

---

# **INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES RADIOLÓGICAS EN EL ÁMBITO CLÍNICO**

## **Bases teóricas y analíticas**

---

**Mauro Valente  
Pedro Pérez**



Universidad  
Nacional  
de Córdoba

**Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación**

Copyright ©2016 texto no publicado, ningún derecho reservado.

Publicado por XXX, Córdoba, Argentina.

Cualquier parte de esta publicación puede ser reproducida o transmitida en cualquier forma.  
Se aceptan modificaciones y sugerencias de todo tipo

Para contactarse con los autores escribir a: [pedro.perez@unc.edu.ar](mailto:pedro.perez@unc.edu.ar)

Se puede encontrar más información en: [www.liifamirx.famaf.unc.edu.ar](http://www.liifamirx.famaf.unc.edu.ar)

***Apunte de curso de grado y posgrado:***

Introducción al procesamiento de imágenes radiológicas en el ámbito clínico / M. Valente y P. Pérez.

Incluye referencias bibliográficas e índice.

ISBN (no publicado)

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación.

Universidad Nacional de Córdoba.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1



# COLABORADORES

---

COLABORADOR N. U., Trabaja acá, En esta ciudad, En este país  
COLABORADOR N. D., Trabaja acá, En esta ciudad, En este país



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción al transporte de radiación</b>	<b>1</b>
1.1.	Transporte de radiación e interacciones	1
1.2.	Estado de fase en transporte de radiación	3
1.3.	Bases para el cálculo de observables a partir de la ecuación de transporte de radiación	4
1.3.1.	Densidad de fluencia energética	4
1.4.	Modelos de interacción de partículas con la materia a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann	5
1.4.1.	Pérdidas energéticas en interacciones de partículas cargadas	5
1.4.2.	Efectos angulares por interacciones de partículas cargadas	6
1.4.3.	Determinación de distancias de interacción	6
1.5.	Aproximaciones para el transporte de fotones en medios materiales	7
<b>2</b>	<b>Fundamentos básicos del procesamiento de imágenes</b>	<b>9</b>
2.1.	Introducción al procesamiento de imágenes	9
2.2.	Formato de imagen y representación digital	10
2.2.1.	Bandas en imágenes digitales	10
2.2.2.	Representación digital: mapa de bits (Bitmaps)	12
2.2.3.	Representación digital: imágenes vectoriales	12
2.2.4.	Modificación de colores en imágenes	12

2.2.5.	Histograma de una imagen	14
2.2.6.	Resolución de una imagen	14
2.2.7.	Resolución, tamaño de imagen y tamaño de archivo	14
2.2.8.	Contraste en una imagen	15
2.3.	Vínculo físico del origen de imágenes	15
2.4.	Modificación de una imagen	16
2.4.1.	Modificación de colores o tonalidades: Corrección $\gamma$	16
2.4.2.	Modificación de imagen: inversión ( <i>flip</i> )	17
2.4.3.	Modificación de imagen: reflexión ( <i>mirror</i> )	17
2.4.4.	Modificación de imagen: interpolación	17
2.4.5.	Comparación cualitativa de performance de algoritmos de interpolación	18
2.5.	Relaciones básicas entre pixels	18
2.6.	Operadores sobre imágenes	19
2.6.1.	Adición y diferencia de imágenes	20
2.7.	Operaciones sobre pixels	20
2.8.	Transformadas discretas: La transformada de Fourier	21
2.9.	Filtros	24
2.9.1.	Filtros de paso de banda	28
2.9.2.	Filtros de suavizado	28
2.9.3.	Máscaras para filtrado	28
<b>3</b>	<b>Sistemas de detección de uso radiológico</b>	<b>31</b>
3.1.	Procesos para la detección de radiación electromagnética	32
3.2.	Procesos para la detección de neutrones	33
3.3.	Procesos para la detección de electrones	34
3.4.	Procesos para la detección de partículas cargadas pesadas	34
3.5.	Detectores gaseosos	35
3.5.1.	Cámaras de ionización	35
3.5.2.	Contador proporcional	36
3.5.3.	Contador Geiger-Müller	36
3.6.	Detectores de estado líquido y sólido	37
3.6.1.	Detectores centelladores	37
3.6.2.	Films radiográficos	40
3.7.	Adaptación de sistemas de detección al radiodiagnóstico médico	40
<b>4</b>	<b>Procesamiento de imágenes con derivadas - Detección de esquinas y bordes</b>	<b>41</b>
4.1.	Detección de bordes utilizando derivadas	41
4.2.	Gradiente de una imagen	42
4.2.1.	Detección de bordes: El operador de Sobel	42
4.2.2.	Detección de bordes: El operador de Prewitt	43
4.2.3.	Detección de bordes: El operador de Roberts	43
4.2.4.	Detección de bordes: Operador de Kirsch	43

4.2.5.	Detección de bordes: Operadores de Robinson y Frei-Chen	44
4.3.	Extensión de los operadores	45
4.4.	El método de Canny: Algoritmo	45
<b>5</b>	<b>Procesos estocásticos</b>	<b>47</b>
5.1.	Introducción y definiciones de procesos estocásticos	47
5.1.1.	Procesos de estado discreto y cadenas de Markov	48
5.1.2.	Procesos de saltos puros	50
5.1.3.	Procesos de estados continuos y series temporales	50
5.2.	Características y medidas de procesos estocásticos	50
5.3.	Procesos estocásticos estacionarios	51
5.3.1.	Procesos de ruido blanco	51
5.4.	El transporte de radiación como proceso estocástico	51
5.5.	Reformulación integral de la ecuación de transporte	51
<b>6</b>	<b>Aplicación de la técnica de simulación Monte Carlo</b>	<b>55</b>
6.1.	Introducción	55
6.2.	Eficiencia del método Monte Carlo	57
6.3.	Cálculo-estimación del número $\pi$ por medio de técnicas Monte Carlo	57
6.4.	Ejemplos de cálculo de integrales definidas por medio del método Monte Carlo	58
6.4.1.	Método de éxito-fracaso con técnica Monte Carlo	58
6.4.2.	Método de la media muestral con técnica Monte Carlo	59
6.4.3.	Evaluación de integrales definidas	60
6.5.	El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación	60
6.5.1.	Tracking de partículas con el método Monte Carlo	62
6.5.2.	Modelado de colisiones e interacciones con el método Monte Carlo	63
6.5.3.	Ejemplo básico artificial de transporte con el método Monte Carlo	64
6.5.4.	Ejemplo sencillo de transporte con el método Monte Carlo: Columna de neutrones	64
<b>7</b>	<b>Descripción de las configuraciones radiológicas en simulaciones Monte Carlo</b>	<b>67</b>
7.1.	Introducción y parámetros en la simulación del transporte de radiación	67
7.2.	Setups virtuales	67
7.3.	Ejemplos de códigos de simulación Monte Carlo para transporte de radiación	68
7.3.1.	El código PENELOPE v. 2008	68
7.3.2.	El código FLUKA v. 2011	69
<b>8</b>	<b>Radiodiagnóstico anatómico estudiado con simulaciones Monte Carlo</b>	<b>71</b>
8.1.	Consideraciones para la simulación de imágenes morfológicas	71
8.2.	Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas	72
8.3.	Simulación Monte Carlo de prácticas de radiografía y mamografía	73



<b>9</b>	<b>Radiodiagnóstico metabólico estudiado con simulaciones Monte Carlo</b>	<b>75</b>
9.1.	Imágenes funcionales para fisiología metabólica	75
9.2.	Aplicaciones en Cámara Gamma	77
<b>10</b>	<b>Reconstrucción tomográfica en radiodiagnóstico</b>	<b>79</b>
10.1.	Introducción	79
10.2.	Tipos de scanner CT	80
10.2.1.	1era generación	80
10.2.2.	2nda generación	81
10.2.3.	3era generación	81
10.2.4.	4ta generación	82
10.2.5.	Scanners espirales	82
10.3.	Reconstrucción tomográfica	82
10.3.1.	Transformada de Radón y proyecciones	82
10.3.2.	Retroproyección	83
10.3.3.	Teorema de la proyección	83
10.3.4.	Reconstrucción directa de Fourier	83
10.3.5.	Retroproyección filtrada	83
10.3.6.	Retroproyección filtrada en <i>fan-beam</i>	83
10.3.7.	Imágenes en 3 dimensiones	84
10.4.	Aplicaciones en radiodiagnóstico metabólico: PET y SPECT	87
10.5.	Nociones y requerimientos de matching y fusión de imágenes anatómicas y metabólicas	87

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN AL TRANSPORTE DE RADIACIÓN

---

En este primer capítulo se desarrollará un breve resumen dedicado a presentar los fundamentos básicos y el formalismo necesario para contar con un primer acercamiento a las teorías del transporte de radiación. Los modelos que describen los procesos de transporte y colisión de partículas se encuentran fundamentados en las llamadas *teorías del transporte*, entre las cuales el formalismo de Boltzmann es el más aceptado y utilizado para explicar y entender los diferentes fenómenos. No es objetivo de este texto desarrollar en detalle el formalismo utilizado en la física de partículas especializada, sino solo presentar el modelado matemático necesario para la comprensión de los procesos físicos involucrados en la formación de imágenes radiológicas. Se presenta así, una introducción al transporte de radiación y sus diferentes tipos de interacción con la materia, se introduce la ecuación de transporte de Boltzmann y los modelos de interacción de diferentes tipos de partículas. Finalmente, se expone una aproximación al caso de los fotones, en quienes se focalizara el presente curso.

### 1.1. Transporte de radiación e interacciones

En términos generales, la ecuación de transporte de Boltzmann es la representación de la distribución estadística de partículas en un entorno fuera del equilibrio. Se aplica al estudiar de varios fenómenos físicos como flujo de calor o carga eléctrica en medios materiales pudiendo determinar cantidades como conductividades térmica y eléctrica.

Como primer paso se hace referencia al transporte de fotones, lo que luego puede generalizarse por medio de desarrollos análogos que incluyan propiedades específicas del tipo de radiación de interés.

La transferencia, absorción y dispersión de energía por parte de la radiación hacia un medio material se determinan por medio de la ecuación de transporte de Boltzmann y modelos específicos de interacción. Existen diferentes expresiones y aproximaciones para la ecuación de transporte de Boltzmann, pudiendo describirse análogamente tanto en forma diferencial como integral.

El objetivo es determinar el flujo total de radiación  $\Phi_T$  o bien la radiancia  $R$  de partículas emitida por una fuente y transportada en un determinado medio material. Bajo ciertas aproximaciones, las cantidades escalares  $\Phi_T$  y  $R$  satisfacen:

$$R(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{d^2 \Phi_T}{dA d\Omega \cos \theta} \approx \frac{\Phi_T}{A \Omega \cos \theta} \quad (1.1)$$

donde  $\vec{r}$  y  $\vec{\Omega}$  son los vectores posición y dirección de movimiento de la partícula que atraviesa el área  $A$  formando un ángulo  $\theta$  con el versor normal a la superficie de  $A$ .

Desde un punto de vista matemático, la ecuación de transporte de radiación de Boltzmann es expresada como una ecuación difusiva integro-diferencial, cuya formulación clásica para observables caracterizados por función de distribución  $\Theta$  dependientes de la posición  $\vec{r}$  es:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_{\text{int}} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial r} \frac{\vec{p}}{m} + \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{p}} \cdot \vec{V} \quad (1.2)$$

donde  $\vec{p}$  y  $m$  son momento y la masa de la partícula,  $t$  indica el tiempo,  $\vec{V}$  es el campo de fuerzas y el subíndice int hace referencia al modelo específico de interacción/colisión entre las partículas del sistema.

En este sentido, hay diferentes modos de interacción entre el flujo de partículas y el medio material. A este propósito, es útil introducir la probabilidad de ocurrencia de una cierta interacción  $i$ , definida físicamente por la sección eficaz  $\sigma_i$ , referida al  $i$ -ésimo mecanismo de interacción. Por tanto, la probabilidad total  $\sigma_T$  de ocurrencia de una interacción, de cualquier tipo, se obtiene por medio de la suma de todas las contribuciones por parte de cada uno de los procesos de interacción. A nivel macroscópico, la sección eficaz total macroscópica  $\Sigma_T$  se define mediante:

$$\Sigma_T \equiv N \sigma_T \quad (1.3)$$

donde  $N$  es la densidad de centros dispersores por unidad de volumen, por lo que la unidad de  $N$  resulta de la forma  $\text{cm}^{-3}$ .

Los procesos de interacción incluyen absorción y dispersión (o *scattering*), por lo que:

$$\Sigma_T = \Sigma_{abs} + \Sigma_{sca} \quad (1.4)$$

donde  $\Sigma_{abs}$  y  $\Sigma_{sca}$  representan las componentes de absorción y *scattering* respectivamente.

La distribución de la cantidad de colisiones  $n$  a lo largo de la trayectoria recorrida (*path*) así como la distanciamedia entre colisiones sucesivas  $\lambda$  se obtienen de:

$$\frac{dn}{ds} = -\Sigma n \Rightarrow n(s) = n(0)e^{-\Sigma s} \Rightarrow \lambda \equiv \frac{\int_0^\infty s e^{-\Sigma s} ds}{\int_0^\infty e^{-\Sigma s} ds} = \frac{1}{\Sigma_T} \quad (1.5)$$

La distancia media entre colisiones sucesivas obtenida a partir de esta distribución  $\lambda$  es el camino libre medio o *mean free path* (mpf) y queda determinado por medio de la sección eficaz total.

## 1.2. Estado de fase en transporte de radiación

Una partícula de momento  $p$  con longitud de onda  $\hbar/p$  transportada en un medio material de espesor  $x$  tal que  $x \ll \hbar/p$  estará completamente determinada (en su espacio de fase) por la posición  $\vec{r}$ , la dirección de movimiento  $\vec{\Omega}$ , la energía  $E$  y el tiempo  $t$ .

Sea  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  la densidad angular de partículas en estados de fase  $[(x, y, z); (\theta, \phi); E; t]$ , que representa la densidad de partículas en el volumen  $d\vec{r}$  alrededor de  $\vec{r}$ , viajando en direcciones  $d\vec{\Omega}$  entorno a  $\vec{\Omega}$  con energía  $E$  a tiempo  $t$ .

El flujo vectorial angular de partículas  $\vec{\Psi}$  puede obtenerse a partir de la densidad angular y la velocidad  $\vec{v}$  de las partículas:

$$\vec{\Psi} = \vec{v}N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad (1.6)$$

El flujo angular escalar (o simplemente flujo angular)  $\Psi$  se obtiene a partir de la expresión 1.6, y sus unidades son  $cm^{-2} s^{-1} str^{-1}$ .

Integrando el flujo angular  $\Psi$  en todas direcciones para valores dados de  $E$ ,  $\vec{r}$  y  $t$  se obtiene una cantidad proporcional a la tasa de población-ocupación del estado  $(\vec{r}, R, t)$ , a veces denominado tasa de “reacción” o “creación”. A partir de esto, puede determinarse el flujo escalar (o simplemente flujo)  $\Phi_T$  dado por:

$$\Phi_T \equiv \int_{4\pi} \Psi d\Omega \quad (1.7)$$

La tasa de ocurrencia de eventos (por unidad de volumen), en términos de la probabilidad de cada  $j$ -ésimo tipo de interacción  $\Lambda$  queda determinada por:

$$\Lambda \equiv \Sigma_j \Phi_T \quad (1.8)$$

La fluencia angular se obtiene a partir de la integral en el tiempo del flujo, y representa el número total de partículas por unidad de área por unidad de energía atravesando el punto  $\vec{r}$  con dirección  $d\Omega$  entorno a  $\Omega$ .

Así mismo, puede calcularse la fluencia escalar (o fluencia total)  $J(\vec{r}, E, t)$  que resulta de integrar la fluencia angular para todas las direcciones posibles:

$$J = |J(\vec{r}, E, t)| = \int_{4\pi} \vec{v}N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} \cdot \hat{n} \quad (1.9)$$

donde  $|\vec{J}|$  es la corriente de partículas y  $\hat{n}$  representa un versor en dirección arbitraria para el cálculo de la fluencia escalar  $J$ .

A partir de esto, puede plantearse la ecuación de transporte de radiación de Boltzmann, dada por:

$$\frac{1}{\vec{v}} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi - S = \int \int_{4\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) K(\vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE' d\vec{\Omega}' \quad (1.10)$$

donde  $S$  es la fuente de radiación y  $K(\vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$  es el operador del kernel que cambia el estado de fase de las “coordenadas” primadas  $(\vec{\Omega}', E')$  a las sin primar  $(\vec{\Omega}, E)$  debido a los procesos de *scattering* en la posición  $\vec{r}$ .

### 1.3. Bases para el cálculo de observables a partir de la ecuación de transporte de radiación

Para un sistema estacionario *steady state* puede aplicarse el teorema de Liouville<sup>1</sup> en una aproximación clásica<sup>2</sup> para mostrar que un sistema de partículas evoluciona según la mecánica clásica cuya densidad de estados se representa en un espacio de las fases constante  $\mathbb{R}^3\wp^3$ , donde  $\mathbb{R}$  y  $\wp$  refieren a los espacios de posición  $\vec{r}$  y de momento  $\vec{p}$ , respectivamente.

En estado de equilibrio térmico la probabilidad de ocurrencia de un estado se determina por medio de la estadística de Fermi-Dirac para la cual la función de distribución del sistema homogéneo depende únicamente de la energía  $E$ .

La expresión 1.2 de la ecuación de Boltzmann puede simplificarse para situaciones en que el término de interacciones  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}|_{\text{int}}$  sea proporcional a la diferencia entre la función de distribución  $\Theta$  en presencia de efectos externos  $\vec{V}$  y la función de distribución en equilibrio térmico. Esta condición es equivalente a asumir que una vez cesen los efectos externos, el sistema retorna al equilibrio, debido a las interacciones, con velocidad determinada (proporcional específicamente) por la desviación inicial respecto de la condición de equilibrio. Como se mencionó, a partir de estas consideraciones puede calcularse cantidades como tiempo de relajación (inclusive pesado por energía de sistema), conductividad térmica/eléctrica y difusividad, entre otros.

#### 1.3.1. Densidad de fluencia energética

Como ejemplo de la aplicación del formalismo para el estudio de observables, se considera el caso de la energía  $E$ , que es típicamente la cantidad más importante a fines dosimétricos ya que determina la dosis absorbida.

Sea  $\bar{E}$  el valor de expectación de la energía  $E$ , sin considerar la componente de energía en reposo, portada por todos los quanta que constituyen el haz  $N_q$ . La fluencia energética  $\Psi$  se define por:

$$\Psi \equiv \frac{d\bar{E}}{dA} \quad (1.11)$$

Entonces, para un haz monocromático se tiene  $\bar{E} = E_0 N_q$ , como se espera. Y, por tanto,  $\Psi = E_0 \Phi$ .

Para el estudio de la evolución de sistemas debido a perturbaciones externas, es conveniente considerar el tiempo  $t_0$  en ausencia de fluencia energética  $\Psi(t_0) = 0$  y el tiempo  $t_{max}$  que se corresponde con el máximo de fluencia energética  $\Psi(t_{max}) = \Psi_{max}$ .

La tasa de fluencia energética  $\Upsilon$  puede calcularse para cualquier tiempo  $t$  en el intervalo  $(t_0, t_{max})$ , y se calcula a partir de:

$$\Upsilon = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\bar{E}}{dA} \right) \Rightarrow \Psi(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Upsilon(t') dt' \quad (1.12)$$

Por tanto, manteniendo constante la tasa de fluencia energética  $\Psi(t_0, t) = \Upsilon(t - t_0)$  resulta que la tasa de fluencia energética, también denominada densidad de flujo energético,  $\Upsilon$  es proporcional a la densidad de flujo  $\Phi$  si el haz es monocromático  $\Upsilon = E_0 \Phi$ .

De modo que para determinar observables, experimentalmente, por medio de mediciones a tiempo  $t$  en la posición  $\vec{r}$ , en términos de la energía  $E$  dirección de movimiento  $\Omega$  dado por los ángulos polar

<sup>1</sup>Aplicado a sistemas conservativos.

<sup>2</sup>Válido también para mecánica Hamiltoniana.

y azimutal  $(\theta, \phi)$ , resulta que la densidad de flujo diferencial es  $\Upsilon(E, \theta, \phi)$  y la densidad de flujo se obtiene de:

$$\Upsilon = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^E \Upsilon(E', \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' dE' \quad (1.13)$$

En unidades de inversa de área y tiempo,  $cm^{-2} s^{-1}$ , típicamente.

#### 1.4. Modelos de interacción de partículas con la materia a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann

Esta sección presenta, de modo extremadamente escueto, los resultados principales para los fenómenos de interacción debido al paso de partículas por un medio material.

Cada uno de los modelos se obtiene de la aplicación de la ecuación de transporte, sujeto a las consideraciones necesarias en cada caso<sup>3</sup>. En particular, para cada tipo de radiación y material con el que se interactúa, el problema consiste en describir las propiedades de la fuente de radiación (el término  $S$  en la expresión 1.10) e introducir los modelos físicos que determinan el operador *kernel*  $K(\vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$  a partir de las funciones de distribución de probabilidades asociadas a cada tipo de proceso de interacción posible. Para el caso de radiación primaria, el término  $S$  representa completamente la fuente, mientras que para la radiación secundaria, scattering en general, la producción misma de partículas debido a las interacciones de radiación primaria.

Como resultado de las interacciones de partículas cargadas de velocidad  $v = \beta c$  se producen pérdidas energéticas en cada colisión  $\Delta E$ , y correspondiente pérdida de energía por unidad de camino  $\frac{dE}{dy}$  recorrido, donde  $y$  es la dirección a lo largo del track.

Una vez se realizan los modelos de interacción, se determinan las funciones de distribución de probabilidades que dan cuenta de las características estadísticas de los procesos físicos, que quedan determinados por las secciones eficaces  $\sigma$ .

A partir de las expresiones 1.5 y 1.10 puede calcularse el número medio de colisiones con pérdida energética entre  $E_{loss}$  y  $E_{loss} + \Delta E_{loss}$  al recorrer la distancia  $\delta y$ :

$$\frac{dE}{dy} = \rho_e \delta y \frac{d\sigma}{dE} dE \quad (1.14)$$

donde  $\rho_e$  es la densidad electrónica.

La determinación del operador *kernel*  $K(\vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$  requiere del conocimiento de los mecanismos por los cuales se produce en cambio de energía y las deflexiones angulares.

##### 1.4.1. Pérdidas energéticas en interacciones de partículas cargadas

Cuando las interacciones ocurren con los electrones orbitales de los átomos blanco, se producen en general ionizaciones, excitación atómica o bien excitación colectiva. En medios absorbentes delgados las colisiones que se producen presentan varianzas grandes.

Para partículas cargadas pesadas (de carga  $Z_p$  y masa molar  $M_p$ ) interactuando con un material homogéneo constituido por átomos de número atómico  $Z_A$  y masa molar  $M_A$ , la pérdida de energía por colisiones pueden obtenerse a partir de la teoría de Bethe-Bloch, que permite determinar el *stopping power* a lo largo del track ( $\frac{dE}{dy}$ ):

<sup>3</sup>Las derivaciones específicas respecto de la ecuación de transporte no se presentan por encontrarse fuera del alcance de este texto.

$$\frac{dE}{dy} = 4r_e^2 \rho m_e c^2 \frac{Z_A}{M_A} \frac{Z_p^2}{\beta^2} \times \left[ \frac{1}{2} \ln (2m_e c^2 \beta^2 W_{max} \gamma^2) - \beta^2 - \ln I - \frac{C}{Z_A} - \frac{\delta}{2} \right] \quad (1.15)$$

donde  $r_e$  y  $m_e$  son el radio clásico y masa de electrón en reposo, respectivamente.

Los últimos tres términos entre corchetes representan los efectos de potencial medio de ionización  $I$ , coeficiente de apantallamiento nuclear  $C$  y efecto de densidad  $\delta$ .

#### 1.4.2. Efectos angulares por interacciones de partículas cargadas

Las partículas cargadas sufren deflexiones angulares al atravesar e interactuar con un medio material. Existen desviaciones pequeñas debidas a interacciones de tipo Coulombianas en el *scattering* con el campo nuclear<sup>4</sup>.

El efecto de dispersión angular por efecto Coulombiano es representado por la teoría de Molière, produciendo distribuciones de deflexiones prácticamente Gaussianas  $P(\theta)$ , de acuerdo con:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{1}{2\pi\theta^{*2}} e^{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^2\right]} d\Omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta^*} e^{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{plano}}{\theta^*}\right)^2\right]} d\theta_{plano} \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde  $\theta^*$  es la media de la distribución Gaussiana y  $\theta_{plano}$  representa la proyección planar del ángulo polar que forma el ángulo sólido  $d\Omega$  y se trabaja en la aproximación a bajo ángulo, de modo que  $\theta^2 \approx \theta_x^2 + \theta_y^2$ , para las proyecciones planares en los ejes  $x$  e  $y$ , siendo  $\theta_x^2$  y  $\theta_y^2$  independientes pero respetando la misma distribución.

#### 1.4.3. Determinación de distancias de interacción

La distancia atravesada dentro del medio material se denomina *radiation length*  $X$ , típicamente medida en  $g \cdot cm^{-2}$ .

A modo de ejemplo, para el caso particular de electrones de energías altas, la pérdida de energía dominante es por medio de radiación de *Bremsstrahlung* y producción de pares. En este caso, la *radiation length* para estos dos procesos se denomina  $X_0$  y se calcula a partir de la teoría de Tsai:

$$X_0 = \frac{B}{4\alpha r_e^2 N_A} \frac{1}{Z^2 [L_{rad} - f(Z)] + Z L'_{rad}} \quad (1.17)$$

Los parámetros  $L_{rad}$  y  $L'_{rad}$  son coeficientes que pueden determinarse para cada tipo de átomo. Por otro lado, la función parametrizada  $f(Z)$  se obtiene de:

$$f(Z) = (\alpha Z)^2 \left\{ [1 + (\alpha Z)^2]^{-1} + 0,202 - 0,0369(\alpha Z)^2 + 0,008(\alpha Z)^4 - 0,002(\alpha Z)^6 \right\} \quad (1.18)$$

Para el caso de moléculas, se utilizan modelos de composición efectiva, y la *radiation length*  $X_{0,mol}$  de compuestos formados por componentes con pesos relativos  $q_k$ , puede calcularse de modo aproximado utilizando:

<sup>4</sup>Para el caso particular de haces de hadrones, las interacciones fuertes contribuyen también a los efectos de dispersión múltiple (*multiple scattering*).

$$\frac{1}{X_{0,mol}} = \sum_k \frac{q_k}{X_k} \quad (1.19)$$

### 1.5. Aproximaciones para el transporte de fotones en medios materiales

En el caso particular que se estudiará en el presente curso, el interés está en los procesos físicos involucrados en la interacción de rayos  $X$  de radiodiagnóstico, con medios materiales de interés biológico.

Si se consideran las configuraciones típicas, y los procesos más probables en las geometrías usuales en radiodiagnóstico, resulta que la radiación primaria proviene de la fuente  $S$  que en este caso se trata del haz de rayos  $X$  utilizado.

