# ALCUNI ESERCIZI DI TEORIA DELLE CATEGORIE

FOSCO LOREGIAN

**Problems and Exercises.** Many authors of textbooks assert that the only way to learn the subject is to do the exercises. I have taken this to heart, and so *there are no outright proofs in the book.* Instead, theorems are followed by multi-part problems that guide the readers to find the proofs for themselves. To the expert, these problems will read as terse proofs, perhaps suitable for exposition in a journal article. Reading this text, then, is a preparation for the experience of reading research articles. There are also a great many other problems incorporated into the main flow of the text, problems that develop interesting tangential results, explore applications, or carry out explicit calculations.

J. Strom, *Modern classical homotopy theory*

29 giugno 2017

**Sullo spirito di questi esercizi.** Questi sono esercizi nati per essere *formativi*, nel senso precisato dalla citazione in apertura.

Non c'è un ordine particolare nella loro esposizione perché darglielo mi avrebbe preso troppo tempo che rubo a imparare altre cose (ad esempio, a fare degli esercizi per poi metterli qui dentro). Essi non sono ordinati per difficoltà crescente e spesso una domanda relativa a una sezione iniziale richiede conoscenze (definizioni, abilità o lemmi preliminari) intrinsecamente dipendenti da risultati localizzati molto più in là. Di nuovo, gestire questo problema avrebbe richiesto un tempo che non possiedo.

Lungi dall'essere un difetto, però, questa peculiarità del testo dimostra l'assenza di una struttura piramidale nella materia (insieme alla sua vastità), dato che alcuni risultati relativi a costruzioni preliminari sono però tanto sottili da poter essere apprezzati solo con una terminologia più raffinata: saper fare questo lavoro di continuo passaggio "top $\leftrightarrows$ bottom" è un elemento essenziale nella formazione di un individuo fluente nel linguaggio categoriale.

Per la loro soluzione, l'approccio più sensato è "stendere la vernice": si leggono tutti gli enunciati, ignorando quei problemi che non si hanno ancóra le conoscenze adatte a capire. Si risolvono quegli esercizi per cui le si hanno. Intanto si continua a studiare tenendo a fianco un libro di testo (ce ne sono di ottimi): l'insieme di problemi comprensibili cresce nel tempo, così come le competenze e la manualità per affrontarne di sempre più difficili.

Ciascun esercizio è numerato e ha un quadratino bianco a lato: è evidente a cosa serve questo quadratino.

Ogni suddivisione dell'universo è arbitraria e congetturale: la teoria delle categorie non fa eccezione, e quindi arbitraria e congetturale è la suddivisione in argomenti del materiale. Dovendo scegliere, seguo le macro-sezioni dell'unico corso di teoria delle categorie offerto (al momento) da un'università italiana, ma aggiungo altro materiale per argomenti che sono imprescindibili secondo il mio gusto. Queste sezioni "non standard" sono segnate con titoli in rosso, e solitamente gli esercizi relativi ad esse sono più difficili (il che non significa che gli altri siano semplici).

Infine, queste note sono in italiano, perché la matematica italiana ha un estremo, ardente bisogno di teoria delle categorie, ma anche per rendermi più veloce la loro redazione.

Buon lavoro.

## Indice



## 1. Categorie e Funtori

**Esercizi §1**

☐ 1 Caratterizzare quali omomorfismi di *monoidi* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ sono funtori pieni, fedeli, conservativi guardando dominio e codominio come categorie.

☐ 2 Caratterizzare quali omomorfismi di *poset* $f : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ sono funtori pieni, fedeli, conservativi guardando dominio e codominio come categorie.

☐ 3 Dimostrare la regola di interscambio per trasformazioni naturali:

nel diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\gamma"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "F'"] \arrow[r, "G'" description] \arrow[r, bend right=60, "H'"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha'"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\gamma'"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

la composizione $(\gamma' \bullet \gamma) \circ (\alpha' \bullet \alpha)$ è uguale alla composizione $(\gamma' \circ \alpha') \bullet (\gamma \circ \alpha)$ dove per due trasformazioni naturali $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$ definiamo la composizione $\circ$ o "verticale" sulle rispettive componenti, e la composizione $\bullet$ o "orizzontale" con la regola

$$\beta \bullet \alpha \colon HF \Rightarrow KG$$
$$(\beta \bullet \alpha)_C = \beta_{GC} \circ H\alpha_C$$

Dimostrare che si poteva definire alternativamente $(\beta \bullet \alpha)_C = K\alpha_C \circ B_{FC}$.

☐ 4 Ricordate che una categoria è *well-powered* ("ben potenziata"?) se nessun oggetto ha una classe propria di (classi di equivalenza di) sottoggetti. Dimostrare che ogni categoria well-powered, dove in più ogni morfismo è un monomorfismo, ammette un funtore conservativo verso **Set**.

☐ 5 (spezzamento) Dimostrare che una categoria ammette un funtore fedele e conservativo verso **Set** *se e solo se* ne ammette uno fedele e uno conservativo.

☐ 6 Che relazione c'è tra il coprodotto di monoidi e il coprodotto di monoidi guardati come categorie? Da ciò, si può dedurre che il funtore $U$ : **Mon** $\to$ **Cat** non può avere un aggiunto sinistro; ha un aggiunto destro?

☐ 7 Esiste un funtore **Pos** $\to$ **Cat** la cui azione è tautologica, che manda ogni poset in sé stesso riguardandolo come categoria. Questo funtore è pienamente fedele e ha un aggiunto sinistro: ne ha uno destro? Descrivere l'azione di quelli che esistono su oggetti e morfismi.

☐ 8 Dimostrare che la categoria $\mathcal{C}/C$ delle frecce sopra $C \in \mathcal{C}$ ha un oggetto terminale; ne ha uno iniziale? Dimostrare che la categoria delle frecce sotto $C$, $C/\mathcal{C}$ ha un oggetto iniziale; ne ha uno terminale?

☐ 9 Dimostrare che la categoria degli insiemi e funzioni parziali ($f : X \to Y$ è una funzione definita su un qualche $X' \subseteq X$ verso $Y$) è equivalente alla categoria degli insiemi puntati e funzioni che rispettano il punto, $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ tali che $f(x_0) = y_0$.

Resta vero quando invece di funzioni parziali e funzioni puntate si considerano funzioni *continue* parziali, e funzioni *continue* che rispettano il punto? (il punto di questo esercizio è anche formalizzare con attenzione chi sono oggetti e morfismi della categoria $\mathbf{Set}_{\mathrm{p}}$ dei morfismi parziali.)

☐ 10 Resta vero il risultato dimostrato prima quando si prende una generica categoria di oggetti "puntati", ovvero $*/\mathcal{C}$ se $* \in \mathcal{C}$ è l'oggetto terminale, e si cerca un funtore verso/da una categoria di "morfismi parziali" ? Se sì, come definirla?

☐ 11 *L'esercizio in cui si dimostra che ogni categoria ha uno scheletro.* Usando l'assioma della scelta, dimostrare che per ogni categoria $\mathcal{C}$ esiste una sottocategoria $\mathbf{sk}(\mathcal{C})$ tale per cui due oggetti isomorfi in $\mathbf{sk}(\mathcal{C})$ sono uguali; questa categoria si dice *scheletro* di $\mathcal{C}$.

(1) Dimostrare che l'inclusione $\mathbf{sk}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ è un funtore che ammette un aggiunto sinistro, e che forma un'equivalenza di categorie.

(2) Dimostrare che il quadrato

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sk}(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & \mathbf{sk}(\mathcal{D}) \arrow[d, hook] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

indotto da un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ commuta a meno di un isomorfismo naturale.

(3) Dimostrare che $\mathbf{sk}$ è un funtore $\mathbf{Cat} \to \mathbf{skCat}$ verso le categorie *scheletali*, ovvero quelle che hanno la proprietà per cui oggetti isomorfi sono uguali; è vero che un funtore verso una categoria scheletale è un'equivalenza se e solo se è un isomorfismo di categorie? E' vero che $\mathbf{sk}$ fa da aggiunto all'inclusione piena $\mathbf{skCat} \hookrightarrow \mathbf{Cat}$? Destro o sinistro?

(4) $\mathbf{sk}$ è l'esempio standard di una *monade di Kock-Zöberlein*, ovvero una 2-monade su una 2-categoria $\mathcal{K}$, $T : \mathcal{K} \to K$ tale che tutte le componenti della sua unità $\eta_K : K \to TK$ siano equivalenze. Questo non è un esercizio ma solo un pretesto per scrivere questo nome buffo.

☐ 12 La categoria comma di un cospan $\mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{T}$ è la categoria che ha per oggetti le terne $(s, t, \phi : Fs \to Gt)$ e per morfismi le coppie $(s \to s',\ t \to t')$ che fanno commutare ovvi quadrati. Si denota $(F \downarrow G)$.

- Dimostrare che questa è davvero una categoria;
- Chi è la categoria $(\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \downarrow G)$ (dirne oggetti e morfismi)?
- Chi è la categoria $(\Delta_C \downarrow G)$, dove $\Delta_C$ è il funtore costante in $C \in \mathcal{C}$?
- Che relazione c'è tra $(F \downarrow G)$ e $(G \downarrow F)$?

- La categoria *iso-comma* di $F$ e $G$ è data dalla stessa definizione di $(F \downarrow G)$, solo che il morfismo $Fs \to Gt$ è invertibile; si indica $[F \downarrow G]$. Che relazione c'è, ora, tra $[F \downarrow G]$ e $[G \downarrow F]$?
- Dimostrare che si possono definire due funtori di "proiezione generalizzata" $\mathcal{S} \xleftarrow{p_S} (F \downarrow G) \xrightarrow{p_T} \mathcal{T}$; il quadrato

$$\begin{tikzcd} (F \downarrow G) \arrow[r, "p_S"] \arrow[d, "p_T"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

  è commutativo?
- Consideriamo il funtore $J_1 : (F \downarrow G) \xrightarrow{p_S} \mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$. Chi è la categoria $(J_1 \downarrow G)$? La composizione delle proiezioni generalizzate nel triangolo $\star$ è uguale alla singola proiezione $(J_1 \downarrow G) \to \mathcal{T}$ (cioè il triangolo è commutativo)?

$$\begin{tikzcd} (J_1 \downarrow G) \arrow[r, "q_{(F\downarrow G)}"] \arrow[dr, "q_T"'] & (F \downarrow G) \arrow[r, "p_S"] \arrow[d, "p_T"] \arrow[dl, phantom, "\star"] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{T} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

- Si può descrivere $(F \downarrow G)$ attraverso una opportuna proprietà universale?

Descrivere la categoria *cocomma* di un cospan $\mathcal{B} \xleftarrow{F} \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$, dualizzando la definizione di categoria comma; dualizzare le domande precedenti: la proprietà universale dell'ultimo punto viene dualizzata?

☐ 13 La *categoria degli elementi* $\mathrm{Elts}(F)$ di un funtore $F \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ è definita avendo come oggetti le coppie $(C, x \in FC)$; definire i morfismi nel modo ovvio e verificare tediosamente che questa è una categoria. Verificare che queste caratterizzazioni sono equivalenti:

(1) $\mathrm{Elts}(F)$ è il pullback (in $\mathbf{Cat}$) del diagramma

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Set}_* \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

dove il funtore $U$ dimentica che un insieme puntato $(X, x_0)$ possiede un punto.

(2) $\mathrm{Elts}(F)$ è l'opposto della categoria comma $(y \downarrow \langle F \rangle)$, dove $y$ è l'embedding di Yoneda e $\langle F \rangle$ è il *nome* di $F$, ovvero l'unico funtore $\{*\} \to [\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$ la cui immagine è $F$.

(3) $\mathrm{Elts}(F)$ è la categoria comma del diagramma $\{*\} \xrightarrow{k} \mathbf{Set} \xleftarrow{F} \mathcal{C}$, dove $k$ è il funtore che manda l'unico oggetto nell'insieme con un solo elemento.

☐ 14 Mostrare la seguente proprietà dell'ovvio funtore $\Phi : \mathrm{Elts}(F) \to \mathcal{C}$: dato un diagramma del tipo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & \mathrm{Elts}(F) \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

in **Cat**, se $\Phi * \alpha = 1_G$, dove $G = \Phi F = \Phi F'$, allora $\alpha$ è una trasformazione naturale invertibile.

☐ 15 Mostrare o confutare che per ogni categoria $\mathcal{C}$ c'è un isomorfismo tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Se è falso, c'è un esempio in cui è vero?

