Νευρο-Ασαφής Έλεγχος & Εφαρμογές
Εργαστηριακή Άσκηση
Q Learning

Όνομα: Μάριος Παπαχρήστου
Αριθμός Μητρώου: 03115101 Σχολή ΗΜΜΥ
e-mail: papachristoumarios@gmail.com

"Incorporating general intelligence, bodily intelligence, emotional intelligence, spiritual intelligence, political intelligence and social intelligence in AI systems are part of the future deep learning research. " – Amit Ray, Compassionate Artificial Intelligence

1 Σκοπός Εργασίας

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός ελεγκτή state-feedback διακριτού χρόνου για τη σταθεροποίηση ενός ΓΧΑ συστήματος με χρήση Q Learning βάσει τετραγωγνικού κριτηρίου κόστους. Συγκεκριμένα δίνεται το σύστημα

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

με δυναμικούς πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Και το τετραγωνικό κριτήριο κόστους άπειρου ορίζοντα

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i^T x_i + \rho u_i^2) \quad \text{για κάποιο } \rho > 0$$

2 Q-Learning

Θέλουμε να βρούμε βέλτιστο ελεγκτή $u_k^* = -Kx_k$ τέτοιο ώστε το σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και να ελαχιστοποιείται το κριτήριο κόστους J. Με χρήση ενισχυτικής μάθησης, και συγκεκριμένα Q-Learning, μπορούμε να βρούμε αυτή την είσοδο, **αγνοώντας τη δυναμική του συστήματος (model-free learning)**.

2.1 Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Θέλουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{u_1,\dots,u_T} \sum_{k=1}^{T} r_k(x_k, u_k)$$
$$\text{s.t. } x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

Στην περίπτωση μας η συνάρτηση $r_k(x_k, u_k)$ είναι η $r_k(u_k, x_k) = x_k^T x_k + \rho u_k^2$. Εισάγουμε την Q-function για την αξιολόγηση μιας πολιτικής K, u_k και της κατάστασης x_k του δυναμικού συστήματος

$$Q_K(x_k, u_k) = \sum_{t \geq k} r_t(x_t, u_t) = r_k(x_k, u_k) + V_K(x_{k+1}) = r_k(x_k, u_k) + x_{k+1}^T P_K x_{k+1} \tag{2}$$

όπου ο όρος $x_{k+1}^T P_K x_{k+1}$ είναι το cost-to-go. Η παραπάνω σχέση μπορεί να λυθεί με δυναμικό προγραμματισμό προκειμένου να λάβουμε την βέλτιση συνάρτηση $Q_K^*(x_k, u_k)$ από την εξίσωση του Bellman

$$Q_K^*(x_k, u_k) = r_k(x_k, u_k) + V^*(x_{k+1})$$

Όπου

$$V^*(x_k) = \min_u Q_K^*(x_k, u) \qquad h^*(x_k) = \arg\min_u Q_K^*(x_k, u)$$

Για την ανεύρεση του βέλτιστου κόστους $J^* = x_0^T P^* x_0$ για το πρόβλημα. Η συνάρτηση ποιότητας μπορεί να γραφεί ως

$$Q_K(x_k, u_k) = z_k^T \begin{pmatrix} I + A^T P A & B^T P A \\ A^T P B & \rho + B^T P B \end{pmatrix} z_k = z_k^T \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix} z_k = z_k^T H z_k$$

όπου $z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}$ το επαυξημένο διάνυσμα. Η βέλτιστη λύση για την πολιτική K δίνεται ως

$$\frac{\partial Q_K(x_k, u_k)}{\partial u_k} = 0 \iff H_{uu} u_k^* = -H_{xu} x_k \iff u_k^* = -H_{uu}^{-1} H_{xu} x_k \iff K^* = -(H_{uu})^{-1} H_{xu}$$

2.2 Αλγόριθμος Εύρεσης Βέλτιστης Πολιτικής

Επαναληπτικά, για την εύρεση μιας πολιτικής K_{i+1} από την K_i θεωρούμε μια ακολουθία N τυχαίων εισόδων $u_0, \dots, u_{N-1}$. Στη δική μας υλοποίηση θεωρήσαμε $u_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Θεωρώντας $t_k^{(i)} = (x_k, K_i x_k)^T$ η αναδρομική σχέση γράφεται ως

$$z_k^T H^{(i+1)} z_k = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + \left(t_{k+1}^{(i)}\right)^T H^{(i)} t_{k+1}^{(i)} = W_k(H^{(i)})$$

