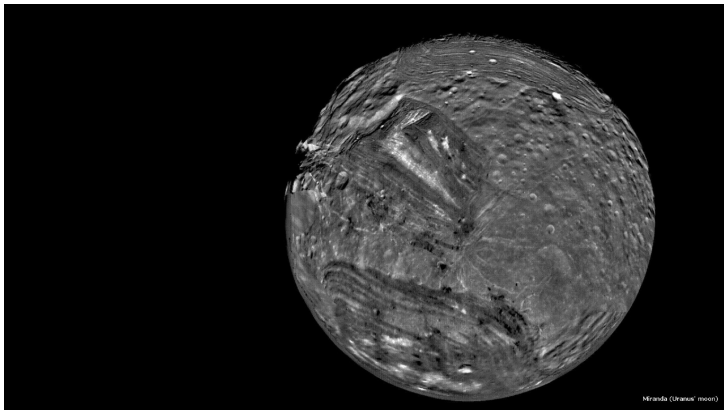


# Omologia Computazionale

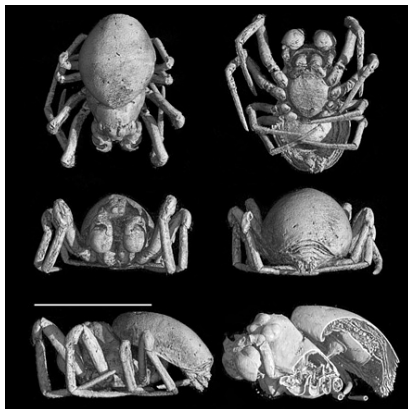
Circolo dei Matematici  
Giacobiani

29 maggio 2012

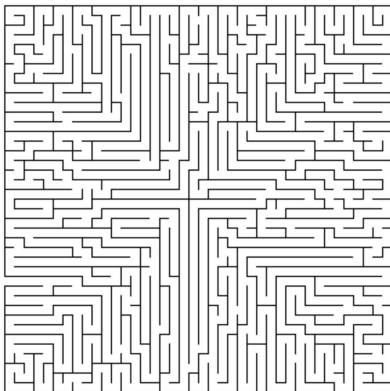
Come ho imparato a non preoccuparmi  
e ad amare  $H_n(X)$



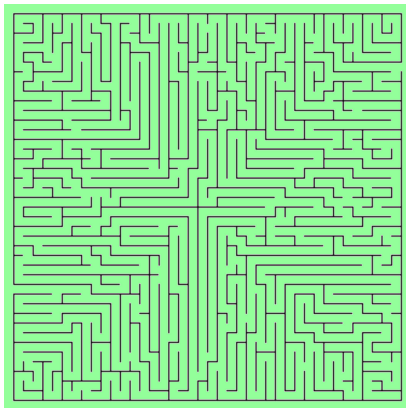
Miranda è la più piccola luna di Urano: le uniche sue foto ravvicinate provengono dalla sonda spaziale Voyager 2, scattate durante il suo sorvolo di Urano nel gennaio del 1986. Le sue *rupi di Verona*, con un'altezza di 20 km, sono la più alta scogliera del sistema solare. Come costruire immagini tridimensionali a partire da foto (analogiche e) bidimensionali del pianeta?



La *Cenotextricella simoni* è un ragno fossile risalente all'Eocene; questa immagine è stata ricostruita con un apparecchio per VHR-TC (Volumetric High Res Computer Tomography) partendo da un resto fossile imprigionato in una goccia d'ambra. La scoperta di una nuova specie di ragno ha quasi fatto pari con la tecnica del tutto innovativa e molto precisa (la *C. Simoni* è lunga poco più di un millimetro!). **Come si è potuto fare?**



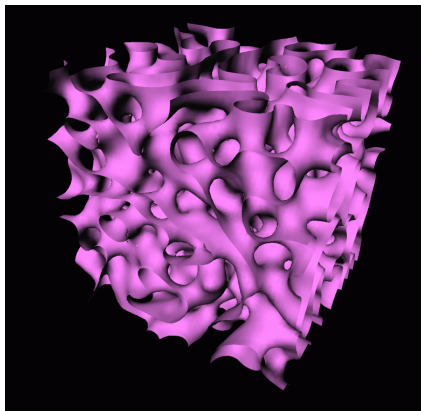
Da quante componenti connesse disgiunte è fatto (quanti colori servono a pitturarne le sezioni) un labirinto? Ha un'uscita? Come trovarla?