Los procesos de interacción suceden dentro del paciente y el haz emergente, determinado por la ecuación de transporte de Boltzmann, formado tanto por radiación primaria (proveniente de la fuente  $S$ ) y radiación de *scattering* generada por interacciones dentro del paciente, llega en definitiva al sistema de detección para formar la imagen radiológica.

Según la energía del haz de la fuente  $S$ , y las propiedades de absorción/dispersión, así como de las dimensiones físicas del paciente, resultará que la mayor parte del flujo emergente se corresponderá con la componente primaria o de *scattering*.

Incorporando los modelos de interacción radiación-materia que corresponden a fotones con energías de kilovoltaje, típicas de radiodiagnóstico, tejidos biológicos y para dimensiones típicas de pacientes, resulta que en el flujo emergente la componente de radiación primaria es prácticamente todo el flujo, existiendo contribuciones del orden del 2 % por parte del *scattering*. Por tanto, la descripción del transporte de la componente primaria del flujo emergente proporciona una buena aproximación del flujo de radiación que alcanzará el detector para dar lugar a la formación de la imagen.

Para modelar el transporte de radiación primaria, utilizando la ecuación de transporte de Boltzmann en la expresión 1.10, se introducen algunas aproximaciones a fin de facilitar la resolución del problema aplicable a las condiciones propias del proceso radiológico típico.

La primera condición es considerar el problema en estado estacionario, ya que se admite el equilibrio del flujo incidente/interactuante/emergente. De este modo, se tiene que se anula el primer término de la expresión 1.10, ya que  $\frac{\partial}{\partial t} \Psi = 0$ .

Suponiendo que el transporte se realiza, principalmente, en una dirección, denominada  $z$ , el segundo término en la expresión 1.10 resulta  $\Omega \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{dz}$ .

El problema así planteado presenta simetría azimutal, por lo que resulta:  $\int \int_{4\pi} dE' d\Omega' = \int dE' 2\pi \int \sin \theta d\theta$ .

Si el haz emergente está compuesto, casi exclusivamente por radiación primaria, ésta debe haber atravesado el material (paciente) prácticamente sin colisiones, es decir, que la integral aplicada al operador del *kernel*  $\int dE' 2\pi \int \sin \theta d\theta K(\vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \rightarrow 0$  (operador nulidad).

Por lo tanto, la ecuación de transporte de Boltzmann se reduce a:

$$\frac{d}{dz} \Psi^* - S = 0 \quad (1.20)$$

Para  $\Psi^*$  a lo largo del eje  $z$ .

Además, la fuente de radiación  $S$  es el flujo emitido por una fuente de modo tal que emergen rayos quasi paralelos con distribución quasi uniforme del frente onda, considerado plano y homogéneo. Es decir,  $S = \Psi_{source}(z) = \Psi^*$ .

A partir de la expresión 20 es inmediato que  $\Psi^*(z) = \Psi(z=0)e^{-cz}$ , conocida como ecuación de Lambert-Beer y describe la conocida relación de atenuación exponencial por parte de la radiación



al atravesar un medio material. El análogo de este proceso a nivel microscópico es la penetración cuántica de la barrera de potencial, cuya solución coincide, como es de esperar.

De este modo, se obtiene a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann una expresión significativamente útil para describir, de modo aproximado, el comportamiento de los procesos de interacción en el ámbito de radiología. Bajo estas aproximaciones, se asume que las contribuciones de *scattering* son despreciables, que el haz de radiación proviene de una fuente que emite luz en un frente de onda plano paralelo uniforme y en fase, así como que el medio irradiado es homogéneo e isotrópico.

En definitiva, la relación encontrada, gracias a las relaciones unívocas descritas al inicio del capítulo, permite cuantificar flujo, fluencia (si se conocen las características energéticas del haz) y demás cantidades vinculadas. Por ejemplo, la intensidad del haz transmitido  $I$  satisface:

$$I(z) = I(z=0)e^{-\int dE dz \mu} = I(0)e^{-\int dE \mu(E) \Delta z} = I(0)e^{-\mu(E_0) \Delta z} \quad (1.21)$$

donde la última igualdad es válida para haces monocromáticos y  $\mu$  se denomina coeficiente de absorción lineal.

## CAPÍTULO 2

---

# FUNDAMENTOS BÁSICOS DEL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

---

Una vez presentadas las bases físicas que dan lugar a la formación de las imágenes radiológicas, en el presente Capítulo se introducirán los primeros conceptos básicos y la formulación matemática necesaria para un acercamiento al procesamiento de imágenes digitales. Así, se introducirá al lector en las primeras nociones para lograr comprender la representación y las operaciones elementales del procesamiento digital de imágenes.

### 2.1. Introducción al procesamiento de imágenes

El análisis y procesamiento de imágenes se realiza a través de computadoras, debido a la complejidad y el número de cálculos necesarios para realizarlo. Es por esto que, si bien la formulación matemática necesaria para su realización data de varios siglos atrás, la posibilidad real de utilizarla de forma cotidiana en la práctica clínica ha sido posible recién en las últimas décadas, gracias al avance en las tecnologías del hardware.

La proliferación de nuevos equipamientos con capacidad para realizar millones de operaciones por segundo y su extensión a la vida cotidiana y a todo tipo de usuario, ha hecho posible que el análisis y procesamiento de imágenes digitales se constituya en un gran campo de estudio. En la actualidad, esta tecnología se encuentra incorporada incluso en todo tipo de equipamiento doméstico, como cámaras digitales, scanners y teléfonos celulares, entre otros.

En términos históricos, la utilización de imágenes radiográficas para diagnóstico clínico data prácticamente desde el descubrimiento de los rayos X en 1895 (Röntgen). Incluso, las imágenes funcionales a partir de la emisión de fotones (rayos  $\gamma$ ) por parte de radionucleidos ya cuenta

con más de 90 años de antigüedad (Heavesy & Seaborg, 1924). Sin embargo, las imágenes eran adquiridas sobre films radiográficos o directamente *in vivo*, por lo que su correcto procesamiento no ha explotado su real potencialidad sino hasta la incorporación de la tecnología que permitió digitalizarlas.

El motivo principal de esta “aparición tardía” del procesamiento de imágenes ha sido entonces, debido a los requerimientos de hardware tanto para el procesamiento de las mismas como para la representación de estas en sistemas gráficos de alta performance. Paralelamente a este desarrollo, la formulación de algoritmos para el procesamiento ha seguido los avances tecnológicos logrando un alto grado de sofisticación y manipulación de imágenes en tiempo casi real.

La variedad actual de técnicas, algoritmos y desarrollos de software y hardware utilizados en el procesamiento de imágenes digitales escapa al alcance de cualquier curso. En ellos se aprovechan técnicas desarrolladas inicialmente sobre conceptos fundacionales para el análisis de imágenes, y se incorporan conceptos y nociones de los más variados, propios de la física y la matemática, como el caso de la entropía o la métrica.

En el presente capítulo se introducirán las primeras nociones y conceptos para abordar el estudio del procesamiento de imágenes digitales, entre los que se cuentan las formatos de lectura y representación de imágenes, las operaciones de modificación, las transformaciones sobre tonalidades y colores, y la generación de efectos sobre regiones de una imagen.

El interés del siguiente estudio puede condensarse en dos objetivos principales: a) lograr una mejora considerable de la calidad de la imagen para la interpretación de un especialista, y/o b) lograr la obtención de información específica para su procesamiento por medio de sistemas de cálculo y análisis.

Serán de interés de este curso, las imágenes producidas por interacción de la radiación ionizante con la materia para uso médico, es decir aquellas adquiridas por detectores de rayos X o  $\gamma^1$  y que hayan atravesado -o partido de- tejido biológico de un paciente, formando una imagen bidimensional (2D) o tridimensional (3D).

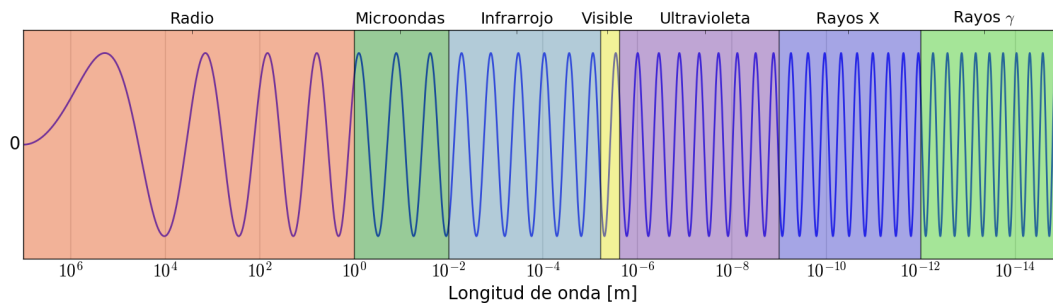
## 2.2. Formato de imagen y representación digital

En la actualidad, las imágenes constituyen un lenguaje en sí mismas. Dependiendo de diferentes factores culturales, las imágenes son utilizadas para transmitir mensajes, símbolos y distintos tipos de información. Por esto, es necesario contar con un soporte para la representación digital de las imágenes que permita luego modificar el mismo a fin de o bien modificar el contenido visual y simbólico u obtener información necesaria.

### 2.2.1. Bandas en imágenes digitales

Para lograr adquirir una imagen, de forma remota, debe existir algún tipo de interacción entre el objeto que se desea observar y el detector. En las imágenes digitales, los distintos tipos de detector dependen del tipo de radiación electromagnética que son capaces de detectar. Así como la información que se puede obtener de un objeto depende también de la interacción de esta radiación con el objeto. De esta particularidad proviene el concepto de “bandas”, donde se divide el espectro

<sup>1</sup>Se entiende como rayos X a aquellos producidos en interacciones atómicas, y rayos  $\gamma$  a aquellos producidos por interacciones internucleares. No existe *a priori* diferencia energética entre ellos y ambos son constituidos por fotones, la diferencia se realiza a partir de su procedencia. En adelante se utilizará indistintamente las letras X o  $\gamma$  para referirse a fotones.



**Figura 2.1** Esquema cualitativo del espectro electromagnético

electromagnético en función de los tipos de interacción de la radiación con la materia (ver Fig. 2.1), lo que define desde los objetos a analizar hasta los detectores y materiales que pueden utilizarse.

Todos los objetos absorben, reflejan o emiten cuantos de energía dependiendo de su longitud de onda, intensidad y tipo de radiación. Este tipo de radiación se define a partir de sus propiedades físicas dentro del espectro electromagnético. El ojo humano, por su parte, solo es capaz de detectar energía electromagnética en el espectro de luz visible, mientras que para los rayos X, la radiación ultravioleta, infrarroja o de microondas, es necesaria la construcción de detectores que puedan recabar esta información, ya sea de forma digital o analógica, para poder ser cuantificada y analizada.

### 2.2.2. Representación digital: mapa de bits (Bitmaps)

Un Bitmap es un modo elemental para representar imágenes digitales como información en el *hardware*, específicamente la memoria, de un computador. Consiste, básicamente, en formar arreglos de elementos (vectores, matrices, tensores) ordenados de modos específicos. En general, para el caso típico de imágenes 2D, se realiza un ordenamiento por filas de elementos de matriz (*pixels*) asignando a cada uno un valor que determina “el color” en esa posición de la imagen.

En el caso de imágenes en tonalidades de grises, el valor del elemento de matriz es un escalar; mientras que para el caso de imágenes a color el valor de cada elemento de matriz es un vector de tres coordenadas, cada una de las cuales especifica “el grado de influencia” de los colores rojo (Red “R”), verde (Green “G”) y azul (Blue “B”), de modo que se denomina representación RGB). Existen otros modos de representación a color, como por ejemplo CMYK (cián, magenta, amarillo y negro).

Típicamente se emplean escalas (que determinan “rangos dinámicos”) en  $2^N$  bits, y se denomina  $N$ — bits. Es decir, para el caso más común de 8-bits, la escala es  $[0, 255]$ , ya que por costumbre se define el rango como  $[0, 2^N - 1]$ .

El uso típico de 8-bits está basado, principalmente, en dos motivos. En primer lugar, estudios biométricos muestran que el ojo humano no es suficientemente sensible para diferenciar más de 256 niveles de intensidad para un dado color. Además, el rango de valores para los elementos de matriz determinan las necesidades en cuanto a la capacidad de almacenamiento en el computador.

Entonces, para imágenes en tonalidades de grises, conocidas como “de una banda” el rango para los valores de los elementos de matriz (escalares) es  $[0, 255]$ , mientras que para imágenes a color, los valores de elementos de matriz (vectores de 3 coordenadas) asumen valores en  $([0, 255], [0, 255], [0, 255])$ . Si embargo, también es frecuente encontrar representaciones normalizadas para imágenes a color, es decir, elementos de matriz en  $([0, 1], [0, 1], [0, 1])$  para determinar los colores RGB.

Todos los colores en el rango visible pueden representarse como combinaciones RGB, variando desde el negro  $(0, 0, 0)$  al blanco  $(255, 255, 255)$ . Por lo tanto, una imagen RGB es representada por un arreglo bidimensional de *pixels*, cada uno codificado en 3 bytes pudiendo asumir  $256^3$  diferentes valores de combinaciones vectoriales, es decir 16.8 millones de diferentes colores, aproximadamente.

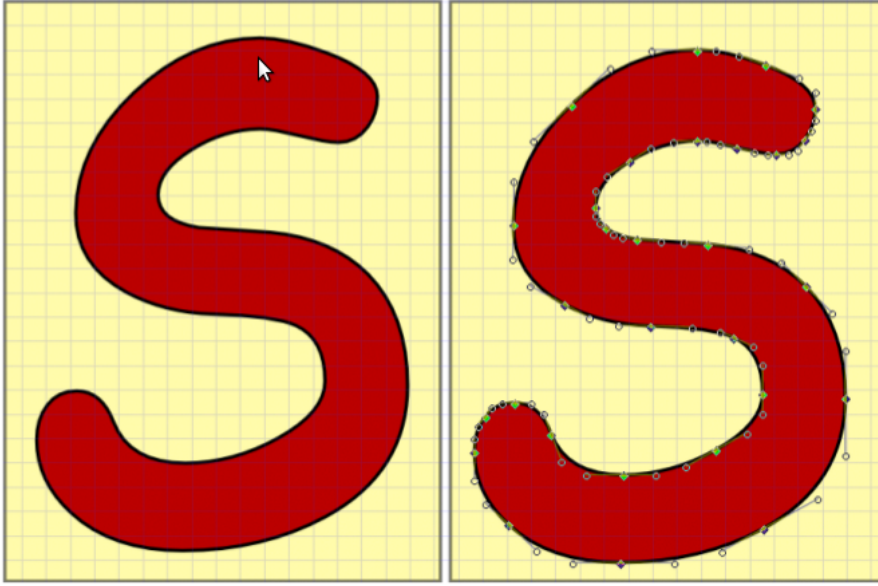
### 2.2.3. Representación digital: imágenes vectoriales

Las imágenes vectoriales están constituidas por contornos y rellenos definidos matemáticamente, vectorialmente, por medio de ecuaciones que describen perfectamente cada ilustración. De este modo, es posible implementar *scaling* sin pérdida de calidad. El proceso de *scaling* es típico en la formación, producción o reproducción en dispositivos. Por ello, la importancia de mantener la invariabilidad. Esta característica resulta de particular relevancia en casos que las ilustraciones contengan marcadas zonas con contornos curvados, ya que el pixelado implicaría una pérdida de resolución, como indica la figura .

### 2.2.4. Modificación de colores en imágenes

Es posible cuantificar la diferencia entre dos colores (en representación digital, valores del trio vectorial RGB) calculando la distancia, según algún tipo de métrica, Euclídea por ejemplo, entre los vectores que los representan.

Se el color  $C_1$  representado por el vector  $(R_1, G_1, B_1)$  y el color  $C_2$  representado por  $(R_2, G_2, B_2)$ . Entonces, en el espacio vectorial, la distancia  $D(C_1, C_2)$  entre éstos está dada por:



**Figura 2.2** Imagen en representación vectorial (izquierda) y en pixelado bitmap (derecha).

$$D(C_1, C_2) = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (G_1 - G_2)^2 + (B_1 - B_2)^2} \quad (2.1)$$

Para el caso particular de imágenes de una banda (tonalidades de grises) puede aplicar la misma metodología descrita para imágenes RGB con la simplificación asociada al hecho de que en el espacio de colores, los vectores en la dirección del vector  $(1, 1, 1)$  representan las diferentes tonalidades de gris.

Por tanto, existe la equivalencia de que para cualquier *pixel* de tipo RGB  $(R, G, B)$  si se lo proyecta sobre  $(1, 1, 1)$  se obtiene la contribución de cada tonalidad de gris. Entonces, se tiene:

$$Proy \equiv (R, G, B) \cdot (1, 1, 1) = R + G + B = |\vec{V}| |\hat{n}| \cos(\phi) \quad (2.2)$$

donde *Proy* es la proyección,  $\vec{V}$  es el vector que forma el punto  $(R, G, B)$  en el espacio de coordenadas del trío (representación vectorial),  $\hat{n}$  es el versor de proyección  $(1, 1, 1)$  y  $\phi$  es el ángulo que forma  $\vec{V}$  con  $\hat{n}$ .

De aquí puede verse que  $Proy = \frac{R+G+B}{\sqrt{3}}$  y debe atenderse de que este valor no exceda 255, de modo que es usual renormalizar para obtener  $Proy = \frac{R+G+B}{3}$

#### Ejemplo de modificación de colores: Por detección de bordes

A modo de ilustración de los conceptos generales expuestos sobre representaciones vectoriales-bitmap, se propone un caso de aplicación muy sencillo. Si el objetivo en la detección de bordes (orillas) de las formas en una imagen para obtener el bitmap resultante que resalte los bordes en blanco-negro,

puede procederse del siguiente modo: Desplazarse dentro de la imagen *pixel* a *pixel* comparando el color de cada uno con su vecino de la derecha y su vecino de abajo. Luego, se efectúa el siguiente control (criterio): si al comparar resulta en una diferencia muy grande (“muy grande” es un parámetro<sup>2</sup> o conjunto de parámetros pre-definidos por el usuario, o bien automatizados en casos más elaborados) el *pixel* en consideración forma parte del borde y se le asigna el color blanco, de otro modo se asigna el color negro.

### 2.2.5. Histograma de una imagen

Dada la representación digital de una imagen por medio del arreglo de  $N$  filas por  $M$  columnas se determina una matriz  $M \times N$ , en la cual la representación digital de bitmap estará dada por la función distribución  $f(m, n)$ , para  $n \in [0, N - 1]$  y  $m \in [0, M - 1]$ , típicamente  $N$  y  $M$  son potencias de 2, como ya se enunció.

El histograma de una imagen  $h(i)$ , comúnmente denominado “*image enhancement*” o “*image characterization*” es un vector que da cuenta de la cantidad de *pixels* dentro de la imagen con un cierto valor de elemento. Es decir, para una imagen de  $\alpha$ -bits, se tiene:

$$h(i) \equiv \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(f(n, m) - i) \quad \forall i \in [0, 2^\alpha - 1] \quad (2.3)$$

Una de las técnicas genéricas, que luego se diversifica a una cantidad muy variada de metodologías específicas de procesamiento, es el método de convolución. Sea  $w(k, l)$  un arreglo  $2 \times K + 1, 2 \times L + 1$ , centrado en el “origen”  $(0, 0)$  que coincide con el *pixel* central de la imagen. Puede considerarse a  $w(k, l)$  como un *kernel* de convolución de modo que aplicado a la imagen  $f(n, m)$  resulte:

$$g(m, n) \equiv w(k, l) * f(m, n) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L w(k, l) \cdot f(m - k, n - l) \quad (2.4)$$

A partir de esta definición, pueden introducirse una gran cantidad de métodos específicos, entre los que se destacan las transformadas, como Fourier, Laplace, Radon, etc.

### 2.2.6. Resolución de una imagen

A *priori*, este concepto tiene diferentes acepciones según el contexto en el que se utilice y se podría definir, de modo genérico, como la capacidad para representar o percibir los detalles de una imagen. Se trata de un concepto presente en todo el proceso digital, desde la captura o generación hasta la representación, y afecta (condiciona) el procesamiento posterior.

Una definición útil es: la resolución de una imagen es la cantidad de *pixels* que la describen. Y una medida típica es en términos de “*pixels* por pulgada” (ppi). Por tanto, la calidad de la representación así como el tamaño de la imagen dependen de la resolución, que determina a su vez los requerimientos de memoria para el archivo gráfico a generar.

### 2.2.7. Resolución, tamaño de imagen y tamaño de archivo

Los tres conceptos están estrechamente relacionados y dependen mutuamente, aunque se refieren a características diferenciadas y debe evitarse la confusión.

<sup>2</sup>Este parámetro es denominado “umbral” y su valor condiciona la *performance* de la técnica.

El tamaño de una imagen son sus dimensiones reales en términos de anchura y altura una vez impresa, mientras que el tamaño del archivo se refiere a la cantidad de memoria física necesaria para almacenar la información de la imagen digitalizada en cualquier soporte informático de almacenamiento.

Ciertamente, la resolución de la imagen condiciona fuertemente estos dos conceptos, ya que la cantidad de *pixels* de la imagen digitalizada es fijo y por tanto al aumentar el tamaño de la imagen se reduce la resolución y viceversa.

A modo de ejemplo: duplicando la resolución de una imagen digitalizada, de 50 ppi a 100 ppi, el tamaño de la imagen se reduce a la cuarta parte del original mientras que dividir la resolución por 2. Es decir, se pasa de 300 ppi a 150 ppi obteniendo una imagen con el doble de las dimensiones originales que representen cuatro veces su superficie.

La reducción de la resolución de la imagen, manteniendo su tamaño, provoca eliminación de *pixels*. Entonces, se obtiene una representación (descripción) menos precisa de la imagen, así como transiciones de color más bruscas. El tamaño del archivo que genera una imagen digitalizada es proporcional, como se espera, a la resolución, por lo tanto, variarla implica modificar en el mismo sentido el tamaño del archivo.

### 2.2.8. Contraste en una imagen

Conceptualmente, aumentar o disminuir el contraste en una imagen consiste, básica y visualmente, en aumentar o disminuir la pendiente de la línea recta con pendiente a 45 grados que representa los grises (con la precaución de no exceder los límites 0-255) entre *input* y *output*, como indica la figura 2.3.

La transformación correspondiente al cambio de contraste es:

$$V_O(m, n) = (V_I(m, n) - 2^{Y-1}) \tan \phi + 2^{Y-1} \quad (2.5)$$

donde  $Y$  es la escala en bits,  $V_I$  y  $V_O$  son los valores de *input* y *output*, respectivamente valuados en el pixel  $(m, n)$ ; y el ángulo  $\phi$  corresponde a las propiedades de la transformación lineal de contrastes, específicamente la pendiente (figura 2.3).

## 2.3. Vínculo físico del origen de imágenes

Las imágenes generadas por radiación electromagnética pueden clasificarse en modo genérico según el ordenamiento de mayor a menor frecuencia.

**Rayos  $\gamma$**  medicina nuclear, observaciones de astronomía.

**Rayos X** diagnóstico médico e industria (control de calidad).

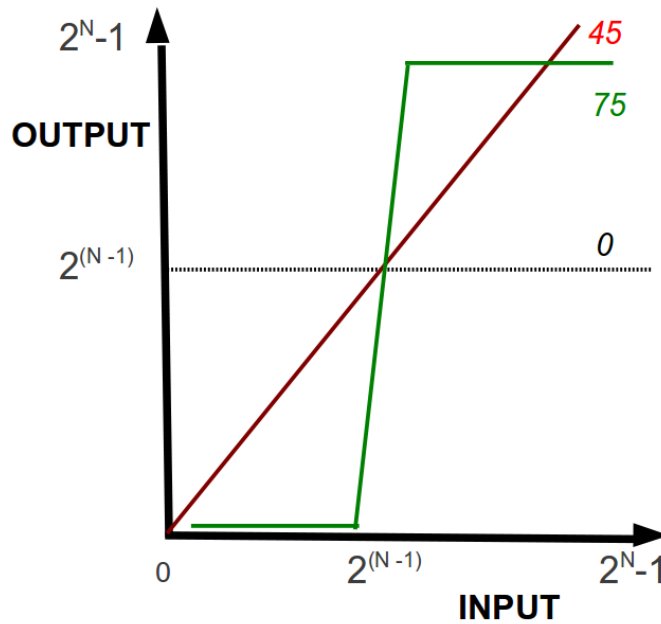
**Banda ultravioleta** Inspección industrial y microscopía biológica.

**Banda visible e infrarrojo** Aplicaciones varias, fotografía.

**Microondas** radar.

**Ondas de radio** medicina (MRI) y algunas aplicaciones en astronomía.





**Figura 2.3** Representación del cambio de contraste entre *input* y *output*.

## 2.4. Modificación de una imagen

Una imagen *input* puede ser modificada por medio de diferentes maneras, según la/s propiedad/es que se modifica/n.

En particular, se consideran a continuación algunas de las modificaciones más frecuentes.

### 2.4.1. Modificación de colores o tonalidades: Corrección $\gamma$

Existe una amplia variedad de técnicas y criterios para modificar los colores de una imagen. Una de las metodologías más empleada, y sencilla, es la corrección  $\gamma$ , definida a partir de:

$$V_O(m, n) = (2^N - 1) \left( \frac{V_I(m, n)}{2^N - 1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.6)$$

donde el índice  $\gamma$  asume valores  $\in \mathbb{R}$ .

Por lo tanto, resulta:

- Para  $\gamma = 1$  no hay ninguna corrección.
- Para valores de  $\gamma > 1$  hay una gran corrección en el contraste para valores pequeños del color de *input* mientras que una pequeña corrección en el contraste para valores altos. El brillo aumenta más para valores intermedios del color de *input*.
- Para valores de  $\gamma < 1$  hay una pequeña corrección en el contraste para valores bajos del color de *input*, mientras que una gran corrección en el contraste para valores altos. El brillo disminuye más para valores intermedios del color de *input*.

### 2.4.2. Modificación de imagen: inversión (*flip*)

Básicamente, esta modificación consiste en una transformación que produce un “movimiento” de la columna  $m$ , fila  $n$  a la columna  $m$  y fila  $(n_{max} - n) + 1$ , para  $n_{max}$  como la dimensión en la dirección de  $n$ .

Es decir,

$$V_{flip}(m, n) = V_I(m, (n_{max} - n) + 1) \quad (2.7)$$

donde  $V_{flip}$  es la matriz de output que corresponde a la transformación de inversión.

### 2.4.3. Modificación de imagen: reflexión (*mirror*)

Básicamente, esta modificación consiste en una transformación que produce un “movimiento” de la fila  $n$ , columna  $m$  a la fila  $n$  y columna  $(m_{max} - m) + 1$ , para  $m_{max}$  como la dimensión en la dirección de  $m$ .

Es decir,

$$V_{mirror}(m, n) = V_I((m_{max} - m) + 1, n) \quad (2.8)$$

donde  $V_{mirror}$  es la matriz de output que corresponde a la transformación de reflexión.