Παρατηρούμε ότι ορίζοντας το διάνυσμα $\bar{z}_k = (z_k \otimes z_k)^T$ και $h^{(i)}$ την διανυσματική αναπαράσταση του $H^{(i)}$ έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_N \end{pmatrix} h^{(i+1)} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \qquad h^{(i+1)} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_N \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \tag{3}$$

Όπου Z^+ ο ψευδοαντίστροφος του Z. Το κέρδος τίθεται από τη σχέση του ακροτάτου και η διαδικασία επαναλαμβάνεται την επόμενη εποχή. Επαναληπτικά ο αλγόριθμος συγκλίνει στη βέλτιστη λύση $K_n \to K^*$ του τετραγωνικού ρυθμιστή με γνωστό μοντέλο (A, B).

2.3 Υλοποίηση Αλγορίθμου

Στην υλοποίησή μας με MATLAB, η υλοποίηση της παραπάνω διαδικασίας γίνεται με τη χρήση της ακόλουθης συνάρτησης

```
function [ H, K_opt ] = q_learning(A, B, K, Q, rho, Niter, Hprev, x0
    , u_samples)

    % Initialize variables

    x = x0;

    Y = [];
    X = [];

    % Policy Iteration
    for n = 1 : Niter
        u = u_samples(:, n);
        % Calculate quadratic combinations
        phi = kron([x; u], [x; u])';

        % Calculate reward function
        r = x' * Q * x + u' * rho * u;

        % Forward pass to the model
        x = A * x + B * u;
        t = [x; K * x];

        % Calculate new quadratic combinations


        r = r + t' * Hprev * t;

        % Append to matrices
        X = [X; phi];
        Y = [Y; r];

    end

    % Solve Least Squares Problem
    psi = pinv(X) * Y;

    dim = length(x) + length(u);
    H = reshape(psi, dim, dim);

    % Get desired elements
    Hux = H(length(x) + 1 : end, 1:length(x));
    Huu = H(length(x) + 1 : end, length(x) + 1 : end);

    % Policy Improvement - Find optimal value of gain
    K_opt = -inv(Huu) * Hux;
```

```
end
```

3 Ιδανική Περίπτωση

Το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο και το $(A, Q^{1/2})$ είναι ανιχνεύσιμο. Η εύρεση ελεκγτή $u_k^* = -K^* x_k$ ισοδυναμεί με την επίλυση της Αλγεβρικής Εξίσωσης Ricatti για συστήματα διακριτού χρόνου

$$P = A^T PA - A^T PB(B^T PB + R)^{-1} B^T PA + Q$$

όπου $Q = I \geq 0, R = \rho > 0$ για την ανεύρεση της βέλτιστης εισόδου

$$u_k^* = -(R + B^T PB)^{-1}) B^T PA x_k$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε P είναι $A^T PB = 0$ επομένως η Ricatti γίνεται για κάθε $\rho > 0$

