

Лабораторная работа № 6

Решение моделей в непрерывном и дискретном времени

Герра Гарсия Паола Валентина

Содержание

Цель работы	1
Задание	2
Теоретическое введение	2
Выполнение лабораторной работы	2
Выводы	9
Список литературы.....	9

Список иллюстраций

Модель экспоненциального роста	2
Система Лоренца	3
Модель Лотки–Вольтерры.....	3
модель Мальтуса	4
модель Мальтуса	4
Логистическая модель роста популяции.....	5
Логистическая модель роста популяции.....	5
SIR-модель.....	6
SEIR-модель.....	6
Дискретная модель Лотки–Вольтерры.....	7
Модель отбора на основе конкурентных отношений.....	7
Модель отбора на основе конкурентных отношений.....	8
Модель консервативного гармонического осциллятора.....	8
Модель консервативного гармонического осциллятора.....	8
Модель свободных колебаний гармонического осциллятора	8
Модель свободных колебаний гармонического осциллятора	9

Цель работы

Основной целью работы является освоение специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Задание

- Используя JupyterLab, повторите примеры. При этом дополните графики обозначениями осей координат, легендой с названиями траекторий, названиями графиков и т.п.
- Выполните задания для самостоятельной работы.

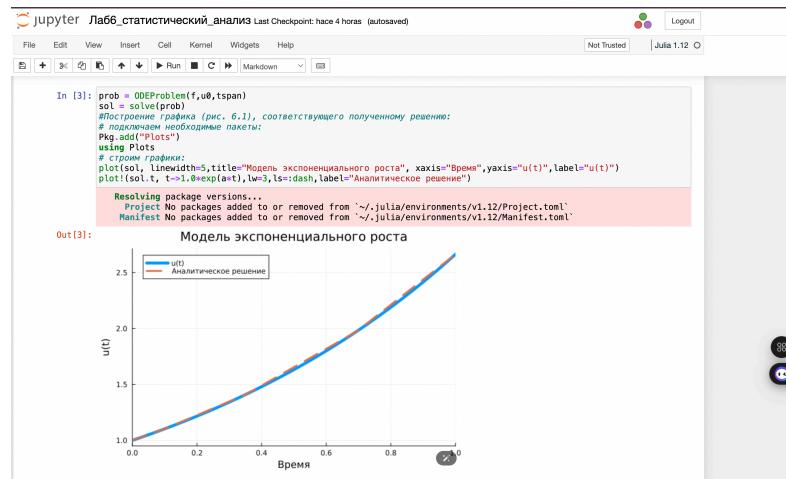
Теоретическое введение

Julia – высокоуровневый свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений [[@julialang](#)]. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков, однако имеет некоторые существенные отличия.

Для выполнения заданий была использована официальная документация Julia [[@juliadoc](#)].

Выполнение лабораторной работы

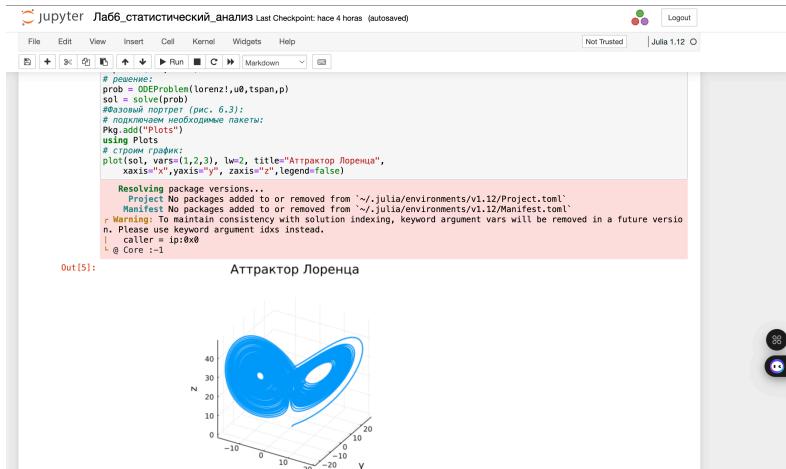
Выполним примеры из лабораторной работы для знакомства с работой с различными моделями и способами их задания решения (рис. [-@fig:001]-[-@fig:003]).



