



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Dipartimento di Fisica A. Pontremoli

Corso di Laurea triennale in Fisica

**HCO⁺ come tracciatore di ionizzazione dei
dischi protoplanetari**

Relatore:
Prof. Giovanni Rosotti

Tesi di Laurea di:
Paolo Leoni
Matricola 990447

Anno accademico:
2023/2024

Sommario

I dischi protoplanetari sono sistemi formati prevalentemente da gas e polvere che ruotano attorno ad una stella giovane appena formata. Si tratta del materiale residuo dal processo di formazione stellare, che non è stato incorporato nella stella centrale. Il motivo per cui è interessante esaminare questi oggetti è che sono il luogo in cui si formano pianeti, lune e altri corpi minori. È quindi importante comprendere la natura fisica e chimica delle componenti fondamentali dei dischi protoplanetari, così come la loro distribuzione spaziale, per comprendere meglio la formazione dei pianeti. A questo proposito, è ora possibile studiare, attraverso l'ultima generazione di telescopi, la struttura verticale dei dischi grazie a osservazioni spazialmente risolte, fornendo nuove informazioni sulla stratificazione verticale della densità e della temperatura. In particolare, la disponibilità di dati basati sull'emissione di linee spettrali nel sub-millimetrico, associate alle transizioni rotazionali di molecole come il CO, ha ultimamente permesso di studiare l'altezza di emissione dei dischi, fornendo preziose informazioni sulla struttura verticale del sistema. In questo lavoro di tesi ho utilizzato un modello di trasferimento radiativo per legare i profili di densità verticale e temperatura all'altezza di emissione, sfruttando come tracciante lo ione HCO^+ . L'obiettivo è inferire informazioni riguardo a parametri fondamentali del disco, quali massa, tasso di ionizzazione e raggio caratteristico, sfruttando i risultati del modello sull'altezza di emissione. Nello specifico è interessante risalire al tasso di ionizzazione di HCO^+ , quantità fondamentale che regola molti processi chimici nel disco e come esso risponde ai campi magnetici.

Indice

Introduzione	iii
1 Evoluzione e struttura dei dischi	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Struttura dei dischi	3
1.2.1 Struttura Verticale	3
1.2.2 Struttura Radiale	5
1.2.3 Struttura di ionizzazione	5
1.3 Evoluzione dei dischi	7
1.3.1 Viscosità	9
2 Trasferimento radiativo	10
2.1 Quantità Radiative	10
2.2 Equazione del trasferimento radiativo	12
3 Impostazione del modello e opacità delle linee spettrali	14
3.1 Introduzione al modello	14
3.2 Opacità della linee spettrali molecolari	15
3.3 Opacità delle linee di HCO ⁺	17
4 Applicazione del modello ad HCO⁺	20
4.1 Caso verticalmente isotermo	20
4.2 Caso non verticalmente isotermo	24
5 Presentazione e discussione dei risultati	28
5.1 Caso verticalmente isotermo	28
5.2 Caso non verticalmente isotermo	37
5.3 Applicazione del modello sul disco di PDS 70	42

Introduzione

I dischi circumstellari sono strutture costituite da gas e polveri che orbitano intorno a stelle giovani, costituendo una componente essenziale del processo di formazione stellare. Attraverso il disco, infatti, il corpo centrale acquisisce gran parte della propria massa, grazie a processi che ridistribuiscono il momento angolare all'interno della struttura orbitante, permettendo al materiale di fluire verso l'interno. Un'altra funzione fondamentale dei dischi circumstellari è quella di ospitare la formazione planetaria, che avviene tramite l'aggregazione di corpi più piccoli; per questo motivo sono chiamati dischi proto-planetari. Grazie al telescopio ALMA, sono recentemente disponibili osservazioni risolte sia spazialmente che spettralmente nel regime sub-millimetrico. Queste osservazioni, basate sull'emissione di linee spettrali associate alle transizioni rotazionali di molecole come il monossido di carbonio (CO), hanno reso possibile un'analisi dettagliata dell'altezza da cui proviene l'emissione nei dischi protoplanetari. Questi studi forniscono informazioni cruciali sulla struttura verticale del disco, migliorando la comprensione della sua composizione e distribuzione. Le linee spettrali prese in considerazione riguardano le osservazioni sulle transizioni tra i livelli energetici rotazionali $J = 4-3$ e $J = 3-2$ dello ione HCO^+ che, in questo lavoro di tesi, è stata utilizzata come tracciante per analizzare i parametri che influenzano l'altezza di emissione e il modo in cui questi effetti si manifestano. Per questo scopo è stato costruito un modello analitico che collega l'altezza di emissione alla densità superficiale del disco, assumendo un determinato profilo di temperatura. Successivamente ho effettuato uno studio della dipendenza dell'altezza di emissione dai parametri di massa del disco, raggio caratteristico e soprattutto dal tasso di ionizzazione. Infatti, questo parametro è molto importante, in quanto HCO^+ è un classico tracciante di ionizzazione. Inoltre, attraverso questa quantità è possibile ottenere informazioni essenziali sull'accoppiamento del disco con i campi magnetici, derivando quindi informazioni cruciali sulla sua evoluzione.

Struttura della tesi

La tesi è organizzata nei seguenti cinque capitoli:

1. In questo capitolo ho introdotto il problema fisico che vogliamo trattare ed il contesto in cui si presenta.
2. Nel Capitolo 1 forniamo un riepilogo della fisica dei dischi protoplanetari concentrandoci sulla struttura dei dischi.
3. Nel Capitolo 2 spieghiamo le nozioni base di trasferimento radiativo.

4. Nel capitolo 3 mostriamo l'idea generale del modello utilizzato per collegare l'altezza di emissione al profilo di densità e al profilo di temperatura.
5. Nel capitolo 4 analizziamo nello specifico il caso di HCO^+ , spiegando più nel dettaglio le parametrizzazioni delle quantità fisiche.
6. Nel capitolo 5 mostriamo e analizziamo i risultati ottenuti al variare dei parametri di massa, raggio caratteristico e tasso di ionizzazione del disco.

Capitolo 1

Evoluzione e struttura dei dischi

1.1 Introduzione

In termini semplici un disco protoplanetario consiste in una struttura di gas e polveri che orbita attorno ad una stella seguendo prevalentemente un moto Kepleriano. Le stelle si formano oggi nella Galassia a partire dalla frazione di gas presente nelle nubi molecolari dense. Le nubi molecolari vengono osservate tramite uno o più traccianti molecolari, come ad esempio CO, che possono essere utilizzati sia per ottenere informazioni cinematiche, che per fornire indizi sulla presenza di rotazione.

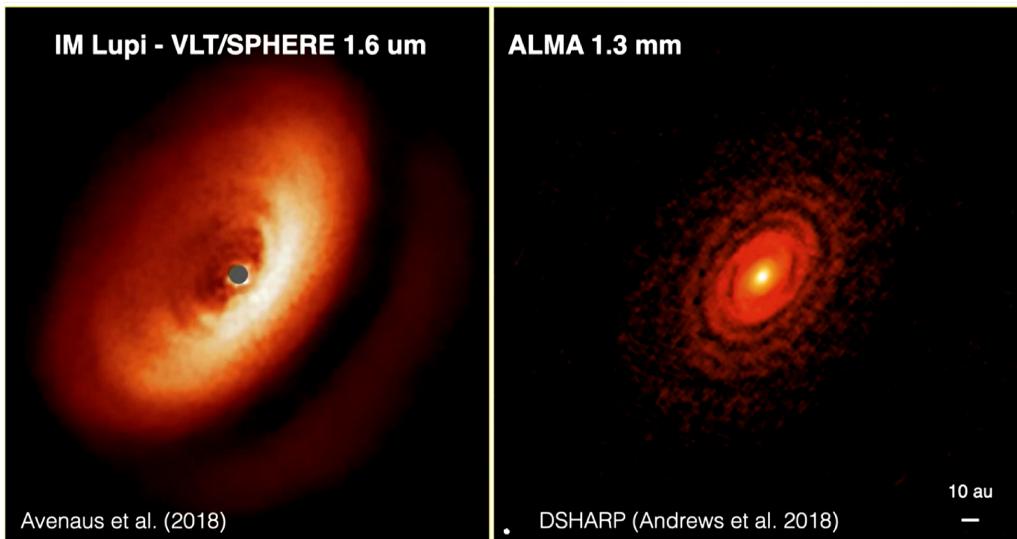


Figura 1.1: Sulla sinistra: immagine della stella IM Lupi nell'infrarosso che mostra le proprietà superficiali del disco. Sulla destra: Immagine nel continuo che mostra le proprietà di densità del disco. Crediti dell'immagine: Andrews et al. 2018, ESO/H.Avenaus et al. 2018/DARTT-S

Le osservazioni dei cosiddetti “cores”, regioni dense e di piccola scala all’interno delle nubi molecolari (~ 0.1 pc) che costituiscono i precursori immediati della formazione stellare, mostrano gradienti di velocità dell’ordine di $1 \text{ km s}^{-1} \text{ pc}^{-1}$. Anche

attribuendo interamente tale gradiente alla rotazione, il parametro

$$\beta = \frac{|E_{rot}|}{E_{grav}} \quad (1.1)$$

è dell'ordine di ~ 0.1 . Queste nubi sono quindi caratterizzate da lenti movimenti rotatori. Inoltre i cores sono gravitazionalmente instabili e possono collassare sotto azione della propria gravità: questo processo darà luogo alla formazione di una nuova stella. In Figura 1.4 sono riportate le varie fasi evolutive dei sistemi stellari giovani (YSO).

Per capire meglio consideriamo un elemento di fluido facente parte di un core,

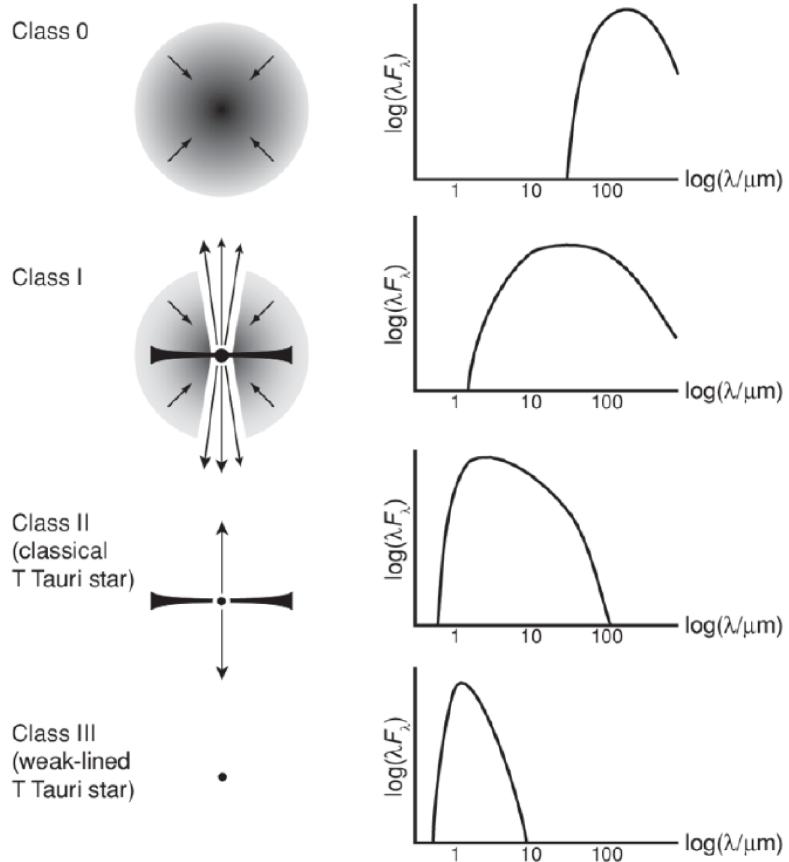


Figura 1.2: Schema delle fasi evolutive di un oggettostellare giovane (YSO). Lo spettro di emissione fornisce informazioni sulla classe di appartenenza dell'oggetto.

che supponiamo avere asse di rotazione lungo z. Su tale elemento agisce una forza centrifuga che bilancia la componente radiale dell'attrazione gravitazionale. L'altra componente, ossia quella verticale, agisce senza essere contrastata: questo comporta la formazione di un disco sottile attorno alla proto-stella. L'ultima fase della formazione stellare ($\sim 10^6$ Myr) è caratterizzata da un graduale accrescimento di materiale sul corpo centrale. Questo processo è regolato da meccanismi che determinano una ridistribuzione del momento angolare la cui natura è ancora argomento di discussione. Uno dei modelli proposti identifica in fenomeni di natura viscosa ciò che sta alla base del trasporto di momento angolare.

1.2 Struttura dei dischi

In questa sezione ci occuperemo di capire la struttura dei dischi protoplanetari.

I dischi protoplanetari hanno una vita media di alcuni milioni di anni. Questo periodo corrisponde a milioni di tempi dinamici nelle regioni più interne del disco, dove le scale temporali dei moti sono molto più brevi rispetto alla vita media del disco. Al contrario, nelle regioni più esterne del disco, la vita media corrisponde a poche migliaia di tempi dinamici. Questa differenza implica che l'evoluzione del disco varia significativamente tra le diverse regioni, con processi molto più rapidi nelle parti interne rispetto a quelli nelle zone esterne. In prima approssimazione possiamo quindi trattare il disco come un sistema che evolve lentamente attraverso una sequenza di strutture statiche assisimmetriche. Il nostro obiettivo è comprendere la fisica che determina queste strutture.

1.2.1 Struttura Verticale

Assumiamo un disco non auto-gravitante, ovvero che la sua massa sia molto minore della massa della stella, e sostenuto contro la gravità della stella dalla pressione del gas. Il profilo verticale di densità si ricava a partire dall'assunzione di equilibrio idrostatico lungo questa direzione che identifichiamo con la coordinata z . In coordinate cilindriche questa condizione viene espressa come

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g_z \quad (1.2)$$

dove ρ è la densità del gas, P la pressione e g_z la componente verticale dell'accelerazione gravitazionale. Attraverso semplici considerazioni, vedi Figura 1.3, e ignorando qualsiasi contributo gravitazionale dovuto al disco, la componente verticale dell'accelerazione di gravità sentita da una particella test di gas ad un raggio r e ad un'altezza z dal midplane è:

$$g_z = \frac{GM_*}{d^2} \sin \theta = \frac{GM_*}{d^3} z = z \cdot \frac{GM_*}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = z\Omega^2(z) \quad (1.3)$$

dove: $\Omega(z) = \sqrt{\frac{GM_*}{(r^2+z^2)^3}}$ è la velocità angolare.

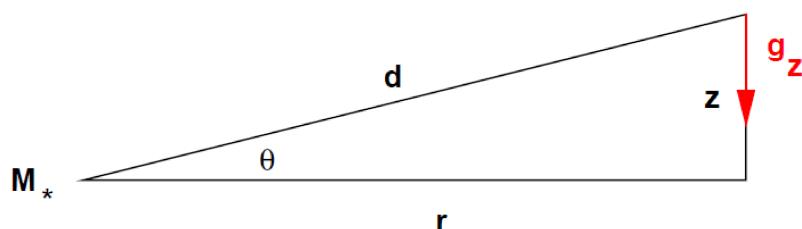


Figura 1.3: Costruzione geometrica per la determinazione del profilo di densità verticale.

Assumendo che il gas sia perfetto, l'equazione di stato che lega P e ρ è

$$P = \rho c_s^2 \quad (1.4)$$

dove c_s è la velocità del suono. In principio sia ρ che c_s dipenderanno da z nel caso il disco presenti un profilo di temperatura non verticalmente uniforme. Inseriamo quindi l'equazione 1.4 nell'equazione 1.2.

$$c_s^2 \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dc_s^2(z)}{dz} = -\rho z \Omega^2(z) \quad (1.5)$$

Arrangiando i termini si giunge all'equazione differenziale:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{c_s^2(z)} \left(z \Omega^2(z) + \frac{dc_s^2(z)}{dz} \right) dz. \quad (1.6)$$

Per risolverla prendiamo la condizione iniziale $\rho(z=0) = \rho_0$:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\rho}{\rho_0} &= - \int_0^z \frac{z' \Omega^2(z')}{c_s^2(z')} dz' - \int_0^z \frac{1}{c_s^2(z')} \frac{dc_s^2(z')}{dz'} dz' \\ \ln \frac{\rho}{\rho_0} &= - \int_0^z \frac{z' \Omega^2(z')}{c_s^2(z')} dz' - 2 \int_{c_{s,\text{mid}}}^{c_{s,z}} \frac{dc_s}{c_s} \\ \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \ln \frac{c_{s,\text{mid}}^2}{c_s^2(z)} &= - \int_0^z \frac{z' \Omega^2(z')}{c_s^2(z')} dz' \\ \rho(z) &= \rho_0 \frac{c_{s,\text{mid}}^2}{c_s^2(z)} \exp \left(- \int_0^z \frac{z' \Omega^2(z')}{c_s^2(z')} dz' \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Per un disco verticalmente isotermo e sottile, quindi tale che $z \ll r$, questa espressione si riduce a

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left(-\frac{z^2}{2H^2} \right) \quad (1.8)$$

dove $\rho_0 = \frac{\Sigma}{H\sqrt{2\pi}}$ e $H = \frac{c_s}{\Omega} = \sqrt{\frac{kTr^3}{\mu m_p GM_*}}$ con T temperatura del midplane, costante lungo la direzione verticale. H è detta "scale height" e fornisce informazioni riguardo all'altezza caratteristica del disco. La relazione appena resa esplicita tra c_s e T deriva da una perturbazione isoterna delle variabili fisiche in un gas perfetto, per cui:

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \quad (1.9)$$

dove m_H è la massa dell'idrogeno e μ il peso molecolare medio che, in condizioni normali del disco, vale circa 2.3. L'espressione 1.8 ci dice che al midplane (in $z = 0$) si concentra la maggior parte della massa. Infatti se consideriamo l'equazione 1.3 per $z \ll r$, si nota che l'accelerazione gravitazionale verticale aumenta all'aumentare dell'altezza, annullandosi al midplane.