☐ 16 Dato $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, esiste un pullback in **Cat**

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}(F) \arrow[r, "(P_\mathcal{A}, P_\mathcal{B})"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{A} \times \mathcal{B} \arrow[d, "F \times \mathcal{B}"] \\ \mathcal{B}^{\cong} \arrow[r, "(\partial_1, \partial_0)"] & \mathcal{B} \times \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

dove $\mathcal{B}^{\cong}$ è la *categoria degli isomorfismi* di $\mathcal{B}$, e $(\partial_1, \partial_0)$ manda una freccia $b \to b'$ nella coppia dominio / codominio.

☐ 17 Sia $\mathcal{C}$ una categoria; consideriamo la relazione di equivalenza sugli oggetti di $\mathcal{C}/A$ definita da

$$(f : X \to A) \asymp (g : Y \to A) \quad \text{sse} \quad \forall u : A \to B,\ uf \text{ è iso} \iff ug \text{ è iso.}$$

Dimostrare che se $f \cong f'$ in $\mathcal{C}/A$ allora le classi di $\asymp$-equivalenza $[f]_\asymp$ e $[f']_\asymp$ coincidono.

☐ 18 Definire un funtore $T : \mathcal{C} \to \mathbf{Set} : A \mapsto \Big(\coprod_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(X, A)\Big)/_\asymp$; dimostrare che questo funtore riflette gli isomorfismi.

☐ 19 La *categoria dei simplessi*, denotata con $\mathbf{\Delta}$, è definita come la categoria che ha

- Per oggetti gli insiemi finiti, non vuoti e totalmente ordinati: l'oggetto tipico di $\mathbf{\Delta}$ viene indicato con $[n] = \{0 < \cdots < n\}$, di modo che $[0]$ ne sia l'oggetto terminale;
- Per morfismi $[n] \to [m]$ le funzioni monotone.

Se dentro a $\mathbf{\Delta}$ isoliamo

- Tutte le funzioni iniettive $\delta_{n,k} : [n-1] \to [n]$ la cui immagine non contiene $k$ (sono esattamente $n+1$, per ogni $[n] \in \mathbf{\Delta}$ e si chiamano *co-facce*);
- Tutte le funzioni suriettive $\sigma_{n,k} : [n+1] \to [n]$ che assumono due volte il valore $k$ (sono esattamente $n+1$, per ogni $[n] \in \mathbf{\Delta}$ e si chiamano *co-degenerazioni*);

otteniamo che ogni $f : [m] \to [n]$ si scrive come una composizione

$$f = \delta_{n_1,k_1} \circ \cdots \circ \delta_{n_r,k_r} \circ \sigma_{m_1,h_1} \circ \cdots \circ \sigma_{m_s,h_s}$$

per certi indici $n_i, m_j$ e $0 \le k_i \le n_i, 0 \le h_j \le m_j$.

Esplicitare questi indici in funzione dell'azione di $f$, e mostrare che le funzioni $\delta_{n,k}$ e $\sigma_{n,k}$ soddisfano le *relazioni cosimpliciali*, ovvero che i seguenti diagrammi sono commutativi:

(1)

$$\begin{tikzcd} {[n-1]} \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "\delta_{j-1}"'] \arrow[dr, phantom, "i<j"] & {[n]} \arrow[d, "\delta_j"] \\ {[n]} \arrow[r, "\delta_i"'] & {[n+1]} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} {[n-1]} \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "\sigma_j"'] \arrow[dr, phantom, "i<j"] & {[n]} \arrow[d, "s^j"] \\ {[n-2]} \arrow[r, "\delta_i"'] & {[n-1]} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} {[n-1]} \arrow[r, "\delta_j"] \arrow[d, "\delta_{j+1}"'] & {[n]} \arrow[d, "\sigma_j"] \\ {[n]} \arrow[r, "\sigma_j"'] & {[n-1]} \end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} {[n-1]} \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "\sigma_j"'] \arrow[dr, phantom, "i>j+1"] & {[n]} \arrow[d, "\sigma_j"] \\ {[n-2]} \arrow[r, "\delta_{i-1}"'] & {[n-1]} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} {[n+1]} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\sigma_i"'] \arrow[dr, phantom, "i\leq j"] & {[n]} \arrow[d, "\sigma_j"] \\ {[n]} \arrow[r, "\sigma_{j+1}"'] & {[n-1]} \end{tikzcd}$$

Dimostrare che i quadrati contenenti le degenerazioni sono *pushout assoluti*: significa che ogni funtore $F\colon \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$ manda quei quadrati in pushout. Dualmente, i quadrati contenenti le degenerazioni sono *pullback assoluti*: significa che ogni funtore $G\colon \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$ manda quei quadrati in pullback.

□ 20 La categoria **DGph** ha per oggetti i grafi orientati $\boldsymbol{G}$ (piccoli in un universo $\mathcal{U}$) e per morfismi le mappe di grafo $F\colon \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ (funzioni che mandano vertici in vertici e lati in lati, rispettando il direzionamento dei lati). Mostrare che esiste un funtore dimenticante $U\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{DGph}$, che ha un aggiunto sinistro $\Phi\colon \mathbf{DGph} \to \mathbf{Cat}$, che restituisce la *categoria libera* su un dato grafo.

Descrivere l'azione di $\Phi$ su oggetti e morfismi e mostrare la biiezione naturale

$$\mathbf{Cat}(\Phi(\boldsymbol{G}), \mathcal{C}) \cong \mathbf{DGph}(\boldsymbol{G}, U\mathcal{C})$$

trovandone unità e counità.

□ 21 Definiamo la categoria libera generata da co-facce e co-degenerazioni come l'immagine mediante $\Phi$ del grafo $\boldsymbol{\nabla}$ che ha

- come vertici gli insiemi finiti e totalmente ordinati $\{0 < \dots < n\}$ per ogni $n \geq 0$;
- come lati orientati le funzioni $\delta_{n,k}$ e $\sigma_{n,k}$, per ogni $0 \leq k \leq n$ ed ogni $n \geq 0$.

Mostrare che esiste un funtore $F : \Phi(\boldsymbol{\nabla}) \to \mathbf{\Delta}$ che fattorizza attraverso il quoziente di $\Phi(\boldsymbol{\nabla})$ rispetto alle relazioni cosimpliciali con $\bar{F}$. Questo funtore $\bar{F}$ è un isomorfismo di categorie: questo dimostra che la categoria $\mathbf{\Delta}$ si può caratterizzare come quoziente di una categoria libera (esattamente il grafo generato dalle facce e dalle degenerazioni) modulo le relazioni cosimpliciali.

□ 22 La categoria degli *insiemi simpliciali* è definita come la categoria $[\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ dei funtori controvarianti (prefasci) su $\mathbf{\Delta}$.

Mostrare che un insieme simpliciale consta equivalentemente di una collezione di insiemi $(X_n \mid n \geq 0)$ (un *insieme graduato*) assieme a mappe

$$d_{n,i}\colon X_n \to X_{n-1} \qquad s_{n,j}\colon X_n \to X_{n+1}, \qquad 0 \leq i, j \leq n$$

(rispettivamente le *facce* e *degenerazioni* di $X$) che soddisfano le *identità simpliciali*

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & i < j \\ d_j s_j = \mathrm{id} = d_{j+1} s_j & \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & i > j+1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & i \leq j \end{cases}$$

(disegnare opportuni diagrammi; mostrare che esiste un'isomorfismo di categorie tra **sSet** e un'opportuna categoria definita ad hoc da questo esercizio, che è quoziente di una categoria libera. . . ).

Nel seguito utilizzeremo liberamente, e senza ulteriore spiegazione, questa identificazione. Gli elementi di $X_n$ sono detti *$n$-simplessi* di $X$.

Mostrare che una mappa simpliciale (per definizione, una trasformazione naturale tra funtori $X \to Y\colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$) consta di una funzione di insiemi graduati $(f_n)\colon (X_n) \to (Y_n)$ che "rispettano" facce e degenerazioni.

## 2. Proprietà universali

**Esercizi §2**

☐ 1 Descrivere prodotti, coprodotti, pullback nelle seguenti categorie
(1) **Pos**, poset e mappe monotone tra loro;
(2) **Cat**, la (1-)categoria di categorie e funtori;
(3) $k$-**vect**, gli spazi vettoriali di dimensione finita su $k$ e mappe lineari tra loro;
(4) $k$-**Vect**, gli spazi vettoriali su $k$ e mappe lineari tra loro;
(5) Le commæ[a] $\mathbf{Set}/X$ e $X/\mathbf{Set}$; $\mathcal{C}/\mathbf{Cat}$ e $\mathbf{Cat}/\mathcal{C}$.

☐ 2 Mostrare che il diagramma

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & U \cup V \end{tikzcd}$$

in **Set** è un pullback e un pushout. Dimostrare che se $\mathcal{C}$ è una categoria con limiti e colimiti finiti, tale per cui *ogni* quadrato commutativo è un pullback se e solo se è un pushout, allora $\mathcal{C}$ è equivalente alla categoria terminale.

□ 3 Mostrare che il pullback di un monomorfismo è ancora un monomorfismo, in **Set**, e che il pushout di un epimorfismo è ancora un epimorfismo. È vero anche in **Top**? È vero anche in **Cat** (chi sono gli epimorfismi?)?

□ 4 Definire il funtore $e^{(-)}\colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$ che manda $V$ in

$$e^V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{V^{\otimes n}}{\mathrm{Sym}(n)}$$

dove $V^{\otimes n}$ è il prodotto tensoriale $V \otimes \cdots \otimes V$, e $\frac{V^{\otimes n}}{\mathrm{Sym}(n)}$ il quoziente rispetto all'azione di $\mathrm{Sym}(n)$ che permuta le coordinate. E' vero che che $e^{V \oplus W} \cong e^V \otimes e^W$?

□ 5 Dimostrare che quando $V$ ha dimensione finita, $e^V \cong k[X_1, \dots, X_n]$, l'anello dei polinomi in $n = \dim V$ indeterminate. E' vero che $e^V$ è sempre una $k$-algebra?

□ 6 Dimostrare che per ogni insieme $J$ e ogni funtore $J \to k\text{-}\mathbf{Vect}\colon j \mapsto V_j$ esiste il prodotto tensoriale $\bigotimes_{j\in J} V_j$; descriverne la proprietà universale.

□ 7 Sia $J = \mathbb{N}$, e si consideri $K = \bigotimes_{n\in J} k$. È vero che $K \cong k$?

□ 8 *Supervarietà.* Un *superspazio vettoriale* è uno spazio vettoriale *graduato su* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ovvero decomposto in una somma diretta $V = V_0 \oplus V_1$; gli elementi della forma $(v, 0)$ si dicono *pari*, e gli elementi della forma $(0, v)$ si dicono *dispari*. I morfismi di superspazi vettoriali sono le mappe lineari $f : V \to W$ che rispettano la parità di elementi.

(1) Definire la *dimensione* di $V \in \mathbf{SVec}$ come $\dim V = \dim V_0 - \dim V_1$. Definire la somma e l'intersezione di sottospazi (o mostrare che non sempre esiste), e dire se vale ancora la formula di Grassmann.
(2) Definire prodotti e coprodotti finiti, equalizzatori, coequalizzatori di mappe in **SVec**.
(3) Il *prodotto tensoriale* $V \otimes_{\mathbf{s}} W$ di due superspazi vettoriali $V, W$ è il consueto spazio vettoriale $V \otimes W$ con la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduazione

$$(V \otimes W)_l = \bigoplus_{i+j=l \mod 2} V_i \otimes W_j$$

Con questa definizione $\otimes\colon \mathbf{SVec}_k \to \mathbf{SVec}_k$ visibilmente un funtore additivo in ciascuna delle due variabili.
(4) Mostrare che esiste un oggetto $J \in \mathbf{SVec}$ tale che $J \not\cong k$ e $J \otimes J \cong k$.
(5) Definire i funtori $\sin, \cos : \mathbf{SVec} \to \mathbf{SVec}$; utilizzando la precedente definizione di mappa esponenziale, è vero che $\cos(V) \oplus J \otimes \sin(V) \cong e^{J \otimes V}$?

☐ 9 Una *superalgebra* è un oggetto monoide in **SVec**. Definire un morfismo di superalgebre. Definire una superalgebra *commutativa*: come dipende la parità di un prodotto dalla parità dei fattori?

(1) Sia $A$ una $k$-algebra "classica". Definire il supermodulo $A^{p|q}$ liberamente generato da $p$ elementi pari e $q$ elementi dispari; dimostrare che vale
$$A^{p|q} \cong A \otimes k[e_1, \dots, e_p] \otimes \bigwedge k^q$$
(il prodotto tensore è l'usuale di spazi vettoriali).

