1 INTRODUZIONE ALL'OTTICA DIFFRATTIVA

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{1}$$

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\frac{\omega}{c})^2\frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{2}$$

Si potrebbe risolvere l'equazione di Helmoltz con le appropriate condizioni al contorno, ma non è facile quindi si deve cercare una seconda via.

Analizziamo ad esempio un fronte d'onda piana che si propaga attraverso un'apertura; Se usassimo ancora l'ottica geometrica troveremmo che passano solo i raggi centrali mentre gli altri no.

Se l'apertura è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda le deflessioni sono meno evidenti e il fronte d'onda è ancora praticamente piano. Se però riduciamo l'apertura questa approssimazione non è più accettabile.

Andremo a studiare il sistema per aperture abbastanza piccole da avere diffrazione evidente, ma sufficentemente grande da non variare la polarizzazione del campo entrante lasciando l'equazione di Helmoltz scalare.

2 OTTICA DIFFRATTIVA IN REGIME SCALARE

Ipotizziamo di essere nel vuoto

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \tag{3}$$

chiamo il campo elettrico U(P) anzichè **E** (**r**) mettendo in evidenza il fatto di essere in approssimazione scalare, cioè considero solo la funzione dell'ampiezza del campo nella direzione di polarizzazione.

$$\nabla^2 U(P) + (\frac{\omega}{c})^2\frac{2}{\varepsilon_0}U(P) = 0 \tag{4}$$

Nell'ottica diffrattiva studiamo tutto ciò che ha dimensione finita e dell'ordine della lunghezza d'onda della radiazione.

Prendiamo un sistema con apertura di forma non definita attraverso la quale passa un'onda polarizzata linearmente: come sarà il campo dopo l'apertura?

Dovrei risolvere l'equazione di Helmoltz con le apposite condizioni al contorno e quindi usare le funzioni di Green.

I primi a formulare la seguente equazione sono Kirchoff, Raleigh, Sommerfield

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda}\iint_\sigma U(P_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}cos(\mathbf{n},\mathbf{r})dS \tag{5}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6}$$

Esiste una strada alternativa che risulta solo dopo avere visto la soluzione di Raleigh Sommerfield: da un punto di vista matematico ci accorgiamo di avere in mano delle onde sferiche, che in realtà non esistono, poichè non abbiamo una sorgente che le produca ma solo un'apertura illuminata.

Principio di Huygens-Fresnel: ciascun punto dell'apertura è visto come sorgente di ondine (wavelets) sferiche secondarie, la cui sovrapposizione da il campo dopo l'apertura.

Si tratta di un potente artificio matematico che scompone il campo nella sovrapposizione di tante funzioni elementari.

Scriveremo il campo di partenza come somma di un set di onde semplici la cui sovrapposizione alla fine ci garantisce di trovare il campo complessivo. Come è possibile trovare un altro set di funzioni semplici da usare come base per esprimere la funzione di ampiezza spaziale U(P).

2.1 TRASFORMATA DI FOURIER

$$G(\omega) = \mathscr{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \tag{7}$$

$$g(t) = \mathscr{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{8}$$

Scriviamo la g(t) come sovrapposizione di funzioni seno e coseno a diverse frequenze ω (esponenziali complessi) ciascuna delle quali con un coefficiente nella combinazione data dalla trasformata G(ω) della funzione g(t) stessa. Da questa interpretazione si da a G(ω) il nome di **spettro in frequenza**.

Possiamo andare ad applicare lo stesso concetto a variabili spaziali utilizzando una **TDF spaziale bidimensionale**:

$$G(k_x, k_y) = \mathscr{F}\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)e^{-i(k_x x + k_y y)}dxdy \tag{9}$$

In pratica quello che stiamo facendo, in un modo analogo al caso di una funzione del tempo, è scomporre la funzione di due variabili g(x,y) in una sovrapposizione di onde piane con componenti dei vettori d'onda (k_x, k_y) che indicano **l'angolo d'inclinazione** con cui le onde escono dall'apertura (infatti il vettore d'onda di un'onda piana indica la sua direzione di propagazione nello spazio), ciascuna delle quali è ancora pesata da G(k_x, k_y). Per questo motivo la G(k_x, k_y) si chiama **spettro angolare**. $k_x = 2\pi f_x$ e $k_y = 2\pi f_y$; $f_x ed f_y$ sono dette frequenze spaziali.