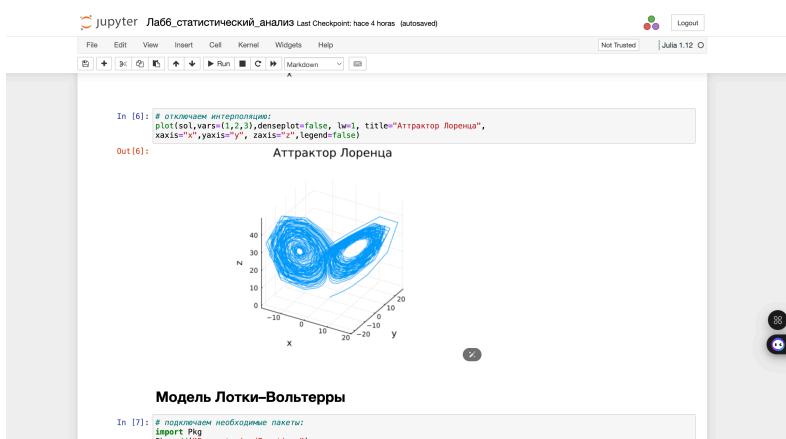
The screenshot shows a JupyterLab interface with the following details:

- Header:** jupyter Labbe_статистический_анализ Last Checkpoint: hace 4 horas (autosaved), Logout.
- Toolbar:** File, Edit, View, Insert, Cell, Kernel, Widgets, Help.
- In [3]:** prob = ODEProblem(f,u0,tspan)
sol = solve(prob);
#Построение графика (рис. 6.1), соответствующего полученному решению:
подключаем необходимые пакеты:
Pkg.add("Plots")
using Plots;
строим график:
plot(sol, linewidth=5,title="Модель экспоненциального роста", xaxis="Время",yaxis="u(t)",label="u(t)")
plot!(sol.t, 1.0*exp.(sol.t),lw=3,ts=:dash,label="Аналитическое решение")
- Out [3]:** Модель экспоненциального роста
- Plot:** A line graph titled "Модель экспоненциального роста". The x-axis is labeled "Время" and ranges from 0.0 to 1.0. The y-axis is labeled "u(t)" and ranges from 1.0 to 2.5. Two curves are plotted: a solid blue line labeled "u(t)" and a dashed red line labeled "Аналитическое решение". Both curves start at (0, 1) and increase exponentially towards 2.5.

Модель экспоненциального роста



Система Лоренца



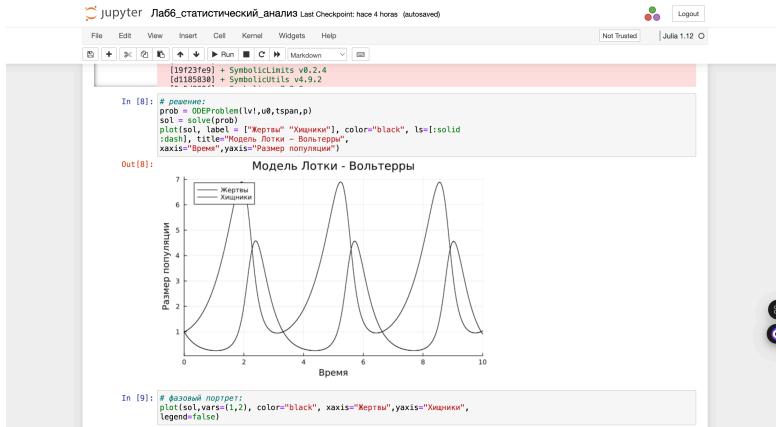
Модель Лотки–Вольтерры

Далее перейдем к заданиям для самостоятельного выполнения.

