



Università degli Studi di Perugia Dipartimento di Ingegneria

Controllo e Automazione - A.A. 2021/2022

Report esercitazioni

Paolo Leopardi - paolo.leopardi@studenti.unipg.it

Indice

Esercitazione 1	1
Esercitazione 2	2
Esercitazione 3	4
Esercitazione 4	6
Esercitazione 5	7
Esercitazione 6	12
Esercitazione 7	14
Esercitazione 8	15
Esercitazione 9	17
Esercitazione 10	22
Controllo del robot	25
Controllo del veicolo	26
Esercitazione facoltativa	28

Esercitazione 1

Obiettivo

Soluzione dell'Equazione Algebrica di Riccati (ARE) utilizzando il modello lineare massa-molla-smorzatore.

descrizione	variabile	valore
massa	m	1
smorzamento	b	-1
rigidezza	c	-1
condizioni iniziali	x_0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
costo stato	Q	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
costo controllo	R	1

Tabella 1: Dati del problema

Svolgimento

Il sistema è:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u.$$

Il modello massa-molla-smorzatore è instabile per valori di b e c minori di zero, come si osserva in Figura 1(a). L'Equazione Algebrica di Riccati è definita come:

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T. \quad (1)$$

La soluzione P^* che risolve (1) è utilizzata per costruire il controllo ottimo grazie al teorema LQR infinite horizon. Il sistema a ciclo chiuso $\dot{x} = (A - BK)x$ ottenuto grazie alla legge di controllo:

$$u = -Kx, \quad K = -R^{-1}B^TP^*$$

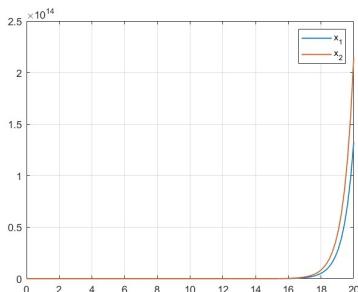
è asintoticamente stabile. Inoltre il costo ottimo che si ottiene è

$$V^* = x_0^T Px_0.$$

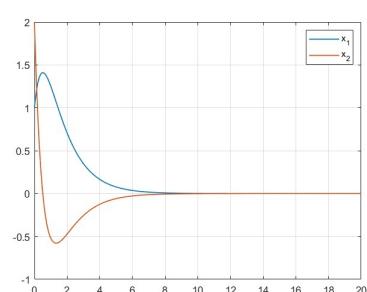
Impiegando i dati del problema si ottengono i seguenti risultati:

$$P^* = \begin{bmatrix} 2.6955 & 2.4142 \\ 2.4142 & 3.6131 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 2.4142 & 3.6131 \end{bmatrix} \quad V^* = 26.8049.$$

con K che rende il sistema asintoticamente stabile come mostrato in Figura 1(b).



(a) Andamento del sistema in evoluzione libera



(b) Andamento del sistema controllato

Figura 1: Andamento del sistema in evoluzione libera e con legge di controllo ottima

Esercitazione 2

Obiettivo

Regolazione con informazione parziale del carrello con pendolo linearizzato.

descrizione	variabile	valore
massa carrello	M	5
massa pendolo	m	5
lunghezza pendolo	l	1
accelerazione gravità	g	9.81

Tabella 2: Dati del problema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)Mgl}{MJ_p} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & -\frac{ml}{MJ_p} \\ -\frac{ml}{MJ_p} & \frac{m+M}{MJ_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}, \quad J_p = ml^2$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Svolgimento

È stato considerato il caso in cui non agiscono i disturbi. Il riferimento da inseguire è $y_d = [2 \sin(t) \quad \pi/2]$, i termini indicano rispettivamente la posizione desiderata per il carrello e l'angolo desiderato per il pendolo. Si hanno quindi le seguenti matrici:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = 1$$

Il sistema considerato è quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw \\ \dot{w} = Sw \\ e = Cx + Qw \end{cases}$$

L'idea è quella di applicare il teorema PI che, sotto l'ipotesi di validità delle condizioni $H1, H2, H3^*$, mi consente di dire che il problema di regolazione con informazione parziale ammette soluzione se e solo se esistono Π e Γ tale per cui:

$$\Gamma S = A\Pi + B\Gamma + P \tag{2}$$

$$0 = C\Pi + Q. \tag{3}$$

L'assunzione $H1$ dice che la matrice S deve essere antistabile, ovvero S non deve avere gli autovalori nel semipiano sinistro; l'ipotesi è chiaramente verificata essendo $\sigma(S) = \{i, -i, 0\}$.

L'assunzione $H2$ dice la coppia (A, B) è controllabile, l'ipotesi è verificata, dato che la matrice di controllabilità ha rango pieno.

L'assunzione $H3^*$ dice che la coppia

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix}}_{A_e}, \underbrace{\begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}}_{C_e} \right)$$

sia rilevabile, cioè $\exists L : \sigma(A_e - LC_e) \subset \mathbb{C}^-$; anche questa ipotesi è verificata essendo la coppia (A_e, C_e) osservabile e quindi anche rilevabile.

Ora bisogna verificare se esistono le matrici Π e Γ che soddisfano (2) e (3). Le matrici esistono e sono:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -5.500 & 0 \\ 0 & -0.500 & -4.9050 \end{bmatrix}.$$

Il problema PI è risolubile e quindi esistono le matrici F, G, H , tale per cui il controllore:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + Ge \\ u = H\xi \end{cases}$$

garantisce che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile e che $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$. In particolare si ottiene:

$$F = \begin{bmatrix} A - G_0C + BK & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1C & S - G_1Q \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad H = [K \quad \Gamma - K\Pi]$$

con K e G^1 tal per cui $\sigma(A + BK) \subset \mathbb{C}^-$ e $\sigma(A_e - GC_e) \subset \mathbb{C}^-$.

Infine sono state testate le prestazioni del controllore sintetizzato. Come si osserva in Figura 2 il controllore effettua correttamente il tracking della traiettoria di riferimento.

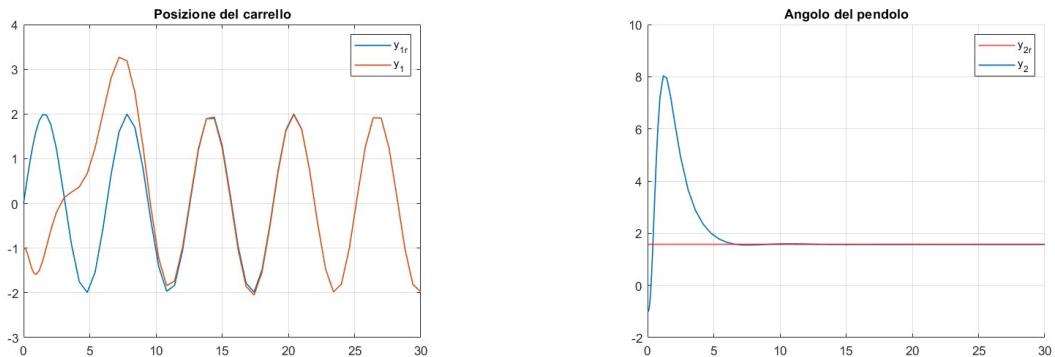


Figura 2: Inseguimento di traiettoria carrello con pendolo linearizzato

¹le matrici K, G, F e H non sono riportate numericamente per questioni di spazio

Esercitazione 3

Obiettivo

Soluzione analitica e numerica equazioni non lineari con commenti su esistenza, unicità e completezza delle soluzioni.

$$\dot{x} = x^2 \quad (4)$$

$$\dot{x} = -x^3 \quad (5)$$

$$\dot{x} = x^3 \quad (6)$$

Svolgimento

$$\dot{x} = x^2 \quad (4)$$

La funzione non dipende dal tempo ed è continua rispetto ad x , quindi per il teorema di Carathéodory esiste una soluzione. La funzione è localmente lipschitz per ogni intervallo scelto, difatti considerando la condizione di Lipschizianità nel caso scalare:

$$f'(x) = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L$$

si ha che $f'(x) = 2x$ che è limitata per un qualsiasi intervallo limitato. Applicando il teorema Lip.1 si ha che esiste un'unica soluzione nell'intervallo $[t_0, \delta]$. La $f'(x)$ non è globalmente lipschitz quindi non si può estendere la condizione di esistenza e unicità (non è possibile applicare il teorema Lip.2). Il teorema Lip.3 è applicabile solo per una condizione iniziale $x_0 < 0$ poiché si ottiene che $\dot{x} > 0$ e quindi la soluzione converge a zero, mentre invece per $x_0 > 0$ la soluzione diverge; quindi per $x_0 < 0$ esiste un'unica soluzione per $\forall t \geq t_0$. Assumendo come condizione iniziale $x_0 = -1$ si ottiene la seguente soluzione analitica:

$$x(t) = -\frac{1}{t+1}.$$

La soluzione numerica è mostrata in Figura 3 per le condizioni iniziali $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$.

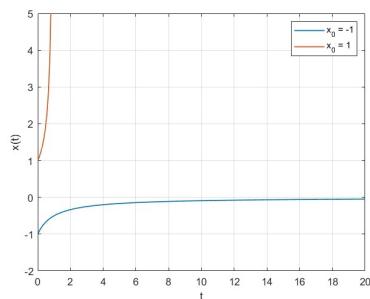


Figura 3: Soluzione numerica $\dot{x} = x^2$

$$\dot{x} = -x^3 \quad (5)$$

La funzione non dipende dal tempo ed è continua rispetto ad x , quindi per il teorema di Carathéodory esiste una soluzione. La funzione è localmente lipschitz per ogni intervallo scelto, difatti considerando la condizione di Lipschizianità nel caso scalare:

$$f'(x) = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L$$

si ha che $f'(x) = -3x^2$ che è limitata per un qualsiasi intervallo limitato. Applicando il teorema Lip.1 si ha che esiste un'unica soluzione nell'intervallo $[t_0, \delta]$. La $f'(x)$ non è globalmente lipschitz quindi non si può estendere la condizione di esistenza e unicità (non è possibile applicare il teorema Lip.2). La funzione $-x^3$ ha $\dot{x} > 0$ se $x < 0$ e $\dot{x} < 0$ se $x > 0$; quindi assumendo una condizione iniziale $x_0 > 0$ la soluzione non uscirà mai dall'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq x_0\}$. Applicando il teorema Lip.3 si ha che esiste

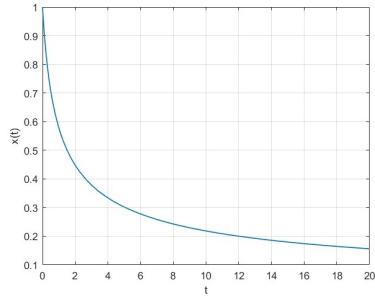


Figura 4: Soluzione numerica $\dot{x} = -x^3$

un'unica soluzione $\forall t \geq t_0$. Assumendo come condizione iniziale $x_0 = 1$ si ottiene la seguente soluzione analitica:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}.$$

La soluzione numerica per $x_0 = 1$ è mostrata in Figura 4.

$$\dot{x} = x^3 \quad (6)$$

La funzione non dipende dal tempo ed è continua rispetto ad x , quindi per il teorema di Carathéodory esiste una soluzione. La funzione è localmente lipschitz per ogni intervallo scelto, difatti considerando la condizione di Lipschizianità nel caso scalare:

$$f'(x) = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L$$

si ha che $f'(x) = 3x^2$ che è limitata per un qualsiasi intervallo limitato. Applicando il teorema Lip.1 si ha che esiste un'unica soluzione nell'intervallo $[t_0, \delta]$. La $f'(x)$ non è globalmente lipschitz quindi non si può estendere la condizione di esistenza e unicità (non è possibile applicare il teorema Lip.2). Non è possibile applicare il teorema Lip.3 che fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza e unicità globale, dato che per una qualunque condizione iniziale x_0 la soluzione tende a $\pm\infty$. Assumendo come condizione iniziale $x_0 = 1$ si ottiene la seguente soluzione analitica:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}.$$

La soluzione numerica per $x_0 = 1$ è mostrata in Figura 5. Si osserva come la soluzione diverge avendo considerato $t_0 = 0$ e $t_f = 20$; difatti analizzando la soluzione analitica si osserva che questa è ammissibile per valori di $t \leq 0$. Assumendo quindi $t_0 = 0$ e $t_f = -20$, non considerando quindi il significato fisico di t , si ottiene una soluzione convergente.