L'esponenziale ci ricorda la parte spaziale di un'onda piana $e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})}$ che si propaga nello spazio con k_x, k_y, k_za z=0.

Vediamo quindi g(x,y) non più come una funzione generica ma come il campo U(x,y) in corrispondenza dell'apertura che indichiamo come U(x_1, y_1).

A_1 è la trasformata del campo U(x_1, y_1), quindi:

$$U(x_1, y_1) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} A_1(k_x, k_y)e^{i(k_x x + k_y y + k_z 0)}dk_x dk_y \tag{10}$$

valutata giustamente per z=0.

Abbiamo un'onda elettromagnetica piana ($e^{i\mathbf{kr}}$) ovviamente $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \longrightarrow k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$

Il campo nell'apertura $U(x_1, y_1)$, che è noto, è visualizzabile come sovrapposizione di onde piane in partenza da z=0, pesate dallo spettro angolare $A_1(k_x, k_y)$ anch'esso noto.

Sappiamo che l'equazione di Helmoltz è lineare, quindi, se sapessimo come una di queste onde si propaga, potremmo trovare il campo ad ogni z lasciando propagare le onde piane e sovrapponendole nuovamente a z scelto.

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x_0 + k_y y_0)} dk_x dk_y \tag{11}$$

Se conoscessi A_0 potrei antitrasformarlo e ricavare il campo $U(x_0, y_0)$, nel generico punto z dello spazio. Il problema dunque è: **noto lo spettro di partenza A_1, come si propaga questo, e come ricavo A_0?**

La sorgente non viene più vista come sorgente di onde sferiche come per Huygens ma di onde piane.

In termini matematici onde sferiche $\longrightarrow$ cos(**n,r**)

onde piane $\longrightarrow e^{i\mathbf{rk}}$

Possiamo però vedere $U(x_0, y_0)$ come

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A_1(k_x, k_y) e^{i(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z)} dk_x dk_y \tag{12}$$

dove si è aggiunto il termine di propagazione lungo l'asse z nell'esponenziale. Semplicemente tirando fuori dall'esponenziale questo ultimo termine e uguagliando la (11) e la (12): **lo spettro angolare di arrivo è uguale a quello di partenza, moltiplicato per un termine di sfasamento, che è diverso a seconda dell'inclinazione delle onde piane**.

$$A_0(k_x, k_y) = A_1(k_x, k_y) e^{ik_z z} \tag{13}$$

Inoltre k_z è funzione di k_x e k_y:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \tag{14}$$

$$A_0(k_x, k_y) = A_1(k_x, k_y) e^{ik_z z} = A_1(k_x, k_y) e^{ik\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} z} \tag{15}$$

Ora facciamo un'ipotesi che ci permette di semplificare la (15)

Ipotesi di ottica parassiale (onde poco inclinate): se l'apertura non è troppo piccola, non è in grado di modificare troppo lo spettro angolare del campo che ne esce e renderlo frastagliato, cioè di inclinare molto le onde che entravano piane (infatti funzioni "frastagliate" anche nel tempo, pensando alla serie di Fourier, sono ottenibili solo a patto di usare frequenze alte, che nel caso spaziale significa inclinazioni), allora k_x e k_y sono ragionevolmente piccoli. Matematicamente:

$$k_x, k_y << k \tag{16}$$

per Taylor quindi: $k_z = k\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \approx k + \frac{1}{2}\frac{k_x^2 + k_y^2}{k}$

