非可算無限個の最大化測度を持つ連続関数の稠密性について

慶應義塾大学大学院　理工学研究科　博士1年　篠田万穂 (shinoda-mao@keio.jp)

数学・数理科学専攻若手研究者のための異分野・異業種研究交流会2017　2017/11/11 明治大学中野キャンパス

導入

力学系とは決定論的な時間発展の法則に従う現象を数学的に定式化したもので, 常微分方程式や差分方程式(写像の反復合成)はその典型である. 力学系理論の起源は 19 世紀末の Poincaré による三体問題の研究にあり, 1960 年代の Smale の研究と応用の分野における「カオス」の発見により, 一つの確立した分野となった. 種々の重要な現象を記述する数学モデルを設定し, 数学の理論を用いて現象を定性的に説明することが力学系理論の目的である.

力学系の構造を理解する方法の一つに, 相空間上の目的関数により力学系の挙動の定量的評価を与え, その時間平均を考察するという方法がある. 「カオス的」な力学系では, 決定論的であるにもかかわらずその初期値鋭敏依存性のため, 軌道の振る舞いはきわめて出鱈目に見えてしまうことが多い. このため, 個々の軌道を追跡するよりも, 関数の時間平均を考察することで力学系の構造をよく理解できることが多い. そこで, エルゴード最適化では関数の時間平均の最大化に焦点を当てる. これはエルゴード定理により関数の空間平均を最大化する不変確率測度 (最大化測度) を考察することに相当する.

エルゴード最適化は, Mañé による Lagrangian flow の研究をひとつの契機として 1990 年代に始まった新しい理論であり, Hamilton-Jacobi 方程式の解析やOGY カオス制御における目標周期軌道の決定など, いくつかの応用も考えられる.

力学系とカオス

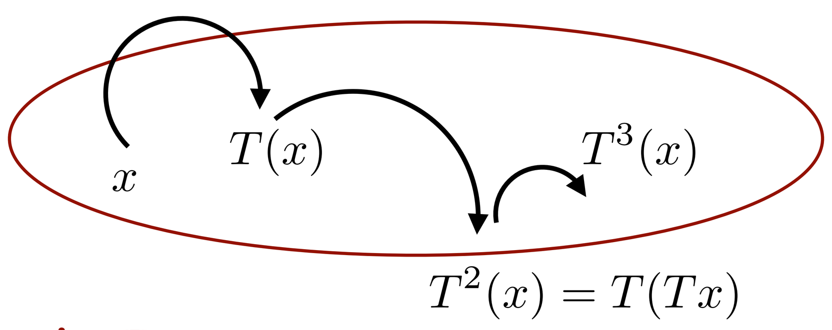
離散時間力学系

X　相空間　(位相・可測　空間)　　系がとりうる状態全体

$T: X \to X$　写像　(連続・可測　写像)　決定論的な時間発展の法則

$\mathcal{O}_n(x) = \{x, Tx, \dots, T^{n-1}x\}$　軌道

初期点 x の時刻 $n-1$ までの状態（時間発展）の記録

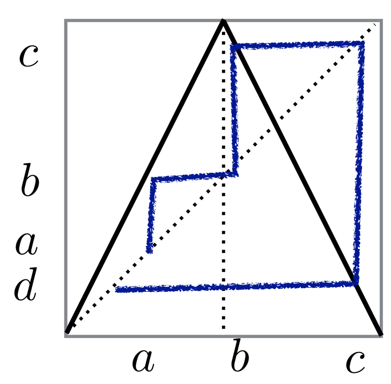


リー・ヨークの定理

力学系　$X = [0,1]$　　$T: X \to X$　連続

仮定　$a, b, c, d \in X$　　$d \le a < b < c$

$T(a) = b,\ T(b) = c,\ T(c) = d$



このとき次が成立 (リー・ヨークのカオス)　$T^k(x) = x$

1. 任意の $k \ge 1$ に対して k 周期点が存在.
2. 非可算無限集合 $S \subset X$ が存在して, 任意の $x, y \in S$ に対して
   $*$ $\liminf_{n\to\infty} |T^n(x) - T^n(y)| = 0,\ \limsup_{n\to\infty} |T^n(x) - T^n(y)| > 0$
   が成り立つ.
3. 任意の $x \in S$ と k 周期点 y に 対して$*$が成り立つ.