È importante sottolineare che il profilo di temperatura non è determinabile analiticamente in quanto dipende dai parametri della radiazione stellare e dalla distribuzione del materiale.

1.2.2 Struttura Radiale

Assumendo che le sottostrutture del disco siano una modulazione di basso ordine della struttura radiale, la maggior parte degli studi assume una distribuzione radiale del materiale che segue una legge di potenza tipicamente soppressa da una decrescita esponenziale a raggi maggiori. La precisa modellizzazione della densità superficiale dipenderà dallo specifico meccanismo di evoluzione. Per un disco che evolve attraverso fenomeni di natura viscosa, il profilo radiale segue:

$$\Sigma(r) = \Sigma_c \left(\frac{r}{r_c} \right)^{-\gamma} \exp \left\{ \left(-\frac{r}{r_c} \right)^{2-\gamma} \right\}, \quad (1.10)$$

dove r_c è il raggio caratteristico. È importante specificare che la polvere e il gas dovrebbero avere distribuzioni radiali differenti. Dato quindi un profilo di densità superficiale radiale possiamo derivare risultati utili sulla componente azimutale della velocità v_ϕ . Se il disco è quasi-statico la componente azimutale dell'equazione della quantità di moto valutata al midplane è:

$$\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}, \quad (1.11)$$

dove P è la pressione. Consideriamo ora a titolo d'esempio un profilo radiale con $\gamma = 1$, tale che $\Sigma \propto r^{-1}$, e con profilo di temperatura del tipo $T \propto r^{-\frac{1}{2}}$. Allora $c_s \propto r^{-\frac{1}{4}}$, $\rho \propto r^{-\frac{9}{4}}$ e $P \propto r^{-\frac{11}{4}}$. Sostituendo quindi nell'equazione 1.11 otteniamo

$$v_\phi = v_k \left[1 - \frac{11}{4} \left(\frac{H}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.12)$$

Da qui deduciamo che la deviazione da una rotazione kepleriana classica è dell'ordine di $\left(\frac{H}{r} \right)^2$

1.2.3 Struttura di ionizzazione

Il grado di ionizzazione del gas nel disco è molto importante in quanto fornisce informazioni sul come il gas interagisce con i campi magnetici. Per questo lavoro ci interessa il rapporto tra la densità numerica degli elettroni liberi e la densità numerica delle particelle neutre, detta **frazione di ionizzazione**:

$$\xi = \frac{n_e}{n_n}, \quad (1.13)$$

anche se è importante ricordare che i grani di polvere possono anch'essi portare cariche elettriche.

Esistono due processi di ionizzazione principali: la ionizzazione termica (o collisionale) e la ionizzazione non termica, dovuta a fotoni o particelle con un'energia molto superiore all'energia termica tipica del gas. In questo lavoro è stata presa in considerazione solamente la ionizzazione non termica. Infatti, al di fuori della regione vicina alla stella, dove la ionizzazione termica è possibile, eventuali processi residui di ionizzazione sono controllati da processi non termici. In queste condizioni, le

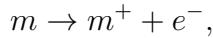
considerazioni di equilibrio termodinamico non sono rilevanti, e diventa necessario bilanciare esplicitamente il tasso di ionizzazione causato da particelle o fotoni ad alta energia con il tasso di ricombinazione nel gas del disco. Consideriamo quindi le tre sorgenti di ionizzazione non termica più rilevanti:

- Fotoni UV
- Raggi X stellari
- Raggi cosmici

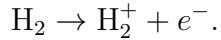
Ognuna di queste sorgenti ha un diverso impatto in diverse regioni del disco. Nelle regioni più superficiali del disco dominano i raggi X con un tasso di ionizzazione $\zeta_x = 10^{-12} \text{ s}^{-1}$. Negli strati ancora più superficiali vi è l'effetto dei fotoni ultravioletti. Invece negli strati più interni del disco, dove i raggi X non riescono a penetrare, la componente dominante sono i raggi cosmici con tasso di ionizzazione che varia da 10^{-17} s^{-1} a 10^{-19} s^{-1} .

I principi della ricombinazione in fase gassosa possono essere illustrati considerando le possibili reazioni tra elettroni e molecole generiche m o atomi metallici M . Le reazioni fondamentali sono quindi:

- Ionizzazione:



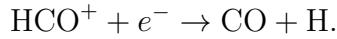
con tasso di ionizzazione ζ . Un esempio specifico è:



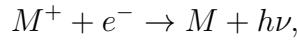
- Ricombinazione con ioni molecolari:



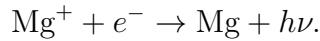
con tasso $\alpha = 3 \times 10^{-6} T^{-1/2} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Un esempio è la reazione di ricombinazione dissociativa:



- Ricombinazione con ioni metallici in fase gassosa:



con tasso $\gamma = 3 \times 10^{-11} T^{-1/2} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Un esempio è:



- Reazioni di scambio di carica:



con tasso $\beta = 3 \times 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Un esempio è:



Per questo set di reazioni scriviamo le equazioni differenziali che descrivono il tempo di evoluzione della densità numerica delle specie coinvolte. In generale queste equazioni vanno risolte numericamente; in alcuni casi è invece possibile scrivere la soluzione analitica. Se per esempio non ci sono reazioni significative che coinvolgono atomi metallici, otteniamo una soluzione per la frazione di ionizzazione:

$$\xi = \sqrt{\frac{\zeta}{\delta n_n}} \quad (1.14)$$

dove δ è il tasso di ricombinazione dissociativo per gli ioni molecolari e n_n la densità numerica totale del gas. Nel nostro caso, seguendo la formulazione di Fromang et al. [1], utilizziamo l'espressione:

$$\delta = 3 \cdot 10^6 \cdot T^{-1/2} \text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}. \quad (1.15)$$

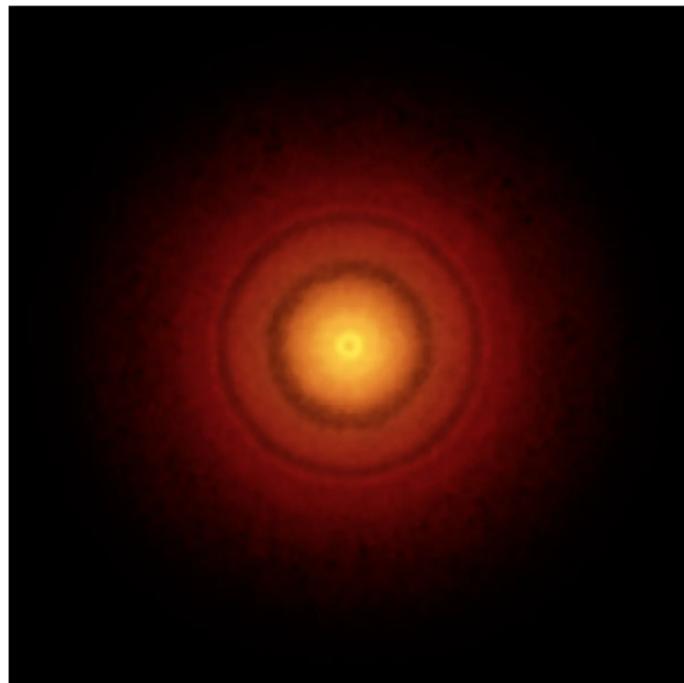


Figura 1.4: Immagine del disco attorno alla stella TW Hydrae. Si possono notare chiaramente i classici anelli e gap dei dischi che indicano la presenza di pianeti in fase di evoluzione. Crediti per l'immagine: S. Andrews (Harvard-Smithsonian CfA); B. Saxton (NRAO/AUI/NSF); ALMA (ESO/NAOJ/NRAO).

1.3 Evoluzione dei dischi

Come detto precedentemente i dischi non sono delle strutture statiche, ma evolvono lentamente nel tempo. Per un disco geometricamente sottile la velocità angolare

è essenzialmente quella di un'orbita Kepleriana. Questo implica che il momento angolare specifico $l = \sqrt{GM_*r}$ è una funzione crescente del raggio: per far sì che il materiale possa fluire verso l'interno deve necessariamente perdere momento angolare. Secondo il modello viscoso, l'evoluzione di $\Sigma(r, t)$ può essere determinata componendo l'equazione di continuità

$$r \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r) = 0 \quad (1.16)$$

con l'equazione per la conservazione del momento angolare

$$r \frac{\partial}{\partial t}(r^2\Omega\Sigma) + \frac{\partial}{\partial r}(r^3\Omega\Sigma v_r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial r}. \quad (1.17)$$

La (1.17) deriva direttamente dalla componente azimutale dell'equazione di Navier-Stokes. Per un fluido viscoso, il momento torcente G applicato su un anellino è dato dal prodotto fra la circonferenza, la forza viscosa per unità di lunghezza ed il braccio della forza. Possiamo allora esplicitare G come

$$G = 2\pi r \cdot \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr} \cdot r, \quad (1.18)$$

dove ν è la viscosità cinematica. Procediamo ora combinando la (1.16) con la (1.17) con l'obiettivo di eliminare la velocità radiale v_r . Concentrandoci su un potenziale di tipo Kepleriano, ossia tale per cui $\Omega \propto r^{-3/2}$, è possibile ottenere una relazione che descriva l'evoluzione della densità superficiale di un disco geometricamente sottile:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{1/2}) \right]. \quad (1.19)$$

La (1.19) è un'equazione di diffusione. Una volta effettuato il seguente cambio di variabili

$$X \equiv 2r^{1/2}, \quad (1.20)$$

$$f \equiv \frac{3}{2} \Sigma X, \quad (1.21)$$

si presenta infatti nella tipica forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}, \quad (1.22)$$

con coefficiente di diffusione

$$D = \frac{12\nu}{X^2}. \quad (1.23)$$

In generale ν sarà una funzione delle condizioni locali del disco. Soluzioni analitiche sono possibili se ν presenta una dipendenza a legge di potenza nei confronti della coordinata radiale. Nel caso in cui la viscosità cinematica dipenda dalla densità superficiale Σ , allora l'equazione di evoluzione diventa non lineare e più problematica da risolvere.

1.3.1 Viscosità

In questa sezione discutiamo brevemente i fenomeni viscosi. La viscosità molecolare in questi sistemi, dovuta a interazioni microscopiche tra molecole, è trascurabile poiché, se fosse l'unica forma di viscosità presente, i tempi di evoluzione sarebbero dell'ordine di 10^{13} anni, milioni di volte più lunghi rispetto a quelli osservati. Le turbolenze presenti all'interno del disco possono fornire delle viscosità efficaci nettamente più intense di quella molecolare (Shakura et al. [2]).

La massima velocità dei movimenti turbolenti è la velocità del suono, perché per velocità maggiori si presenterebbero shock associati ad una rapida dissipazione dell'energia in calore. Inoltre, per turbolenze isotrope, la scala massima di sviluppo è dell'ordine della dimensione verticale del disco H . Queste considerazioni motivano la parametrizzazione del coefficiente di viscosità cinematica

$$\nu = \alpha c_s H, \quad (1.24)$$

dove α è un parametro adimensionale che indica quanto efficiente sia il trasporto del momento angolare e H la scale height del disco.

Capitolo 2

Trasferimento radiativo

Il trasferimento radiativo è una branca dell'ottica che si occupa di studiare l'interazione tra radiazione e materia. In ambito astronomico questo studio avviene in approssimazione di ottica geometrica, ovvero quando la lunghezza d'onda della radiazione λ è molto minore delle lunghezze caratteristiche del mezzo che attraversa. Nella maggior parte dei casi, possiamo assumere che la luce si propaghi così velocemente da poter ignorare gli effetti del tempo di percorrenza. In altre parole: nella maggior parte dei casi, possiamo assumere che tutti i fotoni attraversino il mezzo su una scala temporale molto più breve rispetto a qualsiasi cambiamento che avvenga nel mezzo.

2.1 Quantità Radiative

In questa sezione introduco le quantità fondamentali del trasferimento radiativo. In approssimazione di ottica geometrica l'**intensità spettrale** può essere definita quantitativamente in termini di

- $d\sigma$ = porzione di superficie infinitesima
- θ = angolo tra il raggio di luce e la normale alla superficie
- $d\Omega$ = angolo solido infinitesimo misurato dalla posizione dell'osservatore.

Se una quantità di energia dE proveniente dall'angolo solido $d\Omega$ fluisce attraverso l'area proiettata lungo la direzione del raggio $d\sigma \cos \theta$ in un tempo dt e in una stretta banda di frequenza $d\nu$, allora

$$dE = I_\nu \cos \theta d\sigma d\Omega dt d\nu. \quad (2.1)$$

Invertendo questa relazione l'intensità spettrale risulta essere

$$I_\nu = \frac{dP}{\cos \theta d\sigma d\Omega d\nu}. \quad (2.2)$$

Questa è una quantità scalare funzione in 6 dimensioni: dipende dalla frequenza, da tre coordinate spaziali, che indicano dove si vuole misurare l'intensità, e da 2

coordinate angolari. Infatti possiamo imporre che il vettore normale alla superficie di incidenza che abbia modulo $|n| = 1$ rendendo quindi 2 coordinate su 3 indipendenti. Un'importante proprietà dell'intensità spettrale è che si conserva nel vuoto lungo i raggi di propagazione della radiazione. Parametrizzando il raggio di luce dalla sorgente al punto di misura con s possiamo esprimere questa legge come

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0. \quad (2.3)$$

Quando si interpone un mezzo tra la sorgente e il punto di misura, la situazione cambia.

Pensiamo al raggio di luce come un fascio di fotoni che attraversando il mezzo potrebbero essere assorbiti. La probabilità infinitesima dP di un fotone di essere assorbito (e.g. da una particella in grado di assorbirlo) in uno strato sottile di mezzo ds è direttamente proporzionale a ds : $dP = \alpha ds$, dove la costante di proporzionalità

$$\alpha = \frac{dP}{ds} \quad (2.4)$$

è detta **coefficiente di assorbimento lineare**. Il processo di assorbimento è descritto come un processo stocastico per cui un fotone potrebbe percorrere più spazio di un altro prima di essere assorbito. Questo coefficiente fisicamente rappresenta quindi l'inverso del libero cammino medio di un fotone all'interno del mezzo. In genere il libero cammino medio è una funzione della posizione e della frequenza del fotone. Inoltre più è denso il mezzo più il libero cammino medio sarà piccolo. Questo semplice modello macroscopico non dipende dai processi fisici microscopici attraverso i quali i fotoni vengono assorbiti. Il numero di liberi cammini medi che un fotone percorre all'interno di un mezzo prima di essere assorbito è detto **profondità ottica** e si indica con la lettera τ . In questo modo α e τ risultano strettamente legati dalla relazione

$$\tau(s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} \alpha(s) ds \quad (2.5)$$

dove $\alpha(s)$ è il coefficiente di assorbimento ad una specifica posizione s lungo il raggio.

Un mezzo avente $\tau \gg 1$ è detto **otticamente spesso**, mentre un mezzo che ha $\tau \ll 1$ è detto **otticamente sottile**. Nel primo caso, la maggior parte dei fotoni viene assorbita, poiché il numero di cammini liberi medi che un fotone percorre prima di uscire dal mezzo è elevato, rendendo più probabile l'assorbimento. Nel secondo caso, invece, è possibile vedere attraverso il mezzo, poiché solo una piccola frazione dei fotoni viene assorbita. In trasferimento radiativo si è soliti esplicitare la dipendenza del coefficiente di assorbimento α dalla densità espressa in unità CGS di g cm^{-3} :

$$\alpha_\nu = \rho \kappa_\nu \quad (2.6)$$

dove κ_ν è il coefficiente di opacità, avente unità di misura inverse rispetto a quelle della densità superficiale di massa, ovvero $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$.