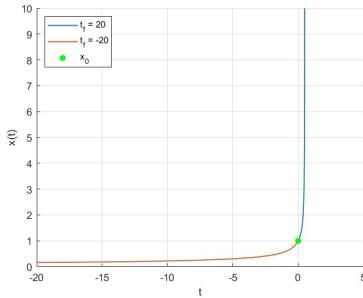


Figura 5: Soluzione numerica $\dot{x} = x^3$

Esercitazione 4

Obiettivo

Analisi degli equilibri del circuito con diodo tunnel.

descrizione	variabile	valore
tensione batteria	E	2
resistenza	R	3
capacità	C	4
induttanza	L	5

Tabella 3: Dati del problema

Svolgimento

Il modello utilizzato, considerando $x_1 = v_c$ e $x_2 = i_l$ è il seguente:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}(-h(x_1) + x_2), \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + E)$$

dove $h(V_R) = 17.76V_R - 103.79V_R^2 + 229.62V_R^3 - 226.31V_R^4 + 83.72V_R^5$ è la relazione non lineare corrente-tensione del diodo tunnel.

I punti di equilibrio di un sistema sono quei punti tali per cui:

$$f_1(x_{1e}, x_{2e}) = 0, \quad f_2(x_{1e}, x_{2e}) = 0.$$

Nel modello in esame i punti di equilibrio ottenuti sono le coppie $(x_{1e}, x_{2e})^2$

$$x_{e1} = (0.92284040687990939083802006768695, 0.35905319770669686972065997743768)$$

$$x_{e2} = (0.29701004338456248065493804749073, 0.56766331887181250644835398416976)$$

$$x_{e3} = (0.04937690188863669145684217051087, 0.65020769937045443618105260982971).$$

Successivamente è stata considerata l'approssimazione lineare del sistema nell'intorno dei punti trovati e sono stati calcolati i rispettivi autovalori. I risultati per i tre punti di equilibrio trovati sono i seguenti:

$$\sigma(x_{e1}) = (-1.1632, -0.6888), \quad \sigma(x_{e2}) = (0.8623, -0.5658), \quad \sigma(x_{e3}) = (-2.2404, -0.6305)$$

Analizzando gli autovalori dei punti di equilibrio è possibile concludere sulla natura degli stessi punti: x_{e1} è punto di equilibrio stabile essendo $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, x_{e2} è punto di sella, x_{e3} è punto di equilibrio stabile essendo $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. La dinamica del sistema è illustrata in Figura 7.

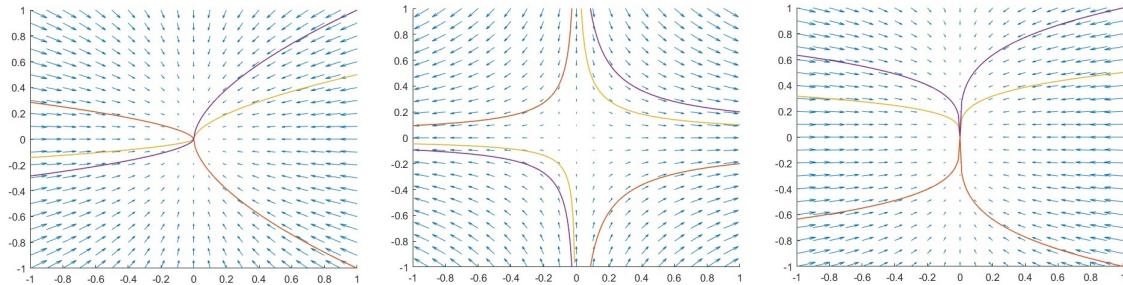


Figura 6: Andamento del sistema linearizzato nell'intorno dei punti x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}

²sono stati considerati solo i punti di equilibrio tali per cui $(x_{1e}, x_{2e}) \in \mathbb{R}^2$

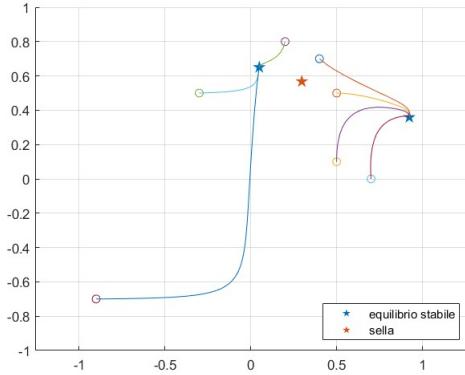


Figura 7: Dinamica del sistema

Esercitazione 5

Obiettivo

Analisi del sistema massa-molla-smorzatore in diversi casi.

$$M\ddot{x} = -k_1x + b_1\dot{x} \quad (7)$$

$$M\ddot{x} = -k_1x - k_2x^3 - b_1\dot{x} - b_2\dot{x}^3 \quad (8)$$

$$M\ddot{x} = -k_1x + k_2x^3 - b_1\dot{x} - b_2\dot{x}^3 \quad (9)$$

$$M\ddot{x} = -k_1x + k_2x^3 - b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^3 \quad (10)$$

descrizione	variabile	valore
massa	M	100
rigidezza	k_1	10
smorzamento	b_1	50
rigidezza	k_2	1
smorzamento	b_2	5

Tabella 4: Dati del problema

Svolgimento

$$M\ddot{x} = -k_1x + b_1\dot{x} \quad (7)$$

Considerando $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ il sistema può essere scritto come:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{M}x_1 - \frac{b_1}{M}x_2\end{aligned}$$

Per studiare le proprietà di stabilità dell'origine l'idea è quella di utilizzare il teorema di Lyapunov, quindi bisogna trovare una funzione di Lyapunov $V(x)$ definita positiva e tale per cui $\dot{V}(x)$ sia almeno semidefinita negativa. La $V(x)$ è stata scelta come:

$$\begin{aligned}V(x) &= x^T Px = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} \frac{k_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{M}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \dot{V}(x) &= -b_1x_2^2.\end{aligned}$$

$V(x)$ è definita positiva in \mathbb{R}^2 poiché è una forma quadratica con $\sigma(P) \subset \mathbb{C}^+$ mentre invece $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa, quindi l'origine è stabile. Essendo l'origine del sistema stabile è possibile costruire la coppia $(\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ considerando:

$$\varepsilon = 1$$

$$\delta = \varepsilon \sqrt{\frac{\min(k_1, M)}{\max(k_1, M)}}.$$

La curva di livello Ω_β è un ellisse con semiassi pari a $\sqrt{\frac{\beta}{\lambda_{min}(P)}}, \sqrt{\frac{\beta}{\lambda_{max}(P)}}$, $\beta = \lambda_{min}(P)\varepsilon^2$. I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 8, come da definizione di stabilità le traiettorie inizializzate all'interno della circonferenza B_δ non escono dalla circonferenza B_ε . L'andamento delle traiettorie suggerisce che l'origine potrebbe essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile, infatti se si considera la matrice della dinamica A del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{b_1}{M} \end{bmatrix}$$

si ha che $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ e quindi il sistema lineare è asintoticamente stabile, tuttavia per come è stata definita la funzione di Lyapunov non si può a questa conclusione. Per ottenere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ si deve avere che $k_1 = M$, ottenendo quindi una matrice P:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k_1}{2} \end{bmatrix}$$

che ha due autovalori identici pari a $\frac{k_1}{2}$ e quindi $\Omega_\beta = B_\delta = B_\varepsilon$.

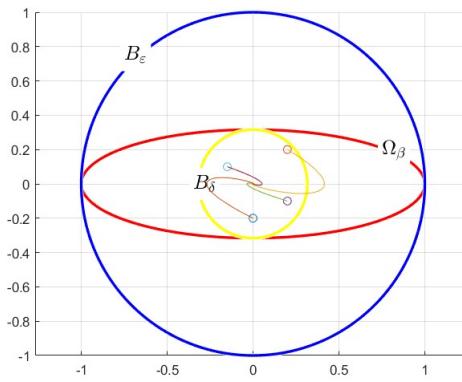


Figura 8: Andamento delle traiettorie del sistema per differenti condizioni iniziali contenute in B_δ

$$M\ddot{x} = -k_1x - k_2x^3 - b_1\dot{x} - b_2\dot{x}^3 \quad (8)$$

Considerando $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ il sistema può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{M}x_1 - \frac{k_2}{M}x_1^3 - \frac{b_1}{M}x_2 - \frac{b_2}{M}x_2^3 \end{aligned}$$

Per studiare le proprietà di stabilità dell'origine l'idea è quella di utilizzare il teorema di Lyapunov, quindi bisogna trovare una funzione di Lyapunov $V(x)$ definita positiva e tale per cui $\dot{V}(x)$ sia almeno semidefinita negativa. La $V(x)$ è stata scelta come:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}Mx_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4 \\ \dot{V}(x) &= -b_1x_2^2 - b_2x_2^2 \end{aligned}$$

$V(x)$ è definita positiva in \mathbb{R}^2 mentre invece $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa, quindi l'origine è stabile. Essendo l'origine del sistema stabile è possibile costruire la coppia $(\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ fissando una curva di livello c arbitraria. Per costruire le circonferenze B_δ e B_ε considero l'intersezione della funzione di Lyapunov $V(x) = c = 5$ con gli assi x_1 e x_2 . Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} V(0, x_2) &= 0.3162 = a \\ V(x_1, 0) &= 0.9770 = b \\ \varepsilon &= \max(a, b) \\ \delta &= \min(a, b). \end{aligned}$$

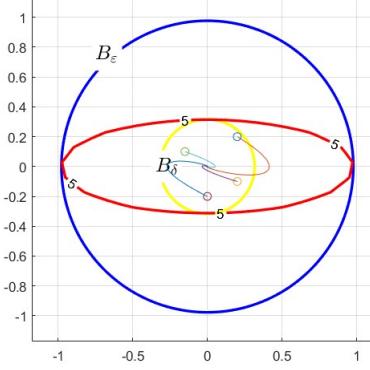


Figura 9: Andamento delle traiettorie del sistema per differenti condizioni iniziali contenute in B_δ

Si ottiene che i valori di a e b , e di conseguenza quelli di ϵ e δ , sono dipendenti dalla curva di livello scelta. I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 9 considerando $c = 5$, come da definizione di stabilità le traiettorie inizializzate all'interno della circonferenza B_δ non escono dalla circonferenza B_ε . La curva di livello c somiglia ad un'ellisse ma in realtà non lo è a causa della non linearità: aumentando il valore di c infatti l'effetto della non linearità si intensifica determinando delle curve di livello sempre più differenti da un'ellisse, mentre al diminuire di c l'effetto della non linearità scompare. Ponendo $c = 1000$ il fenomeno è ben visibile come dimostra la Figura 10. Per ottenere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ si deve avere la stessa lunghezza per i semiassi dell'ellisse, cioè $a = b$.