$$P = A^T PA + I$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε

$$p_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i \neq j$$

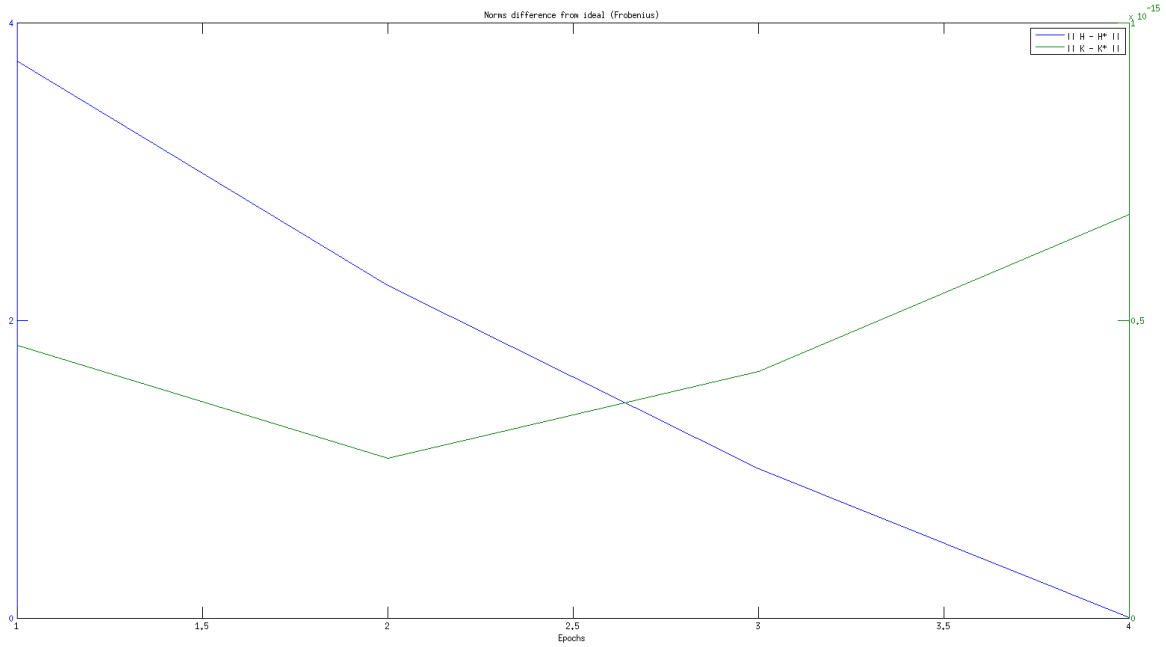
$$p_{11} = 1 \qquad p_{22} = p_{11} + 1 = 2 \qquad p_{33} = p_{22} + 1 = 3$$

Το οποίο μας δίνει ότι $P = \text{diag}(1, 2, 3)$. Το βέλτιστο κέρδος είναι $K = (0, 0, 0)$ για κάθε $\rho > 0$ επομένως $u_k^* = 0$ και $x_k = \mathbf{0}$. Ο ιδανικός πίνακας H είναι ο $H = \text{diag}(1, 2, 3, 4)$. Το βέλτιστο κόστος είναι

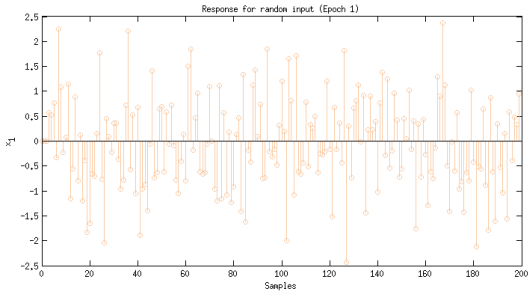
$$J^* = x_0^T P x_0 = x_1^2(0) + 2x_2^2(0) + 3x_3^2(0)$$

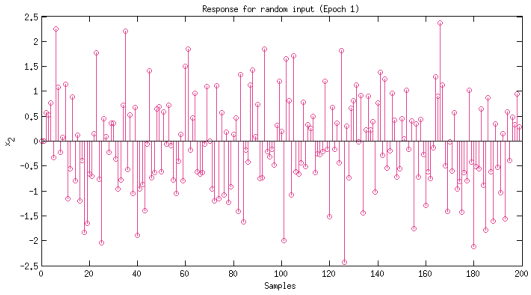
4 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

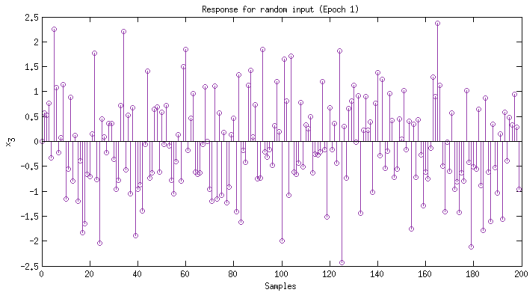
Η γραφική παράσταση των νορμών $\|H - H^*\|_F, \|K - K^*\|_F$ σε κάθε εποχή απεικονίζονται παρακάτω.