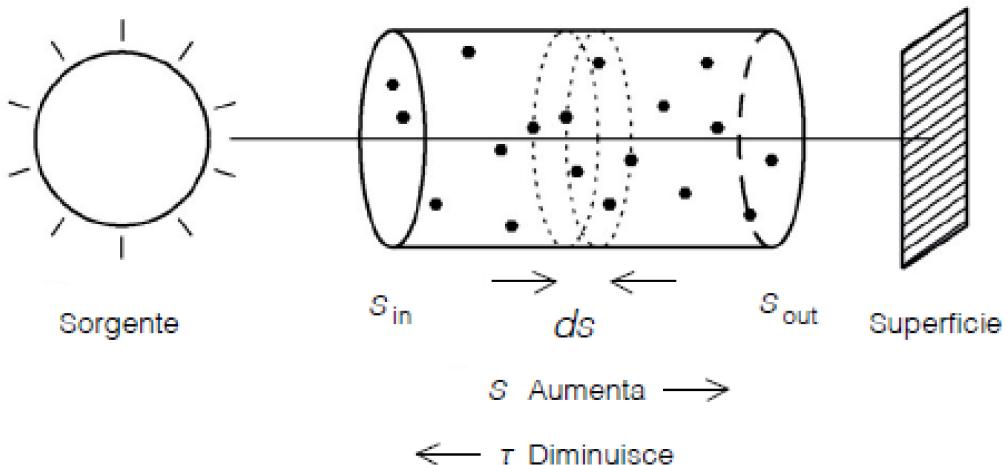


Figura 2.1: Rappresentazione grafica di intensità e profondità ottica

2.2 Equazione del trasferimento radiativo

L'equazione 2.3 nel caso il raggio di radiazione attraversi un mezzo con coefficiente di assorbimento $\alpha_\nu(s)$ diventa

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu(s)I_\nu \quad (2.7)$$

valida per qualsiasi raggio passante per il mezzo. Integrando si ottiene quindi

$$I_\nu(s_1) = I_\nu(s_0) \exp\{-\tau_\nu(s_0, s_1)\} \quad (2.8)$$

dove $s_1 > s_0$. Questa espressione esprime quantitativamente il fatto che l'intensità delle radiazioni si attenua esponenzialmente all'interno del mezzo, a causa dell'assorbimento dei fotoni da parte delle particelle del mezzo (in questo modello molto semplificato).

Assumiamo ora che il mezzo inietti radiazione aggiunta al raggio. In questa caso l'equazione 2.7 prende la forma

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu(s)I_\nu + j_\nu(s). \quad (2.9)$$

L'equazione 2.9 è detta *equazione formale del trasferimento radiativo*. Il termine $j_\nu(s)$ è detto **emissività** e ha unità di misura CGS di $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1}$. Questa quantità è quindi definita come il flusso di energia radiativa emesso per unità di volume, unità di tempo e unità di lunghezza d'onda.

Legge di kirchhoff

Per soddisfare le leggi della termodinamica, l'equazione formale del trasferimento radiativo deve obbedire a una certa condizione. Supponiamo di avere una cavità

termica riempita di gas con un certo coefficiente di estinzione α_ν . Supponiamo che questo gas sia in equilibrio termico alla temperatura T nella cavità. In tal caso, indipendentemente dal fatto che il gas sia otticamente spesso o sottile, l'intensità dovrebbe essere ovunque uguale a $I_\nu = B_\nu(T)$, funzione di Planck. Per l'equazione del trasferimento radiativo formale, ciò significa che $\frac{dI_\nu}{ds} = 0$ e quindi:

$$j_\nu(s) - \alpha_\nu(s)I_\nu(s) = j_\nu(s) - \alpha_\nu(s)B_\nu(T) = 0.$$

In altre parole:

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T).$$

Questa è la **legge di Kirchhoff**. Essa afferma che un mezzo in equilibrio termico può avere qualsiasi emissività j_ν e coefficiente di estinzione α_ν , purché il loro rapporto sia la funzione di Planck.

Questa legge non si applica solo in una cavità termica, ma ovunque il mezzo sia in equilibrio termodinamico locale (LTE). Sebbene LTE non sia sempre garantito, nei mezzi in cui è valido, la legge di Kirchhoff semplifica notevolmente il problema del trasferimento radiativo: infatti in LTE possiamo utilizzare la legge di Kirchhoff per scrivere l'equazione formale del trasferimento radiativo nella forma:

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = \alpha_\nu(s)[B_\nu(T(s)) - I_\nu(s)]$$

In casi non-LTE la funzione di Planck B_ν si generalizza alla funzione sorgente S_ν definita nello stesso modo.

Il senso fisico di scrivere l'equazione del trasferimento radiativo in questo modo, sta nel notare che l'intensità tende ad approcciare $B_\nu(T)$ asintoticamente. Se la temperatura è costante lungo il raggio allora l'intensità approccerà in modo esponenziale la funzione di Planck. In pratica in questo regime dopo una certa distanza dal punto iniziale di interazione col mezzo, l'intensità sarà costante lungo il raggio. Se invece la temperatura varia lungo il raggio, l'intensità ha sempre qualche libero cammino medio di ritardo rispetto a $B_\nu(T)$, ma tende sempre ad approcciarla asintoticamente.

Approssimazione di Eddington-Barbier

Nella maggior parte dei casi reali l'equazione formale del trasferimento radiativo non è risolvibile analiticamente. Fortunatamente esiste un modo di ottenere una ragionevole stima sull'intensità osservata e questo è l'**approssimazione di Eddington-Barbier**. Questa approssimazione dice che se il mezzo che osserviamo è otticamente spesso e ha un gradiente di temperatura, l'intensità che osserviamo è circa uguale alla funzione sorgente S_ν nella posizione dove $\tau_\nu = \frac{2}{3}$

$$I_\nu^{\text{osservata}} \approx S_\nu \left(\tau_\nu = \frac{2}{3} \right) \quad (2.10)$$

Tuttavia questa approssimazione non è sempre valida. Infatti può essere utilizzata solamente nei casi in cui il gradiente di temperatura è moderato.

Capitolo 3

Impostazione del modello e opacità delle linee spettrali

In questo capitolo introdurremo il modello che lega il profilo di densità Σ all'altezza di emissione del disco. Come accennato in precedenza, si tratta di un modello semplificato di trasferimento radiativo che sfrutta l'approssimazione di Eddington-Barbier. Tale modello considera che la maggior parte della profondità ottica delle linee si sviluppi in prossimità dello strato emissivo. Contemporaneamente, introdurremo le approssimazioni su cui il modello si basa, al fine di derivare le prime informazioni relative all'opacità delle linee spettrali di HCO^+ .

3.1 Introduzione al modello

Per questo modello viene utilizzata l'approssimazione di Eddington-Barbier assumendo che l'altezza di emissione di HCO^+ tracci la regione in cui $\tau = 2/3$, dove τ è misurato dall'osservatore allo strato emissivo. Chiamiamo N_τ la densità superficiale della colonna di HCO^+ per cui questo accade. Dobbiamo quindi stabilire lungo quali raggi stimare la profondità ottica della linea di emissione, il che equivale a definire l'orientazione della linea di vista rispetto al disco. Supponiamo di osservare il disco di faccia: in questo caso, la linea di vista coincide con la direzione verticale, ovvero l'asse z nel sistema di riferimento del disco. Se invece il disco è osservato di profilo, possiamo assumere che sia verticalmente sottile, trattando la linea di vista come quasi verticale. Questa sarà l'approssimazione che adotteremo. In generale è necessario considerare che negli strati superiori del disco le molecole tendono a fotodissociarsi a causa della radiazione UV ad esempio. In questo lavoro facciamo l'approssimazione che HCO^+ non si fotodissoci. Questa approssimazione è giustificata dal fatto che il tasso di fotodissociazione di HCO^+ è di diversi ordini di grandezza inferiore rispetto a quello di molecole come il CO, che sono più suscettibili alla fotodissociazione (Heays, A. N. et al. [3]). Per tenere adeguatamente conto di questi fenomeni, sarebbero necessari modelli termo-chimici complessi, che tuttavia esulano dall'ambito di questo lavoro.

3.2 Opacità della linee spettrali molecolari

Ricordiamo il nostro obiettivo è determinare l'altezza alla quale la profondità ottica della linea è circa 2/3. È quindi necessario calcolare il coefficiente di opacità associato a queste linee.

Il coefficiente di opacità è strettamente legato, tramite le leggi della meccanica quantistica, ai seguenti parametri:

- n_l : numero di particelle in grado di assorbire il fotone (dette “assorbitori”) per unità di volume.
- B_{lu} : coefficiente di probabilità di assorbimento di Einstein per unità di densità di energia spettrale che descrive la probabilità per una particella nello stato l di assorbire un fotone e fare una transizione nello stato u
- $h\nu_{ul}$: energia del fotone che induce la transizione dal livello quantistico più basso a quello più alto.

Possiamo infatti affermare che la quantità $n_l B_{lu}$ rappresenta il numero di assorbitori per unità di area per unità di tempo. Dunque, la frazione di fotoni assorbiti per unità di area per unità di lunghezza è $n_l B_{lu}/c$. Alla luce di queste considerazioni il coefficiente di assorbimento risulta essere

$$\alpha_1 = \frac{h\nu_{ul}}{c} n_l B_{lu} \phi(\nu) \quad (3.1)$$

dove $\phi(\nu)$ è la forma della linea. Tuttavia questo non rappresenta il coefficiente di assorbimento netto, in quanto bisogna tener conto anche della possibile emissione stimolata dal fotone con energia $h\nu_{ul}$. Questo processo viene descritto come un “assorbimento negativo” con coefficiente opposto a quello di eccitamento:

$$\alpha_2 = -\frac{h\nu_{ul}}{c} n_u B_{ul} \phi(\nu). \quad (3.2)$$

Bilanciando le due espressioni si ottiene quindi:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \left(\frac{h\nu_{ul}}{c} \right) (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \phi(\nu). \quad (3.3)$$

Il discorso è simile per il coefficiente di emissione spontanea, anche detto emissività. A_{ul} è il coefficiente di Einstein che descrive il tasso con cui le particelle nello stato u decadono spontaneamente verso lo stato l , n_u è il numero di particelle per unità di volume che si trova nello stato u , quindi la quantità $A_{ul} n_u$ ci dice il numero di fotoni emessi per unità di volume per unità di tempo. I fotoni sono emessi isotropicamente su 4π steradiani. Dunque, in maniera analoga a quanto appena discusso per il coefficiente di assorbimento, otteniamo il coefficiente di emissione spontanea:

$$j_\nu = \frac{h\nu_{ul}}{4\pi} n_u A_{ul} \phi(\nu). \quad (3.4)$$

Inserendo le equazioni 3.3 e 3.4 nell'equazione del trasferimento radiativo 2.9, giungiamo a

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \left(\frac{h\nu_{ul}}{c} \right) (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \phi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu_{ul}}{4\pi} n_u A_{ul} \phi(\nu). \quad (3.5)$$

Il nostro obiettivo è ora scrivere questa equazione in funzione del solo coefficiente di Einstein per l'emissione spontanea A_{ul} , eliminando così la dipendenza dal coefficiente B_{lu} . A tal proposito ci serviamo delle seguenti identità:

$$\frac{g_l}{g_u} \frac{B_{lu}}{B_{ul}} = 1 \quad (3.6)$$

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi h\nu_{ul}^3}{c^3}, \quad (3.7)$$

dove i fattori g_l e g_u rispettivamente le degenerazioni dei livelli quantistici l e u . L'identità 3.6 può essere sfruttata per eliminare il coefficiente B_{ul} dall'equazione 3.3, portando a

$$\alpha = \frac{h\nu_{ul}}{c} n_l B_{lu} \left(1 - \frac{n_u}{n_l} \frac{g_l}{g_u} \right) \phi(\nu). \quad (3.8)$$

Ora, in quanto il rapporto tra il coefficiente di emissione e il coefficiente di assorbimento netto dipende dal rapporto A_{ul}/B_{lu} , possiamo utilizzare l'identità 3.7 per eliminare A_{ul} da questo rapporto:

$$\frac{j_\nu}{\alpha} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{B_{ul}}{B_{lu}} \left(\frac{n_l}{n_u} - \frac{g_l}{g_u} \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

A questo punto ci serviamo una seconda volta dell'identità 3.6 per poter eliminare sia B_{ul} che B_{lu} da questa equazione

$$\frac{j_\nu}{\alpha} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \left(\frac{n_l}{n_u} \frac{g_u}{g_l} - 1 \right)^{-1} \quad (3.10)$$

e sfruttare la condizione di LTE per esprimere questo rapporto in termini della funzione di Planck

$$\frac{j_\nu}{\alpha} = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp \left(\frac{h\nu}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (3.11)$$

Deduciamo quindi che

$$\frac{g_u}{g_l} \frac{n_l}{n_u} = \exp \left(\frac{h\nu_{ul}}{k_B T} \right) \quad (3.12)$$

ovvero l'equazione di Boltzmann in caso LTE

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp \left(\frac{-h\nu_{ul}}{k_B T} \right) \quad (3.13)$$

che ci permette di riscrivere l'equazione per il coefficiente di opacità netto della linea in termini del solo coefficiente A_{ul} :

$$\alpha(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} \frac{g_u}{g_l} n_l A_{ul} \left[1 - \exp \left(\frac{-h\nu_{ul}}{k_B T} \right) \right] \phi(\nu).$$

(3.14)

In condizioni di LTE è conveniente scrivere $n_l = x_l n_{mol}$ dove x_l è la frazione di molecole nel livello l e n_{mol} la densità numerica della molecola, in quanto

$$x_i = \frac{g_i}{Z(T)} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right) \quad (3.15)$$

dove E_i è l'energia del livello i -esimo e $Z(T)$ funzione di partizione.

Nella trattazione appena esposta, c'è un elemento che non abbiamo ancora discusso e che merita attenzione: il profilo di linea spettrale $\phi(\nu)$. Questo fattore descrive come l'intensità della radiazione si distribuisce in funzione della frequenza, attorno alla frequenza centrale della transizione ν_{ul} . Nel contesto dei dischi protoplanetari le linee spettrali sono significativamente spostate a causa dell'effetto Doppler dovuto alla rotazione Kepleriana. In questa trattazione siamo interessati alla profondità ottica ad uno specifico raggio del disco. Possiamo quindi trascurare la rotazione del disco se la velocità non varia significativamente lungo la linea di vista. Questa assunzione è giustificata dal fatto che i dischi protoplanetari hanno un gradiente di velocità verticale tipicamente minore del gradiente di velocità radiale. Trascuriamo anche l'effetto Doppler dovuto a turbolenze nel disco, in quanto, se presente, questo è minore o comparabile all'effetto Doppler dovuto all'allargamento termico. Fatte queste assunzioni consideriamo solo l'allargamento termico; ciò implica che la forma della linea sia gaussiana, in quanto la distribuzione di Maxwell delle velocità lungo una direzione lo è. Il profilo della linea risulta quindi essere

$$\phi(\nu) = \frac{c}{\nu_{ul}} \frac{1}{\sqrt{\pi} v_D} \exp\left(-\left[\frac{c(\nu - \nu_{ul})}{\nu_{ul} v_D}\right]^2\right) \quad (3.16)$$

dove la larghezza della linea è

$$v_D = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_{mol}}} \quad (3.17)$$

con m_{mol} massa della molecola. Se valutiamo quindi la distribuzione 3.16 nella frequenza di transizione ν_{ul} , otteniamo

$$\phi(\nu_{ul}) = \frac{c}{\nu_{ul}} \frac{1}{\sqrt{\pi} v_D}. \quad (3.18)$$

3.3 Opacità delle linee di HCO⁺

A partire da questa sezione, i risultati presentati e i metodi utilizzati per ottenerli sono elaborazioni specifiche di questa tesi.

In questa sezione utilizziamo quanto discusso finora per analizzare le informazioni che le proprietà radiative di HCO⁺ forniscono sullo strato emissivo. In particolare, consideriamo le transizioni rotazionali J=4-3 e J=3-2 di HCO⁺, le cui specifiche sono state ricavate dal “Leiden Molecular Database” [4]. Sfruttando questi parametri e l'equazione 3.14, determiniamo la densità colonna N _{τ} di HCO⁺ necessaria affinché la profondità ottica sia $\tau = 2/3$, in funzione della temperatura.

