Ejercicios del tema 2

Pablo Hidalgo García

Queremos calcular la siguiente probabilidad utilizando el método de **fuerza bruta**:

$$P(a|+d,+f,\neg g)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada tenemos que

$$P(a|+d,+f,\neg g) = \frac{P(a,+d,+f,\neg g)}{P(+d,+f,\neg g)}$$

Ahora bien, como la variable aleatoria A solo puede tomar dos valores $+a$ y $\neg a$, bastará calcular la probabilidad anterior para el valor $+a$ ya que

$$P(\neg a|+d,+f,\neg g) = 1 - P(+a|+d,+f,\neg g)$$

Tenemos que

$$P(+a,+d,+f,\neg g) = \sum_b \sum_c P(+a,b,c,+d,+f,\neg g)$$

y también que

$$P(+d,+g,\neg g) = \sum_a \sum_b \sum_c P(a,b,c,+d,+g,\neg g)$$

Por construcción de la red bayesiana, la probabilidad conjunta se puede expresar como:

$$p(a,b,c,d,f,g) = p(a) \cdot p(b|a) \cdot p(c|a) \cdot p(g|c) \cdot p(f|c,b) \cdot p(d|b)$$

Sabiendo esto, podemos obtener los cálculos:

$$\begin{aligned} P(+a,+b,+c,+d,+f,\neg g) &= p(+a) \cdot p(+b|+a) \cdot p(+c|+a) \cdot p(\neg g|+c) \cdot p(+f|+c,+b) \cdot p(+d|+b) \\ &= 0.3 \cdot 0.9 \cdot 0.75 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.6 \\ &= 0.05832 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\neg a,+b,+c,+d,+f,\neg g) &= p(\neg a) \cdot p(+b|\neg a) \cdot p(+c|\neg a) \cdot p(\neg g|+c) \cdot p(+f|+c,+b) \cdot p(+d|+b) \\ &= 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.25 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.6 \\ &= 0.01008 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(+a,\neg b,+c,+d,+f,\neg g) &= p(+a) \cdot p(\neg b|+a) \cdot p(+c|+a) \cdot p(\neg g|+c) \cdot p(+f|+c,\neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\ &= 0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.75 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.1 \\ &= 0.000675 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(\neg a, \neg b, +c, +d, +f, \neg g) &= p(\neg a) \cdot p(\neg b|\neg a) \cdot p(+c|\neg a) \cdot p(\neg g| + c) \cdot p(+f| + c, \neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\
&= 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.25 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.1 \\
&= 0.0042
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(+a, +b, \neg c, +d, +f, \neg g) &= p(+a) \cdot p(+b| + a) \cdot p(\neg c| + a) \cdot p(\neg g|\neg c) \cdot p(+f|\neg c, +b) \cdot p(+d| + b) \\
&= 0.3 \cdot 0.9 \cdot 0.25 \cdot 0.9 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \\
&= 0.02187
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(+a, \neg b, \neg c, +d, +f, \neg g) &= p(+a) \cdot p(\neg b| + a) \cdot p(\neg c| + a) \cdot p(\neg g|\neg c) \cdot p(+f|\neg c, \neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\
&= 0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.25 \cdot 0.9 \cdot 0 \cdot 0.1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\neg a, +b, \neg c, +d, +f, \neg g) &= p(\neg a) \cdot p(+b|\neg a) \cdot p(\neg c|\neg a) \cdot p(\neg g|\neg c) \cdot p(+f|\neg c, +b) \cdot p(+d| + b) \\
&= 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \\
&= 0.03402
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\neg a, \neg b, \neg c, +d, +f, \neg g) &= p(\neg a) \cdot p(\neg b|\neg a) \cdot p(\neg c|\neg a) \cdot p(\neg g|\neg c) \cdot p(+f|\neg c, \neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\
&= 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0 \cdot 0.1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ahora podemos calcular los siguientes sumandos:

$$P(+a, +d, +g, \neg g) = \sum_b \sum_c P(+a, b, c, +d, +g, \neg g) = 0.05832 + 0.000675 + 0.02187 + 0 = 0.080865$$

$$P(\neg a, +d, +g, \neg g) = \sum_b \sum_c P(+a, b, c, +d, +g, \neg g) = 0.01008 + 0.0042 + 0.03402 + 0 = 0.0483$$