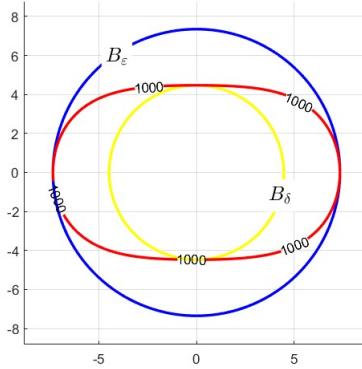


Figura 10: Curva di livello per $c = 1000$

$$M\ddot{x} = -k_1x + k_2x^3 - b_1\dot{x} - b_2\dot{x}^3 \quad (9)$$

Considerando $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ il sistema può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{M}x_1 + \frac{k_2}{M}x_1^3 - \frac{b_1}{M}x_2 - \frac{b_2}{M}x_2^3 \end{aligned}$$

Per studiare le proprietà di stabilità dell'origine l'idea è quella di utilizzare il teorema di Lyapunov, quindi bisogna trovare una funzione di Lyapunov $V(x)$ definita positiva e tale per cui $\dot{V}(x)$ sia almeno semidefinita negativa. La $V(x)$ è stata scelta come:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}Mx_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{4}k_2x_1^4 \\ \dot{V}(x) &= -b_1x_2^2 - b_2x_2^4 \end{aligned}$$

$V(x)$ non è definita positiva in \mathbb{R}^2 quindi devo trovare l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ in cui $V(x)$ è definita positiva, $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa. Per ricavare l'insieme D si considerano i i punti di equilibrio del sistema e si ottiene:

$$x_{1e} = (0, 0), \quad x_{2e} = (-\sqrt{10}, 0), \quad x_{3e} = (\sqrt{10}, 0).$$

Ora si considera la curva di livello c^* passante per i punti di equilibrio x_{2e}, x_{3e} e si trovano le intersezioni con l'asse x_2 . Le intersezioni con l'asse x_1 sono i punti di equilibrio x_{2e}, x_{3e} , le intersezioni con l'asse x_2 sono i punti $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. L'insieme D è quindi delimitato dai punti

$$\alpha_1 = \left(-\sqrt{10}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \alpha_2 = \left(-\sqrt{10}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \alpha_3 = \left(\sqrt{10}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \alpha_4 = \left(\sqrt{10}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Nell'insieme D trovato la $V(x)$ è definita positiva, come mostrato in Figura 11, quindi l'origine è stabile. Ora per trovare l'insieme $\Omega_\beta \subset D$ basta scegliere una curva di livello $c < c^*$. Ottenuto l'insieme Ω_β si

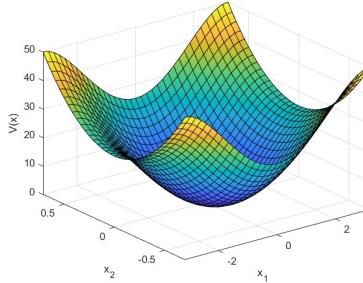


Figura 11: Funzione di Lyapunov $V(x)$ limitatamente all'insieme D

possono ricavare i valori di ε e δ considerando le intersezioni di $V(x) = c$ con gli assi x_1 e x_2 :

$$\begin{aligned} V(0, x_2) &= a \\ V(x_1, 0) &= b \\ \varepsilon &= \max(a, b) \\ \delta &= \min(a, b) \end{aligned}$$

I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 12, come da definizione di stabilità le traiettorie inizializzate all'interno della circonferenza B_δ non escono dalla circonferenza B_ε . Per ottenere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ si deve avere la stessa lunghezza per i semiassi dell'ellisse, cioè $a = b$.

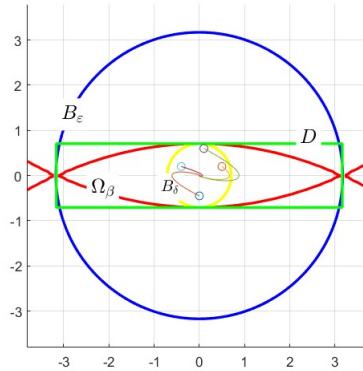


Figura 12: Andamento delle traiettorie del sistema per differenti condizioni iniziali contenute in B_ε

$$M\ddot{x} = -k_1x + k_2x^3 - b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^3 \quad (10)$$

Considerando $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ il sistema può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{M}x_1 + \frac{k_2}{M}x_1^3 - \frac{b_1}{M}x_2 + \frac{b_2}{M}x_2^3 \end{aligned}$$

Per studiare le proprietà di stabilità dell'origine l'idea è quella di utilizzare il teorema di Lyapunov, quindi bisogna trovare una funzione di Lyapunov $V(x)$ definita positiva e tale per cui $\dot{V}(x)$ sia almeno

semidefinita negativa. La $V(x)$ è stata scelta come:

$$V(x) = \frac{1}{2}Mx_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{4}k_2x_1^4$$

$$\dot{V}(x) = -b1x_2^2 - b2x_2^4$$

$V(x)$ non è definita positiva e $\dot{V}(x)$ non è semidefinita negativa, devo trovare un insieme D per cui $V(x)$ è definita positiva e $\dot{V}(x)$ è almeno semidefinita negativa. Sono stati calcolati i punti di equilibrio del sistema e si ottiene:

$$x_{1e} = (0, 0), \quad x_{2e} = (-\sqrt{10}, 0), \quad x_{3e} = (\sqrt{10}, 0).$$

Successivamente è stato calcolato il valore di $V(x)$ nei punti di equilibrio x_{2e} , x_{3e} e si ottiene $c^* = 25$. Poi si calcola l'intersezione della curva di livello c^* con l'asse x_2 . La funzione di Lyapunov è mostrata in Figura 13 e si osserva che all'interno della curva di livello c^* la funzione è definita positiva. Ora devo

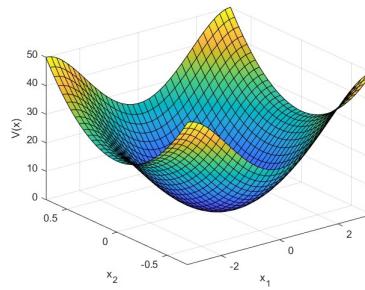


Figura 13: Andamento di $V(x)$ all'interno della curva di livello c

trovare un insieme tale per cui $\dot{V}(x)$ sia almeno definita negativa:

$$\dot{V}(x) = -b1x_2^2 - b2x_2^4 \leq 0 \Rightarrow x_2 \in [-\sqrt{10}, \sqrt{10}].$$

Ora si confrontano i valori appena trovati con i valori di x_2 trovati dall'intersezione di c^* con l'asse x_2 . Scegliendo il minimo fra le coppie di valori trovate ottengo le coppie di punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ che mi determinano l'insieme D come nel caso precedente; in questo insieme ho che la $V(x)$ è definita positiva e la $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa, quindi l'origine è stabile. Adesso si vuole applicare il teorema di Barbashin-Krasovskii-LaSalle per verificare se l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile. Definendo l'insieme S :

$$S = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$$

devo avere che l'unica soluzione x che si trova in S è $x \equiv 0$. Prendendo $x_2 = 0$ si ottiene che $x_1 = 0$ e che x_2 si annulla in 0 e negli altri punti di equilibrio. Quindi considerando D in modo tale che i punti di equilibrio x_{2e} e x_{3e} siano esclusi da D il teorema mi dice che l'origine è asintoticamente stabile e se considero $\Omega_\beta \subset D$ questo è una stima della regione di attrazione, sceglierò Ω_β come la più grande curva di livello contenuta in D , quindi $\Omega_\beta \cap D = \emptyset$.

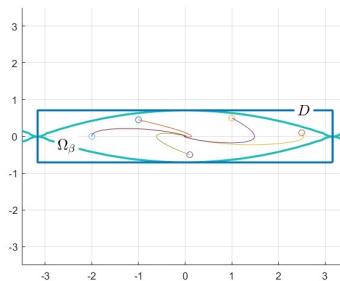


Figura 14: Stima del bacino di attrazione dell'origine

Esercitazione 6

Obiettivo

Pendolo: analisi di stabilità e stima del bacino di attrazione dell'origine tramite funzione di Lyapunov e tramite teorema di Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

descrizione	variabile	valore
lunghezza pendolo	l	10
massa pendolo	m	100
coefficiente attrito	k	150
accelerazione gravità	g	9.81

Tabella 5: Dati del problema

Svolgimento

Il sistema, considerando x_1 come la posizione angolare e x_2 come la velocità angolare, è:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{lm} x_2\end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di Lyapunov è stata scelta $V(x)$ come:

$$V(x) = \frac{1}{2} ml^2 x_2^2 + mgl(1 - \cos(x_1)) \quad (11)$$

$$\dot{V}(x) = -klx_2^2 \quad (12)$$

$V(x)$ non è definita positiva su tutto \mathbb{R}^2 quindi si considera $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -2\pi < x < 2\pi\}$, in questo insieme $V(x)$ è definita positiva e $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa. Quindi l'origine del sistema è stabile. Utilizzando invece una diversa funzione di Lyapunov:

$$\begin{aligned}V(x) &= glm(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2} x^T P x, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ \dot{V}(x) &= \left(p_{11} - \frac{kp_{12}}{lm} \right) x_1 x_2 + \left(p_{12} - \frac{kp_{22}}{lm} \right) x_2^2 - \sin(x_1) \left(\frac{gp_{12}}{l} x_1 + \left(\frac{gp_{22}}{l} - glm \right) x_2 \right)\end{aligned}$$

scegliendo:

$$\begin{aligned}p_{12} &= \frac{kl}{2} \\ p_{11} &= \frac{k}{lm} p_{12}^2 \\ p_{22} &= l^2 m\end{aligned}$$

considerando l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x < \pi\}$ si ottiene che $V(x)$ è definita positiva e $\dot{V}(x)$ è definita negativa, quindi l'origine è asintoticamente stabile. Per avere una stima del bacino di attrazione considero una curva di livello interamente contenuta in D , per fare questo considero c^* come la curva di livello che interseca il punto di equilibrio instabile $(\pi, 0)$, quindi $c^* = V(\pi, 0)$, e prendo $\Gamma = 0.99c^*$. La curva di livello Γ è una stima del bacino di attrazione. La stima trovata è illustrata in Figura 15(a).