### 2.4.4. Modificación de imagen: interpolación

A partir de de un muestreo *input* pueden estimarse los valores de la intensidad en puntos diferentes a aquellos puntos donde si se conoce el valor Entre otras técnicas, se destacan los métodos de *re-sampling*.

De este modo, se emplean diferentes criterios para determinar los valores  $V_O(k, l)$  para *pixels*  $(k, l)$  donde el *input*  $V_I$  no es conocido:

- Interpolación al vecino más cercano.
- Interpolación bilineal.
- Interpolación bicúbica.

La técnica de interpolación al vecino más cercano (*Nearest neighbor interpolation*) está basada en superponer el arreglo 2D *output* al arreglo 2D *input* calculando el valor para los *pixels*  $(k, l)$  según los valores conocidos  $V_I(i, j)$ , utilizando un promedio (que puede cuantificarse de diferentes maneras) de los vecinos más cercanos equidistantes. Sin embargo, puede verse que esta técnica presenta algunos efectos indeseables.

La técnica de interpolación lineal considera los 4 *pixels* más cercanos a  $V(k, l)$  para la interpolación. Se realiza un promedio entre estos 4 valores para determinar el valor desconocido del *pixel*  $(k, l)$ . La imagen *output* resulta más “suave” que para el caso de la técnica *Nearest neighbor interpolation*. Pero, puede causar que la imagen se vea algo “difusa”.

Entonces, los valores de *pixels*  $(k, l)$ , para los cuales no se conoce  $V_I(k, l)$  se obtienen a partir de:

$$V_O(k, l) = (1 - \alpha)(1 - \beta)V_I(i, j) + \alpha(1 - \beta)V_I(i + 1, j) + (\alpha - 1)V_I(i, j + 1) + \alpha\beta V_I(i + 1, j + 1) \quad (2.9)$$

donde  $\alpha \equiv k - i$ ,  $\beta \equiv l - j$ ,  $i \equiv \text{floor}(k)$  y  $j \equiv \text{floor}(l)$ <sup>3</sup>.

Por su parte, la técnica de interpolación bicúbica Es el algoritmo de interpolación más utilizado. Considera los 16 *pixels* más cercanos a cada *pixel*  $(k, l)$  cuyo valor debe determinarse por interpolación. Se aproxima localmente al valor (el nivel de gris) en la imagen original mediante una superficie polinómica de tipo bicúbica. Resulta ser, de las técnicas aquí descritas, el óptimo al considerar el balance entre tiempo de cómputo y *performance*.

La implementación de este método puede llevarse a cabo por medio de procesar el bloque  $B(k, l)$ , centrado en el *pixel*  $(k, l)$ , cuyas dimensiones se corresponden con las dimensiones de la máscara (16 *pixels* en un arreglo  $5 \times 5$ ):

$$B(k, l) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 q_{i,j}^{(k,l)} (k - k')^i (l - l')^j \quad (2.10)$$

$$k', \in [k - 2, k + 2] \ \& \ l' \in [l - 2, l + 2]$$

donde los coeficientes  $q_{i,j}$  deben ser determinados. O bien,

$$V_O(k, l) = h(k) h(l) \quad (2.11)$$

donde la función de interpolación  $h$  se define, a trozos, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} h(p) &\equiv 1 - |p|^2 + |p|^3 \quad \forall |p| < 1 \\ h(p) &\equiv 4 - 8|p|^2 + 5|p|^3 - |p|^4 \quad \forall 1 \leq |p| < 2 \\ h(p) &\equiv 0 \quad \forall |p| \geq 2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

#### 2.4.5. Comparación cualitativa de performance de algoritmos de interpolación

- Interpolación de vecino más cercano: El error de posición resulta, a los sumo, medio *pixel*, que es perceptible en objetos con fronteras rectas en las que aparece un efecto de salto después de esta transformación.
- Interpolación Lineal: Genera una leve disminución de resolución debido al borronco (*blurring*) intrínseco al modo de cálculo del valor promedio, pero disminuye el efecto de salto que presenta el algoritmo de vecino más cercano.
- Interpolación Bicúbica: No presenta el problema del efecto de salto a la vez que genera un menor *blurring*.

### 2.5. Relaciones básicas entre pixels

La relación básica más inmediata entre *pixels* es la distancia  $D$  entre dos *pixels*  $(m, n)$  y  $(m', n')$ .

Los axiomas para definir una métrica o función de distancia entre *pixels*  $D$  requieren de los siguientes criterios:

<sup>3</sup> Aquí la función *floor* se define por medio de asignar al argumento el número entero más grande que sea menor que el argumento.

- $D(k, k', l, l') \geq 0$  con  $D(k, k', l, l') = 0 \Leftrightarrow k = k', l = l'$
- $D(k, k', l, l') = D(k', k, l', l)$
- $D(k, k', l, l') \leq D(k, k', s, s') + D(s, s', l, l')$

A partir de estas condiciones pueden definirse diferentes métricas. Entre ellas:

#### Distancia Euclídea

$$D(k, k', l, l') \equiv \sqrt{(k - k')^2 + (l - l')^2} \quad (2.13)$$

#### Distancia $D_4$

$$D_4(k, k', l, l') \equiv |k - k'| + |l - l'| \quad (2.14)$$

#### Distancia $D_8$

$$D_8(k, k', l, l') \equiv \max(|k - k'|, |l - l'|) \quad (2.15)$$

Las definiciones Euclídea,  $D_4$  y  $D_8$  para la distancia entre *pixels* no depende de adyacencias sino exclusivamente de las coordenadas espaciales  $(k, l)$ .

Puede verse, a partir de las definiciones de las métricas que la condición  $D(k, k', l, l') \leq R$  determina un círculo centrado en  $(k, l)$  para la métrica Euclídea, un rombo para la métrica  $D_4$  y un cuadrado para la métrica  $D_8$ .

## 2.6. Operadores sobre imágenes

Para operar sobre imágenes pueden utilizarse herramientas basadas en operaciones matriciales de álgebra lineal y operaciones “de array” orientadas *pixel a pixels*.  $\mathbf{H}$  es un operador arbitrario sobre una imagen cuya representación matricial es  $f(m, n)$  si satisface:

$$\mathbf{H}[f(m, n)] = g(m, n) \quad (2.16)$$

Además,  $\mathbf{H}$  es un operador lineal si:

$$\mathbf{H} \left[ \sum_j \alpha_j f_j(m, n) \right] = \sum_j \alpha_j \mathbf{H}[f_j(m, n)] \quad (2.17)$$

Una aplicación importante de las propiedades de linealidad de operadores sobre imágenes es la descripción de imágenes  $g(m, n)$  como contribución “original” ( $f(m, n)$ ) y ruido *random* ( $r(m, n)$ ):

$$g(m, n) = f(m, n) + r(m, n) \quad (2.18)$$

La imagen de ruido es de tipo *random* si los valores de *pixels* de  $r(m, n)$  son aleatorios no correlacionados y con esperanza 0.

Promediando  $N_{Tot}$  imágenes con ruido *random* se obtiene la imagen promedio  $\langle g \rangle$  dada por:

$$\langle g \rangle(m, n) = \frac{1}{N_{Tot}} \sum_{j=1}^{N_{Tot}} g_j(m, n) \quad (2.19)$$

La aplicación del teorema del límite central establece que la imagen promedio  $\langle g \rangle(m, n) \rightarrow f(m, n)$  (imagen “original”) para  $N_{Tot} \rightarrow \infty$ .

Otra aplicación útil de los operadores lineales es la substracción de una máscara<sup>4</sup>  $M(m, n)$  a la imagen original  $f(m, n)$ :

$$g(m, n) = f(m, n) - M(m, n) \quad (2.20)$$

### 2.6.1. Adición y diferencia de imágenes

Para ejemplificar las operaciones, se utilizan imágenes 8-bits.

Por tanto, los valores de la imagen resultado de la adición de dos imágenes varían en  $[0, 510]$ .

Mientras que los valores de la imagen resultado de la diferencia de dos imágenes varían en  $[-255, 255]$ .

La adecuación ( $f_A$ ) de los valores de la imagen resultado de adición/diferencia de dos imágenes se realiza del siguiente modo:

$$f_A(m, n) = \text{round} \left[ (2^N - 1) \frac{f(m, n) - \min[f(m, n)]}{\max[f(m, n) - \min f(m, n)]} \right] \quad (2.21)$$

Para imágenes de tipo  $N$ -bits.

## 2.7. Operaciones sobre pixels

La introducción de operaciones espaciales que se llevan a cabo sobre los valores de *pixels* de la imagen permiten:

- Operaciones de un *pixel*.
- Operaciones de vecindad.
- Transformaciones geométricas.

### Operaciones de un *pixel*

Se modifica el valor de un *pixel* de modo individual en la imagen original  $f(m, n)$ , dando como resultado  $g(m, n)$  dado por:

$$g(m, n) = \mathbf{T}(f(m, n)) \quad (2.22)$$

de manera que el valor de imagen es modificado por la transformación  $\mathbf{T}$ . Este concepto se aplica, por ejemplo, para determinar “el negativo”

<sup>4</sup>Un ejemplo típico son las imágenes médicas por contraste, como angiografías.

## Operaciones de vecindad

Sea  $C(M, N)$  un conjunto de *pixels* ( $M := [m_{min}, m_{max}]$  y  $N := [n_{min}, n_{max}]$ ) entorno (vecinos) al *pixel*  $(m, n)$ .

A partir de este tipo de operaciones de vecinos puede calcularse, por ejemplo, el valor medio en un entorno rectangular ( $M \times N$ ) de un *pixel* de interés<sup>5</sup>. Resulta:

$$g(m, n) = \frac{1}{M N} \sum_{(i, j) \in C(M, N)} f(i, j) \quad (2.23)$$

## Transformaciones geométricas.

Las transformaciones geométricas  $\mathbf{T}$  de una imagen  $f(m, n)$  puede obtenerse a partir de una transformación de índole geométrico de coordenadas espaciales: al valor del *pixel*  $(m, n)$  se asigna el valor de un *pixel*  $(i, j)$ .

Debido a la naturaleza discreta de la representación de imágenes, debe considerarse el proceso de interpolación para obtener los valores de *pixels* como resultado de aplicar la transformación  $\mathbf{T}$ .

Una de las categorías principales de los operadores de transformación son las transformaciones denominadas afines, que incluyen translaciones, rotaciones, escalados, reflexiones y proyecciones, entre otros.

Algunos ejemplos de operadores de transformación son:

■ Rotación:  $\mathbf{T}_{\text{Rot}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

■ Escaleo:  $\mathbf{T}_{\text{Esc}} = \begin{bmatrix} e_i & 0 \\ 0 & e_j \end{bmatrix}$

■ Traslación:  $\mathbf{T}_{\text{Tra}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_i & t_j & 0 \end{bmatrix}$

## 2.8. Transformadas dicretas: La transformada de Fourier

Desde un punto de vista general, las transformadas constituyen operaciones espaciales sobre una imagen original  $f(m, n)$ , representada en el dominio espacial (que se refiere a las coordenadas  $(m, n)$ ) y una imagen resultado  $F(m, n)$  que procesan los valores de *pixels* en el plano geométrico.

Existen diferentes modos de representar de la imagen, en términos del espacio de representación:

1. Dominio Espacial: la imagen  $f(m, n)$  es representada por una matriz  $M \times N$  de *pixels*  $(m, n)$  discretos.
2. Dominio Transformado o de frecuencias: la imagen  $F(m^*, n^*)$  es representada por una matriz  $M \times N$  de variables transformadas  $(m^*, n^*)$ .

Como se introdujo de modo cualitativo (2.5 y 2.6), una transformación lineal de una imagen original  $f(m, n)$  significa:

<sup>5</sup>Este método resulta de utilidad para suprimir detalles o realzar regiones.

$$F(m^*, n^*) = \sum_m \sum_n f(m, n) k(m^* - m, n^* - n) \quad (2.24)$$

donde  $k$  es el *kernel* de la transformación.

La transformada directa (*forward*) de  $f(m, n)$  deviene en  $F(m^*, n^*)$ , y la transformada inversa (*inverse*) de  $F(m^*, n^*)$  deviene en  $f(m, n)$ . Por tanto, el equivalente a la expresión (2.24) es:

$$f(m, n) = \sum_{m^*} \sum_{n^*} F(m^*, n^*) k(m^* - m, n^* - n) \quad (2.25)$$

donde  $k(m^* - m, n^* - n)$  es el *kernel* de la transformación inversa.

De este modo, se habilita la posibilidad de operar en el espacio de la transformada. Es decir:

$$f(m, n) \xrightarrow{\mathbf{T}} F(m^*, n^*) \xrightarrow{\mathbf{O}} G(m^*, n^*) \xrightarrow{\mathbf{T}^{-1}} g(m, n) \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{T}^{-1}$  representan la transformada directa e inversa, respectivamente.  $\mathbf{O}$  es un operador arbitrario.

Resulta de particular importancia la propiedad de los *kernels* de ser separable en variables. Es decir:

$$k(m^* - m, n^* - n) = k_{(m,n)}(m, n) k_{(m^*,n^*)}(m^*, n^*) \quad (2.27)$$

La transformada discreta de Fourier bidimensional 2D se define a partir de los *kernels* de transformación:

$$\begin{aligned} k_{TF}(m^* - m, n^* - n) &= e^{-2\pi i \left( \frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \\ k_{(TF)^{-1}}(m^* - m, n^* - n) &= \frac{1}{MN} e^{2\pi i \left( \frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por tanto, la operación de transformadas discretas directa ( $\mathbf{TF}$ ) e inversa ( $(\mathbf{TF})^{-1}$ ) resultan:

$$\begin{aligned} F(m^*, n^*) &= \sum_m \sum_n f(m, n) e^{-2\pi i \left( \frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \\ f(m, n) &= \frac{1}{MN} \sum_{m^*} \sum_{n^*} F(m^*, n^*) e^{2\pi i \left( \frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

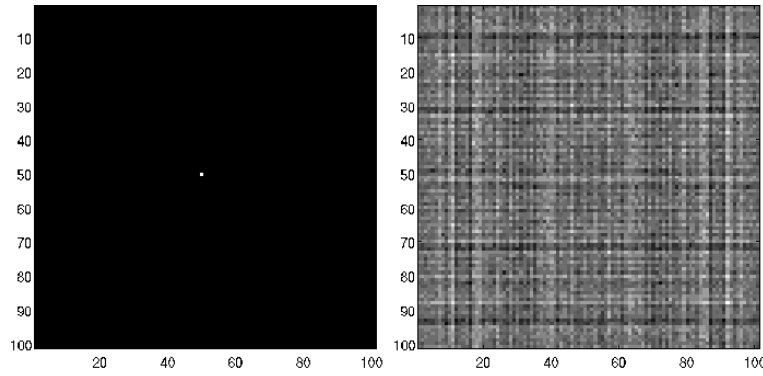
Cuyo análogo en espacios continuos es:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \mathbf{TF}[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (u x + v y)} dx dy \\ f(x, y) &= (\mathbf{TF})^{-1}[F(u, v)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i (u x + v y)} du dv \end{aligned} \quad (2.30)$$

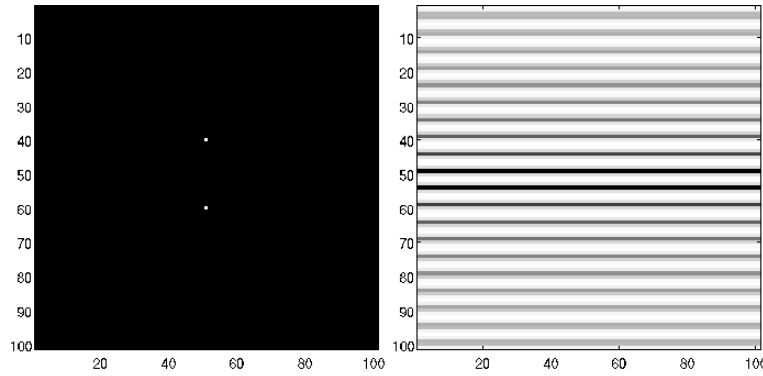
La expresión (??) para la transformada de Fourier puede interpretarse, dejando de lado momentaneamente problemas de existencia y unicidad, como una suma de exponenciales complejas con pesos para los términos, donde las variables  $m^*$  y  $n^*$  representan las frecuencias en el dominio de la transformada.

El valor de la transformada en  $(m^*, n^*)$  ( $F(m^*, n^*)$ ) contribuye a través de  $F(m^*, n^*) e^{2\pi i(u x + v y)}$  y puede verse, ya que  $f(m, n)$  es una función real, que  $F(m^*, n^*) = F^*(m^*, n^*)$ , donde  $*$  indica el complejo conjugado.

A modo de ejemplo, la figuras 2.4, 2.5 y 2.6 presentan resultados de aplicar la transformada de Fourier de la imagen orifinal  $f(m, n)$  para diferentes casos.

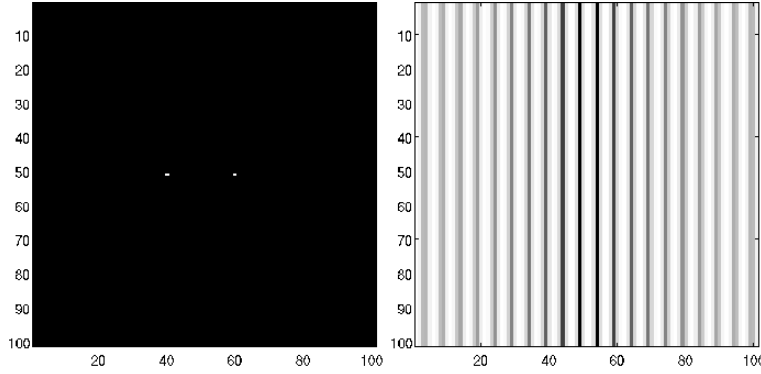


**Figura 2.4** Ejemplo de transformada de Fourier:  $f(m, n) = 0 \quad \forall (m, n) \neq (51, 51) \quad m, n \in [1, 101]$  obtenido con plataforma MatLab<sup>®</sup> official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.



**Figura 2.5** Ejemplo de transformada de Fourier:  $f(m, n) = 0 \quad \forall (m, n) \neq (40, 51) \vee \neq (60, 51) \quad m, n \in [1, 101]$  obtenido con plataforma MatLab<sup>®</sup> official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.





**Figura 2.6** Ejemplo de transformada de Fourier:  $f(m, n) = 0 \quad \forall (m, n) \neq (51, 40) \vee \neq (51, 60) \quad m, n \in [1, 101]$  obtenido con plataforma MatLab<sup>®</sup> official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

## 2.9. Filtros

A partir de las definiciones introducidas por las expresiones (??) y (2.30) resulta posible realizar procesos de filtrado tanto en el dominio espacial de la imagen original  $f(m, n)$  como en el dominio de las frecuencias de la transformada  $F(m^*, n^*)$ .

Una característica significativa, que representa de hecho una de las principales ventajas de los espacios de transformadas, es que la operación de filtrado se realiza por medio de una multiplicación de transformadas; mientras que la operación en el espacio de coordenadas significa una convolución denotada por el símbolo  $\otimes$ . En virtud del teorema de convolución, se tiene:

$$f(m, n) \otimes g(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(m, n) g(m - k, n - l) dk dl \quad (2.31)$$

Aplicando la definición de transformada de Fourier, se obtiene:

$$F_{f,g}(m^*, n^*) \equiv \mathbf{TF}[f(m, n) \otimes g(m, n)] = \mathbf{TF}[f(m, n)] \mathbf{TF}[g(m, n)] = F(m^*, n^*) G(m^*, n^*) \quad (2.32)$$

Para una dada función original  $f(m, n)$  y su correspondiente transformada de Fourier  $F(m^*, n^*)$ , en referencia a la expresión (2.32) el operador  $G(m^*, n^*)$  se define como un *filtro espacial lineal* o *función de transferencia* de filtro.

Entonces, la imagen resultado del proceso de filtrado  $h(m, n)$  se obtiene aplicando la transformada inversa:

$$h(m, n) = \mathbf{TF}^{-1}[F_{f,g}(m^*, n^*)] \quad (2.33)$$

El filtro queda determinado por medio de la función de transferencia o bien por la *respuesta de impulso*  $j(m, n)$  definida a partir de:

$$j(m, n) = F_{f,g}(m, n) = \delta(m, n) \otimes j(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(m, n) j(k - m, l - n) dk dl \quad (2.34)$$

Resulta que  $j(m, n)$  es un filtrado intenso en términos de la función  $\delta$  de Dirac.

A fines de cómputo, la transformada discreta de Fourier puede obtenerse, en modo análogo a la expresión (2.29) operando:

$$\begin{aligned}
 F(m^*, n^*) &= \mathbf{TF}[f(m, n)] = \frac{1}{M N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \\
 &\quad \left[ \cos \left( 2\pi \left( \frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N} \right) \right) + i \operatorname{sen} \left( 2\pi \left( \frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N} \right) \right) \right] \\
 f(m, n) &= \mathbf{TF}^{-1}[F(m^*, n^*)] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m^*, n^*) \\
 &\quad \left[ \cos \left( -2\pi \left( \frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N} \right) \right) - i \operatorname{sen} \left( 2\pi \left( \frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Debido a la naturaleza discreta del espacio de muestreo intrínseco al procesamiento digital de imágenes, se determina la relación entre dominios espaciales y de frecuencias por medio de:

$$\Delta m^* = \frac{1}{M \Delta m} \tag{2.36}$$

$$\Delta n^* = \frac{1}{N \Delta n} \tag{2.37}$$

Cabe destacar que, por conveniencia de procesamiento, para el caso de imágenes “cuadradas” para las que  $N = M$ , se redefine la expresión para la transformada de Fourier, multiplicando la expresión (2.35) por  $N$ , es decir:

$$\begin{aligned}
 F(m^*, n^*) &= \mathbf{TF}[f(m, n)] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-2\pi i \left( \frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \\
 f(m, n) &= \mathbf{TF}^{-1}[F(m^*, n^*)] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m^*, n^*) e^{2\pi i \left( \frac{m^* m + n^* n}{N} \right)}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

La componente espectral compleja de  $F(m^*, n^*)$  determina módulo y fase, respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned}
 |F(m^*, n^*)| &= \sqrt{[\Re(F(m^*, n^*))]^2 + [\Im(F(m^*, n^*))]^2} \\
 \phi(m^*, n^*) &= \arctan \left[ \frac{\Im(F(m^*, n^*))}{\Re(F(m^*, n^*))} \right]
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

donde  $\Im$  y  $\Re$  representan las componentes imaginaria y real, respectivamente. Al filtrar una imagen original cuadrada  $f(m, n)$  de dimensiones  $N \times N$  mediante un filtro  $j(m, n)$  de dimensiones  $L \times L$  se obtendrá una imagen resultado  $g(m, n)$  de dimensiones  $N + L - 1 \times N + L - 1$ .

Las propiedades de la transformada de Fourier permiten identificar de modo sencillo los operadores más relevantes del procesamiento digital, como:

### Operador de Traslación

$$\begin{aligned} f(m, n) e^{2\pi i \left( \frac{m_0^* m + n_0^* n}{N} \right)} &\leftrightarrow F(m^* - m_0^*, n^* - n_0^*) \\ f(m - m_0, n - n_0) &\leftrightarrow F(m^*, n^*) e^{-2\pi i \left( \frac{m^* m_0 + n^* n_0}{N} \right)} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Es decir, una traslación al punto  $(m_0, n_0)$  se identifica con con el corrimiento del origen del plano del dominio de frecuencias al punto  $(m_0^*, n_0^*)$ .

### Operador de Rotación

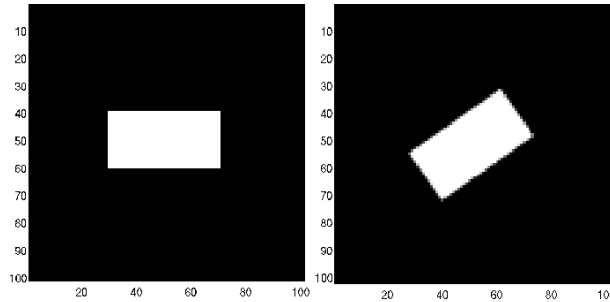
En coordenadas polares  $m = \rho \cos \theta$   $n = \rho \sin \theta$   $m^* = \omega \cos \phi$   $n^* = \omega \sin \phi$ , las imágenes original  $f(m, n)$  y transformada  $F(m^*, n^*)$  son expresadas como  $f(\rho, \theta)$  y  $F(\omega, \phi)$ .

Aplicando la definición de transformada de Fourier, resulta:

$$f(\rho, \theta + \theta_0) \leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0) \quad (2.41)$$

Es decir, la rotación de la imagen original  $f(\rho, \theta)$  (o  $f(m, n)$ ) por un ángulo  $\theta_0$  se vincula con una rotación del mismo ángulo en la imagen resultante  $F(\omega, \phi)$  (o  $F(m^*, n^*)$ ).

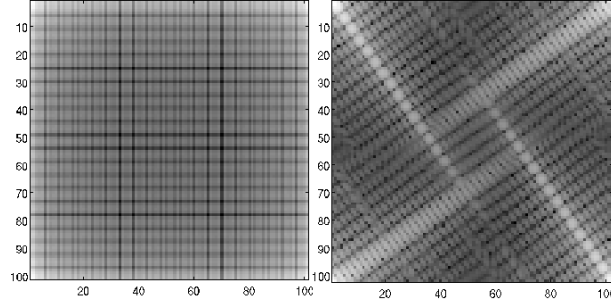
Las figuras 2.7 y 2.8 muestran ejemplos de aplicación de operadores de rotación, en dominio de coordenadas y de frecuencias, respectivamente.



**Figura 2.7** Rotación de  $35^\circ$  de una imagen original  $f(m, n)$  (o  $f(\rho, \theta)$ ) obtenido con plataforma MatLab<sup>®</sup> official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

### Operador de Escaleo

La definición de transformada de Fourier implica que  $\mathbf{TF}[f_A(m, n) + f_B(m, n)] = \mathbf{TF}[f_A(m, n)] + \mathbf{TF}[f_B(m, n)]$  pero  $\mathbf{TF}[f_A(m, n) \cdot f_B(m, n)] \neq \mathbf{TF}[f_A(m, n)] \cdot \mathbf{TF}[f_B(m, n)]$ .