Possiamo vedere il termine $e^{i(\frac{k_x^2+k_y^2}{2k})z}$ come un filtro in frequenza che modifica la fase delle componenti dello spettro durante la propagazione

$$A_0(k_x,k_y) = A_1(k_x,k_y)e^{ikz}e^{i(\frac{k_x^2+k_y^2}{2k})z} \tag{17}$$

2.2 EQUIVALENZA TRA LE DUE FORMULAZIONI

Formulazione onde piane(1):

$$U(x_0,y_0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} A_1(k_x,k_y)e^{i(k_x x_0+k_y y_0+k_z z)}dk_x dk_y \tag{18}$$

Formulazione di Raleigh-Sommerfield onde sferiche(2):

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda}\iint_{\sigma} U(P_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}cos(\mathbf{n},\ \mathbf{r})dS \tag{19}$$

Approssimazione parassiale per la (2): $r_{01} \approx z, cos(\mathbf{n,r}) \approx 1$ per il termine esponenziale non si può sostituire r_{01} con z, ma:

$$r_{01} = \sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+z^2} \tag{20}$$

$$r_{01} = z\sqrt{1+\frac{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}{z^2}} \approx z(1+\frac{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}{2z^2}) \tag{21}$$

e quindi sostituendo a P le sue coordinate ed a σ l' integrazione su tutto il piano sapendo che oltre σ vale zero (2) potrà essere scritta come:

$$U(x_0,y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1,y_1)e^{i\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]}dx_1 dy_1 \tag{22}$$

Approssimazione parassiale per la (1): $k_x, k_y << k \longrightarrow k\sqrt{1-\frac{k_x^2+k_y^2}{k^2}} \approx k+\frac{1}{2}\frac{k_x^2+k_y^2}{k}$

$$U(x_0,y_0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} A_1(k_x,k_y)e^{ikz}e^{i\frac{k_x^2+k_y^2}{2k}z}e^{i(k_x x_0+k_y y_0)}dk_x dk_y \tag{23}$$

L'antitrasformata del prodotto di due trasformate è l'integrale di convoluzione

$$A_1(k_x,k_y) \longrightarrow \mathscr{F}^{-1} \longrightarrow U(x_1,y_1) \tag{24}$$

$$e^{ikz}e^{i\frac{k_x^2+k_y^2}{2k}z} \longrightarrow \mathscr{F}^{-1} \longrightarrow \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \tag{25}$$

$$U(x_0,y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1,y_1)e^{\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]}dx_1 dy_1 \tag{26}$$

che risulta identica alla (21) Se adesso svolgiamo i quadrati all'esponente risulta:

$$U(x_0,y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)}\iint_{-\infty}^{\infty}U(x_1,y_1)e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)}e^{-i\frac{k}{z}(x_0x_1+y_0y_1)}dx_1dy_1 \tag{27}$$

Nell'esponente con il segno meno una volta posto $k=\frac{2\pi}{\lambda}$si possono riconoscere $f_x=\frac{x_0}{\lambda z}$, $f_y=\frac{y_0}{\lambda z}$

$$e^{-i\frac{k}{z}(x_0x_1+y_0y_1)}=e^{-i(2\pi f_x x_1+2\pi f_y y_1)} \tag{28}$$

che è il classico termine della trasformata di Fourier bidimensionale

$$U(x_0,y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)}\mathscr{F}[U(x_1,y_1)e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)}] \tag{29}$$

Il campo nel piano d'arrivo è proporzionale, tramite termini costanti che dipendono dalle coordinate del piano di arrivo, **ad un integrale che è simile alla trasformata di Fourier del campo sull'apertura**, non è esattamente la sua trasformata per il termine quadratico che moltiplica $U(x_1,y_1)$.

SE non ci fosse il termine quadratico all'interno dell'integrale l'intensità del campo sul piano d'arrivo, proporzionale al modulo quadro del campo, sarebbe uguale al modulo quadro della trasformata di fourier nell'apertura.

$$I(x_0,y_0)=|\iint_{\infty}^{\infty}U(x_1,y_1)e^{-\frac{k}{2z}[x_0x_1+y_0y_1]}dx_1dy_1|^2=|\mathscr{F}[U(x_1,y_1)]|^2 \tag{30}$$

Lo scopo che ci guida adesso è dunque quello di sbarazzarci del termine quadratico

$$e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)} \tag{31}$$

se $\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)<<1$ cioè $z>>\frac{k}{2}(x_1^2+y_1^2)$ allora il termine esponenziale può essere trascurato, condizione che equivale a porsi a grande distanza dall'apertura rispetto alle dimensioni dell'apertura stessa.