Considerando l'espressione 3.14 e dividendola per la densità molecolare n_{mol} , otteniamo una quantità con le unità di misura di una superficie. Questa quantità può essere interpretata come un coefficiente di opacità $\kappa(\nu)$ per unità di massa, definito come

$$\kappa(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2 g_l} x_l A_{ul} \left[1 - \exp\left(\frac{-h\nu_{ul}}{k_B T}\right) \right] \phi(\nu). \quad (3.19)$$

Per calcolare N_τ , utilizziamo il coefficiente di opacità appena introdotto e le equazioni 3.14 e 2.5. In particolare, scriviamo

$$\frac{2}{3} = \int_{s_0}^{s_1} \kappa(\nu) n_{HCO^+} ds, \quad (3.20)$$

dove n_{HCO^+} è la densità numerica volumica di HCO^+ , che verrà meglio specificata nel prossimo capitolo. Poichè $\kappa(\nu)$ non dipende dalla variabile di integrazione, può essere portata fuori dall'integrale. L'equazione 3.20 si semplifica quindi in

$$\frac{2/3}{\kappa(\nu)} = \int_{s_0}^{s_1} n_{HCO^+} ds. \quad (3.21)$$

La quantità $2/3\kappa(\nu)$ coincide con N_τ ; rappresentiamo quindi N_τ in funzione della temperatura in Figura 3.1. I parametri delle transizioni considerate sono riportati in Tabella 3.1.

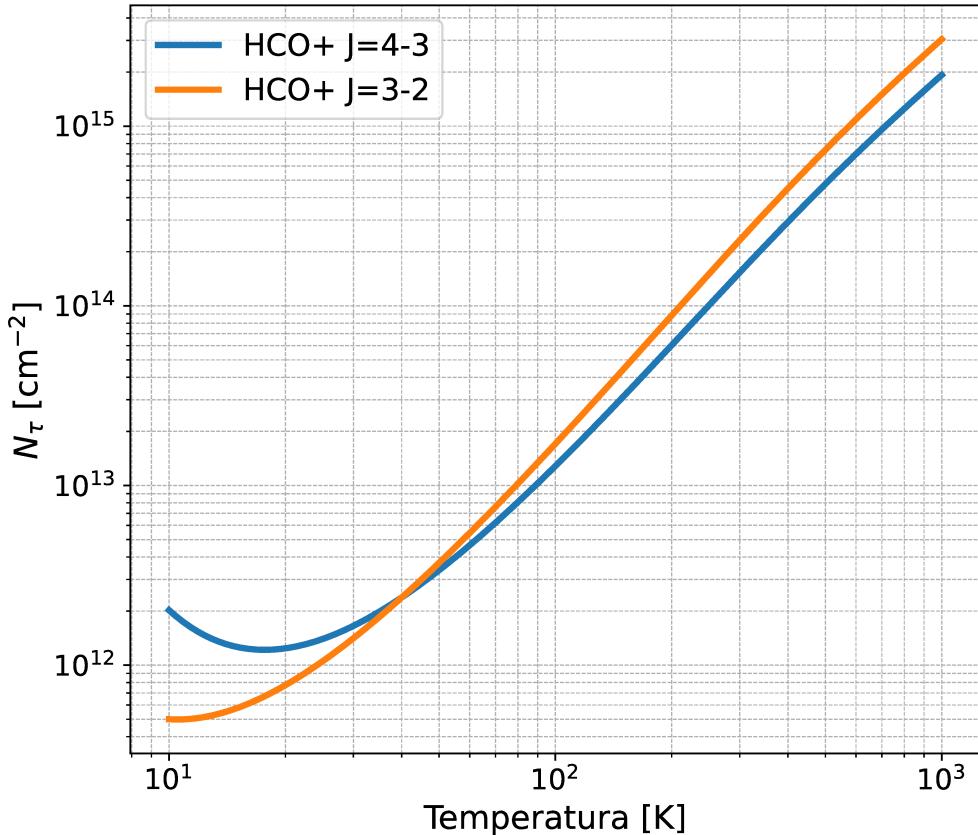


Figura 3.1: Colonna critica di HCO^+ per avere $\tau = 2/3$

Transizione	ν [GHz]	Coefficiente di Einstein A [s^{-1}]
$J = 4 - 3$	356.7342230	3.626×10^{-3}
$J = 3 - 2$	267.5576190	1.627×10^{-3}

Tabella 3.1: Coefficienti per il calcolo di N_τ per le transizioni di HCO^+ .

Il motivo per cui la densità colonna tende a crescere con la temperatura può essere spiegato dal punto di vista matematico e fisico. Matematicamente, se consideriamo l'equazione 3.19, osserviamo che il coefficiente di opacità tende ad aumentare con la temperatura a causa del profilo di linea $\phi(\nu)$, proporzionale a \sqrt{T} , e al fattore di Boltzmann, proporzionale a $\exp(-\frac{1}{T})$. Fisicamente, all'aumentare della temperatura, le transizioni si saturano sempre di più, riducendo la probabilità di interazione radiativa alla frequenza della linea. Inoltre, ad alte temperature, le molecole presentano velocità termiche più elevate, che determinano un allargamento Doppler della linea spettrale. Questo fenomeno ridistribuisce l'intensità su un intervallo di frequenze più ampio, causando una diminuzione dell'intensità della linea. Questi fattori combinati producono come effetto netto una riduzione del valore di κ con l'aumento della temperatura, il che si traduce in un conseguente incremento di N_τ . In aggiunta notiamo che la transizione $J=3-2$ corrisponde ad una densità colonna maggiore rispetto alla transizione $J=4-3$, a parità di temperatura. Questo è dovuto al fatto che il coefficiente di Einstein per la transizione $J=3-2$ è quasi la metà del coefficiente della transizione $J=4-3$.

Il risultato di figura 3.1 fornisce un'importante informazione riguardo allo strato di emissione dalle linee. Infatti, siccome i dischi presentano gradienti di temperatura sia radiali che verticali, deduciamo che lo strato di emissione non corrisponde ad una colonna fissa di materiale, ma traccia colonne diverse a differenti raggi.

Capitolo 4

Applicazione del modello ad HCO⁺

In questo capitolo descriveremo il procedimento per determinare l'altezza dello strato emissivo a partire da un profilo di densità superficiale $\Sigma(r)$, utilizzando il modello applicato a HCO⁺.

Il modello si basa sul semplice fatto che i dischi protoplanetari hanno un forte gradiente di densità verticale. Dunque, ci aspettiamo che la gran parte della profondità ottica sia generata in prossimità dello strato di emissione. Ricordando che τ rappresenta il numero di cammini liberi medi che un fotone percorre prima di uscire dal mezzo, lo strato emissivo corrisponde a un'altezza in cui la densità è significativamente maggiore rispetto agli strati superiori. In termini qualitativi, il fotone compie la maggior parte dei suoi cammini liberi medi totali in prossimità dello strato emissivo, rendendolo il principale responsabile dell'emissione osservata. Trascurare l'effetto Doppler sulla scala spaziale dello strato emissivo risulta quindi una buona approssimazione, poiché questo è molto sottile rispetto all'estensione verticale degli strati sovrastanti. È importante evidenziare anche che le osservazioni delle linee spettrali includono contributi dagli strati superiori e dalla superficie posteriore del disco. Tuttavia, questi contributi non sono rilevanti per il nostro scopo per due motivi principali: primo, ci concentriamo esclusivamente sul centro della linea di emissione; secondo, il nostro obiettivo non è calcolare la profondità ottica totale della linea, per la quale gli strati superiori e posteriori sarebbero significativi, ma stimare l'altezza dello strato emissivo.

Illustriamo quindi il problema per i due casi separatamente, profilo isotermo e non, anche se l'idea per risolverlo è la stessa.

4.1 Caso verticalmente isotermo

In questo caso la temperatura del disco viene considerata, a parità di raggio, uniforme lungo la direzione verticale. Inoltre, il problema presuppone che sia noto il profilo di densità radiale $\Sigma(r)$; in particolare, si considera il profilo di densità descritto dall'equazione 1.10, che rappresenta un disco in evoluzione attraverso fe-

nomeni viscosi. Poniamo il parametro $\gamma = 1$ e definiamo la massa del disco come $m_{disk} = m_0$, espressa in masse solari.

L'equazione che definisce implicitamente l'altezza di emissione è

$$N_\tau = \int_{z_{em}}^{+\infty} n_{\text{HCO}^+} dz. \quad (4.1)$$

dove n_{HCO^+} è la densità volumica numerica di HCO^+ . Per risolverla bisogna innanzitutto conoscere N_τ alla temperatura del disco, quindi ad ogni raggio. Pertanto, è necessario determinare la temperatura del disco per poi interpolare il valore della colonna critica corrispondente. Assumiamo che la temperatura segua una legge di potenza del tipo:

$$T \propto r^{-q}. \quad (4.2)$$

È possibile comprendere meglio questo andamento se messo in relazione alla struttura del disco; infatti, grazie alla relazione 1.9 e assumendo un profilo radiale per l'altezza caratteristica H del disco, la relazione

$$c_s = H\Omega \quad (4.3)$$

stabilisce automaticamente un profilo radiale di temperatura una volta definito quello di H . È pratica comune, basata sulle osservazioni, considerare H come una legge di potenza del raggio

$$H = h_r(r) \cdot r \quad (4.4)$$

dove h_r è un termine adimensionale funzione del raggio che descrive la geometria del disco, anch'esso con una legge di potenza. Infatti, questo termine fornisce informazioni sul “grado di flaring” del disco, ovvero su come varia l'angolo tra il midplane e lo strato superiore in funzione del raggio. Esplicitamente,

$$h_r = h_0 \left(\frac{r}{r_p} \right)^\phi \quad (4.5)$$

dove h_0 è un fattore di normalizzazione, r_p è il coefficiente della legge di potenza e ϕ è l'indice di flaring. Se $\phi = 0$ l'angolo tra il midplane e lo strato superiore è costante ad ogni raggio; se $\phi > 0$ il profilo superiore è convesso e se $\phi < 0$ invece concavo, come illustrato in figura 4.1. Siamo dunque in grado di risalire alla legge di potenza



Figura 4.1: Sezioni radiali del disco. Da sinistra: $plh = 0$, $plh > 0$, $plh < 0$

della temperatura grazie alle relazioni 1.9 e 4.3

$$T \propto r^{2\phi-1} \quad (4.6)$$

dove l'indice di flaring ϕ è un esponente deducibile da osservazioni empiriche specifiche. Con queste premesse siamo quindi in grado di risalire a N_τ . La colonna critica, tuttavia, potrebbe non trovarsi esattamente sulla linea di vista. Di conseguenza ciò che osserviamo è:

$$N_\tau \cdot \cos(\theta) \quad (4.7)$$

dove θ è l'angolo tra la linea di vista e la colonna.

Procediamo dunque con la risoluzione dell'equazione 4.1. Il primo passo è esplicitare n_{HCO^+} . La densità numerica di una molecola può essere scritta come frazione della densità numerica totale del gas. Il fattore di proporzionalità è detto abbondanza. Nel caso di HCO^+ l'abbondanza coincide con la frazione di ionizzazione ξ del disco; se trascuriamo gli ioni metallici nel modello chimico, quindi se assumiamo abbiano un contributo limitato alla ionizzazione, ξ coincide esattamente con la quantità definita nell'equazione 1.14. Scriviamo quindi

$$n_{\text{HCO}^+} = \frac{\rho(r, z) x_{\text{HCO}^+}}{\mu m_H} \quad (4.8)$$

dove ρ è la densità di massa, x_{HCO^+} l'abbondanza di HCO^+ e $\mu = 2.35$ è il peso molecolare medio.

Esplicitiamo l'espressione 1.14 in termini di ρ e μ

$$x_{\text{HCO}^+} = \sqrt{\frac{\zeta \mu m_H}{\delta \rho(r, z)}} \quad (4.9)$$

e inseriamo la formula 4.8 nell'equazione 4.1

$$N_\tau \cos(\theta) = \int_{z_{em}}^\infty \sqrt{\frac{\zeta \cdot \rho(r, z)}{\delta \mu m_H}} dz. \quad (4.10)$$

Poiché il disco è verticalmente isotermo, la densità segue la forma descritta dall'equazione 1.8. Procediamo quindi con la risoluzione dell'equazione 4.10 esplicitando la densità:

$$\begin{aligned} N_\tau \cdot \cos(\theta) \sqrt{\frac{\delta \mu m_H}{\zeta}} &= \int_{z_{em}}^\infty \rho_0^{1/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4H^2}\right) dz \\ N_\tau \cdot \cos(\theta) \sqrt{\frac{\delta \mu m_H}{\zeta \rho_0}} &= \int_{t_{em}}^\infty 2H \exp(-t^2) dt \end{aligned}$$

$$z_{em}(r) = 2H \operatorname{erfc}^{-1} \left(\frac{N_\tau \cos(\theta)}{2H} \cdot \sqrt{\frac{2\delta \mu m_H}{\pi \zeta \rho_0}} \right) \quad (4.11)$$

dove erfc è la funzione errore complementare definita come

$$\operatorname{erfc}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt. \quad (4.12)$$

Ora, dal momento che erfc^{-1} è una funzione decrescente definita sui numeri reali nell'intervallo $(0,2)$, la soluzione 4.11 risulta una funzione crescente dell'altezza caratteristica H e della densità al midplane ρ_0 . Inoltre, ci aspettiamo che cresca con il tasso di ionizzazione ζ oltre che con la densità superficiale $\Sigma(r)$, in quanto $\rho_0 \propto \Sigma$.

Nelle Figure 4.2 e 4.3 sono riportate rispettivamente l'abbondanza di HCO^+ e la densità volumetrica in funzione del raggio r e dell'altezza z .

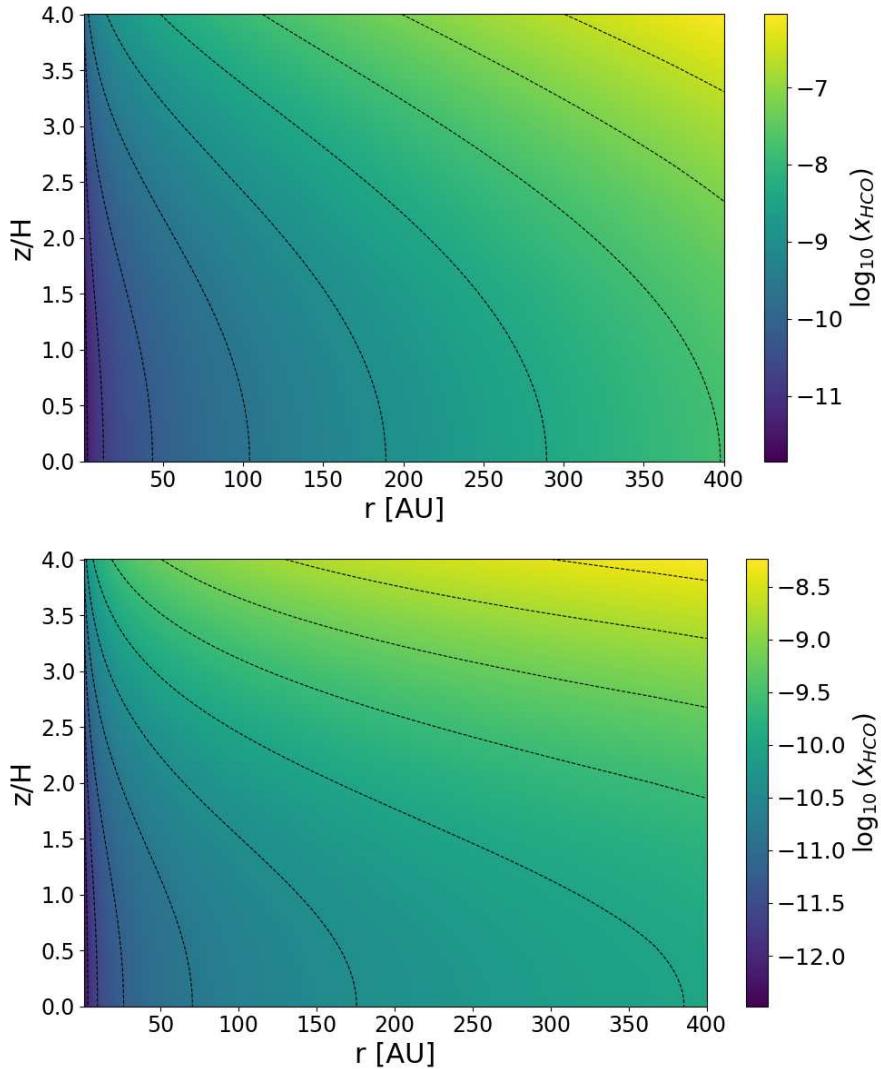


Figura 4.2: In alto: $\log_{10} x_{\text{HCO}}$ in funzione di r e z/H con $r_c = 50$ au e $m_0 = 10^{-3} M_\odot$. In basso: $\log_{10} x_{\text{HCO}}$ in funzione di r e z/H con $r_c = 500$ au e $m_0 = 10^{-1} M_\odot$