エルゴード測度

力学系　X　可測空間　$T: X \to X$　可測写像

不変確率測度　μ　　写像の変換で不変　$\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$

定義　任意の $\phi \in L^1(\mu)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k x) = \int \phi \, d\mu \quad \mu\text{-a.e. } x$$

が成り立つとき μ をエルゴード測度と呼ぶ.

エルゴード最適化

$\phi: X \to \mathbb{R}$　目的関数　　　力学系の挙動の定量的評価

$$S_n\phi(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k(x)) \quad \text{where} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{dynamical sum}$$

初期点 x の軌道に沿って関数が時刻 $n-1$ までに取る値の和

- **時間平均の極限を考える**

$$\overline{\phi}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(x) \quad \text{if it exists}$$

- **時間平均を最大化する軌道を特定する**

再帰頻度（Hitting Frequency）

$A \subset X$　部分集合

$$\phi(x) := 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{特性関数}$$

$$\frac{1}{n} S_n\phi(x) = \frac{1}{n} \#\{0 \le k \le n-1 : T^k(x) \in A\}$$

初期点 x の時刻 $n-1$ までに集合Aを訪れた回数の平均値

Lyapunov 指数 (指数的な写像の拡大率)

$T: X \to X$　C^1 写像　臨界点なし

$\phi(x) := \log |DT(x)|$　写像の指数的な拡大率　$|T(x) - T(y)| = |DT(c)||x-y|$　$c \in (x, y)$

$$\frac{1}{n} S_n\phi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |DT(T^k(x))| = \frac{1}{n} \log |DT^n(x)|$$

最大化測度

エルゴード定理により、時間平均の最大値は空間平均の最大値に翻訳される

$$\sup_{x\in X} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(x) = \max_{\nu \in \mathcal{M}_T} \int \phi \, d\nu$$

空間平均の最大値を与える不変確率測度を**最大化測度**と呼ぶ

- **最大化測度の性質を調べる**

先行研究と主定理

力学系　X　コンパクト距離空間　$T: X \to X$　連続写像

連続関数空間　$C(X)$

定理 (Jenkinson)　最大化測度の一意性はジェネリックな性質

$C(X)$ の残留集合 R が存在して, 任意の $\phi \in R$ に対して最大化測度が一意に存在する.

定理 (S)

エルゴード確率測度の集合 M_e が弧連結と仮定する.
このとき, $C(X)$ の稠密な部分集合 D が存在して, 任意の $\phi \in D$ に対して非可算無限個のエルゴード的な最大化測度が存在する.

参考文献

- O. Jenkinson, Ergodic optimization, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, 15, 2006, pp.197–224.
- M. Shinoda, Ergodic Maximizing Measures of Non-Generic, Yet Dense Continuous Functions, arXiv:1704.05616
- 山口昌哉, カオス入門, 朝倉書店, 1996年

Properties of ergodic maximizing measures for dense continuous functions

Mao Shinoda (shinoda-mao@z3.keio.jp) Keio University

Current Trends in Dynamical Systems and the Mathematical Legacy of Rufus Bowen 7/30-8/4, 2017, University of British Columbia

Introduction

The aim of ergodic optimization is to describe maximizing measures, which maximize the space average of a "performance" function. A origin of this study can be found in the works of Mather and Mañé on the Euler Lagrangian flow. In this poster we will discuss non-generic but dense property of maximizing measures. This non-generic property is interesting if we consider zero-temperature limit of equilibrium measures.

Setting

X compact metric space

$T : X \to X$ continuous map

$\phi : X \to \mathbb{R}$ continuous function

$S_n\phi(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k(x))$ where $n \in \mathbb{N}$ dynamical sum

- **We are interested in the time average as time goes to infinity**

$$\overline{\phi}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(x) \quad \text{if it exists}$$

- **Find orbits maximizing the time average**

Examples

- **Hitting Frequency**

$A \subset X$ clopen subset

$$\phi(x) := 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{characteristic function}$$

$$\frac{1}{n} S_n\phi(x) = \frac{1}{n} \#\{0 \le k \le n-1 : T^k(x) \in A\}$$

- **Lyapunov Exponent**

$T : S^1 \to S^1$ expanding map i.e. $\min_{x \in S^1} |DT(x)| > 1$

$\phi(x) := \log |DT(x)|$ geometric function

$$\frac{1}{n} S_n\phi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |DT(T^k(x))| = \frac{1}{n} \log |DT^n(x)|$$

Maximizing measures

$\mathcal{M}_T$ the space of invariant Borel probability measures with the weak*-topology

