TQFT in dimensione bassa

Fosco Loregian

18 maggio 2011

Filosofia di fondo:

$$\{\text{oggetti geometrici}\} \longleftrightarrow \{\text{oggetti algebrici}\}$$

in modo funtoriale.

Filosofia di fondo:

$$\{\text{oggetti geometrici}\} \longleftrightarrow \{\text{oggetti algebrici}\}$$

in modo funtoriale.
L'idea non è affatto nuova:

$$X \rightsquigarrow H_n(X, \mathbb{R}), H^n(X, \mathbb{R}), \ldots$$

Filosofia di fondo:

$$\{\text{oggetti geometrici}\} \longleftrightarrow \{\text{oggetti algebrici}\}$$

in modo funtoriale.
L'idea non è affatto nuova:

$$X \rightsquigarrow H_n(X, \mathbb{R}), H^n(X, \mathbb{R}), \ldots$$

Vorremmo trovare:

- Una categoria $\mathbf{C}$ di varietà (essenzialmente una sottocategoria di $\mathbf{Mfd}$) con *buone proprietà*;
- Un funtore $Z\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Vect}_k$ con *buone proprietà*:

Filosofia di fondo:

$$\{\text{oggetti geometrici}\} \longleftrightarrow \{\text{oggetti algebrici}\}$$

in modo funtoriale.
L'idea non è affatto nuova:

$$X \rightsquigarrow H_n(X, \mathbb{R}), H^n(X, \mathbb{R}), \ldots$$

Vorremmo trovare:

- Una categoria **C** di varietà (essenzialmente una sottocategoria di **Mfd**) con *buone proprietà*;
- Un funtore $Z\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Vect}_k$ con *buone proprietà*:

$$Z(\Sigma \times [0,1]) \cong \mathrm{id}_\Sigma \quad \forall \Sigma \in \mathbf{C}$$
$$Z(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) \cong Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2) \quad \forall \Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbf{C}$$

Buone proprietà sono proprietà categoriali di docilità: la presenza di coprodotti, di un oggetto iniziale, di una struttura monoidale da comparare con quella su $\mathbf{Vect}_k$...

Definizione (Categoria Monoidale)

Una categoria monoidale è una terna $(\mathbf{C}, \otimes, I)$, *in cui* $\mathbf{C}$ *è una categoria,* $\otimes\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *un (bi)funtore e* $I \in Ob_{\mathbf{C}}$, *tali che i diagrammi*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \arrow[r, "\otimes \times \mathrm{id}_{\mathbf{C}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{C}} \times \otimes"'] & \mathbf{C} \times \mathbf{C} \arrow[d, "\otimes"] \\
\mathbf{C} \times \mathbf{C} \arrow[r, "\otimes"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(A, B, C) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (A \otimes B, C) \arrow[d, mapsto] \\
(A, B \otimes C) \arrow[r, mapsto] & A \otimes B \otimes C
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{C}} \times I"] \arrow[dr, no head] & \mathbf{C} \times \mathbf{C} \arrow[d, "\otimes"] & \mathbf{C} \arrow[l, "I \times \mathrm{id}_{\mathbf{C}}"'] \arrow[dl, no head] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, mapsto, "\mathrm{id}_A \times I"] \arrow[d, mapsto, "I \times \mathrm{id}_A"'] & & (A, I) \arrow[d, mapsto, "\otimes"] \\
(I, A) \arrow[r, mapsto, "\otimes"'] & I \otimes A \arrow[r, no head, "\sim"] & A \otimes I \cong A
\end{tikzcd}
$$

siano commutativi.

Alcuni esempi:

- Ogni categoria con prodotti finiti e un oggetto finale;
- Ogni monoide pensato come categoria discreta;
- End($\mathbf{C}$), con il bifuntore dato dalla composizione e il funtore identico;
- La categoria dei k-spazi vettoriali, con l'operazione $\otimes_k$ e $I = k$.

Alcuni esempi:

- Ogni categoria con prodotti finiti e un oggetto finale;
- Ogni monoide pensato come categoria discreta;
- $\mathrm{End}(\mathbf{C})$, con il bifuntore dato dalla composizione e il funtore identico;
- La categoria dei k-spazi vettoriali, con l'operazione $\otimes_k$ e $I = k$.

Una categoria monoidale $(\mathbf{C}, \otimes, I)$ si dice *simmetrica* se esiste un morfismo

$$s \colon A \otimes B \mapsto B \otimes A$$

tale che $s \circ s = \mathrm{id}_{A \otimes B}$.

Definizione (Funtore Monoidale)

Date due categorie monoidali $(\mathbf{C}, \otimes, I)$, $(\mathbf{D}, \boxtimes, J)$ *un funtore* $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *si dice monoidale se esistono famiglie di isomorfismi*

$$\varphi_{AB} : \mathcal{F}(A) \boxtimes \mathcal{F}(B) \cong \mathcal{F}(A \otimes B)$$
$$i : J \cong \mathcal{F}(I)$$

uno per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathbf{C}$ *tali che i diagrammi seguenti siano commutativi.*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}(A) \boxtimes \mathcal{F}(B)) \boxtimes \mathcal{F}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(A) \boxtimes (\mathcal{F}(B) \boxtimes \mathcal{F}(C)) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(A \otimes B) \boxtimes \mathcal{F}(C) \arrow[d] & \mathcal{F}(A) \boxtimes \mathcal{F}(B \otimes C) \arrow[d] \\
\mathcal{F}((A \otimes B) \otimes C) \arrow[r] & \mathcal{F}(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

Definizione (Continua)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \boxtimes J \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(A) \boxtimes \mathcal{F}(I) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(A \otimes I) \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(I) \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(I \otimes A) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Definizione (Continua)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \boxtimes J \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(A) \boxtimes \mathcal{F}(I) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(A \otimes I) \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(I) \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(I \otimes A) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Definizione (Categoria degli *n*-cobordismi)

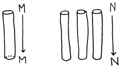
Sia $n \geq 1$ *fissato.* $\mathrm{Cob}(n)$ *è la categoria che ha per oggetti le varietà* $M, N, \dots$ *chiuse (=senza bordo) orientate e compatte di dimensione* $n-1$*, e per morfismi (="cobordismi")* $B\colon M \rightsquigarrow N$ *le varietà lisce, compatte e orientate, che hanno per bordo* $\overline{M} \amalg N$*.*

Definizione (Continua)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \boxtimes J \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(A) \boxtimes \mathcal{F}(I) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(A \otimes I) \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(I) \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(I \otimes A) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Definizione (Categoria degli n-cobordismi)

Sia $n \geq 1$ fissato. $\mathrm{Cob}(n)$ è la categoria che ha per oggetti le varietà $M, N, \dots$ chiuse (=senza bordo) orientate e compatte di dimensione $n-1$, e per morfismi (="cobordismi") $B\colon M \rightsquigarrow N$ le varietà lisce, compatte e orientate, che hanno per bordo $\overline{M} \amalg N$.