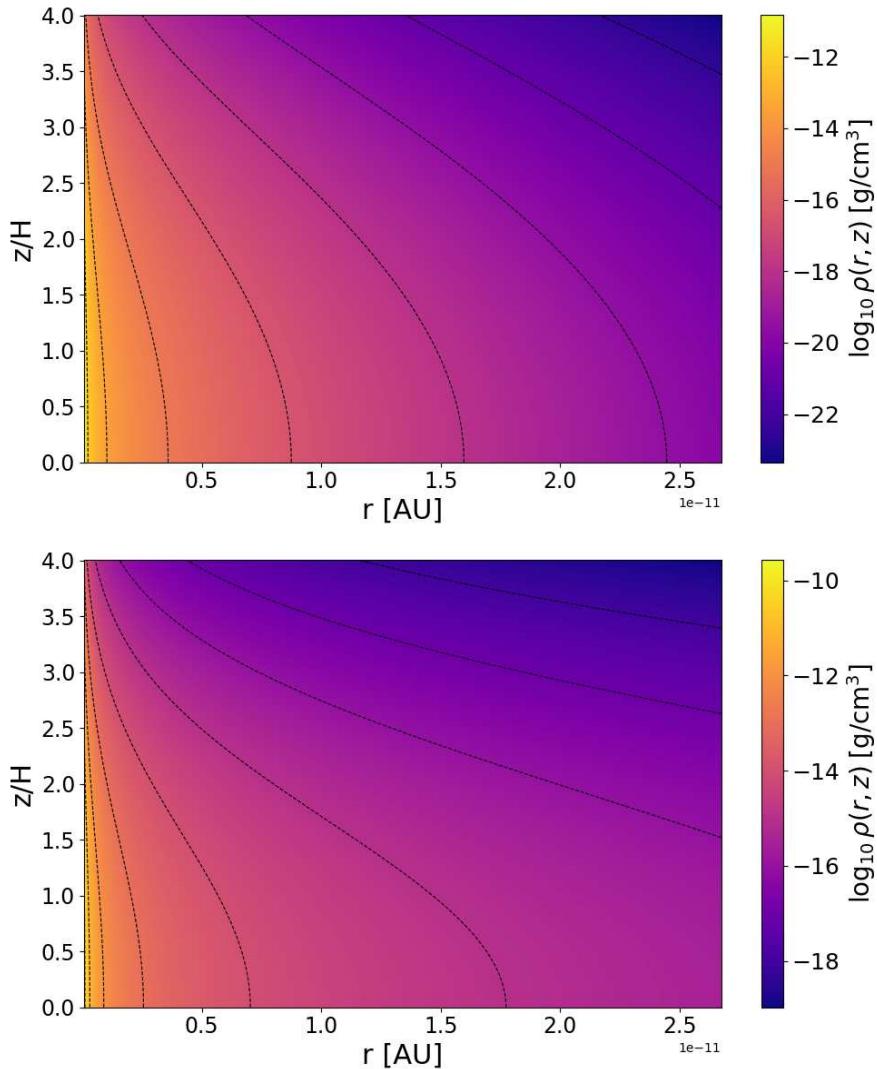


Figura 4.3: In alto: $\log_{10} \rho(r, z)$ in funzione di r e z/H con $r_c = 50$ e $m_0 = 10^{-3}$. In basso: $\log_{10} \rho(r, z)$ in funzione di r e z/H con $r_c = 500$ e $m_0 = 10^{-1}$

4.2 Caso non verticalmente isotermo

In questo caso la temperatura è una funzione sia del raggio che dell'altezza: $T = T(r, z)$. Il ragionamento alla base del problema è lo stesso del caso isotermo, cambia solamente l'approccio con cui risolviamo il problema.

A differenza del caso isotermo, è necessario specificare una forma funzionale per stabilire il profilo di temperatura. Infatti, non esiste un metodo analitico che permetta di associare in modo biunivoco un valore di temperatura a un punto specifico caratterizzato da un dato raggio e una determinata altezza. Seguendo il modello di Dartois, E. et al. [5], stabiliamo quindi un gradiente di temperatura verticale nel

segue modo: introduciamo dapprima le quantità

$$\begin{aligned} T_{mid}(r) &= T_{mid0} \left(\frac{r}{100} \right)^{-q_{mid}} \\ T_{atm}(r) &= T_{atm0} \left(\frac{r}{100} \right)^{-q_{atm}} \\ z_q(r) &= z_0 \left(\frac{r}{100} \right)^{-\beta}, \end{aligned}$$

che usiamo per definire il gradiente di temperatura

$$\begin{cases} T(r, z > z_q) = T_{atm}(r) \\ T(r, z \leq z_q) = T_{mid}(r) + (T_{atm}(r) - T_{mid}(r)) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{2z_q(r)} \right) \end{cases} \quad (4.13)$$

dove q_{mid} , q_{atm} , β sono i parametri del modello e T_{mid} , T_{atm} e z_q sono rispettivamente la temperatura al midplane, la temperatura dell'atmosfera del disco e l'altezza in cui la temperatura di transizione tra il midplane e gli strati superiori diventa significativa.

Il profilo di densità per questo caso non è gaussiano, ma è definito dall'equazione 1.7. In quanto la maggior parte della massa si trova al midplane, anche in questo caso la relazione $\rho_0 = \Sigma/2\pi H$ è valida, fin tanto che H viene calcolata attraverso la temperatura al midplane. Considerando l'equazione 4.10, la difficoltà sta nel fatto che ρ non è una funzione facilmente gestibile analiticamente. È necessario quindi integrarla numericamente per trovare l'altezza di emissione. Per prima cosa la riscriviamo nel seguente modo:

$$N_\tau \cos(\theta) = - \int_{+\infty}^{z_{em}} n_{HCO^+} dz. \quad (4.14)$$

In seguito, calcoliamo in modo cumulativo questo integrale con passo costante. L'integrazione parte da un valore di altezza ragionevole, come $4H$, dove ci si aspetta che il contributo all'integrale diventi significativo. L'idea è molto semplice: quando si individuano due punti in cui il valore dell'integrale è inferiore a $2/3$ nel primo e maggiore o uguale a $2/3$ nel secondo, significa che tra questi due il calcolo converge a $2/3$. Interpoliamo quindi l'integrale tra questi due punti per trovare il valore di z che stiamo cercando.

Nelle Figure 4.4 e 4.5 sono riportate rispettivamente l'abbondanza di HCO^+ e la densità volumetrica in funzione del raggio r e dell'altezza z .

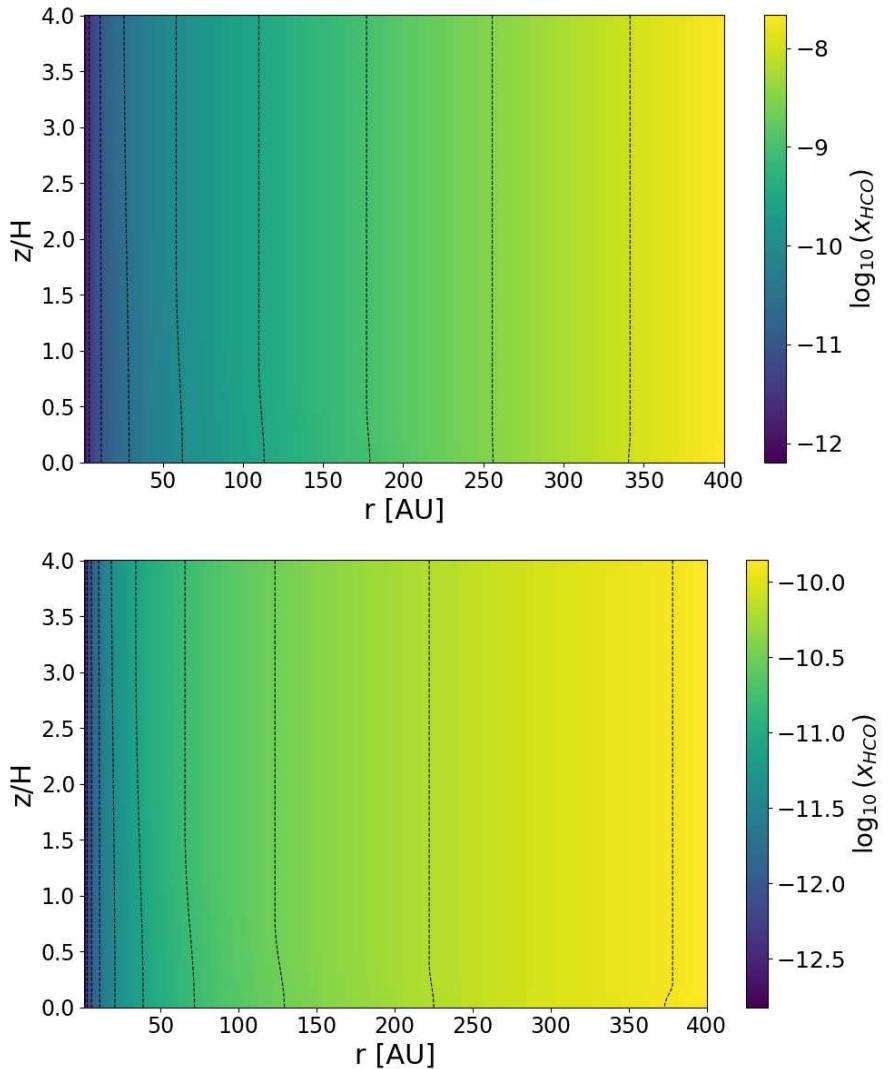


Figura 4.4: In alto: $\log_{10} x_{\text{HCO}}$ in funzione di r e z/H con $r_c = 50$ au e $m_0 = 10^{-3} M_\odot$. In basso: $\log_{10} x_{\text{HCO}}$ in funzione di r e z/H con $r_c = 500$ au e $m_0 = 10^{-1} M_\odot$

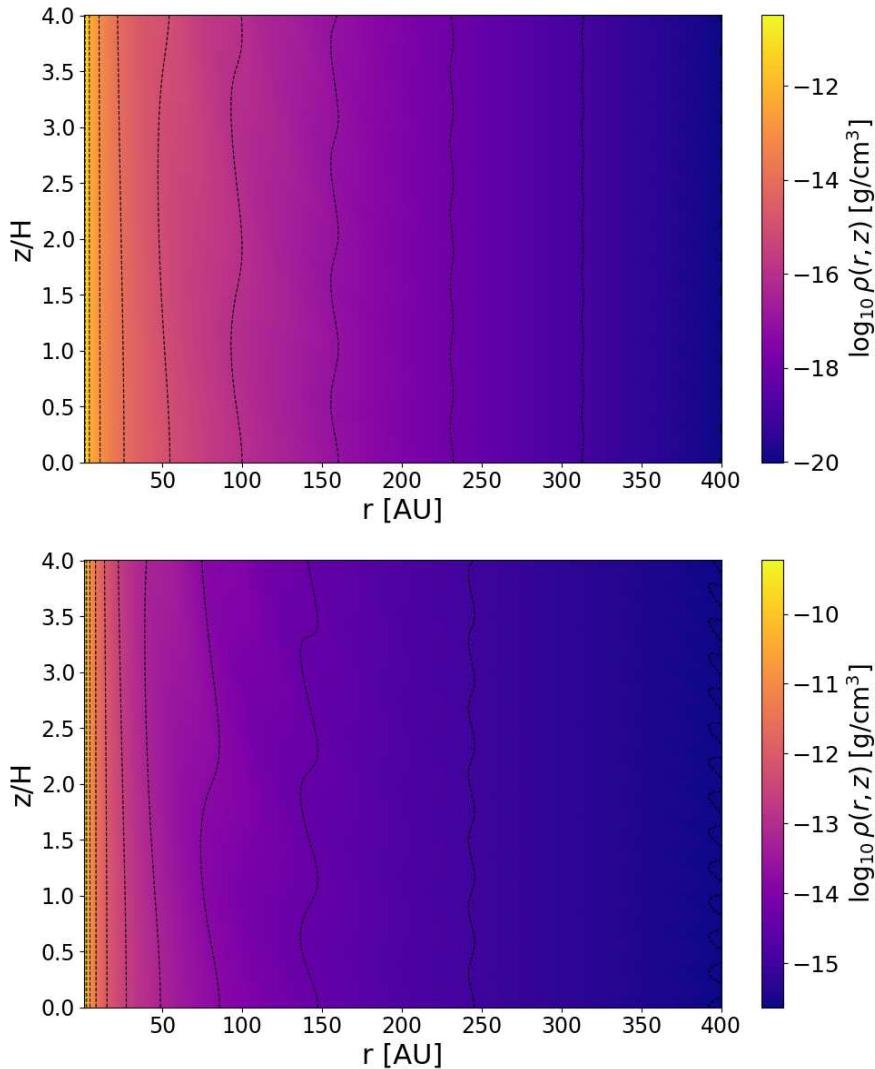


Figura 4.5: n alto: $\log_{10} \rho(r, z)$ in funzione di r e z/H con $r_c = 50$ au e $m_0 = 10^{-3} M_\odot$. In basso: $\log_{10} \rho(r, z)$ in funzione di r e z/H con $r_c = 500$ au e $m_0 = 10^{-1} M_\odot$

Capitolo 5

Presentazione e discussione dei risultati

Questo capitolo è suddiviso in due sezioni: nella prima vengono presentati e analizzati i risultati per il caso isotermo, nella seconda per il caso non isotermo.

5.1 Caso verticalmente isotermo

Sfruttiamo l'espressione 4.11 per capire come l'altezza di emissione varia in funzione del raggio. Tale relazione dipende fortemente dai parametri di transizione, massa del disco, raggio caratteristico e tasso di ionizzazione. Proviamo quindi a estrarre informazioni riguardo l'andamento dell'altezza di emissione in funzione di questi parametri.

Transizioni Tracciando il grafico dell'altezza di emissione in funzione del raggio, si osserva innanzitutto che l'altezza di emissione associata alla transizione $J=3-2$ è generalmente superiore a quella della transizione $J=4-3$. Tuttavia, in tutti i casi analizzati, emerge un primo intervallo radiale in cui la transizione $J=4-3$ domina, seguito da un punto di equilibrio tra le due transizioni, e infine da un secondo intervallo in cui prevale la transizione $J=3-2$. La motivazione di questi andamenti risiede in N_τ ; infatti, eguagliando l'espressione 4.11 per le due transizioni, l'unico coefficiente per cui differiscono è proprio N_τ . In questo caso isotermo è possibile risalire alla temperatura alla quale $N_\tau(4-3) = N_\tau(3-2)$ e quindi al raggio. Questo raggio non dipende né dalla massa, né dal tasso di ionizzazione, né dal raggio caratteristico del disco.

Massa Osserviamo inoltre che l'altezza di emissione aumenta con la massa del disco. Questo comportamento è atteso, poiché l'argomento della funzione erfc^{-1} , che è monotona decrescente, è inversamente proporzionale a Σ e quindi alla massa del disco. Esiste anche una spiegazione fisica per questo fenomeno: a parità di abbondanza, un disco più massiccio contiene una quantità maggiore di ioni HCO^+ , poiché l'aumento della massa comporta un incremento della quantità di idrogeno

molecolare H_2 . Con una maggiore presenza di ioni HCO^+ , la densità cresce e, di conseguenza, anche l'altezza di emissione aumenta.

Oltre a ciò esiste una questione di sensibilità riguardo a questo parametro.

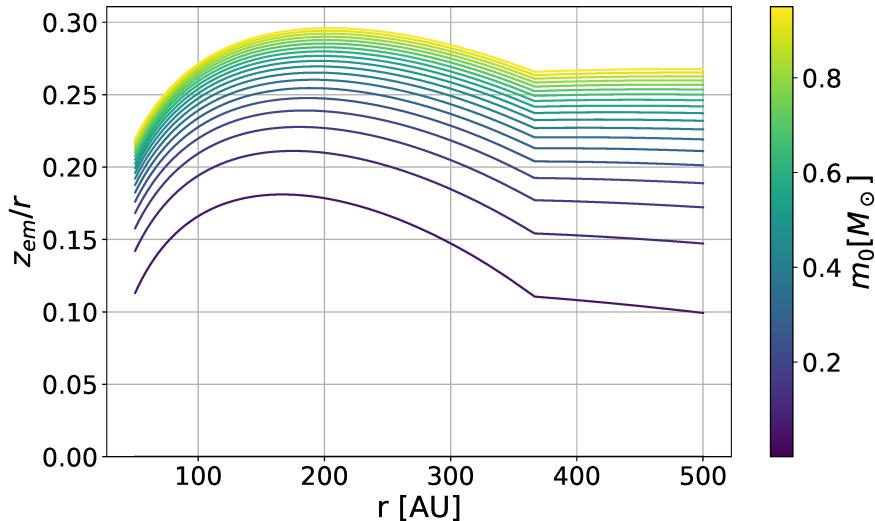


Figura 5.1: Altezza di emissione al variare di m_0 con parametri $\zeta = 10^{-19}\text{s}^{-1}$ e $r_c = 500\text{ au}$

I grafici di Figura 5.1 sono stati creati variando la massa con passo costante da $10^{-4}M_\odot$ a $1M_\odot$. Si osserva che ad ogni aumento di massa corrisponde un incremento nell'altezza di emissione; tuttavia, tale incremento diventa progressivamente meno significativo con l'aumentare della massa. La spiegazione di tale fenomeno risiede nell'equazione 4.1, la cui integranda, proporzionale a $\sqrt{\rho}$, è il fattore più importante che determina l'altezza di emissione. Come spiegato nel Capitolo 5, l'idea per risolvere l'equazione 4.1 è risalire la curva di densità in funzione di z da $+\infty$ verso lo zero, calcolando l'integrale cumulativamente fino a quando non converge a $2/3$. La curva di densità è proporzionale proprio al coefficiente m_0 . Vediamo quindi prima in maniera più qualitativa come spiegare quanto osservato in Figura 5.1. A tal fine, potrebbe essere utile rappresentare le curve di densità considerando due valori piccoli di m_0 e due valori grandi, selezionando in entrambe le coppie valori equidistanti tra loro, come illustra la Figura 5.2. Con “piccoli” e “grandi” si intende per esempio coppie di valori agli estremi dell’intervallo di m_0 considerato per Figura 5.1.