For a continuous function $\phi : X \to \mathbb{R}$

$$\sup_{x\in X} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(x) = \max_{\nu \in \mathcal{M}_T} \int \phi \, d\nu$$

We call invariant measures attaining the maximum **maximizing measures**

For ergodic maximizing measure, by Birkhoff's ergodic theorem,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(x) = \int \phi \, d\mu \qquad \mu - a.e.$$

We are interested in **uniqueness**, **support** and **entropy**

- **Study properties of maximizing measures**

We are interested in properties of maximizing measures for "many" functions

$$C(X) := \{\phi : X \to \mathbb{R} : \text{ continuous}\}$$

The space of continuous functions with the supremum norm

Generic Properties

Theorem (Jenkinson)

There exists a residual subset $\mathcal{R}$ of $C(X)$ such that
For every $\phi \in \mathcal{R}$ there exists

R1 a unique maximizing measure

Theorem (Bousch, Bremont,Jenkinson, Morris)

Moreover, if T satisfies the specification property, the unique measure is

R2 fully supported and

R3 has zero entropy.

Main Results (Non-Generic Properties)

$\mathcal{M}_e$ the set of ergodic measures

Theorem A

Assume $\mathcal{M}_e$ is arcwise-connected.
There exists a dense subset $\mathcal{D}$ of $C(X)$ such that for every $\phi \in \mathcal{D}$ there exist

D1 uncountably many ergodic maximizing measures.

Theorem B

Consider a subshift of finite type $(\sum_A, \sigma)$.
There exists a dense subset $\sum_{\mathcal{A}}$ of $C(X)$ such that for every $\phi \in \mathcal{D}$ there exist

D1 uncountably many ergodic maximizing measures

D2 with full support

D3 and positive entropy.

Idea of the proof

We use the following functional on the Banach space of continuous functions.

$$Q(\phi) = \max_{\nu \in \mathcal{M}_T} \int \phi \, d\nu \quad (\phi \in C(X))$$

The functional is continuous and convex. We apply the Bishop Phelps theorem to it.

The Bishop Phelps Theorem

We choose μ_0 nicely by using an arc in $\mathcal{M}_e$

$C(X)$ $\mathcal{M}_T$

Let V be a Banach space and $Q : V \to \mathbb{R}$ a convex continuous functional.
Take $\phi_0 \in V$, $\varepsilon > 0$ and $\mu_o \in V^*$ with $\mu_0 \le Q$.
Then there exists $\phi \in V$ and $\mu \in V^*$ such that

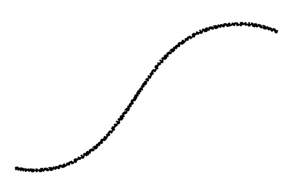
this condition holds for every $\mu_0 \in \mathcal{M}_T$, by the definition of Q.

1. μ is tangent to Q at ϕ, $\longleftrightarrow$ μ is a maximizing measure of ϕ
2. $\|\mu - \mu_0\| \le \varepsilon$ and $\longrightarrow$ This condition implies $\|\alpha_0 - \alpha_\mu\| \le \varepsilon$, where α_μ is the ergodic decomposition of μ.
3. $\|\phi - \phi_0\| \le \frac{1}{\varepsilon} (Q(\phi_0) - \mu_0(\phi_0) - \cancel{s(\mu_0)})$,

where $s(\mu_0) = \inf\{Q(\psi) - \mu(\psi) : \psi \in V\} = 0$

Construction of the first measure

Take an arc in the set of ergodic measures. $f : [0,1] \to \mathcal{M}_e$



Define

$$\mu_0 := \int_{\mathcal{M}_e} m \, d\alpha_0(m) \quad \text{where}$$

$$\alpha_0 := f_* \mathrm{Leb}_{[0,1]}|_A \quad \text{and} \quad A := \left\{\nu \in \mathcal{M}_e : Q(\phi_0) - \varepsilon^2 < \int \phi_0 \, d\nu\right\}$$

non-atomic

References

- T. Bousch and O. Jenkinson, Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions, Inventiones Mathematicae, 148, 2002, pp.207–217.
- J. Bre´mont, Entropy and maximizing measures of generic continuous functions, Comptes Rendus Mathe´matique. Acade´mie des Sciences. Paris, 346, 2008, pp.199–201.
- O. Jenkinson, Ergodic optimization, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, 15, 2006, pp.197–224.
- I. Morris, Ergodic optimization for generic continuous functions, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, 27, 2010, pp.383–388.