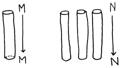
- $\mathrm{id}_M = M \times [0,1]$; 

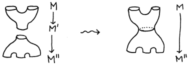
Definizione (Continua)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \boxtimes J \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(A) \boxtimes \mathcal{F}(I) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(A \otimes I) \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(I) \boxtimes \mathcal{F}(A) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(A) & \mathcal{F}(I \otimes A) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Definizione (Categoria degli n-cobordismi)

Sia $n \geq 1$ fissato. $\mathrm{Cob}(n)$ è la categoria che ha per oggetti le varietà $M, N, \dots$ chiuse (=senza bordo) orientate e compatte di dimensione $n-1$, e per morfismi (="cobordismi") $B\colon M \rightsquigarrow N$ le varietà lisce, compatte e orientate, che hanno per bordo $\overline{M} \amalg N$.

- $\mathrm{id}_M = M \times [0,1]$; 



- Composizione = incollamento: se $B\colon M \rightsquigarrow M'$, $B'\colon M' \rightsquigarrow M''$, allora "$B' \circ B$"$= B \amalg_{M'} B'\colon M \rightsquigarrow M''$.

Teorema

Sia $n \geq 1$ *un intero. Allora* $(\mathrm{Cob}(n), \amalg, \varnothing)$ *è una categoria monoidale simmetrica. (Il vuoto è considerato una varietà di ogni dimensione.)*

Teorema

Sia $n \geq 1$ un intero. Allora $(\mathrm{Cob}(n), \amalg, \varnothing)$ è una categoria monoidale simmetrica. (Il vuoto è considerato una varietà di ogni dimensione.)

Definizione

Sia k un campo (possiamo pensare $k = \mathbb{C}$). Una Topological Quantum Field Theory di dimensione n è un funtore monoidale

$$
\begin{aligned}
Z \colon \mathrm{Cob}(n) &\longrightarrow \mathbf{Vec}_k \\
M &\longmapsto Z(M) = V \\
(B \colon M \rightsquigarrow M') &\longmapsto V \to V'
\end{aligned}
$$

In modo che $Z(M \amalg N) \cong Z(M) \otimes_k Z(N)$.

- Possiamo riguardare una varietà M^n chiusa e orientata come un cobordismo $\varnothing \rightsquigarrow \varnothing$: a $Z(\varnothing) \to Z(\varnothing) \in \hom_k(k, k) \cong k$ corrisponde un invariante scalare di diffeomorfismo

- Possiamo riguardare una varietà M^n chiusa e orientata come un cobordismo $\varnothing \rightsquigarrow \varnothing$: a $Z(\varnothing) \to Z(\varnothing) \in \hom_k(k, k) \cong k$ corrisponde un invariante scalare di diffeomorfismo

$Z($$)\colon Z(\varnothing) \to Z(\varnothing)\colon 1 \mapsto Z(1)$

- Possiamo riguardare una varietà M^n chiusa e orientata come un cobordismo $\varnothing \rightsquigarrow \varnothing$: a $Z(\varnothing) \to Z(\varnothing) \in \hom_k(k, k) \cong k$ corrisponde un invariante scalare di diffeomorfismo

$Z($  $)\colon Z(\varnothing) \to Z(\varnothing)\colon 1 \mapsto Z(1)$

- I cobordismi in $\mathrm{Cob}(n)$ si possono riguardare in più modi: una varietà M^n, orientata, con un bordo ∂B è un cobordismo in tanti modi quante (=tra tante varietà quante) sono le decomposizioni di ∂B in unione disgiunta di varietà $(n-1)$-dimensionali...

- Possiamo riguardare una varietà M^n chiusa e orientata come un cobordismo $\varnothing \rightsquigarrow \varnothing$: a $Z(\varnothing) \to Z(\varnothing) \in \hom_k(k,k) \cong k$ corrisponde un invariante scalare di diffeomorfismo

$Z($  $)\colon Z(\varnothing) \to Z(\varnothing)\colon 1 \mapsto Z(1)$

- I cobordismi in $\mathrm{Cob}(n)$ si possono riguardare in più modi: una varietà M^n, orientata, con un bordo ∂B è un cobordismo in tanti modi quante (=tra tante varietà quante) sono le decomposizioni di ∂B in unione disgiunta di varietà $(n-1)$-dimensionali...

... In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

...In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \rightsquigarrow \overline{M}$ in sè: $\mathrm{id}_{\overline{M}}$;

. . . In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \amalg M \rightsquigarrow \varnothing$ (valutazione);

...In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

- $M \times [0,1]$ è un cob. $\varnothing \rightsquigarrow \overline{M} \amalg M$ (covalutazione);

... In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

Valutando $Z\colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$ sulle varietà ottenute in questi modi accadono cose interessanti:

...In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \rightsquigarrow \overline{M}$ in sè: $\mathrm{id}_{\overline{M}}$;

Valutando $Z\colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$ sulle varietà ottenute in questi modi accadono cose interessanti:

- $Z(\overline{M}) \to Z(\overline{M})$ corrisponde a $\mathrm{id}_{Z\overline{M}}$;

...In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \rightsquigarrow \overline{M}$ in sè: $\mathrm{id}_{\overline{M}}$;
- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \amalg M \rightsquigarrow \varnothing$ (valutazione);

Valutando $Z\colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$ sulle varietà ottenute in questi modi accadono cose interessanti:

- $Z(\overline{M}) \to Z(\overline{M})$ corrisponde a $\mathrm{id}_{Z\overline{M}}$;
- $Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M) \to k$ (valutazione);

...In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \rightsquigarrow \overline{M}$ in sè: $\mathrm{id}_{\overline{M}}$;
- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \amalg M \rightsquigarrow \varnothing$ (valutazione);
- $M \times [0,1]$ è un cob. $\varnothing \rightsquigarrow \overline{M} \amalg M$ (covalutazione);