Come mostrato in Figura 5.2, nel primo caso, le altezze di emissione si collocano più vicine allo zero, poiché la coda della gaussiana non raggiunge un valore sufficientemente elevato da garantire la convergenza dell'integrale a valori maggiori di z , come invece accade nel secondo. Notiamo inoltre che, nel primo caso, i valori ridotti di m_0 rendono le gaussiane “più piatte” rispetto al secondo caso. Di conseguenza, per mantenere costante il valore dell'integrale pari a $2/3$, è necessario spostarsi significativamente verso destra lungo l'asse z passando da una gaussiana all'altra. Al contrario, nel secondo caso, le gaussiane più ripide richiedono spostamenti molto più contenuti in z per ottenere lo stesso risultato sull'integrale. Lo stesso fenomeno può essere interpretato anche seguendo un altro ragionamento, basato sul grafico in Figura 5.3, che mostra l'altezza di emissione in funzione di m_0 per un raggio fissato.

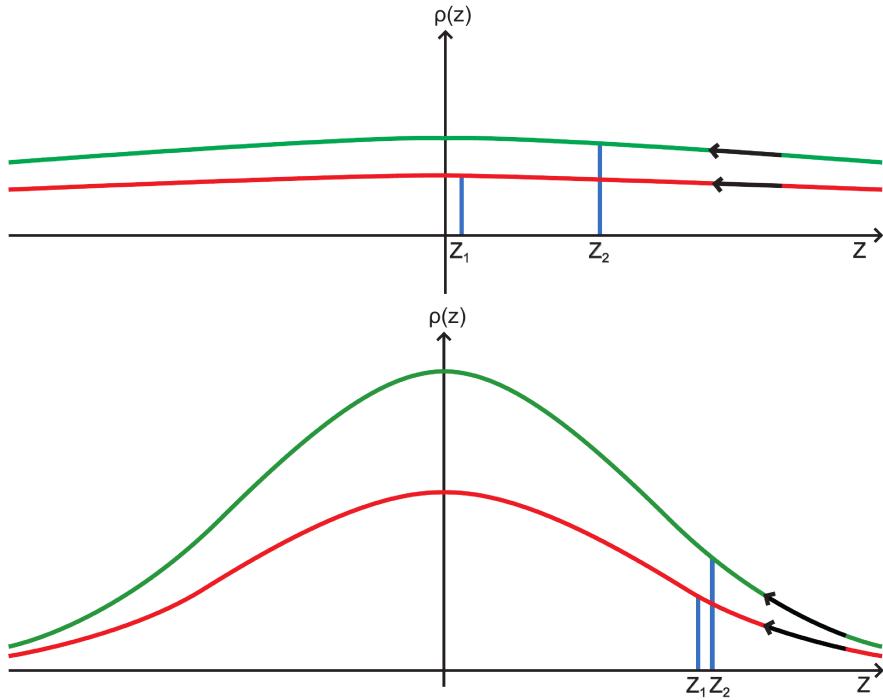


Figura 5.2: Curve di densità a raggio, tasso di ionizzazione e raggio caratteristico fissati. Sopra: curve per valori di m_0 “piccoli”; sotto: curve per valori di m_0 “grandi”. La figura non è in scala.

Dal grafico si osserva che, al crescere di m_0 , la variazione dell’altezza di emissione diventa progressivamente meno significativa.

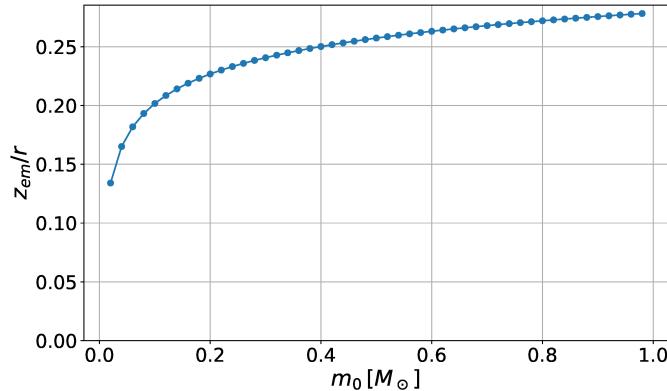


Figura 5.3: Altezza di emissione ad $r = 100$ au in funzione della massa m_0 , con $r_c = 100$ au e $\zeta = 10^{-19} s^{-1}$

Per far sì che questo ragionamento non sia locale, quindi limitato ad un solo raggio, lo estendiamo a tutti i raggi. Per diversi valori di m_0 facciamo dunque una media pesata dell’altezza di emissione rispetto al raggio. I pesi della media ponderata sono determinati in base al contributo di ciascun raggio nell’integrazione, effettuando una media lungo la dimensione z :

$$\langle z_{em} \rangle = \frac{\sum_i z_{em}(r_i) \cdot w_i}{\sum_i w_i}, \quad w_i = \frac{1}{N_\tau(r_i) \sqrt{\delta(r_i)}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho(r_i, z)} dz. \quad (5.1)$$

La Figura 5.4 riporta le stesse informazioni di Figura 5.3, ma estese globalmente nella dimensione radiale attraverso la media pesata appena illustrata.

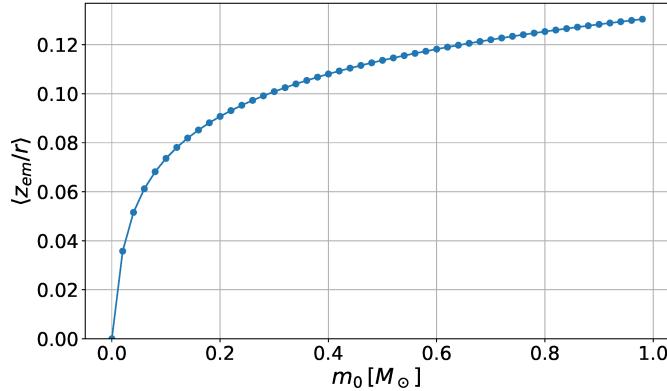


Figura 5.4: Altezza di emissione media in funzione della massa m_0 , con $r_c = 100$ au e $\zeta = 10^{-19} s^{-1}$

Raggio caratteristico Tracciando il grafico dell’altezza di emissione in funzione del raggio, emerge chiaramente un incremento proporzionale all’aumentare del raggio caratteristico, evidenziando una relazione diretta tra le due variabili. Questo comportamento può essere spiegato considerando che, per $r \ll r_c$, la densità superficiale radiale $\Sigma(r)$ diminuisce secondo una legge di potenza, mentre per $r \gg r_c$ la decrescita diventa molto più rapida a causa di una soppressione esponenziale. Pertanto, a parità di dimensioni del disco, un disco con un raggio caratteristico maggiore presenta una regione dominata dalla legge di potenza più estesa. Di conseguenza, questo disco avrà una densità superficiale maggiore rispetto a un disco con un raggio caratteristico più piccolo. All’aumentare di Σ corrisponde un incremento di ρ e di conseguenza l’altezza di emissione aumenta.

Tasso di ionizzazione Infine, si riscontra un aumento dell’altezza di emissione proporzionalmente al tasso di ionizzazione. Come anticipato nel Capitolo 5 questo incremento è dovuto alla proporzionalità inversa tra l’argomento della funzione erf^{-1} e il tasso di ionizzazione ζ . Anche in questo caso tuttavia esiste una spiegazione più fisica al fenomeno. La frazione ionizzata del gas ξ (che coincide con l’abbondanza di HCO^+) è regolata da due processi:

- ionizzazione in cui il gas neutro viene ionizzato con un tasso costante,
- ricombinazione in cui gli ioni si ricombinano con gli elettroni per formare atomi neutri, con un tasso che dipende dalla densità e dal coefficiente di ricombinazione α .

In equilibrio i due processi si bilanciano, per cui

$$\zeta n \approx \alpha n_i n_e \quad (5.2)$$

dove n , n_i e n_e sono rispettivamente la densità totale del gas, degli ioni e degli elettronni. L'equilibrio tra questi due processi fa sì che la frazione ionizzata rimanga costante nel tempo. Dunque, a parità di densità e temperatura, se ζ aumenta, gli eventi di ionizzazione sono più frequenti. In questo modo la frazione ionizzata di gas è più alta, il che implica che ci sono più ioni HCO^+ . Tutto ciò comporta che l'altezza di ionizzazione aumenti.

Anche in questo caso esiste una questione di sensibilità associata a questo parametro. Seguendo il ragionamento precedente, riportiamo l'altezza di emissione con r_c e m_0 costanti, al variare del tasso di ionizzazione in Figura 5.5. I grafici di Figura 5.5

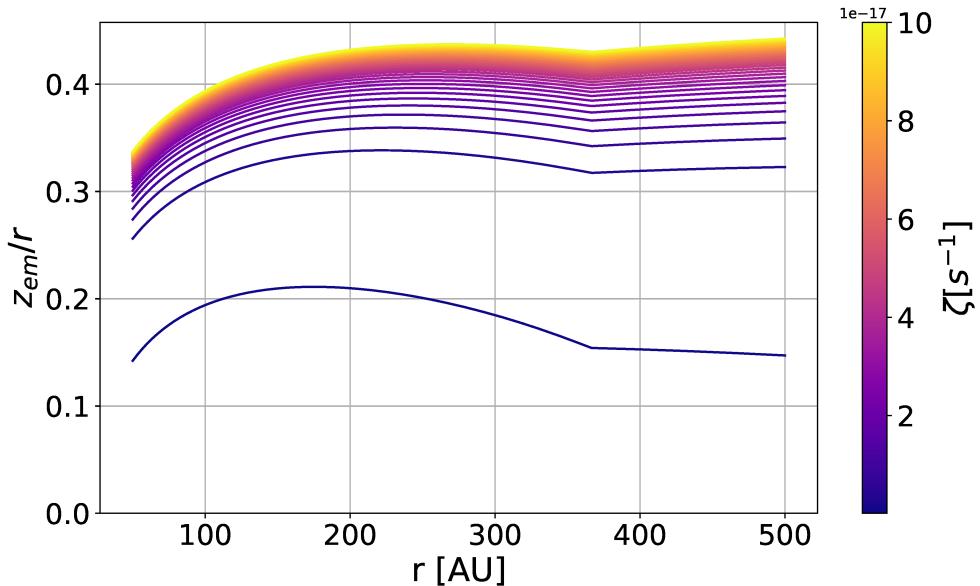


Figura 5.5: Altezza di emissione al variare di ζ con parametri $m_0 = 10^{-2}$ e $r_c = 500$ au

sono stati creati variando ζ con passo costante tra 10^{-19} s^{-1} e 10^{-16} s^{-1} . Anche in questo caso l'incremento dell'altezza di emissione diviene sempre meno significativo all'aumentare del tasso di ionizzazione. La spiegazione segue lo stesso ragionamento utilizzato per descrivere il fenomeno relativo al parametro m_0 . Anche in questo caso, l'integrandina di Equazione 4.1 risulta direttamente proporzionale a $\sqrt{\zeta}$ nel termine di abbondanza, influenzando in modo analogo le diverse curve di densità al variare di z , per un raggio fissato. Mostriamo quindi il fenomeno in modo analogo a quanto fatto in precedenza, come illustrato in Figura 5.6. Per estenderlo all'intera dimensione radiale, utilizziamo una media ponderata identica a quella definita in Equazione 5.3.

Nelle Figure 5.7, 5.8 e 5.9 è illustrata l'altezza di emissione in funzione del raggio al variare della massa, del raggio caratteristico e del tasso di ionizzazione. Questi grafici giustificano chiaramente gli andamenti esposti finora.

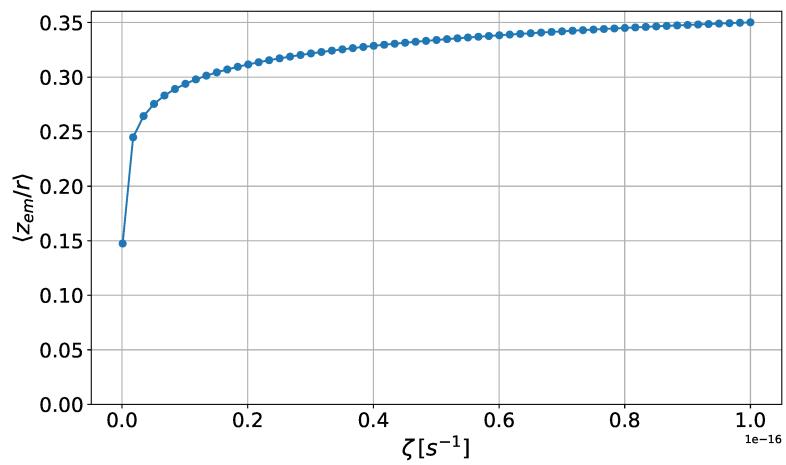


Figura 5.6: Altezza di emissione media in funzione di ζ con $m_0 = 0.1 M_\odot$ e $r_c = 100$ au

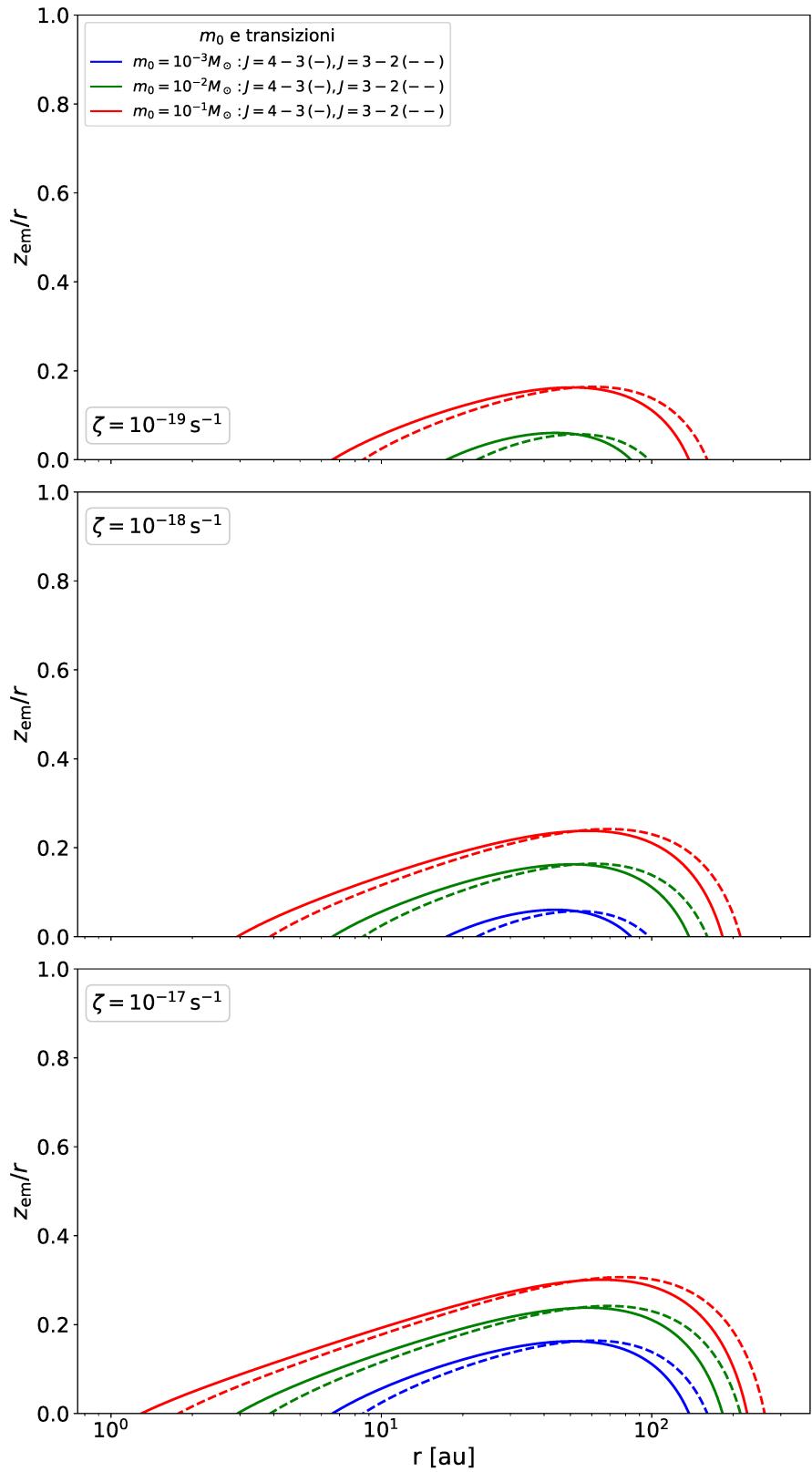


Figura 5.7: Altezza di emissione vs. raggio per diversi valori di m_0 e ζ : le linee tratteggiate rappresentano la transizione $J=3-2$, quelle continue la transizione $J=4-3$. I tre grafici corrispondono a un raggio caratteristico $r_c = 20$ au