Por tanto,

$$P(+d, +f, \neg g) = \sum_a \sum_b \sum_c P(a, b, c, +d, +f, \neg g) = \sum_a P(a, +f, +g, \neg g) = 0.080865 + 0.0483 = 0.129165$$

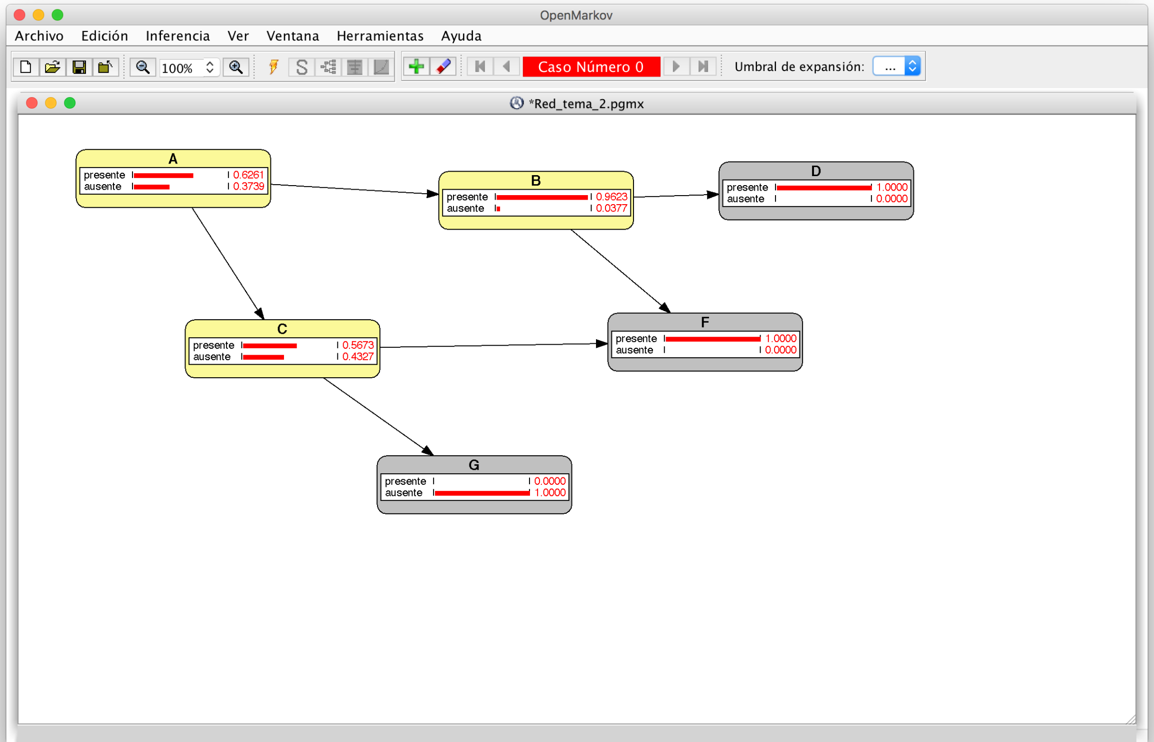
Así, llegamos a que

$$P(+a| + d, +f, \neg g) = \frac{P(a, +d, +f, \neg g)}{P(+d, +f, \neg g)} = \frac{0.080865}{0.129165} = 0.6260597$$

Y, de la misma forma,

$$P(\neg a| + d, +f, \neg g) = 1 - P(+a| + d, +f, \neg g) = 1 - 0.6260597 = 0.3739403$$

Podemos realizar estos mismo cálculos ayudándonos del programa OpenMarkov tal y como se muestra en la siguiente imagen:



En la imagen se muestra que los cálculos realizados mediante fuerza bruta corresponden con los de OpenMarkov.

