Лабораторная работа № 6

Решение моделей в непрерывном и дискретном времени

Герра Гарсия Паола Валентина

Содержание

Цель работы 1
Задание 2
Теоретическое введение 2
Выполнение лабораторной работы 2
Выводы 9
Список литературы 9

Список иллюстраций

Модель экспоненциального роста 2
Система Лоренца 3
Модель Лотки–Вольтерры 3
модель Мальтуса 4
модель Мальтуса 4
Логистическая модель роста популяции 5
Логистическая модель роста популяции 5
SIR-модель 6
SEIR-модель 6
Дискретная модель Лотки–Вольтерры 7
Модель отбора на основе конкурентных отношений 7
Модель отбора на основе конкурентных отношений 8
Модель консервативного гармонического осциллятора 8
Модель консервативного гармонического осциллятора 8
Модель свободных колебаний гармонического осциллятора 8
Модель свободных колебаний гармонического осциллятора 9

Цель работы

Основной целью работы является освоение специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Задание

1. Используя JupyterLab, повторите примерыи. При этом дополните графики обозначениями осей координат, легендой с названиями траекторий, названиями графиков и т.п.

2. Выполните задания для самостоятельной работы.

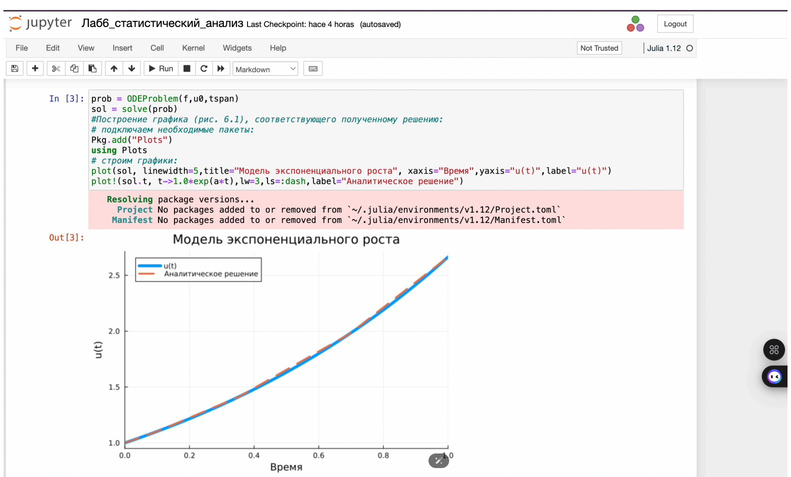
Теоретическое введение

Julia – высокоуровневый свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений [@julialang]. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков, однако имеет некоторые существенные отличия.

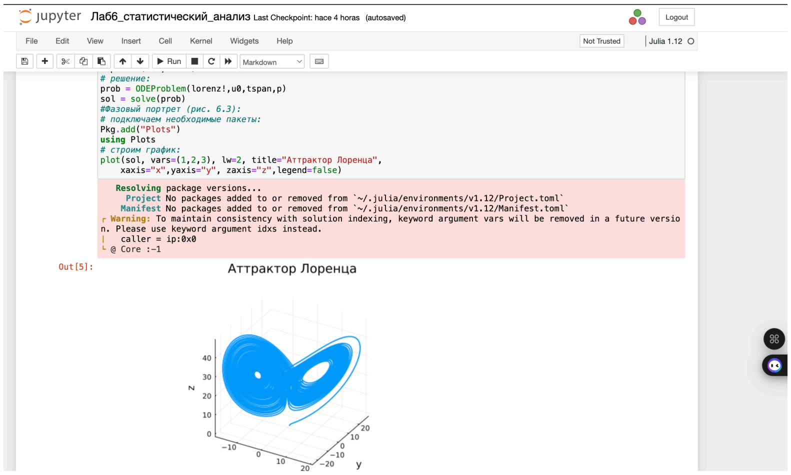
Для выполнения заданий была использована официальная документация Julia [@juliadoc].

