seguenti sono quanto serve per dimostrare che $\tilde{\mathbf{C}}$ ha la proprietà universale di $\mathbf{C}[\mathbf{WK}^{-1}]$:

Lemma 1.3.1. Esiste un funtore $\gamma: \mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}$ che è l'identità sugli oggetti e manda $f: A \rightarrow B$ in $R'QA \rightarrow R'QB$ (nelle notazioni sopra). Il funtore γ ha la proprietà di invertire tutte (e sole) le equivalenze deboli di \mathbf{C} ; in più, $\text{hom}(\tilde{\mathbf{C}})$ è generato per composizione a partire da $\gamma(\text{hom}(\mathbf{C})) \cup (\gamma\mathbf{WK})^{-1}$.

Lemma 1.3.2. Se \mathbf{C} è una categoria modello, ed $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtore che inverte la classe $\mathbf{WK}_{\mathbf{C}}$, allora F è costante sulle classi di equivalenza di morfismi omotopi (a destra o a sinistra).

Dimostrazione. Si scelga un cilindro $A \wedge I$ a testimoniare che $f, g: A \rightarrow B$ sono omotopi mediante $H: A \wedge I \rightarrow B$. Allora le ipotesi fatte su F impongono che nella fattorizzazione

$$A \coprod A \xrightarrow{(i_0 \ i_1)} A \wedge I \xrightarrow[\sim]{w} A$$

$F(i_0) = F(i_1)$, sicchè $Ff = F(H)f(i_0) = F(H)F(i_1) = Fg$. \square

Teorema 1.3.1. Se \mathbf{C} è una categoria modello, la coppia $(\mathbf{C}, \gamma: \mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}})$ ha la proprietà universale di $\mathbf{C}[\mathbf{WK}^{-1}]$.

Dimostrazione. La dimostrazione si riduce a far vedere che esiste un solo modo di definire \bar{G} affinché il triangolo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{\mathbf{C}} \\ G \downarrow & \nearrow \bar{G} & \\ \mathbf{D} & & \end{array}$$

sia commutativo se viene dato un funtore G che inverte $\mathbf{WK}_{\mathbf{C}}$. Chiaramente \bar{G} deve essere definito solo sui morfismi: dato $f \in \tilde{\mathbf{C}}(X, Y)$ esiste un ben definito (a meno di omotopia) $f': RQX \rightarrow RQY$ in un diagramma

$$\begin{array}{ccc} GX & \cdots \cdots \cdots & GY \\ \downarrow & & \downarrow \\ GQX & \cdots \cdots \cdots & GQY \\ \downarrow & & \downarrow \\ GRQX & \longrightarrow & GRQY \\ \downarrow & & \downarrow \\ GQX & \cdots \cdots \cdots & GQY \\ \downarrow & & \downarrow \\ GQ & \cdots \cdots \cdots & GY \end{array}$$

allora $\bar{G}(f)$ è definito come la composizione delle frecce solide nel diagramma sopra. \square

1.3.4 Funtori di Quillen, funtori derivati.

1.3.5 Una lunga digressione sul significato di questi assiomi.

Alcuni dei concetti esposti nella introduzione ora acquistano maggior senso: la definizione di una categoria modello \mathbf{C} va riletta informalmente in modo che in essa si riesca a isolare una classe di morfismi (l'esempio da tenere a mente è quello delle equivalenze omotopiche di spazi topologici) che desideriamo “invertire formalmente” (l'esempio da tenere a mente è la categoria dell'omotopia degli spazi topologici, dove le *equivalenze omotopiche*, cioè le mappe continue $f: X \rightarrow Y$ che inducono isomorfismi tra tutti i gruppi di omotopia³, diventano invertibili).

Ciò che otteniamo da questo processo di localizzazione è la *categoria dell'omotopia* $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$ della categoria modello \mathbf{C} : la proprietà 3-per-2 chiesta a WK rende sensato questo processo di localizzazione: è un'ovvia condizione necessaria perché ogni mappa in WK diventi invertibile.

A questa classe se ne aggiungono altre due, che interagiscono nel seguente modo: ogni morfismo di \mathbf{C} si riesce a fattorizzare (non in modo unico) in una composizione del tipo pi , dove p è una fibrazione aciclica (l'esempio da tenere in mente è la codiagonale $X \amalg X \xrightarrow{i} X \times I \xrightarrow{p} X$) e i una cofibrazione, oppure del tipo qj , dove q è una fibrazione e j una cofibrazione aciclica (l'esempio da tenere in mente è la diagonale $X \xrightarrow{j} X^I \xrightarrow{q} X \times X$).

Nell'idea di Quillen, le categorie “modello” sono esattamente *modelli* in cui interpretare una teoria: due categorie modello possono avere categorie dell'omotopia equivalenti anche quando tra loro non esiste una conclamata equivalenza di categorie; possono cioè esistere coppie di funtori aggiunti

$$F: \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D}: G$$

tali per cui esistono dei funtori aggiunti “in omotopia” $\mathrm{Ho}(F)$ e $\mathrm{Ho}(G)$ tra le categorie dell'omotopia; e a volte, $F \dashv G$ non formano un'equivalenza, ma $\mathrm{Ho}(F) \dashv \mathrm{Ho}(G)$ sì.

Questa relazione di equivalenza più generale della solita si chiama *equivalenza di Quillen*. Categorie modello che sono Quillen-equivalenti

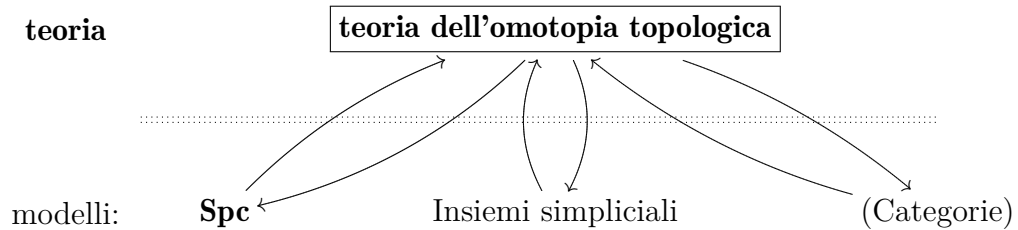
³Per come abbiamo scelto \mathbf{Spc} , le equivalenze omotopiche propriamente dette coincidono con queste mappe, che sono equivalenze omotopiche *deboli*: è un risultato piuttosto profondo (il *teorema di Whitehead*) che un'equivalenza omotopica debole tra spazi in \mathbf{Spc} ammetta una inversa omotopica.

sono “avatar” di una stessa teoria omotopica, una volta che siano resi indistinguibili morfismi omotopi: ai primordi della teoria si provò, ad esempio, che esiste una equivalenza di Quillen tra **Spc** e la categoria degli insiemi simpliciali, che una volta “realizzati” topologicamente corrispondono ai CW-complessi.

È una vulgata abbastanza comune, incontrata in molti corsi di Topologia Algebrica avanzata, che “la teoria degli spazi topologici è *equivalente, a meno di omotopia*, a quella degli insiemi simpliciali”: il formalismo delle categorie modello è *l’unico modo* (almeno ad oggi) di interpretare questa locuzione in modo rigoroso.