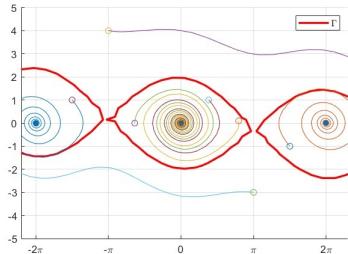
Ora si vuole studiare l'origine del sistema utilizzando il teorema di Barbashin-Krasovskii-LaSalle. Considerando la funzione $V(x)$:

$$V(x) = \frac{1}{2} ml^2 x_2^2 + mgl(1 - \cos(x_1)) \quad (13)$$

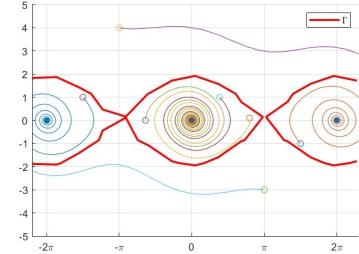
$$\dot{V}(x) = -klx_2^2 \quad (14)$$

si ottiene che $V(x)$ è semidefinita positiva e $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa in tutto \mathbb{R}^2 . Per applicare il teorema devo avere che $V(x)$ è definita positiva in un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$, quindi considero una curva di livello infinitesimalmente più piccola di quella che intercetta i punti di equilibrio instabili del sistema a $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, quindi $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x_1 < \pi\}$. Definendo l'insieme $S = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$

si osserva che l'unico invariante per S è $(0,0)$, quindi posso applicare il teorema. Si ottiene quindi che l'origine è asintoticamente stabile; è interessante osservare come le funzioni (11) e (13) siano uguali e di conseguenza anche (12) e (14), tuttavia con Lyapunov si è potuto concludere solo sulla stabilità dell'origine mentre invece con Barbashin-Krasovskii-LaSalle è stato possibile determinare la stabilità asintotica dell'origine. Inoltre considerando una curva $\Gamma \subset D$ questa è una stima del bacino di attrazione. Essendo $D \neq \mathbb{R}^2$ l'origine non è globalmente asintoticamente stabile, questo risultato era prevedibile dato che oltre all'origine ci sono altri punti di equilibrio asintoticamente stabili del tipo $(K2\pi, 0)$, $K = 1, \dots, n$. La stima del bacino di attrazione Γ è mostrata in Figura 15(b).



(a) Stima del bacino di attrazione con Lyapunov



(b) Stima del bacino di attrazione con Barbashin-Krasovskii-LaSalle

Figura 15: Stima dei bacini di attrazione

Esercitazione 7

Obiettivo

Algoritmo di Newton per robot planare a due link.

descrizione	variabile	valore
lunghezza braccio 1	l_1	1.5
lunghezza braccio 2	l_2	1

Tabella 6: Dati del problema

Svolgimento

Considero di avere una traiettoria dell'end-effector $p(t)$ da inseguire e devo ricavare la traiettoria nello spazio dei giunti $q(t)$ partendo da una condizione iniziale q_0 . In particolare si ha:

$$p(t) = \begin{bmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 + l_2) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ (l_1 + l_2) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

Definendo l'errore e come:

$$e = G(q) - p, \quad G(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{e} = J(q)\dot{q} - \dot{p}, \quad \dot{G}(q) = J(q)\dot{q}$$

Imponendo quindi che la dinamica dell'errore $\dot{e} = Ke$, $\sigma(K) \subset \mathbb{C}^-$ sia ha che l'errore tende a zero esponenzialmente. Invertendo la relazione si ottiene che:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)[Ke - \dot{p}], \quad K = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

I risultati ottenuti per le coordinate p_1 e p_2 dell'end effector sono illustrati in Figura 16. La traiettoria

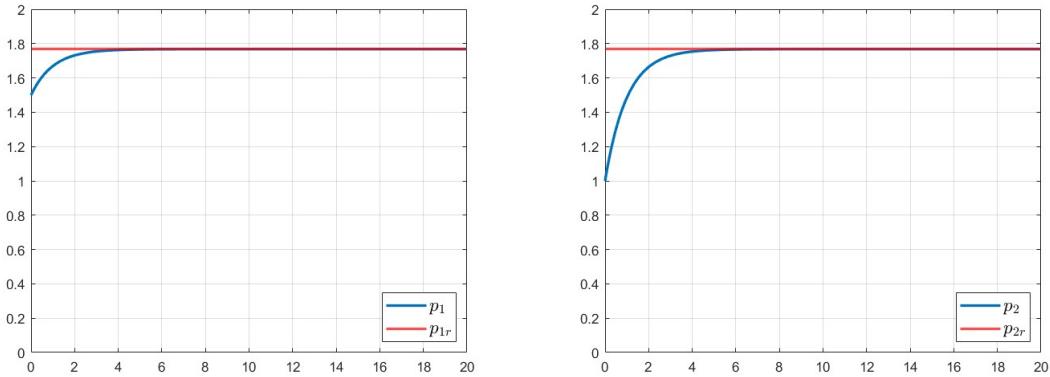


Figura 16: Andamento di p_1 e p_2

eseguita dal braccio robotico è illustrata nella sequenza in Figura 17.

Successivamente è stata considerata una seconda traiettoria dell'end-effector a partire dalle stesse condizioni iniziali q_0 definite precedentemente; la posizione desiderata non è costante ma variabile nel tempo:

$$p(t) = \begin{bmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

I risultati ottenuti per le coordinate p_1 e p_2 dell'end effector sono illustrati in Figura 18. La traiettoria eseguita dal braccio robotico è illustrata nella sequenza in Figura 19.

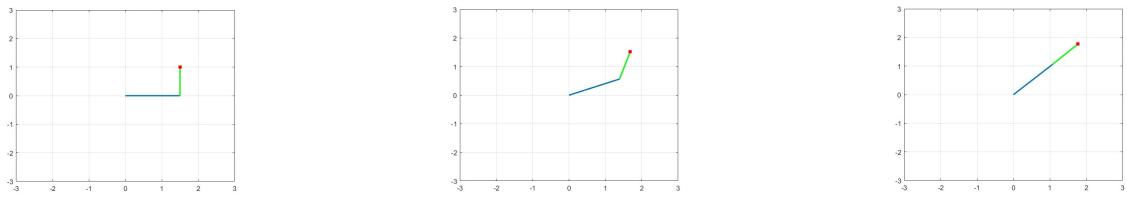


Figura 17: Traiettoria eseguita dal robot manipolatore

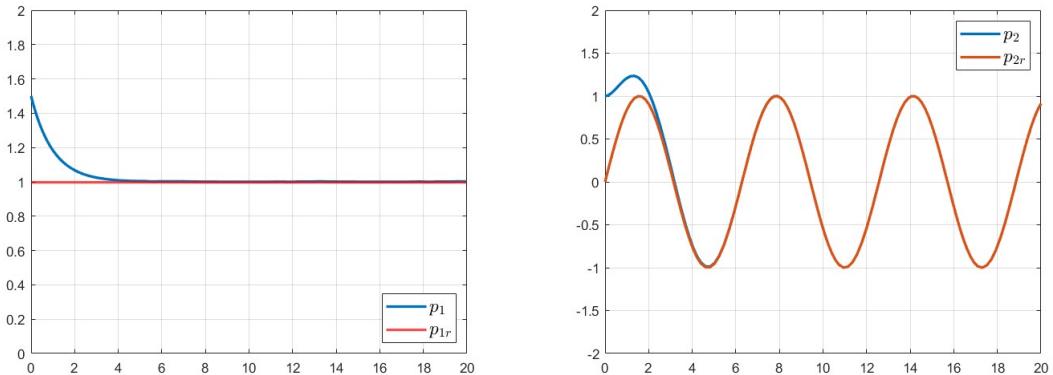


Figura 18: Andamento di p_1 e p_2

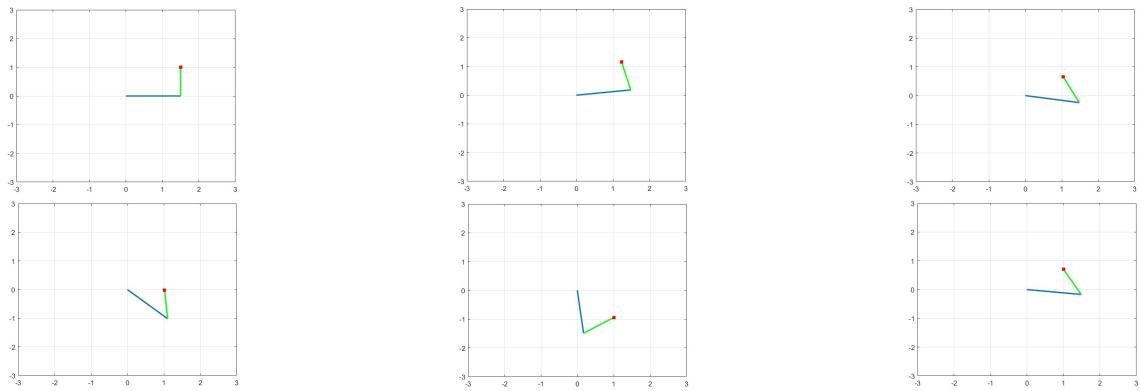


Figura 19: Traiettoria eseguita dal robot manipolatore

Esercitazione 8

Obiettivo

Controllo adattativo del sistema scalare

$$\dot{x} = ax + u.$$

Stabilizzazione ed inseguimento di traiettoria.