Выполнение лабораторной работы

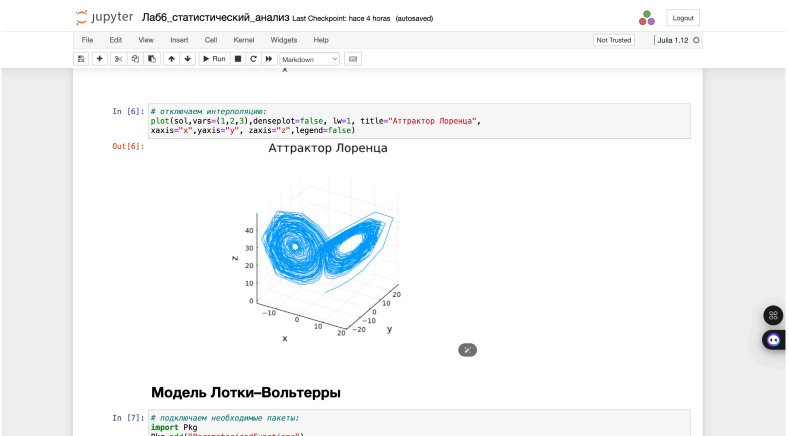
Выполним примеры из лабораторной работы для знакомства с работой с различными моделями и способами их задания решения (рис. [-@fig:001]-[-@fig:003]).



Модель экспоненциального роста



Система Лоренца



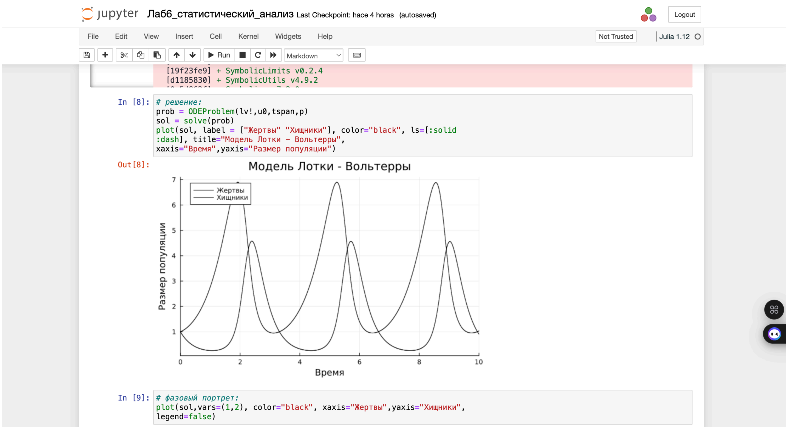
Модель Лотки–Вольтерры

Далее перейдем к заданиям для самостоятельного выполнения.

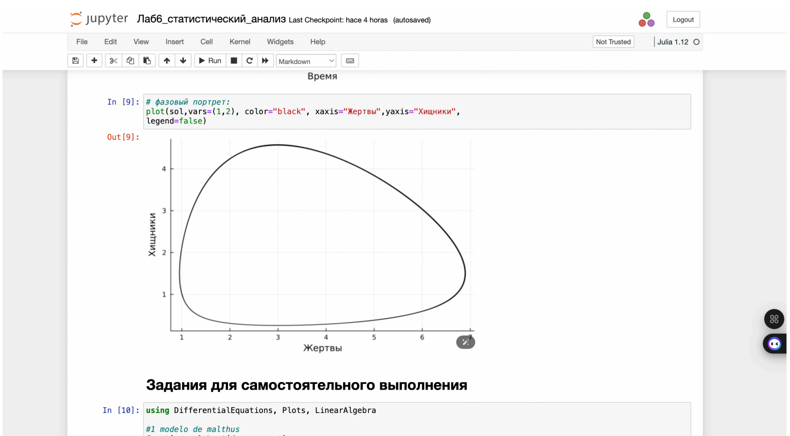
Реализуем и проанализируем модель роста численности изолированной популяции(модель Мальтуса):

$$\dot{x} = ax, \quad a = b - c,$$

где $x(t)$ – численность изолированной популяции в момент времени t,a – коэффициент роста популяции, b – коэффициент рождаемости, c – коэффициент смертности. Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. [-@fig:004]-[-@fig:005]).