(2) Se chiamiamo $\mathcal{C}^\infty$ il fascio delle funzioni $C^\infty$ su $\mathbb{R}^p$, definiamo la supervarietà "lego" $\mathbb{R}^{p|q}$, uguale a $\mathbb{R}^p$ col fascio $\mathcal{C}^\infty[\theta_1, \dots, \theta_q]$, generato su $\mathcal{C}^\infty$ dalle $q$ quantità dispari $\theta_i$. Una supervarietà di dimensione $p|q$ sarà allora uno spazio topologico $M$ equipaggiato di un fascio di $\mathbb{R}$-superalgebre localmente isomorfo a $\mathbb{R}^{p|q}$. Il suo fascio strutturale viene chiamato $\mathcal{O}_M$.
Le funzioni dispari generano un ideale $\mathfrak{j}$ di $\mathcal{O}_M$; mostrare che è un ideale nilpotente. Lo spazio $M$ col fascio quoziente $\mathcal{O}_M/\mathfrak{j}$ e' una varietà $C^\infty$ di dimensione $p$ (ossia c'e' un isomorfismo di spazi anellati $(M, \mathcal{O}_M/\mathfrak{j}) \cong (\mathbb{R}^p, \mathcal{C}^\infty)$). Questa si chiama la *varietà ridotta* di $M$, e il suo fascio strutturale si scrive $\mathcal{O}_M^{\text{red}}$.

[a] *Comma* va preso qui nella accezione latina di "sezione di un verso": ciascuna $\mathcal{C}/X$ è la fibra di un funtore $E(\chi) \to \mathcal{C}$, dove $\chi : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}$ manda $X$ in $\mathcal{C}/X$.

## 3. Funtori rappresentabili

**Esercizi §3**

☐ 1 La proprietà universale dell'embedding di Yoneda: sia $\mathcal{C}$ una categoria piccola, e $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ un funtore. Mostrare che $F$ si estende in modo canonico ad un funtore $\hat{F} = \mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$, che ha per aggiunto destro il funtore che manda $X$ in $\lambda c.\mathbf{Set}(Fc, X)$.

☐ 2 Mostrare che questo risultato è parte di una equivalenza di categorie
$$\mathrm{LAdj}([\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}], \mathbf{Set}) \cong \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$$
(vedere l'esercizio 5.6 per la notazione LAdj) indotta dalla precomposizione con il funtore di Yoneda, $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$.

☐ 3 Dedurne che la categoria $\mathrm{Iso}(\mathbf{Set}, \mathbf{Set})$ delle autoequivalenze di **Set** è equivalente alla categoria terminale.

☐ 4 Descrivere il funtore di Yoneda, e la sua proprietà di piena fedeltà in $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ in ciascuno dei casi seguenti:

(1) per un gruppo $G$; chi è la categoria dei prefasci $[G^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$?
(2) per un poset $P$; chi è la categoria dei prefasci $[P^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$?

(3) Se $P$ è un poset, farlo per la categoria $[[P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$; chiamando $y : A \to [A^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$, studiare la sequenza

$$P \xrightarrow{y} [P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{y} [[P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{y} \dots$$

☐ 5 Definire un funtore $\iota\colon \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$ (la *realizzazione geometrica*) mediante la regola

$$[n] \mapsto |\Delta[n]|$$

dove $|\Delta[n]| \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è il *simplesso geometrico standard* ottenuto da tutte le $(n+1)$-uple di reali $(x_0, \dots, x_n)$ tali che $x_i \geq 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$ e $\sum_i x_i = 1$.

- Definire coerentemente una corrispondenza sui morfismi $f\colon [n] \to [m]$ che rende $\iota$ un vero funtore
- Le mappe $\delta_{n,k}$ e $\sigma_{n,k}$ vengono mandate da $\iota$ in funzioni continue di $\mathbb{R}^{n+1}$ rispetto alla topologia euclidea. Scrivere queste trasformazioni. Si tratta di trasformazioni affini di $\mathbb{R}^{n+1}$?

☐ 6 Definiamo un funtore $\mathfrak{Sy}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$ che manda uno spazio topologico in un insieme simpliciale $\mathfrak{Sy}(Y)$ che ha per insieme degli $n$-simplessi

$$\mathfrak{Sy}(Y)_n = \mathbf{Top}(|\Delta[n]|, Y)$$

i.e. l'insieme delle mappe continue dal $n$-simplesso topologico standard verso $Y$; questi $n$-simplessi si organizzano nel *complesso singolare* di $Y$.

Consideriamo il funtore $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ che manda un insieme nel gruppo abeliano libero su quell'insieme, ovvero nel gruppo abeliano $\mathbb{Z}^{(A)}$che ha tante copie di $\mathbb{Z}$ quanti elementi dell'insieme $A$. Consideriamo ora il diagramma

$$F(Y_0) \xleftarrow{D_1} F(Y_1) \xleftarrow{D_2} F(Y_2) \leftarrow \dots$$

dove $D_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_{n,i}$. Mostrare che la composizione $D_n \circ D_{n+1} = 0$, e che dunque questo risulta essere un complesso di catene, i cui gruppi di omologia denotiamo $H_n(\mathfrak{Sy}(Y))$.

Questi sono esattamente i gruppi di *omologia singolare* dello spazio $Y$.

☐ 7 Mostrare che il funtore $|\_|$ e $\mathfrak{Sy}$ sono rispettivamente aggiunto sinistro e destro di una aggiunzione; dedurne che $|\_|$ commuta coi colimiti e $\mathfrak{Sy}$ commuta coi limiti. Mostrare che $\mathfrak{Sy} \cong \mathrm{Lan}_\iota(y)$, dove $\iota$ è stato definito sopra, e $y : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{sSet}$ è l'embedding di Yoneda.

☐ 8 Definiamo un funtore $N\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}$ che manda la categoria $\mathcal{C}$ nell'insieme simpliciale $N\mathcal{C}$ che ha per $n$-simplessi le tuple di $n$ morfismi tra loro componibili:

- $N\mathcal{C}_0 =$ oggetti di $\mathcal{C}$;
- $N\mathcal{C}_1 =$ morfismi di $\mathcal{C}$
- $N\mathcal{C}_2 = \{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\}\dots$

Definire le mappe di faccia e degenerazione di questo insieme simpliciale (hint: una faccia $d_{n,k}$ risulta dal comporre mappe contigue al nodo $k$; e una degenerazione...).

Mostrare che $N\mathcal{C}_n$ è isomorfo al pullback $N\mathcal{C}_1 \times_{N\mathcal{C}_0} N\mathcal{C}_1 \times_{N\mathcal{C}_0} \cdots \times_{N\mathcal{C}_0} N\mathcal{C}_1$ (fatto $n$ volte), lungo le frecce di "source" e "target" $\mathsf{src}, \mathsf{trg} \colon N\mathcal{C}_1 \to N\mathcal{C}_0$ (chiaramente queste sono opportune mappe di faccia).

Mostrare che $N$ è un funtore definendolo sui morfismi; mostrare che, in quanto funtore, commuta con tutti i limiti.

☐ 9 Mostrare che $N(\_)$ soddisfa la seguente proprietà: per ogni $\mathcal{C} \in$ **Cat** e $X \in$ **sSet** si ha

$$(N\mathcal{C})^X \cong N(\mathcal{C}^{\tau X})$$

e questo isomorfismo in **sSet** è naturale in tutti gli argomenti.

Mostrare che $N(\_)$ commuta con gli esponenziali, ovvero che esiste un isomorfismo naturale $N(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}) \cong N(\mathcal{C})^{N(\mathcal{D})}$ (il primo esponenziale indica il nervo della categoria dei funtori $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$; il secondo indica l'insieme simpliciale delle mappe simpliciali...).

## 4. Limiti e colimiti

**Esercizi §4**

☐ 1 Nella categoria **sSet**, definiamo il *bordo* di $\Delta[n]$ come l'unione

$$\partial\Delta[n] = \bigcup_{i=0}^{n} d_{n,i}(\Delta[n-1]),$$

e definiamo il *$k$-esimo corno di dimensione* $n$ come l'unione

$$\Lambda^k[n] = \bigcup_{i \neq k} d_{n,i}(\Delta[n-1]).$$

(1) Mostrare che esiste un coequalizzatore

$$\coprod_{0 \le i < j \le n} \Delta[n-2] \rightrightarrows \coprod_{i=0}^{n} \Delta[n-1] \to \partial\Delta[n]$$

definito da opportune mappe parallele tra i simplessi (l'idea per visualizzarlo: è una sfera di dimensione $n$, ottenuta prendendo le $(n-1)$-facce di un simplesso standard e identificandole non appena condividono insieme un $(n-2)$-simplesso –il colimite è esattamente la formalizzazione di questa spiegazione).

(2) Mostrare che la realizzazione $|\Lambda^k[n]| \subset |\Delta[n]|$ è un retratto di deformazione forte; mostrare che la realizzazione $|\partial\Delta[n]| \cong \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

(3) Mostrare che esiste un coequalizzatore

$$\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta[n-2] \rightrightarrows \coprod_{i\neq k} \Delta[n-1] \to \Lambda^k[n];$$

(l'idea per visualizzarlo: è $\partial\Delta[n]$ a cui è stata rimossa la faccia opposta al vertice $k$ –le facce sono ovviamente univocamente determinate dall'unico vertice che non contengono, e sono numerate di conseguenza).

□ 2 Mostrare che le proiezioni $\{\varprojlim_{i\in I} X_i \xrightarrow{p_j} X_j\}$ da un limite sono *congiuntamente mono*, ovvero se

$$p_j \circ f = p_j \circ g \quad \forall j \in I$$

allora $f = g$. Dualizzare.

□ 3 Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. E' sempre possibile scrivere $\mathcal{C}$ come unione disgiunta di categorie connesse, tali che cioè il grafo sottostante la categoria sia connesso. Si può dunque scrivere $F : \coprod_i \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}$, e questo determina una famiglia di funtori $F_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}$.

Dimostrate che il colimite di $F$ è canonicamente isomorfo a $\coprod_{i\in I} \operatorname{colim} F_i$. In particolare, se ciascuna $\mathcal{C}_i$ ha un oggetto terminale $t_i$, $\operatorname{colim} F \cong \coprod_{i\in I} F(t_i)$.

! Attenzione, la ragione per cui questo è vero non è che "i colimiti commutano coi colimiti": un risultato analogo si dualizza dicendo

$$\lim F \cong \coprod_{i\in I} \lim F_i?$$

□ 4 Mostrare questo fatto: la categoria dei coconi per un funtore $F : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ è la categoria degli elementi del funtore

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F^*} & [\mathcal{D}, \mathbf{Set}] & \xrightarrow{\varprojlim} & \mathbf{Set} \\ c & \longmapsto & \lambda d.\mathcal{C}(Sd, c) & \longmapsto & \varprojlim_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{C}(Sd, c) \end{array}$$

□ 5 Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ si dice *piatto* se l'opposto della sua categoria degli elementi è filtrata; dimostrare che un funtore è piatto se e solo se per ogni insieme $X$ la categoria degli elementi di $\mathbf{Set}(X, F\_)$ è filtrata (dedurne quindi che questa seconda condizione è più forte solo in apparenza).

□ 6 (**Cat** è completa e cocompleta) La completezza è facile, la cocompletezza no: dimostrare le seguenti cose

- E' sufficiente definire i coprodotti e i coequalizzatori;
- Il coprodotto di una famiglia di categorie $\mathcal{C}_i$ ha per oggetti $|\coprod \mathcal{C}_i|$ il coprodotto $\coprod_i |\mathcal{C}_i|$, e per morfismi il coprodotto dei vari insiemi dei morfismi.

- Data una coppia di funtori paralleli $F, G\colon \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ la categoria $\mathcal{Q}$ tale che il diagramma
$$\mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D} \xrightarrow{Q} \mathcal{Q}$$
sia un coequalizzatore ha come oggetti l'insieme che è il coequalizzatore del diagramma $|F|, |G|\colon |\mathcal{C}| \rightrightarrows |\mathbf{D}|$, e un morfismo $[d] \to [d']$ è una stringa finita di morfismi $d \to d_0, d_0' \to d_1, d_1' \to d_2, \dots, d_n' \to d'$ tale per cui per ogni $i = 0, \dots, n$ esiste un oggetto $c_i$ in $\mathcal{C}$ tale che $Fc_i = d_i, Gc_i = d_i'$ (si tratta di "stringhe componibili dopo essere passati al quoziente").

☐ 7 La categoria degli spazi di Banach, che ha per morfismi le mappe lineari *limitate* è co/completa?

☐ 8 Sia $\Delta X : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ il funtore costante in $X \in \mathcal{C}$, ovvero $\Delta X(j) \equiv X$, $\Delta X(i \to j) = 1_X$; è sempre vero che il co/limite di $\Delta X$ è $X$?