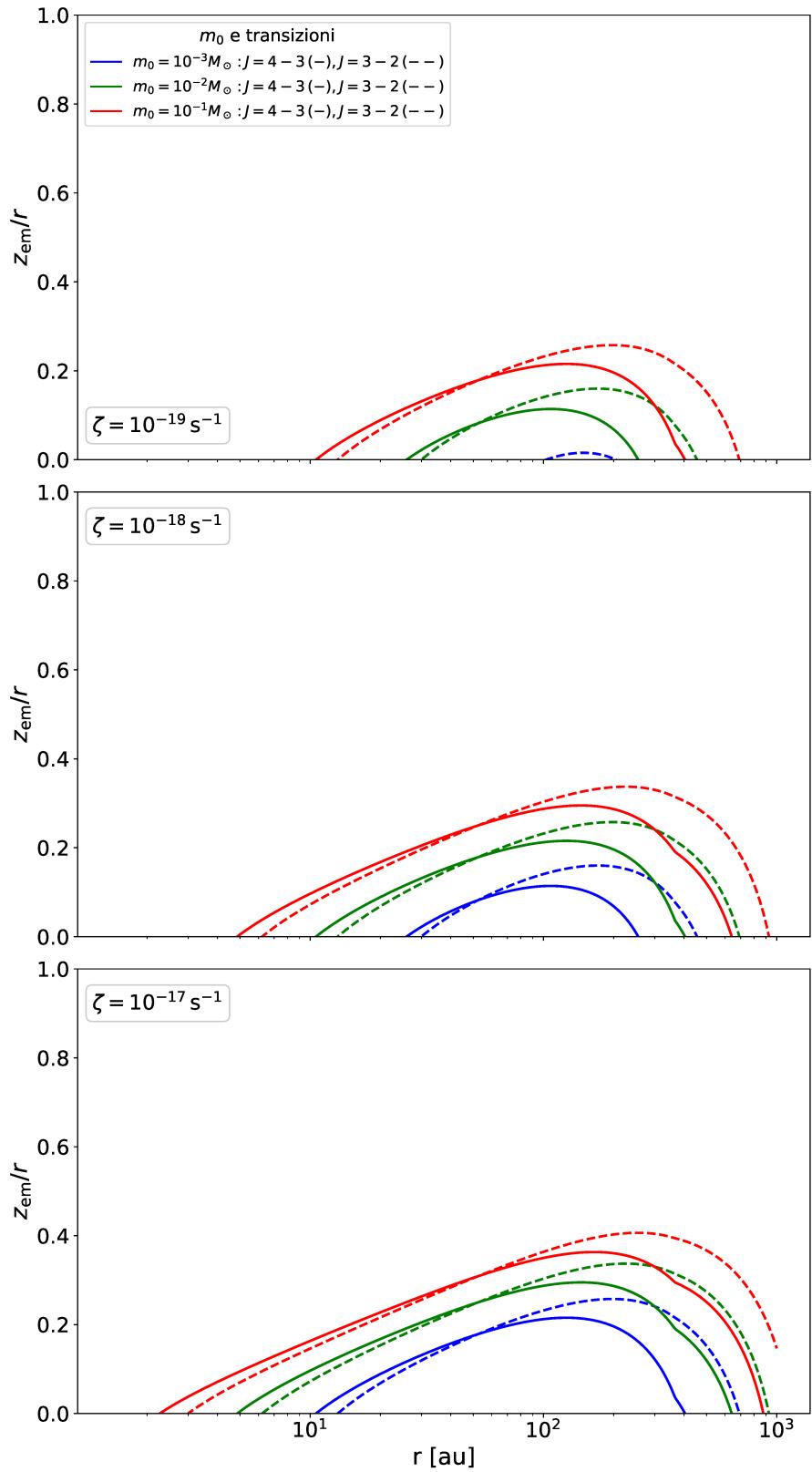


Figura 5.8: Altezza di emissione vs. raggio per diversi valori di m_0 e ζ : le linee tratteggiate rappresentano la transizione $J=3-2$, quelle continue la transizione $J=4-3$. I tre grafici corrispondono a un raggio caratteristico $r_c = 100$ au

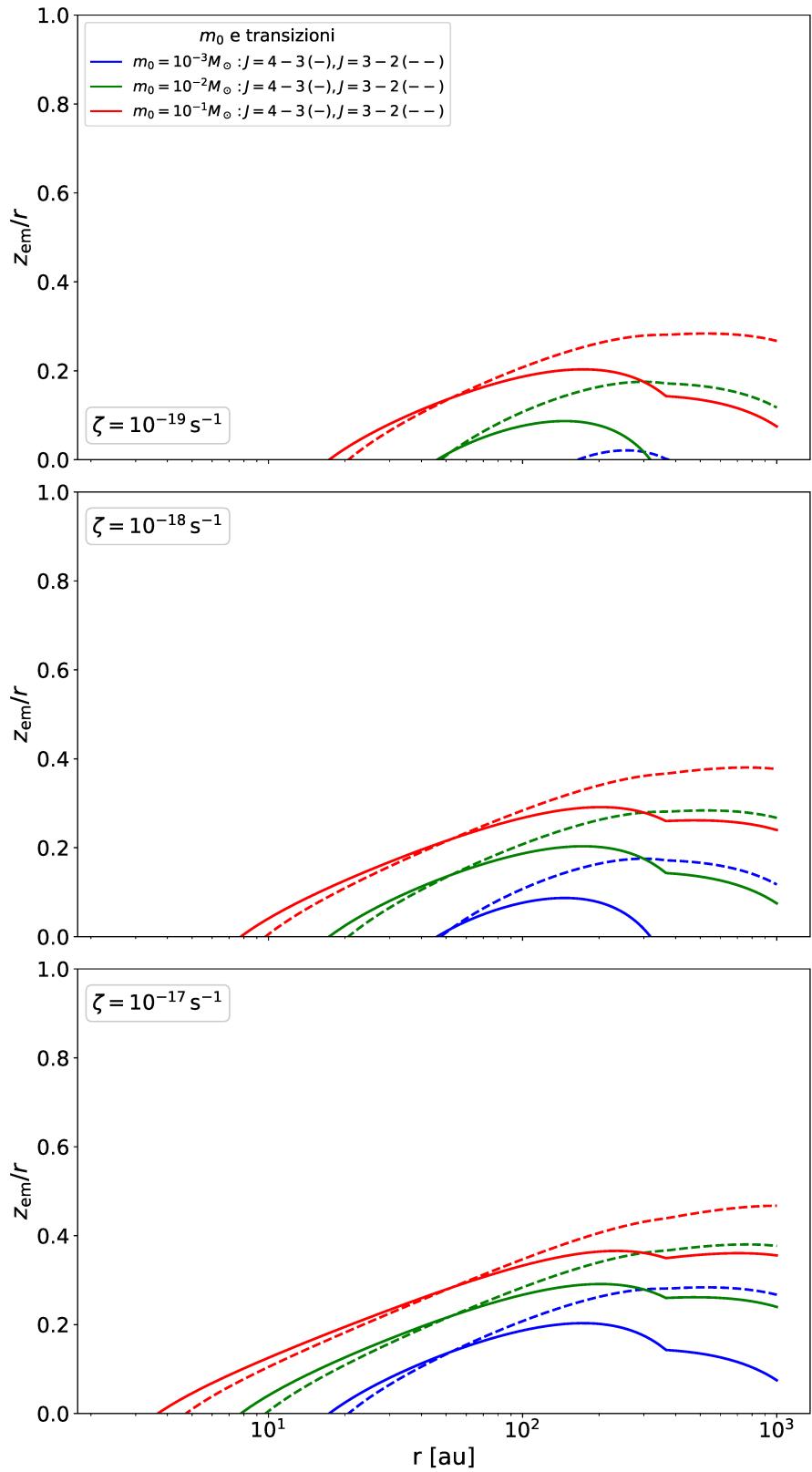


Figura 5.9: Altezza di emissione vs. raggio per diversi valori di m_0 e ζ : le linee tratteggiate rappresentano la transizione $J=3-2$, quelle continue la transizione $J=4-3$. I tre grafici corrispondono a un raggio caratteristico $r_c = 500 \text{ au}$

5.2 Caso non verticalmente isotermo

Analogamente al caso isotermo, anche in questo caso si nota una forte dipendenza dell'altezza di emissione dai tre parametri m_0 , ζ e r_c .

Le considerazioni fatte precedentemente sono ancora valide, come ci aspettavamo. Infatti, a raggio fissato, il profilo di densità appare simile a quello isotermo, con la differenza che per valori elevati di z la decrescita della densità risulta più lenta. Ciò comporta che la dipendenza dai vari parametri rimanga inalterata; l'altezza di emissione quindi aumenta all'aumentare di raggio caratteristico, tasso di ionizzazione e massa del disco, a causa degli stessi motivi presentati nel caso isotermo. Inoltre, poiché la curva di densità decresce più lentamente, l'altezza di emissione in questo caso risulta generalmente maggiore rispetto a quella calcolata nel caso precedente. Analogamente al caso a temperatura costante, esiste una questione di sensibilità associata ai parametri m_0 e ζ . Adottiamo quindi la medesima strategia utilizzata precedentemente per rappresentare l'andamento dell'altezza di emissione in funzione di tasso di ionizzazione e massa. In questo caso, essendo N_τ e δ funzioni della temperatura, l'altezza di emissione media verrà calcolata come:

$$\langle z_{em} \rangle = \frac{\sum_i z_{em}(r_i) \cdot w_i}{\sum_i w_i}, \quad w_i = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\rho(r_i, z)}{\delta(r_i, z)}} \frac{1}{N_\tau(r_i, z)} dz. \quad (5.3)$$

In Figura 5.10 e 5.11 è riportata, rispettivamente, l'altezza di emissione media in funzione di ζ e m_0 . I parametri specifici dei profili di densità e temperatura utilizzati per questa analisi sono riportati in Tabella 5.1 e in Tabella 5.2.

Parametro	Valore
h_0	0.1
R_{pivot}	100 au
ϕ	0.14
M_*	$1 M_\odot$
Inclinazione (θ)	30°

Tabella 5.1: Parametri generali del modello

Parametro	Valore
$t_{\text{atm}}(100 \text{ au})$	36.599 K
$t_{\text{mid}}(100 \text{ au})$	27.523 K
q_{atm}	-0.626
q_{mid}	-0.352
z_0	10.011 au
β_z	0.0003

Tabella 5.2: Parametri di temperatura del modello

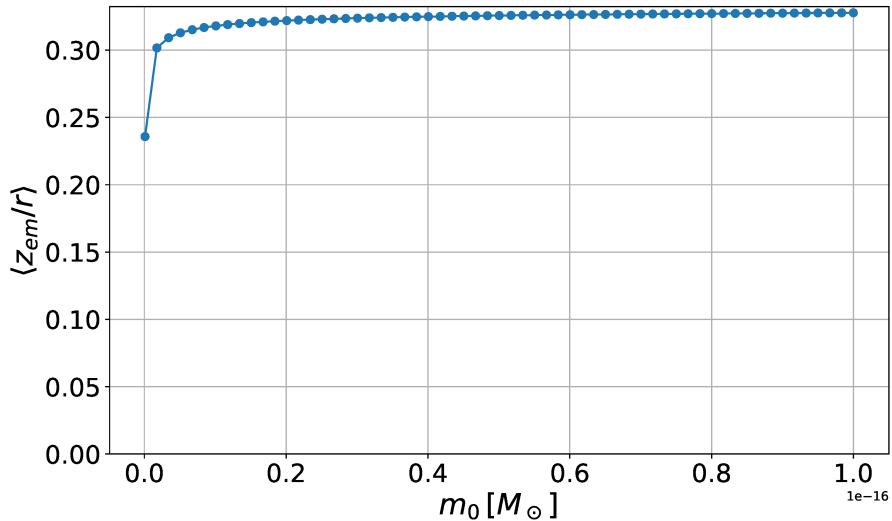


Figura 5.10: Altezza di emissione media in funzione di ζ con $m_0 = 0.1 M_\odot$ e $r_c = 100$ au

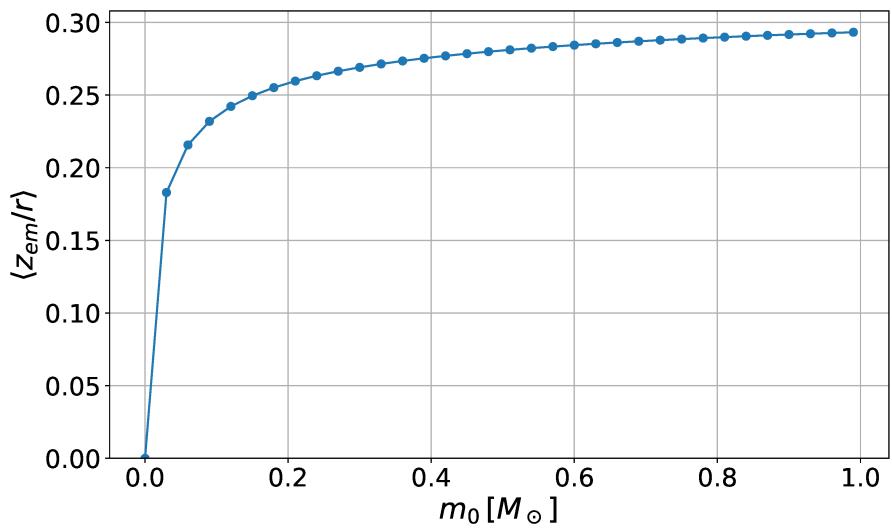


Figura 5.11: Altezza di emissione media in funzione della massa m_0 , con $r_c = 100$ au e $\zeta = 10^{-19} s^{-1}$

Nelle figure 5.12, 5.13 e 5.14 è riportata l'altezza di emissione in funzione del raggio, al variare dei tre parametri m_0 , ζ e r_c .

Sia nel caso isotermo che in quello non isotermo, si osserva che l'altezza di emissione dipende in modo significativo dai parametri fondamentali del disco, quali la sua massa, il raggio caratteristico e il tasso di ionizzazione. Questa sensibilità ai suddetti parametri implica che l'altezza di emissione rappresenti una variabile estremamente utile e informativa per indagare la struttura e le caratteristiche fisiche del disco.