модель Мальтуса

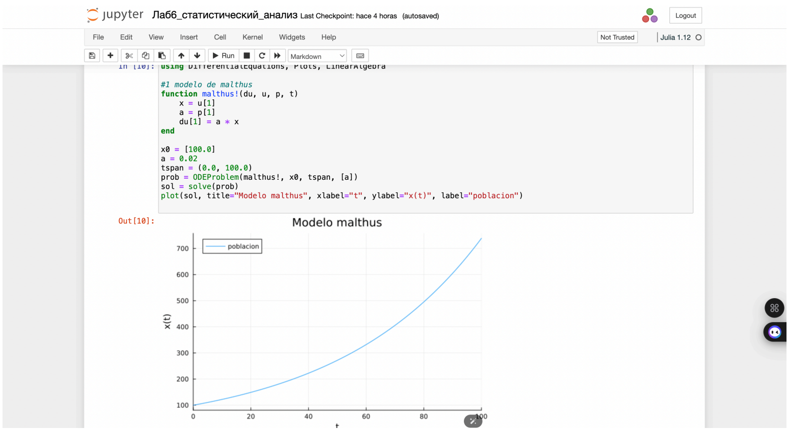


модель Мальтуса

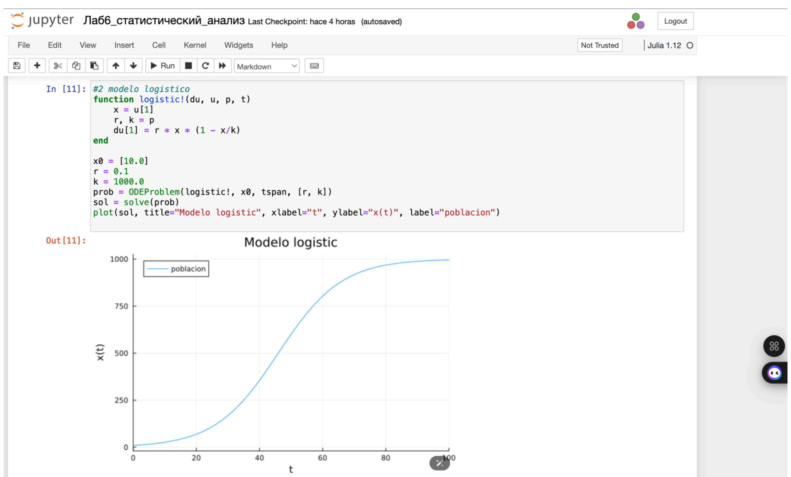
Реализуем и проанализируем логистическую модель роста популяции:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}), \quad r > 0, \quad k > 0,$$

где r – коэффициент роста популяции, k – потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. [-@fig:006]-[-@fig:007]).



Логистическая модель роста популяции

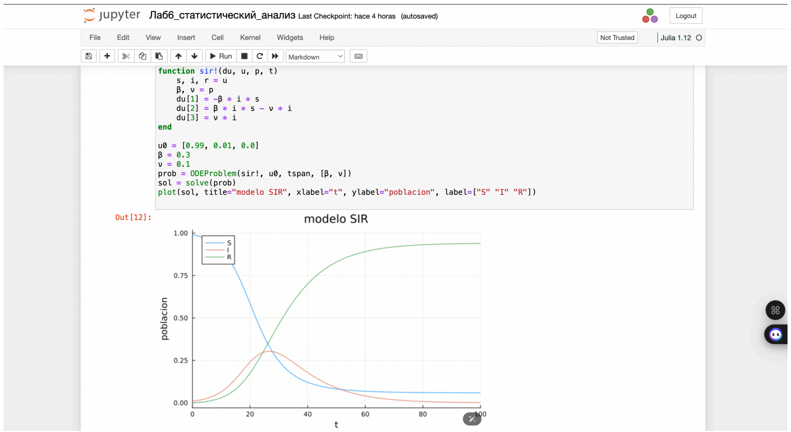


Логистическая модель роста популяции

Реализуем и проанализируем логистическую модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIR-модель):