Valutando $Z\colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$ sulle varietà ottenute in questi modi accadono cose interessanti:

- $Z(\overline{M}) \to Z(\overline{M})$ corrisponde a $\mathrm{id}_{Z\overline{M}}$;
- $Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M) \to k$ (valutazione);
- $k \to Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M)$ (covalutazione);

...In un caso particolare la questione si fa interessante: $M \times [0,1]$, che possiamo vedere come id_M, ha più nature:

- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \rightsquigarrow \overline{M}$ in sè: $\mathrm{id}_{\overline{M}}$;
- $M \times [0,1]$ è un cob. $\overline{M} \amalg M \rightsquigarrow \varnothing$ (valutazione);
- $M \times [0,1]$ è un cob. $\varnothing \rightsquigarrow \overline{M} \amalg M$ (covalutazione);

Valutando $Z \colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$ sulle varietà ottenute in questi modi accadono cose interessanti:

- $Z(\overline{M}) \to Z(\overline{M})$ corrisponde a $\mathrm{id}_{Z\overline{M}}$;
- $Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M) \to k$ (valutazione);
- $k \to Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M)$ (covalutazione);

In un mondo perfetto, dovrebbe esistere un corrispettivo in $\mathbf{Vec}_k$ della operazione "cambio orientazione a M". In effetti...

. . . *Esiste!*

Teorema

Sia $Z\colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$ *una* TQFT *di dimensione n. Per ogni* $M \in \mathrm{Cob}(n)$, $Z(M)$ *è uno spazio vettoriale di dimensione finita e l'applicazione lineare*

$$Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M) \to k$$

definisce un isomorfismo tra $Z(\overline{M})$ *e* $Z(M)^*$ *(il duale).*

. . . *Esiste!*

Teorema

Sia $Z : \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$ *una* TQFT *di dimensione* n*. Per ogni* $M \in \mathrm{Cob}(n)$*,* $Z(M)$ *è uno spazio vettoriale di dimensione finita e l'applicazione lineare*

$$Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M) \to k$$

definisce un isomorfismo tra $Z(\overline{M})$ *e* $Z(M)^*$ *(il duale).*

"*Dimostrazione*": Si applichi $Z(M)^* \otimes_k -$ al morfismo di covalutazione $k \to Z(\overline{M}) \otimes_k Z(M)$, per ottenere
$\beta\colon Z(M)^* \otimes_k k \cong Z(M)^* \to Z(M)^* \otimes_k Z(M) \otimes_k Z(\overline{M}) \to k \otimes Z(\overline{M}) \cong Z(\overline{M})$.
Analogamente per $\alpha\colon Z(\overline{M}) \to Z(M)^*$. Ora $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$. □

$n = 1$. Ogni $M \in \mathrm{Cob}(1)$ è una varietà orientata di dimensione zero $=$ una "distribuzione discreta di cariche" del tipo

$$(\bullet_+ \;\; \bullet_- \;\; \bullet_+ \;\; \bullet_+)$$

$n = 1$. Ogni $M \in \mathrm{Cob}(1)$ è una varietà orientata di dimensione zero = una "distribuzione discreta di cariche" del tipo

$$\left(\bullet_+ \ \bullet_- \ \bullet_+ \ \bullet_+ \right)$$

Esistono *due* varietà orientate e connesse di dimensione zero: $\bullet_+$ e $\bullet_-$; esse determinano univocamente l'azione di Z su $M \in \mathrm{Cob}(1)$:

$n = 1$. Ogni $M \in \mathrm{Cob}(1)$ è una varietà orientata di dimensione zero $=$ una "distribuzione discreta di cariche" del tipo

$$\left(\bullet_+ \ \bullet_- \ \bullet_+ \ \bullet_+ \right)$$

Esistono *due* varietà orientate e connesse di dimensione zero: $\bullet_+$ e $\bullet_-$; esse determinano univocamente l'azione di Z su $M \in \mathrm{Cob}(1)$:

$$Z(M) = Z\left(\coprod_{i=1}^m \bullet_+ \amalg \coprod_{i=1}^n \bullet_- \right) = Z(\bullet_+)^{\otimes m} \otimes_k Z(\bullet_-)^{\otimes n}$$

$n = 1$. Ogni $M \in \mathrm{Cob}(1)$ è una varietà orientata di dimensione zero $=$ una "distribuzione discreta di cariche" del tipo

$$\big(\bullet_+ \;\; \bullet_- \;\; \bullet_+ \;\; \bullet_+ \big)$$

Esistono *due* varietà orientate e connesse di dimensione zero: $\bullet_+$ e $\bullet_-$; esse determinano univocamente l'azione di Z su $M \in \mathrm{Cob}(1)$:

$$Z(M) = Z\big(\textstyle\coprod_{i=1}^m \bullet_+ \amalg \coprod_{i=1}^n \bullet_- \big) = Z(\bullet_+)^{\otimes m} \otimes_k Z(\bullet_-)^{\otimes n}$$

♣ Per il Teorema precedente, $Z(\bullet_+) \cong Z(\bullet_-)^*$;

$n = 1$. Ogni $M \in \mathrm{Cob}(1)$ è una varietà orientata di dimensione zero $=$ una "distribuzione discreta di cariche" del tipo

$$\left(\bullet_+ \ \bullet_- \ \bullet_+ \ \bullet_+ \right)$$

Esistono *due* varietà orientate e connesse di dimensione zero: $\bullet_+$ e $\bullet_-$; esse determinano univocamente l'azione di Z su $M \in \mathrm{Cob}(1)$:

$$Z(M) = Z\left(\coprod_{i=1}^m \bullet_+ \amalg \coprod_{i=1}^n \bullet_- \right) = Z(\bullet_+)^{\otimes m} \otimes_k Z(\bullet_-)^{\otimes n}$$

♣ Per il Teorema precedente, $Z(\bullet_+) \cong Z(\bullet_-)^*$;
♠ Un cobordismo in $\mathrm{Cob}(1)$ è una varietà $B \colon M \rightsquigarrow M'$ di dimensione 1 risultante da unione disgiunta di alcune copie di $\mathbb{S}^1$ ($\varnothing \rightsquigarrow \varnothing$) e alcune copie di $[0, 1]$ ($\bullet \rightsquigarrow \bullet$).