**Figura 2.8** Rotación de  $35^\circ$  de una imagen en dominio de transformada  $F(m^*, n^*)$  (o  $F(\omega, \phi)$ ) obtenido con plataforma MatLab<sup>®</sup> official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

Sin embargo, para escalares  $\alpha$  y  $\beta$  se tiene:

$$\alpha f(m, n) \leftrightarrow \alpha F(m^*, n^*) \quad (2.42)$$

$$f(\alpha m, \beta n) = \frac{1}{|\alpha\beta|} F(\alpha m^*, \beta n^*) \quad (2.43)$$

### Cálculo de promedios

El valor medio  $\langle f \rangle$  se obtiene a partir de:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \quad (2.44)$$

En particular, tomando  $F(m^* = 0, n^* = 0)$  en la expresión (2.39 (59)) se obtiene  $F(0, 0) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)$ . Por lo tanto, el valor promedio puede calcularse directamente a partir de:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} F(m^* = 0, n^* = 0) \quad (2.45)$$

### Cálculo de operadores de derivadas: OPERADOR DE LAPLACE

La laplaciana  $\nabla^2$  de una imagen original  $f(m, n)$  está dada por:

$$\nabla^2 f(m, n) \equiv \frac{\partial^2}{\partial m^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} \quad (2.46)$$

Aplicando la definición de transformada de Fourier, se obtiene una expresión útil para el cálculo de la Laplaciana:

$$\text{TF}[\nabla^2 f(m, n)] = -(2\pi)^2 [(m^*)^2 + (n^*)^2] F(m^*, n^*) \quad (2.47)$$

### 2.9.1. Filtros de paso de banda

Las transiciones abruptas, como bordes y contornos, en una imagen original  $f(m, n)$  se corresponden con altas frecuencias en el dominio de la transformada.

### 2.9.2. Filtros de suavizado

Puede aprovecharse esta característica para implementar métodos de filtrado para suavizar operando en el dominio de frecuencias.

Es posible suprimir frecuencias por debajo o por encima de valores pre determinados de manera que se produzcan efectos de suavizado según requerimientos.

#### Filtros ideal de paso alto

Consiste en la utilización de la expresión (2.32) con la función de transferencia  $G_{PA}(m^*, n^*)$  definida por:

$$G_{PA}(m^*, n^*) = \begin{cases} 0 & D(m^*, n^*) \leq D_{max} \\ 1 & D(m^*, n^*) > D_{max} \end{cases} \quad (2.48)$$

Para un valor máximo de distancia  $D_{max}$  como umbral para la distancia (independientemente de la métrica),  $D(m^*, n^*)$  es la distancia al origen de frecuencias ( $m^* = 0, n^* = 0$ ).

En el caso de la métrica Euclídea  $D(m^*, n^*) = \sqrt{(m^*)^2 + (n^*)^2}$ , el filtro se representa por un círculo de radio  $D_{max}$  como muestra la figura 2.9.

#### Filtros ideal de paso bajo

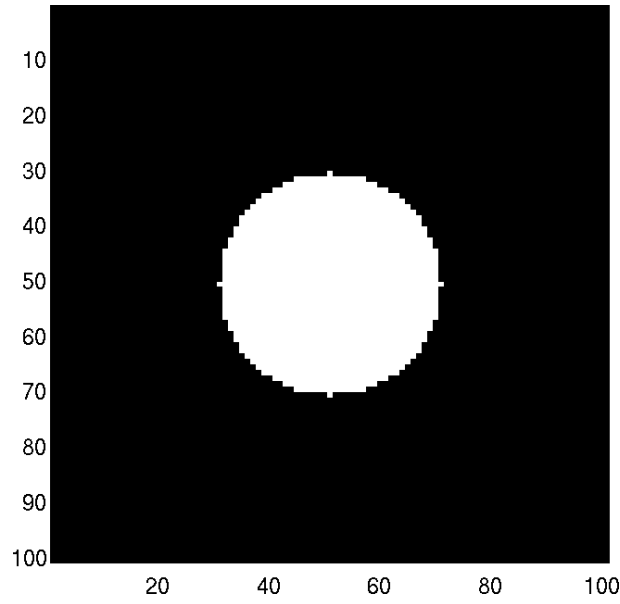
De modo análogo, para el caso del filtro de paso bajo se define a partir de la matriz de transferencia  $G_{PB}$  dada por:

$$G_{PB}(m^*, n^*) = \begin{cases} 1 & D(m^*, n^*) \leq D_{max} \\ 0 & D(m^*, n^*) > D_{max} \end{cases} \quad (2.49)$$

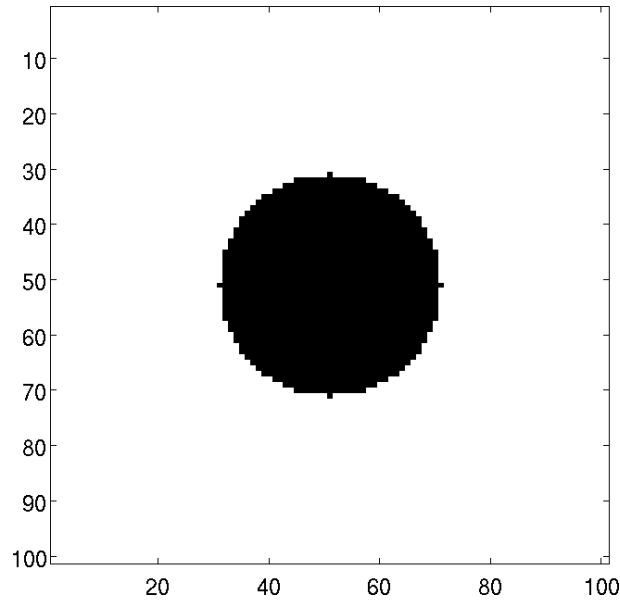
La figura 2.10 muestra la matriz de transferencia de paso bajo  $G_{PB}$ .

### 2.9.3. Máscaras para filtrado

Una máscara de filtrado  $h(m, n)$  se denomina máscara de convolución espacial si se define pormedio de:



**Figura 2.9** Matriz de transferencia  $G_{PA}$  para un filtro ideal de paso alto obtenida con plataforma MatLab<sup>®</sup> official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.



**Figura 2.10** Matriz de transferencia  $G_{PB}$  para un filtro ideal de paso alto obtenida con plataforma MatLab<sup>®</sup> official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

$$F(m^*, n^*) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(m, n) e^{-2\pi i \left( \frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \quad (2.50)$$

Si la máscara se restringe a una región específica, tal que  $h(m, n) = 0$  para  $m \wedge n \geq N_{max} < N$  de modo que la máscara restringida sea designada por  $\hat{h}$ , se obtiene:

$$\hat{H}(m^*, n^*) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_{max}-1} \sum_{m=0}^{N_{max}-1} \hat{h}(m, n) e^{-2\pi i \left( \frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \quad (2.51)$$

De modo que puedan determinarse los coeficientes de la expansión en (2.51) que de minimizar la cantidad:

$$\chi^2 \equiv \sum_{m^*=0}^{N-1} \sum_{n^*=0}^{N-1} |\hat{H}(m^*, n^*) - H(m^*, n^*)|^2 \quad (2.52)$$

La expresión anterior (2.52) puede resolverse por medio de una representación algebraica lineal  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{h}}$  con  $\hat{\mathbf{H}}$  representado por un vector de dimensión  $N^2$  cuyos elementos son los de  $\hat{H}$  ordenados de algún modo arbitrario,  $\hat{\mathbf{h}}$  es un vector columna de dimensiones  $N_{max}^2$  conteniendo los elementos de  $\hat{h}$  y  $\mathbf{Q}$  es una matriz de dimensiones  $N^2 \times N_{max}^2$  de términos exponenciales de acuerdo con la expresión (2.50) dados por:

$$\mathbf{Q}(k, l) = q(k, l) = \frac{1}{N} e^{-2\pi i \left( \frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \quad (2.53)$$

para  $k = m^* N + n^*$  con  $m^* \wedge n^* \in [0, N-1]$  y  $l = m N_{max} + n$  con  $m \wedge n \in [0, N_{max}-1]$ .

## CAPÍTULO 3

---

# SISTEMAS DE DETECCIÓN DE USO RADIOLÓGICO

---

El *Capítulo ??* presenta descripciones breves respecto de los principios de funcionamiento y detalles técnicos de los sistemas de detección de radiación más comúnmente empleados en el ámbito de radiodiagnóstico.

En líneas generales, los detectores de radiación presentan similitudes en cuanto a su comportamiento.

Los efectos de interacción entre la radiación y la materia son la base que determina de modo unívoco las propiedades de los sistemas de detección. En particular, el tipo de material del detector depende propiamente de la clase de radiación así como de la información que es necesario recavar.

La operatividad de los sistemas de detección deben contar con las siguientes etapas:

- Ingreso de la radiación al sistema de detección.
- Interacción de la radiación con el “material sensible” que constituye el sistema de detección.
- Efectos por interacción de la radiación con el material sensible: pérdida de toda o parte de su energía cinética por medio de transferencias a los electrones de los átomos del material sensible.
- Producción de corrientes de electrones (de energías relativamente bajas).
- Recolección de la corriente de electrones.
- Análisis mediante circuito electrónico.
- Procesamiento con dispositivos digitales (opcional).



En términos del tipo de radiación a detectar, puede mencionarse, esquemáticamente:

**Determinación del tipo de partícula** Identificar el tipo de partícula (que resulta crítico en el caso de un campo mixto, como ocurre en procesos nucleares) es necesario utilizar materiales sensibles en los que ya sea la carga o la masa de cada tipo de partícula pueda generar efectos distintivos.

**Tiempo de emisión de radiación** Medir el tiempo en el que la radiación fue emitida requiere de materiales sensibles en los que sea posible una rápida recolección de los pulsos de corriente de electrones producidas por las interacciones.

**Energía de la radiación** Determinar la energía de la radiación implica utilizar detectores en los que la amplitud de los pulso detectados resulte proporcional a la energía de la radiación que provocó el pulso. El material sensible debe ser de alto número de electrones disponibles de modo que se minimicen pérdidas y fluctuaciones.

**Polarización de la radiación** La medición del spin o la polarización requiere de detector capaces de separar los diferentes estados de polarización de la radiación. En general, no alcanza solo con materiales sensibles, sino que debe acudir al diseño de arreglos específicos para detección.

**Tasa de conteo de flujo** Para determinaciones de alta tasa de conteo, es necesario emplear detectores de rápida recuperación capaces de reiniciar el conteo de eventos sucesivos. Contrariamente, para mediciones de tasas de conteo muy bajas, lo más importante es la minimización del ruido de fondo.

### 3.1. Procesos para la detección de radiación electromagnética

Los fotones (restringiendo al campo de aplicación en radiodiagnóstico, refiere a rayos X y  $\gamma$ ) interactúan con la materia por medio de diferentes tipos de procesos: *scattering* Compton, creación de pares y absorción fotoeléctrica.

A continuación se incluye una descripción brevísima de estos procesos:

#### Scattering Compton

El *scattering* Compton es el proceso por el cual un fotón incidente cambia el estado de fase, modificando potencialmente dirección de movimiento  $\vec{Q}$  y energía cinética  $E$  por interacciones con electrones de los orbitales atómicos, los que inicialmente pueden considerarse prácticamente libres<sup>1</sup> adquieren casi toda la energía cinética liberada por el fotón incidente. En este sentido, aproximando por electrón en reposo y libre se aplica la conservación de momento y energía para describir los cambios de fase.

#### Producción de pares

Este proceso refiere a la interacción de un fotón incidente energético con la materia de modo de producir pares electrón-positrón como consecuencia de acoplamiento con el campo atómico. La energía cinética es cedida para el equivalente en masa de par partícula-antipartícula, y eventual sobrante es transferido como energía cinética a las partículas creadas.

Por lo tanto, existe un valor umbral para la energía por encima del cual es posible el efecto:  $E_{umbral} = 2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$ .

<sup>1</sup>Las energías de ligadura típicas son mucho menores a las del fotón incidente

### Absorción fotoeléctrica

El fotón incidente es absorbido por parte del átomo de modo que uno de los electrones atómicos, denominado fotoelectrón es liberado a expensas de la energía cinética adquirida. Los electrones libres no pueden absorber fotones para cumplir simultáneamente con la conservación de la energía y el momento, motivo por el cual no se produce este efecto para electrones libres. La energía cinética del electrón de ionización (liberado) equivale a la energía del fotón incidente menos la energía de ligadura del electrón eyectado.

La determinación de la probabilidad de absorción de un fotón por efecto fotoeléctrico muestra algunas características específicas, como que es mayor para energías bajas<sup>2</sup>, aumenta significativamente según el número atómico  $Z$  y disminuye según aumente la energía del fotón incidente  $E$ .

A partir de los procesos mencionados, se propone una cantidad para integrar los efectos netos denominada coeficiente de atenuación másico, el cual se describe del siguiente modo: Se considera un haz perfectamente colimado de fotones de energía  $E$  producidos por una fuente  $S$  e incidiendo sobre un material de número atómico  $Z$  y espesor  $d$  (a lo largo del *path*). Por lo tanto, en los procesos de interacción, los fotones del haz incidente pueden sufrir absorción fotoeléctrica, *scattering* Compton o producción de pares. De modo que, solo parte de los fotones incidentes alcanzarán el detector ubicado detrás<sup>3</sup> del blanco irradiado. En particular, alcanzarán el detector los fotones que no hayan interactuado.

La probabilidad total por unidad de longitud  $ds$  de que un fotón incidente no alcance al detector, se denomina coeficiente de atenuación lineal total y representa la integración de todas las probabilidades correspondientes a cada uno de los posibles procesos de interacción involucrados.

### 3.2. Procesos para la detección de neutrones

La detección de neutrones presenta algunas características similares al caso de los fotones, debido a la propiedad de no poseer carga. Sin embargo, por su naturaleza intrínseca, los procesos involucrados son radicalmente diferentes.

Los neutrones no interactúan eléctricamente con los átomos, pero sí presentan interacciones fuerte con los núcleos por medio de una amplia variedad de procesos, entre ellos:

- Colisiones elásticas, que son relevantes para energías  $\approx 1\text{MeV}$ , denominados neutrones rápidos).
- Colisiones inelásticas que son relevantes para valores de energía superiores al umbral de excitación nuclear.
- Captura de neutrones, proceso por el cual el núcleo captura neutrones incidentes constituyendo un nuevo núcleo, que eventualmente puede sufrir transiciones para desexcitarse. Este efecto varía según la velocidad de los neutrones, aproximadamente inversamente proporcional a ésta.
- Otras reacciones nucleares de tipo  $(n, p)$ ,  $(n, d)$ , etc que representan captura de un neutrón y emisión de partículas cargadas. Este proceso ocurre en el rango de algunos eV a keV.
- Fisión: A energías “térmicas” (del orden del eV), los neutrones se denominan neutrones térmicos o lentos. Este proceso da lugar a la fragmentación nuclear.
- Producción de una *hadronic shower*, efecto que ocurre en el rango de energías por arriba de unos cientos de keV, provocando la emisión de partículas cargadas.

<sup>2</sup>Energías menores a 100keV, aproximadamente.

<sup>3</sup>En el sentido del haz incidente.

Los mecanismos de interacción de los neutrones hacen que su detección resulte particularmente compleja.

Sin embargo, existen algunas técnicas y sistemas de detección capaces de brindar información a cerca del campo de neutrones. Aunque, el mayor desafío refiere a las dificultades asociadas a determinaciones en campo mixto.

### 3.3. Procesos para la detección de electrones

Los electrones y los positrones interactúan por medio de *scattering* con los electrones orbitales atómicos con las siguientes características:

- Algunos electrones, particularmente los emitidos en las desintegraciones  $\beta$ , viajan con velocidades relativistas.
- Los electrones sufrirán cambios significativos en la dirección de movimiento como consecuencia de las colisiones con otros electrones. Por tanto, describen trayectorias erráticas (*track*).
- En colisiones frontales con electrones atómicos se transfiere una fracción muy importante de la energía cinética inicial que es adquirida por el electrón impactado. Además, debe destacarse que en estos casos, resulta indistinguible el electrón incidente del eyectado.
- Debido a cambios abruptos en dirección de movimiento y módulo de la velocidad (energía cinética), el electrón sufre grandes aceleraciones. Como consecuencia, se emite radiación electromagnética conocida como *Bremsstrahlung*.

### 3.4. Procesos para la detección de partículas cargadas pesadas

Debido a que los núcleos del material del detector ocupan solamente en torno a 10-15 del volumen de sus átomos, resulta unos tres órdenes más probable para una partícula el colisionar con un electrón que con un núcleo. Por tanto, el mecanismo de pérdida de energía dominante para las partículas cargadas es el *scattering* Coulombiano por los electrones atómicos del material sensible que compone el detector.

Si bien el *scattering* Coulombiano de partículas cargadas por los núcleos, denominado *scattering* Rutherford, es un proceso importante en física nuclear, tiene poca influencia en la pérdida de energía de las partículas cargadas a lo largo de su trayectoria dentro del detector.

Se aplican los principios de conservación de la energía y momento en colisiones frontal elásticas entre partículas pesadas incidentes de masa  $M$  y electrones de masa  $m_e$ , supuestos en reposo, para determinar así las probabilidades de los efectos de interacción que dan lugar a las secciones eficaces.

La gran cantidad de eventos de colisión entre partícula cargada masiva y electrones del medio material origina, entre otras consecuencias:

- Una gran cantidad de colisiones antes de que la partícula ceda toda su energía cinética. Colisiones frontales generan la máxima transferencia posible de energía. En el resto de las colisiones, la transferencia en general será mucho menor.
- En colisiones entre una partícula cargada pesada y un electrón, la partícula cargada pesada es desviada un ángulo despreciable, por lo que ésta sigue una trayectoria prácticamente rectilínea.
- Dado que la fuerza Coulombiana es de alcance infinito, la partícula cargada masiva interactúa de modo simultáneo con muchos electrones a la vez, de modo que pierde energía continua y

gradualmente durante la trayectoria. Habiendo recorrido cierta distancia, denominada rango, perderá toda la energía cinética.

### 3.5. Detectores gaseosos

Existen diferentes tipos de sistemas de detección gaseosos. Esta denominación proviene del hecho de que el material sensible utilizado para la detección es un gas.

#### 3.5.1. Cámaras de ionización

Los detectores basados en ionización están formados esencialmente por un recinto donde se encuentra un gas a presión controlada, allí se colocan dos electrodos separados una cierta distancia, a los que se aplica una tensión de polarización.

El gas dentro del recinto no es conductor eléctrico en condiciones normales, por lo tanto no circula corriente eléctrica entre los electrodos. Cuando una partícula del haz ionizante interactúa con el gas pueden generarse efectos de ionización produciendo pares ión-electrón. El campo eléctrico someterá a las cargas liberadas de modo que se muevan hacia el electrodo de signo contrario; los electrones hacia el ánodo y los iones hacia el cátodo.

La colección de estas cargas se logra utilizando un dispositivo eléctrico asociado al detector, sea midiendo la corriente media que se genera en el detector debido a la interacción de varias partículas (cámaras que operan en modo corriente) o bien formando un pulso con cada golpe de carga que recogen los electrodos (cámaras que operan en modo impulso).

Para aplicaciones dosimétricas, la cámara de ionización es un dosímetro denominado *standard primario*, ya que además de ser el sistema más difundido y utilizado universalmente con buena *performance*, sus propiedades permiten obtener mediciones confiables y estables en base a un sistema relativamente simple lo que, sumado a teorías sólidas respecto de sus principios de funcionamiento, representa una importante ventaja en términos de estabilidad y confiabilidad. En este sentido, visto que el funcionamiento del sistema dosimétrico está sustentado por teoría de cavidad, como Bragg-Gray, resulta que una de las principales características es el volumen sensible requiere ser determinado de manera particularmente precisa.

En términos de su uso práctico, la cámara de ionización se utiliza colocándola expuesta al haz de radiación o bien introducida en un medio material, fantoma, para determinar exposición en aire o bien dosis absorbida en el medio material, típicamente agua o medios similares en cuanto a las propiedades de absorción/dispersión de radiación ionizante en los rangos de interés. Este tipo de medios materiales se denomina “tejido-equivalentes”. Por tanto, resulta importante también conocer las propiedades del medio material gaseoso en el que se producen los procesos que permiten determinar la dosis absorbida en la cavidad gaseosa.

Existen distintos tipos de cámaras de ionización. Las más utilizadas son la cámara tipo dedal, comúnmente denominada cámara de tipo *Farmer* y, aunque en menor medida, también la cámara de ionización de tipo plano-paralela.

De hecho, las cámaras de ionización pueden clasificarse, según su diseño, o más específicamente según la forma de los electrodos: existen configuraciones planas o cilíndricas, según la disposición de los electrodos, que pueden ser planos-paralelos (cámara plano-paralela usualmente denominada Markus), o bien cilíndricos, constituidos por un electrodo hueco de forma de cilíndrica y otro interior en forma de alambre o varilla en dispuesto coaxialmente (cámara de tipo dedal usualmente llamada Farmer).

El volumen sensible de las cámaras de ionización se rellenan típicamente con una variedad de gases que puede ser aire a presión atmosférica o bien gases nobles, especialmente argón.

El rendimiento de detección, definido como la fracción de radiación detectada respecto del total que atraviesa el volumen sensible del detector, es muy próxima al 100 % para la cámara de ionización para el caso de la detección de partículas  $\alpha$  (núcleos de helio) y  $\beta$  (electrones y positrones), mientras que para fotones el rendimiento ronda solo el 1 %, debido a las propiedades intrínsecas de los mecanismos de interacción de cada tipo de radiación.

La cámara de ionización forma parte de una categoría de detectores denominados gaseosos normalmente llamados también “detectores de ionización”, debido a que este tipo de dispositivos responden a la radiación por medio de corrientes inducidas por ionización.

Además de la cámara de ionización, cabe destacar otros dos tipos de detectores gaseosos, histórica y aún frecuentemente utilizados.

### 3.5.2. Contador proporcional

En el caso de la cámara de ionización, el voltage aplicado resulta ser aquel suficiente para coleccionar solo las cargas liberadas por acción directa de la radiación incidente. Sin embargo, si se aumenta aún más el voltaje aplicado, los iones atraídos ganan tanta energía que podrían generar ionizaciones adicionales durante el recorrido hacia los electrodos, y los electrones producidos por estas ionizaciones pueden, a su vez, generar otros, constituyendo un efecto en cascada, lo que se conoce como *efecto de amplificación de la carga por el gas*. El factor por el cual la ionización original es “multiplicada” se denomina *factor de amplificación del gas*. El valor de este factor aumenta rápidamente al aumentar el voltage aplicado y puede llegar a valores cercanos a  $10^6$ . Los detectores que operan en este régimen se conocen como contadores proporcionales, y la carga neta puede obtenerse de  $Q = W * f$ , donde  $f$  es el factor de amplificación del gas. Por lo tanto la carga total producida resulta proporcional a la energía depositada por la radiación ionizante incidente. En general, los contadores proporcionales utilizan gases que permiten la migración de los iones producidos con muy alta eficiencia, como los gases nobles, entre los cuales Ar y Xe son los más comúnmente empleados.

### 3.5.3. Contador Geiger-Müller

Los detectores Geiger-Müller son detectores gaseosos diseñados para obtener la máxima amplificación posible.

El ánodo central es mantenido a muy alto potencial en relación al cilindro exterior (cátodo). Al producirse ionizaciones dentro de la cavidad de gas por interacción de la radiación incidente, los electrones son acelerados hacia el ánodo central y los iones positivos al cátodo exterior. En este proceso ocurre la amplificación del gas. Pero, debido a que el voltaje aplicado es tan alto, los electrones colectados pueden causar excitaciones de las moléculas del gas. Estas moléculas se desexcitan rápidamente ( $\approx 10^{-9}$ s) emitiendo fotones visibles o UV. Si alguno de estos fotones UV interactúa con el gas o en el cátodo, puede ocurrir fotoabsorción, lo cual genera otro electrón para contribuir en el efecto cascada.

En el caso de los dispositivos de Geiger Müller se presenta el problema de que durante la trayectoria de los iones, éstos pueden ser acelerados y alcanzar el ánodo con la suficiente energía para liberar electrones y empezar el proceso de nuevo. Esto se debe a la naturaleza del proceso de avalancha múltiple en el tubo Geiger, basta con un electrón para crear un pulso de salida. Para evitar este efecto, se acostumbra a agregar un segundo gas denominado *quenching gas*, o gas de extinción, compuesto por moléculas orgánicas complejas<sup>4</sup>. Se utilizan concentraciones típicas de 90 % de gas primario y 10 % de gas de extinción.

<sup>4</sup>El gas de material sensible, gas primario, es típicamente aire o un gas noble como argón

### 3.6. Detectores de estado líquido y sólido

Estudiados los detectores gaseosos, resulta que presentan algunas desventajas, principalmente asociadas a baja eficiencia para muchos tipos de radiaciones, por ejemplo rayos  $\gamma$  de 1 MeV, ya que en aire recorre unos 100 m.

Los detectores de estado sólido, que presentan densidades mucho mayores, cuentan con la probabilidad de absorción en dimensiones razonables de tamaño de detección.

La principal característica de los detectores de estado sólido es el uso de materiales sólidos para el sensor, es decir material sensible. Desde un punto de vista general, la utilización de materiales sensibles de mayor densidad, prevé *a priori* mayor eficiencia en la detección en cuanto mayor resulta la cantidad de eventos de interacción, relativamente al caso de materiales gaseosos. Sin embargo, debido a los requerimientos específicos para producir efectos secundarios mensurables capaces de ser directa y unívocamente correlacionados con la energía absorbida por el material, resulta que solo algunos pocos materiales de estado sólido son útiles como material sensible.

Para crear un detector de estado sólido debe estudiarse el compromiso entre:

1. El material debe ser capaz de soportar un campo eléctrico grande, de manera que los electrones y los iones puedan ser recogidos para formar un pulso electrónico. Además en ausencia de radiación el flujo de corriente debe ser mínimo o nulo para que el ruido de fondo sea bajo.
2. Los electrones deben ser fácilmente extraídos de los átomos del material sensible y en gran número. Electrones e iones deben ser capaces de viajar fácilmente en el material.

La primera condición parece exigir un material aislante, mientras que la segunda sugiere usar un conductor. El compromiso, en definitiva, es un semiconductor. Materiales semiconductores de tamaño suficientemente grande para construir detectores de radiación (de algunas decenas de  $cm^3$ ) recién estuvieron disponibles a partir de la década de 1960.

#### 3.6.1. Detectores centelladores

Durante la década de 1950, debido a la imposibilidad de disponer de materiales semiconductores de dimensiones apropiadas para detección de radiación, se desarrollaron los detectores basados en materiales centellantes para aplicaciones en dispositivos de espectroscopía nuclear logrando razonable alta eficiencia resolución.

#### Detectores semiconductores

Los detectores semiconductores son, esencialmente, análogos a los detectores gaseosos. Sin embargo, los materiales sólidos de los semiconductores ofrecen importantes ventajas comparativas, ya que cuentan con densidad muy superior a la de los gases<sup>5</sup>. Por lo tanto, presenta valores mucho mas altos para el *stopping power*, resultando materiales mucho mas eficientes para la detección de radiación.

Los semiconductores son, en general, pobres conductores de corriente eléctrica, sin embargo cuando están ionizados por acción de la radiación incidente, por ejemplo, la carga eléctrica producida puede colectarse por medio de la aplicación de un voltaje externo. Los materiales más comunes para construir detectores semiconductores son silicio y germanio, aunque más recientemente se está estableciendo también el telurio de cadmio. Para estos materiales, una ionización ocurre cada

<sup>5</sup>entre 2 y 5 mil veces mayor, aproximadamente. Por ejemplo:  $\rho_{Si(Li)} = 2,33gcm^{-3}$ ,  $\rho_{Ge(Li)} = 5,32gcm^{-3}$ ,  $\rho_{Cd(Te)} = 6,06gcm^{-3}$  y  $\rho_{Air} = 0,001297gcm^{-3}$

3 a 5 eV de energía absorbida de la radiación incidente, aproximadamente, lo cual constituye otra importante ventaja comparativa respecto de los detectores gaseosos. Además, la amplitud de la señal eléctrica detectada está relacionado proporcionalmente con la energía absorbida, y por ello pueden ser utilizados para discriminar en energía.