Svolgimento

Il parametro a è incognito, tuttavia per far evolvere il sistema è stato considerato $a = 2$. L'idea è quella di avere una legge di controllo del tipo:

$$u = -ax - kx,$$

ma essendo a incognita devo utilizzare una stima \hat{a} ottenendo quindi la legge di controllo:

$$u = -\hat{a}x - kx, \hat{a} = \gamma$$

dove γ è la legge adattativa. Definendo inoltre l'errore sulla stima di a come $\tilde{a} = a - \hat{a}$ si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{a}x - kx \\ \dot{\tilde{a}} &= -\gamma\end{aligned}$$

Definendo la funzione di Lyapunov $V(x, \tilde{a})$ si ottiene:

$$\begin{aligned}V(x, \tilde{a}) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\rho}\tilde{a}^2, \rho > 0 \\ \dot{V}(x, \tilde{a}) &= -kx^2 - \tilde{a}\left(x^2 - \frac{1}{\rho}\gamma\right)\end{aligned}$$

e imponendo $\gamma = \rho x^2$ si ottiene $\dot{V}(x, \tilde{a}) = -kx^2$, dove ρ è un parametro che mi consente di agire sulla velocità di convergenza di \tilde{a} . Applicando il [teorema di Barbashin-Krasovskii-LaSalle](#) si ottiene che $x = 0$ è punto di equilibrio asintoticamente stabile ma non mi da alcuna informazione su \tilde{a} se non che $\dot{\tilde{a}} = 0$, cioè che la dinamica dell'errore di stima è limitata. Questo significa che la legge di controllo u scelta mi consente di stabilizzare il sistema ma non mi garantisce la stima corretta del parametro a . I risultati ottenuti fissando $k = 10$ e $\rho = 10$ sono mostrati in Figura 20.

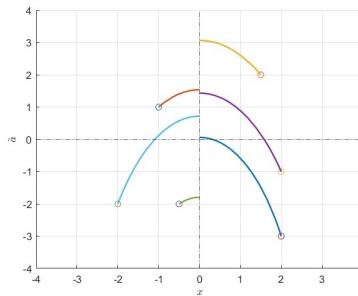


Figura 20: Andamento delle traiettorie del sistema per differenti condizioni iniziali

Ora si considera il caso in cui si vuole effettuare il tracking di una traiettoria, prendeondo come traiettoria di riferimento $x_r = \sin(t)$. La legge di controllo che si ottiene è:

$$u = -(\hat{a}x) + \dot{x}_r - ke$$

Anche in questo caso definendo una funzione di Lyapunov $V(e, \tilde{a})$ si dimostra che $e = 0$ è punto di equilibrio asintoticamente stabile e quindi riesco ad inseguire la traiettoria x_r . Ancora una volta non è detto che la \tilde{a} converga a zero. I valori utilizzati per la simulazione sono $a = 2$, $k = 10$, $\rho = 10$ e il risultato ottenuto è mostrato in Figura 21.

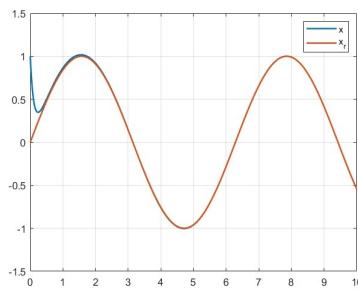


Figura 21: Tracking della traiettoria $x_r = \sin(t)$

Esercitazione 9

Obiettivo

Controllo di assetto: stabilizzazione con controllo lineare, inseguimento di traiettoria, inseguimento di traiettoria adattativa, stabilizzazione in assenza dell'ingresso u_3 .

descrizione	variabile	valore
inerzia 1	I_1	13470
inerzia 2	I_2	20450
inerzia 3	I_3	27200

Tabella 7: Dati del problema

Svolgimento

Il sistema è il seguente:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + u_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + u_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + u_3 \end{aligned}$$

Considerando il sistema in evoluzione libera, quindi $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, si ottiene che l'approssimazione lineare del sistema è:

$$A = \frac{\partial(\omega)}{\partial\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_3 & \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2 \\ \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3 & 0 & \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_1 \\ \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_2 & \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

che valutata nell'origine diviene una matrice identicamente nulla con $\sigma(A_{\omega=0}) = \{0, 0, 0\}$. Quindi l'origine non è esponenzialmente stabile non essendo $A_{\omega=0}$ Hurwitz, non posso ancora concludere sulla stabilità asintotica. Considerando come funzione di Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2}\omega^T I \omega$ si ottiene che

$$\dot{V}(x) = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3] \begin{bmatrix} (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{bmatrix} = 0$$

quindi l'origine è punto di equilibrio stabile per il teorema di Lyapunov, infatti la dinamica del sistema in evoluzione libera rimane limitata e non diverge come illustrato in Figura 22. Non avendo termini

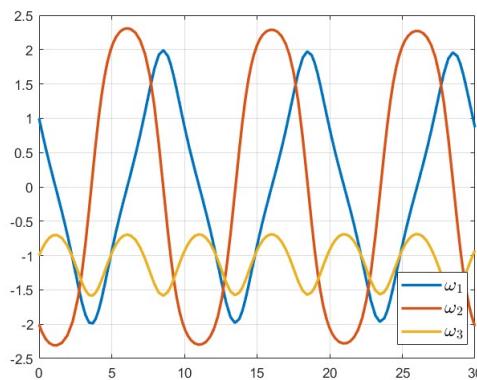


Figura 22: Dinamica del sistema in evoluzione libera

dissipativi si potrebbe dire da considerazioni fisiche che l'origine non è asintoticamente stabile e di conseguenza non lo è neanche esponenzialmente.

Ora si vuole rendere l'origine esponenzialmente stabile tramite una legge di controllo a feedback dallo stato. Si ottiene il sistema:

$$\omega = f(\omega) + u, \quad u = K\omega.$$

Considerando la linearizzazione del sistema nell'intorno dell'origine si ha:

$$J(0) = J_f(0) + J_K(0),$$

dove $J_f(0)$ è la matrice nulla calcolata precedentemente denominata $A_{\omega=0}$, di conseguenza basta scegliere:

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix}, \quad k_i > 0 \quad \Rightarrow \quad u = \begin{bmatrix} -k_1\omega_1 \\ -k_2\omega_2 \\ -k_3\omega_3 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi che il sistema linearizzato a ciclo chiuso è:

$$J_{CL}(0) = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix}$$

e quindi l'origine è localmente esponenzialmente stabile essendo $J_{CL}(0)$ Hurwitz. Considerando inoltre

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^T I \omega, \quad I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(x) = \omega^T I K \omega$$

si ha che l'origine è globalmente asintoticamente stabile per il [teorema di Barbashin-Krasovskii](#) e globalmente esponenzialmente stabile per il [teorema di Lyapunov per la stabilità esponenziale](#). Selezionando $k_1 = I_1$, $k_2 = I_2$, $k_3 = I_3$ e considerando come condizione iniziale $\omega_0 = [1 \ -2 \ -1]$ si ottiene l'andamento del sistema mostrato in Figura 23. In questo caso il controllo si comporta come un termine che dissipava energia.

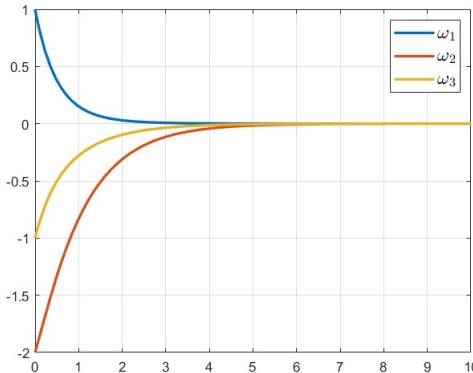


Figura 23: Dinamica del sistema con feedback dallo stato

Si considera il caso in cui si vuole effettuare il tracking di una traiettoria nota, in particolare ω_r risulta:

$$\omega_r = \begin{bmatrix} \omega_{r1} \\ \omega_{r2} \\ \omega_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Impiegando una legge di controllo di tipo [feedback linearization](#) si ha $u = -f(\omega) + v$ e quindi $\dot{\omega} = v$. Di conseguenza si ottiene :

$$e = \omega - \omega_r \dot{e} = \dot{\omega} - \dot{\omega}_r = v - \dot{\omega}_r$$

Imponendo $\dot{e} = Ke$ si ha che $v = Ke + \dot{\omega}_r$ e di conseguenza la legge di controllo complessiva è:

$$u = -f(\omega) + \underbrace{\dot{\omega}_r + K(\omega - \omega_r)}_v.$$

È utile notare che i segnali di controllo u_1, u_2, u_3 vengono scalati per un fattore pari all'inerzia nella dinamica del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{1}{I_1}[(I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1] \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{I_2}[(I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2] \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{I_3}[(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3]\end{aligned}$$

quindi u_1, u_2, u_3 vanno moltiplicati per le inerzie I_1, I_2, I_3 . Selezionando $k_1 = -1, k_2 = -1, k_3 = -1$ e considerando come condizione iniziale $\omega_0 = [1 \ -2 \ -1]$ si ottiene l'andamento del sistema mostrato in Figura 24.

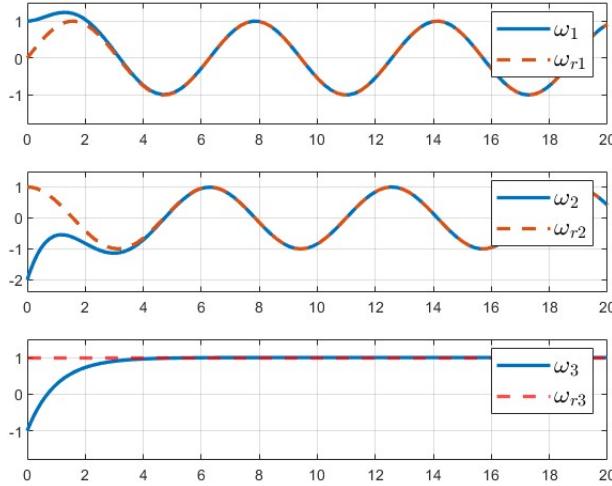


Figura 24: Tracking di traiettoria nota

Nel caso in cui si debba inseguire una traiettoria incognita di cui non si conosce quindi neanche la derivata bisogna capire come ricavare $\dot{\omega}_r$ impiegata nella legge di controllo. L'idea è quella di utilizzare un filtro che prende in ingresso il valore di ω_r al tempo corrente e mi restituisce la versione filtrata del riferimento e della sua derivata, chiaramente il tracking verrà effettuato della traiettoria in uscita dal filtro. In particolare il filtro sarà:

$$\dot{y} = -\alpha y + \beta \omega_r \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{\beta}{s - \alpha}.$$

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento del filtro $Y(s)$, considerando $\alpha = \beta = 10$ sono mostrati in Figura 25. La traiettoria da inseguire è ω_r definita in (15), chiaramente si assume di non

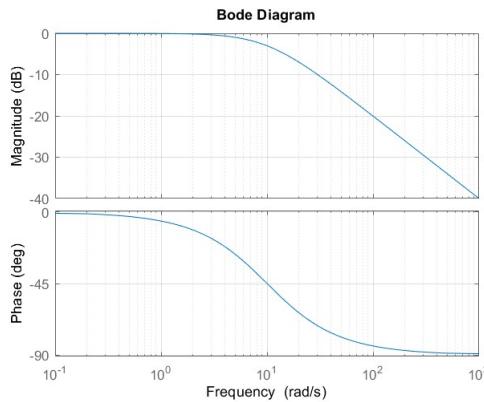


Figura 25: Diagramma di Bode del filtro della funzione di trasferimento del filtro $Y(s)$

conoscerla. I risultati ottenuti, utilizzando gli stessi guadagni k e la stessa condizione iniziale ω_0 del caso precedente, sono mostrati in Figura 26. È interessante osservare come il filtro introduca un leggero sfasamento coerentemente con il diagramma in Figura 25.