Da quante componenti connesse disgiunte è fatto (quanti colori servono a pitturarne le sezioni) un labirinto? Ha un'uscita? Come trovarla?

In questo caso **una**: se ne accorge un bambino con un pennarello e un po' di pazienza ma... come fare in generale (i.e. se il labirinto è lungo molti chilometri, prova di intelligenza lasciataci da una civiltà aliena)?

Con l'**algebra omologica**!



Consideriamo una lega di Ferro-Cromo, ottenuta scaldando entrambi i metalli fino ad una temperatura opportuna; man mano che lasciamo raffreddare la lega, gli atomi di ferro e quelli di cromo occupano regioni ben distinte. Modellizziamo un po' la cosa. Se  $F(t)$  indica il luogo occupato dagli atomi di ferro al tempo  $t$ , e similmente  $C(t)$  per il cromo, un “buon” modello per studiare questo processo di migrazione degli atomi è il sistema di Cahn-Hilliard.

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali

$$CH = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(\epsilon^2 \Delta u + u - u^3) & x \in \Omega \\ \vec{n} \cdot \nabla u = \vec{n} \cdot \nabla \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

La funzione incognita  $u = u(\tau, x, y, z)$  è la superficie di livello che separa i due metalli al tempo  $\tau$ ;  $\Omega$  è la regione di definizione dell'equazione,  $\partial\Omega$  il suo bordo,  $\vec{n}$  la normale uscente. Il parametro  $\epsilon \ll 1$  viaggia in un intervallo reale in cui sperimentalmente si assiste alla separazione del ferrocromo. Ulteriore condizione al contorno:  $\iiint_{\Omega} u(0, x, y, z) dx dy dz = 0$ .

È una equazione non lineare parecchio complicata: numericamente però si può risolvere con buona approssimazione. Ma riuscireste a dire **usando solo metodi analitici** che la superficie sopra riprodotta (soluzione a CH con  $\Omega = [0, 1]^3$ ,  $\epsilon = 1/10$ ,  $u(0, x, y, z) = 0$ ) ha *esattamente* una componente connessa con *esattamente* 1701 buchi?

Evidentemente **NO!** Ma non siete stupidi,  
solo vi manca l'**algebra omologica**.



## Altre *striking applications*:

- In una stanza  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  ci sono  $N$  persone: come/dove collocare  $n < N$  (meglio se  $n \ll N$ ) sensori di posizione sui muri in modo da contare *tutti* i presenti? Come determinare  $n$ , esiste un valore ottimale? **L'idea** è: i sensori triangolano lo spazio, l'“omologia” di questa triangolazione definisce una **misura**  $\mu_H$ ;  $N = \int_E d\mu_H$  (Y. Baryshnikov and R. Ghrist, “*Target enumeration via Euler characteristic integrals*”, 2007).
- Come ricostruire le caratteristiche topologiche di uno spazio continuo,  $R$ , partendo da un sampling discreto di dati? **L'idea** è: campioniamo lo spazio a vari gradi di finezza  $\epsilon > 0$ , in modo da avere una famiglia di spazi “lineari a tratti”  $R_\epsilon$  e una famiglia di immersioni  $R_\epsilon \hookrightarrow R_{\epsilon'}$  per ogni  $\epsilon < \epsilon'$ : se  $\epsilon$  è scelto bene l'approx è buona - ossia  $R \cong R_\epsilon$  per ogni  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ : come determinare  $\epsilon_0$ ? (G. Carlsson et al., “*Topological analysis of the responses of neurons*”, 2007).

... **Non temete!** niente di così complicato (per ora)...

Studieremo invece un problema

- meno pretenzioso in fatto di prerequisiti;
- di natura squisitamente combinatoria;
- correlato a quasi tutti gli esempi precedenti.

... Just let dead people  
do the hard part of your job.

(R. Lang)

L'algebra omologica è una branca della Matematica paradossalmente molto più antica dei problemi cui si è applicata. Questa esposizione è, seppure in nuce, presente in *Theorie der Abelschen Funktionen* di B. Riemann, pubblicata postuma in *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*; idee simili sono state suggerite da Emmy Noether circa nello stesso periodo.