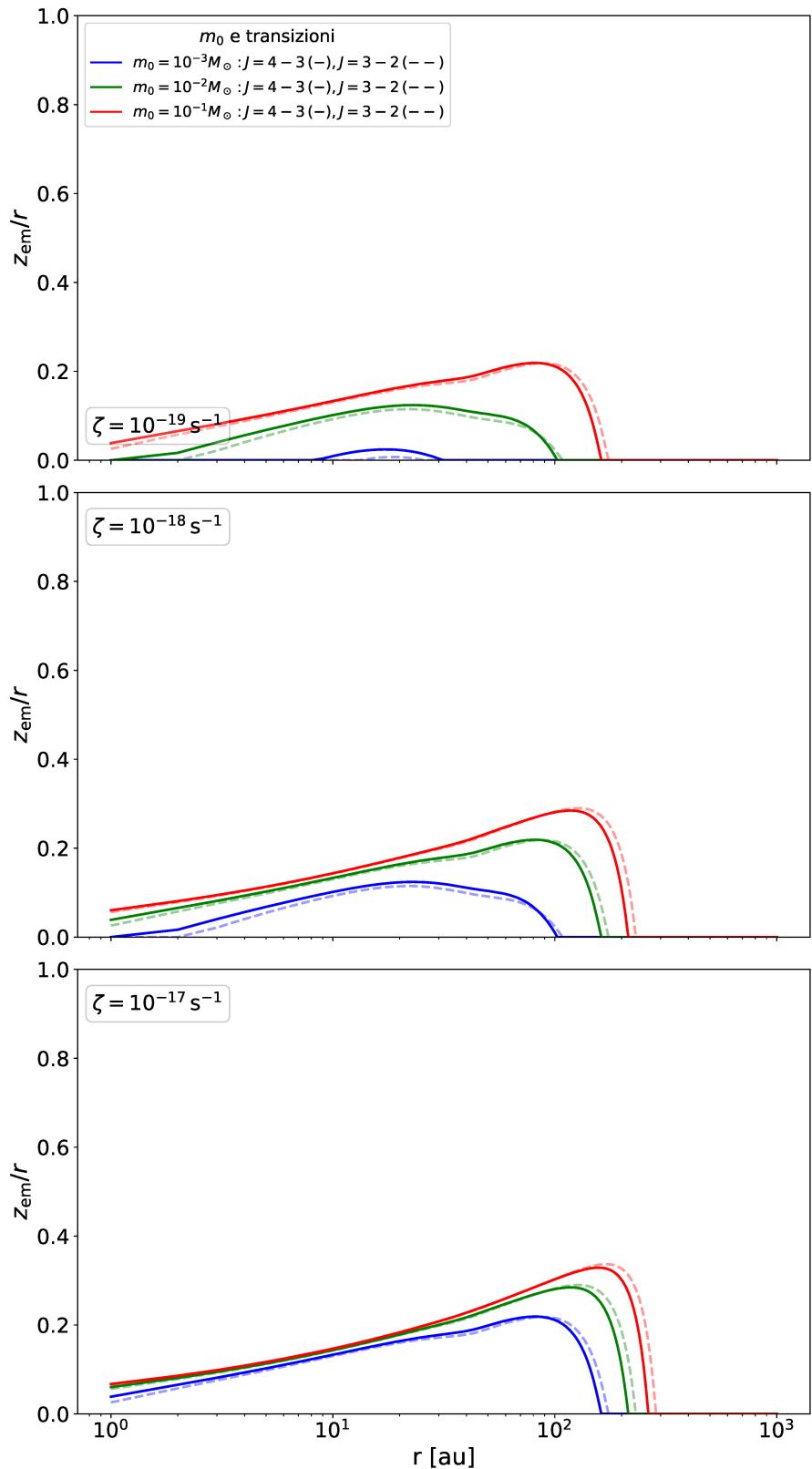


Figura 5.12: Altezza di emissione vs. raggio per diversi valori di m_0 (in masse solari) e ζ : le linee tratteggiate rappresentano la transizione $J=3-2$, quelle continue la transizione $J=4-3$. I tre grafici corrispondono a un raggio caratteristico $r_c = 20$ au

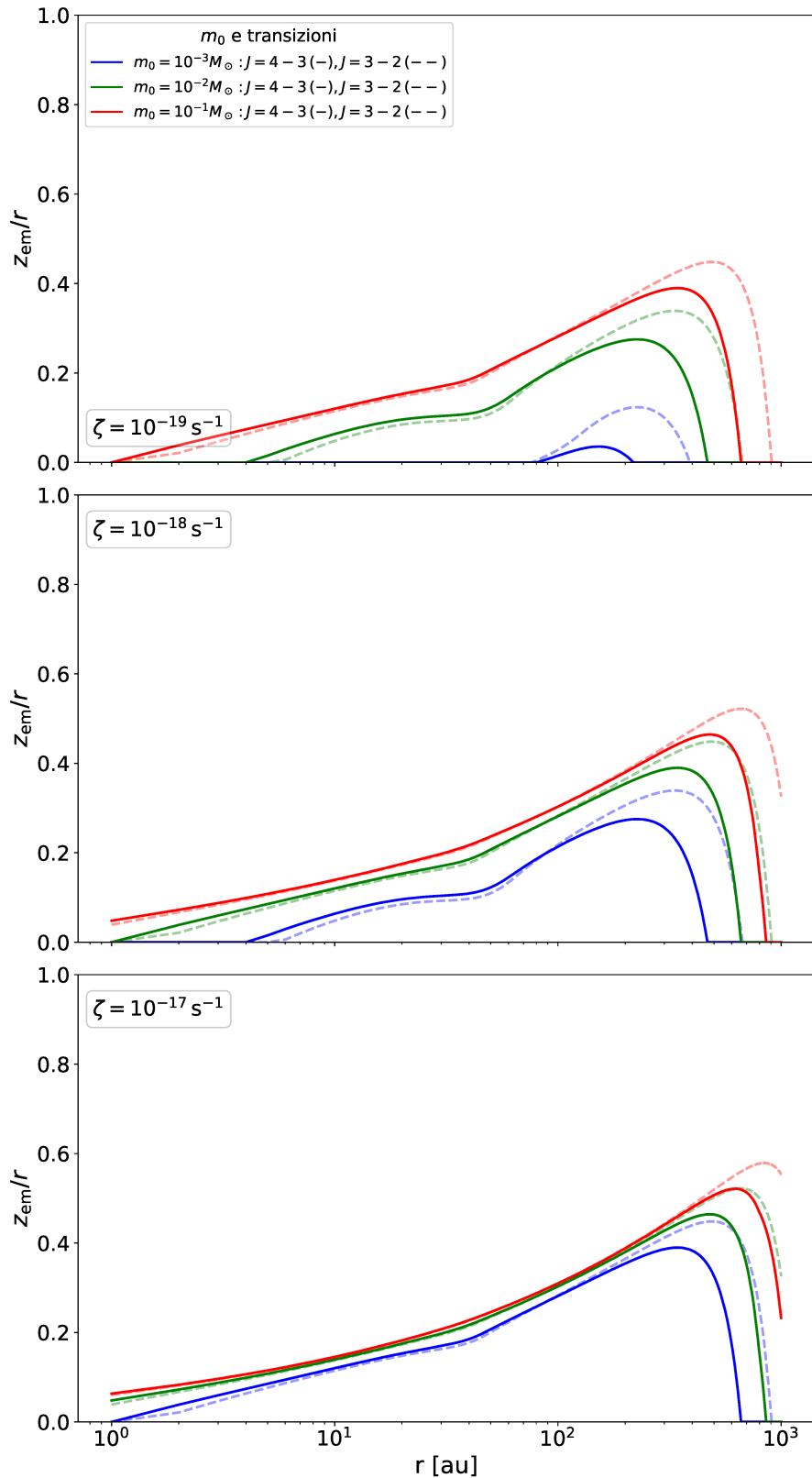


Figura 5.13: Altezza di emissione vs. raggio per diversi valori di m_0 e ζ : le linee tratteggiate rappresentano la transizione $J=3-2$, quelle continue la transizione $J=4-3$. I tre grafici corrispondono a un raggio caratteristico $r_c = 100$ au

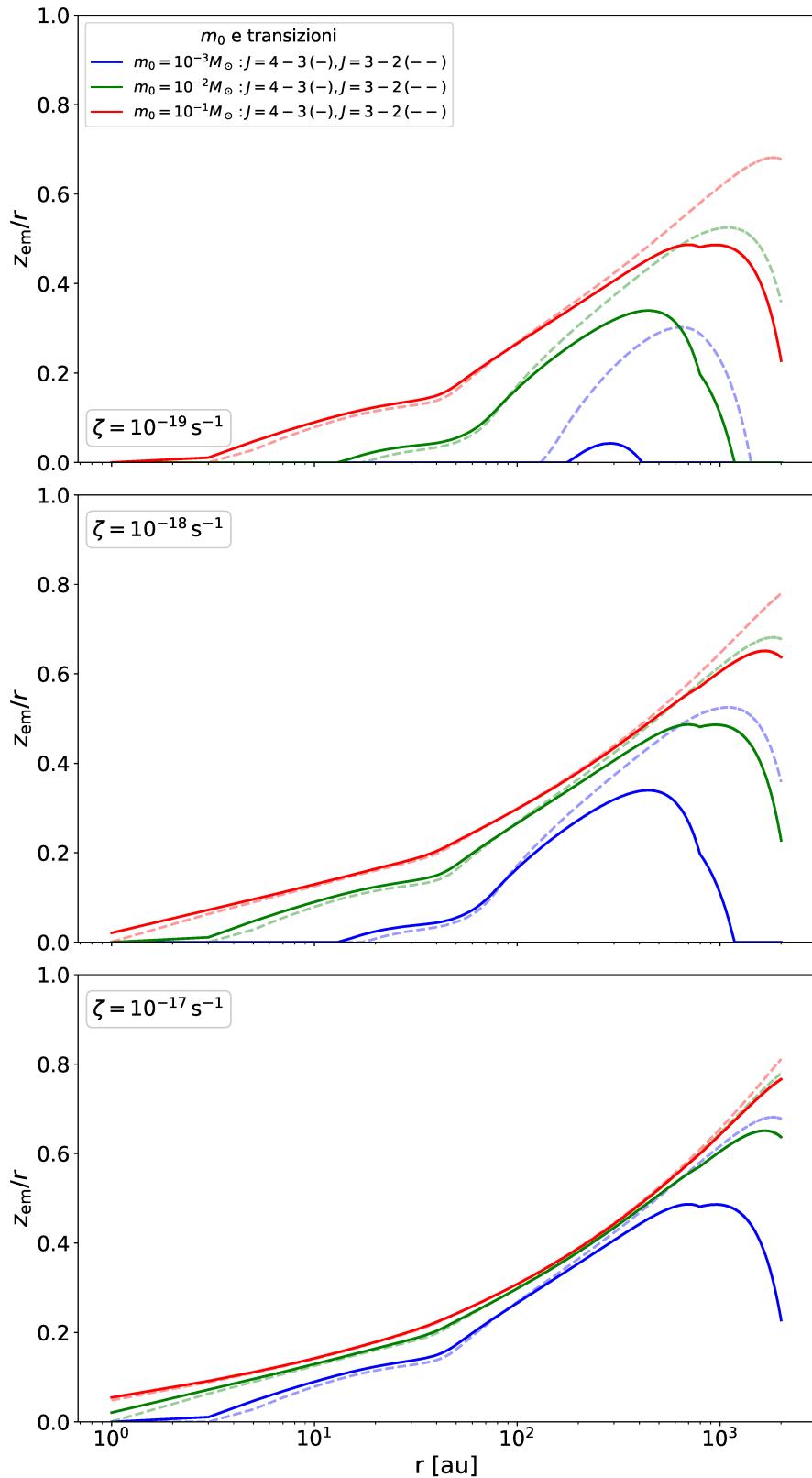


Figura 5.14: Altezza di emissione vs. raggio per diversi valori di m_0 e ζ : le linee tratteggiate rappresentano la transizione $J=3-2$, quelle continue la transizione $J=4-3$. I tre grafici corrispondono a un raggio caratteristico $r_c = 500 \text{ au}$

5.3 Applicazione del modello sul disco di PDS 70

PDS 70 è una stella giovane, situata a circa 370 anni luce dalla Terra nella costellazione del Centauro. Circondata da un disco protoplanetario di polvere e gas, è uno degli oggetti più studiati per comprendere la formazione planetaria. Il disco di PDS 70 è particolarmente interessante perché ospita almeno due pianeti in fase di formazione, che interagiscono con il materiale circostante. Il sistema è quindi molto complesso, tuttavia proveremo a fare una stima, attraverso il modello, della massa del disco e del tasso di ionizzazione.

Il disco si estende per circa 140-165 AU e per semplicità assumiamo un raggio caratteristico di 100 AU. Sappiamo dal lavoro di Law et al. [6] che la linea J=4-3 di HCO⁺ traccia circa una regione dove $z/r \approx 0.2$. Applicando quindi il modello alla luce di questa considerazione, il prodotto tra i parametri m_0 e ζ è fissato introducendo una degenerazione all'interno dello spazio dei parametri. L'intervallo di validità dei due parametri è comunque delimitato dalle condizioni fisiche per cui ci aspettiamo che $10^{-4}M_{\odot} < m_0 < 10^{-1}M_{\odot}$ e $10^{-19}s^{-1} < \zeta < 10^{-16}s^{-1}$. Ad esempio, utilizzando i parametri specificati da Law et al. [6], il nostro modello introduce una degenerazione tale che, per ottenere un rapporto $z/r \approx 0.2$ e un raggio caratteristico di 100 au, il prodotto $m_0\zeta$ risulta dell'ordine di $10^{-22} M_{\odot}s^{-1}$. Ciò implica che, se il tasso di ionizzazione minimo è $10^{-20}s^{-1}$, il disco non può avere una massa maggiore di $10^{-2}M_{\odot}$. In conclusione, per conoscere il tasso di ionizzazione del disco è necessario conoscere anche la massa.

Conclusione

Data una transizione molecolare, questo lavoro ha permesso di capire come l'altezza di emissione associata alla transizione varia in funzione dei parametri di raggio caratteristico, massa e tasso di ionizzazione del disco entro le approssimazioni fatte. Per esempio abbiamo capito che un disco con massa pari a $10^{-3} M_{\odot}$, tasso di ionizzazione di 10^{-19} s^{-1} e raggio caratteristico di 20 au, non diventa praticamente mai otticamente spesso per le transizioni J=4-3 e J=3-2 dell'HCO⁺. I parametri di massa e tasso di ionizzazione sono stati esaminati più approfonditamente. Da questa analisi è emerso che, all'aumentare della massa di un disco, diventa più complesso risalire con precisione al valore accurato della massa stessa a partire da una determinata altezza di emissione. Una difficoltà analoga si riscontra anche nel caso del tasso di ionizzazione. Realisticamente, è possibile misurare solo il prodotto di queste due quantità, il che causa un'incertezza intrinseca nella determinazione separata della massa del disco e del tasso di ionizzazione.

L'originalità di questa tesi risiede nell'associare il tasso di ionizzazione, una quantità di grande rilevanza nella fisica dei dischi, all'altezza di emissione, utilizzando un modello semplificato di trasferimento radiativo. Questo approccio consente di ottenere risultati considerevoli senza richiedere un elevato costo computazionale. Infatti si nota che l'altezza di emissione varia significativamente in funzione di massa, raggio caratteristico e tasso di ionizzazione del disco, il che la rende una variabile molto interessante per lo studio di questi sistemi. L'analisi delle proprietà fisiche del disco, dedotte dall'altezza di emissione delle linee, rappresenta inoltre una frontiera avanzata nello studio dei dischi.

Adattando il modello ad osservazioni particolari tramite la specifica dei parametri di temperatura e densità, è quindi possibile risalire ad una stima sul tasso di ionizzazione dal disco tramite l'altezza di emissione di HCO⁺.

La limitazione di questa analisi è che non si basa su un calcolo auto consistente per determinare il profilo di temperatura a partire dall'irraggiamento della stella centrale, ma assume un gradiente di temperatura dedotto a partire da un modello che si adatta bene ai dati. A tal proposito si possono considerare anche altre forme funzionali oltre a quella di Dartois, E. et al. [5], come per esempio quella proposta nel lavoro di Law et al. [7]. Inoltre, in questo lavoro non sono stati chiaramente identificati i fattori che determinano il massimo dell'altezza dello strato di emissione in funzione del raggio. Approfondire questo aspetto fornirebbe una comprensione più completa del modello.

In futuro, sarà utile analizzare come i risultati variano al modificarsi di altri parametri, come ϕ o quelli legati alla temperatura, poiché il tasso di ionizzazione dipende fortemente da questi fattori. Inoltre, applicare il modello a ulteriori dati sperimentali su HCO⁺ si rivelerà estremamente importante per approfondire la comprensione dei fenomeni coinvolti e validare le previsioni del modello.

Bibliografia

- [1] Sébastien Fromang, Caroline Terquem e Steven A. Balbus. “The ionization fraction in models of protoplanetary discs”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 329.1 (gen. 2002), pp. 18–28. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2002.04940.x. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/329/1/18/3877182/329-1-18.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.04940.x>.
- [2] N. I. Shakura e R. A. Sunyaev. “Black holes in binary systems. Observational appearance.” In: 24 (gen. 1973), pp. 337–355.
- [3] Heays, A. N., Bosman, A. D. e van Dishoeck, E. F. “Photodissociation and photoionisation of atoms and molecules of astrophysical interest”. In: *AA* 602 (2017), A105. DOI: 10.1051/0004-6361/201628742. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628742>.
- [4] *Leiden Molecular Database*. URL: <https://home.strw.leidenuniv.nl/~moldata/datafiles/hco+.dat>.
- [5] Dartois, E., Dutrey, A. e Guilloteau, S. “Structure of the DM Tau Outer Disk: Probing the vertical kinetic temperature gradient”. In: *AA* 399.2 (2003), pp. 773–787. DOI: 10.1051/0004-6361:20021638. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20021638>.
- [6] Charles J. Law et al. *Mapping the Vertical Gas Structure of the Planet-hosting PDS 70 Disk*. 2024. arXiv: 2401.03018 [astro-ph.EP]. URL: <https://arxiv.org/abs/2401.03018>.
- [7] Charles J. Law et al. “Mapping Protoplanetary Disk Vertical Structure with CO Isotopologue Line Emission”. In: *The Astrophysical Journal* 948.1 (mag. 2023), p. 60. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.3847/1538-4357/acb3c4. URL: <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/acb3c4>.