☐ 9 Definiamo il funtore $\pi_0 : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Set}$, che manda $\mathcal{C}$ in
$$\pi_0(\mathcal{C}) = \operatorname{coeq}\left( \mathcal{C}_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}_0 \right)$$
dove $s, t$ sono le funzioni di *source* e *target* di $\mathcal{C}$. Descrivere esplicitamente $\pi_0(\mathcal{C})$ (tutto avviene in $\mathbf{Set}$, dove c'è una descrizione molto esplicita...); mostrare che esiste una aggiunzione
$$\pi_0 \dashv \delta \dashv (-)_0 \dashv G :\ \mathbf{Cat} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_0} \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \mathbf{Set}$$
per opportuni funtori $\delta, (-)_0, G$.

☐ 10 Mostrare che $Nat(F, G)$ (l'insieme delle trasformazioni naturali tra due funtori paralleli $\mathcal{C} \to D$) è l'equalizzatore della coppia
$$\prod_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fc, Gc) \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \prod_{f:x\to y} \mathcal{D}(Fx, Gy)$$
dove $t$ manda $(a_c) \in \prod_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fc, Gc)$ in $a_{\mathrm{trg}(f)} \circ F(f)$, ed $s$ manda manda $(a_c) \in \prod_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fc, Gc)$ in $G(f) \circ a_{\mathrm{src}(f)}$.

☐ 11 Mostrare che la categoria **Pos** dei poset e mappe monotone è completa e cocompleta. Mostrare che è una categoria cartesiana chiusa. Prestare attenzione a quale ordine si è posto su $P \times Q$: se si pone l'ordine lessicografico, valgono ancora delle biiezioni
$$\mathbf{Pos}(Q, P \rhd R) \cong \mathbf{Pos}(P \times_{\mathrm{lex}} Q, R) \cong \mathbf{Pos}(P, Q \lhd R)$$
(chiaramente ne servono due, perché $\times_{\mathrm{lex}}$ non è simmetrico)?

☐ 12 Diciamo che l'estensione di Kan destra di $F$ lungo $G$, dove $\mathbf{Set} \xleftarrow{F} \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ consta di un funtore $\mathrm{Ran}_G F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ con una trasformazione naturale $\epsilon : \mathrm{Ran}_G F \circ G \Rightarrow F$ universale tra queste. Notazione: la coppia $(\epsilon, \mathrm{Ran}_G F)$, o spesso il solo funtore $\mathrm{Ran}_G F$ sottintendendo la 2-cella, è l'estensione di Kan destra.

Mostrare che, in queste notazioni, $\epsilon$ è la counità di una aggiunzione $G^* \dashv \mathrm{Ran}_G$, dove $G^* : [\mathcal{C}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{A}, \mathbf{Set}]$ è il funtore di precomposizione con $G$ che manda $H$ in $HG$.

☐ 13 Dualizzare tutti gli asserti dell'esercizio precedente, definendo l'estensione di Kan sinistra lungo $G$; trovare unità e counità della aggiunzione $\mathrm{Lan}_G \dashv G^*$.

☐ 14 Estensioni di Kan come colimiti: mostrare che

$$\mathrm{Ran}_G F(c) \cong \varprojlim \Big( (c \downarrow G)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\Phi^{\mathrm{op}}} \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathbf{Set} \Big)$$

$$\mathrm{Lan}_G F(c) \cong \varinjlim \Big( (G \downarrow c) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathbf{Set} \Big)$$

(hint: dimostrare anzitutto che le corrispondenze $c \mapsto \underline{\mathrm{Lan}}_G F(c)$ e $c \mapsto \underline{\mathrm{Ran}}_G F(c)$ definite da quei co/limiti sono funtoriali usando la proprietà universale del co/limite e la funtorialità di $c \mapsto (G \downarrow c)$; mostrare poi esplicitamente che c'è una biiezione

$$\mathrm{Nat}(\underline{\mathrm{Lan}}_G F, H) \cong \mathrm{Nat}(F, HG)$$

e che questa è naturale in $c$).

☐ 15 Dimostrare il lemma di incollamento per estensioni di Kan: dato un diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "H"'] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta}{\nearrow}"] & \mathcal{B} \arrow[r, "G"] \arrow[dl, bend left, "K"'] & \mathcal{C} \arrow[dll, bend left, "N"] \\
\mathcal{D} & &
\end{tikzcd}$$

se la giustapposizione dei due triangoli e il triangolo sinistro sono estensioni di Kan, ovvero se esiste $\eta : H \to KF$ tale per cui $K = \mathrm{Lan}_F H$ e $\beta : H \to NGF$ tale che $N = \mathrm{Lan}_{Gf} H$, allora lo è il triangolo destro, nel senso che

- Esiste un'unica $\hat{\beta} : K \to NG$ tale che $\beta = \hat{\beta} F \circ \eta$;
- Questa $\hat{\beta}$ rende la coppia $(N, \hat{\beta})$ un'estensione di Kan sinistra di $K$ lungo $G$.

☐ 16 Sia $y \colon \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ il funtore che manda $a \in \mathcal{C}$ in $\hom(-, a) \colon a' \mapsto \hom(a', a)$. Dimostrare che $\mathrm{Lan}_y y \cong 1_{[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]}$; un funtore $G$ tale che $\mathrm{Lan}_G G \cong 1$ si dice *denso*.

☐ 17 Sia $\iota \colon H \leq G$ l'inclusione di un sottogruppo in un gruppo, guardata come un funtore. La categoria degli spazi vettoriali con una azione (sinistra) di $G$ si identifica canonicamente alla categoria di funtori $[G, \mathbf{Vect}_k]$.

Mostrare che esistono funtori

$$\begin{tikzcd} {[G, \mathbf{Vect}_k]} \arrow[r, "\iota^*" description] & {[H, \mathbf{Vect}_k]} \arrow[l, bend right, "\mathrm{Ran}_\iota"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Lan}_\iota"] \end{tikzcd}$$

dati da opportune estensioni di Kan $\mathrm{Lan}_\iota, \mathrm{Ran}_\iota$. La loro azione su oggetti e morfismi è data da

$$V \mapsto k[G] \otimes_{k[H]} V$$
$$W \mapsto \hom_{k[H]}(k[G], W)$$

(l'algebra gruppale $k[G]$ è l'algebra libera sugli elementi di $G$, con moltiplicazione indotta da $\sum_g a_g \cdot \sum_{g'} b_{g'} = \sum_h \sum_{gg'=h} a_g b_{g'}$, e similmente per $H$).

☐ 18 Un suggerimento: si dimostri che esiste un equalizzatore

$$\hom_{k[H]}(k[G], W) \longrightarrow \hom_k(k[G], V) \underset{\hom(h,1)}{\overset{\hom(1,h)}{\rightrightarrows}} \hom_k(k[G], V)$$

Dualizzare per l'estensione di Kan sinistra.

☐ 19 Un oggetto $C$ di una categoria $\mathcal{C}$ si dice *tiny* (minuscolo) se il funtore $\mathcal{C}(C, \_)$ è cocontinuo.

- Dimostrare che l'oggetto terminale $*$ di **Set** è tiny; il coprodotto $* \coprod *$ è ancora tiny?
- Dimostrare che $\mathbb{Z}$ è tiny nella categoria dei gruppi abeliani. $\mathbb{Z}^n$ è tiny (sempre in **Ab**)? Il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è tiny (sempre in **Ab**)?
- Dimostrare che $P \in [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ è tiny se e solo se è un retratto di un funtore rappresentabile.

Un oggetto $e$ di una categoria cartesiana chiusa $\mathcal{C}$ si dice *atomico* se il funtore $[e, \_]$ ha un aggiunto destro.

- Dimostrare o confutare che $P \in [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ è tiny se e solo se è atomico.

☐ 20 (caratterizzazione formale delle aggiunzioni). Una estensione di Kan si dice *assoluta* se è preservata da ogni funtore, ovvero se, quando $L = \mathrm{Lan}_G F$ con unità $\eta : F \Rightarrow \mathrm{Lan}_G FG$, la composizione $KL$ è isomorfa a $\mathrm{Lan}_G KF$ con unità $K\eta$. Denotiamo questa condizione particolare con $\mathrm{LAN}_G F$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- Esiste una aggiunzione $F \underset{\eta}{\overset{\epsilon}{\dashv}} G$ per un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$;
- $F \cong \mathrm{RAN}_G 1_{\mathcal{B}}$ (con counità $\epsilon$);
- $F \cong \mathrm{Ran}_G 1_{\mathcal{B}}$ e $GF \cong \mathrm{Ran}_G G$ (con counità $\epsilon$);
- $G \cong \mathrm{LAN}_F 1_{\mathcal{B}}$ (con unità $\eta$);
- $G \cong \mathrm{Lan}_F 1_{\mathcal{A}}$ e $FG \cong \mathrm{lan}_F F$ (con unità $\eta$).

☐ 21 Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore, consideriamo la categoria degli elementi del nervo $N\mathcal{C}$: essa ha un funtore $\Sigma : \mathrm{Elts}(N\mathcal{C}) \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}$ che manda un oggetto $([n], x \in N\mathcal{C}_n)$ in $[n]$.

E' anche definito un funtore $S : \mathrm{Elts}(N\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ che manda un $n$-simplesso $x : [n] \to \mathcal{C}$ in $x(0)$ (dunque la $S$ sta per *source*). Dimostrare che $S$, per come è definito, è controvariante. Dimostrare che $S$ è essenzialmente suriettivo e pieno, e dunque il funtore indotto $S^* : \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{Elts}(N\mathcal{C})^{\mathrm{op}}}$ è pienamente fedele.

☐ 22 Dimostrare che dato un diagramma $\mathcal{A} \xleftarrow{K} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$, c'è un isomorfismo canonico

$$\varinjlim_{\mathcal{C}} F \cong \varinjlim_{\mathcal{A}} \mathrm{Lan}_K F.$$

Dedurne che esiste un isomorfismo canonico $\varinjlim_{\mathcal{C}} F \cong \varinjlim_{\mathbf{\Delta}} \big(\mathrm{Lan}_\Sigma S^* F\big)$, ovvero che *ogni colimite è un colimite di un opportuno diagramma cosimpliciale.*

## 5. Funtori aggiunti

**Esercizi §5**

☐ 1 Dimostrare che una categoria ha un oggetto terminale se e solo se l'unico funtore $\mathcal{C} \to *$ verso la categoria terminale ha un aggiunto destro.

☐ 2 Mostrare che ogni relazione $R \subseteq X \times Y$ induce una aggiunzione tra poset (guardati come categorie)

$$R^* \dashv R_* : \mathcal{P}(X) \leftrightarrows \mathcal{P}(Y)$$

per quali $R$ questa aggiunzione $R^* \dashv R_*$ si estende a una terna di aggiunti $R_! \dashv R^* \dashv R_*$? Per quali si estende a una quaterna $R_! \dashv R^* \dashv R_* \dashv R^!$?

☐ 3 Mostrare che se $F \dashv G$ è una aggiunzione, e $GF \cong 1$ mediante una qualsiasi trasformazione naturale $\alpha$, allora $\eta : 1 \Rightarrow GF$ è un isomorfismo.

☐ 4 Il falso teorema di Cantor-Schroder-Bernstein per categorie. Confutare che se esiste un funtore fedele $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ed esiste un funtore fedele $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, allora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono equivalenti.

☐ 5 Il vero teorema di Cantor-Schroder-Bernstein per categorie. Dimostrare che se esiste un funtore pieno e fedele $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ed esiste un funtore pieno e fedele $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, allora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono equivalenti.

☐ 6 Sia $\mathrm{LAdj}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la categoria dei funtori $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ che ammettono un aggiunto destro. Mostrare l'isomorfismo

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathrm{LAdj}(\mathcal{B}, \mathbf{Set})) \cong \mathrm{LAdj}(\mathcal{A}, \mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathbf{Set})).$$

☐ 7 Sia $\mathbf{Cat}_\Sigma$ la categoria che ha per oggetti le coppie $(\mathcal{C}, S)$ dove $S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è un endofuntore. Sia $\mathbf{Cat}_\Sigma^\star$ la sottocategoria (piena: definire i morfismi di queste categorie nell'unico modo possibile) di $\mathbf{Cat}_\Sigma$ che ha per oggetti le coppie $(\mathcal{C}, S)$ per cui $S$ è una autoequivalenza. Dimostrare che esiste una aggiunzione

$$R \dashv i :\ \mathbf{Cat}_\Sigma \underset{i}{\overset{R}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cat}_\Sigma^\star$$

$i$ essendo il funtore di inclusione, seguendo questa definizione: se $R(\mathcal{C}, S) = (\mathcal{C}', S)$, la categoria $\mathcal{C}'$ ha per oggetti le coppie $(X, n)$ in $\mathcal{C} \times \mathbb{Z}$, e

$$\mathcal{C}'((X,n),(Y,m)) := \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(S^{k+n}X, S^{m+k}Y).$$

Mostrare che con questa definizione $\mathcal{C}'$ è una categoria, che esiste un funtore $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ (identificato all'unità dell'aggiunzione), e che resta indotto da $S$ un endomorfismo $S'$ di $\mathcal{C}'$ che è un'equivalenza.