Se abbiamo sempre pensato alla teoria dell’omotopia “classica” come allo studio delle proprietà degli spazi topologici che sono invarianti sotto omotopia, ora siamo portati a pensare che esistano *diversi* modelli in cui *la stessa* teoria dell’omotopia può venire interpretata. Questa libertà di scelta nell’adottare il modello più adatto alle esigenze del caso dà alla Topologia Algebrica il suo enorme potere descrittivo all’interno della Matematica (anche, e soprattutto, fuori della Geometria).

In un certo senso, possiamo rimpiazzare una teoria omotopica (quella degli spazi topologici) con una che ne sia una “deformazione continua” (quella degli insiemi simpliciali); questo paradigma per cui l’equivalenza di Quillen tra teorie dell’omotopia è *essa stessa* una nozione di omotopia è molto più di una vaga visione: si tratta di uno dei temi principali affrontati nel lavoro [Rez01].



Il modo di presentare gli assiomi di categoria modello è stato volutamente “asciutto” e lontano dall’intuizione geometrica. Questa separazione dall’intuizione è dovuta, essenzialmente, ad alcune ragioni storiche e stilistiche:

- Il processo di sedimentazione degli assiomi corretti da imporre a una categoria modello è stato lento (per certi versi ancora deve essere perfezionato: una definizione alternativa di categoria modello *algebrica*, dove i sistemi di fattorizzazione $(\text{CoF} \cap \text{Wk}, \text{Fib})$ e $(\text{CoF}, \text{Fib} \cap \text{Wk})$ soddisfano a un certo numero di proprietà categoriali aggiuntive, è il tema principale di [Rie11]), e la comprensione di quale sia “il modo giusto” di assiomatizzare gli oggetti di studio

della Topologia Algebrica è stata lenta e motivata in modo preminente da quali sono le caratteristiche delle strutture modello che si incontrano durante la pratica matematica. Vi sono state un certo numero di imprecisioni abbandonate nel corso degli anni:

- Un certo numero di tentativi di definire una teoria astratta dell’omotopia furono l’oggetto di un pionieristico e prezioso lavoro di D. Kan ([Kan55], [Kan56]); in esso il ruolo predominante dell’oggetto dei cammini e dell’oggetto cilindro di $X \in \mathbf{C}$ viene riconosciuto e assiomatizzato.
- La definizione iniziale di categoria modello di Quillen voleva che una categoria modello avesse solo limiti e colimiti finiti, e fosse detta *chiusa* quando la classe WK fosse constata di tutti *e soli* i morfismi che divengono invertibili nel processo di localizzazione (era, cioè, una classe omotopica *satura* –ma non nel senso della saturazione di $\square\mathcal{K}!$); questa sottigliezza è stata abbandonata.
- Alla fattorizzazione non si chiedeva di essere *funtoriale*, ossia non si chiedeva che la presenza di un quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ k \downarrow & & \downarrow h \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

inducesse una freccia in \mathbf{C} tra le fattorizzazioni, come nel disegno. Questa generalità è permessa, ma innaturale dal momento che tutti gli esempi di strutture modello che non soddisfano questo assioma sono estremamente artificiali.

Nell’idea originaria di Quillen, ciò che conta per definire una categoria modello è unicamente la classe WK delle equivalenze deboli (che infatti sono le uniche a intervenire nella localizzazione che definisce la categoria dell’omotopia di \mathbf{C}); le altre classi sono solo una struttura ausiliaria (avremo modo, forse in seguito, di spiegare perché).

- La definizione, così come è data, pone l’accento sulla possibilità di fattorizzare ogni morfismo nella composizione di una cofibrazione aciclica e una fibrazione, oppure di una cofibrazione e una fibrazione aciclica: questa proprietà, da sola, incarna completamente le informazioni “geometriche” degli oggetti di studio di una certa teoria dell’omotopia $(\mathbf{C}, \mathcal{M}od)$. In estrema sintesi le proprietà geometriche di una teoria dell’omotopia sono *indotte* dalle proprietà categoriali (algebriche) dei sistemi di fattorizzazione che definiscono quelle teorie dell’omotopia.

Osservazione 1.3.6. È ragionevole aspettarsi che le strutture modello siano “molte”; questo è vero: da una parte gli esempi naturali di queste strutture sono ubiquitari in Algebra (DG-algebre, complessi di catene di moduli, categorie), Geometria (insiemi simpliciali, spazi topologici) e altre regioni della matematica (C^* -algebre, insiemi (!), categorie topologiche e simpliciali...). Dall'altra parte, la teoria astratta è densa di risultati più o meno elaborati che, data una categoria modello \mathbf{C} , permettono di generare nuove strutture modello su \mathbf{C} , o di dedurre l'esistenza di strutture modello “trasportate” lungo funtori $\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$.

1.4 Esempi di strutture modello.

1.4.1 La struttura modello su $\mathbf{Ch}^+(R)$.

La categoria $\mathbf{Ch}^+(R)$ dei complessi di catene in grado non negativo ha per oggetti le sequenze

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow A_0 \xrightarrow{d_0} A_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

dove ogni $A_n \in \mathbf{Mod}_R$, e la composizione $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. I morfismi tra A, B in $\mathbf{Ch}^+(R)$ sono definiti nel modo ovvio.

Teorema 1.4.1. La categoria $\mathbf{Ch}^+(R)$ ha una struttura modello dove

1. WK è la classe dei quasi-isomorfismi in omologia

$$\left\{ f: M \rightarrow N \mid H_n(f): H_n(M) \rightarrow H_n(N) \text{ è invertibile } \forall n \geq 0 \right\}$$

2. COF è la classe dei morfismi $f: M \rightarrow N$ iniettivi e con conucleo proiettivo grado per grado;
3. FIB è la classe dei morfismi $p: X \rightarrow Y$ che sono suriettivi in grado positivo.

Dimostrazione. La completezza e cocompletezza di $\mathbf{Ch}^+(R)$ viene dalla dimestichezza con qualsiasi corso di algebra omologica: ogni limite e colimite si calcola puntualmente nella categoria dei moduli su R .

La parte lunga e difficile sarà mostrare che esistono le fattorizzazioni e le ortogonalità desiderate: cominciamo mostrando che in ogni quadrato

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \quad (\star)$$

dove i è una cofibrazione e p una fibrazione aciclica, esiste una soluzione $f: B \rightarrow X$ al problema di lifting.

Si osservi anzitutto che applicando il lemma dei 5 al diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} \ker(d_0^X) & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & \operatorname{coker}(d_0^X) \\ \downarrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & & \downarrow \wr \\ \ker(d_0^Y) & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & \operatorname{coker}(d_0^Y) \end{array}$$

si evince che p è suriettiva in tutti i gradi in cui non è zero, dal momento che $H_0(p): \operatorname{coker}(d_0^M) \cong \operatorname{coker}(d_0^N)$; da ciò si evince che esiste una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow \ker(p) \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$$

tale per cui K sia un complesso aciclico (si usi la sequenza lunga in omologia).