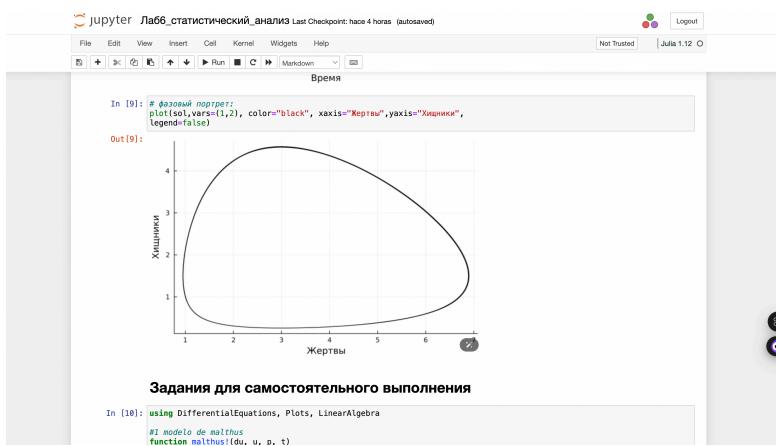
Реализуем и проанализируем модель роста численности изолированной популяции(модель Мальтуса):

$$\dot{x} = ax, \quad a = b - c,$$

где $x(t)$ – численность изолированной популяции в момент времени t , a – коэффициент роста популяции, b – коэффициент рождаемости, c – коэффициент смертности. Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. [-@fig:004]-[-@fig:005]).



модель Мальтуса

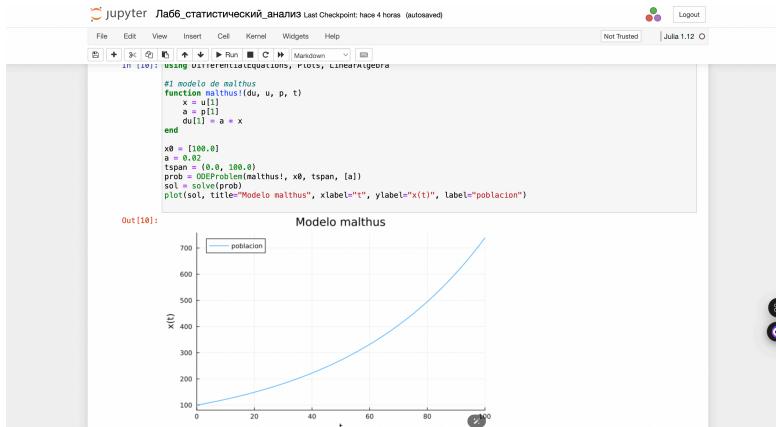


модель Мальтуса

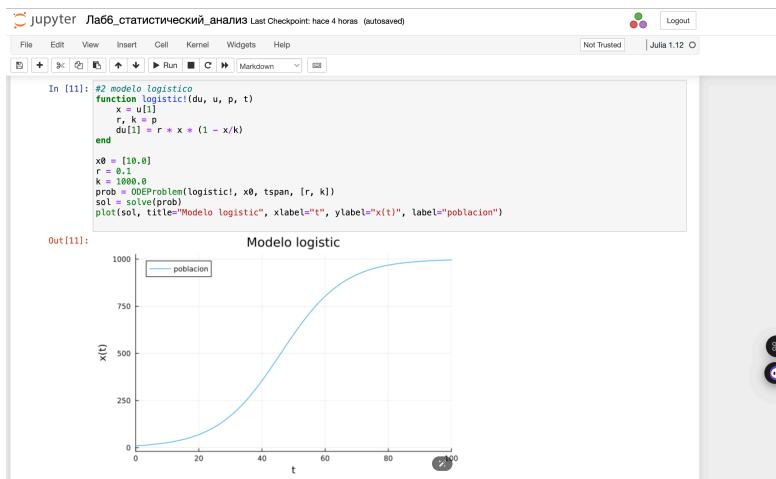
Реализуем и проанализируем логистическую модель роста популяции:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad r > 0, \quad k > 0,$$

где r – коэффициент роста популяции, k – потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. [-@fig:006]-[-@fig:007]).



