L'importanza di chiamarlo Astratto

Commedia in atto singolo di sapore categoriale

Circolo dei Matematici Giacobiani

23 febbraio 2011

(0) Storia concreta del nonsenso astratto

Pensare in astratto

Astrazione: L'atto di separare le manifestazioni sensibili dalle sue cause? (Fisica)
Decontestualizzare e studiare i tratti essenziali di un fenomeno/teoria? (Algebra)
Concentrarsi sull'interdipendenza tra enti (invece che sulla natura degli enti stessi)!

- Dimenticare fattori accessori...

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \propto \ddot{\mathbf{x}} \qquad\qquad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \propto \frac{\boldsymbol{\nu}_x}{x^2}$$

- ... per enucleare identità *non banali*!

$$E \propto m \qquad\qquad \text{gravità} \iff \text{geometria dello spazio}$$

- *Gruppo*: Insieme con *certe* proprietà (che incarnano "tre dei principi fondamentali del razionalismo: reversibilità, identità, isotropia dei cammini") soggette ad assiomi *universali* (in un senso opportuno).

Strutturalismo

Definizione

Lo strutturalismo è la corrente di pensiero che si occupa dello studio di quanto, all'interno di un insieme, corrisponde alle funzioni di collegamento, sostegno e interrelazione tra i suoi elementi, o si esprime tramite tali concetti.

- Non gli enti, ma le relazioni tra enti;
- Già Poincaré affermava che "il matematico non studia oggetti ma relazioni tra oggetti".
- Impostazione di portata molto vasta che investe la linguistica (Saussure e la sua scuola), l'analisi letteraria (Propp e la Morfologia della Fiaba), la psicologia e in generale la filosofia del XX secolo.

Funzione = "espediente" che muta il *dominio* nel *codominio*.

(notazione: $A \rightarrow B$)

In Matematica. . .

. . . lo strutturalismo è consistito e consiste

- Nella incorporazione degli enti in classi definite secondo le caratteristiche *strutturali* dei suddetti ("la teoria" de(=di tutti) gli anelli/gruppi/campi, delle funzioni di variabile complessa, dei linguaggi logici);
- Nello studio delle modificazioni a cui l'ente può essere opportunamente sottoposto per diventare un altro ente dotato della stessa *struttura* (che quindi le trasformazioni *non devono* distruggere);
- Si presta quindi a formalizzare discipline matematiche altamente dialettiche: algebra, geometria, logica di ordine superiore al primo (modelli per intuizionismo), e successivamente fisica (invarianti algebrici per geometria delle "corde", nodi), informatica (linguaggio Haskell), . . .

(1) Conservare la struttura. (2) Partizionare la (troppo vasta) collezione di tutti gli oggetti in *classi di isomorfismo* (l'"uguaglianza" diventa relazione non–banale, dipendente dal contesto –cammini omotopi?–).

Il cammino verso una visione strutturalista della Matematica ha radici antiche ed è stato sofferto: i martiri e gli inquisitori sono stati molti, spesso grandi nomi della Scienza.

- ST Kronecker [a Georg Cantor che insegna teoria degli insiemi] "Lei è un ciarlatano, corruttore della gioventù";
- AA Paul Gordan [a Hilbert]: "Questa [il *Basissatz*] è teologia, non matematica";
- MQ Per Pauli le matrici di Heisenberg erano la "la piaga [o peste] gruppale";
- CT *Abstract Nonsense*; "Una disciplina esoterica nota per la sua difficoltà e la sua irrilevanza" (Moore & Seiberg, citati in T. Leinster).

- Poi *la luce*. Alexander Grothendieck: "L'introduction de la chippre 0, ou la notion de *groupe*, était elle même un *abstract nonsense*, et les mathématiques étaient stagnant pendant des milliers d'années parce que personne n'était capable de prendre cette étape enfantine."

Alla fine...

...la visione strutturalista si impose. Molte date di nascita possibili:

- In *Regular Cycles of Compact Metric Spaces*, Steenrod (1940) introduce la notazione $f : A \to B$ per una funzione tra insiemi;
- In *General Theory of Natural Equivalences*, Eilenberg e MacLane (1945) introducono le definizioni di *categoria*, *funtore*, *trasformazione naturale* per problemi topologici;
- In effetti il pioniere è stato Felix Klein:

> *"geometria" = quoziente di un insieme di oggetti ("punti" di un insieme) sotto l'azione di un opportuno gruppo; una proprietà geometrica è allora una proprietà che sia invariante per quel gruppo di trasformazioni.*

$$(\mathbb{K}^n, \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})) \quad (\mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})) \quad (\mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \mathrm{PGL}(n, \mathbb{K}))$$

La domanda non è "cosa è" ma *come posso trasformarlo?*

(2) Geometria $=$ (Algebra)^{op}

Perché (come?) pensare in astratto?

Vantaggi in numerosi campi della Matematica...