Per costruire $f: B \rightarrow X$ argomentiamo per induzione partendo dal grado 0: in questo caso, sappiamo già che i_0 e p_0 sono ortogonali (Vedere la sezione 1.3.2). Ora, se supponiamo di avere costruito f_0, \dots, f_{k-1} , tali da far commutare ogni $(\star_0), \dots, (\star_{k-1})$, possiamo ancora scrivere $B_k \cong A_k \oplus P_k$ per cui esista un lifting $\hat{f}_k: B_k \rightarrow X_k$ che fa commutare il quadrato (\star_k) , ma non siamo sicuri che questi dati combacino in un vero morfismo di catene (la commutazione coi differenziali non è conseguenza di nulla che abbiamo già provato o supposto).

D'altra parte è sufficiente modificare \hat{f}_k sottraendole una opportuna mappa aciclica, costruita come segue: definiamo $\epsilon_k := d\hat{f}_k - f_{k-1}d: P_k \rightarrow X_{k-1}$, in modo che $\epsilon_k = 0$ quando $\{f_0, \dots, f_k\}$ coopera a formare un morfismo di catene; è facile notare che

1. $d_{k-1}^X \circ \epsilon_k = 0$;
2. $p_{k-1} \circ \epsilon_k = 0$;
3. $\epsilon_k \circ i_k = 0$.

Da ciò partiamo per considerare il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & \ker(d_{k-1}^K) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & K_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}^K} & K_{k-2} \\ & & \downarrow u_{k-1} & & \downarrow u_{k-2} \\ A_k & & & & \\ \downarrow i_k & & & & \\ B_k & \xrightarrow{\epsilon_k} & X_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}^X} & X_{k-2} \\ \downarrow v_k & & \downarrow p_k & & \\ P_k & & Y_{k-1} & & \end{array}$$

(Note: In the original image, there are additional arrows: a dotted arrow l_k from $\ker(d_{k-1}^K)$ to B_k , a dotted arrow t_k from $\ker(d_{k-1}^K)$ to X_{k-1} , and a solid arrow from P_k to X_{k-1} .)

dove la freccia $b: P_k \rightarrow X_{k-1}$ esiste per la proprietà 2. di sopra, la freccia verso K_{k-1} esiste perché l'immagine di b cade in K_{k-1} , e l'ulteriore mappa $l_k: P_k \rightarrow \ker(d_{k-1}^K)$ esiste perché $d_{k-1}^K \circ t_k = 0$:

$$\begin{aligned} u_{k-2} d_{k-1}^K t_k v_k &= d_{k-1}^X u_{k-1} t_k v_k \\ &= d_{k-1}^X b v_k \\ &= d_{k-1}^X \epsilon = 0 \end{aligned}$$

A questo punto, considerando che il complesso K è aciclico, la mappa $K_k \xrightarrow{d_k^K} \ker(d_{k-1}^K) = \text{im}(d_k^K)$ è suriettiva; allora, siccome P_k è proiettivo, esiste un rialzamento

$$\begin{array}{ccc} & & K_k \\ & \nearrow \epsilon' & \downarrow \\ P_k & \longrightarrow & \ker(d_{k-1}^K) \end{array}$$

Consideriamo ora la composizione

$$\epsilon'': B_k \longrightarrow P_k \xrightarrow{\epsilon'} K_k \longrightarrow X_k$$

è facile verificare che $f_k := \hat{f}_k - \epsilon'': B_k \rightarrow X_k$ è la componente corretta di una mappa di catene $f: B \rightarrow X$; questo permette all'induzione di procedere.

Ora resta da provare che in un quadrato come

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ i \downarrow \wr & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \quad (\star\star)$$

dove i è una cofibrazione aciclica, esiste un lifting diagonale.

Per farlo possiamo ragionare direttamente, o invocare un risultato che è piuttosto macchinoso e che dice che se un complesso di catene in $\text{CH}^+(R)$ è aciclico e fatto da oggetti proiettivi (il quale caso è esattamente il nostro), allora è un oggetto proiettivo di $\text{CH}^+(R)$; in tal modo, la sequenza esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$$

deve spezzare, e dunque qualsiasi lift $P \rightarrow X$ dell'assegnata mappa $P \rightarrow Y$ serve da lifting per il problema $(\star\star)$.

A questo punto dovremmo completare la prova che le classi delle cofibrazioni acicliche e fibrazioni, e cofibrazioni e fibrazioni acicliche, formano dei sistemi di fattorizzazione.

Osservazione 1.4.1. Costruire delle fattorizzazioni è sempre la parte difficile di una dimostrazione di esistenza di una struttura modello, essenzialmente perché vi sono pochi strumenti per costruire lo spezzamento desiderato. Uno dei più importanti e potenti è il cosiddetto *argomento degli oggetti piccoli*, inizialmente proposto da Quillen, e poi largamente studiato e generalizzato.

Trattandosi di un argomento irrinunciabile, e di un valido aiuto nell'accorciare una dimostrazione altrimenti infinita, ne offriamo ora una presentazione euristica completamente presa da [DS95]; a questa segue una presentazione estremamente più asciutta, dovuta al gusto di A. Joyal.

1.4.2 L'argomento degli oggetti piccoli.

Definizione 1.4.1. Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali, guardato come una categoria rispetto all'ordine consueto e \mathbf{C} una qualsiasi categoria. Diciamo che un oggetto $A \in \mathbf{C}$ è *sequenzialmente piccolo* se per ogni funtore $B: \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{C}: n \mapsto B_n$ la mappa canonica

$$\varinjlim \text{hom}(A, B_n) \rightarrow \text{hom}(A, \varinjlim B_n)$$

indotta dalle mappe $\{B_i \rightarrow \varinjlim B_n\}_i$ è una biiezione di insiemi.

Sia ora $\mathcal{F} = \{f_i: A_i \rightarrow B_i \mid i \in I\}$ un insieme di morfismi di \mathbf{C} ; supponiamo di voler creare, a partire da \mathcal{F} , un sistema di fattorizzazione in \mathbf{C} , spezzando ogni $p: X \rightarrow Y$ in una composizione $X \xrightarrow{i} X_{\mathcal{F}} \xrightarrow{q} Y$, dove $q \in \mathcal{F}^{\square}$.

Supponiamo anche di voler risolvere questo problema “minimizzando” la distanza tra X e $X_{\mathcal{F}}$ ⁴: procediamo perciò come segue.

Assegnata una freccia $p: X \rightarrow Y$, per ogni $i \in I$ consideriamo l'insieme $S(i)$ di tutti i problemi di lifting

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & X \\ f_i \downarrow & & \downarrow p \\ B_i & \longrightarrow & Y \end{array}$$

con $f_i \in \mathcal{F}$, e definiamo $G^1(\mathcal{F}, p)$ come il psuhout del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} \coprod_{S(i)} A_i & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow j_1 \\ \coprod_{i \in I} \coprod_{S(i)} B_i & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}, p) \end{array}$$

⁴Altrimenti il problema è di soluzione immediata: basta scegliere $X_{\mathcal{F}} = Y$, $q = 1_Y$.

(tutte le mappe sono quelle ovvie); questo induce un'unica mappa $p_1 : G^1(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ che dà una fattorizzazione di p come

$$X \longrightarrow G^1(\mathcal{F}, p) \xrightarrow{p_1} Y$$

Questo processo ha tutte le caratteristiche per essere continuato per induzione:

- Definiamo $G^k(\mathcal{F}, p) = G^1(\mathcal{F}, p_{k-1})$, se $p_0 = p$;
- Definiamo $p_k = (p_{k-1})_1$, nelle notazioni precedenti.