Algunas desventajas o inconvenientes de estos dispositivos son: generan corrientes no despreciables a temperatura ambiente, lo cual genera un ruido tipo *background* en la señal medida, y por tanto deben ser operados a bajas temperaturas. Otro inconveniente es la presencia de impurezas en la matriz del material, lo cual arruina la configuración cristalina pura. Estas impurezas crean “trampas” electrónicas que pueden atrapar electrones generados en ionizaciones, evitando que sean colectados por los electrodos. Este efecto puede resultar en una apreciable disminución en la señal eléctrica medida y limita el espesor práctico del material sensible a tamaños no mayores a 1 cm, aproximadamente. Y, debido al bajo número atómico de Si y Ge, este hecho limita la posibilidad de emplearlos para detectar fotones, o incluso partículas cargadas, de alta energía.

El paso de la radiación ionizante a través de los materiales genera ionizaciones y/o excitaciones. En el caso particular en que las especies producidas, o residuos, (ionizadas o excitadas) sufran procesos de recombinación, se obtiene como resultado la liberación de energía. En general, la mayor parte de esta energía es disipada en el medio como energía térmica, por medio de vibraciones moleculares, en el caso de gases y líquidos, o vibraciones de red en el caso de sólidos cristalinos. Sin embargo, existen materiales en los que parte de esta energía es transferida a emisión de luz visible. Estos materiales particulares se denominan centelladores y los detectores de radiación que los utilizan son llamados detectores centelladores.

Los materiales más comúnmente utilizados para detectores de aplicación en medicina son de tipo orgánico (substancias orgánicas diluidas en solución líquida) o inorgánicos (substancias inorgánicas en forma de sólido cristalino). Si bien los mecanismos precisos de centelleo son diferentes para estos dos tipos de materiales, comparten características comunes. La cantidad de luz producida como consecuencia de la interacción con un único rayo incidente (RX,  $\gamma$ ,  $\beta$ , etc.) resulta proporcional a la energía depositada por la partícula incidente en el material centellador. La cantidad de luz neta producida es pequeña, típicamente unos pocos cientos (a lo sumo miles) de fotones por cada interacción de partícula incidiendo con energía de entre 70 y 511 keV.

Originalmente, se utilizaban cuartos oscuros para observar la luz emitida por este tipo de materiales<sup>6</sup> y contabilizar así la producción de ionizaciones. Esta metodología presenta insalvables limitaciones y fue posteriormente reemplazada por tecnologías de dispositivos electrónicos ultrasensibles a la luz, como los fotomultiplicadores.

Los detectores por centelleo, generalmente requieren de dispositivos extra para mejorar la eficiencia de lectura. Comúnmente se utilizan técnicas electrónicas basadas en arreglo de tubos fotomultiplicadores. Básicamente, un tubo fotomultiplicador es un dispositivo electrónico, en forma de tubo, que produce un pulso de corriente eléctrica al ser estimulado por señales muy débiles, como el centelleo producido por RX,  $\gamma$  o  $\beta$ , etc. en un detector centellador.

Se coloca una película de material fotoemisor en la ventana de vidrio de entrada, esta sustancia<sup>7</sup> eyecta electrones cuando son alcanzados por fotones visibles. La superficie de fotoemisión se denomina fotocátodo, y los electrones eyectados son fotoelectrones.

La eficiencia de conversión de luz visible en electrones liberados se denomina eficiencia cuántica, y es típicamente de entre 1 a 3 fotoelectrones por cada 10 fotones visibles que interactúan con el fotocátodo. Claramente, la eficiencia cuántica depende de la energía de la luz incidente.

Los dínodos son mantenidos a diferentes valores de potencial (creciente) para atraer a los electrones producidos, y los secundarios que éstos generan, de modo de producir el efecto de multiplicación.

<sup>6</sup>Por entonces típicamente centelladores de sulfuro.

<sup>7</sup>ejemplo típico es el CsSb antimonio de cesio o materiales alcalinos.

Este proceso se repite usualmente unas 10 veces antes de que la corriente de electrones resultante sea colectada por el ánodo. Los factores de multiplicación que se obtienen son significativos por dínodo, resultando en un factor global típico de  $10^7$ , aproximadamente. Los tubos fotomultiplicadores se sellan herméticamente y se mantienen en vacío; y se construyen en diferentes formas y tamaño.

Existen también detectores de centelleo denominados “centelladores inorgánicos”, ya que consisten en sólidos cristalinos que centellean debido a características específicas de la estructura cristalina. Por ello, átomos o moléculas individuales de estas sustancias no centellean, se requiere el arreglo cristalino.

Algunos cristales inorgánicos, como el NaI a temperaturas de N líquido, son centelladores en su estado puro, aunque la mayoría son “activados con impurezas”, y por ello los átomos de impurezas<sup>8</sup> en la matriz cristalina, responsables del centelleo, se denominan “centros de activación”.

A diferencia del caso de materiales inorgánicos, los detectores basados en materia les centelladores orgánicos, producen el efecto de centelleo debido a propiedad inherente de la molécula de la sustancia. El centelleo es un mecanismo de excitación molecular/desexcitación al interactuar con la radiación. Este tipo de sustancias producen centelleo en estado gaseoso, líquido o sólido, aunque se utilizan normalmente líquidos<sup>9</sup>. En los centelladores orgánicos líquidos se disuelve el material centellador en un solvente dentro de un contenedor típicamente de vidrio o plástico y se agrega también la sustancia radioactiva a esta mezcla. Se coloca el contenedor entre un par de tubos fotomultiplicadores y de este modo se detecta la luz emitida que guarda correlación con la energía impartida por el material radioactivo.

Las soluciones de centelladores orgánicos líquidos consisten de 4 componentes:

1. Solvente orgánico, que compone la mayor parte de la solución. Debe disolver el material centellador y también la muestra radioactiva.
2. Solute primario, que absorbe energía del solvente y emite luz. Algunos materiales centelladores típicamente utilizados son difenil-oxazol y metilestireno-benceno.
3. A veces las emisión del soluto primario no es la mas adecuada para ser detectada por los fototubos, y entonces se utiliza un soluto secundario, cuya función es absorber la emisión del soluto primario y re-emitir fotones, de mayor longitud de onda que los del soluto primario, beneficiando la detectabilidad de la luz por parte de los fototubos.
4. Frecuentemente se incorporan aditivos a la mezcla para mejorar ciertas propiedades como la eficiencia de transferencia de energía.

El caso particular del detector de NaI(Tl), frecuentemente diseñado en forma de campana está formado por el cristal de NaI(Tl) ahuecado en un extremo para la inserción de la muestra.

La transferencia de luz entre el cristal de NaI(Tl) y el fotomultiplicador resulta ser muy eficiente, aunque existen algunas pérdidas debido dispersión dentro del detector.

La eficiencia de detección  $D$  de un contador de NaI(Tl) en forma de campana para un amplio rango de energías, principalmente debido a que la disposición geométrica adoptada implica un eficiencia geométrica  $g$  muy buena. Entonces, la combinación con una alta eficiencia de detección y un bajo nivel de *background* en el conteo, generan un detector muy eficiente, que puede utilizarse para muestras conteniendo cantidades chicas (Bq-kBq) de actividad de emisores  $\gamma$ . La eficiencia geométrica  $g$  para muestra de alrededor de 1ml es del 93 %, aproximadamente.

<sup>8</sup>Indicado como el elemento entre paréntesis en la notación del compuesto.

<sup>9</sup>Más recientemente han cobrado importancia los centelladores plástico



### 3.6.2. Films radiográficos

Los films, originalmente radiográficos, en términos dosimétricos de pobre capacidad, actualmente son reemplazados por films de tipo radiocrómico que son detectores básicamente del tipo químico. El diseño consiste en el depósito de una delgada capa de material sensible sobre una película inactiva típicamente plástica que proporciona sostén. El material sensible consiste en una dilución de sales, usualmente se emplea haluros de plata.

El principio de funcionamiento se basa en reacciones químicas catalizadas por la energía absorbida por el material. Los residuos de reacción, que son sustancias con propiedades químicas diferentes al material sensible en su estado no reactivo, poseen la particular característica de presentar afinidad química con otros compuestos con los que el material sensible no reactivo no tiene esa afinidad.

Se utiliza entonces procesos posteriores a la irradiación en los que se induce la reacción entre los residuos de formación a partir del material sensible -debido a la absorción de energía- y compuestos con afinidad que una vez unidos producen diferencias en absorción/transmisión de luz visible, es decir presentan diferente opacidad allí donde se produce la combinación entre los productos de reacción por absorción de radiación y los solutos con afinidad. Este proceso se denomina usualmente revelado radiográfico.

Una vez realizado el proceso de revelado es necesario implementar un método de lectura. Para este fin se aprovecha la manifestación evidente en la diferencia de propiedades de absorción/transmisión de luz visible y resulta posible cuantificar estas diferencias empleando técnicas de densitometría óptica.

La respuesta del sistema es, en definitiva, la lectura densitométrica. Y es ésta la que debe correlacionarse con la dosis absorbida, lo cual se realiza típicamente mediante métodos empíricos de calibración.

En el caso de los films radiográficos, la capacidad dosimétrica es muy pobre al punto que este tipo de detectores se emplean reservándolos casi exclusivamente para determinaciones espaciales de absorción de radiación; mientras que los films radiocrómicos -más modernos- permiten una cuantificación confiable en términos dosimétricos proveyendo también información espacial.

Cabe mencionar que la tejiiso-equivalencia de los films radiográficos es muy mala, mientras que esta propiedad mejora para el caso de los films radiocrómicos.

A partir de análisis cuantitativos y determinaciones empíricas, resulta que la dependencia típica de la lectura  $L$  de un film (densidad óptica) presenta una dependencia polinomial (usualmente aproximada por orden 3) respecto de la dosis absorbida. De manera que, en condiciones de requerir linealidad es necesario acotar el intervalo (rango de valores de dosis) y determinar un ajuste lineal para la zona de interés.

En cualquier caso, ambos tipos de films presentan dificultades en cuanto a la dependencia de la calidad del haz y de la dirección de incidencia, aunque debe destacarse que estos problemas son menores para el film radiocrómico.

## 3.7. Adaptación de sistemas de detección al radiodiagnóstico médico

## CAPÍTULO 4

---

# PROCESAMIENTO DE IMÁGENES CON DERIVADAS - DETECCIÓN DE ESQUINAS Y BORDES

---

El *Capítulo 4* está dedicado a introducir algunos conceptos genéricos, acompañados por métodos específicos, para detectar, evidenciar y resaltar puntos de particular importancia en una imagen: puntos de bordes, aristas, contornos.

Existe interés y gran practicidad en varios campos de aplicación, en referencia a la detección de puntos de bordes, eventualmente la conexión entre éstos que dan lugar a contornos, permitiendo así evidenciar la presencia de objetos delimitados que podrán luego ser oportunamente caracterizados.

### 4.1. Detección de bordes utilizando derivadas

Es posible introducir conceptos análogos a la derivación de cálculo continuo de orden 1, 2, etc. a fin de realizar procesamiento específicos sobre imágenes de interés.

Para regiones con valores de *pixel* constantes, se anulará la derivada primera, de modo que puede establecerse precisamente este criterio para asociar propiedades de la región con la derivada.

Por otro lado, si existe cambio en los valores de *pixel*, se generará una variación en la derivada, permitiendo nuevamente establecer una asociación entre las propiedades de la región (entorno al punto de interés) y su derivada.

Así mismo, se aplica el concepto de derivada segunda, cuyo signo indicará la dirección (positiva o negativa, según se defina el sistema de coordenadas) del gradiente del punto de interés.

#### 4.2. Gradiente de una imagen

El operador gradiente  $\vec{\nabla}$  aplicado a la imagen  $f(m, n)$  se define por medio de:

$$\vec{\nabla} [f(m, n)] \equiv \begin{bmatrix} \nabla_m [f(m, n)] \\ \nabla_n [f(m, n)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f(m+\Delta m, n) - f(m-\Delta m, n)}{2\Delta m} \\ \frac{f(m, n+\Delta n) - f(m, n-\Delta n)}{2\Delta n} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

De modo que la expresión vectorial del gradiente  $\vec{\nabla}$  resulta:

$$\begin{aligned} |\vec{\nabla} [f(m, n)]| &= \sqrt{\nabla_m^2 + \nabla_n^2} \\ \theta(m, n) &= \arctan \left( \frac{\nabla_m}{\nabla_n} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nótese que, para propósitos de aplicación dado que se implementarán métodos basados en umbralamiento -y por tanto, solo tienen relevancia las diferencias relativas- conviene introducir una aproximación para el módulo del gradiente dada por:

$$|\vec{\nabla} [f(m, n)]| \approx |\nabla_m [f(m, n)]| + |\nabla_n [f(m, n)]| \quad (4.3)$$

##### 4.2.1. Detección de bordes: El operador de Sobel

Utilizando la expresión 4.1 es posible practicar una convolución de la imagen original  $f(m, n)$  utilizando una máscara  $\mathbf{M}$  de  $3 \times 3$  siguiendo la definición:

$$\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

En particular, para el operador de Sobel  $M_{Sobel}$  es habitual utilizar las expresiones:

$$\mathbf{M}_{Sobel} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde el primer arreglo se utiliza para obtener  $\nabla_m$  y el segundo  $\nabla_n$ .

Si el bloque de la imagen original  $f(m, n)$ , para la dimensión de la máscara ( $3 \times 3$ ) es  $B(k, l)$  con  $k \in [m - \Delta m, m + \Delta m]$  y  $l \in [n - \Delta n, n + \Delta n]$

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{m}} &= (B_{1,3} + 2B_{2,3} + B_{3,3}) - (B_{1,1} + 2B_{2,1} + B_{3,1}) \\ \nabla_{\mathbf{n}} &= (B_{3,1} + 2B_{3,2} + B_{3,3}) - (B_{1,1} + 2B_{1,2} + B_{1,3})\end{aligned}\quad (4.6)$$

La aplicación de la técnica de detección y resaltado de bordes, esquinas y contornos por medio del método de sobel consiste en realizar la convolución utilizando la expresión 4.7, y luego al resultado aplicar un criterio de umbralamiento por medio de un parámetro  $P_{Sobel}$  de modo que:

$$\mathbf{M}_{Sobel} \otimes f(m, n) = \begin{cases} 1 & |\vec{\nabla}[f(m, n)]| > P_{Sobel} \\ 0 & |\vec{\nabla}[f(m, n)]| \leq P_{Sobel}. \end{cases} \quad (4.7)$$

#### 4.2.2. Detección de bordes: El operador de Prewitt

Este operador también está definido a partir de la aplicación de derivadas primeras. De hecho, conceptualmente es similar al operador de Sobel, excepto por los valores específicos de los elementos de matriz de la máscara de convolución  $M_{Prewitt}$ , dada por:

$$\mathbf{M}_{Prewitt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

donde el primer arreglo se utiliza para obtener  $\nabla_{\mathbf{m}}$  y el segundo  $\nabla_{\mathbf{n}}$ .

#### 4.2.3. Detección de bordes: El operador de Roberts

La particularidad de este operador es que, diferenciándose de los operadores de Sobel y Prewitt, posee la capacidad de evidenciar puntos de borde pero no así la orientación de éstos.

El operador de Roberts se implementa utilizando las diagonales correspondientes al *pixel* de interés, a izquierda  $D_{Iz}$  y a derecha  $D_{De}$ , definidas según:

$$\begin{aligned}D_{Iz} &\equiv f(m, n) - f(m-1, n-1) \\ D_{De} &\equiv f(m, n) - f(m-1, n+1)\end{aligned}\quad (4.8)$$

De modo que el operador de Roberts  $M_{Roberts}$  consiste en determinar para cada *pixel* la cantidad:

$$M_{Roberts} \equiv \sqrt{D_{Iz}^2 + D_{De}^2} \rightarrow M_{Roberts} \approx |D_{Iz}| + |D_{De}| \quad (4.9)$$

#### 4.2.4. Detección de bordes: Operador de Kirsch

El método de Kirsch consiste en introducir máscaras  $M_{Kirsch}$  que representan 8 rotaciones en las direcciones principales, es decir 4 direcciones en filas y columnas (rotaciones de  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ ), y otras 4 rotaciones respecto de las diagonales principales (rotaciones de  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  y  $\frac{7\pi}{4}$ ).

Las máscaras de Kirsch se definen como sigue:

$$\mathbf{M}_{\text{Kirsch}} \equiv \begin{cases} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \\ 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \\ \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

#### 4.2.5. Detección de bordes: Operadores de Robinson y Frei-Chen

El *set* de máscaras de Robinson es similar al de Kirsch, con la diferencia en los valores de máscara para cada uno de los ángulos. En particular, para ángulo  $0^\circ$ , el operador de máscara de Robinson es:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

El *set* de máscaras de Frei-Chen constituye una autobase, por lo que las 9 componentes del *set* permiten expandir, con los pesos correspondientes, cualquier matriz  $3 \times 3$ . Por lo tanto, las máscaras de Frei-Chen, representan una generalización de los métodos de *image mask*. Las expresiones de las máscaras de Frei-Chen ( $\mathbf{FC}_k$   $k \in [1, 9]$ ) son:

$$\begin{aligned} & \mathbf{FC}_1 \quad \mathbf{FC}_2 \quad \mathbf{FC}_3 = \\ & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\ & \mathbf{FC}_4 \quad \mathbf{FC}_5 \quad \mathbf{FC}_6 = \\ & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & \mathbf{FC}_7 \quad \mathbf{FC}_8 = \\ & \frac{1}{6} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right\} \\ & \mathbf{FC}_9 = \\ & \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

El modo de aplicar la  $M$  a la Imagen  $I$ , que provee el resultado  $R$ , se obtiene operando del siguiente modo:

$$R = \sum_{j=1}^9 M_j I_j = |M| |I| \cos(\theta) = V_M^T V_I \quad (4.12)$$

donde  $T$  indica la transpuesta y los vectores  $V_M$  y  $V_I$  (de dimensión  $1 \times 9$ ) se corresponden con el reordenamiento de la matriz en manera vectorial.

El *set* de máscaras de Frei-Chen pueden utilizarse para la detección de bordes, identificando que, en virtud de constituir una autobase, un subespacio arbitrario se asocia con “proyecciones” de la imagen (o bloque) en el subespacio de interés.

### 4.3. Extensión de los operadores

Puede verse que uno de los problemas usuales en los métodos de detección de bordes, como en general en cualquier técnica de procesamiento, es que la presencia de señal espúrea como ruido, perjudica y limita significativamente la capacidad y *performance* de los métodos de procesamiento.

Un intento para reducir los efectos limitantes de la presencia de ruido se basa en el concepto de “extensión de operadores”, que consiste en implementar un procedimiento previo a aplicar operadores de detección de bordes con el objeto conseguir una reducción del ruido en la señal. Pero, en lugar de realizar procesos típicos de filtrado de ruido, como alguno de los descritos en el Capítulo ??, se propone una “expansión” de los operadores de detección de bordes, que consiste básicamente en aumentar la dimensión de la máscara correspondiente sin alterar las propiedades de simetría y operación de dicha máscara.

A modo de ejemplo, la extensión o expansión del operador de Sobel sería:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

El cálculo del gradiente por fila  $G_X$  o por columna  $G_y$  se obtienen por correspondencia de rotaciones  $\frac{\pi}{2}$  del operador, en el ejemplo el de Sobel.

La extensión de los operadores, originalmente de  $3 \times 3$  puede realizarse hacia cualquiera dimensión, aunque típicamente se realiza para  $11 \times 11$ ,  $9 \times 9$  y  $7 \times 7$ .

### 4.4. El método de Canny: Algoritmo

El operador de detección de bordes de Canny desarrollado durante los '80 se basa en un algoritmo de múltiples fases capaz de detectar bordes de diferentes características. Representa, de hecho, el operador más utilizado en la detección de bordes.

El objetivo ideal del método propuesto por Canny consistía en hallar un algoritmo óptimo para detectar bordes.<sup>1</sup> El concepto básico es que un buen mecanismo de detección óptimo es aquel algoritmo capaz de marcar tantos bordes reales como sea posible, una buena localización, y los bordes marcados deben estar lo más cerca posible del borde en la imagen real. Además, procurar que un borde dado debe ser marcado sólo una vez y donde sea posible el ruido presente en la imagen no debería crear falsos bordes.

La implementación del método de Canny permite optimizar la detección de bordes diferenciales y consta de tres etapas principales: filtrado, decisión inicial, e histéresis.

La primera etapa consiste en un filtrado de convolución de la derivada primera de una función Gaussiana normalizada discreta sobre la imagen, realizada en dos direcciones: horizontal y vertical. La función Gaussiana posee dos parámetros fundamentales, valor medio  $M$  y desviación típica  $\sigma$ . En este caso, el valor medio es nulo, por lo tanto la ecuación que define el filtro Gaussiano  $G(x)$  es:

$$G(x) = k e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad (4.14)$$

donde el parámetro  $k$  se determina de manera que el máximo de  $G(x)$  sea la unidad en su versión discreta.

Para la realización del filtro utilizado en la primera etapa, se deriva la expresión 4.14, obteniéndose:

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{k}{\sigma^2} x e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad (4.15)$$

La versión discreta del filtro se define de modo análogo y se considera que  $x$  asume valores en  $[-5\sigma, 5\sigma]$  con diferencias de 1 pixel entre muestras consecutivas.

obviamente, por razones de eficiencia de cómputo, es preferible derivar directamente la versión discreta de 4.14, con el fin de obtener el valor de  $k$ .

<sup>1</sup>Véase, por ejemplo *Mammography image detection processing for automatic micro-calcification recognition* Quintana et al. y *Mammography image quality optimisation: a Monte Carlo study* Tirao et al. donde se encuentran ejemplos del cálculo y uso de operadores de Canny por medio de gradientes por fila y columna.

## CAPÍTULO 5

---

# PROCESOS ESTOCÁSTICOS

---

El *Capítulo 5* está dedicado a los elementos básicos sobre procesos estocásticos. Se introducen conceptos generales, consideraciones estadísticas y fenómenos físicos de carácter intrínsecamente aleatorio. Se dedica especial atención al transporte de radiación en su característica estocástica.

### 5.1. Introducción y definiciones de procesos estocásticos

En los procesos estocásticos se representan todos y cada uno de los pasos necesarios para la realización de un cierto evento así como también las maneras en que cada uno de los pasos puede ser realizado en términos de las respectivas probabilidades. Por tanto, cualquier proceso en el que se vean involucradas probabilidades de ocurrencia resulta ser un proceso estocástico.

Al describir variables de carácter aleatorio, vinculadas a fenómenos de tipo probabilístico como lo es el transporte de radiación, es asumido, como premisa implícita por defecto, el hecho de que las características aleatorias permanecen constantes durante el intervalo de tiempo de interés, aunque desde una perspectiva genérica podría no satisfacerse esta suposición.

En efecto, al incorporar la dependencia (o evolución) de variables consideradas determinísticas, éstas describirán un proceso evolutivo de tipo analítico, mientras que para el caso de variables aleatorias mostrarán una evolución condicionada por el vínculo al fenómeno probabilístico asociado. Entonces, toda función definida a partir de variables aleatorias, como por ejemplo funciones de distribución o funciones de densidad, presentarán dependencia temporal determinada por su carácter aleatorio, dando lugar a la naturaleza estocástica del fenómeno físico involucrado.

Una definición más formal de un proceso estocástico es la siguiente:



El proceso estocástico consiste en el conjunto (o familia) de variables aleatorias  $\{X_t, t \in [t_{ini}, t_{fin}]\}$  que se ordenan de acuerdo con el índice  $t$ , por lo general identificando al tiempo.

En consecuencia, se tiene que para cada valor de  $t$  (instante) existe la variable aleatoria representada por  $X_t$ , de modo que el proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias, las que pueden variar (evolucionar) en sus características.

Los estados de variables aleatorias son los posibles valores que éstas pueden asumir. Por lo tanto, existe un espacio de estados asociados a las variables aleatorias. En particular, la variable temporal  $t$  puede ser de tipo discreto o bien de tipo continuo. La modificación de la variable  $t$ , por ejemplo, daría lugar a cambios de estado que ocurren en el instante  $t$ .

Por tanto, de acuerdo con el conjunto de índices<sup>1</sup>  $t \in T = [t_{ini}, t_{fin}]$ , la variable aleatoria  $X_t$  puede clasificarse según los siguientes criterios para procesos estocásticos:

- Si el conjunto  $T$  es continuo (por ejemplo  $\mathbb{R}^+$ ), resulta que  $X_t$  describe un proceso estocástico de parámetro continuo.
- Si el conjunto  $T$  es discreto,  $X_t$  describe un proceso estocástico de parámetro discreto.
- Si para cada valor (instante)  $t$  la variable aleatoria  $X_t$  es de tipo continuo, resulta que proceso estocástico es de estado continuo.
- Si para cada valor (instante)  $t$  la variable aleatoria  $X_t$  es de tipo discreto, resulta que proceso estocástico es de estado discreto.

Una *cadena* es un proceso estocástico para el cual el tiempo evoluciona de manera discreta y la variable aleatoria sólo puede tomar valores discretos en el espacio de estados correspondiente.

Un *proceso de saltos puros* es un proceso estocástico para el cual los cambios de estados suceden de forma aislada y aleatoria pero la variable aleatoria sólo asume valores discretos en el espacio de estados correspondiente. Diversamente, un *proceso continuo* se refiere al caso en que los cambios de estado se producen para cualquier valor de  $t$  (instante) y hacia cualquier estado dentro de un espacio continuo de estados correspondiente.

### 5.1.1. Procesos de estado discreto y cadenas de Markov

En el caso de procesos estocásticos con espacio de estados discreto, una secuencia de variables que indique el valor del proceso en instantes sucesivos<sup>2</sup> puede representarse del siguiente modo:

$$\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \quad (5.1)$$

donde cada variable  $X_j$   $j \in [1, n]$  presenta una distribución de probabilidades tal que, en general, es diferente de las otras variables aunque podría haber características comunes.

Uno de los principales objetivos del estudio del caso discreto es el cálculo de probabilidades de ocupación de cada estado a partir de las probabilidades de cambio de estado. Si para el valor  $t_{j-1}$  (instante) el sistema está en el estado  $x_{j-1}$ , la probabilidad de que al instante siguiente  $t_j$  se encuentre en el estado  $x_j$  se obtiene a partir de la probabilidad de transición o cambio de estado de  $x_{j-1}$  a  $x_j$  (o probabilidad condicionada) denotada por  $P(X_j = x_j / X_{j-1} = x_{j-1}) = P_{j,j-1}$ , donde  $P_{j,j-1}$  es el valor que asume la probabilidad para el caso específico en consideración.