Método de eliminación de variables

En este caso vamos a utilizar para calcular la probabilidad

$$P(a| + d, +f, \neg g)$$

el método de eliminación de variables.

Para ello

$$\begin{aligned} P(a, +d, +f, \neg g) &= \sum_b \sum_c P(a, b, c, +d, +f, \neg g) \\ &= \sum_b \sum_c p(a) \cdot p(b|a) \cdot p(c|a) \cdot p(\neg g|c) \cdot p(+f|c, b) \cdot p(+d|b) \end{aligned}$$

Comenzamos obteniendo el potencial que dependa de la variable B:

$$\psi_1(a, c) = \sum_b p(b|a) \cdot p(+f|c, b) \cdot p(+d|b)$$

Ahora eliminamos la variable C:

$$\psi_2(a) = \sum_c p(c|a) \cdot p(\neg g|c)\psi_1(a,c)$$

Luego el cálculo de la probabilidad se reduce a

$$P(a,+d,+f,\neg g) = p(a)\psi_2(a)$$

Ahora realicemos los cálculos numéricos:

$$\begin{aligned}
\psi_1(+a,+c) &= \sum_b p(b|a) \cdot p(+f|c,b) \cdot p(+d|b) \\
&= p(+b|+a) \cdot p(+f|+c,+b) \cdot p(+d|+b) + p(\neg b|+a) \cdot p(+f|+c,\neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\
&= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.5 \cdot 0.1 \\
&= 0.437
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(+a,\neg c) &= \sum_b p(b|a) \cdot p(+f|c,b) \cdot p(+d|b) \\
&= p(+b|+a) \cdot p(+f|\neg c,+b) \cdot p(+d|+b) + p(\neg b|+a) \cdot p(+f|\neg c,\neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\
&= 0.9 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0 \cdot 0.1 \\
&= 0.324
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(\neg a,+c) &= \sum_b p(b|a) \cdot p(+f|c,b) \cdot p(+d|b) \\
&= p(+b|\neg a) \cdot p(+f|+c,+b) \cdot p(+d|+b) + p(\neg b|\neg a) \cdot p(+f|+c,\neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\
&= 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.1 \\
&= 0.136
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(\neg a,\neg c) &= \sum_b p(b|a) \cdot p(+f|c,b) \cdot p(+d|b) \\
&= p(+b|\neg a) \cdot p(+f|\neg c,+b) \cdot p(+d|+b) + p(\neg b|\neg a) \cdot p(+f|\neg c,\neg b) \cdot p(+d|\neg b) \\
&= 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0 \cdot 0.1 \\
&= 0.072
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi_2(+a) &= \sum_c p(c|+a) \cdot p(\neg g|c)\psi_1(+a,c) \\
&= p(+c|+a) \cdot p(\neg g|+c)\psi_1(+a,+c) + p(\neg c|+a) \cdot p(\neg g|\neg c)\psi_1(+a,\neg c) \\
&= 0.75 \cdot 0.6 \cdot 0.437 + 0.25 \cdot 0.9 \cdot 0.324 \\
&= 0.26955
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(\neg a) &= \sum_c p(c|\neg a) \cdot p(\neg g|c)\psi_1(\neg a,c) \\
&= p(+c|\neg a) \cdot p(\neg g|+c)\psi_1(\neg a,+c) + p(\neg c|\neg a) \cdot p(\neg g|\neg c)\psi_1(\neg a,\neg c) \\
&= 0.25 \cdot 0.6 \cdot 0.136 + 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.072 \\
&= 0.069
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$P(+a, +d, +f, \neg g) = p(+a)\psi_2(+a) = 0.3 \cdot 0.26955 = 0.080865$$

$$P(\neg a, +d, +f, \neg g) = p(\neg a)\psi_2(\neg a) = 0.7 \cdot 0.069 = 0.0483$$

Así,

$$P(+d, +f, \neg g) = \sum_a P(a, +d, +f, \neg g) = 0.080865 + 0.0483 = 0.129165$$

y, por tanto,