Approssimazione di Fraunhofer. Nel caso in cui sia rispettata la condizione dell'approssimazione di Fraunhofer sul piano d'arrivo quello che si ha è (a parte costanti moltiplicative) la trasformata di Fourier esatta del campo sull'apertura. Ovviamente questa semplificazione di calcolo si paga con il fatto di dover disporre di una grande distanza.

Posso associare ad ogni punto del piano di arrivo una coppia di frequenze$f_x=\frac{x_0}{\lambda z}$,$f_y=\frac{y_0}{\lambda z}$ che mi danno la mappa spettrale del campo, ovvero mi fanno capire quali sarebbero le inclinazioni delle onde piane (che non esistono, sono solo un artificio matematico di calcolo) che compongono il campo sovrapponendosi nel piano di arrivo dopo aver cambiato direzione a causa dell'apertura.

È quindi possibile associare alla coppia di assi (x_0,y_0) la coppia (f_x,f_y) che corrispondono allo **spettro angolare**. Se faccio il modulo quadro della funzione d'arrivo trovo lo **spettro in potenza** che corrisponde all'**intensità** del campo sul piano d'arrivo.

L'ottica diffrattiva in regime parassiale è dunque in grado di fare un' operazione matematica: la trasformata di Fourier bidimensionale

Se andiamo a grande distanza dalla fenditura(approssimazione di Fraunhofer) andiamo a studiare la propagazione del campo come composto da onde piane(stessa cosa per la soluzione di Raleigh Sommerfield)

A grande distanza la soluzione sarà

$$U(x_0,y_0)=\frac{1}{i\lambda z}e^{ikz}e^{i\frac{k(x_0^2+y_0^2)}{2z}}\iint_{\infty}^{\infty}U(x_1,y_1)e^{i(k_x x_1+k_y y_1)}dx_1dy_1 \tag{32}$$

e l'intensità sarà quindi:

$$I(x_0,y_0)=|U(x_0,y_0)|^2=\frac{|\mathscr{F}\{U(x_1,y_1)\}|^2}{\lambda^2 z^2} \tag{33}$$

poniamo $t(x_1,y_1)=U(x_1,y_1)$

e ipotizziamo il caso di un apertura dentro la quale c'è un reticolo di trasmissione che varia come un cos

$$t(x_1,y_1)=[\frac{1}{2}+\frac{m}{2}cos(2\pi f_0 x_1)]rect(\frac{x_1}{l_x})rect(\frac{y_1}{l_y}) \tag{34}$$

$a=[\frac{1}{2}+\frac{m}{2}cos(2\pi f_0 x_1)]$ è dovuto al reticolo di trasmissione

$b=rect(\frac{x_1}{l_x})rect(\frac{y_1}{l_y})$ all'apertura, in questo caso rettangolare di lato $l_x l_y$

$$\mathscr{F}\{t(x_1,y_1)\}=\mathscr{F}\{a\}*\mathscr{F}\{b\} \tag{35}$$

$$\mathscr{F}\{a\}=\frac{1}{2}\delta(f_x,f_y)+\frac{m}{4}\delta(f_x+f_0,f_y)+\frac{m}{4}\delta(f_x-f_0,f_y) \tag{36}$$

ipotizzo $l=l_x=l_y$

$$\mathscr{F}\{b\}=l^2 sinc(lf_x)sinc(lf_y) \tag{37}$$

dovrò quindi trovare il prodotto di convoluzione dei due

Si ricorda che fare il prodotto di convoluzione con una delta di dirac ad una certa frequenza significa traslare la funzione a tale di tale frequenza

$$\mathscr{F}\{t(x_1,y_1)\}=l^2 sinc(lf_y)\{sinc(lf_y)+\frac{m}{2}sinc(l(f_x+f_0))+\frac{m}{2}sinc(l(f_x-f_0))\} \tag{38}$$