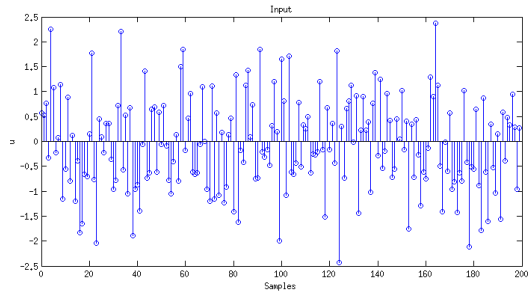


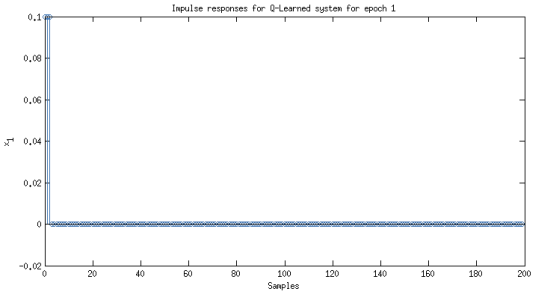
Θεωρήσαμε αρχική συνθήκη $x_0 = (0.1, 0.1, 0.1)^T$. Οι αποκρίσεις σε κάθε εποχή φαίνονται παρακάτω.