Questo genera un diagramma della forma

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{j_1} & G^1(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{j_2} & G^2(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & G^k(\mathcal{F}, p) \longrightarrow \cdots \\ p \downarrow & & p_1 \downarrow & & p_2 \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} \cdots \xlongequal{\quad} & Y \xlongequal{\quad} \cdots \end{array}$$

e se supponiamo che (a) la composizione di tutte le j_k esista in \mathbf{C} e (b) che tutti i dominî degli elementi di \mathcal{F} siano sequenzialmente piccoli, otteniamo il risultato seguente:

Teorema 1.4.2 (Argomento degli oggetti piccoli). Se per ogni $i \in I$ l'oggetto A_i è sequenzialmente piccolo in \mathbf{C} , e se la composizione transfinita

$$X \xrightarrow{j_1} G^1(\mathcal{F}, p) \xrightarrow{j_2} G^2(\mathcal{F}, p) \rightarrow \cdots \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$$

esiste in \mathbf{C} , allora la mappa $p_\infty : G^\infty(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ ottenuta attraverso la proprietà universale della composizione transfinita appartiene a \mathcal{F}^\square .

Dimostrazione. □

Con questo risultato, possiamo tornare alla dimostrazione che le fattorizzazioni desiderate esistono in $\mathbf{CH}^+(R)$.

Per farlo utilizziamo un altro risultato preliminare: ricordiamo che $D^n(A)$ ed $S^n(A)$ sono, rispettivamente, i complessi ottenuti inserendo al grado n l'identità di un R -modulo A , e l- R -modulo A stesso: tra i due esiste una ovvia inclusione,

$$\begin{array}{ccccccccccc} S^{n-1}(A): & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & & & \\ D^n(A): & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xlongequal{\quad} & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Denotiamo per brevità $S^n = S^n(R)$, $D^n = D^n(R)$, guardando R come modulo su sé stesso nel modo ovvio.

Proposizione 1.4.1. Un morfismo $f: X \rightarrow Y$ in $\mathbf{CH}^+(R)$ è

- Una fibrazione se e solo se sta in $\{0 \rightarrow D^n \mid n \geq 1\}^\square$;
- Una fibrazione aciclica se e solo se sta in $\{S^{n-1} \rightarrow D^n \mid n \geq 0\}^\square$ (con la convenzione che $S^{-1} = 0$).

Dimostrazione. Vorrebbe essere un esercizio. \square

Ora possiamo finalmente giungere alla prova del risultato desiderato, osservando che sia S^n che D^n sono oggetti sequenzialmente piccoli di $\mathbf{CH}^+(R)$: dato $f: A \rightarrow Y$ possiamo dunque prendere come la \mathcal{F} dell'argomento degli oggetti piccoli l'insieme $\{S^{n-1} \rightarrow D^n \mid n \geq 0\}$, e il macchinario sopra esposto dà una fattorizzazione

$$X \xrightarrow{j_\infty} G^\infty(\mathcal{F}, f) \xrightarrow{p_\infty} Y$$

Grazie alla caratterizzazione precedente, p_∞ è una fibrazione aciclica in $\mathbf{CH}^+(R)$; basta controllare, allora, che j_∞ è una cofibrazione, ovvero che è iniettiva e ha conucleo proiettivo; d'altra parte ispezionando direttamente la costruzione di ogni $G^k(\mathcal{F}, f)$ vediamo che

finire!

D'altra parte, per costruire la seconda fattorizzazione, possiamo considerare come \mathcal{F}' nell'argomento degli oggetti piccoli l'insieme di morfismi $\{0 \rightarrow D^n \mid n \geq 1\}$, ottenendo una fattorizzazione

$$X \xrightarrow{j'_\infty} G^\infty(\mathcal{F}', f) \xrightarrow{p'_\infty} Y$$

dove per gli stessi motivi di prima p'_∞ è una fibrazione. Resta da vedere che j'_∞ è una cofibrazione aciclica; .

farlo!

Ciò conclude, finalmente, la dimostrazione che $\mathbf{CH}^+(R)$ supporta una struttura modello. Questa struttura modello è *generata per via cofibrante*, e le classi $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ tali per cui $\mathbf{WK} \cap \mathbf{FIB} = \mathcal{F}^\square$ e $\mathbf{FIB} = (\mathcal{F}')^\square$ sono dette (rispettivamente) le cofibrazioni e le cofibrazioni acicliche *generanti*. \square

1.4.3 L'argomento degli oggetti piccoli, ancora.

Definizione 1.4.2. Se $u: A \rightarrow B$ è un morfismo in una categoria \mathbf{E} , dico che un oggetto X è *u-fibrante* quando il funtore $\mathbf{hom}(-, X)$ manda u in una funzione suriettiva di insiemi

$$\mathbf{E}(B, X) \rightarrow \mathbf{E}(A, X)$$

Proposizione 1.4.2. Data \mathbf{E} completa e cocompleta, e dato un insieme Σ di frecce in \mathbf{E} , se i domini di Σ sono α -presentabili, per un cardinale

regolare α , allora la sottocategoria $\Phi(\Sigma)$ fatta da tutti gli oggetti u -fibranti per ogni $u \in \Sigma$ (cioè dagli oggetti Σ -fibranti) è “debolmente riflessiva”, ossia esiste un funtore

$$R: \mathbf{E} \rightarrow \Phi(\Sigma) \subset \mathbf{E}$$

tale per cui “la trasformazione naturale $\varrho_X: X \rightarrow RX$ che chiameremmo unità della aggiunzione” è un oggetto *debolmente* iniziale. Questo funtore è tale per cui

- $RX \in \Phi(\Sigma)$ per ogni $X \in \mathbf{E}$;
- ϱ_X è una mappa α -cellulare ottenuta da Σ , ovvero appartiene alla chiusura di Σ rispetto a pushout, retratti e composizione transfinita.

La dimostrazione si apprezza pienamente quando l’idea viene presentata nel caso $\alpha = \omega$, e poi generalizzata completamente.

Vogliamo costruire un endofuntore $F: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ tale che per ogni $\sigma: A \rightarrow B$ in Σ ed ogni $x: A \rightarrow X$ esista una freccia $x^\sigma: B \rightarrow FX$ che completi il quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{x} & X \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \theta_X \\ B & \xrightarrow{x^\sigma} & FX \end{array}$$

A questo punto il funtore R applicato ad X verrà definito come la composizione transfinita

$$X \xrightarrow{\theta_X} FX \xrightarrow{\theta_{FX}} FFX \xrightarrow{\theta_{FFX}} FFFX \rightarrow \dots$$

La trasformazione naturale $\varrho: 1 \rightarrow R$ verrà definita ora come la mappa naturale da un oggetto al colimite (è chiaro che il diagramma che deve essere un cono è un cono). Buone proprietà per θ indurranno, ora, le proprietà di cellularità richieste per ϱ .