Las probabilidades del tipo  $P(X_j = x_j)$  se denominan probabilidades de ocupación de estado.

<sup>1</sup>Estrictamente, subíndices.

<sup>2</sup>Se asume que la variable  $t$  refiere al tiempo.

De modo similar, otro tipo de probabilidad de interés es la de ocupar un cierto estado en un instante  $t_j$ , dado que en todos los instantes anteriores, desde  $t_{ini}$  a  $t_{j-1}$  se conoce en qué estados estuvo el proceso. En este caso, la probabilidad condicionada es  $P(X_j = x_j / X_{ini} = x_{ini}, \dots, X_{j-1} = x_{j-1}) = P_{ini, \dots, j-1, j}$

Por tanto, la probabilidad  $P_{ini, \dots, j-1, j}$  depende de toda la “historia pasada del proceso”, mientras que la probabilidad de transición depende únicamente del estado actual que ocupe el proceso.

**Propiedad de Markov:**

Se dice que un proceso cumple la propiedad de Markov cuando toda la historia pasada del proceso se puede resumir en la posición actual que ocupa el proceso para poder calcular la probabilidad de cambiar a otro estado. Es decir, se cumple:

$$P(X_j = x_j / X_{ini} = x_{ini}, \dots, X_{j-1} = x_{j-1}) = P(X_j = x_j / X_{j-1} = x_{j-1}) \quad (5.2)$$

Además, una propiedad importante que puede tener una cadena es que los valores  $p_{mn}(j)$  no dependan del valor de  $j$ . Entonces, se tiene que las probabilidades de cambiar de estado son las mismas en cualquier instante. Por lo tanto, esta propiedad indica que las probabilidades de transición son estacionarias.

**5.1.2. Procesos de saltos puros**

En este caso, el proceso sigue siendo discreto en estados pero la gran diferencia es que los cambios de estado ocurren en cualquier instante en el tiempo (tiempo continuo).

Un proceso estocástico en tiempo continuo  $\{N(t) \mid t \geq 0\}$  se denomina *proceso de conteo* si representa el número de veces que ocurre un suceso hasta el instante de tiempo  $t$ .

En particular, se tiene  $N(t) \in \mathbb{N}$  y  $N(t^*) \leq N(t) \quad \forall t^* < t$ .

Un proceso de conteo es un *proceso de Poisson homogéneo* de tasa  $\lambda$  si satisface:

1.  $N(0) = 0$
2.  $N(t_k) - N(t_{k-1})$  es una variable aleatoria independiente (proceso de incrementos independientes)  $\forall k$ .
3.  $N(t + t^*) - N(t^*)$ , que denota la cantidad de eventos que ocurren entre el instante  $t^*$  y  $t$ , sigue una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda t$ .

**5.1.3. Procesos de estados continuos y series temporales**

Un concepto importante en procesos estocásticos es la *realización*, o bien una realización de una experiencia aleatoria, que es el resultado de una repetición de esa experiencia. Por tanto, en la experiencia aleatoria de “lanzar una vez un dado” una realización posible sería obtener el número 2, en el único lanzamiento hecho. En ese caso, la realización se reduce a un único número  $\{X\}$ . Si se repite la experiencia, podrían obtener otras realizaciones (cualquiera de los números 1, 3, 4, 5 y 6).

En una experiencia  $M$ -dimensional, una realización es el resultado obtenido de los  $M$  parámetros, denotado por  $\{X_1, \dots, X_M\}$ .

Una *serie temporal* es una realización parcial de un proceso estocástico de parámetro tiempo discreto. De aquí que la teoría de los procesos estocásticos es de aplicación a las series temporales. Sin embargo, existe una fuerte restricción que radica en el hecho de que en muchas series temporales, ellas son la única realización observable del proceso estocástico asociado.

**5.2. Características y medidas de procesos estocásticos**

Para un espacio de estados  $M$ -dimensional, pueden calcularse cantidades y medidas estadísticamente representativas para los estados descritos por las variables  $M$ -dimensionales. En particular, se definen -entre tantos- medidas como tensores de valor medio y de covarianzas, que permiten obtener características representativas de los procesos estocásticos.

### 5.3. Procesos estocásticos estacionarios

En primera aproximación, se considerarán estacionarios a los procesos estocásticos que tengan un comportamiento constante a lo largo del tiempo.

Un *proceso estocástico estacionario en sentido estricto* requiere que al realizar un mismo desplazamiento en el tiempo de todas las variables de cualquier distribución conjunta finita se obtenga que esta distribución no varía. Es decir:

$$F(X_{i_1}, \dots, X_{i_M}) = F(X_{i_1+j}, \dots, X_{i_M+j}) \quad \forall i_k, j \quad (5.3)$$

En cambio, un *proceso estocástico estacionario en sentido débil* requiere que se mantengan constantes todas sus características lo largo del tiempo. Es decir, que  $\forall t$ :

1.  $\langle X_t \rangle = \langle X \rangle \quad \forall t$  donde  $\langle X \rangle$  denota el valor medio o de expectación.
2.  $\sigma_{X_t} = \sigma_X \quad \forall t$  donde  $\sigma_X$  denota la varianza.
3.  $Cov(t, t+j) = Cov(t^*, t^*+j) = C_j \quad \forall j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  donde  $Cov$  denota la covarianza y  $C$  es una constante.

#### 5.3.1. Procesos de ruido blanco

Un proceso estocástico utilizado frecuentemente es el de “ruido blanco”, dado por el proceso estacionario  $RB_t$  que satisface:

- $\langle RB_t \rangle = \langle RB \rangle = 0 \quad \forall t$
- $Var(RB_t) = \sigma^2$
- $Cov(RB_t, RB_{t^*}) = 0 \quad t^* \neq t$

En este sentido, puede interpretarse al ruido blanco como una sucesión de valores sin relación alguna entre ellos, oscilando en torno al cero dentro de un margen constante. En este tipo de procesos, conocer valores pasados no proporciona ninguna información sobre el futuro ya que el proceso es “puramente aleatorio”, y por consiguiente “carece de memoria”.

### 5.4. El transporte de radiación como proceso estocástico

Introducción via secciones eficaces explicando analogía pdf-DCS y explicar pag 6-15  
Manual PENELOPE v. 2008

### 5.5. Reformulación integral de la ecuación de transporte

A partir de la expresión íntegro-diferencial de la ecuación de transporte de Boltzmann (??), es posible reformular los términos para arribar a una ecuación completamente integral, lo cual resulta de particular utilidad para el manejo de soluciones de tipo numéricas, necesarias para situaciones realistas, ya que -como se sabe- las soluciones analíticas directas sólo son posibles en una cantidad muy limitada de configuraciones.

Operando y reordenando los términos en la ecuación de Boltzmann ??, resulta:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + s \vec{\Omega} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\frac{d}{ds} \Psi \left( \vec{r}_0 + s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) + \Sigma \Psi \left( \vec{r}_0 + s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) = \quad (5.5)$$

$$\Gamma \left( \vec{r}_0 + s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) \quad (5.6)$$

donde se ha definido  $\Gamma \left( \vec{r}_0 + s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right)$  como sigue:

$$\Gamma \equiv S + \iint \Sigma_s \left( \vec{r}_0 + s \vec{\Omega}, (\vec{\Omega}', E') \rightarrow (\vec{\Omega}, E) \right) \Psi \left( \vec{r}_0 + s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}', E', t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) d\vec{\Omega}' dE' \quad (5.7)$$

Puede verse<sup>3</sup>

$$\Psi \left( \vec{r}_0, \vec{\Omega}, E, t_0 \right) = \int_{-\infty}^0 ds \left[ e^{\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0 - s' \vec{\Omega}, E) ds'} \Gamma \left( \vec{r}_0 + s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) \right] \quad (5.8)$$

Considerando que las variables  $\vec{r}_0$  y  $t_0$  son arbitrarias, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Psi \left( \vec{r}, \vec{\Omega}, E, t \right) &= \int_0^\infty e^{\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0 - s' \vec{\Omega}, E) ds'} . \\ \left[ \iint \Sigma_s \left( \vec{r} - s \vec{\Omega}, (\vec{\Omega}', E') \rightarrow (\vec{\Omega}, E) \right) \Psi \left( \vec{r} - s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}', E', t - \frac{s}{|\vec{v}|} \right) + S \left( \vec{r} - s \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Es decir, se obtuvo una forma integral para la ecuación de Boltzmann, que puede escribirse en término de operadores<sup>4</sup>:

$$\Psi = \mathbf{K} \Psi + S' \quad (5.10)$$

Se obtiene la solución para el flujo:

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \quad (5.11)$$

Donde los términos son:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \mathbf{K} \Psi_{i-1} \\ \Psi_0 &= S' \end{aligned} \quad (5.12)$$

<sup>3</sup>Hint: Introdúzcase  $e^{\int_{-\infty}^s \Sigma(\vec{r}_0 + s' \vec{\Omega}, E) ds'}$  y calcúlese  $\frac{d}{ds} \Psi$ .

<sup>4</sup>Resulta conveniente expresar la ecuación de este modo para la resolución numérica de la misma, por ejemplo utilizando métodos estadísticos como Monte Carlo.

Matemáticamente, la solución obtenida se denomina serie de von Neuman. La interpretación física del formalismo desarrollado es particularmente apropiada en el vínculo entre los términos de la serie y los procesos físicos involucrados. El término de orden 0 se refiere al flujo primario estrictamente proveniente de la fuente de emisión  $S$ , mientras que los términos  $\Psi_i$  son las contribuciones de *scattering* a orden  $i$  obtenidas a partir del operador del *kernel de scattering*  $\mathbf{K}$ .



## CAPÍTULO 6

---

# APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE SIMULACIÓN MONTE CARLO

---

El *Capítulo 6* presenta algunos ejemplos sencillos, pero ilustrativos del modo en que puede aplicarse y aprovecharse la técnica Monte Carlo con fines de cómputo numérico. Se muestran algunas aplicaciones genéricas, como estimación de números y cálculo de integrales definidas. Por último se realiza un ejemplo de aplicación simple respecto de cómo emplear el método Monte Carlo para modelar el transporte de radiación.

### 6.1. Introducción

Tal como se enunció en secciones precedentes, existe una amplia variedad de problemas asociados al modelado del transporte de radiación, y que de hecho se presentan en la práctica en muy diversos ámbitos, que carecen de solución dentro del campo analítico, limitando el uso de “matemática pura” para la resolución de los mismos.

Este es el caso, por ejemplo, de la resolución de algunas ecuaciones íntegro-diferenciales. En particular, existen varios teoremas que demuestran la gran limitación de los métodos analíticos para la resolución directa de la ecuación de transporte de Boltzmann, representada por la expresión ???. De hecho, se conoce como resultado de teoremas que sólo puede resolverse la ecuación de transporte de Boltzmann para una cantidad muy acotada de situaciones, involucrando condiciones iniciales y de contorno que resultan muy poco realistas en casos de aplicación concreto de problemas físicos.

Por tanto, se propone un método alternativo para encontrar soluciones a la ecuación ??, para lo cual se considerará la re-escritura del problema en modo particular para posteriormente aplicar un procedimiento que consiste, básicamente, en el cálculo del valor de una integral definida. De



manera tal, que una vez replanteado (re-ordenado) el problema éste se reducirá a la resolución de una ecuación que contiene integrales definidas, y por tanto podría salvarse la imposibilidad o inconveniencia de la aplicación de los métodos tradicionales (analíticos) para la solución de diferentes tipos de problemas, en los cuales se ven limitados debido, fundamentalmente, a:

- Desconocimiento de una función primitiva de aquella que se desea integrar.
- Si bien se conoce una función primitiva, resulta excesivamente compleja o extensa su aplicación.

La evaluación de estimadores, como por ejemplo para integrales definidas, por medio el método de Monte Carlo se realiza aplicando el siguiente teorema:

*Teorema:* Sean  $x_1, x_2, \dots, x_N$   $N$  variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con función de densidad  $f(x)$ . Si  $g_i$  son funciones de  $x_i$ , entonces:

$$G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \quad (6.1)$$

es una variable aleatoria que verifica, el valor medio cumple con:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle g_i(x_i) \rangle \quad (6.2)$$

y la varianza resulta:

$$\sigma^2[G] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2[g_i(x_i)] \quad (6.3)$$

En particular, cuando todas las  $g(x_i)$  son idénticas, e iguales a  $g(x)$ , se tiene que:

$$\langle G \rangle = \langle g(x) \rangle \quad (6.4)$$

y también:

$$\sigma^2[G] = \frac{1}{N} \sigma^2[g(x)] \quad (6.5)$$

Por lo tanto, en virtud de la definición de valor medio (o esperanza matemática) de  $g(x)$ , puede escribirse en la forma:

$$\langle G \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \right\rangle \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx = \langle g(x) \rangle \quad (6.6)$$

Este resultado justifica la siguiente forma de estimar una integral definida: Muestrear una serie de números aleatorios  $x_i$  con función de densidad  $f(x)$  y evaluar  $g(x)$  para cada  $x$ . La media de los valores obtenidos para  $g(x)$  es una estimación de la integral. De acuerdo con el teorema de límite

central la varianza de esta estimación decrece con el número de términos, según se deduce de la expresión 6.5 para  $\sigma^2[G]$ :

$$\sigma = \frac{\sigma[g]}{\sqrt{N}} \quad (6.7)$$

Conviene tener presente la desigualdad de Tchebycheff, de modo que se tiene:

$$P \left[ |G - \langle G \rangle| \geq \sqrt{\frac{\sigma^2[g]}{N c}} \right] \leq c \quad (6.8)$$

De modo que se cuenta con argumento para tener una cota para la probabilidad de obtener un error mayor que el propuesto en la estimación del valor de la integral, pudiéndose siempre disminuir este error sin más que aumentar el valor de  $N$ .

## 6.2. Eficiencia del método Monte Carlo

Se define la *eficiencia del método Monte Carlo* ( $\epsilon$ ) como:

$$\epsilon \equiv \sigma^2 T \quad (6.9)$$

donde  $T$  es el tiempo de cálculo. Como el valor de  $T$  está fuertemente relacionado con el número de puntos usados en la computación, se suele dar también esta otra definición para la eficiencia:

$$\epsilon \equiv N \sigma^2 \quad (6.10)$$

Y, a partir de ésta, la eficiencia relativa ( $\epsilon_{rel}$ ):

$$\epsilon_{rel} \equiv \frac{\epsilon[N]}{\epsilon[N']} = \frac{N}{N'} \frac{\sigma^2}{(\sigma')^2} \quad (6.11)$$

Si  $\epsilon_{rel} < 1$ , entonces el método que corresponde a  $N'$ ,  $(\sigma')^2$  es “mejor” que el método con  $N$ ,  $\sigma^2$ . Si el número de puntos utilizados es el mismo, la eficiencia relativa queda reducida al cociente de las varianzas.

## 6.3. Cálculo-estimación del número $\pi$ por medio de técnicas Monte Carlo

Uno de los métodos más antiguos utilizados para estimar el valor de  $\pi$  es el método de Buffon, que emplea una serie de líneas paralelas y una vara, cuya longitud guarda correlación con la separación entre líneas, para ser arrojada y determinar el ángulo que forma éstas con las líneas, así como la línea que atraviesa.

El método propuesto a continuación, representa una analogía al método de Buffon.

Se considera un círculo de radio unidad centrado en el origen. El área del círculo en el primer cuadrante será  $\pi/4$ . Un modo de resolver este problema usando el método Monte Carlo con técnica éxito-fracaso, también denominado método de rechazo, es el siguiente:

1. Generar un par de números aleatorios  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  uniformemente distribuidos en  $[0,1]$ .
2. Determinar un punto en el primer cuadrante, de coordenadas  $(x, y)$  a partir de  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$ .
3. Determinar la distancia  $D$  del punto  $(x, y)$  al origen,  $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
4. Examinar si la distancia  $D$  es mayor o menor al radio  $R$  ( $R = 1$ ).
5. Considerar con “éxito” los procesos que den lugar a puntos en el plano dentro de círculo y como “fracaso” los que estén fuera.
6. Calcular las proporciones de éxito y de fracaso.

A continuación, se muestra una propuesta<sup>1</sup> para un código de cómputo:

#### 6.4. Ejemplos de cálculo de integrales definidas por medio del método Monte Carlo

Se considera diferentes procedimientos para calcular integrales definidas por medio del método Monte Carlo. El primero se llama “Método Monte Carlo de éxito-fracaso”, basado en la interpretación de una integral como un área. El segundo se llama “método Monte Carlo de la media muestral” y está basado en la definición de valor medio de una variable aleatoria continua.

##### 6.4.1. Método de éxito-fracaso con técnica Monte Carlo

Considérese el problema de calcular una integral unidimensional, donde se asume que el integrando  $g(x)$  es una función acotada:

$$0 \leq g(x) \leq c \quad \forall x \in [a, b]$$

Y sea  $\Omega$  el rectángulo:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } y \in [0, c]\}$$

Y sea  $(X, Y)$  una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre  $\Omega$  con función de densidad:

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{c} (b - a) & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

<sup>1</sup>El código es sólo para propósitos ilustrativos. No se encuentra preparado de modo eficiente ni optimizado.

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCC
CCC          PROGRAMA PARA ESTIMAR EL VALOR DE pi                      CCC
CCC
CCC          desarrollo de Mauro Valente, PhD 2012.-                  CCC
CCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

DOUBLE PRECISION rand, sumsq, pi, tries
OPEN(unit=6,file='EstimacionPI.dat')
notries=1000000                                ! # de muestras
sumsq=0.0; np=0                                ! inicializacion de scorings
DO 100 i=1,notries
  c1=rand(i)                                    ! rand generador # random
  c2=rand()
  c3=rand()
!      x2=x/(x+1)
!      y2=y/(y+1)
!      write(*,*)x2,y2
  xx=c3**2
  yy=c2**2
  R=sqrt(xx+yy)
!      write(*,*)R
  IF (R .LE. 1.0)THEN
    np = np + 1
    sumsq = sumsq +1.0
    !write(*,*)R,np
  ENDIF
!      write(*,*)c2,c3,R,np
100 CONTINUE
tries=FLOAT(notries); pi=FLOAT(np)/tries
!      write(*,*)pi
stdev = SQRT((sumsq/tries-pi**2)/tries)
WRITE(6,14)notries,pi*4.0d0,stdev*4.0d0
14 FORMAT (1x, 'notries : ',i10,' pi: ',f10.6,' std dev : ',f10.6)
STOP
END

```

**Figura 6.1** Ejemplo sencillo de implementación en código para estimación del número  $\pi$  con técnica Monte Carlo.

#### 6.4.2. Método de la media muestral con técnica Monte Carlo

Otra forma de calcular la integral, es representarla como el valor esperado de una variable aleatoria. Se reescribe la integral definida  $I$  en la forma:

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx \quad (6.12)$$

Donde  $f(x)$  una función de densidad correspondiente a la variable aleatoria  $x$ .  
Entonces:

$$I = \left\langle \frac{g(x)}{f(x)} \right\rangle \quad (6.13)$$

Suponiendo que la variable aleatoria se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

donde  $x$  uniformemente distribuida en  $[a, b]$ .

Entonces:

$$I = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} g(x) (b-a) dx = (b-a) \langle g(x) \rangle \quad (6.14)$$

Por lo tanto, una estimación muestral de  $I$  es:

$$I \approx (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad (6.15)$$

Mientras que el estimador para la varianza  $\sigma^2$  es:

$$\sigma^2[I] \approx \frac{1}{N-1} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N (g(x_i))^2}{N} - \left( \frac{\sum_{i=1}^N g(x_i)}{N} \right)^2 \right] \quad (6.16)$$

#### 6.4.3. Evaluación de integrales definidas

A modo de ejemplo, puede calcularse  $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2}$ .

Para ello, se recurre, por ejemplo, al método de muestreo según la expresión 6.15, por lo tanto:

$$I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{(5-0)}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1+(x_i)^2} \quad (6.17)$$

A continuación, en la figura 6.2, se muestra una propuesta<sup>2</sup> para un código de cómputo para evaluar la integral  $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2}$ :

### 6.5. El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación

En la actualidad, prácticamente todas las áreas recurren al uso de computadores para resolver problemas importantes, tanto de índole social, económica, de ingeniería, de ciencia básica, aplicada, etc. Con un manejo adecuado de programas de cómputo e información pueden realizarse cálculos y simulaciones de modelos reales, para estudiarlos y resolver problemas teóricos o de aplicación. Los procesos que contienen variables aleatorias son susceptibles de abordarse con el método Monte Carlo, que siendo método numérico capaz de explotar la capacidad de los procesadores en computadores,

<sup>2</sup>El código es sólo para propósitos ilustrativos. No se encuentra preparado de modo eficiente ni optimizado.

```

:CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
:CC                                                                CCC
:CC          PROGRAMA PARA EVALUAR INTEGRALES                      CCC
:CC                                                                CCC
:CC          desarrollo de Mauro Valente, PhD 2012.-              CCC
:CC                                                                CCC
:CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

: calcular la integral de f(x)=1/(1+x^2) en 0 <= x <= 5

      DOUBLE PRECISION rand, suma, sumasq, scr,numr1,numr2,numr3

      suma=0.                                !inicializacion variables
      sumasq=0.
      ntot=10
      DO 100 i = 1,ntot
        numr1=rand()
        numr2=rand()
        numr3=rand()
        write(*,*) ' RANDOM: ', i,numr1,numr2,numr3
        scr=5./(1+(5*numr3)**2)
        suma = suma+scr
        sumasq = sumasq + (scr**2)