- Spazi Vettoriali: "Alcune copie di $\mathbb{R}$" VS "l'azione di un $(k^\times, \cdot)$ su un $(G, +)$". {Geometria}⊂{Algebra Lineare}. Dualità ($V \cong V^*$, $V \cong V^{**}$, ma solo uno è canonico (?))
- Algebra $\iff$ Geometria: Riga e Compasso ⊂ Teoria di Galois. Coordinate nello spazio = "cartografie", equivalenza numero—punto.
- Scienze Applicate: Teoria delle Categorie usata in: Geometria Differenziale (proiettiva o affine), Topologia Algebrica, Algebra Omologica ($K-$teoria), Fisica Teorica, Teoria dell'informazione (Shannon). Analisi funzionale (impostazione kolmogoroviana alla probabilità), Teoria dei Gruppi in Chimica e Cristallografia...
- Geometria Algebrica: Studiare spazi che non hanno una topologia "a base reale" (*curve* in caratteristica 2, su campi finiti, ...) ⇒ Teoria dei Numeri, Teoria delle Stringhe.

Cosa è lo Spazio?

Tutti (?) sappiamo cos'è uno spazio metrico (X, d).

- Se rimuovessimo l'assioma $d(x, y) = 0 \iff x = y$?

$$\begin{aligned} d\colon \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \int_{[a,b]} |f-g| \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

- Se rimuovessimo l'assioma di simmetria $d(x, y) = d(y, x)$?

  $d(x, y) =$ *lavoro necessario a spostarsi da x a y in una regione di montagna.*

- Se volessimo una metrica che induce topologie non di Hausdorff?
- Inventare un altro esempio (trovare una metrica in cui tutti i triangoli siano isosceli)...

E ora più difficile (=astratto)!

Tutti (?) sappiamo cos'è uno spazio topologico (X, τ).

In (X, τ) distinguiamo i punti solo perché gli aperti ce lo permettono. Cosa ce ne importa dei punti? Idea! Dimentichiamocene.
Una topologia su X è

- Un insieme $\mathbf{Op}(X)$ fatto di *aperti*;
- Una operazione binaria $\wedge \colon \mathbf{Op}(X) \times \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{Op}(X) \colon (U, V) \mapsto U \cap V$;
- Una operazione $\mathscr{I}$−aria $\vee \colon \mathbf{Op}(X)^{\mathscr{I}} \to \mathbf{Op}(X) \colon \{U_i\} \mapsto \bigcup_{i \in \mathscr{I}} U_i$
- $+$ certi assiomi...

Locales

Astraiamo la cosa: un locale (pron. ləʊ'kɑːl) consiste in una terna $(\mathcal{O}, \bigvee, \bigwedge)$ in cui

- $\mathcal{O}$ è un insieme non vuoto;
- $\bigvee : \mathcal{O}^{\mathscr{I}} \to \mathcal{O}$ è una operazione $\mathscr{I}-$aria per ogni insieme $\mathscr{I}$ (eventualmente infinito!), che manda una famiglia di elementi di $\mathcal{O}$ nella loro "unione";
- $\bigwedge : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ è una operazione binaria che manda due elementi di $\mathcal{O}$ nella loro "intersezione";
- $+$ certi assiomi (commutatività, distributività,. . .).

Dualizzare è facile: uno spazio topologico si descrive anche coi chiusi.

Dualmente Parlando...

Ad ogni spazio topologico si associa il reticolo completo dei suoi aperti (che è di più, un'algebra di Heyting). Ad ogni spazio topologico X si associa l'anello delle funzioni continue su X con le operazioni puntuali.

Aperti

- $X \mapsto \mathbf{Op}(X)$;
- $f : X \to Y$ induce...
- $f^* : \mathbf{Op}(Y) \to \mathbf{Op}(X)$

$$U \mapsto f^{\leftarrow} U$$

Anelli

- $X \mapsto \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$;
- $f : X \to Y$ induce...
- $f^* : \mathscr{C}(Y, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$

$$g \mapsto f^*(g) = g \circ f$$

La geometria di uno spazio è duale (=ha le frecce rovesciate) all'algebra (dei suoi aperti, o delle funzioni continue) che si può definire su di esso.

. . . And Beyond the Topoi.

- In Topologia si scandaglia uno spazio (X, τ) attraverso l'anello delle funzioni continue $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ definite su di esso.
- In Geometria Differenziale si scandaglia uno spazio X attraverso l'anello delle funzioni *lisce* definite su di esso $\mathscr{C}^\infty(X)$.
- In Geometria Algebrica si scandaglia uno spazio (definito da zeri di polinomi) attraverso l'anello $k[X]$ delle funzioni polinomiali definite su di esso.

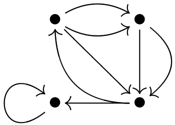
Astraete questo! Dato uno spazio X (di qualche tipo), la collezione di tutti i modi di sondarlo (funzioni continue, lisce, polinomi, . . . è la teoria dei Fasci su X) ha una qualche struttura. È un *topos* (plur. *topoi*).

L'idea

Insiemi

- Entità di natura introspettiva. . .
- . . . identificate dai loro elementi.
- $\{\boxtimes, \bullet, \diamondsuit, \cdots\}$ e nulla in mezzo. . .

Categorie

- Entità di natura *relazionale*. . .
- . . . identificate dai loro legami con l' "Universo".
- 

  . . . e ciò che conta sono sempre solo le frecce.

L'idea: Considerare gli "enti" in studio come *indivisibili* (in un senso leibniziano) tra cui sono date in partenza un certo numero di relazioni a loro esterne, e interne a una collezione che, idealmente, abbraccia [. . .] "tutti" gli *oggetti* di cui si può dare una opportuna definizione intensionale.