Vediamo che RX è Σ -fibrante: sia $v_n: F^n X \rightarrow RX$ la freccia universale nel colimite. Osserviamo prima di iniziare che c’è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F^n X & \xrightarrow{v_n} & RX \\ \theta_{F^n} \downarrow & \nearrow v_{n+1} & \\ F^{n+1} X & & \end{array}$$

Prendiamo ora una freccia $\sigma: A \rightarrow B$ in Σ . Allora, nel diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{x} & RX \\ \sigma \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

la freccia $x: A \rightarrow RX$ deve fattorizzare attraverso una delle componenti del colimite (perché tutti i domini di frecce in Σ sono ω -presentabili!). Allora deve esistere un indice n_A tale che

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{x} & RX \\ & \searrow \bar{x} & \uparrow v_{n_A} \\ & & F^{n_A} X \end{array}$$

D'altra parte per come è stato costruito il funtore F , esiste un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{x}} & F^{n_A} X \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \theta \\ B & \xrightarrow{\bar{x}^\sigma} & F^{n_A+1} X \end{array}$$

Poniamo ora $z = v_{n+1} \bar{x}^\sigma: B \rightarrow RX$; otteniamo facilmente (i.e. senza disegnare un ulteriore diagramma) che

$$z\sigma = v_{n+1} \bar{x}^\sigma \sigma = v_{n+1} \theta_{F^n X} \bar{x} = v_n \bar{x} = x$$

Dunque abbiamo mostrato che ogni RX è Σ -fibrante. Ora non resta che costruire F :

1. Nel caso in cui Σ è formato da un unico elemento $\sigma: A \rightarrow B$, consideriamo l'aggiunzione tra il funtore di copotenza **Sets** $\rightarrow \mathbf{E}: S \mapsto S \times A$ e il funtore $\mathbf{E}(A, -)$; la counità di questa aggiunzione ha per componenti le frecce

$$\epsilon_X: \text{hom}(A, X) \times A \rightarrow X.$$

Per ogni $\varphi: A \rightarrow X$ nell'insieme $\mathbf{E}(A, X)$, $\epsilon_X(i_\varphi) = \varphi$, se indichiamo con $i_\varphi: A \rightarrow \mathbf{E}(A, X) \times A: a \mapsto (\varphi, a)$. Ora, definiamo FX come il pushout

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}(A, X) \times A^{\epsilon_X} & \longrightarrow & X \\ \mathbf{E}(A, X) \times \sigma \downarrow & & \downarrow \theta_X \\ \mathbf{E} \times B & \dashrightarrow & FX \end{array}$$

per ogni $\sigma \in \Sigma$. Se ci componiamo ora il quadrato determinato sopra, otteniamo

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{i_\varphi} & \mathbf{E}(A, X) \times A & \xrightarrow{\epsilon_X} & X \\
\sigma \downarrow & & \mathbf{E}(A, X) \times \sigma \downarrow & & \downarrow \theta_X \\
B & \xrightarrow{i_\varphi} & \mathbf{E} \times B & \xrightarrow{\quad} & FX \\
& & \searrow \varphi^\sigma & &
\end{array}$$

che è esattamente il quadrato desiderato.

Una dimostrazione nel caso in cui Σ sia fatto da piu' di una freccia usa una procedura simile: la corrispondenza

$$X \mapsto SX = \coprod_{\sigma \in \Sigma} \mathbf{E}(s(\sigma), X) \times s(\sigma)$$

è un funtore $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, ed ϵ definisce una trasformazione naturale $S \Rightarrow 1$ di componenti $SX \rightarrow X$. Analogamente definiamo

$$X \mapsto TX = \coprod_{\sigma \in \Sigma} \mathbf{E}(s(\sigma), X) \times t(\sigma)$$

e notiamo che $\mathbf{E}(s(\sigma), X) \times \sigma: \mathbf{E}(s(\sigma), X) \times s(\sigma) \rightarrow \mathbf{E}(s(\sigma, X)) \times t(\sigma)$ è la componente in X di una trasformazione naturale $\psi: S \Rightarrow T$. Cio' definisce FX come il pushout

$$\begin{array}{ccc}
SX & \xrightarrow{\epsilon_X} & X \\
\psi_X \downarrow & & \downarrow \theta_X \\
TX & \longrightarrow & FX
\end{array}$$

La proprietà universale del pushout considerato mostra che $X \mapsto FX$ è un funtore; una delle facce del diagramma cubico usato per provare quest'ultima cosa, implica anche la naturalità di $\theta_X: X \rightarrow FX$. Di nuovo è la composizione

$$\begin{array}{ccccc}
s(\sigma) & \longrightarrow & SX & \xrightarrow{\epsilon_X} & X \\
\sigma \downarrow & & \psi_X \downarrow & & \downarrow \theta_X \\
t(\sigma) & \longrightarrow & TX & \longrightarrow & FX
\end{array}$$

La prova dell'enunciato nel caso $\alpha = \omega$ si conclude dunque qui se mostriamo che $\varrho_X: X \rightarrow RX$ è una mappa cellulare. A tal fine basta pero' mostrare che lo è θ , e sfruttare poi la chiusura della cellularizzazione di Σ rispetto a pushout e composizioni. D'altra parte questo è immediato: θ_X è ottenuta dal pushout della freccia

$$\coprod_{\sigma \in \Sigma} \coprod_{s(\sigma) \rightarrow X} s(\sigma) \longrightarrow \coprod_{\sigma \in \Sigma} \coprod_{s(\sigma) \rightarrow X} t(\sigma)$$

che risultando da un coprodotto di frecce di Σ , ovviamente sta in $\text{Cell}_\alpha(\Sigma)$. Cio' conclude.

Nel caso in cui $\alpha > \omega$ adottiamo un procedimento simile, che indurrà transfinitamente. Per ogni ordinale limite $j \leq \alpha$ definiamo

$$F^j X := \varinjlim_{i < j} F^i X$$

Per un successore poniamo semplicemente $F^{j+1} X := F(F^j X)$, e definiamo θ di conseguenza come

$$\theta^j := \theta_{F^j X}: F^j X \rightarrow F^{j+1} X$$

Poniamo $RX = F^\alpha X$, analogamente a prima; è facile vedere che la corrispondenza $X \mapsto RX$ così definita è un funtore, e la trasformazione naturale $\varrho_X: X \rightarrow RX$ consta in ogni caso di una mappa canonica. Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} s(\sigma) & \xrightarrow{\varphi} & RX \\ \sigma \downarrow & \searrow \bar{\varphi} & \uparrow \\ t(\sigma) & & F^i X \\ & \searrow \bar{\varphi} & \downarrow \theta^i \\ & & F^{i+1} X \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ v^{i+1} \end{array}$$

prova, analogamente a prima, che ogni RX è Σ -fibrante. Cio' che rimane da dimostrare è:

1. $\rho_X \in \text{Cell}_\alpha(\Sigma)$: questo è ovvio in base allo stesso argomento di prima adattato da ω a α generico.
2. $R(-)$ commuta coi colimiti α -diretti: questo è ovvio perché è un aggiunto sinistro.

Ora veniamo al discorso vero e proprio: la mappa di composizione in una categoria \mathbf{E} risulta codificata da un funtore

$$c: \mathbf{E}^{[2]} \rightarrow \mathbf{E}^{[1]}$$

Definiamo ora un *funtore di fattorizzazione* come una qualsiasi inversa destra (stretta) di c , ovvero come un funtore $F: \mathbf{E}^{[1]} \rightarrow \mathbf{E}^{[2]}$ tale che $c \circ F = 1_{\mathbf{E}^{[1]}}$. In pratica, associamo all'oggetto $\begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$ di $\mathbf{E}^{[1]}$ la coppia $\left[\begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ F(f) \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} F(f) \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix} \right]$ in modo tale che $A \rightarrow F(f) \rightarrow B$ coincida con f . Analogamente agiamo sui morfismi, cioè sui quadrati commutativi.