Логистическая модель роста популяции

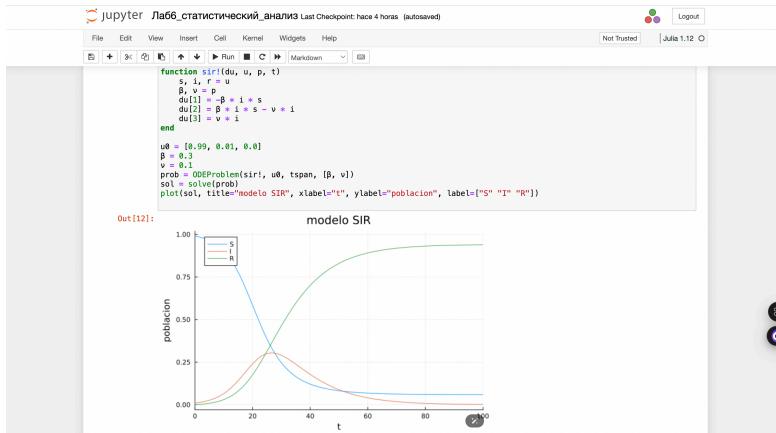


Логистическая модель роста популяции

Реализуем и проанализируем логистическую модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIR-модель):

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

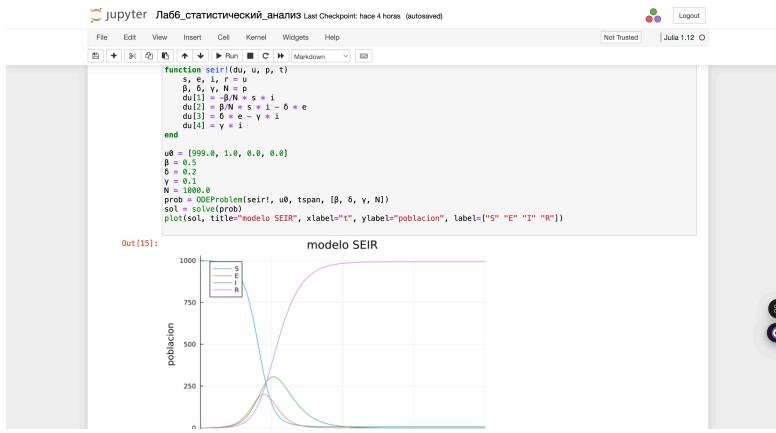
где S – численность восприимчивой популяции, I – численность инфицированных, R – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и N — это сумма этих трёх, а β и γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно (рис. [-@fig:008]).



SIR-модель

Как расширение модели SIR (Susceptible-Infected-Removed) по результатам эпидемии испанки была предложена модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed) (рис. [-@fig:009]).

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta}{N} IS, \\ \dot{E} = \frac{\beta}{N} IS - \delta E, \\ \dot{I} = \delta E - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

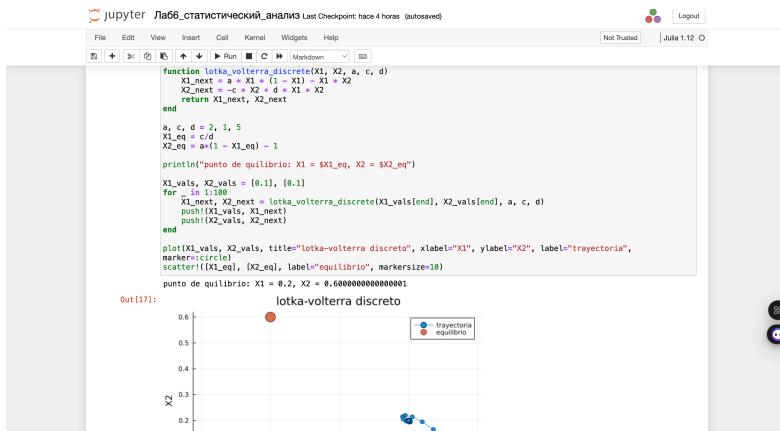


SEIR-модель

Для дискретной модели Лотки–Вольтерры:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = aX_1(t)(1 - X_1(t)) - X_1(t)X_2(t), \\ X_2(t+1) = -cX_2(t) - dX_1(t)X_2(t). \end{cases}$$

с начальными данными $a = 2, c = 1, d = 5$ найдем точку равновесия. Получим и сравним аналитическое и численное решения (рис. [-@fig:010]).