100 CONTINUE
      suma=suma/(ntot); sumasq=sumasq/(ntot)
      sig= sqrt((sumasq-suma**2)/100.)
      WRITE(*,*) ' INTEGRAL =',suma,',', SIGMA =',sig
      STOP
      END

```

**Figura 6.2** Ejemplo sencillo de implementación en código para estimación de la integral definida  $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2}$  con técnica Monte Carlo.

puede aplicarse en muchas tareas más de lo que se hacía en los principios de su aplicación práctica (a principios de la década de 1950).

La simulación Monte Carlo es la mejor alternativa disponible en la actualidad para resolver el problema del transporte de la radiación en la materia cuando se trata con geometrías complejas, tales como las que se encuentran en las diversas aplicaciones médicas que utilizan radiaciones ionizantes. En esta sección se aborda la aplicación del método Monte Carlo específicamente en la simulación de la interacción de la radiación con la materia, para investigar aspectos dosimétricos y de radiodiagnóstico, de algunos problemas que existen en el área de física médica.

En términos genéricos, puede decirse que la simulación es un experimento teórico en el que se reproduce el comportamiento de un sistema complejo, que consiste de una forma de “realizar” un experimento en el cual la realidad es sustituida por un modelo matemático.

Puede considerarse como un híbrido entre experimentación pura y teórica y es una herramienta muy útil en la investigación científica. En definitiva, lo que se hacen los métodos de simulación Monte Carlo aplicados al transporte de radiación es resolver la ecuación de transporte de las partículas de una forma puramente estadística, lo cual representa ventaja sobre los métodos analíticos complejos que resuelven la ecuación de forma aproximada y sólo para problemas sencillos.

La simulación Monte Carlo en física médica se utiliza para resolver problemas diversos, como estudiar y reconstruir imágenes de pacientes tomadas con equipos digitales, realizar cálculos de carcinogénesis, obtener espectros de salida de unidades de terapia, caracterizar detectores de radiación y fuentes de radiación ionizante de todo tipo.

### 6.5.1. Tracking de partículas con el método Monte Carlo

La historia o trayectoria de una partícula es vista como una secuencia aleatoria de desplazamientos libres que terminan con un evento de interacción donde la partícula cambia su dirección de movimiento, eventualmente modifica el estado de fase (pierde energía o cambia dirección de movimiento, por ejemplo) y puede generar partículas secundarias. Todo ello se realiza aplicando las leyes de la física, atendiendo las funciones de probabilidad determinadas por las secciones eficaces adecuadas y dependiendo del medio, la energía de la partícula y la disposición geométrica del sistema.

A modo de ejemplo, se pueden simular condiciones extremas de un reactor nuclear, sin hacerlo en una instalación real; o bien simular la aplicación de un tratamiento de radioterapia a un paciente, sin llevarlo a cabo hasta que se obtengan las dosis adecuadas en los sitios convenientes en el simulador. Se han desarrollado varios códigos de simulación Monte Carlo del transporte de radiación que contienen modelos de interacción para definir las funciones de distribución de probabilidad para las distintas variables aleatorias que intervienen en cada proceso o suceso, y que permiten obtener valores medios de observables de interés como pueden ser la posición de las partículas después de cada interacción, el momento y pérdidas de energía de las partículas primarias o las secundarias generadas en algunas interacciones.

En forma genérica, el objetivo de los códigos de simulación es modelar el camino seguido por partículas que atraviesan medios materiales, atendiendo las leyes de la física y las probabilidades, a partir de ciertas condiciones iniciales del estado de fase. El medio en el que se lleve a cabo la simulación puede ser de estado sólido (generalmente amorfo), líquido o gaseoso y el modelo geométrico del sistema se define utilizando la geometría analítica.

Los códigos Monte Carlo de transporte tienen modelos de interacción para las partículas que se van a simular, es decir, conjuntos de secciones diferenciales transversales para los mecanismos de interacción relevantes. Se definen funciones de distribución de probabilidad para el camino libre entre interacciones, el tipo de interacción que ocurre y el cambio del estado de fase, como pérdida de energía y deflexión angular de las partículas.

Algunos de los códigos de simulación Monte Carlo más reconocidos para el transporte de partículas en medios materiales son EGS4, EGSnrc, PENELOPE, NOREC, MCNP, GEANT4 y FLUKA. Cada código tiene sus particularidades puede resultar más conveniente para aplicaciones distintas, por lo que se debe analizar cuál es el más adecuado al tipo de problema, escogiendo el más sencillo de acuerdo con las habilidades y capacidad de cómputo con que se cuente, y que contenga las secciones eficaces o teorías físicas de respaldo más modernas para el tipo de partícula a simular.

Para varias aplicaciones en radiodiagnóstico y radioterapia, la utilización de simulación Monte Carlo del transporte de la radiación resulta fundamental incluso necesaria.

Para ejemplificar, en el caso de aplicaciones en radiodiagnóstico, cuando un fotón o un electrón de energía elevada penetra en un medio material origina una cascada de partículas secundarias, cuyo número va en aumento al mismo tiempo que su energía media decrece. El inicio de las simulaciones de estas cascadas electromagnéticas, inicia con el trabajo de Berger en 1963, quien estableció las bases para realizar estos cálculos de forma efectiva y sobre las que todavía se trabaja hoy en día. Durante las décadas de 1970 y 1980 aparecieron los primeros programas de propósito general capaces de simular el transporte acoplado de fotones y electrones.

#### Generación de trayectorias

El proceso de simulación asume que las partículas siguen trayectorias rectilíneas a velocidad constante entre dos interacciones sucesivas con el medio. El modelado de su “vida” puede representarse como una sucesión de estados determinados por la posición del  $n$ -ésimo suceso en la posición  $\vec{r}_n$ , la dirección de movimiento  $\vec{\Omega}_n$  y energía  $E_n$  inmediatamente después de producirse dicho suceso. Dada una posición inicial, el primer punto a resolver es determinar a qué distancia se producirá el

siguiente suceso y, luego, de qué tipo será. La primera cuestión se resuelve teniendo en cuenta el hecho de que el viaje de una partícula constituye un proceso de Poisson; la segunda, considerando la relación entre las secciones eficaces de las diversas interacciones posibles.

Si  $\lambda_i$  representa el recorrido libre medio (mfp) correspondiente a la interacción de tipo “i”, y  $\lambda$  el mfp total (cuyo inverso es la suma de inversos de los recorridos libres medios parciales), la distancia  $s$  recorrida por la partícula hasta el próximo suceso se determina mediante la expresión 6.18:

$$s = -\lambda \ln(\zeta) \quad (6.18)$$

donde  $\zeta$  es un número aleatorio uniformemente en  $[0, 1]$ .

La probabilidad  $P_i$  de que la interacción sea del  $i$ -ésimo tipo es:

$$P_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} \quad (6.19)$$

Una vez sorteado el tipo de interacción a simular de acuerdo con las probabilidades expresadas por en la ecuación 6.19, es necesario simular el cambio de estado (típicamente dirección y energía) que haya podido producirse. Para ello se emplea la distribución de probabilidad asociada a la sección eficaz doble diferencial correspondiente.

Por tanto, el proceso transforma el estado  $(\vec{r}_n, \vec{\Omega}_n, E_n)$  al  $(\vec{r}_{n+1}, \vec{\Omega}_{n+1}, E_{n+1})$ . El proceso se repite hasta que, o bien la partícula escapa del sistema material, o bien su energía cae por debajo de cierto valor, momento en el cual se supone que es localmente absorbida y su vida terminada. Tras simular la vida de una partícula debe hacerse lo propio con las partículas secundarias a las que haya dado lugar.

### 6.5.2. Modelado de colisiones e interacciones con el método Monte Carlo

Los procesos de colisión se implementan en la técnica de simulación Monte Carlo por medio de modelos de interacción que determinan las secciones eficaces. Para ello, en las aplicaciones típicas de transporte de radiación ionizante, se requiere el conocimiento de las secciones eficaces doble diferencial en energía y ángulo sólido. Los valores de las secciones eficaces pueden ser introducidos en la simulación Monte Carlo por medio de modelos analíticos que son directamente evaluados para las variables de estado de cada caso; y también puede emplearse tablas de valores obtenidas de bases de datos, que requieren procesos posteriores para interpolar (asumiendo continuidad) permitiendo obtener el valor correspondiente a las variables de estado.

#### Técnicas de simulación condensada

En principio, el esquema de simulación anteriormente presentado es válido para cualquier tipo de partícula. En la práctica, sin embargo, no resulta adecuado cuando se consideran -por ejemplo- electrones de alta energía, dado que el número de interacciones a lo largo de su trayectoria antes de ser absorbidos resulta excesivamente elevado, del orden de algunas decenas de miles para electrones de 1 MeV, por ejemplo. Tal cantidad de colisiones requeriría un tiempo de simulación tan grande que convierte a la solución propuesta al problema en algo inviable.

El modo de resolver las dificultades derivadas de este inconveniente se recurre a una técnica denominada “simulación condensada”, cuyo fundamento se encuentra en las teorías de dispersión múltiple. La idea consiste, básicamente, en simular el efecto global neto de un número elevado de interacciones



mediante un único suceso “artificial”. Exista una variante, propuesta por Berger, conocida como simulación mixta, que se combina la simulación detallada de los sucesos más “violentos” con la condensada de los restantes, resultando un algoritmo particularmente robusto y versátil.

Los diversos esquemas de simulación condensada constituyen quizás la principal característica que distingue los programas de uso más extendido. De hecho, la concepción de nuevos algoritmos más precisos y más rápidos es uno de los temas de investigación abiertos en el campo de la simulación Monte Carlo del transporte de la radiación.

#### Cantidades de interés en la simulación de partículas

Para obtener el valor medio de un observable  $Q$  ( $\langle Q \rangle$ ) por medio de simulación Monte Carlo, en el transporte de radiación, conviene introducir el concepto de “historia” entendida como la “vida” de una partícula primaria y la de todas las secundarias generadas por ésta. A modo de ejemplo, podría tratarse de la dosis en un cierto volumen de interés.

Sea  $q_j$  a la contribución de la  $j$ -ésima historia, la estimación del valor medio del observable (en el ejemplo, la energía depositada por historia) tras simular un total de  $N$  historias provee el siguiente estimador para  $q$  para  $\langle Q \rangle$ :

$$\langle Q \rangle \sim q \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \quad (6.20)$$

que coincide con la expresión 6.1.

#### **6.5.3. Ejemplo básico artificial de transporte con el método Monte Carlo**

A modo de ejemplo extremadamente sencillo, se propone realizar el modelado por simulación Monte Carlo de una partícula libre moviéndose en un plano. El problema conocido como *random walk* consiste en mover una partícula con paso  $p$  con características isotrópicas y homogéneas para el medio en que se transporta la partícula.

Entonces, la distribución angular que corresponde al cambio en la dirección de movimiento es isotrópica, y se busca, en general, determinar la distancia neta recorrida al cabo de  $N$  movimientos.

#### **6.5.4. Ejemplo sencillo de transporte con el método Monte Carlo: Columna de neutrones**

El transporte de neutrones, por ejemplo, puede implementarse siguiendo, a grandes líneas según el esquema:

1. Definición de la geometría del problema.
2. Definición de la fuente.
3. Selección del tipo de partícula para la fuente.

4. Determinación de la posición de colisión.
5. Determinación del tipo de interacción.
6. Determinación del resultado de la interacción.
7. Finalización de la historia de los secundarios.
8. Cálculo de los estimadores.

A modo de ejemplo, se considera una fuente puntual que emite un pulso, es decir una función  $\delta$ , neutrones en la dirección  $z$  y está inmersa en un medio material homogéneo e isotrópico. Se considera como geometría una esfera de radio  $R$  y ausencia de absorción y el movimiento de las partículas es siempre en dirección  $z$  alejándose de la fuente. Estimar la cantidad de interacciones que ocurren dentro de la geometría, introduciendo el modelado y parámetros que sean necesarios.



## CAPÍTULO 7

---

# DESCRIPCIÓN DE LAS CONFIGURACIONES RADIOLÓGICAS EN SIMULACIONES MONTE CARLO

---

El presente capítulo se trata sobre una breve introducción a códigos de simulación Monte Carlo dedicados al transporte de radiación. Se presentan las características genéricas de los códigos PENELOPE y FLUKA. La exposición se enfoca en la posibilidad de realizar aplicaciones en radiodiagnóstico.

### 7.1. Introducción y parámetros en la simulación del transporte de radiación

Como se mencionó en las secciones precedentes, los métodos Monte Carlo son una forma genérica para denominar procedimiento matemáticos cuya característica común es el uso de números generados aleatoriamente y distribuciones de probabilidad. En la actualidad el método Monte Carlo es ampliamente aceptado y cada vez mas extendido, como una herramienta para realizar investigación científica, específicamente para modelar el transporte de radiación en medios materiales.

En muchos casos de interés en el campo de radiodiagnóstico, como una situación particular del transporte de radiación, el método Monte Carlo es el más apropiado, ya que no se dispone de métodos alternativos de carácter experimental, análítico y/o instrumental.

### 7.2. Setups virtuales

El método Monte Carlo puede resultar fácilmente aplicable a sistemas con geometrías complejas y diferentes medios materiales. De hecho, éste método permite simular el paso de la radiación a través de la materia tomando en cuenta todos los procesos físicos relevantes y todos los tipos de

radiación involucrados, como tipo de partículas (electrones, positrones, fotones, neutrones, iones pesados y partículas como muones, kaones, etc) que pueden ser simulados hasta que se detengan.

En términos genéricos, el armado de la configuración de irradiación requiere de definir la fuente de radiación (en propiedades físicas y geométricas), la muestra que es irradiada (en geometría y propiedades físicas), los sistemas de detección, con las propiedades definidas por el usuario, así como determinar cuáles son los procesos, y bajo qué criterios, se consideran en la simulación.

A modo de fijar ideas, se presenta el diseño del set up de una situación típica en radiodiagnóstico, como es la simulación de un tubo de rayos X:

La geometría que debe simularse para el proceso de producción de rayos X se corresponde con el dispositivo típico de un tubo de rayos X. En primer lugar, se define la fuente de electrones mediante (por ejemplo mediante fuentes puntuales ubicadas a lo largo de una longitud de 2 mm). Los electrones viajan en línea recta hacia el ánodo de material (por ejemplo, tungsteno con espesor de 0.5 mm y ángulo de inclinación de unos 10 - 15 grados). Cuando los electrones ingresan en el material blanco el programa simula la trayectoria de los electrones hasta que éstos finalmente llegan al “reposo” o a una situación terminal. Durante los procesos de interacción se considera la producción de rayos X característicos y Bremsstrahlung. Los fotones que emergen del blanco atraviesan la envoltura de vidrio pirex de 0.5 mm de espesor, y finalmente el filtro adicional de aluminio de 1 mm de espesor.

El espectro calculado representa el número de fotones por intervalo de energía en función de la energía. Los resultados pueden ser obtenidos con los códigos PENELOPE o FLUKA, entre otros.

### 7.3. Ejemplos de códigos de simulación Monte Carlo para transporte de radiación

Existen disponibles varios códigos de simulación dedicados a modelar el transporte de radiación. Algunos de los códigos más utilizados en aplicaciones de física médica son MCNP, EGS4, GEANT4, PENELOPE y FLUKA.

En general, los códigos de simulación Monte Carlo construyen un modelo estocástico en base a funciones de densidad de probabilidad modelando secuencialmente eventos individuales de una variable aleatoria. Es decir, teóricamente se siguen todos los eventos o interacciones que sufre cada partícula desde su origen hasta que alcanza una condición terminal (absorción, escape, energía de corte, etc).

Para cualquier evento, los códigos de simulación generan un número aleatorio fundamentándose en las funciones de densidad de probabilidad, que definen el tipo de interacción y otros parámetros. Posteriormente, se calcula el valor esperado de todos los eventos simulados.

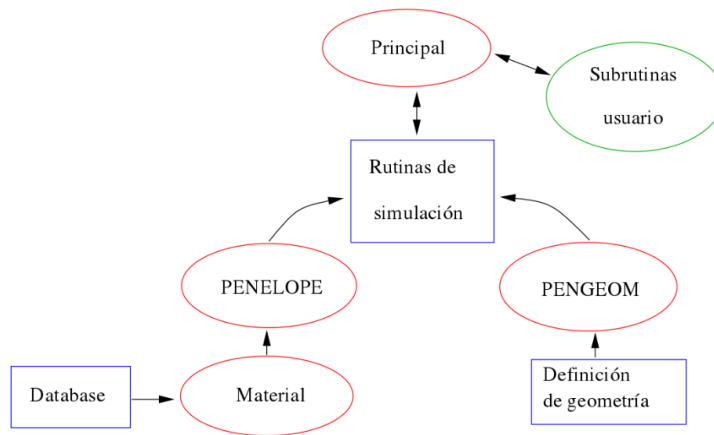
Para realizar una simulación, debe crearse un archivo de entrada, típicamente denominado “input”. Este archivo contiene de manera estructurada información sobre el problema en aspectos tales como la geometría del problema, materiales utilizados, secciones eficaces a utilizar, la localización y características de la fuente y los tipos de resultados que se desea obtener de la simulación.

#### 7.3.1. El código PENELOPE v. 2008

El código PENELOPE refiere a PENetration and Energy LOSS of Positrons and Electrons (luego se incorporaron fotones).

Algunas de las principales características son:

- Cascadas acopladas de tipo “fotón-electrón”.
- Transporte de fotones por medio de simulación detallada, que refiere a computar evento por evento.



**Figura 7.1** Diagrama esquemático de la estructura de PENELOPE.

- Transporte de electrones/positrones por medio de simulación mixta, i.e. en combinación entre simulación detallada y técnicas denominadas “simulación condensada”, que consisten básicamente de implementar criterios para acumular una serie de eventos en único evento equivalente -estadísticamente-. Para ello, se cuenta con formalismos teóricos denominados multiple scattering theory.
- El rango de energía disponible en PENELOPE es 50 eV a 1 GeV.
- Las partículas secundarias que se generan son simuladas en orden cronológico.

Existen, cuatro estructuras o bloques principales:

- **Input:** Se requiere de un archivo de inicialización para ingresar los datos de entrada.
- **Modelado de eventos de colisión:** Simulación de interacciones.
- **Algoritmos internos de cómputo:** Rutinas numéricas asociadas al proceso de cómputo.
- **Modelo de tracking:** Transporte de la radiación.

Al iniciar la simulación, PENELOPE lee el archivo de input, realiza la simulación y, como resultado, crea archivos nuevos de salida denominados “outputs”, que incluyen los resultados generados, estimaciones para los errores producidos y algunas tablas que resumen el proceso de simulación.

La figura 7.1 muestra esquemáticamente el diagrama de flujos del código PENELOPE.

La base de datos de PENELOPE cuenta con 279 materiales, entre elementos puros y compuestos.

### 7.3.2. El código FLUKA v. 2011

El proyecto FLUKA pertenece al CERN, y es desarrollado para propósitos de física de partículas de alta energía, alcanzando valores de hasta varias decenas de TeV, o incluso mayores con linking a nuevas librerías restringidas.

En términos generales, FLUKA es un paquete integral de simulación de física de partículas. Cuenta con varios campos de aplicación que incluyen, entre otros, física teórica y experimental de

<b><u>Main Library:</u></b>		
libflukahp.a (object collection)		
<b><u>Physics data files:</u></b>	<b><u>Basic Scripts: (in \$FLUPRO/flutil)</u></b>	
sigmapl.bin	rfluka	
elasct.bin	lfluka	
brems_fin.bin	fff	
cohff.bin		
gxsect.bin		
neuxsc-ind_260.bin	random.dat	
neuxsc-ind_72.bin		
<b><u>Random Number seed</u></b>		
<b><u>Important Directories</u></b>		
nuclear.bin	flukapro/	all fluka commons
fluodt.dat	uservmax/	user routines
e6r1nds3.fyi	flutil/	general utilities
jef2.fyi		
jendl3.fyi		
xnloan.dat		

7th FLUKA Course – Paris Sept.29-Oct.3 2008

6

**Figura 7.2** Contenido básico de FLUKA.

alta energía, ingeniería, diseño de infraestructuras y protecciones (shielding), diseño de telescopios y detectores, estudios de rayos cósmicos, dosimetría, física médica y radiobiología.

En cuanto a su capacidad, brevemente FLUKA puede simular con gran precisión todos los procesos de interacción y propagación de más de sesenta tipos de partículas, entre ellas fotones y electrones, neutrinos, muones de varias cantidades de energía, hadrones, así como de sus correspondientes antipartículas.

La figura 7.2 muestra esquemáticamente el contenido central del paquete FLUKA.

## CAPÍTULO 8

---

# RADIODIAGNÓSTICO ANATÓMICO ESTUDIADO CON SIMULACIONES MONTE CARLO

---

El presente capítulo presenta algunos ejemplos simples del uso de técnicas de simulación Monte Carlo para caracterizar propiedades estructurales de anatomía. Se realizan aplicaciones típicas del ámbito de radiodiagnóstico.

### 8.1. Consideraciones para la simulación de imágenes morfológicas

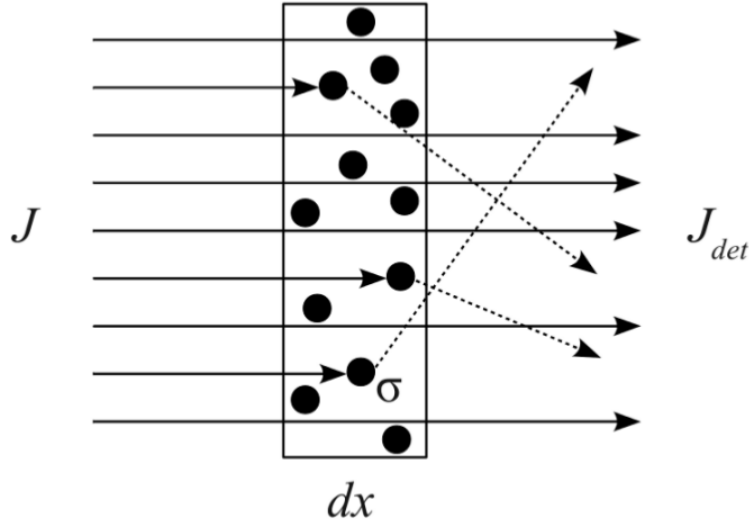
Existen diferentes métodos que han sido aplicados e implementados rutinariamente para el imaging médico con la premisa de lograr técnicas no invasivas capaces de prevenir o diagnosticar patologías.

Para el estudio de las técnicas radiológicas son necesarios conocimientos avanzados de interacción de la radiación ionizante con la materia, específicamente materiales biológicos típicos en pacientes. Desde un punto de vista general, puede caracterizarse a las técnicas de imaging médico según dos categorías: la primera dedicada a extraer información estructural de tipo anatómica y la segunda de carácter funcional para determinar las propiedades metabólicas.

A continuación se presentan métodos numéricos y modelos analíticos, integrados en algoritmos, capaces de modelar los principales fenómenos físicos relacionados con el transporte de radiación y procesos de interacción con medios materiales de interés biológico.

A modo de ejemplo se presentan implementaciones de metodologías conjuntamente con pruebas preliminares para casos de aproximaciones de imaging por contraste de absorción, como radiografía y mamografía.





**Figura 8.1** Esquema de irradiación típico.

## 8.2. Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas

De acuerdo con los capítulos precedentes, los fotones interactúan con las partículas del material irradiado de diferentes maneras y a cada tipo de interacción corresponde funciones de densidad de probabilidad según los modelos de probabilidad para las secciones eficaces de cada tipo de evento.

Considerando un haz homogéneo de partículas descrito por la cantidad de partículas por unidad de área por unidad de tiempo ( $J = N/(S \cdot t)$ ) incidiendo en una muestra delgada de espesor  $dx$  de un cierto material, como muestra la figura 8.1.

Suponiendo un sistema de detección ideal, colocado para contabilizar sólo partículas que emergen de la muestra irradiada que no hayan interactuado con la muestra.

Resulta que la medición del detector será  $J_{det} = J + dJ$ , donde  $dJ$  indica el número de partículas que efectivamente interactúan con la muestra. Nótese que  $dJ$  debe ser una cantidad negativa dado que toma en cuenta las partículas que emergen menos aquellas que inciden en la muestra.

Debido a que el haz es de distribución espacial uniforme en fluencia en el área de incidencia  $S$  y que la muestra delgada puede considerarse, en muy buena aproximación, de características diferenciales  $dx$ , la fracción de área cubierta por el target resulta que

$$\frac{dS}{S} = \frac{J - J_{det}}{J} = \frac{-dJ}{J} \quad (8.1)$$

donde  $dS$  es el área correspondiente a centros de scattering y  $S$  es el área total del haz de irradiación.

Si  $\sigma$  es la sección eficaz de un único centro de scattering y  $dn_c$  es el número total de centros de scattering en el volumen  $dV$ , entonces:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dn_c \sigma}{S dx} dx = \frac{dn_c}{dV} \sigma dx = \eta \sigma dx \Rightarrow \frac{-dJ}{J} = \eta \sigma dx \quad (8.2)$$

donde  $\eta \approx dn_c/dV$  es el número de centros de scattering por unidad de volumen. En particular, en el caso de un material de densidad  $\rho$  y masa molar  $M$ ,  $\eta$  se obtiene de:

$$\eta = \frac{N_A \rho}{M} \quad (8.3)$$

donde  $N_A$  es el número de avogadro.

### 8.3. Simulación Monte Carlo de prácticas de radiografía y mamografía

Los métodos de imaging médico generalmente emplean haces externos de rayos X realizando irradiaciones en diferentes modalidades para extraer información estructural. En este sentido, la anatomía de pacientes puede ser obtenida por medio de alguno de estos métodos.

Desde un punto de vista general, las técnicas de imaging médico anatómicas consisten en el uso de haces externos de rayos X generados por Bremsstrahlung y efecto fotoeléctrico de electrones que colisionan con ánodos que constituyen el blanco del tubo de rayos X.

Una vez que la radiación emerge de la muestra después de haber interactuado con el paciente (o la muestra), se produce la detección por medio de sistemas específicos de detección de radiación, originalmente películas radiográficas, y más recientemente dispositivos como detectores de estado sólido. La detección de la radiación es luego sintetizada para conformar la imagen virtual que puede plasmarse en formato analógico o digital.

Por tanto, los principales aspectos y la información requerida para ser incluida en la realización de técnicas de imaging anatómico, son:

- Configuración de irradiación especificando la estructura y la disposición geométrica y experimental, así como los componentes instrumentales.
- Conocimiento preciso del espectro y características geométricas del haz de radiación incidente.
- Información sobre el sistema de detección, como respuesta a la radiación, diseño, calibración, etc.
- Anatomía de paciente (o muestra) cuyas propiedades materiales serán inferidas.
- Modelos de interacción radiación-materia, los cuales pueden ser obtenidos por medio de modelos teóricos con expresiones analíticas o parámetros tabulados.



## CAPÍTULO 9

---

# RADIODIAGNÓSTICO METABÓLICO ESTUDIADO CON SIMULACIONES MONTE CARLO

---

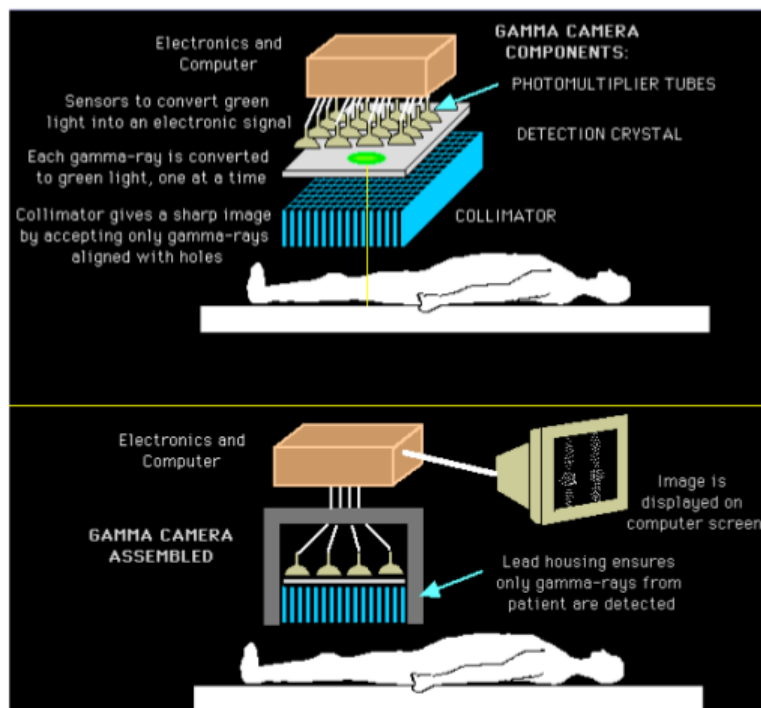