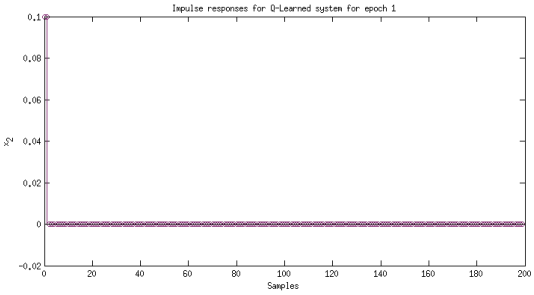

Response for random input (Epoch 1)
x1
Samples

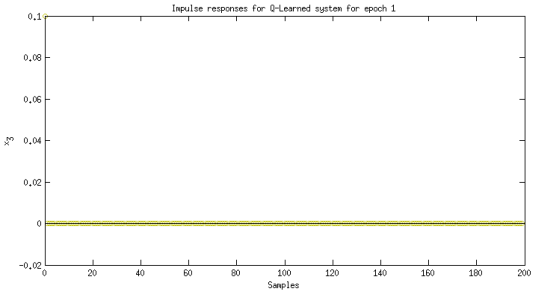

Response for random input (Epoch 1)
x2
Samples

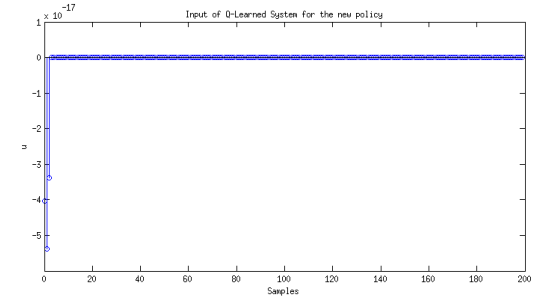

Response for random input (Epoch 1)
x3
Samples

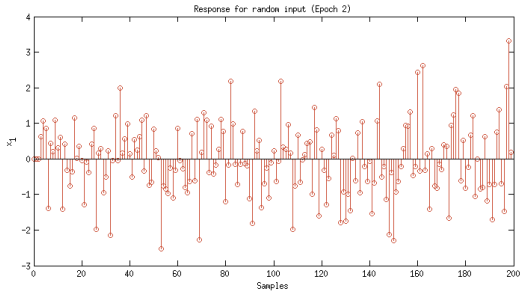

Input
u
Samples

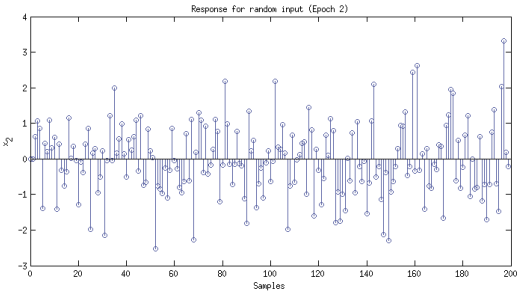

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 1
x1
Samples

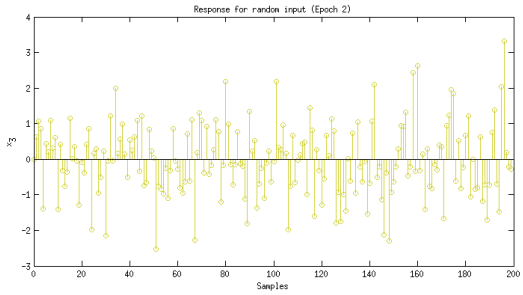

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 1
x2
Samples

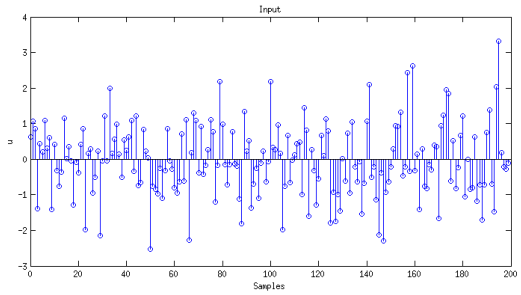

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 1
x3
Samples

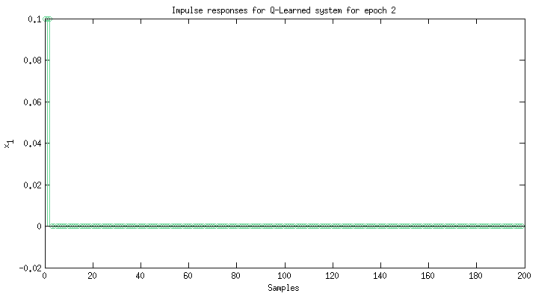

x 10^-17
Input of Q-Learned System for the new policy
u
Samples

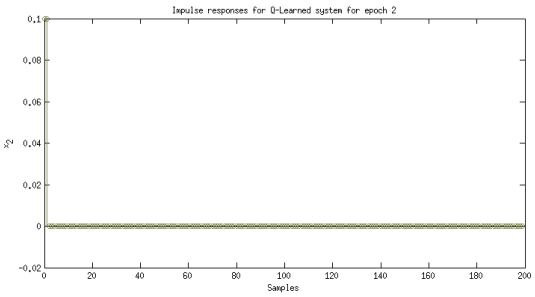

Response for random input (Epoch 2)
x1
Samples

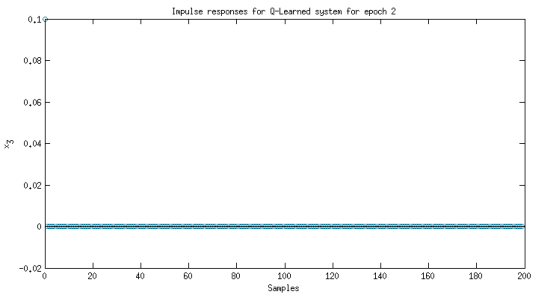

Response for random input (Epoch 2)