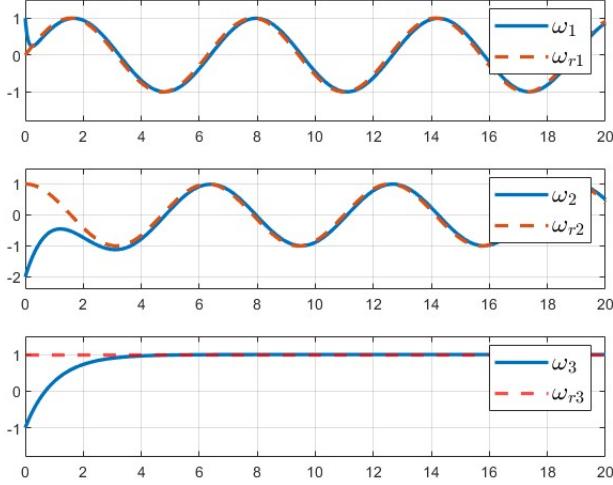


Figura 26: Tracking di traiettoria incognita

Si assume di non conoscere le inerzie I_1, I_2, I_3 e di voler inseguire la traiettoria di riferimento ω_r specificata in (15). Viene impiegato un controllo adattativo del tipo:

$$u = -f(\omega, \hat{I}) + \hat{I}\dot{\omega}_r - K\tilde{\omega}$$

dove \hat{I} è una stima della matrice delle inerzie I e $\tilde{\omega} = \omega - \omega_r$. I primi due termini della legge di controllo possono essere scritti come:

$$\begin{aligned} f(\omega, \tilde{I}) &= \Omega(\omega)\hat{I}_v, \quad \Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_2\omega_3 & -\omega_2\omega_3 \\ -\omega_3\omega_1 & 0 & \omega_3\omega_1 \\ \omega_1\omega_2 & -\omega_1\omega_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{I}_v = \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{bmatrix} \\ \hat{I} &= S(\dot{\omega}_r)\hat{I}_v, \quad S(\dot{\omega}_r) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega}_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\omega}_{r3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si ottiene quindi il sistema:

$$I\dot{\omega} = [\Omega(\omega) - S(\dot{\omega}_r)]\tilde{I}_v - K\tilde{\omega}, \quad \tilde{I}_v = I_v - \hat{I}_v.$$

Rimane da progettare la legge di adattamento Γ tale per cui $\dot{\hat{I}}_v = \Gamma \Rightarrow \dot{\tilde{I}}_v = -\Gamma$. Per fare questo si definisce la funzione di Lyapunov come:

$$V(\tilde{\omega}, \tilde{I}_v) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}^T I \tilde{\omega} + \frac{1}{2}\tilde{I}_v^T \Lambda \tilde{I}_v, \quad \Lambda \succ 0$$

e scegliendo $\Gamma = \Lambda^{-1}[\Omega(\tilde{\omega}) - S(\dot{\omega}_r)]^T \tilde{\omega}$ si ottiene:

$$\dot{V}(\tilde{\omega}, \tilde{I}_v) = -\tilde{\omega}^T K \tilde{\omega}.$$

Si ha quindi che la $V(x)$ è definita positiva e $\dot{V}(x)$ è definita negativa, e per il lemma di Barbalat si ha che $\dot{V}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ e quindi $\tilde{\omega} \rightarrow 0$. Risolvo quindi il problema di tracking con il controllo adattativo. Selezionando $k_1 = 10I_1$, $k_2 = 10I_2$, $k_3 = 10I_3$ e considerando come condizione iniziale $\omega_0 = [1 \ -2 \ -1]$ si ottiene l'andamento del sistema mostrato in Figura 27.

Si considera il sistema sottoattuato:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

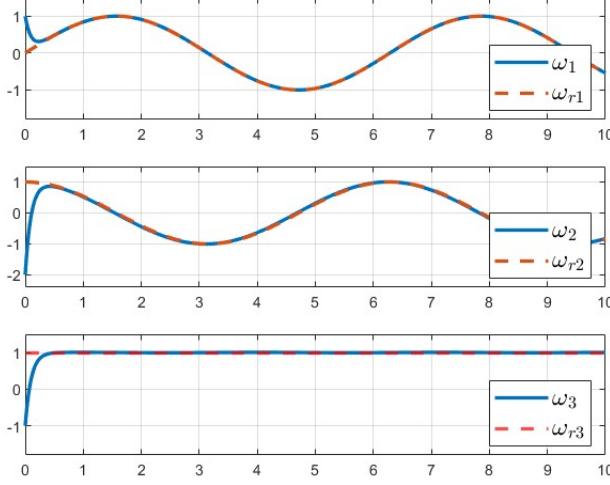


Figura 27: Tracking di traiettoria nota con inerzie incognite

e si vuole rendere l'origine asintoticamente stabile. L'idea è quella di utilizzare il prodotto $\omega_1\omega_2$ come un segnale di controllo virtuale per modificare la dinamica di ω_3 . Considerando $\omega_1 = \lambda_3\omega_3$ e $\omega_2 = \omega_3^2$ si ottiene:

$$\dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \lambda_3 \omega_3^3$$

che è un sistema del tipo $\dot{x} = -\lambda x^3$, $\lambda > 0$: questa tipologia di sistemi ha l'origine asintoticamente stabile. Quindi l'obiettivo è avere che $\omega_1 \rightarrow \lambda_3\omega_3$ e $\omega_2 \rightarrow \omega_3^2$ in tempo finito. Considerando il sistema costituito dalle variabili:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= \omega_1 - \lambda_3\omega_3 \\ \tilde{\omega}_2 &= \omega_2 - \omega_3^2 \\ \omega_3 &\end{aligned}$$

e prendendo come funzione di Lyapunov:

$$V(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \omega_3) = \frac{1}{2}(I_1\tilde{\omega}_1^2 + I_2\tilde{\omega}_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

si ha che la $V(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \omega_3)$ è definita positiva e radialmente illimitata. Considerando:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{(I_3\lambda_1\omega_1 - I_3^2\omega_2\omega_3 - I_3^2\lambda_3\omega_1\omega_2 + I_1I_3\omega_2\omega_3 - I_3\lambda_1\lambda_3\omega_3 + I_1I_2\lambda_3\omega_1\omega_2)}{I_3} \\ u_2 &= -\frac{\lambda_2(-\omega_3^2 + \omega_2)^2 - I_2(-\omega_3^2 + \omega_2)(\omega_1\omega_3 \frac{I_1-I_3}{I_2} + (2\omega_1\omega_2\omega_3 \frac{I_1-I_2}{I_3}) + \lambda_3\omega_3^2(-\omega_3^2 + \omega_2))}{-\omega_3^2 + \omega_2}\end{aligned}$$

si ottiene che

$$\dot{V}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \omega_3) = \lambda_3(I_1 - I_2)\omega_3^4 - \lambda_1\tilde{\omega}_1 - \lambda_2\tilde{\omega}_2$$

quest'ultima è definita negativa su tutto \mathbb{R}^3 . Per il teorema di Barabshin-Krasovskii l'origine è globalmente asintoticamente stabile e quindi si ottiene che:

$$\begin{aligned}\omega_1 &\rightarrow \lambda_3\omega_3 \\ \omega_2 &\rightarrow \omega_3^2 \\ \omega_3 &\rightarrow 0\end{aligned}$$

e di conseguenza si ha la stabilità asintotica del sistema sottoattuato definito inizialmente. Un controllo di questo tipo viene denominato backstepping. Selezionando $\lambda_1 = 5 \cdot 10^3$, $\lambda_2 = 5 \cdot 10^3$, $\lambda_3 = 10$ e considerando come condizione iniziale $\omega_0 = [-2 \ 1 \ 3]$ si ottiene l'andamento del sistema mostrato in Figura 28.

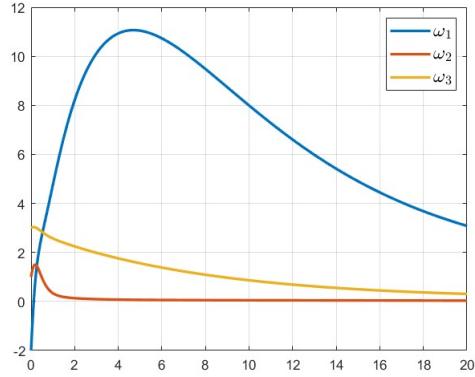


Figura 28: Dinamica del sistema sottoattuato

Esercitazione 10

Obiettivo

Controllo linearizzante ingresso-uscita per il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3^2 + u \\ \dot{x}_3 &= \pm x_3^3 + x_1 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Svolgimento

Si considera il caso in cui y deve effettuare il tracking di una traiettoria di riferimento $r = \sin(t)$, voglio quindi che $x_1 \rightarrow r$, con

$$\dot{x}_3 = -x_3^3 + x_1.$$

Inizialmente si deriva la variabile y finché non compare il controllo u :

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_3^2 + u\end{aligned}$$

avrò quindi che il controllo linearizzante ingresso-uscita sarà:

$$u = -x_3^2 + v.$$

Considerando ora l'errore $e = y - r$ si ha:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{y} - \dot{r} = x_2 - \dot{r} \\ \ddot{e} &= \ddot{x}_2 - \ddot{r} = x_3^2 + u - \ddot{r} = v - \ddot{r}\end{aligned}$$

e imponendo $z_1 = e$, $z_2 = \dot{e}$ si ha:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v - \ddot{r}\end{aligned}$$

E considerando $v = \ddot{r} - k_1 \underbrace{(y - r)}_e - k_2 \underbrace{(x_2 - r)}_{\dot{e}}$ si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2\end{aligned}$$

il sistema che descrive la dinamica dell'errore è lineare ed ha l'origine esponenzialmente stabile per $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$. La legge di controllo che si ottiene è quindi:

$$u = -x_3^2 + \ddot{r} - k_1 \underbrace{(y - r)}_e + k_2 \underbrace{(x_2 - r)}_{\dot{e}}.$$

Ho un controllo linearizzante ingresso-uscita con un termine di feedforward in accelerazione e due termini di feedback in posizione e velocità. I risultati ottenuti con $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ e con condizione iniziale $x_0 = [1 \ -2 \ 1]$ sono illustrati in Figura 29, è bene osservare come la dinamica del sistema rimanga limitata.