☐ 8 Sia $f \colon H \to K$ un morfismo di algebre di Heyting; allora $f$ induce una coppia di funtori aggiunti $f^* \colon \widehat{K} \leftrightarrows \widehat{H} \colon f_*$ tra le categorie dei prefasci su $H$ e su $K$ definiti da
- $f^*(P)(x) = \varinjlim_{y \geq x} Py$;
- $f_*(Q)(y) = Q(f^{-1}y)$

Mostrare che questa non è altro che l'aggiunzione $f^* \underset{\eta}{\overset{\epsilon}{\dashv}} \mathrm{Ran}_f$, e calcolarne esplicitamente unità e counità.

☐ 9 Mostrare che il funtore $\prod : \mathbf{Set}^I \to \mathbf{Set}$ è fedele e riflette gli isomorfismi.
- Hint 1: mostrare che se $F \dashv G$ è una aggiunzione, le componenti della counità sono tutti epimorfismi se e solo se $G$ è fedele.
- Hint 2: mostrare che un funtore fedele riflette i monomorfismi e gli epimorfismi.
- Mostrare che se $F \dashv G$ è una aggiunzione e le componenti della counità sono tutti epimorfismi estremali, allora $G$ è fedele e riflette gli isomorfismi.

☐ 10 Siano $\mathrm{T}_0$-**Top**, $\dots$ $\mathrm{T}_4$-**Top** le categorie degli spazi topologici che soddisfano le varie proprietà di separazione. Quali delle inclusioni piene $\mathrm{T}_0$-**Top** $\supset$ $\mathrm{T}_1$-**Top** $\supset$ $\mathrm{T}_2$-**Top** $\supset$ $\mathrm{T}_3$-**Top** $\supset$ $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-**Top** $\supset$ $\mathrm{T}_4$-**Top** sono riflessioni?

☐ 11 La corrispondenza che agisce sui quadrati commutativi

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "H"] \arrow[d, shift right, "F"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, shift right, "F'"'] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "K"'] \arrow[u, shift right, "G"'] & \mathcal{D}' \arrow[u, shift right, "G'"'] \end{tikzcd}$$

dove $F \overset{\epsilon}{\underset{\eta}{\dashv}} G$, $F' \overset{\epsilon'}{\underset{\eta'}{\dashv}} G'$, mandando ogni $\alpha \colon KF \Rightarrow F'H$ in una $\beta \colon HG \Rightarrow G'K$ secondo le regole

$$\begin{aligned} \alpha &\mapsto G'K\epsilon \circ G'\alpha_G^{-1} \circ \eta'_{HG} \\ \beta &\mapsto \epsilon'_{KF} \circ F'\beta_F \circ F'H\eta \end{aligned}$$

è una biiezione tra $\mathsf{Nat}(KF, F'H)$ e $\mathsf{Nat}(HG, G'K)$.

☐ 12 Il risultato di prima si può usare per dimostrare che la corrispondenza che manda una aggiunzione $F \colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} \colon G$ nella monade $GF$ (resp., nella comonade $FG$) è funtoriale (di più, è un 2-funtore), dato che un *morfismo di aggiunzioni* si riesce a descrivere precisamente come un quadrato omonimo al precedente, equipaggiato con $\alpha \colon KF \Rightarrow F'H$ (equivalentemente, in virtù della biiezione sopra, con $\beta \colon HG \Rightarrow G'K$).

Si tratta di mostrare che un morfismo di aggiunzioni tra $(F \dashv G)$ e $(F' \dashv G')$ induce un morfismo tra le rispettive monadi $GF$ e $G'F'$

☐ 13 Un esercizio sugli aggiunti in $\Delta$. $\Delta$ è la categoria che ha per oggetti gli insiemi finiti, non vuoti, totalmente ordinati, denotati $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$ e per morfismi $f \colon [m] \to [n]$ le funzioni monotone. Definiamo

- $d_i^n \colon [n-1] \to [n]$ l'unica funzione iniettiva che evita l'elemento $i \in [n]$.
- $s_j^n \colon [n+1] \to [n]$ l'unica funzione suriettiva che assume due volte il valore $j \in [n]$.

Mostrare che un morfismo $\alpha \colon [n] \to [m]$ ha un aggiunto sinistro se e solo se $\alpha(n) = m$; in tal caso questo aggiunto $\alpha_L$ manda $i$ in $\alpha_L(i) = \min\{j \in [n] \mid \alpha(j) \geq i\}$.

Dualizzare: un morfismo $\alpha \colon [n] \to [m]$ ha un aggiunto destro se e solo se $\alpha(0) = 0$; in tal caso questo aggiunto $\alpha_R$ manda $i$ in $\alpha_R(i) = \max\{j \in [n] \mid \alpha(j) \leq i\}$.

Dedurre che per ogni $j \in [n]$ la funzione $s_j^n$ ha un aggiunto sinistro e uno destro, e in particolare

$$d_{j+1}^n \dashv s_j^{n-1} \dashv d_j^n \colon \begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, "s_j^{n-1}" description] & {[n-1]} \arrow[l, shift right=2ex] \arrow[l, shift left=2ex] \end{tikzcd}$$

☐ 14 Mostrare che per ogni aggiunzione $F \dashv G \dashv H : \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ vi sono aggiunzioni $FG \dashv HG$ e $GF \dashv GH$. Mostrare che per ogni aggiunzione $H \dashv F \dashv G \dashv K : \mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathcal{D}$ vi sono aggiunzioni $FH \dashv FG \dashv KG$ e $HF \dashv GF \dashv GK$; quante aggiunzioni distinte genera una stringa $F_1 \dashv F_2 \dashv \cdots \dashv F_{10}$?

☐ 15 Sia $f : P \leftrightarrows Q : g$ una aggiunzione tra poset. Esistono le aggiunzioni

$$\begin{tikzcd} {[P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]} \arrow[r, shift left=2ex, "\mathrm{Lan}_f"] \arrow[r, shift right=2ex, "\mathrm{Ran}_f"'] & {[Q^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]} \arrow[l, "f^*" description] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[Q^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]} \arrow[r, shift left=2ex, "\mathrm{Lan}_g"] \arrow[r, shift right=2ex, "\mathrm{Ran}_g"'] & {[P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]} \arrow[l, "g^*" description] \end{tikzcd}$$

Dimostrare che $f^* \cong \mathrm{Lan}_g$ e $g^* \cong \mathrm{Ran}_f$; da ciò segue che esiste una quaterna di aggiunzioni

$$[P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathrm{Lan}_f} \\ \xleftarrow{f^*} \\ \xrightarrow[g^*]{} \\ \xleftarrow[\mathrm{Ran}_g]{} \end{array} [Q^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}].$$

Iterare questo procedimento per produrre una stringa di aggiunti di lunghezza $2n+1$ tra le categorie $L^{2n-1}(P)$ e $L^{2n}(Q)$, dove si definisce induttivamente $L^0(\mathcal{C}) := \mathcal{C}$, ed $L^k(\mathcal{C}) = [(L^{k-1}(\mathcal{C}))^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$.

☐ 16 Definiamo una categoria $\mathrm{Adj}_\infty(\mathcal{C})$ i cui oggetti sono le stringhe infinite di aggiunzioni

$$\{F_\bullet\} : \cdots \dashv F_{-1} \dashv F_0 \dashv F_1 \dashv F_2 \dashv \cdots$$

tra endofuntori, e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali $\eta : F_0 \to G_0$.

(1) Dimostrare che ogni $\eta$ induce una famiglia $\{\eta_k\}$ di trasformazioni naturali, tali che $\eta_{2n} : F_{2n} \to G_{2n}$, $\eta_{2n+1} : G_{2n+1} \to F_{2n+1}$.
(2) Dimostrare che $\mathrm{Adj}_\infty(\mathcal{C})$ ha una struttura monoidale; è simmetrica? E' chiusa?
(3) Dimostrare che se $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ allora $\mathrm{Adj}_\infty(\mathcal{C})$ ha un oggetto zero. Ha prodotti finiti?

☐ 17 Una *situazione thc* consta di una terna $\mathfrak{thc} = \{\otimes, \wedge, [-,=]\}$ di (bi)funtori tra tre categorie $\mathbf{S}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$, definiti dalle aggiunzioni

$$\hom_{\mathcal{B}}(S \otimes A, B) \cong \hom_{\mathcal{S}}(S, [A, B]) \cong \hom_{\mathcal{A}}(A, S \wedge B).$$

Le varianze dei tre funtori sono univocamente determinate da queste aggiunzioni: se $\otimes : \mathbf{S} \times \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, allora si ha $\wedge : \mathbf{S}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, $[-,=] : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{B} \to \mathbf{S}$.

Mostrare che a partire da $\mathfrak{thc} = \{\otimes, \wedge, [-,=]\}$ resta definita una nuova $\mathfrak{thc}_{I,J} = \{\boxtimes, \curlywedge, \langle -,= \rangle\}$, sulle categorie $\mathbf{S}^{I^{\mathrm{op}} \times J}, \mathbf{A}^I, \mathbf{B}^J$, per ogni $I, J \in \mathbf{Cat}$; ponendo $F \boxtimes G \in \mathbf{B}^J$, partendo da $F \in \mathbf{S}^{I^{\mathrm{op}} \times J}, G \in \mathbf{A}^I$, uguale a $\int^i F(i,-) \otimes Gi$ allora si ha una aggiunzione

$$\mathbf{B}^J(F \boxtimes G, H) \cong \mathbf{S}^{I^{\mathrm{op}} \times J}(F, \langle G, H \rangle) \cong \mathbf{A}^I(G, F \curlywedge H).$$

☐ 18 Mostrare che le aggiunzioni agiscono sulle thc: se abbiamo

$$\mathfrak{thc} = \{\otimes, \wedge, [-,=]\}$$

tra categorie $\mathbf{S}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ allora per ogni terna di aggiunzioni

- $\hat{S} \dashv S \dashv \check{S}$ con $S : \mathbf{S} \to \mathbf{S'}$
- $\hat{A} \dashv A \dashv \check{A}$ con $A : \mathbf{A} \to \mathbf{A'}$
- $\hat{B} \dashv B \dashv \check{B}$ con $B : \mathbf{B} \to \mathbf{B'}$

si ha che $\{B \circ (\hat{S} \otimes \hat{A}), S \circ (\hat{A} \wedge \check{B}), A \circ [\hat{S}, \check{B}]\}$ è una nuova thc su $\mathbf{S}', \mathbf{A}', \mathbf{B}'$.

## 6 ★ Sistemi di fattorizzazione

**Esercizi §6**

☐ 1 Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti per $f \in \hom(\mathcal{C})$:
(1) $f$ è un isomorfismo;
(2) $f \boxslash f$;
(3) $f \boxslash \hom(\mathcal{C})$;
(4) $\hom(\mathcal{C}) \boxslash f$;
(5) $f \perp f$.

☐ 2 Mostrare che se $f\colon X \to Y$, $g\colon A \to B$ sono morfismi di $\mathcal{C}$, allora $g \boxslash f$ se e solo se nel diagramma

$$\begin{tikzcd}
\hom(B,X) \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "\hom(u,X)"] \arrow[ddr, bend right, "\hom(B,f)"'] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner" very near start] & \hom(A,X) \arrow[d, "\hom(A,f)"] \\
& \hom(B,Y) \arrow[r, "\hom(u,Y)"'] & \hom(A,Y),
\end{tikzcd}$$

la mappa $\hom(B,X) \to P \cong \hom(B,Y) \underset{\hom(A,Y)}{\times} \hom(A,X)$ è un epimorfismo (in **Set**).

☐ 3 Mostrare che ${}^{\boxslash}(-)$ e $(-)^{\boxslash}$ definiscono una connessione di Galois.

☐ 4 Determinare $\mathcal{K}^{\boxslash}$ in ciascuno di questi casi:
- $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ e $\mathcal{K} = \{\varnothing \to \{\varnothing\}\}$;
- $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ e $\mathcal{K} = \{f\colon X \to Y \mid \text{suriettiva}\}$;
- $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ e $\mathcal{K} = \{[0] \to [1]\}$, if $[n]$ denota l'insieme $\{0, \dots, n\}$.

☐ 5 Dimostrare che, per ogni $\mathcal{K} \subset \hom(\mathcal{C})$ la classe ${}^{\boxslash}\mathcal{K}$ è chiusa per pushout, composizioni transfinite[a], retratti, coprodotti. Dualizzare.