Si possono enumerare 5 casi distinti per un cobordismo B connesso:

1. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_+ \rightsquigarrow \bullet_+$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_+}$;

Si possono enumerare 5 casi distinti per un cobordismo B connesso:

1. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_+ \rightsquigarrow \bullet_+$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_+}$;
2. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_- \rightsquigarrow \bullet_-$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_-}$

Si possono enumerare 5 casi distinti per un cobordismo B connesso:

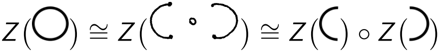
1. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_+ \rightsquigarrow \bullet_+$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_+}$;
2. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_- \rightsquigarrow \bullet_-$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_-}$
3. Se $B = [0,1]$ si guarda come cobordismo da $\bullet_+ \amalg \bullet_-$ a $\varnothing$, otteniamo una mappa $V^* \otimes V \to k$, riconoscibile come la dualità canonica;

Si possono enumerare 5 casi distinti per un cobordismo B connesso:

1. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_+ \rightsquigarrow \bullet_+$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_+}$;
2. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_- \rightsquigarrow \bullet_-$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_-}$
3. Se $B = [0,1]$ si guarda come cobordismo da $\bullet_+ \amalg \bullet_-$ a $\varnothing$, otteniamo una mappa $V^* \otimes V \to k$, riconoscibile come la dualità canonica;
4. Se $B = [0,1]$ si guarda come cobordismo da $\varnothing$ a $\bullet_+ \amalg \bullet_-$, otteniamo una mappa $k \to V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V)$, che manda $c \in k$ in $f_c \colon v \mapsto c \cdot v$.

Si possono enumerare 5 casi distinti per un cobordismo B connesso:

1. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_+ \rightsquigarrow \bullet_+$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_+}$;
2. Se $B = [0,1]$ si guarda come $\bullet_- \rightsquigarrow \bullet_-$, esso corrisponde a $\mathrm{id}_{\bullet_-}$
3. Se $B = [0,1]$ si guarda come cobordismo da $\bullet_+ \amalg \bullet_-$ a $\varnothing$, otteniamo una mappa $V^* \otimes V \to k$, riconoscibile come la dualità canonica;
4. Se $B = [0,1]$ si guarda come cobordismo da $\varnothing$ a $\bullet_+ \amalg \bullet_-$, otteniamo una mappa $k \to V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V)$, che manda $c \in k$ in $f_c \colon v \mapsto c \cdot v$.
5. Se $B = \mathbb{S}^1$ viene riguardato come cobordismo da $\varnothing$ in sè, otteniamo il cobordismo scrivibile come



$$k \to V^* \otimes V \to k$$

$$1 \to \mathrm{id}_V \to \mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = \dim V$$

$n = 2$. Ogni componente connessa di una varietà chiusa è (a meno di diffeo) $\mathbb{S}^1$, quindi

> $\mathbb{S}^1$ *ha in* $\mathrm{Cob}(2)$ *il ruolo che* $\bullet$ *aveva in* $\mathrm{Cob}(1)$.

$n = 2$. Ogni componente connessa di una varietà chiusa è (a meno di diffeo) $\mathbb{S}^1$, quindi

> $\mathbb{S}^1$ *ha in* $\mathrm{Cob}(2)$ *il ruolo che* $\bullet$ *aveva in* $\mathrm{Cob}(1)$.

$$Z(M) = Z\big(\textstyle\coprod_{i=1}^m \mathbb{S}^1\big) \cong Z(\mathbb{S}^1)^{\otimes m} = W^{\otimes m}$$

$n = 2$. Ogni componente connessa di una varietà chiusa è (a meno di diffeo) $\mathbb{S}^1$, quindi

$\mathbb{S}^1$ *ha in* $\mathrm{Cob}(2)$ *il ruolo che* $\bullet$ *aveva in* $\mathrm{Cob}(1)$.

$$Z(M) = Z\big(\coprod_{i=1}^m \mathbb{S}^1\big) \cong Z(\mathbb{S}^1)^{\otimes m} = W^{\otimes m}$$

C'è una *geometria* molto più ricca:

$n = 2$. Ogni componente connessa di una varietà chiusa è (a meno di diffeo) $\mathbb{S}^1$, quindi

> $\mathbb{S}^1$ *ha in* $\mathrm{Cob}(2)$ *il ruolo che* • *aveva in* $\mathrm{Cob}(1)$.

$$Z(M) = Z\left(\coprod_{i=1}^{m} \mathbb{S}^1\right) \cong Z(\mathbb{S}^1)^{\otimes m} = W^{\otimes m}$$

C'è una *geometria* molto più ricca: il cobordismo "prototipo" di $\mathrm{Cob}(2)$ è , che definisce una applicazione lineare

$Z($$) = \mu \colon W \otimes W \longrightarrow W$

(moltiplicazione)

$n = 2$. Ogni componente connessa di una varietà chiusa è (a meno di diffeo) $\mathbb{S}^1$, quindi

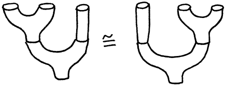
$\mathbb{S}^1$ *ha in* $\mathrm{Cob}(2)$ *il ruolo che* $\bullet$ *aveva in* $\mathrm{Cob}(1)$.

$$Z(M) = Z\big(\textstyle\coprod_{i=1}^m \mathbb{S}^1\big) \cong Z(\mathbb{S}^1)^{\otimes m} = W^{\otimes m}$$

C'è una *geometria* molto più ricca: il cobordismo "prototipo" di $\mathrm{Cob}(2)$ è , che definisce una applicazione lineare

$$Z(\ \ ) = \mu \colon W \otimes W \longrightarrow W$$


(moltiplicazione)



$$\begin{tikzcd}
W \otimes W \otimes W \arrow[r, "\mathrm{id}_W \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}_W"'] & W \otimes W \arrow[d, "\mu"] \\
W \otimes W \arrow[r, "\mu"'] & W
\end{tikzcd}$$

La filosofia allora è: "se varietà diffeomorfe bordanti sono *lo stesso* cobordismo, opportuni diagrammi associati a quei cobordismi commuteranno".

La filosofia allora è: "se varietà diffeomorfe bordanti sono *lo stesso* cobordismo, opportuni diagrammi associati a quei cobordismi commuteranno".

- Esiste , $Z($$) = \epsilon \colon k \to W$ (unità);

La filosofia allora è: "se varietà diffeomorfe bordanti sono *lo stesso* cobordismo, opportuni diagrammi associati a quei cobordismi commuteranno".