Facendo il modulo quadro trovo come scritto sopra l'intensità del campo. Noto che se f_0 è grande **i doppi prodotti non si sovrappongono???????** e possono essere trascurati

$f_0>>1$

$$I(x_0,y_0)=(\frac{l^2}{2\lambda z})^2 sinc^2(\frac{ly_0}{\lambda z})\{sinc^2(\frac{lx_0}{\lambda z})+\frac{m^2}{4}sinc^2(\frac{l(x_0+f_0)\lambda z}{\lambda z})+\frac{m^2}{4}sinc^2(\frac{l(x_0-f_0)\lambda z}{\lambda z})\} \tag{39}$$

il numero di fenduiture è legato a x_0 la profondità a è legata a m(**cosa vuole dire????**)

ricordando(**che non ho scritto**) che l'apertura del lato centrale è $\Delta x_0 = \frac{2\lambda z}{l}$

troviamo affinchè tali lobi siano separati **?????** (e quindi si possano trascurare i doppi prodotti) si deve avere $f_0 \lambda z > \Delta x_0$ e quindi $f_0 > \frac{2}{l}$

Cosa vedo sul piano di Fraunhofer?

vedo quindi un reticolo di diffrazione

È possibile ad una distanza ragionevole? Dalla distanza di Fraunhofer a una distanza praticabile?

Forse si ma è necessario servirsi delle lenti

Innanzitutto immaginiamo una **lente più grande del fronte d'onda incidente**

l'unica azione che la lent può compiere sull'onda è sfasarla attraverso il passaggio nel materiale dielettrico e nell'aria

$\Delta(x, y)$= cammino interno

$\Delta_0 - \Delta(x, y)$= cammino nell'aria

$$\Phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)] = k\Delta_0 + k\Delta(x, y)(n-1) \tag{40}$$

$U_l' = U_l t(x, y)$

con t(x, y) funzione di trasferimento della lente

$t(x, y) = e^{i\Phi(x,y)} = e^{ik\Delta_0 + k\Delta(x,y)(n-1)}$

$U_l' = U_l e^{ik\Delta_0} e^{ik\Delta(x,y)(n-1)}$

ora dobbiamo determinare lo spessore della lente $\Delta(x, y)$ che dipende dai raggi di curvatura In approssimazione parassiale

$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2+y^2}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$

La focale della lente è $\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$

$$U_l' = U_l e^{ikn\Delta_0} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}} \tag{41}$$

mettiamo la lente in corrispondenza con l'apertura in modotale che le sue coordinate coincidano con quelle dell'apertura

momentaneamente tralasciamo il termine costante $e^{ikn\Delta_0}$ si ricongiungerà alla fine con il resto dell'equazione

inseriamo ciò che abbiamo trovato ora nell'equazione (21)

$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]} dx_1 dy_1$

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{\infty}^{\infty} U_l e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}} e^{\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]} dx_1 dy_1 \tag{42}$$

Ipotizzo f>0

Se ci poniamo a z = f i due esponenziali si semplificano

ottengo

$$U(x_f, y_f) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k(x_f^2+y_f^2)}{2f}} \iint_{\infty}^{\infty} U_l e^{-i\frac{2\pi(x_f x + y_f y)}{\lambda f}} dx dy \tag{43}$$

indico con $f_x = \frac{x_f}{\lambda}$ e $f_y = \frac{y_f}{\lambda}$

ottengo quindi la stessa trasformata che prima trovavo nella regione di FRaunhofer ora in corrispondenza del fuoco della lente

$$U(x_f, y_f) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k(x_f^2+y_f^2)}{2f}} \mathscr{F}\{U_l(x,y)\}(f_x, f_y) \tag{44}$$