Proposizione 1.4.3. Sia $\Sigma \subset \mathbf{E}^{[1]}$ un insieme di frecce di \mathbf{E} . Se assumiamo che dominio e codominio di ogni $\sigma \in \Sigma$ sia un oggetto α -presentabile, per un qualche cardinale regolare α , allora esiste un funtore di fattorizzazione $F: \mathbf{E}^{[1]} \rightarrow \mathbf{E}^{[2]}$ che manda $f: A \rightarrow B$ in una coppia $(f_0, f_1): A \xrightarrow{f_1} F(f) \xrightarrow{f_0} B$ tale che $f_0 \in \text{Cell}_\alpha(\Sigma)$ e $f_1 \in \text{rlp}(\Sigma)$; in piu' tale F preserva i colimiti α -filtrati.

Dimostrazione. Per ogni $u: A \rightarrow B$ in \mathbf{E} chiamiamo $\lambda(u)$ il quadrato

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ u \downarrow & & \parallel \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

guardato come morfismo $u \rightarrow 1_B$ in $\mathbf{E}^{[1]}$. In questo contesto, $u \Vdash f$ se e solo se $\mathbf{E}^{[1]}(\lambda(u), f)$ è un epimorfismo (praticamente per definizione). Dunque $f: X \rightarrow Y$ sta in $\text{rlp}(\Sigma)$ se e solo se è $\lambda(u)$ -fibrante per ogni $u \in \Sigma$.

Ora, siccome abbiamo supposto che domini e codomini di mappe in $\lambda(\Sigma) = \bigcup \lambda(u)$ siano tutti α -presentabili, possiamo utilizzare la proposizione precedente: esiste un funtore $R: \mathbf{E}^{[1]} \rightarrow \mathbf{E}^{[1]}$ che fattorizza lungo gli oggetti $\lambda(\Sigma)$ -fibranti ($\lambda(\Sigma)$ è una classe di morfismi in $\mathbf{E}^{[1]}$!), ed esiste una trasformazione $\varrho: 1 \rightarrow R$ le cui componenti sono tutte α -cellulari (in quanto morfismi di $\mathbf{E}^{[1]}$!). Ora, se mostriamo che in ogni quadrato $\varrho(f)$ della forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varrho_0(f)} & R_0 f \\ f \downarrow & & \downarrow Rf \\ Y & \xrightarrow{\varrho_1(f)} & R_1 f \end{array}$$

la freccia $\varrho_0(f)$ è in $\text{Cell}_\alpha(\Sigma)$ e la freccia $\varrho_1(f)$ è un isomorfismo, la prova è conclusa. Consideriamo a tale scopo la classe \mathcal{C} di tutti i morfismi di

$$\mathbf{E}^{[1]} \quad u: \begin{array}{c} A_0 \\ \downarrow \\ A_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} B_0 \\ \downarrow \\ B_1 \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{u_0} & B_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

dove $u_0 \in \text{Cell}_\alpha(\Sigma)$ e u_1 è un isomorfismo. Questa classe è α -cellulare, e ovviamente contiene $\text{Cell}_\alpha(\lambda(\Sigma))$. Dunque contiene tutte le $\varrho(f)$. Cio' conclude dando la fattorizzazione

$$f = X \xrightarrow{\varrho_0(f) \in \text{Cell}_\alpha(\Sigma)} R_0(f) = F(f) \xrightarrow{\varrho_1(f)^{-1} R(f) \in \Sigma^{[2]}} Y \quad \square$$

Teorema 1.4.3 (Argomento degli oggetti piccoli). Sia $\Sigma \subset \mathbf{E}^{[1]}$ un insieme di frecce i cui domini e codomini sono α -presentabili per un cardinale regolare α . Allora la coppia $(\text{Sat}(\Sigma), \Sigma^\square)$ è un WFS.

1.4.4 La struttura modello su \mathbf{Spc} .

Teorema 1.4.4. La categoria \mathbf{Spc} degli spazi topologici ha una struttura modello (cofibrantemente generata) dove

1. WK è la classe delle equivalenze omotopiche deboli,

$$\left\{ f: X \rightarrow Y \mid \pi_n(f): \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y) \text{ è invertibile } \forall n \geq 0 \right\};$$

2. FIB è la classe \mathfrak{Fib} delle fibrazioni di Serre;
3. COF = $\square(\text{FIB} \cap \text{WK})$ (ammette una descrizione esplicita ma non la diamo).

Dimostrazione. Le proprietà più complicate da dimostrare sono quelle legate ai sistemi di fattorizzazione; diamo per buone completezza e co-completezza di \mathbf{Spc} , così come la chiusura per retratti delle tre classi WK, FIB, COF.

Anzitutto, dalla definizione che abbiamo dato di fibrazione di Serre appare chiaro che

Proposizione 1.4.4. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $p: X \rightarrow Y$ è una fibrazione aciclica;
- $(p: X \rightarrow Y) \in \{S^{n-1} \rightarrow D^n \mid n \geq 0\}^\square$, con la convenzione che $S^{-1} = \emptyset$.

Le mappe in $\mathcal{F}' = \{S^{n-1} \rightarrow D^n \mid n \geq 0\}$ sono le *cofibrazioni acicliche generanti*: è immediato notare che si tratta davvero di cofibrazioni acicliche.

Esercizio 1.4.1. Dedurre dal fatto che $p \in \text{FIB} \cap \text{WK} \Rightarrow (S^{-1} \rightarrow D^0) \square p$ che ogni fibrazione aciclica è una mappa suriettiva di spazi topologici.

Esercizio 1.4.2. Si possono caratterizzare le fibrazioni acicliche in un ulteriore modo: si tratta delle mappe continue $p: X \rightarrow Y$ che sono ortogonali a destra alla classe \mathfrak{CW} tutte le inclusioni $A \hookrightarrow B$ di CW-complessi relativi.

Mostrare che $\mathfrak{Fib} \subseteq \mathfrak{CW}^\square$. (Sugg.: utilizzare l'esercizio 1.3.7)

Esercizio 1.4.3. Usare il risultato precedente per mostrare che se A è un CW-complesso finito, e se $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots$ è una

sequenza numerabile di spazi tali che $X_n \rightarrow X_{n+1}$ sia l'inclusione di un CW-complesso relativo, allora A è piccolo rispetto a $X \cong \varinjlim X_n$, ovvero

$$\varinjlim \operatorname{hom}(A, X_n) \cong \operatorname{hom}(A, X).$$

La seguente condizione caratterizza inoltre le fibrazioni:

- $p: X \rightarrow Y$ è una fibrazione di Serre;
- $(p: X \rightarrow Y) \in \{D^n \rightarrow D^n \times [0, 1] \mid n \geq 0\}^\square$.

Le mappe in $\mathcal{F} = \{D^n \rightarrow D^n \times [0, 1] \mid n \geq 0\}$ sono le *cofibrizioni generanti*.

Per quanto riguarda gli assiomi di fattorizzazione, ora disponiamo di un criterio piuttosto potente: l'argomento degli oggetti piccoli funziona in ogni categoria generata per via cofibrante.