- Esiste , $Z($$) = \epsilon\colon k \to W$ (unità);
- Esiste , $Z($$) = \eta\colon W \to k$ (counità);

La filosofia allora è: "se varietà diffeomorfe bordanti sono *lo stesso* cobordismo, opportuni diagrammi associati a quei cobordismi commuteranno".

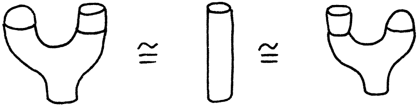
- Esiste , $Z($$) = \epsilon \colon k \to W$ (unità);
- Esiste , $Z($$) = \eta \colon W \to k$ (counità);
- Esiste , $Z($$) \colon W \to W \otimes_k W$ (comoltiplicazione).

Allora commutano. . .

La filosofia allora è: "se varietà diffeomorfe bordanti sono *lo stesso* cobordismo, opportuni diagrammi associati a quei cobordismi commuteranno".

- Esiste , $Z(\;) = \epsilon \colon k \to W$ (unità);
- Esiste , $Z(\;) = \eta \colon W \to k$ (counità);
- Esiste , $Z(\;) \colon W \to W \otimes_k W$ (comoltiplicazione).

Allora commutano...

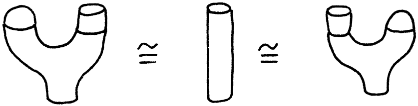


$$\begin{tikzcd} W \otimes k \arrow[r, "\mathrm{id}_W \otimes \epsilon"] \arrow[dr, no head] & W \otimes W \arrow[d, "\mu"] & k \otimes W \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_W"'] \arrow[dl, no head] \\ & W & \end{tikzcd}$$

La filosofia allora è: "se varietà diffeomorfe bordanti sono *lo stesso* cobordismo, opportuni diagrammi associati a quei cobordismi commuteranno".

- Esiste , $Z($$) = \epsilon\colon k \to W$ (unità);
- Esiste , $Z($$) = \eta\colon W \to k$ (counità);
- Esiste , $Z($$)\colon W \to W \otimes_k W$ (comoltiplicazione).

Allora commutano...



$$\begin{tikzcd}
W \otimes k \arrow[r, "\mathrm{id}_W \otimes \epsilon"] \arrow[dr, dash] & W \otimes W \arrow[d, "\mu"] & k \otimes W \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_W"'] \arrow[dl, dash] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

...e opportuni diagrammi duali.

Uno spazio vettoriale W con delle mappe μ, η etc. che fanno commutare i diagrammi sopra è un oggetto noto: è un'algebra di Frobenius.

Uno spazio vettoriale W con delle mappe μ, η etc. che fanno commutare i diagrammi sopra è un oggetto noto: è un'algebra di Frobenius.

Teorema

Ogni TQFT $Z\colon \mathrm{Cob}(2) \to \mathbf{Vec}_k$ *induce su* $Z(\mathbb{S}^1)$ *una struttura di Algebra di Frobenius.*

Dimostrazione.

Vedi [TFA, Prop. 13]. □

Uno spazio vettoriale W con delle mappe μ, η etc. che fanno commutare i diagrammi sopra è un oggetto noto: è un'algebra di Frobenius.

Teorema

Ogni TQFT $Z\colon \mathrm{Cob}(2) \to \mathbf{Vec}_k$ *induce su* $Z(\mathbb{S}^1)$ *una struttura di Algebra di Frobenius.*

Dimostrazione.

Vedi [TFA, Prop. 13]. □

In effetti si ha una equivalenza

$$\{\mathrm{TQFT}_2\} \leftrightarrows \mathbf{Frb}_k$$

Uno spazio vettoriale W con delle mappe μ, η etc. che fanno commutare i diagrammi sopra è un oggetto noto: è un'algebra di Frobenius.

Teorema

Ogni TQFT $Z\colon \mathrm{Cob}(2) \to \mathbf{Vec}_k$ *induce su* $Z(\mathbb{S}^1)$ *una struttura di Algebra di Frobenius.*

Dimostrazione.

Vedi [TFA, Prop. 13]. $\square$

In effetti si ha una equivalenza

$$\{\mathrm{TQFT}_2\} \leftrightarrows \mathbf{Frb}_k$$

- Data una varietà, la si scompone in cobordismi e si associano loro degli invarianti algebrici;

Uno spazio vettoriale W con delle mappe μ, η etc. che fanno commutare i diagrammi sopra è un oggetto noto: è un'algebra di Frobenius.

Teorema

Ogni TQFT $Z\colon \mathrm{Cob}(2) \to \mathbf{Vec}_k$ *induce su* $Z(\mathbb{S}^1)$ *una struttura di Algebra di Frobenius.*

Dimostrazione.

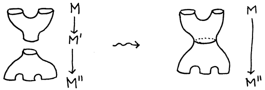
Vedi [TFA, Prop. 13]. $\square$

In effetti si ha una equivalenza

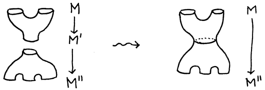
$$\{\mathrm{TQFT}_2\} \leftrightarrows \mathbf{Frb}_k$$

- Data una varietà, la si scompone in cobordismi e si associano loro degli invarianti algebrici;
- Data un'algebra in $\mathbf{Frb}_k$, la si disegna in $\mathrm{Cob}(2)$ (dove gli isomorfismi "si vedono").

Si è già visto che



Si è già visto che

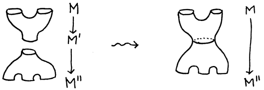


Si può operare "al contrario" tagliando una varietà nota: per esempio il toro : ad esso si associa uno scalare $c\colon k \to k$, calcolabile dalla composizione ($Z(\mathbb{S}^1) = W$)

$$k \to W \to W \otimes W \to W \to k$$

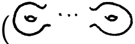
(tutte le mappe sono esattamente quelle trovate prima).

Si è già visto che



Si può operare "al contrario" tagliando una varietà nota: per esempio il toro : ad esso si associa uno scalare $c\colon k \to k$, calcolabile dalla composizione ($Z(\mathbb{S}^1) = W$)

$$k \to W \to W \otimes W \to W \to k$$

(tutte le mappe sono esattamente quelle trovate prima). O in generale, $Z($$)$ si ottiene come composizione $k \to W \to W \otimes W \to \cdots \to W \to k$; la filosofia che vorremmo adottare ora è

> *Tagliare M^n lungo sottovarietà di codimensione 1, suddividendola in sottovarietà amichevoli di dimensione 2.*

. . . e calcolare agilmente tutto quanto concerne M^n.