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

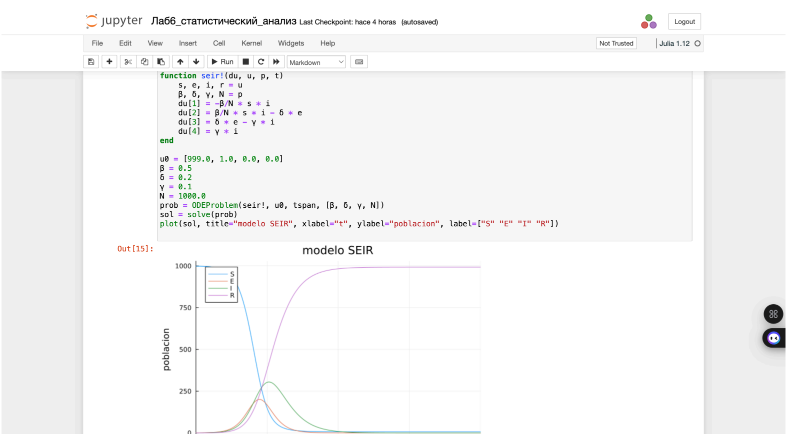
где S – численность восприимчивой популяции, I – численность инфицированных, R – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и N — это сумма этих трёх, а β и γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно (рис. [-@fig:008]).



SIR-модель

Как расширение модели SIR (Susceptible-Infected-Removed) по результатам эпидемии испанки была предложена модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed) (рис. [-@fig:009]).

$$\begin{cases} \dot{S} = -\dfrac{\beta}{N} IS, \\ \dot{E} = \dfrac{\beta}{N} IS - \delta E, \\ \dot{I} = \delta E - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

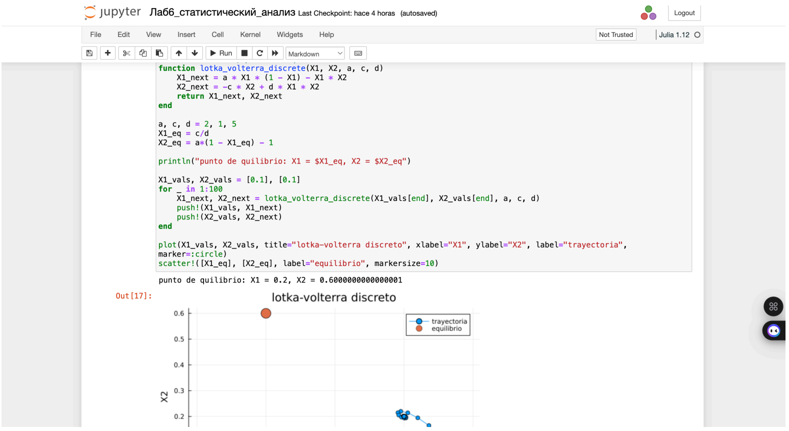


SEIR-модель

Для дискретной модели Лотки–Вольтерры:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = aX_1(t)(1 - X_1(t)) - X_1(t)X_2(t), \\ X_2(t+1) = -cX_2(t) - dX_1(t)X_2(t). \end{cases}$$

с начальными данными $a = 2, c = 1, d = 5$ найдем точку равновесия. Получим и сравним аналитическое и численное решения (рис. [-@fig:010]).