Sia  $X$  una regione aperta del piano, per semplicità connessa, e siano  $a, b \in X$  due punti. Consideriamo un cammino  $\gamma: a \rightarrow b$  che li unisca in modo continuo.

**Problema:** Come calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

se  $P(x, y), Q(x, y)$  sono due funzioni reali e (per evitare problemi) ovunque regolari? La prima scelta saggia è pensare a  $\gamma$  come ad una giunzione di più cammini  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  in ciascuno dei quali sia “semplice” fare l'integrale. Per farlo dobbiamo approssimare  $\gamma$  con delle funzioni semplici, cambiandone “leggermente” la forma. **Problema:** Quando il risultato di un integrale di linea è *indipendente da deformazioni continue* del cammino? (Rispondere a questo vuol dire capire quando  $\int_{\beta} = 0$  per un cappio:  $\int_{\gamma} = \int_{\alpha} \iff \int_{\gamma \star \bar{\alpha}} = 0$ )

**Purtroppo non sempre!** Se  $\gamma$  è un cammino chiuso, e  $X$  ha dei “buchi”, e qualcuno di questi buchi cade nella regione di spazio delimitata da (il supporto di)  $\gamma$ , il risultato **può cambiare molto**. Esempio classico:

$$\int_{S^1} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \neq 0$$

mentre lungo un qualsiasi circuito che non abbraccia l'origine fa zero (si provi!).

**Perché?** Cosa è successo? La geometria del dominio (il suo avere buchi) sta evidenziando una **ostruzione** alla soluzione di un problema.

**Definizione filosofica:** l'algebra omologica quantifica l'ostruzione che incontriamo nella soluzione di un problema inverso (calcolare integrali, ricostruire spazi, incollare dati locali, ricostruire una funzione da un sampling finito di valori, ricostruire strutture algebriche/geometriche ignote, ...).

**Geometria**

(difficile)

Spazi  $X$

ostruzioni

**Algebra**

(“facile”)

Gruppi  $H^*(X)$

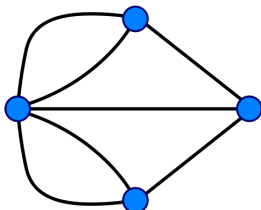
$H^*(X) \neq 0$

## Definizione

Un **grafo** è un sottoinsieme  $G \subset \mathbb{R}^3$  fatto da

- Un insieme finito di punti detti **vertici**,  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ;
- Un insieme finito di segmenti, detti **lati**,  $\mathcal{E} = \{[v_{i_1}, v_{j_1}], \dots, [v_{i_l}, v_{j_l}]\}$ , dove gli indici  $i_k, j_k$  viaggiano in  $\{1, \dots, n\}$

tali che l'intersezione di due lati è vuota o è un vertice, e che se un lato e un vertice si intersecano, lo fanno in un vertice.



- Un **cammino** è un qualsiasi sottoinsieme di  $\mathcal{E}$  del tipo  $\{[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{h-1}, v_h]\}$ .
- Un **cappio** o **ciclo** o **circuito** è un cammino  $\{[v_1, v_2], \dots, [v_h, v_1]\}$ .

## Osservazione

*Le decomposizioni di un dato insieme di punti, e segmenti tra loro, che li rendono dei grafi non sono uniche, e possono avvenire dei comportamenti patologici.*

Di cui però per ora fingiamo di non accorgerci, perché c'è qualcosa di ben più divertente da fare:

## Definizione

Il **bordo** di un lato è l'insieme dei suoi due vertici

$$bd([v_0, v_1]) = \{v_0, v_1\} = \{v_0\} \cup \{v_1\}$$

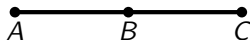
**Idea:**  $bd$  è una funzione dall'insieme dei lati a quello delle coppie di vertici. Se associassimo ad ogni vertice  $v$  e ad ogni lato  $e = [v_i, v_j]$  una quantità numerica  $\hat{v}$ , in modo che all'**unione** di vertici  $\{v_0\} \cup \{v_1\}$  corrisponda la **somma** di quantità  $\hat{v}_0 + \hat{v}_1$ ?