In particolare, omettendo un sacco di dettagli per cui direzioniamo il lettore volenteroso a [DS95, §8], possiamo provare che esistono fattorizzazioni

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \mathcal{F} \quad \downarrow f & \searrow i & G^\infty(\mathcal{F}, f) \\ & Y & \swarrow p \\ & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ \mathcal{F}' \quad \downarrow f & \searrow j & G^\infty(\mathcal{F}', f) \\ & Y & \swarrow q \\ & & \end{array}$$

□

1.4.5 La struttura modello su **Cat**.

La categoria **Cat** delle categorie *piccole* ha una struttura modello (cofibrantemente generata) dove

1. WK è la classe delle equivalenze di categorie, ovvero (assumendo l'assioma della scelta, che tanto servirà lungo la dimostrazione) dei funtori $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ che sono pienamente fedeli ed essenzialmente suriettivi.
2. COF è la classe dei funtori iniettivi sugli oggetti, ovvero queglii $J: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tali che $HC = HC'$ implica $C = C'$.

3. **FIB** è la classe delle isofibrazioni, o funtori *reminescenti*, ovvero quegli $F: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ tali per cui per ogni $e \in \mathbf{E}$ e isomorfismo $\psi: F(e) \cong b$ esiste un isomorfismo $\varphi: e \cong e'$ verso un oggetto $e' \in \mathbf{E}$ tale che $F(\varphi) = \psi$.

Cat è completa e cocompleta.

È un risultato ben noto che i limiti si costruiscono a partire da equalizzatori e prodotti, e i colimiti a partire da coequalizzatori e coprodotti. È dunque sufficiente esibire la costruzione di questi universali per avere la completezza e cocompletezza di **Cat**.

I prodotti sono facili da costruire; per quanto riguarda gli equalizzatori, se disponiamo di un diagramma

$$\mathbf{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathbf{D}$$

di cui vogliamo definire l'equalizzatore, è sufficiente considerare la sotto-categoria $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}$ fatta da quegli oggetti tali che $Fc = Gc$ (uguaglianza stretta) e i cui morfismi $c \rightarrow c'$ sono fatti da quei $\varphi: c \rightarrow c'$ per cui $F\varphi = G\varphi$: qualsiasi funtore $H: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ per cui $FH = GH$ fattorizza in un'unico modo attraverso \mathbf{K} . Questo dà a **Cat** ogni tipo di limite.

Per i colimiti è leggermente più complicato: i coprodotti sono fatti dalle unioni disgiunte, ovviamente. Il coequalizzatore di una coppia di funtori

$$\mathbf{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathbf{B}$$

è definito come segue. Il funtore $|-|: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Sets}$ che manda una categoria nel suo insieme degli oggetti è un aggiunto (destro e) sinistro, dunque rispetta tutti i colimiti. Questo implica che il diagramma

$$|\mathbf{A}| \begin{array}{c} \xrightarrow{|F|} \\ \xrightarrow{|G|} \end{array} |\mathbf{B}|$$

sia un coequalizzatore in **Sets**, cosa che implica che l'insieme degli oggetti di $\mathbf{Q} = \text{coeq}(F, G)$ sia esattamente il quoziente di $|\mathbf{B}|$ per la minima relazione di equivalenza generata dalle coppie (Fa, Ga) . L'insieme dei morfismi di \mathbf{Q} invece è definito prendendo l'insieme delle parole finite nei morfismi *contigui* di \mathbf{B} , ossia tutte le sequenze finite

$$Q \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{f_{n+1}} Q'$$

quozientate rispetto alla minima relazione di equivalenza \asymp che identifica la composizione di morfismi contigui, e le immagini di ogni $g \in \text{hom}(\mathbf{A})$

mediante F, G : consideriamo cioè equivalenti tutte le parole della forma $v.F(g).w$ e $v'.G(g).w'$ dove $v \simeq v', w \simeq w'$.

Il funtore $P: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Q}$ è definito nel modo ovvio; appare evidente che ogni funtore $H: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$ tale che $HF = HG$ è costante sui generatori della relazione di equivalenza \simeq .

$(\mathbf{cof} \cap \mathbf{wk}) \perp \mathbf{fib}$ e $\mathbf{cof} \perp (\mathbf{fib} \cap \mathbf{wk})$.

Consideriamo un diagramma della forma

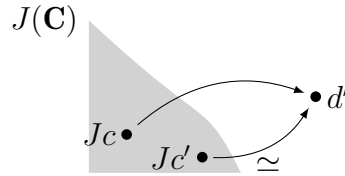
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{A} & \mathbf{E} \\ J \downarrow & & \downarrow F \\ \mathbf{D} & \xrightarrow{B} & \mathbf{B} \end{array}$$

dove J è un funtore iniettivo sugli oggetti, e F una isofibrazione.

- Se J è un'equivalenza di categorie, dobbiamo costruire un lifting $V: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$. Procediamo come segue: sugli oggetti c'è un modo ovvio di definire V : quando un oggetto d è della forma Jc , lo è per un unico $c \in \mathbf{C}$, dato che J è iniettivo sugli oggetti. Dunque mandiamo tale c , che è ben definito, in Ac . Se invece d non è della forma Jc , dato che J è un'equivalenza di categorie, esso è comunque *isomorfo* a un qualche Jc ; applicando B all'isomorfismo $Jc \rightarrow d$ otteniamo un isomorfismo $B Jc \rightarrow Bd$, ovvero un isomorfismo $F A c \rightarrow d$. Questo isomorfismo, essendo F una isofibrazione, deve venire da un unico isomorfismo $Ac \rightarrow e$ in \mathbf{E} , che poniamo uguale a Vd in questo caso.

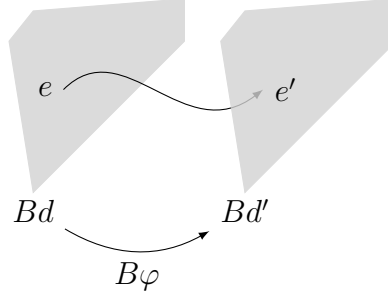
Sui morfismi, operiamo in modo simile: nel caso in cui un morfismo $\varphi: d \rightarrow d'$ stia nella immagine stretta di J , sappiamo cosa fare dato che esso è della forma $J(\psi)$ per un unico $\psi: c \rightarrow c'$; allora $V(\varphi) = A(\psi)$.

Nel caso in cui φ cada fuori l'immagine stretta di J siamo comunque in questa situazione:



Dato che J è pienamente fedele, esiste un (unico) morfismo ψ in \mathbf{C} che viene mandato in $Jc \rightarrow d' \xrightarrow{\simeq} Jc'$; definiamo allora $V(\varphi)$ come $A(\psi)$.

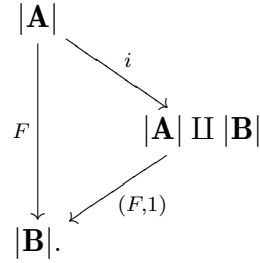
- Se F è un'equivalenza di categorie, dobbiamo costruire un lifting $W: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$. Anzitutto, è facile rendersi conto che la classe delle fibrazioni acicliche coincide con quella delle equivalenze di categorie suriettive sugli oggetti; detto questo, la definizione di W sugli oggetti segue dalla ortogonalità tra monomorfismi ed epimorfismi. Sulle frecce, il fatto che F sia pienamente fedele e suriettivo sugli oggetti implica che esiste un'unico $e \rightarrow e'$ in \mathbf{E} tale che $F(\eta) = B(\varphi)$; mandiamo φ in tale η .