El presente capítulo está dedicado a presentar muy brevemente las características básicas de las técnicas de radiodiagnóstico de tipo funcional. Se describe cómo éstas permiten recavar información de carácter metabólico para complementar la información disponible en vista de realizar el diagnóstico en ámbito clínico. Se puntualizan los aspectos principales sobre cómo implementar técnicas de simulación Monte Carlo para estudiar este tipo de procesos de imaging.

### 9.1. Imágenes funcionales para fisiología metabólica

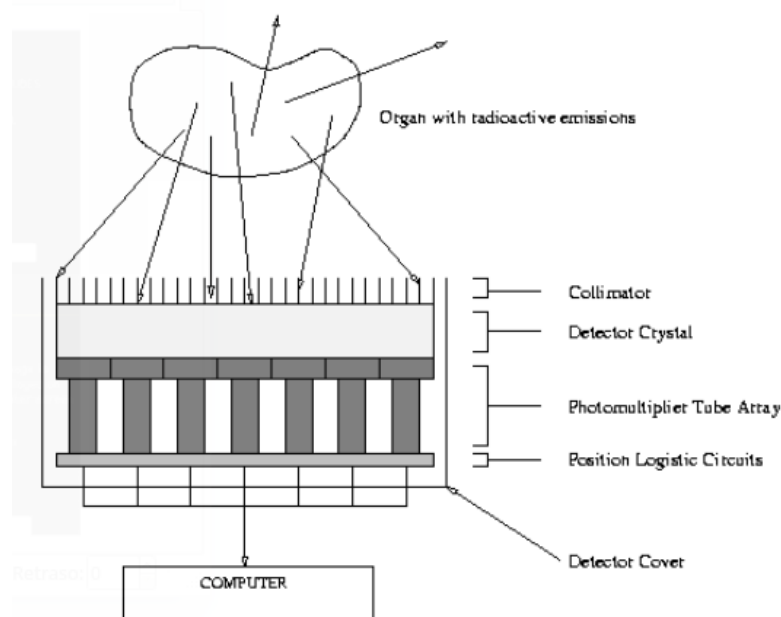
Actualmente, la combinación de técnicas físicas sofisticadas y métodos de procesamiento digital de los datos obtenidos por las máquinas que adquieren las imágenes médicas es un campo que permite extraer una información que se sitúa más allá de la simple observación de las imágenes en las placas radiográficas o en los monitores diagnósticos. Las técnicas actuales permiten, por medio de métodos digitales, proveer información precisa de la anatomía del área estudiada y obtener, a la vez, información funcional.

Para estudiar la funcionalidad subyacente se han utilizado técnicas como la tomografía por emisión de positrones (PET) o la tomografía por emisión simple de fotones (SPECT). Sin embargo, el dispositivo típico y más común para la detección de radiación en aplicaciones de medicina nuclear es la cámara gamma, en la modalidad indicada en la figura 9.1.

El principio básico de funcionamiento de la cámara gamma como equipamiento de imágenes de medicina nuclear es aprovechar la incorporación al paciente de moléculas que contienen algún átomo radioactivo y que, dependiendo del metabolismo será su distribución en el tiempo. Puede ser



**Figura 9.1** Configuración para estudios en medicina nuclear utilizando cámara gamma.



**Figura 9.2** Esquema de los componentes básicos de un detector tipo cámara gamma.

usada para tratamiento, como en el caso del  $^{131}\text{I}$ , que en dosis adecuadas se deposita en la tiroides y conformando un tejido de similar comportamiento (cáncer de tiroides) destruyendo sus células o puede usarse también para diagnóstico.

## 9.2. Aplicaciones en Cámara Gamma

En términos técnicos, la cámara gamma consiste en un colimador, o blindaje calibrado, para que la radiación del radioisótopo a evaluar sólo pueda alcanzar el detector si ha realizado una trayectoria perpendicular al mismo; un detector de radiación por centelleo, que es un cristal en el que al incidir radiación emite luz, luego ésta es captada por un arreglo de fotomultiplicadores (sistemas electrónicos que transforman la luz en una corriente eléctrica); después del arreglo de fotomultiplicadores, un sistema electrónico realiza la detección contando y catalogando estos eventos para armar un mapa de distribución plano de la radiación frente al detector. La intensidad de la radiación detectada depende tanto de la distribución como de la atenuación que sobre la radiación realiza la parte del cuerpo del paciente que se interpone entre el punto donde se produjo un determinado evento y el detector.

La figura 9.2 muestra esquemáticamente la constitución de la cámara gamma y el trazado de rayos.

Actualmente, estos sistemas además de permitir la adquisición de imágenes planas, pueden rotar alrededor del paciente obteniendo varias imágenes planares con las que, computadora por medio de un algoritmo matemático, genera cortes transversales, mejorando la relación señal a ruido, recuperando información perdida por atenuación y en general optimizando el diagnóstico.

Cada imagen de cámara gamma, así como una radiografía, brinda información bidimensional, pero pueden combinarse muchas imágenes tomadas desde distintas posiciones alrededor del paciente

para obtener una imagen tridimensional, dando lugar a, por ejemplo, la técnica de Single Photon Emission Computed Tomography -SPECT. Esta imagen tridimensional puede después manipularse de manera digital para obtener secciones dimensionales del cuerpo en cualquier orientación requerida.

## CAPÍTULO 10

---

# RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA EN RADIODIAGNÓSTICO

---

En este capítulo se presentarán los fundamentos matemáticos sobre los cuales se sostiene la reconstrucción tomográfica para obtener cortes transversales a partir de imágenes radiográficas. Posteriormente se presentarán las características necesarias para el haz de irradiación y los diferentes parámetros en la adquisición de imágenes de CT<sup>1</sup>, así como aplicaciones en radiodiagnóstico anatómico y metabólico y el procesamiento de imágenes 3D.

### 10.1. Introducción

El concepto -y la palabra- tomografía proviene de la conjunción de dos palabras griegas: *τομος* ('tomos': corte, rebanada) y *γραφω* ('grafo': escribir). La técnica consiste en la adquisición de imágenes resultantes de la atenuación de un haz de rayos X al atravesar un cuerpo desde diferentes ángulos, y por medio de la implementación de modelos matemáticos que permiten reconstruir las estructuras internas del mismo para obtener cortes transversales y una imagen tridimensional del cuerpo en función de las propiedades de absorción de rayos X de sus materiales.

En el proceso, los rayos X son producidos en un tubo de rayos X, son atenuados por el cuerpo al que se le realiza la irradiación y detectados por un detector de rayos X, esto produce una "proyección". Este proceso es repetido para diferentes ángulos de irradiación y por medio de métodos de reconstrucción tomográfica, con estas proyecciones se obtienen los cortes transversales que dan lugar a la imagen 3D.

<sup>1</sup>Tomografía Computada, por sus siglas en inglés "*Computed Tomography*"



En 1917, Radon postula las bases matemáticas para la obtención de cortes transversales a partir de proyecciones, dando lugar a la conocida “Transforma de Radon”. Recién en 1971 se construye el primer equipamiento que utiliza este tipo de tecnología a partir de imágenes de rayos X (descubiertos por Röntgen en 1895), el cual es presentado en 1972 en Inglaterra por parte de Hounsfield. Esto le valió el Premio Nobel de Fisiología o Medicina en 1979.

Las imágenes de CT consisten principalmente de tensores de dimensión  $n \times m \times l$  donde los cortes transversales son representados por matrices  $n \times m$  y  $l$  representa el número de cortes transversales. Los niveles de grises de las imágenes son presentados en “unidades de Hounsfield” ( $HU$ , por sus siglas en inglés), definidas a partir del coeficiente de atenuación del agua,  $\mu_{H_2O}$ .

$$\text{Número de CT (en } HU) = \frac{\mu - \mu_{H_2O}}{\mu_{H_2O}} \cdot 1000 \quad (10.1)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de atenuación lineal de los materiales del cuerpo. Así, los  $HU$  de agua y aire resultan 0 y -1000, respectivamente, mientras que el hueso y materiales más densos<sup>2</sup> que el agua dan por resultado  $HU > 0$ .

## 10.2. Tipos de scanner CT

La historia de los escáneres de CT data, como se menciona antes, de 1971 con el desarrollo del primer equipamiento presentado por Hounsfield. Estos escáneres evolucionaron tanto desde el punto de vista tecnológico como de los métodos para la obtención de las proyecciones y son consecuente reconstrucción tomográfica. El primer tipo de escáner contemplaba un arreglo geométrico de haz paralelo, creándose el primero de haz en forma de abanico (*fan-beam*) en 1976. Recién en 1989 surge el primer escáner que obtiene imágenes girando el sistema tubo-detectores de forma continua y sincronizada con el movimiento de la mesa donde se ubica el paciente, dando lugar a la adquisición de tipo helicoidal o espiral y posteriormente a la adquisición de varios cortes para un mismo giro.

La figura 10.1 muestra una línea del tiempo con los distintos tipos de escáneres de CT y el avance tecnológico.

Una forma de clasificar los diferentes tipos de escáners, su método de adquisición de proyecciones y sus tipos de reconstrucción se puede definir en función de 3 diferentes tipos de configuración:

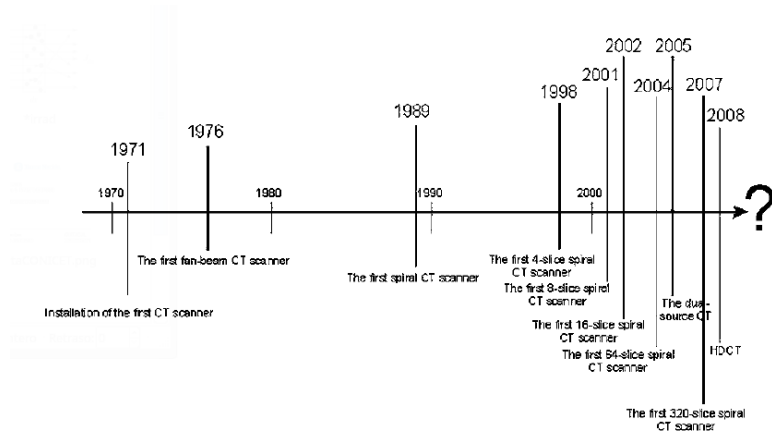
- Sistema de proyección utilizando haz paralelo
- Sistema de proyección utilizando *fan-beam*
- Sistema de proyección utilizando haz cónico (*cone-beam*)

El sistema de proyección utilizado, y la configuración de las diferentes partes del escáner (gantry, tubo de rayos X, arreglo de detectores y mesa) define los escáneres en función de su generación.

### 10.2.1. 1era generación

Los escáneres de primera generación (1971) también conocidos como *pencil beam* o *traslational/rotational single detector* son aquellos que contemplan el uso de un haz paralelo y dos tipos de movimiento del gantry. Un movimiento lateral continuo, para el cual el gantry se mueve de forma continua en

<sup>2</sup>Nótese que en este contexto el concepto de “densidad” se refiere a la densidad electrónica, que define las propiedades de atenuación del haz de rayos X.



**Figura 10.1** Imagen tomada del libro *X-Ray Computed Tomography in Biomedical Engineering*.

$z$  para la obtención de datos para un determinado ángulo, y un sistema de rotación circular discreta donde se obtienen las proyecciones para cada ángulo.

En los escáneres de primera generación el movimiento lateral puede ser continuo o discreto, mientras que el movimiento circular es siempre discreto. Cada proyección se construye con un “ida y vuelta” en movimiento lateral para cada ángulo fijo.

### 10.2.2. 2da generación

En 1972 se desarrolla el primer escáner de segunda generación donde se incorporan grandes arreglos de detectores y es conocido como *partial fan-beam* o *translational/rotational multiple detector*. Estos escáneres tienen arreglos de entre 3 y 32 detectores y funcionan con un haz en forma de abanico que permite cubrir áreas más grandes del objeto a medir.

En los escáneres de segunda generación se reduce la cantidad de proyecciones necesarias para una reconstrucción y con ellas el tiempo de adquisición de una imagen. Además el movimiento lateral y circular es combinado. Esta generación de escáneres es considerada la transición entre el haz paralelo y el *fan-beam*.

### 10.2.3. 3era generación

Los haces de tercera generación (1976) incorporan definitivamente el *fan-beam*, se elimina el movimiento lateral y se limita a movimiento circular. Son también conocidos como *fan-beam* o *continuous radiation*. Utilizan un haz en forma de abanico con un ángulo de apertura entre 40 y 55 grados que cubre todo el cuerpo (*Field of View, FOV*) y un arreglo de hasta 1000 detectores moviéndose sincronizadamente con el tubo.

La reducción del tiempo de adquisición de una imagen se reduce de 5 minutos a 5 segundos y después de obtener todas las proyecciones para todos los ángulos necesarios, se mueve la camilla para iniciar el procedimiento en otro  $z$ . Así se realiza el mismo procedimiento para cada corte transversal.

### 10.2.4. 4ta generación

Los haces de cuarta generación (1978) conocidos como *rotated-fixed*<sup>3</sup> utilizan un arreglo de 600-5000 detectores fijos organizados en forma de arco donde se obtienen las diferentes proyecciones rotando el tubo.

### 10.2.5. Scanners espirales

Los escáneres de tipo espiral (*helicoidal CT* o *spiral CT*, 1989) combinan el movimiento del tubo a los diferentes ángulos de las proyecciones con el movimiento de la mesa donde se obica el paciente que se desplaza de forma continua a lo largo del eje del gantry. Esto genera un movimiento helicoidal del sistema.

Incorporando luego haces cónicos, permiten la obtención de varios cortes en un mismo procedimiento y una reducción de imagen de cuerpo completo a menos de 2 minutos, con una resolución de 0,23 mm.

## 10.3. Reconstrucción tomográfica

### 10.3.1. Transformada de Radón y proyecciones

Consideremos una geometría con un haz paralelo como en la figura 10.2 donde  $\mu(x, y)$  representa la distribución del coeficiente de atenuación lineal en el plano  $xy$ . Se puede asumir que el paciente se encuentra recostado sobre el eje  $z$  y que  $\mu(x, y) = 0$  para la región fuera del diámetro  $FOV$ .  $\theta$  representa el ángulo con el que viajan los rayos X respecto del eje  $y$ ,  $I_0$  es la intensidad del haz y  $rs$  plano de ejes cartesianos girado un ángulo  $\theta$  respecto del plano  $xy$ .  $rs$  se encontrará siempre en línea con el haz incidente, por lo que se puede tomar obtener el siguiente esquema de transformación:

$$r = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \quad (10.2)$$

$$s = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \quad (10.3)$$

Entonces, para un ángulo  $\theta$  dado, el perfil de intensidad  $I_\theta(r)$  queda definido como

$$I_\theta(r) = I_0 \cdot e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(x,y) ds} = I_0 \cdot e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds} \quad (10.4)$$

donde  $L_{r,\theta}$  representa la línea que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $y$  a una distancia  $r$  del origen de coordenadas del sistema.

En términos realistas, tanto la atenuación como el espectro de rayos X dependen de la energía de los fotones, por lo que es necesario incorporar en la ecuación esta variable y la sección eficaz  $\sigma(E)$ . Pero en la práctica se asume un haz monocromático de energía  $E_0$ <sup>4</sup>.

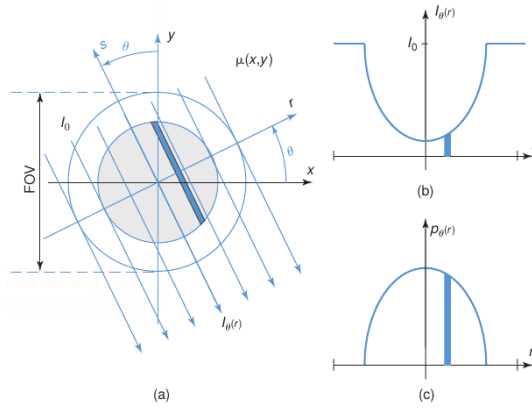
Así, el perfil de atenuación  $p_\theta(r)$  en función de  $r$  se puede escribir a partir de la ec. 10.4 de la forma

$$p_\theta(r) = -\ln \left( \frac{I_\theta(r)}{I_0} \right) \quad (10.5)$$

donde  $p_\theta(r)$  define la “proyección” de la función  $\mu(x, y)$  a lo largo del ángulo  $\theta$  y  $p_\theta(r) = 0$  para  $|r| \geq FOV/2$ . Éste será medido en un

<sup>3</sup>En este caso el término *rotated* hace referencia al tubo, mientras que el término *fixed* hace referencia a los detectores

<sup>4</sup>Salvo la recientemente desarrollada técnica de *dual-energy CT*.



**Figure 3.5** (a) Parallel-beam geometry with coordinate systems. The X-ray beams make an angle  $\theta$  with the y-axis and are at distance  $r$  from the origin. (b) An intensity profile  $I_\theta(r)$  is measured for every view (defined by an angle  $\theta$ ).  $I_0$  is the unattenuated intensity. (c) The attenuation profiles  $p_\theta(r)$ , obtained by log-converting the intensity profiles  $I_\theta(r)$ , are the projections of the function  $\mu(x,y)$  along the angle  $\theta$ .

**Figura 10.2**

### 10.3.2. Retroproyección

### 10.3.3. Teorema de la proyección

### 10.3.4. Reconstrucción directa de Fourier

### 10.3.5. Retroproyección filtrada

La retroproyección filtrada FBP<sup>5</sup>

### 10.3.6. Retroproyección filtrada en *fan-beam*

Hasta el momento solo se han considerado datos obtenidos de una configuración geométrica que asume haz paralelo desde la fuente pero, como hemos visto, los escaners de tercera y cuarta generación contemplan haces dispuestos en forma de abanico, también conocidos como *fan-beam*.

Ahora, la ubicación  $(x, y)$  que en el sistema de haz paralelo se ubicaba según el eje  $(r, \theta)$ , en fan-beam se indicará según los ejes  $(\gamma, \beta)$ , donde  $\gamma$  es el ángulo entre el centro del abanico y la recta que une la fuente con  $(x, y)$  y  $\beta$  corresponde al ángulo entre la fuente y el eje  $y$  (ver figura 10.3). Se define además, el *fan-angle* como el ángulo formado por el abanico. Ahora las mediciones deberán tomarse para  $\beta$  entre  $0$  y  $\pi + \text{fan-angle}$ , para poder contemplar todas las regiones de interés. Por simplicidad, se asume entonces que el rango de los datos en  $\beta$  será  $(0, 2\pi)$ .

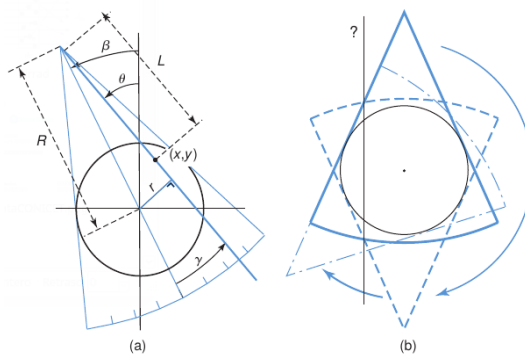
Los nuevos ejes  $(\gamma, \beta)$  se corresponderán con los ejes  $(r, \theta)$  según la transformación:

$$\theta = \gamma + \beta \quad (10.6)$$

$$r = R \sin \gamma \quad (10.7)$$

donde  $R$  representa la distancia desde la fuente al centro del FOV. Tomando las ecuaciones de la FBP y limitando  $r'$  a la integración en  $[-FOV/2, FOV/2]$ , se tiene que

<sup>5</sup>Filtered Back Projection, por sus siglas en inglés.



**Figure 3.13** (a) Fan-beam geometry with detectors placed on a circular arc:  $\beta$  is the angle between the center line of the fan and the y-axis,  $\gamma$  is the angle between the center line and the ray through point  $(x, y)$ .  $L$  is the distance from the source to  $(x, y)$ . (b) With the fan-beam geometry a measurement range from  $\beta = 0$  to  $(\pi + \text{fan-angle})$  is required to acquire all the projection lines.

**Figura 10.3**

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-FOV/2}^{FOV/2} p(r', \theta) \cdot q(x \cos \theta + y \sin \theta - r') dr' d\theta \quad (10.8)$$

donde  $1/2$  se introduce solo para contemplar la integración sobre  $(0, 2\pi)$  y dando lugar a

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\text{fan-angle}}{2}}^{\frac{\text{fan-angle}}{2}} p(\gamma', \beta) \cdot q(x \cos \gamma + y \sin \gamma - R \sin \gamma') R \cos \gamma' d\gamma' d\beta \quad (10.9)$$

con lo que la fórmula para la reconstrucción en fan-beam resulta [?]

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\frac{\text{fan-angle}}{2}}^{\frac{\text{fan-angle}}{2}} [R \cos \gamma' \cdot p(\gamma', \beta)] \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma - \gamma'}{\sin \gamma - \gamma'} \right)^2 q(\gamma - \gamma') d\gamma' d\beta \quad (10.10)$$

donde  $L$  es la distancia entre la fuente y el punto  $(x, y)$ . Este resultado es visto como una expresión modificada de la FBP pesada por un factor  $1/L^2$ . La integral interna es la convolución de  $p(\gamma, \beta)$ , pesada por  $R \cos \gamma$ , con el kernel modificado  $\frac{1}{2}(\gamma \sin \gamma)^2 q(\gamma)$ .

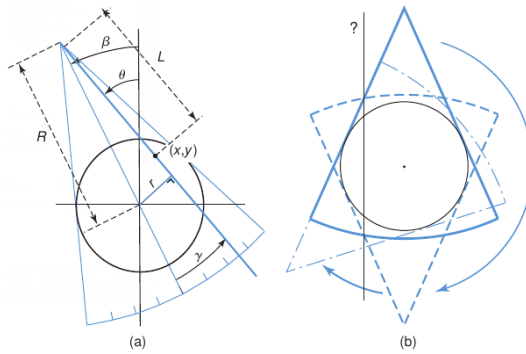
Ecuaciones similares pueden obtenerse al considerar los detectores de forma lineal normales a la dirección del haz (ver figura 10.4, obteniendo ahora una configuración de coordenadas  $(t, \beta)$ , donde  $t$  es la distancia entre el origen y la recta que pasa por la fuente y el punto  $(x, y)$ . Ahora, el FBP pesado puede escribirse de la forma:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(U/R)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{R}{\sqrt{R^2 + t'^2}} \cdot p(t', \beta) \right] \frac{1}{2} q(t - t') dt' d\beta \quad (10.11)$$

donde  $U$  es la proyección de la distancia fuente-punto con el eje central del abanico.

### 10.3.7. Imágenes en 3 dimensiones

**10.3.7.1. CT de un solo corte** La forma de avanzar a la obtención de una imagen tomográfica de un determinado volumen consiste en escanear un número de cortes consecutivos por rotaciones circulares del tubo-detector alternando con pequeños movimientos de la mesa donde se ubica el paciente. Esto es conocido como escaneo axial. Para que este tipo de escaneo se pueda realizar sin



**Figure 3.13** (a) Fan-beam geometry with detectors placed on a circular arc:  $\beta$  is the angle between the center line of the fan and the y-axis,  $\gamma$  is the angle between the center line and the ray through point  $(x, y)$ .  $L$  is the distance from the source to  $(x, y)$ . (b) With the fan-beam geometry a measurement range from  $\beta = 0$  to  $(\pi + \text{fan-angle})$  is required to acquire all the projection lines.

**Figura 10.4**

perder resolución, es necesario satisfacer el criterio de Nyquist [cita]. La distancia máxima entre cortes consecutivos depende del ancho efectivo de cada corte, comúnmente representado por el ancho total a la mitad del máximo (FWHM) del perfil de sensibilidad del corte (SSP) en el centro del FOV. Si se asumen SSP rectangulares de ancho  $\Delta z$ , los datos deberán ser convolucionados con una función bloque de ancho  $\Delta z$ . La distancia máxima entre dos cortes será entonces  $\Delta z/2$ , con lo que al menos se deben obtener dos cortes por ancho de corte.

Por otra parte, una de las técnicas más utilizadas en la actualidad es la conocida como *CT helicoidal* o *espiral*<sup>6</sup>. En esta, el tubo de rayos X rota continuamente en torno al paciente, como en el caso de la CT 2D, mientras la mesa se mueve de forma constante. Se conoce como *table feed* (TF) a la distancia recorrida por la mesa durante una rotación completa del tubo de  $360^\circ$ . El *pitch*, por otra parte, se define como la razón entre TF y el espesor de un corte o *slice*<sup>7</sup>.

En la CT circular, los datos son adquiridos a posiciones discretas en el eje ( $z_1, z_2, \dots, z_n$ ) y para posiciones angulares del tubo entre 0 y  $2\pi$ . Por otro lado, en la CT espiral los datos son adquiridos mientras  $\beta$  y  $z$  crecen simultáneamente.

Asumiendo que uno desea reconstruir un slice en una posición determinada del eje  $z_1$  tomando la configuración espiral, se necesitan datos de  $\beta$  barriendo el intervalo  $(0, \pi + (\text{fan} - \text{angle}))$  en esta posición. Pero solo estará disponible una vista a un ángulo  $\beta^*$ , problema que se resuelve por interpolación de las mediciones en las posiciones axiales adyacentes. Asumiendo SSP rectangulares de ancho  $\Delta z$  y siguiendo el mismo razonamiento que para CT circular, llegamos a la conclusión de que la máxima distancia de muestreo debe ser  $\Delta z/2$ . Así, para un ancho de slice  $\Delta z$  tendremos un  $\text{TF}_{\text{máx}} = \Delta z/2$  (pitch = 0.5). Finalmente, como los haces opuestos producen la misma información, la distancia the muestreo resulta  $\text{TF}/2$  y la máxima  $\text{TF} = \Delta z$  (pitch = 1). Incrementar el pitch para valores  $\geq 1$  reducirá el tiempo de escaneo, pagando un costo en la calidad de la imagen. Teóricamente, por esto, la dosis en el paciente se reduce al incrementarse el valor del pitch, pero esto no sucede en la práctica pues se mantiene constante al incrementarse los mAs para mantener la CNR que determina la calidad de la imagen.

**10.3.7.2. CT multi-slice** En los escáners modernos, los arreglos de detectores consisten múltiples columnas de detectores, con el objetivo de medir varios cortes por rotación del tubo de rayos X. En este caso el pitch puede ser definido como la razón entre el TF respecto del total del ancho del

<sup>6</sup>En adelante se utilizará el término *espiral* para definir este tipo de escaner. Más allá que el término matemático más apropiado es *helicoidal*, el término *espiral* se encuentra más difundido para definir la técnica.

<sup>7</sup>El uso de los términos *corte* y *slice* es indistinto en el texto.

haz de rayos X. Como en los casos anteriores, utilizando el mismo valor de pitch se obtiene una reducción del tiempo de escaneo dada por el número de columnas de detectores, resultando en una disminución de artefactos producidos por el movimiento del paciente.

Si la distancia entre la fuente y los detectores es lo suficientemente grande, todas las líneas pueden asumirse como paralelas y el problema se reduce al de la reconstrucción de una serie de imágenes 2D. Suele suceder cuando hay 4 columnas de detectores adyacentes, pero esta asunción ya no puede ser asumida para escáners de 16 cortes. Una aproximación a la solución de este problema, consiste en inclinar cada imagen planar de forma tal de minimizar su distancia media a las posiciones de la fuente involucradas en la reconstrucción del plano. Después de la reconstrucción 2D de los planos inclinados, los cortes axiales se logran por interpolación. Esta técnica es conocida como *reconstrucción de plano inclinado*.

A medida que el número de columnas de detectores crece, aparecen más artefactos en la reconstrucción, por lo que en ese caso se deben implementar métodos de reconstrucción 3D directos (*fully 3D reconstruction*). En los escaners multi slice el operador cuenta con la posibilidad de especificar el espesor de cada corte, más allá del ancho de los detectores. Los slices más gruesos tienen un SNR más alto. Éstos pueden ser obtenidos por convolución de los valores de las proyecciones medidas a lo largo del eje  $z$  con un filtro de suavizado, y la técnica es conocida como *z-filtering*.

**10.3.7.3. CT volumétrica** Un volumen completo puede incluso ser obtenido en un solo giro del tubo de rayos X, aunque para lograrlo es necesario un haz cónico muy grande. En este caso, y en el resto salvo el de haces paralelos, se requiere una reconstrucción 3D.

En 3 dimensiones, el teorema de la proyección establece que la transformada de Fourier 3D de una función en la dirección  $\vec{k}$  es igual a la transformada de Fourier en 1 dimensión a lo largo de la misma dirección de las integrales del plano perpendicular a esa dirección. El teorema de la proyección provee una solución matemática a la real reconstrucción 3D en los casos donde las trayectorias de las fuentes son suficientes como para proveer integrales planares y donde no hay truncamiento en el detector. El escanning típico utilizado en la práctica clínica es el circular y el helicoidal.

**Reconstrucción circular en haz cónico** En el caso de las trayectorias circulares, es imposible teóricamente la reconstrucción volumétrica excepto para vóxeles o semi-planos, ya que no se posee suficiente información de las mediciones. Por esto se utiliza un algoritmo de reconstrucción aproximado. El más famoso es el conocido como FDK, propuesto por Feldkamp en 1984, que extiende el FBP en 2D a 3 dimensiones

$$f(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(U/R)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{R}{\sqrt{R^2 + t'^2 + \zeta^2}} \cdot p(t', \zeta, \beta) \right] \cdot \frac{1}{2} q(t - t') dt' d\beta$$

donde  $\zeta$  es la altura del abanico inclinado sobre la rotación del centro de la fuente y  $U$  es la proyección de la distancia fuente-punto en el rayo central del abanico no-inclinado.

Como el algoritmo solo ofrece aproximaciones, los artefactos debidos al haz cónico son inevitables.

**Reconstrucción helicoidal en haz cónico** A diferencia del caso anterior, en este caso se posee toda la información necesaria para una reconstrucción directa cuando  $\text{pitch} \leq 1,3$ . La aproximación DBP<sup>8</sup> provee una reconstrucción precisa para estos casos. Sin embargo, por la falta de algoritmos exactos para esta reconstrucción, la mayoría de los fabricantes utiliza algoritmos aproximados como el FDK que son preferibles en términos del ruido, la uniformidad del ruido y otras características que afectan la calidad.

<sup>8</sup>Derivative back-projection, por sus siglas en inglés.

*Reconstrucción iterativa* Como es usado sobre todo en PET y SPECT, la reconstrucción iterativa se ha incorporado recientemente a los escaners comerciales. Esto se ha hecho recientemente porque la capacidad computacional para el procesamiento no era compatible con el hardware disponible años atrás. La discusión de los algoritmos iterativos no se encuentra dentro de los objetivos de este texto, por lo que solo se menciona a fines de completitud.

#### **10.4. Aplicaciones en radiodiagnóstico metabólico: PET y SPECT**

#### **10.5. Nociones y requerimientos de matching y fusión de imágenes anatómicas y metabólicas**

#### **Bibliografía**