Otterremmo una cosa simpatica:

$$\begin{aligned}\text{bd}([v_0, v_1]) &= \{v_0\} \cup \{v_1\} \\ \partial([\widehat{v_0}, \widehat{v_1}]) &= \widehat{v_0} + \widehat{v_1}\end{aligned}$$

dove  $\partial$  è una qualche mappa che trasforma l'oggetto algebrico-numerico  $[\widehat{v_0}, \widehat{v_1}]$  nella somma  $\widehat{v_0} + \widehat{v_1}$ ; viene detto *operatore di bordo* per analogia con l'operazione geometrica che **schiaccia** un segmento sui suoi estremi.

In effetti c'è un problema non da poco: consideriamo un segmento del tipo



$$\begin{aligned}\text{bd}([A, B] \cup [B, C]) &= \text{bd}([A, C]) = \{A\} \cup \{C\} \\ \partial([\widehat{A}, \widehat{B}] \cup [\widehat{B}, \widehat{C}]) &= \partial([\widehat{A}, \widehat{B}]) + \partial([\widehat{B}, \widehat{C}]) \\ \partial([\widehat{A}, \widehat{C}]) &= \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{B} + \widehat{C} \\ \widehat{A} + \widehat{C} &= \widehat{A} + 2\widehat{B} + \widehat{C}\end{aligned}$$

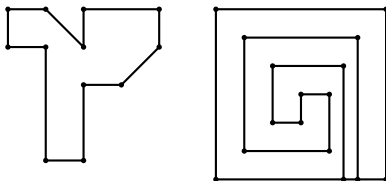
condizione che impone  $2\widehat{B} = 0$ . Cosa vuol dire?

Vuol dire che stiamo contando nel modo sbagliato: va usata l'**aritmetica modulo due**.  
 Esiste un luogo in Matematica, detto  $\mathbb{Z}_2$ , dove  $1 + 1 = 0$ . Le sue regole sono semplici:  
 $1 + 1 = 0 = 0 + 0$ ,  $1 + 0 = 1 = 0 + 1$ ,  $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ . Se usiamo  
 questa tecnica per contare i vertici di un grafo che consta di una unica spezzata chiusa  
 otteniamo



$$\begin{aligned} & \partial([\widehat{A}, \widehat{B}] + [\widehat{B}, \widehat{C}] + [\widehat{C}, \widehat{D}] + [\widehat{D}, \widehat{A}]) \\ & \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{D} + \widehat{A} \\ & \widehat{A} + \widehat{A} = 0 \end{aligned}$$

Funziona anche per cose più complicate e per grafi che sono fatti da più cicli (provare per credere):





Cosa c'è sotto? L'equazione misteriosa:  $\partial \circ \partial = 0$ .

Uno sarebbe tentato di dire che combinazioni lineari di lati tali che  $\partial(\sum a_I \widehat{I}) = 0$  racchiudono regioni di spazio (si pensi alla potenza algoritmica di questo criterio: un oggetto geometrico è una curva chiusa solo se “una somma di numeri” = 0). Bene, questo è **quasi vero**, nel senso che dobbiamo eliminare del rumore: ci sono dei casi banali in cui  $\partial(\sum a_I \widehat{I}) = 0$ , casi che non vogliamo contare.

Consideriamo un quadrato pieno,



$$\text{bd}(Q) = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D] \cup [D, A]$$

$$\partial Q = [\widehat{A, B}] + [\widehat{B, C}] + [\widehat{C, D}] + [\widehat{D, A}].$$

Dunque  $\partial\Gamma = \partial(\partial Q) = \partial\partial Q = 0$ .

Ora, **ogni volta** che un ciclo è un bordo, ovvero ogni volta che una curva chiusa  $\Gamma = \partial Q$ , automaticamente  $\partial\Gamma = 0$ . Dobbiamo quindi togliere dal computo delle curve chiuse “le curve chiuse che delimitano, senza buchi, regioni piane”.