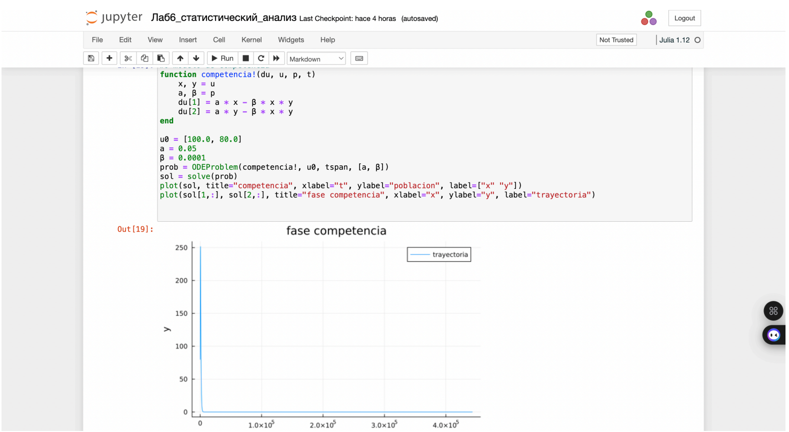


Дискретная модель Лотки–Вольтерры

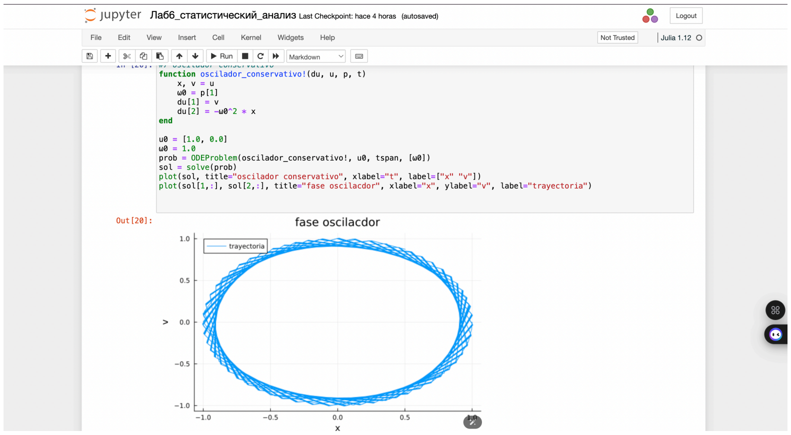
Реализуем на языке Julia модель отбора на основе конкурентных отношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta x y, \\ \dot{y} = \alpha y - \beta x y, \end{cases}$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. [-@fig:011]-[-@fig:012]).



Модель отбора на основе конкурентных отношений

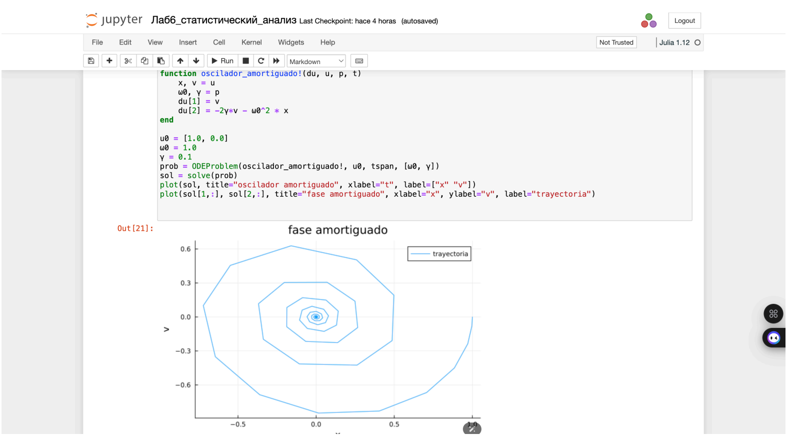


Модель отбора на основе конкурентных отношений

Реализуем на языке Julia модель консервативного гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. [-@fig:013]-[-@fig:014]).



Модель консервативного гармонического осциллятора

Модель консервативного гармонического осциллятора

Модель консервативного гармонического осциллятора

Реализуем на языке Julia модель свободных колебаний гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. [-@fig:015]-[-@fig:016]).

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работы я освоила специализированные пакеты для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Список литературы