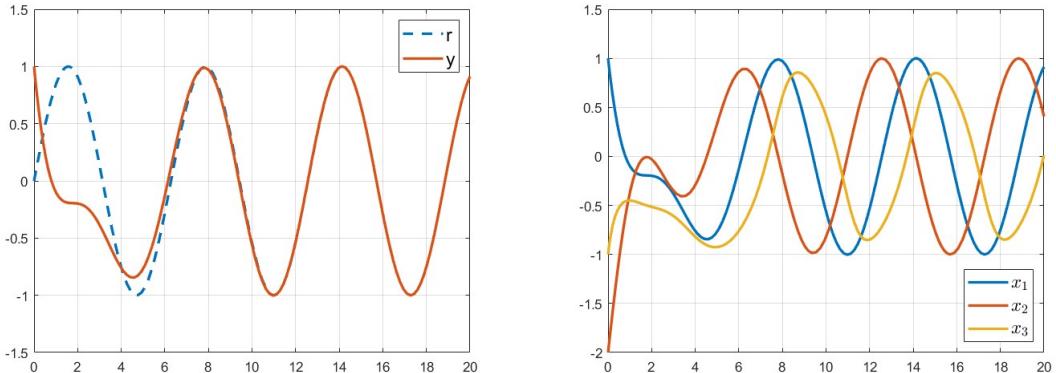


Figura 29: Inseguimento di traiettoria e dinamica del sistema

Si considera il caso in cui y deve effettuare il tracking di una traiettoria di riferimento $r = \sin(t)$, voglio quindi che $x_1 \rightarrow r$, con

$$\dot{x}_3 = x_3^3 + x_1.$$

I passaggi sono gli stessi dell'esempio precedente ottendendo quindi la legge di controllo linearizzante:

$$u = -x_3^2 + \ddot{r} - k_1 \underbrace{(y - r)}_e + k_2 \underbrace{(x_2 - \dot{r})}_{\dot{e}}.$$

Tuttavia se si esaminano i risultati in Figura 30 ottenuti, con $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ e con condizione iniziale $x_0 = [1 \ -2 \ 1]$, si osserva che la dinamica di x_3 è divergente. Questo perché considerando $z_1 = y - r$, $z_2 = \dot{y} - \dot{r}$ si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v - \ddot{r} \\ \dot{x}_3 &= -x_3^3 + r + z_1\end{aligned}$$

In particolare la dinamica di x_3 posso vederla come $\dot{x}_3 = x^3$ a cui si aggiunge una perturbazione $r + z_1$; essendo l'origine del sistema $\dot{x}_3 = x^3$ instabile aggiungendo una perturbazione, seppur limitata, ne determina la divergenza. Il tracking della traiettoria viene comunque effettuato anche se ha poco senso effettuare il tracking se il sistema esplode.

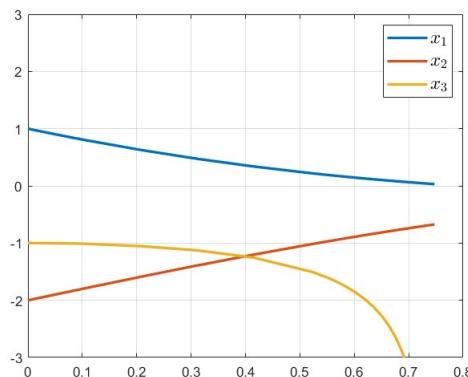


Figura 30: Dinamica del sistema

Si considera il caso in cui y deve effettuare il tracking di una traiettoria di riferimento $r = \sin(t)$ assumendo la traiettoria incognita, voglio quindi che $x_1 \rightarrow r$, con

$$\dot{x}_3 = -x_3^2 + x_1.$$

Essendo la traiettoria incognita è necessario utilizzare un filtro che mi restituisca la traiettoria filtrata r_e e la sua derivata prima e seconda impiegate nella legge di controllo:

$$u = -x_3^2 + \ddot{r}_e - k_1 \underbrace{(y - r_e)}_e + k_2 \underbrace{(x_2 - \dot{r}_e)}_{\dot{e}}.$$

I diagrammi di Bode del filtro di ordine 2 fissando come parametri $K = 1$, $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega_n = 100$ sono mostrati in Figura 31.

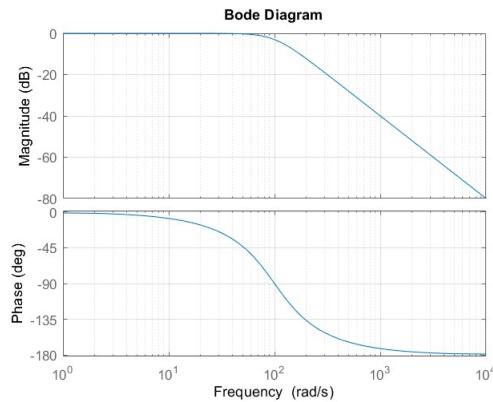


Figura 31: Diagramma di Bode del filtro

I risultati ottenuti con $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ e con condizione iniziale $x_0 = [1 \ -2 \ 1]$ sono illustrati in Figura 32. La traiettoria che viene inseguita è r_e generata dal filtro.

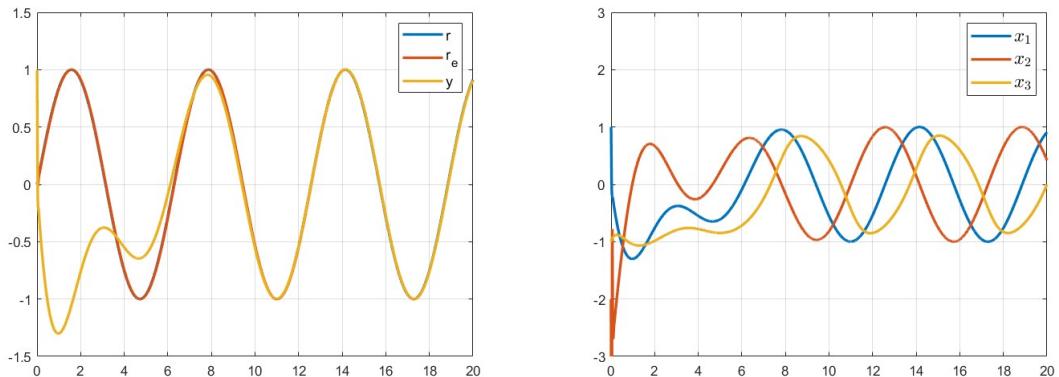


Figura 32: Inseguimento di traiettoria e dinamica del sistema

Controllo del robot

Obiettivo ³

Progettare una legge di controllo di tipo “feedback linearization” che permetta al robot di inseguire una traiettoria di riferimento assegnata nelle variabili q_1, q_2 . Come traiettoria di riferimento, utilizzare quella generata dall'algoritmo di Newton sviluppato nell'esercitazione numero 7.

Svolgimento

Il modello dinamico di un robot a due link è:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + g(q) = \tau$$

dove q_1 e q_2 sono le variabili di giunto e $\tau \in \mathbb{R}^2$ è la coppia di controllo. Definendo $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \ddot{q} &= \frac{1}{B(q)} \underbrace{[-C(q, \dot{q})\dot{q} - F(\dot{q}) - g(q) + \tau]}_{-h(q, \dot{q})}. \end{aligned}$$

Considerando $e = q - q_r$, dove q_r è la traiettoria di riferimento nello spazio dei giunti, si ha la legge di controllo di tipo feedback linearization:

$$\tau = h(q, \dot{q}) + B(q)[\ddot{q}_r + K_p e + K_d \dot{e}]$$

L'algoritmo del secondo ordine per l'inversione della cinematica differenziale è⁴:

$$\ddot{q}_r = J(q)^{-1}[\ddot{p} + K_{dr}(J(q)\dot{q}_r - \dot{p}) + K_{pr}(G(q) - p) - J(q)\dot{q}_r]$$

dove p è la traiettoria desiderata dell'end-effector. La traiettoria da inseguire espressa nelle coordinate dell'end-effector è:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 33 con condizione iniale $q_0 = [0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad 0]$

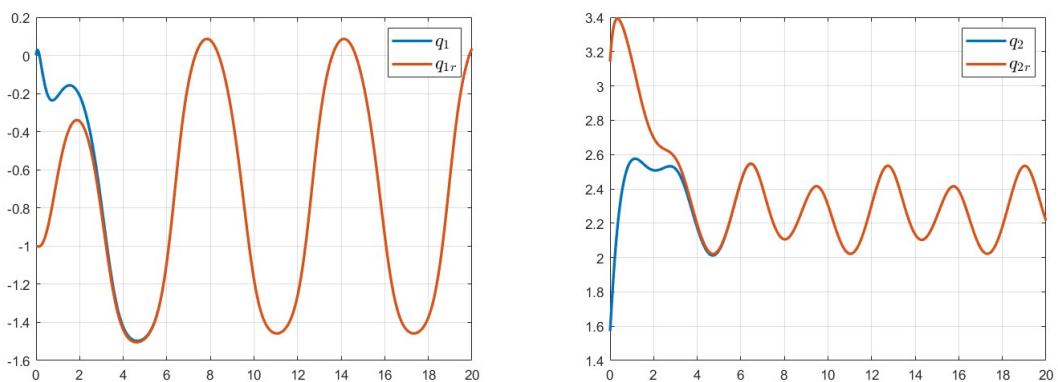


Figura 33: Tracking di q_{1r} e q_{2r}

³Vedere il testo del problema per valori numerici e struttura delle matrici

⁴B. Siciliano, L.Sciavicco, L.Villani, G.Oriolo, *Robotica. Modellistica, pianificazione e controllo*, McGraw-Hill, 2008

Controllo del veicolo

Obiettivo ⁵

Si vuole studiare la dinamica di un autoveicolo che viaggia a velocità V costante ed è soggetto a variazioni impulsive (si pensi a folate di vento laterali) dell'angolo di imbardata r e della velocità laterale v_y . A tal riguardo si può utilizzare il modello seguente:

$$\begin{aligned} \dot{v}_y &= \frac{f_{sf}(\alpha_f)}{m} \cos(\delta_f) + \frac{f_{sr}(\alpha_r)}{m} - rV \\ \dot{r} &= \frac{f_{sf}(\alpha_f)l_f}{J} \cos(\delta_f) - \frac{f_{sr}(\alpha_r)l_r}{J} \end{aligned}$$

Per questo sistema si vuole allargare la regione di attrazione del punto di equilibrio $(0,0)$ utilizzando un controllo lineare del tipo

$$\delta_f = -k_1 v_y - k_2 r$$

che agisce sullo sterzo dell'autoveicolo stabilizzando, quando possibile, l'autoveicolo. Si procederà in due fasi: analisi del sistema ad anello aperto e sintesi del controllore.