☐ 6 Dimostrare il seguente "criterio di Joyal":

> Se $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ è una coppia di classi di $\hom(\mathcal{C})$ tali che ogni morfismo $f : X \to Y$ si fattorizza come $X \xrightarrow{e} A \xrightarrow{m} Y$ *in modo unico*, allora $\mathcal{E} \perp \mathcal{M}$.

☐ 7 Dimostrare che (Epi, Mono) è un sistema di fattorizzazione in **Set**;

☐ 8 Sia $R$ un anello unitario; denotiamo $\mathbf{Mod}(R)$ la categoria degli $R$-moduli destri e loro omomorfismi $M_R \to N_R$; un morfismo di $R$-moduli si dice *proiettivo* se è un monomorfismo con cokernel proiettivo (in tal modo, un $R$-modulo è proiettivo se e solo se il suo morfismo iniziale è proiettivo). Mostrare che la coppia $(\textsc{Proj}, \textsc{Epi})$ è un sistema di fattorizzazione debole su $\mathbf{Mod}(R)$.

☐ 9 Definiamo le seguenti classi di morfismi in $\mathbf{Cat}$:
(1) $\textsc{Wk}$ è la classe delle *equivalenze di categorie*, ossia funtori pienamente fedeli ed essenzialmente suriettivi;
(2) $\textsc{Cof}$ è la classe dei funtori che sono *iniettivi sugli oggetti*, ovvero quei $J : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tali che se $Jc = Jc'$ allora $c = c'$.
(3) $\textsc{Fib}$ è la classe delle *isofibrazioni* ossia i funtori $F : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ tali che per ogni $e \in \mathbf{E}$ e ogni isomorfismo $\psi : F(e) \cong b$ esista un isomorfismo $\varphi : e \cong e'$ to an object $e' \in \mathbf{E}$ per cui $F(\varphi) = \psi$.
Dimostrare che esiste un sistema di fattorizzazione (debole) $(\textsc{Wk} \cap \textsc{Cof}, \textsc{Fib})$, e uno $(\textsc{Cof}, \textsc{Wk} \cap \textsc{Fib})$;

☐ 10 Sia $\mathbf{V}$ una categoria finitamente cocompleta, e concreta con un funtore $U : \mathbf{V} \to \mathbf{Set}$, che è *monadico*, ovvero tale per cui le algebre per la monade $T = FU$ ($F$ l'aggiunto sinistro di $U$) sono una categoria isomorfa a $\mathbf{V}$ (come esempi si possono prendere i monoidi, i gruppi, i gruppi abeliani, etc.)

Dimostrare che in $\mathbf{V}$ c'è sempre un sistema di fattorizzazione debole $({}^{\perp}\textsc{Epi}, \textsc{Epi})$ (hint: la counità $FU \to 1$ è sempre un epimorfismo perché $U$ è fedele).

☐ 11 Rammentare le definizioni di {split, regular, strong, extremal, $\varnothing$} monomorfismo (in italiano: spezzante, regolare, forte, estremale, $\varnothing$) in una categoria $\mathcal{C}$ e dimostrare queste implicazioni (e le loro duali, automaticamente, per gli epimorfismi):

$$\begin{tikzcd}
\text{SPLIT} \arrow[r] & \text{REGULAR} \arrow[r] & \text{STRONG} \arrow[r] \arrow[l, bend left, dotted, "\mathcal{C}\text{ è completa e wellpow}"] & \text{EXTREMAL} \arrow[r] \arrow[l, bend left, dotted, "\mathcal{C}\text{ ha push}"] & \varnothing \arrow[lll, bend right, dotted, "\mathcal{C}\text{ ha push }+\coprod\text{ disgiunti}"']
\end{tikzcd}$$

dove diciamo che in una categoria *i coprodotti sono disgiunti* se il quadrato

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & A \coprod B
\end{tikzcd}$$

che è sempre un pushout, è anche un pullback. Dedurre da questo esercizio che in $\mathbf{Set}$ i monomorfismi sono tutti e soli i monomorfismi regolari; è vero anche nella categoria di moduli su un anello $R$? È vero in una generica categoria abeliana?

☐ 12 Se $(\mathcal{E}, M)$ è un sistema di fattorizzazione in $\mathcal{C}$ piccolo-cocompleta, e $\mathcal{E}$ ammette coprodotti di grandezza arbitraria in quanto sottocategoria di $\mathcal{C}^{[1]}$, allora $\mathcal{E} \subseteq \text{Epi}$.

☐ 13 Supponiamo di avere una categoria $\mathcal{C}$, tensorizzata e cotensorizzata (v. definizione altrove), ovvero tale per cui sia vero che

$$\mathcal{C}(K \otimes X, Y) \cong \mathcal{C}(X, Y^K) \cong \mathbf{Set}(K, \mathcal{C}(X,Y))$$

naturalmente nei tre oggetti $K \in \mathbf{Set}$, $X, Y \in \mathbf{C}$. Allora su $\mathcal{C}^{[1]}$ (la categoria dei morfismi di $\mathcal{C}$, i cui oggetti sono $f : X \to Y$ e i cui morfismi quadrati commutativi) resta indotta una analoga aggiunzione, cioè $\mathcal{C}^{[1]}$ è tensorizzata e cotensorizzata su $\mathbf{Set}^{[1]}$. Vale, in altre parole, l'aggiunzione

$$\mathcal{C}^{[1]}(f \diamond u, g) \cong \mathcal{C}^{[1]}(f, g \lhd u) \cong \mathbf{Set}^{[1]}(u, \langle f, g\rangle)$$

per ogni $f \colon A \to B, g \colon X \to Y \in \mathcal{C}^{[1]}, u \colon L \to K \in \mathbf{Set}^{[1]}$: questi funtori sono definiti sugli oggetti dalle frecce tratteggiate nei diagrammi

$$\begin{tikzcd}
A \otimes L \arrow[rr, "f\otimes L"] \arrow[dd, "A\otimes u"'] & & B \otimes L \arrow[dl, "i_{B\otimes L}"'] \arrow[dd, "B\otimes u"] \\
& B \otimes L \coprod_{A\otimes L} A \otimes K \arrow[dr, dotted, "f\diamond u"] & \\
A \otimes K \arrow[rr, "f\otimes K"'] \arrow[ur, "i_{A\otimes K}"'] & & B \otimes K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^K \arrow[rr, "g^K"] \arrow[dd, "X^u"'] \arrow[dr, dotted, "g\lhd u"] & & Y^K \arrow[dd, "Y^u"] \\
& X^L \times_{Y^L} Y^K \arrow[ur, "p_{Y^K}"'] \arrow[dl, "p_{X^L}"] & \\
X^L \arrow[rr, "g^L"'] & & Y^L
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(B,X) \arrow[rr, "f),X)"] \arrow[dd, "\mathcal{C}(B,g)"'] \arrow[dr, dotted, "\langle f,g\rangle"] & & \mathcal{C}(A,X) \arrow[dd, "\mathcal{C}(A,g)"] \\
& \mathcal{C}(A,X) \times_{\mathcal{C}(A,Y)} \mathcal{C}(B,Y) \arrow[ur, "q_{\mathcal{C}(A,X)}"] \arrow[dl, "q_{\mathcal{C}(B,Y)}"] & \\
\mathcal{C}(B,Y) \arrow[rr, "f),Y)"'] & & \mathcal{C}(A,Y)
\end{tikzcd}$$

☐ 14 Resta vero quanto scritto sopra per una generica categoria di diagrammi $\mathcal{C}^J$?

[a]Sia $\lambda$ un ordinale. La *composizione transfinita* di un funtore $F \colon \lambda \to \mathcal{C}$ è la mappa canonica $F_0 \to \varinjlim F$.

## 7. Monadi

**Esercizi §7**

☐ 1 Sia $\mathcal{P}$ la monade su **Set** che manda un insieme $X$ nel suo insieme delle parti $PX$ e $f : X \to Y$ in $f_* : PX \to PY$; determinare la categoria delle $\mathcal{P}$-algebre, e la categoria di Kleisli di $\mathcal{P}$; sia $\mathcal{P}^\star$ il funtore *controvariante* che manda $X$ in $PX$ e $f$ in $f^* : PY \to PX$;

questo è una monade?

☐ 2 Esiste una monade su {categorie con un oggetto terminale e funtori che lo preservano} $\subseteq$ **Cat**, che agisce mandando $\mathcal{C}$ nella categoria $*/\mathcal{C}$ degli oggetti puntati di $\mathcal{C}$?

☐ 3 Un sistema di fattorizzazione $(\mathcal{E}, M)$ su $\mathcal{C}$ risale ad uno sulla categoria di algebre di qualsiasi monade $T$ su $\mathcal{C}$ tale per cui $T\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$, definendo $(\mathcal{E}_T, \mathcal{M}_T) = (U^{\leftarrow}\mathcal{E}, U^{\leftarrow}\mathcal{M})$, dove $U\colon \mathrm{Alg}(T) \to \mathcal{C}$ è il forgetful.

☐ 4 Sia $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore; definiamo $\overline{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ come $\mathrm{Lan}_G G$. Mostrare che $\overline{G}$ è una comonade su $\mathcal{D}$, trovando la sua comoltiplicazione e la sua counità e dimostrando le identità di monade. Questa si chiama la *comonade di densità* di $G$, e $G$ è denso se la sua comonade di densità è (isomorfa al)l'identità. Dimostrare che $G$ è denso se e solo se il funtore $\mathcal{D}(G, 1)\colon \mathcal{D} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]\colon d \mapsto (\lambda c.\mathcal{D}(Gc, d))$ è pienamente fedele.

☐ 5 Dualizzare definendo la monade di codensità $\mathrm{Ran}_F F$; calcolare la monade di codensità e la comonade di densità nei casi seguenti
(1) quando $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ è l'inclusione di gruppi (guardati come categorie con un solo oggetto);
(2) quando $j : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ è l'inclusione di gruppi (guardati come categorie con un solo oggetto);
(3) quando $k : \{0 \to 1\} \to \{0 \cong 1\}$ è l'inclusione ovvia (identità sugli oggetti).

☐ 6 Se $T$ è una monade su $\mathcal{C}$, mostrare che $T$-**Alg** ammette tutti i limiti che $\mathcal{C}$ ammette.

☐ 7 Se $T$ è una monade su $\mathcal{C}$, mostrare che $T$-**Alg** ammette $\kappa$-colimiti se e solo se ammette coprodotti di cardinalità $\kappa$.

☐ 8 Mostrare che se $T$ è una monade su $\mathcal{C}$ si può definire un "pairing" $c_{X,Y} : \mathcal{C}(X, TY) \times \mathcal{C}(W, TX)$ che manda due frecce $(f, g)$ in

$$W \xrightarrow{g} TX \xrightarrow{Tf} TTY \xrightarrow{\mu_Y} TY$$

dove $\mu_Y$ è la $Y$-componente della moltiplicazione di $T$, e $c$ soddisfa queste proprietà:
(1) E' naturale (per una opportuna definizione: trovarla);
(2) E' associativo: $c(f, c(g, h)) = c(c(f, g), h)$;
(3) E' tale per cui $c(\eta_Y, f) = f = c(f, \eta_X)$ se $f : X \to TY$ ed $\eta$ è l'unità della monade.

☐ 9 Dimostrare che data una terna $(T, \eta, c)$ con $T$ endofuntore di $\mathcal{C}$, $\eta : 1 \Rightarrow T$ una trasformazione naturale, e $c$ che soddisfa alle condizioni sopra, la posizione

$$\mu_Y : c(1_{TY}, 1_{TTY}) : TTY \to TY$$

definisce una moltiplicazione che rende $T$ una monade su $\mathcal{C}$.

☐ 10 Definiamo una monade sulla categoria **sSet** degli insiemi simpliciali: sia $R$ un anello commutativo e unitario, e dato $X_* \in \mathbf{sSet}$ definiamo $(R \otimes X)_*$ l'insieme simpliciale che ha per insieme degli $n$-simplessi l'$R$-modulo libero sugli $n$-simplessi di $X_*$:

$$(R \otimes X)_n = R[\sigma \mid \sigma : \Delta[n] \to X_*]$$

(un elemento di $(R \otimes X)_n$ è una somma finita del tipo $\sum r_i x_i$ dove $r_i \in R$ e $x_i : \Delta[n] \to X_*$). Ora, definiamo $\mathsf{R}(X)_n \subseteq (R \otimes X)_n$ come il sottospazio di quelle somme $\sum r_i x_i$ tali che $\sum r_i = 1_R$.

(1) Mostrare che $X_* \mapsto \mathsf{R}(X)$ è una monade su **sSet**;
(2) Come è fatta una $\mathsf{R}$-algebra? Il funtore $U : \mathsf{R}\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{sSet}$ è monadico?