L'idea cardinale dell'Algebra Omologica è:

*Vi sono delle ragion banali, ed altre meno banali, che spiegano per quale motivo la combinazione lineare dei lati di una curva chiusa  $\Gamma$ , presi in sequenza, somma a zero (mod 2), se passata sotto  $\partial$ .*

*Il motivo banale è che  $\Gamma = \partial Q$ , borda una regione “piena”, senza buchi nel mezzo.*

*Ora: noi vogliamo considerare i “cicli” (ossia i cammini per cui  $\partial\Gamma = 0$ ) che però non sono bordo di nessuna regione piena, ossia che non sono “bordi”.*

*Vogliamo raccogliere dentro un **gruppo**  $H_*(X)$  questi “cicli che non sono bordi”, e chiamarlo **gruppo di omologia**. Se non ci sono cicli che non sono bordi,  $H_*(X) = 0$  e lo spazio è semplice: più grande e complicato è  $H_*(X)$ , più grande, complicato e pieno di buchi è lo spazio.*

Semplice, no? La regola del gioco per avere una omologia è avere un qualche operatore di “bordo”  $\partial$  che agisce su “pezzi”  $d$ -dimensionali (punti, linee, piani, spazi, . . .) abbassandone la dimensione (manda un cubo nelle sue facce, le sue facce nei loro vertici, i vertici negli spigoli. . .) e tale che  $\partial \circ \partial = 0$ .

Facile a dirsi. Ma come si fa? Ricordo anzitutto che

- Lo **spazio vettoriale libero** sull'insieme dei vertici, o dei lati, di un grafo consiste delle combinazioni lineari di elementi di  $\mathcal{V}$ , o di  $\mathcal{E}$ ; si tratta di scritture del tipo

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_r$$
$$v_1 + \cdots + v_s$$

dove gli  $e_i$  (*edges*) sono lati e i  $v_j$  (*vertices*) sono vertici, e  $1 \leq r \leq |\mathcal{E}|$ ,  $1 \leq s \leq |\mathcal{V}|$ . L'insieme che li raccoglie tutti è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{Z}_2$ : si possono sommare formalmente due vettori, e moltiplicarli per uno scalare (in effetti finché ci si limita a scalari in  $\mathbb{Z}_2$  le cose sono un po' banali).

- Se  $G$  è un grafo, con insiemi di vertici  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ , chiamiamo  $C_0(G, \mathbb{Z}_2)$  lo spazio vettoriale su  $\mathcal{V}$ ,  $C_1(G, \mathbb{Z}_2)$  lo spazio vettoriale su  $\mathcal{E}$ . Definiamo poi gli operatori di bordo

$$\partial_0: C_0(G, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$
$$\partial_1: C_1(G, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(G, \mathbb{Z})$$
$$\partial_2: 0 \rightarrow C_1(G, \mathbb{Z})$$

Questi si possono raccogliere in un **complesso di catene**:

$$0 = C_2(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Abbiamo tre esempi a cui applicare questo macchinario che per ora è un misterioso acrocoro di algebra astratta:

- Lo spazio con un unico punto;
- Il segmento  $\Lambda$  di estremi  $A, B, C$ ;
- Il quadrato vuoto  $\Gamma_1$ .

La **tecnica** sarà sempre la stessa: se  $\mathcal{V}, \mathcal{E}$  sono rispettivamente l'insieme dei vertici e l'insieme dei lati di un grafo  $G$  dato, costruiamo  $C_0(G, \mathbb{Z}_2) := \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$ ,  $C_1(G, \mathbb{Z}_2) := \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_m \rangle$ , gli spazi vettoriali su  $\mathbb{Z}_2$  con insiemi dei generatori  $\mathcal{V}, \mathcal{E}$ . I due **gruppi di omologia** del grafo  $G$  si calcolano come quozienti

$$H_i(G, \mathbb{Z}_2) := \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{im} \partial_{i+1}} \quad i = 0, 1$$

(serve una piccola digressione sui quozienti: il fatto che  $\partial \circ \partial = 0$  implica che  $\operatorname{im} \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i$  per ogni indice, come sottospazi vettoriali: lo spazio quoziente ora è definito come quello che origina dal porre  $v \sim w \iff v - w \in \operatorname{im} \partial_{i+1}$ :  
**ricordare** cosa accadeva con le forme differenziali:  $\omega \sim \omega' \iff \omega' = \omega + d\alpha$ ).

$$G = \bullet$$

Cominciamo col grafo banale: ha un unico vertice  $v$  e nessun lato. L'unico vettore di  $C_1(G, \mathbb{Z}_2)$  allora è il vettore zero, e  $C_0(G, \mathbb{Z}_2)$  è un insieme con due elementi,  $\{0, \hat{v}\}$ , con l'operazione di gruppo  $\hat{v} + \hat{v} = 0$ .