Le lenti convergenti avvicinano la lunghezza di Fraunhofer a piccole distanze

Vogliamo però la trasformata di Fourier esatta e quindi lo spettro nel caso che tra l'apertura e la lente ci sia una certa distanza d_0

definisco ora:

$\mathscr{F}\{U_0(x,y)\}(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y)$

che mi rappresenta lo spettro dell'onda piana di partenza

Restando nel dominio di Fourier siamo in grado di trovare la trasformata in corrispondenza della lente dopo un tratto d_0 di propagazione libera **DOVE CAZZZO LO TROVO QUESTA COSA QUI????**

$\mathscr{F}\{U_l(x,y)\}(f_x, f_y) F_l(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y) e^{-i\frac{k_x^2+k_y^2}{2k}d_0} = F_0(f_x, f_y) e^{-i\frac{4\pi^2}{2}\frac{\lambda}{2\pi}(f_x^2+f_y^2)d_0}$

e la sostituisco nell equazione (38)

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{i\frac{k}{2f}(1-\frac{d_0}{f})(x_f^2+y_f^2)}{i\lambda f} F_0(\frac{x_f}{\lambda_f}, \frac{y_f}{\lambda_f}) \tag{45}$$

nel caso particolare $d_0 = f$

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} F_0(\frac{x_f}{\lambda_f}, \frac{y_f}{\lambda_f}) \tag{46}$$

Significa che il termine quadratico che nasce dalla propagazione libera viene eliminato dalla presenza della lente a distanza d_0

2.3 elaborazione otticadel segnale

NON HO CAPITO TROPPO BENE SPIEGARE MEGLIO

SERVE IL DISEGNO QUI!!!

$\mathscr{F}\{g(t)\} = G(f)$

$\mathscr{F}\{h(t)\} = H(f)$

fequenza (**in che senso????**) G(f)H(f)

tempi $\int_t^{-\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau$

h(x,y) funzione di trasferimento del sistema ogliamo spostare l'analisi in frequenza in analisi spaziale

Se anzichè g(t) in ingresso avessi una δ il sistema mi restituirebbe la stessa funzione h(t)

una δ fisicamente sarebbe una sorgente puntiforme che attraversa il sistema ottico mi da h(x,y)

se nel piano dell'origine ho una distribuzione di campo estesa posso scomporla in tante sorgenti puntiformi in modo da avere nel piano d'arrivo la sovrapposizione delle funzioni h(x,y) prodott del sistema, traslata approssimativamete in base alla posizione della sorgente

il risultato sarà quindi un prodotto di convoluzione

$$\int_{\infty}^{-\infty} g(x_1, y_1)h(x - x_1, y - y_1)dx_1 dy_1 \tag{47}$$

Circuito ottico e elettrico sono quindi equivalenti(????????) tuttavia come si fa a produrre un sistema ottico che possa lavorare sul segnale?

Si passa alle frequenze per poi antitrasfromare

in ogni punto NON sappiamo quale è il contributo di ogni frequenza spaziale

possiamo porre una siapositiva opaca con alcuni punti trasparenti. Passeranno solo determinate?????????????????? frequenze spaziali e il raggio sarà monocromatico

ottengo così un nuovo spettro che possiamo ritrasformare

————-BHO——————-

Video spiegazione .

Se il sistema ottico ha un apertura abbastanza grande, l'ottica geometrica funziona bene. L'ottica diffrattiva interviene quando le dimensioni dell'apertura (sono paragonabili con la lunghezza d'onda?????) hanno effetti diffrattivi rilevanti nel sistema

siano (x_0, y_0) le coordinate dell'oggetto e $U_0(x_0, y_0)$ il relativo campo elettromagnetico che viene trasformato fino ad arrivare al piano immagine del campo $U_i(x_i, y_i)$. la relazione tra ingresso e uscita è lineare(essendo l'equazione di Helmotz lineare)

$$U_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0)h(x_i, y_i; x_0, y_0)dx_0 dy_0 \tag{48}$$

CHE NOTAZIONE HA h????????????????????????????'