Proprietà di fattorizzazione.

Supponiamo di avere un funtore $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$;

1. Definiamo anzitutto una fattorizzazione per la mappa sugli oggetti di F mediante il diagramma



Esiste un solo modo di rendere $(F, 1)$ un funtore pienamente fedele (e dunque, dato che esso è suriettivo sugli oggetti) un solo modo di renderlo una fibrazione aciclica in **Cat**: definiamo una categoria **C** che ha per oggetti l'insieme $|A| \amalg |B|$, e dove $\mathbf{C}(a, a') = \mathbf{B}(Fa, Fa')$, $\mathbf{C}(b, b') = \mathbf{B}(b, b')$.

Dato che il funtore i è ovviamente iniettivo sugli oggetti, abbiamo ottenuto la fattorizzazione rispetto a $(\text{CoF}, \text{FIB} \cap \text{WK})$.

2. Considerando sempre un generico funtore $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, costruiamo la categoria $\mathbf{P}(F)$ definita dallo *pseudo-pullback*

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{A} & & & & \\
 \searrow K & & & & \nearrow P_{\mathbf{A}} \\
 & \mathbf{P}(F) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{A} & \\
 \downarrow P_{\mathbf{B}} & \swarrow \Phi & & \downarrow & \\
 & \mathbf{B} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{B} &
 \end{array}$$

La categoria $\mathbf{P}(F)$ ha per oggetti le terne (a, b, φ) con $\varphi: Fa \cong b$, e per morfismi gli ovvi quadrati commutativi. Il funtore $K: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P}(F)$ è definito mandando $a \in \mathbf{A}$ in $(a, Fa, 1_{Fa})$, e i funtori $\mathbf{P}(F) \rightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}$ sono le ovvie proiezioni. La 2-cella Φ è definita nel modo ovvio dalla scelta degli isomorfismi $\varphi: Fa \cong b$, e la composizione $\mathbf{A} \xrightarrow{I} \mathbf{P}(F) \xrightarrow{Q} \mathbf{B}$ è esattamente il funtore F di partenza.

Tutte le verifiche rimanenti sono immediate: I è una cofibrazione aciclica, Q una fibrazione: se viene dato un isomorfismo $\psi: P_{\mathbf{B}}(a, b, \varphi) \cong b'$, questo viene da un solo isomorfismo in $\mathbf{P}(F)$:

$$\begin{array}{ccc}
 Fa & \xlongequal{\quad} & Fa \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow \psi f_1 \\
 P_{\mathbf{B}}(a, b, \varphi) = b & \longrightarrow & b'
 \end{array}$$

Esercizio 1.4.4. Mostrare che esiste un quadrato di pullback

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{P}(F) & \xrightarrow{(P_{\mathbf{A}}, P_{\mathbf{B}})} & \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\
 P \downarrow & & \downarrow F \times \mathbf{B} \\
 \mathbf{B}^{\cong} & \xrightarrow{(\partial_1, \partial_0)} & \mathbf{B} \times \mathbf{B}
 \end{array}$$

dove \mathbf{B}^{\cong} è la categoria degli isomorfismi di \mathbf{B} , e (∂_1, ∂_0) manda un morfismo $b \rightarrow b'$ nella coppia dominio-codominio.

Esercizio 1.4.5. Mostrare che l'oggetto cilindro e l'oggetto dei cammini di $\mathbf{A} \in \mathbf{Cat}$ sono, rispettivamente, $\mathbf{A} \times J$ e \mathbf{A}^J , dove $J = \{0 \cong 1\}$ è la categoria con un unico isomorfismo tra due oggetti distinti. In particolare, mostrare che esistono delle fattorizzazioni

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{A} \amalg \mathbf{A} & \xrightarrow{U} & \mathbf{A} \times J & \xrightarrow{P} & \mathbf{A} \\
 & \searrow V & & \searrow Q & \\
 \mathbf{A} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{A}^J & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{A} \times \mathbf{A}
 \end{array}$$

dove $U \in \mathbf{CoF}$, $P \in \mathbf{Fib} \cap \mathbf{Wk}$, $V \in \mathbf{CoF} \cap \mathbf{Wk}$, $Q \in \mathbf{Fib}$.

Capitolo 2

Insiemi Simpliciali.

2.1 “One category to rule them all”.

Definizione 2.1.1. La *categoria dei semplici*, denotata con Δ , è definita come la categoria che ha

- Per oggetti gli insiemi finiti, non vuoti e totalmente ordinati: l'oggetto tipico di Δ viene indicato con $[n] = \{0 < \dots < n\}$, di modo che $[0]$ ne sia l'oggetto terminale;
- Per morfismi $[n] \rightarrow [m]$ le funzioni monotone.

Osservazione 2.1.1. La categoria Δ si presenta come quoziente di una categoria libera: se dentro a Δ isoliamo

- Tutte le funzioni iniettive $\delta_{n,k}: [n] \rightarrow [n+1]$ la cui immagine non contiene k (sono esattamente $n+1$, per ogni $[n] \in \Delta$);
- Tutte le funzioni suriettive $\sigma_{n,k}: [n+1] \rightarrow [n]$ che assumono due volte il valore k (sono esattamente n , per ogni $[n] \in \Delta$);

otteniamo che ogni $f: [m] \rightarrow [n]$ si scrive come una composizione

$$f = \delta_{n_1, k_1} \circ \dots \circ \delta_{n_r, k_r} \circ \sigma_{m_1, h_1} \circ \dots \circ \sigma_{m_s, h_s}$$

per certi n_i, m_j e $0 \leq k_i \leq n_i, 0 \leq h_j \leq m_j$.

Esercizio 2.1.1. Dimostrare quanto appena detto, determinando la tupla degli n_i, m_j, k_i, h_j .

Capitolo 3

∞ -Categorie.

Capitolo 4

Higher Algebra.

Bibliografia

- [Bau89] H. J. Baues, *Algebraic homotopy*, Cambridge Univ. Press, 1989.
 - [DS95] William G Dwyer and Jan Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology **73126** (1995).
 - [ES45] Samuel Eilenberg and Norman E Steenrod, *Axiomatic approach to homology theory*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **31** (1945), no. 4, 117.
 - [HS65] Peter John Hilton and JT Schwartz, *Homotopy theory and duality*, Gordon and Breach New York, 1965.
 - [Kan55] Daniel M Kan, *Abstract homotopy*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **41** (1955), no. 12, 1092.
 - [Kan56] ———, *Abstract homotopy. II*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **42** (1956), no. 5, 255.
 - [Qui67] D.J. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, no. 43, Springer, 1967.
 - [Rez01] Charles Rezk, *A model for the homotopy theory of homotopy theory*, Transactions of the American Mathematical Society **353** (2001), no. 3, 973–1007.
 - [Rie11] Emily Riehl, *Algebraic model structures*, New York J. Math **17** (2011), 173–231.
 - [Whi] GW Whitehead, *Elements of homotopy theory, 1978*, Graduate Texts in Mathematics **61**.
-