Vari problemi!

Vari problemi!

- La geometria è "facile" solo in dimensione bassa; se la n in $\mathrm{Cob}(n)$ è troppo grande, perdiamo dei potenti teoremi di classificazione (ogni 2-varietà compatta –orientabile e– orientata è somma connessa di tori o è una sfera).

Vari problemi!

- La geometria è "facile" solo in dimensione bassa; se la n in $\mathrm{Cob}(n)$ è troppo grande, perdiamo dei potenti teoremi di classificazione (ogni 2-varietà compatta –orientabile e– orientata è somma connessa di tori o è una sfera).
- Non c'è motivo apparente per fermarsi alla codimensione 1: data M^n la vorremmo scrivere come somma di sottovarietà di dimensione n, cucite lungo sottovarietà di codimensione 1;

Vari problemi!

- La geometria è “facile” solo in dimensione bassa; se la n in $\mathrm{Cob}(n)$ è troppo grande, perdiamo dei potenti teoremi di classificazione (ogni 2-varietà compatta –orientabile e– orientata è somma connessa di tori o è una sfera).
- Non c’è motivo apparente per fermarsi alla codimensione 1: data M^n la vorremmo scrivere come somma di sottovarietà di dimensione n, cucite lungo sottovarietà di codimensione 1; le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 2;

Vari problemi!

- La geometria è "facile" solo in dimensione bassa; se la n in $\mathrm{Cob}(n)$ è troppo grande, perdiamo dei potenti teoremi di classificazione (ogni 2-varietà compatta –orientabile e– orientata è somma connessa di tori o è una sfera).
- Non c'è motivo apparente per fermarsi alla codimensione 1: data M^n la vorremmo scrivere come somma di sottovarietà di dimensione n, cucite lungo sottovarietà di codimensione 1; le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 2; le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 3;

$$\ldots$$

Vari problemi!

- La geometria è "facile" solo in dimensione bassa; se la n in $\mathrm{Cob}(n)$ è troppo grande, perdiamo dei potenti teoremi di classificazione (ogni 2-varietà compatta –orientabile e– orientata è somma connessa di tori o è una sfera).
- Non c'è motivo apparente per fermarsi alla codimensione 1:
data M^n la vorremmo scrivere come somma di sottovarietà di dimensione n, cucite lungo sottovarietà di codimensione 1;
le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 2;
le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 3;

$$\ldots$$

Arrivati alla dimensione 0, risalire ad M applicando Z.

Vari problemi!

- La geometria è "facile" solo in dimensione bassa; se la n in $\mathrm{Cob}(n)$ è troppo grande, perdiamo dei potenti teoremi di classificazione (ogni 2-varietà compatta –orientabile e– orientata è somma connessa di tori o è una sfera).
- Non c'è motivo apparente per fermarsi alla codimensione 1: data M^n la vorremmo scrivere come somma di sottovarietà di dimensione n, cucite lungo sottovarietà di codimensione 1; le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 2; le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 3;

$$\dots$$

Arrivati alla dimensione 0, risalire ad M applicando Z.

(Vari problemi)^n: Cos'è un cobordismo tra cobordismi?

Vari problemi!

- La geometria è "facile" solo in dimensione bassa; se la n in $\mathrm{Cob}(n)$ è troppo grande, perdiamo dei potenti teoremi di classificazione (ogni 2-varietà compatta –orientabile e– orientata è somma connessa di tori o è una sfera).
- Non c'è motivo apparente per fermarsi alla codimensione 1: data M^n la vorremmo scrivere come somma di sottovarietà di dimensione n, cucite lungo sottovarietà di codimensione 1; le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 2; le quali dovrebbero potersi cucire lungo s.v. di codimensione 3;

$$\dots$$

Arrivati alla dimensione 0, risalire ad M applicando Z.

(Vari problemi)^n: *Nulla* di simile esiste in $\mathrm{Cob}(n)$.

Un approccio è quello *n*-categoriale: (Baez–Dolan $\to \cdots \to$ Lurie.) L'idea è che laddove una TQFT "ordinaria" è determinata dalle corrispondenze

- Varietà chiusa *n*-dim. $\Rrightarrow$ numero complesso;

Un approccio è quello *n*-categoriale: (Baez–Dolan$\to \cdots \to$ Lurie.) L'idea è che laddove una TQFT "ordinaria" è determinata dalle corrispondenze

- Varietà chiusa n-dim. $\Rrightarrow$ numero complesso;
- Varietà chiusa $(n-1)$-dim. $\Rrightarrow$ spazio vettoriale;

Un approccio è quello *n-categoriale*: (Baez–Dolan$\to \cdots \to$ Lurie.) L'idea è che laddove una TQFT "ordinaria" è determinata dalle corrispondenze

- Varietà chiusa n-dim. $\Rrightarrow$ numero complesso;
- Varietà chiusa $(n-1)$-dim. $\Rrightarrow$ spazio vettoriale;
- Cobordismo $B\colon M \rightsquigarrow M'$ tra varietà di dimensione $n-1 \Rrightarrow$ applicazione lineare $Z(M) \to Z(M')$ (se $M = M' = \varnothing$, B è la moltiplicazione per il n.ro complesso trovato in 1);

Un approccio è quello *n-categoriale*: (Baez–Dolan$\to \cdots \to$ Lurie.) L'idea è che laddove una TQFT "ordinaria" è determinata dalle corrispondenze

- Varietà chiusa n-dim. $\Rrightarrow$ numero complesso;
- Varietà chiusa $(n-1)$-dim. $\Rrightarrow$ spazio vettoriale;
- Cobordismo $B\colon M \rightsquigarrow M'$ tra varietà di dimensione $n-1 \Rrightarrow$ applicazione lineare $Z(M) \to Z(M')$ (se $M = M' = \varnothing$, B è la moltiplicazione per il n.ro complesso trovato in 1);

una TQFT "estesa" consisterà degli stessi dati, e in più assegna

- Varietà chiusa $(n-2)$-dim. $\Rrightarrow$ categoria k-lineare (p. es.: $\mathbf{Vec}_k$);

Un approccio è quello *n*-categoriale: (Baez–Dolan$\to \cdots \to$ Lurie.) L'idea è che laddove una TQFT "ordinaria" è determinata dalle corrispondenze

- Varietà chiusa n-dim. $\Rrightarrow$ numero complesso;
- Varietà chiusa $(n-1)$-dim. $\Rrightarrow$ spazio vettoriale;
- Cobordismo $B\colon M \rightsquigarrow M'$ tra varietà di dimensione $n-1 \Rrightarrow$ applicazione lineare $Z(M) \to Z(M')$ (se $M = M' = \varnothing$, B è la moltiplicazione per il n.ro complesso trovato in 1);

una TQFT "estesa" consisterà degli stessi dati, e in più assegna

- Varietà chiusa $(n-2)$-dim. $\Rrightarrow$ categoria k-lineare (p. es.: $\mathbf{Vec}_k$);
- cobordismi tra varietà $(n-2)$-dim. $\Rrightarrow$ funtore monoidale k-lineare...