Dove h() funzione di trasferimento del sistema che può essere spazialmente invariante(in regime parassiale lo è, ma non in generale)

COSA VUOLE DIRE SPAZIALMENTE INVARIANTE????

Se nel piano immagine abbiamo la riproduzione perfetta dell'oggetto la funzione h dovrà essere proporzionale a una δ

$$h \propto \delta(x_i \pm Mx_0, y_i \pm My_0) \tag{49}$$

Se scomponiamo $U_0(x_0, y_0)$ in tante sorgenti puntiformi l'integrale di sovrapposizione sarà un altro punto luminoso la cui posizone dipendereà da h(M) (dovrebbe essere traslato no?)

Quando la risposta del sistea non è una δ (quindi tutti i casi reali) spazio invariante non ho più la perfetta riproduzione dell'immagine

Se l'apertura ha dimensioni finite troncherà il fronte d'onda dando origine a effetti di DIFFRAZIONE

La funzione P(x,y) è detta pupilla della lente

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ dove la lente lascia passare la luce} \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$$

Scomponiamo il campo in ingresso in varie sorgenti puntiformi di onde sferiche che sarà possibile sovrapporre per formare il campo in uscita

La risposta del sistema ottico e un punto sorgente mi da la funzione che l'onda sferica che parte dalla sorgente puntiforme che stiamo considerando il suo andamento di fase

$\frac{e^{ikr}}{i\lambda r}$

Siamo in ottica parassiale

$$r \approx [1 + \frac{1}{2}(\frac{x - x_0}{z})^2 + \frac{1}{2}(\frac{y - y_0}{z})^2] \tag{50}$$

Il campo che mi arriva sulla lente sarà ($r \approx z = d_0$)

$$U_l(x, y) = \frac{1}{i\lambda d_0} e^{i\frac{k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]} \tag{51}$$

il campo dopo la lente sarà moltiplicato per le funzioni di trasmissione della lente composto dalla pupilla e dal termine di fase (ipotizzando sempre che la lente f>0)

$$U_l'(x, y) = U_l(x, y)P(x, y)e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \tag{52}$$

per arrivare al piano (x_i, y_i) abbiamo un tratto z=d_0 di propagazione libera che andiamo a studiare con l'integrale di Fresnel

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} U_l'(x, y)e^{i\frac{k}{2d_i}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}dxdy \tag{53}$$

sostituendo troviamo la funzione h

$$h = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} e^{i\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{i\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y)e^{i\frac{k}{2}(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f})(x^2+y^2)} e^{-ik[(\frac{x_0}{d_0}+\frac{x_1}{d_1})x+(\frac{y_0}{d_0}+\frac{y_1}{d_1})y]}dxdy \tag{54}$$

per una ragione che non mi è facile comprendere

$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f}$

poniamo come condizione

$M = \frac{d_i}{d_0}$

$$h = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} e^{i\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{i\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y)e^{-ik\frac{k}{d_i}[(Mx_0+x_i)x+(My_0+y_i)y]}dxdy \tag{55}$$

ricordando la (42) e ricordando sempre che $I \sim |U|$

in ottica diffrattiva un punto luminoso nel piano oggetto diventa una macchia nel piano immagine corrispondente alla trasformata di Fourier nell'apertura della lente la cui dimensione è inversamente proporzionale alla dimensione della pupilla(più grande è la pupilla più piccolo sarà la macchia quindi l'immagine più chiara)

A grandi linee è possibile approssimare :

pupilla grande → δ → macchia puntiforme → ottica geometrica

pupilla piccolo → macchi su tutto il piano immagine → ottica diffrattiva

COME FACCIO A DIRE CHE È UN FILTRO?? La lente è quindi un filtro sulla frequenza spaziale del campo di partenza

l'effetto della pupilla in un sistema ottico in ottica diffrattiva è quello di un **filtro passa basso per le frequenze spaziali** maggiori le dimensioni della pupilla più frequenze passano, più è precisa la riproduzione nel piano immagine

Esempio: Telescopio