L'unica applicazione lineare  $\partial_0: C_0(G, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$  è quella che manda entrambi gli elementi in zero; quindi  $\ker \partial_0 = C_0(G, \mathbb{Z}_2)$ . Simmetricamente, l'unica applicazione lineare  $\partial_1: 0 = C_1(G, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_0(G, \mathbb{Z}_2)$  è quella che manda zero in zero: dunque  $\operatorname{im} \partial_1 = 0$ . Allora

$$H_0(G, \mathbb{Z}_2) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} = C_0(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(G, \mathbb{Z}_2) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} = 0$$

(il secondo vale per le osservazioni già fatte e perché abbiamo posto d'ufficio  $C_2(G, \mathbb{Z}_2) = 0$ , trattando grafi: questo è dovuto al fatto che i grafi sono oggetti "unidimensionali").

$$G = \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet$$

Nel caso di un grafo del tipo  $A \text{ --- } B \text{ --- } C$ , con insieme dei vertici  $\{A, B, C\}$  e insieme dei lati  $\{[A, B], [B, C]\}$  otteniamo

$$C_0(G, \mathbb{Z}_2) = \langle \{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\} \rangle, \quad C_1(G, \mathbb{Z}_2) = \langle \{[\widehat{A}, \widehat{B}], [\widehat{B}, \widehat{C}]\} \rangle$$

in coordinate i vettori di questi due spazi si scrivono come

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\widehat{B}, \widehat{C}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In queste basi  $\partial_1$  è l'applicazione lineare di matrice

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con qualche *trick* di algebra lineare è facile calcolare il nucleo (riduzione alla Gauss, ricordate?) e l'immagine (spazio generato dalle colonne).

Si noti che allora  $H_0(G, \mathbb{Z}_2) = \{0, \widehat{A}\} \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $H_1(G, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$



Con un ragionamento analogo a prima (assegnando ciclicamente i nomi ai vertici)

$$C_0(G, \mathbb{Z}_2) = \langle \{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}\} \rangle, \quad C_1(G, \mathbb{Z}_2) = \langle \{[\widehat{A}, \widehat{B}], [\widehat{B}, \widehat{C}], [\widehat{C}, \widehat{D}], [\widehat{D}, \widehat{A}]\} \rangle$$

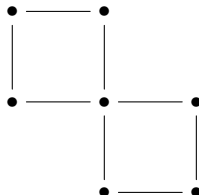
in coordinate i vettori di questi due spazi si scrivono come

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \widehat{B} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \widehat{C} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \widehat{D} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ [\widehat{A}, \widehat{B}] &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & [\widehat{B}, \widehat{C}] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & [\widehat{C}, \widehat{D}] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & [\widehat{D}, \widehat{A}] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In queste basi  $\partial_1$  è l'applicazione lineare di matrice  $\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . gli stessi conti (cambiano solo i numeri, e le conclusioni finali) portano a concludere che  $H_0(\Gamma, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  così come  $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ .

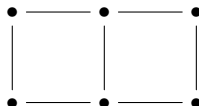
# Qualche esercizio!

- Cosa succede al grafo



$$\begin{pmatrix} H_0(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \\ H_1(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$$

- Cosa succede al grafo



$$\begin{pmatrix} H_0(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \\ H_1(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$$






- Generalizzare?...



$$\begin{pmatrix} H_0(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \\ H_1(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$$



# Bibliografia Minima

-  *Three examples of applied and computational homology*, <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/deel09/jun2008/ghrist.pdf>
-  T. Kaczynski et al., *Computational Homology*, <http://smp.if.uj.edu.pl/~gielmuda/size/computational-homology.pdf>
-  *Computational Homology Project*, <http://chomp.rutgers.edu/>
-  J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Universitext, Berlin, New York: Springer-Verlag.
-  Ulteriori applicazioni (*going beyond the scope of this talk*) si trovano nel calcolo differenziale discreto: [http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\\_exterior\\_calculus](http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_exterior_calculus)

«Utinam intelligere possim ratiocinationes pulcherrimas  
de propositione concisa “DE QUADRATO NIHILO ÆXSEQUARI” fluunt!»  
(E. Cartan, 1980)