Un approccio è quello *n-categoriale*: (Baez–Dolan$\to \cdots \to$ Lurie.) L'idea è che laddove una TQFT "ordinaria" è determinata dalle corrispondenze

- Varietà chiusa n-dim. $\Rrightarrow$ numero complesso;
- Varietà chiusa $(n-1)$-dim. $\Rrightarrow$ spazio vettoriale;
- Cobordismo $B\colon M \rightsquigarrow M'$ tra varietà di dimensione $n-1 \Rrightarrow$ applicazione lineare $Z(M) \to Z(M')$ (se $M = M' = \varnothing$, B è la moltiplicazione per il n.ro complesso trovato in 1);

una TQFT "estesa" consisterà degli stessi dati, e in più assegna

- Varietà chiusa $(n-2)$-dim. $\Rrightarrow$ categoria k-lineare (p. es.: $\mathbf{Vec}_k$);
- cobordismi tra varietà $(n-2)$-dim. $\Rrightarrow$ funtore monoidale k-lineare...
- ...

Un approccio è quello *n-categoriale*: (Baez–Dolan$\to \cdots \to$ Lurie.) L'idea è che laddove una TQFT "ordinaria" è determinata dalle corrispondenze

- Varietà chiusa n-dim. $\Rrightarrow$ numero complesso;
- Varietà chiusa $(n-1)$-dim. $\Rrightarrow$ spazio vettoriale;
- Cobordismo $B\colon M \rightsquigarrow M'$ tra varietà di dimensione $n-1 \Rrightarrow$ applicazione lineare $Z(M) \to Z(M')$ (se $M = M' = \varnothing$, B è la moltiplicazione per il n.ro complesso trovato in 1);

una TQFT "estesa" consisterà degli stessi dati, e in più assegna

- Varietà chiusa $(n-2)$-dim. $\Rrightarrow$ categoria k-lineare (p. es.: $\mathbf{Vec}_k$);
- cobordismi tra varietà $(n-2)$-dim. $\Rrightarrow$ funtore monoidale k-lineare...
- ...

Data a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria, una eTQFT (TQFT estesa) consiste di un funtore monoidale $Z\colon (\mathrm{Cob}(n), \coprod) \to (\mathbf{C}, \otimes)$.

- Lurie trova un modo di dare a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria (definendo $e\mathrm{Cob}(n)_{\mathrm{fr}}$) che permette di generalizzare il risultato in [TFA]:

- Lurie trova un modo di dare a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria (definendo $e\mathrm{Cob}(n)_{\mathsf{fr}}$) che permette di generalizzare il risultato in [TFA]:

Teorema (Ipotesi/Teorema di Cobordismo, Lurie 2008)

Se $\mathbf{C}$ è una n-categoria monoidale, sono equivalenti

- *Il dato di un funtore n-monoidale $Z\colon e\mathrm{Cob}(n)_{fr} \to \mathbf{C}$;*

▶ Lurie trova un modo di dare a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria (definendo $e\mathrm{Cob}(n)_{\mathrm{fr}}$) che permette di generalizzare il risultato in [TFA]:

Teorema (Ipotesi/Teorema di Cobordismo, Lurie 2008)

Se $\mathbf{C}$ *è una n-categoria monoidale, sono equivalenti*

- *Il dato di un funtore n-monoidale* $Z\colon e\mathrm{Cob}(n)_{fr} \to \mathbf{C}$*;*
- *Il dato di "un" oggetto* X *di* $\mathbf{C}$*;*

▶ Lurie trova un modo di dare a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria (definendo $e\mathrm{Cob}(n)_{\mathsf{fr}}$) che permette di generalizzare il risultato in [TFA]:

Teorema (Ipotesi/Teorema di Cobordismo, Lurie 2008)

Se $\mathbf{C}$ *è una n-categoria monoidale, sono equivalenti*

- *Il dato di un funtore n-monoidale* $Z\colon e\mathrm{Cob}(n)_{fr} \to \mathbf{C}$*;*
- *Il dato di "un" oggetto* X *di* $\mathbf{C}$*;*

Secondo la corrispondenza $X \rightleftarrows Z(\bullet)$*.*

▶ Lurie trova un modo di dare a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria (definendo $e\mathrm{Cob}(n)_{\mathsf{fr}}$) che permette di generalizzare il risultato in [TFA]:

Teorema (Ipotesi/Teorema di Cobordismo, Lurie 2008)

Se $\mathbf{C}$ *è una n-categoria monoidale, sono equivalenti*

- *Il dato di un funtore n-monoidale* $Z\colon e\mathrm{Cob}(n)_{fr} \to \mathbf{C}$*;*
- *Il dato di "un" oggetto* X *di* $\mathbf{C}$*;*

Secondo la corrispondenza $X \rightleftarrows Z(\bullet)$*.*

▶▶ In un altro approccio (cfr. [DWi]) si propone una differente definizione di TQFT, che associa ad M un opportuno numero razionale, ottenuto a partire da una "G-colorazione" di una sua fissata triangolazione τ.

▶ Lurie trova un modo di dare a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria (definendo $e\mathrm{Cob}(n)_{\mathrm{fr}}$) che permette di generalizzare il risultato in [TFA]:

Teorema (Ipotesi/Teorema di Cobordismo, Lurie 2008)

Se $\mathbf{C}$ *è una n-categoria monoidale, sono equivalenti*

- *Il dato di un funtore n-monoidale* $Z\colon e\mathrm{Cob}(n)_{fr} \to \mathbf{C}$;
- *Il dato di "un" oggetto* X *di* $\mathbf{C}$;

Secondo la corrispondenza $X \rightleftarrows Z(\bullet)$.