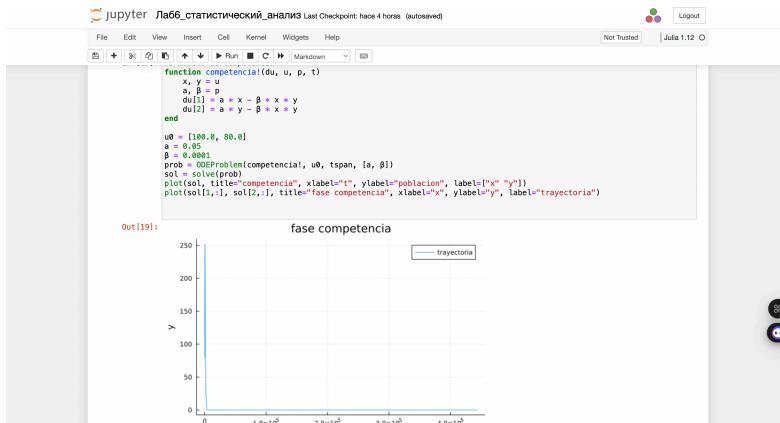


Дискретная модель Лотки–Вольтерры

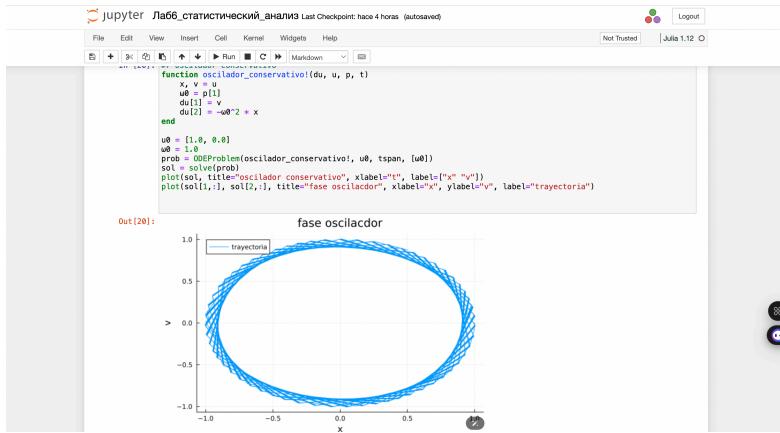
Реализуем на языке Julia модель отбора на основе конкурентных отношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \beta xy, \\ \dot{y} = ay - \beta xy, \end{cases}$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. [-@fig:011]-[-@fig:012]).



Модель отбора на основе конкурентных отношений

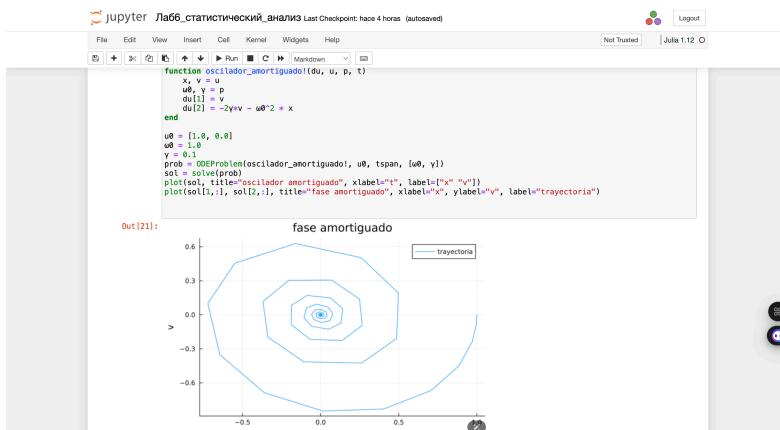


Модель отбора на основе конкурентных отношений

Реализуем на языке Julia модель консервативного гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. [-@fig:013]-[-@fig:014]).



Модель консервативного гармонического осциллятора

Модель консервативного гармонического осциллятора

Модель консервативного гармонического осциллятора

Реализуем на языке Julia модель свободных колебаний гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. [-@fig:015]-[-@fig:016]).

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работы я освоила специализированные пакеты для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Список литературы