☐ 11 Definiamo una monade su **Cls** (la categoria dei $\mho^+$-insiemi), che manda $\mathcal{C} \in \mathbf{Cls}$ nella classe di tutti i sotto-$\mho$-insiemi non vuoti di $\mathcal{C}$. Chiamo questa monade $P_\bullet : \mathbf{Cls} \to \mathbf{Cls}$.

Mostrare che la classe **Ord** degli ordinali è esattamente la $P_\bullet$-algebra libera generata dal singoletto $\{*\}$.

☐ 12 Mostrare che $T : X \mapsto \coprod_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{\mathrm{Sym}(n)}$, dove il quoziente è rispetto all'azione che permuta le "coordinate" di $\vec{x} \in X^n$, è una monade su **Set**; chi sono le sue algebre? Come descrivere $T$ come estensione di Kan $\mathrm{Lan}_G F$, per opportuni $F, G$?

☐ 13 Mostrare che la corrispondenza $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{\to}$ (la categoria dei morfismi di $\mathcal{A}$, i cui morfismi sono quadrati commutativi) definisce una monade su **Cat**. Come si può descrivere una $T$-algebra in questo caso?

## 8. Categorie monoidali

**Esercizi §8**

☐ 1 Definire una struttura monoidale simmetrica chiusa sulla categoria degli spazi vettoriali $k$-**Vect**; dimostrare che $V$ è dualizzabile rispetto a questa struttura monoidale se e solo se $V$ ha dimensione finita.

☐ 2 Definire una struttura monoidale simmetrica chiusa sulla categoria $\mathbf{Ch}(R)$ dei complessi di catene di $R$-moduli; descrivere esplicitamente l'hom interno $[X, Y]$ tra due oggetti $X, Y$, la composizione $[X, Y] \otimes [Y, Z] \to [X, Z]$, e trovare unità e counità della aggiunzione che definisce la struttura monoidale chiusa.

☐ 3 Dimostrare o confutare quanto segue:

Se $\mathcal{C}$ è una categoria monoidale chiusa, con tensore $\otimes$

unità monoidale $I$ e hom interno $[\_, =]$, e con tutti i limiti finiti, mostrate o confutate che se $[*, X] \cong X$, naturalmente in $X$ per ogni $X \in \mathcal{C}$, allora $\otimes \cong \times$ e l'oggetto unità $I$ di $\mathcal{C}$ è il terminale $*$.

☐ 4 Definire una categoria $\mathcal{C}\#\mathcal{D}$ avente per oggetti quelli di $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, e dove $(C, D) \to (C', D')$ è una successione finita

$$(C, D) \leftrightarrows (C_0, D_0) \leftrightarrows (C_1, D_1) \leftrightarrows \cdots \leftrightarrows (C_n, D_n) \leftrightarrows (C', D')$$

dove le frecce superiori formano una stringa $C \leftarrow C_0 \leftarrow \dots C_n \leftarrow C'$ e le frecce inferiori formano una stringa $D \to D_0 \to \cdots \to D_n \to D'$. Mostrare che $\# : \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ è una struttura monoidale, avente per identità la categoria terminale. Mostrare che $\mathcal{C}\#\mathcal{D}$ soddisfa la seguente proprietà universale:

> $\mathcal{X} = \mathcal{C}\#\mathcal{D}$ is equipped with two families of functors $\{F_C : \mathcal{D} \to \mathcal{X}\}_{C \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}}$, and $\{G_D : \mathcal{C} \to \mathcal{X}\}_{D \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{D}}}$ such that $F_C(D) = G_D(C)$ for any $(C, D) \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$, and universal among these.

☐ 5 Sia $\mathcal{C}$ una categora monoidale simmetrica, con tensore $\otimes$. Definire una struttura monoidale $\diamond$ sulla categoria di funtori $[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$, detta *prodotto di convoluzione*, ponendo

$$(F \diamond G)(c) \cong \mathrm{Lan}_{\otimes}(F \times G)$$

ovvero ponendo $F \diamond G$ come la freccia tratteggiata nel diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "{(F,G)}"] \arrow[d, "\otimes"'] & \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \arrow[r, "\times"] & \mathbf{Set} \\ \mathcal{C} \arrow[urr, dotted, "F\diamond G"'] & & \end{tikzcd}$$

Dimostrare che questa è effettivamente una struttura monoidale chiusa, calcolando gli aggiunti destri $F \diamond \_ \dashv (F/\_)$ e $\_ \diamond G \dashv (\_/G)$.

☐ 6 Dimostrare che se $\mathbb{Z}$ è il gruppo abeliano degli interi, la categoria dei funtori $[\mathbb{Z}, \mathbf{Ab}]$ dotata del prodotto di convoluzione è la categoria dei *gruppi abeliani graduati*, ossia delle sequenze $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con opportune mappe tali che...

☐ 7 Un *tensore* per $\mathcal{C}$ è un bifuntore $\otimes : \mathbf{Set} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ che soddisfa la seguente proprietà universale:

$$\mathcal{C}(A \otimes C, C') \cong \mathbf{Set}(A, \mathcal{C}(C, C')).$$

Dualmente, un *cotensore* è un bifuntore $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$che soddisfa la seguente proprietà universale:

$$\mathcal{C}(C', C^A) \cong \mathbf{Set}(A, \mathcal{C}(C', C)).$$

Definire tensori e cotensori in $\mathbf{Set}, \mathbf{Cat}, \mathbf{Top}$. Li possiede $\mathbf{fVect}$ (spazi vettoriali di dimensione finita)?

## 9. ★ Categorie presentabili

**Esercizi §9**

Un oggetto $X$ di una categoria $\mathcal{C}$ si dice $\kappa$-presentabile, o $\kappa$-piccolo, o $\kappa$-compatto, se il funtore $\hom(X, \_)$ commuta coi colimiti $\kappa$-filtrati.

☐ 1 Dimostrare che gli oggetti $\kappa$-compatti di **Set** sono gli insiemi di cardinalità al più $\kappa$. In particolare gli insiemi finiti sono $\kappa$-compatti per ogni cardinale regolare $\kappa$.

☐ 2 Dimostrare il seguente *criterio di piattezza*: un funtore $F : \mathcal{C} \to$ **Set** si dice $\kappa$-*piatto* se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti

(1) $F$ risulta da un colimite $\kappa$-filtrato di funtori rappresentabili, ovvero esiste una categoria piccola e $\kappa$-filtrata $\mathcal{J}$ e un funtore $X : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ tale che
$$F(C) \cong \varinjlim_{j\in\mathcal{J}} \hom(X_j, C)$$
naturalmente in $C$.

(2) $\mathrm{Elts}(F)^{\mathrm{op}}$ è una categoria $\kappa$-filtrata.

(3) $\mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ commuta coi limiti finiti.

☐ 3 Dimostrare che la categoria dei coconi di un funtore $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ è connessa (ovvero il suo $\pi_0(\_)$ è fatto di un solo elemento, vedi altrove per la definizione) *se e solo se* $\mathcal{C}$ è $\kappa$-filtrata.

☐ 4 Un generatore di una categoria $\mathcal{C}$ consta di un insieme di oggetti $\{G_i\}_{i\in I}$ tale per cui la famiglia di funtori $\hom(G_i, \_)$ sia congiuntamente fedele.

- Descrivere esplicitamente il colimite
$$\varinjlim_{\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \mathbb{Z}, \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$
mostrare che esiste un morfismo canonico verso $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, che è un epimorfismo regolare ma non un isomorfismo (hint: è [Borceux, Ex. 4.8.6]; si può fare in diversi modi, ma la cosa più economica è mostrare che il colimite è un gruppo abeliano che ha torsione non banale).

☐ 5 Dimostrare le seguenti caratterizzazioni equivalenti per il completamento di Cauchy $\tilde{\mathcal{C}}$ di una categoria $\mathcal{C}$:

(1) $\tilde{\mathcal{C}}$ è la sottocategoria dei prefasci *minuscoli* su $\mathcal{C}$, ovvero di quei funtori $F$ tali che $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](F, -) \colon [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ commuta coi colimiti;

(2) $\tilde{\mathcal{C}}$ è il completamento libero di $\mathcal{C}$ rispetto a tutti i *colimiti assoluti*, ovvero i colimiti che sono preservati da qualsiasi funtore $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

(3) $\tilde{\mathcal{C}}$ è il completamento libero di $\mathcal{C}$ rispetto a tutti i *limiti assoluti*, ovvero i limiti che sono preservati da qualsiasi funtore $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.
(4) $\tilde{\mathcal{C}}$ è la categoria universale contenente $\mathcal{C}$ dove ogni *idempotente* di $\mathcal{C}$ *spezza*, ovvero dove ogni endomorfismo $e : X \to X$ tale che $ee = e$ è tale per cui $e = rs$ per due morfismi tali che $sr = 1$.
(5) $\tilde{\mathcal{C}}$ è l'opposto della sottocategoria dei morfismi geometrici essenziali $\mathbf{Set} \to [\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$.
(6) Quanti oggetti minuscoli ci sono nella categoria $\mathbf{Mod}(\mathbb{Z})$ dei gruppi abeliani? (Ricordare l'esercizio 4.19).

☐ 6 Dimostrare che **Set** è una categoria presentabile; più in generale, se $\mathcal{C}$ è piccola $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ è una categoria presentabile.

☐ 7 Una freccia $f \colon A \to B$ di $\mathcal{C}$ è $\kappa$-presentabile se lo è in quanto oggetto della categoria $A/\mathcal{C}$ delle frecce di dominio $A$.

Mostrare che $f \colon A \to B$ è $\kappa$-presentabile in **Set** se e solo se è *quasi-epi* e *quasi-mono*, ovvero se e solo se, congiuntamente,
(1) L'insieme $B \setminus f(A)$ ha cardinalità $< \kappa$.
(2) L'insieme $\ker f \setminus \Delta_A$, ovvero l'insieme delle coppie *distinte* $x \neq y$ in $A$ tali che $f(x) = f(y)$, ha cardinalità $< \kappa$.

☐ 8 Dati due numeri cardinali $\kappa, \kappa'$ diciamo che $\kappa$ è *fortemente minore* di $\kappa'$, scritto $\kappa \lhd \kappa'$, se $\kappa < \kappa'$ e vale la seguente proprietà:

Per ogni $\lambda < \kappa'$, l'insieme $P_{<\kappa}(\lambda)$ dei sottoinsiemi di $\lambda$ di cardinalità minore di $\kappa$ ha un sottoinsieme cofinale di cardinalità $< \kappa'$.[a]

Dimostrare i fatti seguenti:
(1) La classe dei cardinali è parzialmente ordinata dalla relazione $\lhd$ ($\kappa \lhd \kappa'$ sse $\kappa \leq \kappa'$ e vale la stessa condizione);
(2) $\aleph_0 \lhd \lambda$ per ogni $\lambda$ più che numerabile. E' $\aleph_0$ un elemento minimale in $(\mathbf{Card}, \lhd)$?
(3) Se $\kappa$ è regolare, $\kappa \lhd \kappa^+$.
(4) E' vero o falso che $\aleph_\alpha \lhd \aleph_{\alpha+1}$?

☐ 9 Questa teoria è importante perché valgono le seguenti condizioni equivalenti:
(1) $\kappa \lhd \kappa'$;
(2) Ogni categoria $\kappa$-accessibile è $\kappa'$-accessibile;

☐ 10 Dimostrare che un colimite di cardinalità $\kappa$ di oggetti $\kappa$-presentabili è ancora un oggetto $\kappa$-presentabile.

☐ 11 Sugli oggetti finitamente presentabili di **Cat**. In questo esercizio, per evitare ogni ambiguità, si intende che una categoria presentabile è un *oggetto* di **Cat** che in quanto tale è finitamente presentabile (i.e. il funtore $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, -)$ commuta coi colimiti filtrati).

- Dimostrare che se una categoria ha un numero finito di morfismi, allora è un oggetto $\omega$-presentabile di **Cat**. E' vero il viceversa?
- No: trovare un controesempio. Dimostrare che una categoria finitamente presentabile ha comunque solo un numero finito di morfismi; dimostrare che in una categoria finitamente presentabile non esistono due oggetti distinti con un numero infinito di frecce parallele diverse.
- Dimostrare che le categorie finitamente presentabili sono tutte e sole le categorie che si ottengono come coequalizzatori $F(\mathbf{G}) \rightrightarrows F(\mathbf{G}') \to \mathcal{C}$ di frecce parallele tra categorie libere su grafi finiti.

[a] In parole più semplici: per ogni $\lambda < \kappa$ esiste un sottoinsieme $\mathcal{Q} \subseteq P_{<\kappa}(\lambda)$ tale che per ogni $U \in P_{<\kappa}(\lambda)$ esiste $V \in \mathcal{Q}$ per cui $U \subseteq V$.