▶▶ In un altro approccio (cfr. [DWi]) si propone una differente definizione di TQFT, che associa ad M un opportuno numero razionale, ottenuto a partire da una "G-colorazione" di una sua fissata triangolazione τ.

$$Z(M) = \sum_{G\text{-colorazioni}} \frac{1}{|G|^{|V|}}$$

▶ Lurie trova un modo di dare a $\mathrm{Cob}(n)$ una struttura di n-categoria (definendo $e\mathrm{Cob}(n)_{\mathsf{fr}}$) che permette di generalizzare il risultato in [TFA]:

Teorema (Ipotesi/Teorema di Cobordismo, Lurie 2008)

Se $\mathbf{C}$ *è una n-categoria monoidale, sono equivalenti*

- *Il dato di un funtore n-monoidale* $Z\colon e\mathrm{Cob}(n)_{fr} \to \mathbf{C}$;
- *Il dato di "un" oggetto* X *di* $\mathbf{C}$;

Secondo la corrispondenza $X \rightleftarrows Z(\bullet)$.

▶▶ In un altro approccio (cfr. [DWi]) si propone una differente definizione di TQFT, che associa ad M un opportuno numero razionale, ottenuto a partire da una "G-colorazione" di una sua fissata triangolazione τ.

$$Z(M) = \sum_{G\text{-colorazioni}} \frac{1}{|G|^{|V|}}$$

G gruppo finito, $|V| = \#$vertici di τ (ben def $\Leftarrow$ mosse di Pachner.)

Per riassumere, possiamo trovare analogie e differenze tra la teoria delle TQFT e quella dell'omologia (negli assiomi di Eilenberg–Steenrod)

$H_n(-)$ (Eilenberg)	$Z(-)$ (Atiyah)
$(X, Y) \in \mathbf{Top}^2 \colon Y \subseteq X$	$(M, \Sigma) \in \mathbf{Top}^2 \colon \Sigma \cong \partial M$

Per riassumere, possiamo trovare analogie e differenze tra la teoria delle TQFT e quella dell'omologia (negli assiomi di Eilenberg–Steenrod)

$H_n(-)$ (Eilenberg)	$Z(-)$ (Atiyah)
$(X, Y) \in \mathbf{Top}^2 \colon\ Y \subseteq X$	$(M, \Sigma) \in \mathbf{Top}^2 \colon \Sigma \cong \partial M$
$H_\bullet(-) \colon \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}$	$Z \colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$

Per riassumere, possiamo trovare analogie e differenze tra la teoria delle TQFT e quella dell'omologia (negli assiomi di Eilenberg–Steenrod)

$H_n(-)$ (Eilenberg)	$Z(-)$ (Atiyah)
$(X, Y) \in \mathbf{Top}^2 \colon Y \subseteq X$	$(M, \Sigma) \in \mathbf{Top}^2 \colon \Sigma \cong \partial M$
$H_\bullet(-) \colon \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}$	$Z \colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$
$X \amalg X' \rightsquigarrow H(X) \oplus H(X')$	$Z(M \amalg M') \cong Z(M) \otimes Z(M')$

Per riassumere, possiamo trovare analogie e differenze tra la teoria delle TQFT e quella dell'omologia (negli assiomi di Eilenberg–Steenrod)

$H_n(-)$ (Eilenberg)	$Z(-)$ (Atiyah)
$(X, Y) \in \mathbf{Top}^2 \colon Y \subseteq X$	$(M, \Sigma) \in \mathbf{Top}^2 \colon \Sigma \cong \partial M$
$H_\bullet(-) \colon \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}$	$Z \colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$
$X \amalg X' \rightsquigarrow H(X) \oplus H(X')$	$Z(M \amalg M') \cong Z(M) \otimes Z(M')$
Escissione:	**Incollamento**:

Per riassumere, possiamo trovare analogie e differenze tra la teoria delle TQFT e quella dell'omologia (negli assiomi di Eilenberg–Steenrod)

$H_n(-)$ (Eilenberg)	$Z(-)$ (Atiyah)
$(X, Y) \in \mathbf{Top}^2 \colon Y \subseteq X$	$(M, \Sigma) \in \mathbf{Top}^2 \colon \Sigma \cong \partial M$
$H_\bullet(-) \colon \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}$	$Z \colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$
$X \amalg X' \rightsquigarrow H(X) \oplus H(X')$	$Z(M \amalg M') \cong Z(M) \otimes Z(M')$
Escissione:	**Incollamento**:
$\bullet \mapsto \mathbb{Z}$	$\varnothing \mapsto k$

Per riassumere, possiamo trovare analogie e differenze tra la teoria delle TQFT e quella dell'omologia (negli assiomi di Eilenberg–Steenrod)

$H_n(-)$ (Eilenberg)	$Z(-)$ (Atiyah)
$(X, Y) \in \mathbf{Top}^2 \colon Y \subseteq X$	$(M, \Sigma) \in \mathbf{Top}^2 \colon \Sigma \cong \partial M$
$H_\bullet(-) \colon \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}$	$Z \colon \mathrm{Cob}(n) \to \mathbf{Vec}_k$
$X \amalg X' \rightsquigarrow H(X) \oplus H(X')$	$Z(M \amalg M') \cong Z(M) \otimes Z(M')$
Escissione:	**Incollamento**:
$\bullet \mapsto \mathbb{Z}$	$\varnothing \mapsto k$
Esiste una "connessione" $H_n \to H_{n-1}$	$\leftarrow$ Nulla del genere
Si applica a varie sottocategorie di **Top**	Si applica *solo* a $\mathrm{Cob}(n)$...


QUESTA "NEOMATEMATICA" E` TROPPO PER ME!
CE LA FARAI... E` SOLO QUESTIONE DI TEMPO!
IO NO... NON CE LA FARO` MAI!
COME FAI A FARE PROBLEMI DI "NEOMATEMATICA" CON UNA MENTE "PALEOMATEMATICA"?
© 1964 Peanuts Worldwide LLC, Dist. by Universal Uclick
www.snoopy.com

Bibliografia.

- M. Atiyah (1988), *Topological quantum field theories*, Publications Mathématiques de l'IHÉS 68.
- R. Dijkgraaf, E. Witten *Topological gauge theories and group cohomology*, Commun. Math. Phys 129 (1990) 393-429.
- Lowell Abrams, *Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius Algebras*, J. Knot Theory Ramifications, 5 (1996).
- J. Lurie, *On the Classification of Topological Field Theories.*
- S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer—Verlag 1971.