Svolgimento

È stata analizzata la regione di attrazione dell'origine all'aumentare della velocità V . Sono stati considerati i seguenti valori di V espressi in $\frac{m}{s}$:

$$V_1 = 15, V_2 = 25, V_3 = 35, V_4 = 50. \quad (16)$$

Come si osserva dalla Figura 34 all'aumentare della velocità la regione di attrazione diminuisce: per una condizione iniziale vicina all'origine tutte le traiettorie sono convergenti, man mano che la condizione iniziale si allontana le traiettorie divergono.

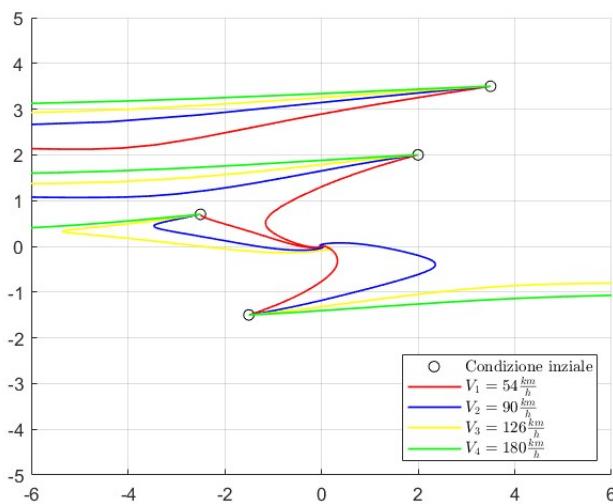


Figura 34: Andamento delle traiettorie all'aumentare di V e al variare della condizione iniziale del sistema in evoluzione libera

Successivamente è stata analizzata la linearizzazione A del sistema intorno al punto di equilibrio $(0,0)$. La linearizzazione dipende chiaramente dalla velocità V , la posizione degli autovalori al variare di V come in (16) è illustrata in Figura 35. Gli autovalori si trovano sempre nel semipiano sinistro, quindi l'origine del sistema è localmente esponenzialmente stabile e quindi lo è anche asintoticamente.

Si considera ora la legge di controllo lineare:

$$\delta_f = -k_1 v_y - k_2 r$$

e assumo di voler ottenere che $\sigma(A) = \{-20, -20\}$ indipendentemente dal valore di V . Si ottengono quindi i valori di k_1 e k_2 illustrati in Figura 36(a). Come mostra la Figura 36(b) gli autovalori del sistema vengono posizionati in -20 indipendentemente dal valore di V .

⁵Vedere il testo del problema per valori numerici

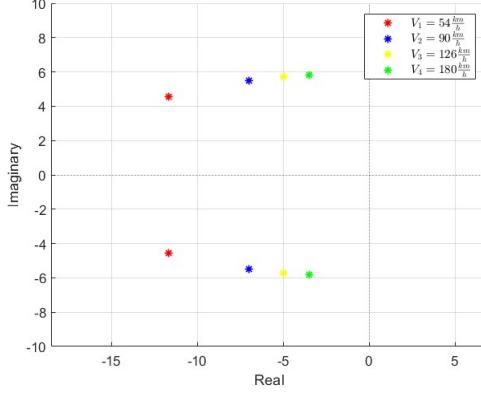


Figura 35: Posizione degli autovalori all'aumentare di V



Figura 36: Valori dei guadagni k_1 , k_2 e posizione degli autovalori del sistema controllato all'aumentare di V

L'andamento delle traiettorie del sistema controllato è mostrato in Figura 37. È interessante osservare la differenza con la dinamica del sistema in Figura 34: in questo caso a parità di condizioni iniziali tutte le traiettorie sono convergenti, la legge di controllo imposta ha quindi esteso il bacino di attrazione dell'origine.

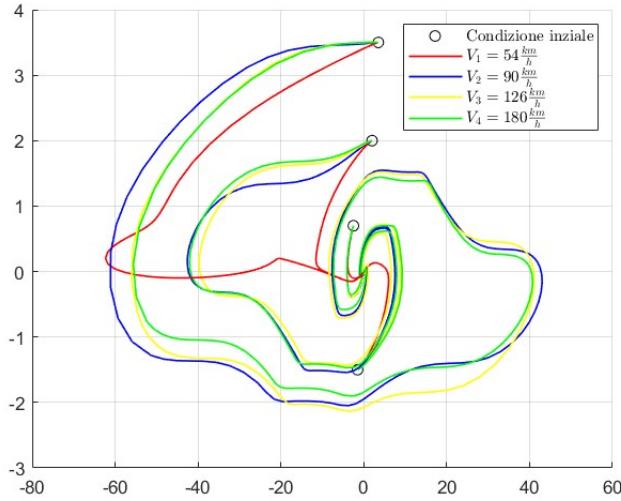


Figura 37: Andamento delle traiettorie all'aumentare di V e al variare della condizione iniziale del sistema controllato

Esercitazione facoltativa

Obiettivo

Dato il sistema lineare che descrive il modello massa-molla-smorzatore

$$m\ddot{x} + k_s x + b\dot{x} = u$$

assumendo m nota e i parametri k_s e b incerti fare l'analisi di stabilità esatta e stabilità quadratica. Sintetizzare inoltre un controllore a feedback dallo stato robusto così da avere stabilità asintotica per il sistema a ciclo chiuso.

descrizione	variabile	valore
massa	m	10
smorzamento	b	$[b_{min}, b_{max}]$
rigidezza	k_s	$[k_{s_{min}}, k_{s_{max}}]$

Tabella 8: Dati del problema

Svolgimento

La matrice che descrive la dinamica del sistema è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

e calcolandone il polinomio caratteristico si ottengono i coefficienti:

$$1, \quad \frac{b}{10}, \quad \frac{k_s}{10}$$

quindi per il criterio di Routh il sistema è asintoticamente stabile se $b > 0$ e $k_s > 0$. Il risultato è coerente da un punto di vista fisico essendo b e k_s termini dissipativi.

L'analisi di stabilità robusta viene svolta assumendo un'incertezza politopica per i parametri k_s e b che quindi variano in un intervallo di valori. Per garantire la stabilità robusta una condizione sufficiente è dimostrare che il sistema è stabile quadraticamente, cioè:

$$\exists P > 0 : A^T P + P A < 0, \forall A \in \Lambda. \quad (17)$$

Definendo gli estremi dell'intervallo di incertezza dei parametri come:

$$K_{s_{min}} = 1, \quad K_{s_{max}} = 10 \quad (18)$$

$$b_{min} = 1, \quad b_{max} = 10 \quad (19)$$

e utilizzando il teorema per la stabilità quadratica basta trovare P che soddisfi (17) per i vertici dell'insieme Λ definiti da (18) e (19). La matrice P esiste e vale:

$$P = 1.0e-9 * \begin{bmatrix} 0.7340 & -0.0878 \\ -0.0878 & 0.8112 \end{bmatrix}$$

quindi il sistema è stabile quadraticamente e di conseguenza anche in maniera robusta.

Ora si vuole sintetizzare il controllore in grado di garantire la stabilità asintotica del sistema a fronte dell'incertezza. La matrice dell'ingresso B è:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

Bisogna prima verificare che il sistema a ciclo chiuso sia stabilizzabile; definendo Ψ la matrice di controllabilità si ottiene che:

$$|\Psi| = -\frac{1}{100} \Rightarrow \rho(\Psi) = 2,$$

la matrice di controllabilità ha rango pieno e quindi il sistema è controllabile e di conseguenza stabilizzabile. Allora si può concludere che (Lyapunov per sistemi lineari):

$$\exists P > 0 : (A + BK)^T P + P(A + BK) < 0.$$

Considerando i valori di K_s e b definiti in (18) e (19) si ottiene il guadagno stabilizzante

$$K = \begin{bmatrix} -0.9299 & -1.0837 \end{bmatrix}.$$

Infine è stata inserita una saturazione β sul controllo $u = Kx$. Considerando i valori $b = 1$ e $k_s = 1$ si ottiene che:

$$\sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} -1.9172 \\ -6.7172 \end{bmatrix}$$

quindi il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile. I risultati mostrati in Figura 38 e Figura 39 mostrano l'andamento del sistema e del controllo u con due differenti livelli di saturazione $\beta = 10$ e $\beta = 0.1$.

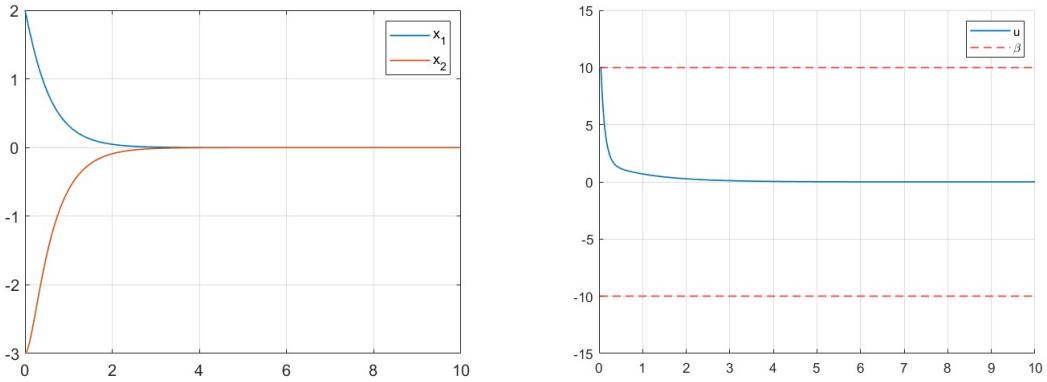


Figura 38: Andamento del sistema e del controllo u con $\beta = 10$

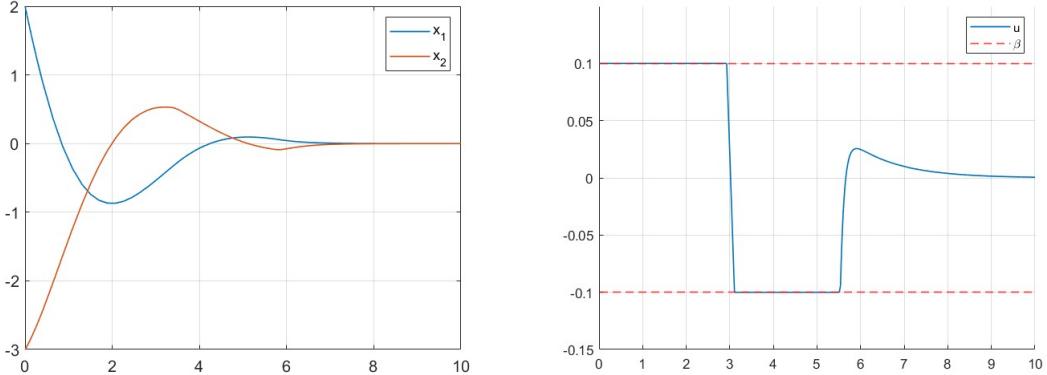


Figura 39: Andamento del sistema e del controllo u con $\beta = 0.1$