## 10. Topos elementari

**Esercizi §10**

☐ 1 Mostrare che **Cat** non è un topos;

☐ 2 Mostrare che **Top** non è un topos;

☐ 3 Mostrare che **Grp** non è un topos;

☐ 4 La categoria che ha per oggetti i topos *di prefasci* su categorie $\mathcal{U}$-piccole, e per morfismi le immagini inverse di morfismi geometrici $f^* : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ è completa? E' cocompleta? Esiste un aggiunto all'inclusione **PShTop** $\hookrightarrow \mathcal{U}^+$-**Cat**?

☐ 5 Dimostrare che se $\mathcal{E}$ è un topos elementare tale che $\neg \colon \Omega \to \Omega$ ammetta un punto fisso $x$. Allora $\Omega$, in quanto algebra di Heyting interna ad $\mathcal{E}$, e'l'algebra banale dove $0 = 1$. Dimostrare che se $\mathcal{E}$ è un topos elementare tale che $\Omega$ sia l'algebra banale dove $0 = 1$, allora $\mathcal{E}$ è una categoria-poset dove $\varnothing \cong 1$ (=l'oggetto iniziale è isomorfo al terminale).

☐ 6 Dimostrare che l'esponenziale $Y^X$ in un topos elementare $\mathcal{E}$ è isomorfo al pullback del diagramma

$$\begin{tikzcd}
Y^X \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & E_1 \arrow[d] & \\
E_2 \arrow[r] & \Omega^{X\times Y} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \Omega^X \\
& \Omega^{X\times Y\times Y} &
\end{tikzcd}$$

dove $E_1 \to \Omega^{X\times Y} \rightrightarrows \Omega^{X\times Y\times Y}$ ed $E_2 \to \Omega^{X\times Y} \rightrightarrows \Omega^{X}$ sono equalizzatori di opportune coppie di mappe.

## 11. Topos di Grothendieck

**Esercizi §11**

☐ 1 Dimostrare che la categoria $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}(\mathcal{E})$ dei gruppi abeliani interni ad un topos di Grothendieck $\mathcal{E}$ è una *categoria di Grothendieck*, ovvero che è abeliana, ha un generatore, è cocompleta e tale per cui $\varinjlim : [J, \mathcal{A}] \to \mathcal{A}$ è un funtore esatto (manda sequenze esatte corte in sequenze esatte corte).

☐ 2 Mostrare l'equivalenza tra spazi etalé e fasci su uno spazio topologico $X$ usando le estensioni di Kan: si consideri il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "y"'] & \mathbf{Top}/X \\ {[\mathcal{O}(X), \mathbf{Set}]} \arrow[ur, dotted, "\mathrm{Lan}_y A"'] & \end{tikzcd}$$

dove il funtore $A$ manda tautologicamente un aperto $U \subseteq X$ nella inclusione $U \to X$, e $y$ è Yoneda. Mostrare che l'aggiunto destro di $\mathrm{Lan}_y A$ è il funtore

$$\begin{aligned} N_A(p) \colon U \mapsto \mathbf{Top}/X\,(AU, p) &= \mathbf{Top}/X\left(\begin{bmatrix} U \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}\right) \\ &= \{s \colon U \to E \mid ps \colon U \subseteq X\} \end{aligned}$$

e coincide dunque con il fascio delle sezioni di $p : E \to X$.

☐ 3 Costruire il teorema di Giraud a questo modo: dato un topos di Grothendieck $\mathcal{E}$ trovare una sottocategoria $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ piccola che induce una aggiunzione

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, hook] \arrow[d, "y"'] & \mathcal{E} \arrow[dl, shift left] \\ {[\mathcal{G}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]} \arrow[ur, shift left] & \end{tikzcd}$$

Dimostrare che l'aggiunto destro $\mathcal{E} \to [\mathcal{G}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ è pienamente fedele, sicché $\mathcal{E}$ è una localizzazione di $[\mathcal{G}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$. Dimostrare che $L : [\mathcal{G}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \to \mathcal{E}$ commuta coi limiti finiti, sicché $\mathcal{E}$ è una localizzazione *esatta* di $[\mathcal{G}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$.

☐ 4 Dimostrare che un topos elementare è di Grothendieck se e solo se è una categoria presentabile.

☐ 5 Un topos $\mathcal{E}$ tale che il morfismo geometrico terminale $\mathcal{E} \to \mathbf{Set}$ si estende a una quaterna di aggiunti

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, shift left=3, "\pi"] \arrow[r, "\Gamma"] & \mathbf{Set} \arrow[l, shift right=1.5, "d"'] \arrow[l, shift left=1.5, "c"] \end{tikzcd}$$

dove $c, d$ sono funtori pienamente fedeli si dice *topos coesivo*. Dimostrare che il topos dei prefasci sulla categoria $\{0 \to 1\}$ è coesivo; dimostrare che il topos degli insiemi simpliciali è coesivo. Il topos dei prefasci sulla categoria $\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$ è coesivo?

## 12. Categorie abeliane

**Esercizi §12**

☐ 1 La categoria dei gruppi abeliani topologici è abeliana?

☐ 2 Un *pre-asymbatos* è una categoria $\mathcal{A}$ che soddisfa i seguenti assiomi:

(1) Possiede limiti finiti e un oggetto iniziale $\varnothing$;
(2) Ogni volta che in uno span $X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{j} Y$ una delle due frecce è un mono, ne esiste il pushout;
(3) $\mathcal{A}$ ammette pushout di kernel pairs.

Ogni categoria abeliana è chiaramente un pre-asymbatos.

☐ 3 Diciamo che un oggetto $X$ di $\mathcal{A}$ è un $A$-oggetto se la proiezione $\pi : X \times \varnothing \to X$ è un isomorfismo. Diciamo che un oggetto $Y$ di $\mathcal{A}$ è un $T$-oggetto se la proiezione $\pi' : Y \times \varnothing \to \varnothing$ è un isomorfismo.

Un *asymbatos* è una categoria $\mathcal{A}$ che soddisfa i seguenti assiomi:

(1) E' un pre-asymbatos ed è una categoria regolare;
(2) La freccia canonica $\varnothing \to *$ è un monomorfismo;
(3) Se $i : A \to C$ è un mono, ogni pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r, "j"'] & D \end{tikzcd}$$

è anche un pullback, e $j$ è mono.

(4) Il funtore $\varnothing \times - : \mathcal{A} \to A$ preserva i pushout di kernel pairs, e i pushout di span in cui una freccia è mono;
(5) Se $f : B \to \varnothing \times C$ è un epi, e

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "f"] \\ \varnothing \arrow[r] & \varnothing \times C \end{tikzcd}$$

è un pullback, allora è anche un pushout.

(6) Nella sottocategoria dei $T$-oggetti, la mappa di pushout di uno span in cui uno è un mono è stabile per pullback.
(7) Definiamo un funtore $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mediante il pushout

$$\begin{tikzcd} \varnothing \times X \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \tau X \end{tikzcd}$$

(8) Se $Tf$ e $\varnothing \times f$ sono isomorfismi $TX \to TY$ e $\varnothing \times X \to \varnothing \times Y$ allora lo è $f$.

Mostrare i seguenti fatti:
(1) Un asymbatos ammette coprodotti finiti, e questi sono disgiunti;
(2) La sottocategoria piena $\mathcal{A}_A$ degli $A$-oggetti è coriflessiva;
(3) La sottocategoria piena degli $A$-oggetti è abeliana.
(4) Se $X$ è un $A$-oggetto e $Y$ un $T$-oggetto, $\mathcal{A}(A, T) = \{*\}$;
(5) La sottocategoria piena $\mathcal{A}_T$ dei $T$-oggetti è riflessiva, e il riflettore è $\tau$ definito sopra.
(6) Il funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_A \times \mathcal{A}_T$ che manda $X$ in $(\varnothing \times X, \tau X)$ è un'equivalenza.

## 13. ★ 2-categorie.

**Esercizi §13**

☐ 1 Dimostrare che esiste una bicategoria i cui oggetti sono gli insiemi, le cui 1-celle $f : A \to B$ sono descritte da famiglie di insiemi $\{F_{ab} \mid A \times B\}$, e le 2-celle $f \Rightarrow g$ sono famiglie di funzioni $\alpha_{ab} : F_{ab} \to G_{ab}$, una per ogni $(a, b) \in A \times B$.

☐ 2 Definire un *oggetto comma* in una 2-categoria, ed enunciare la sua proprietà universale 1- e 2-dimensionale.

☐ 3 Sia $\mathbf{K}$ una 2-categoria. Dato un diagramma di 2-celle

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & B \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & C \end{tikzcd}$$

se $T * \sigma$ è invertibile, allora $\tau * F$ è univocamente determinata da $\tau * G$ e $\tau * F = (T * \sigma)^{-1} \circ (\tau * G) \circ (S * \sigma)$. Similmente, se $S * \sigma$ è invertibile allora $\tau * G$ è univocamente determinata da $\tau * F$ and $\tau * G = (T * \sigma) \circ (\tau * F) \circ (S * \sigma)^{-1}$.

☐ 4 Dato un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tra 2-categorie, esso si dice *funtore lax* se esistono famiglie di 2-celle $F(g)F(f) \to F(gf)$, $1_{FA} \to F(1_A)$ che soddisfano opportune condizioni di coerenza rispetto all'associatività della composizione e l'unità data dalle identità. Scrivere queste condizioni.

☐ 5 Dimostrare che un funtore lax $T : \mathbf{1} \to \mathbf{Cat}$, dove $\mathbf{1}$ è la 2-categoria con un solo oggetto $*$, una sola 1-cella $1_*$ e una sola 2-cella $1_{1_*}$, è esattamente una monade sulla categoria $T(*)$.

☐ 6 Un *lax colimite* per un lax funtore è... la stessa cosa di un colimite, ma il cocono universale che lo rappresenta è riempito da 2-celle non invertibili (scrivere bene questa definizione, magari con l'aiuto di un libro, è parte dell'esercizio):

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & C \\ X_j \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dualmente si definisce il lax limite di un diagramma. Trovare il lax limite di una monade, riguardata come lax funtore $\mathbf{1} \to \mathbf{Cat}$.

☐ 7 Dimostrare la seguente proprietà universale: il lax colimite del 2-funtore $\mathcal{A}/- : \mathcal{A} \to \mathbf{Cat}$ che manda $A \in \mathcal{A}$ nella categoria $\mathcal{A}/a$ è esattamente la categoria degli elementi di $\hom_{\mathcal{A}}$, detta anche *twisted arrow category* di $\mathcal{A}$.

☐ 8 Sulla bicategoria dei profuntori. Definiamo una bicategoria che ha gli stessi oggetti di **Cat**, e dove le 1-celle $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ sono tutti i funtori $\mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{A}}$. La composizione $g \diamond f : \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ è definita dal diagramma

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "y"'] & \widehat{\mathcal{A}} \\ \mathcal{C} \arrow[r, "g"'] & \widehat{\mathcal{B}} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_y f"'] & \end{tikzcd}$$

da ultimo, le 2-celle sono trasformazioni naturali qualsiasi.

- Mostrare che questo definisce davvero una bicategoria (trovare le coerenze soddisfatte dall'associatività e dall'identità della composizione: chi è $\mathrm{id} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}$?), chiamata **Prof**.
- le 1-celle di questa bicategoria si chiamano *profuntori*. Dimostrare che esistono due embedding $\mathbf{Cat} \rightrightarrows \mathbf{Prof}$, che sono l'identità sugli oggetti. Come rovesciano le 1- e 2-celle?
- Se $\lambda, \rho : \mathbf{Cat} \rightrightarrows \mathbf{Prof}$ sono gli embedding del punto precedente, dimostrare che $\lambda(f) \dashv \rho(f)$ in **Prof**.
- Dimostrare che $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore pienamente fedele se e solo se l'unità dell'aggiunzione $\lambda(f) \dashv \rho(f)$ è una 2-cella invertibile di **Prof**.

- La bicategoria dei profuntori ha prodotti? Ha coprodotti? Come sono definiti? La bicategoria dei profuntori ha tensori e cotensori su **Cat**?
- Mostrare che la composizione $g \diamond \_$ e $\_ \diamond f$ hanno entrambi un aggiunto destro (parametrico in $g, f$ rispettivamente).
- (la proprietà universale delle modificazioni) Rammentare la definizione di una *modificazione* tra trasformazioni naturali (Borceux I.7.3.1). Dimostrare che, dati $F, G$ funtori paralleli, $\alpha, \beta : F \Rightarrow G$ trasformazioni naturali, allora esiste un equalizzatore

  $$\mathrm{Mod}(\alpha, \beta) \to \prod_{c \in \mathcal{C}} \mathrm{Nat}(\alpha_c, \beta_c) \rightrightarrows \prod_{f : c \to d} \hom(Fc, Gd).$$