x2
Samples

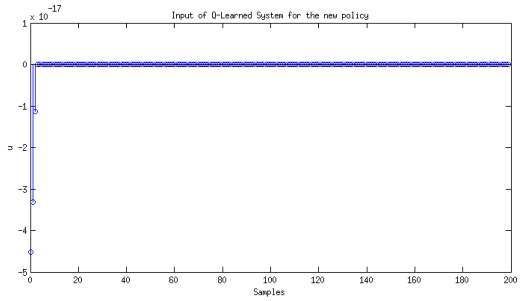

Response for random input (Epoch 2)
x3
Samples

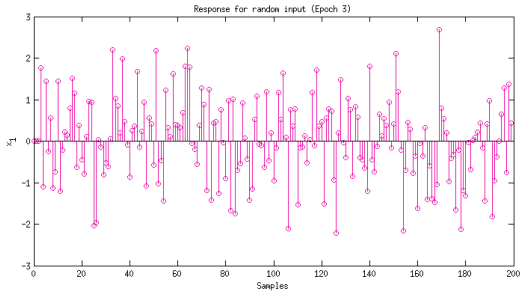

Input
u
Samples

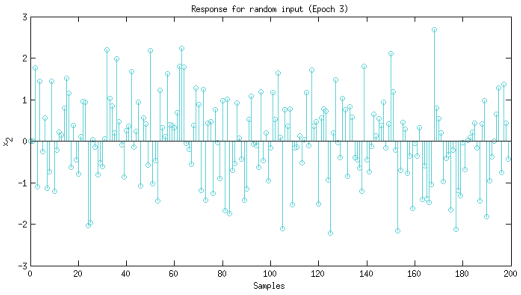

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 2
x1
Samples

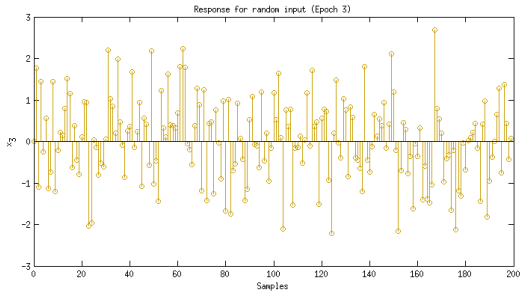

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 2
x2
Samples

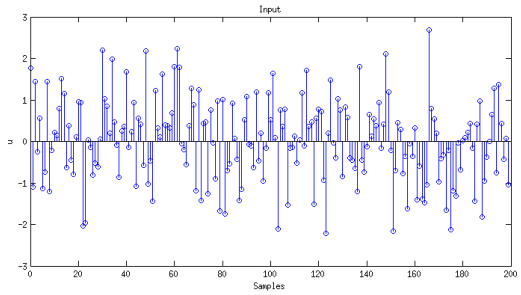

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 2
x3
Samples

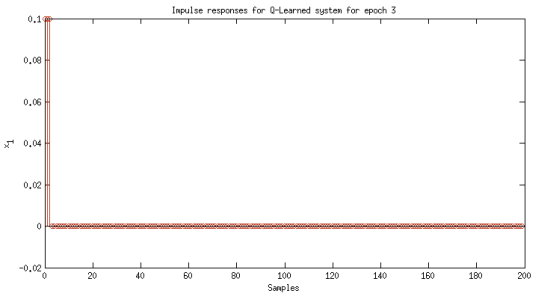

x 10^-17
Input of Q-Learned System for the new policy
u
Samples

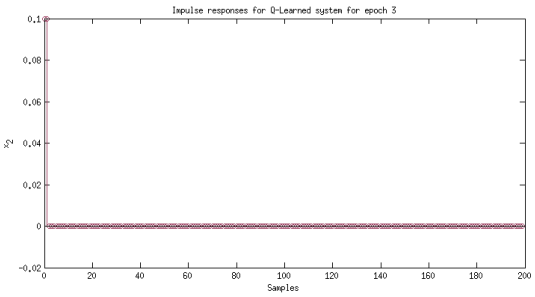

Response for random input (Epoch 3)
x1
Samples

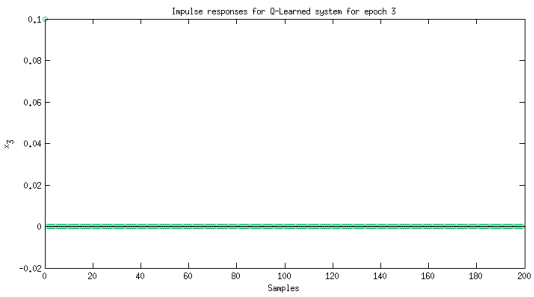

Response for random input (Epoch 3)
x2
Samples

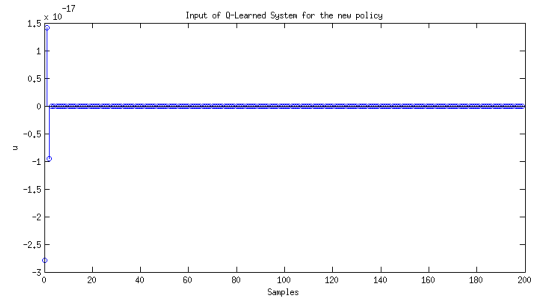

Response for random input (Epoch 3)
x3
Samples

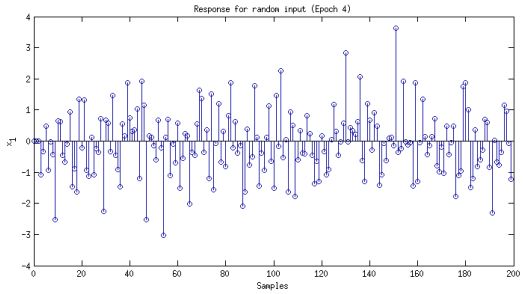

Input
u
Samples

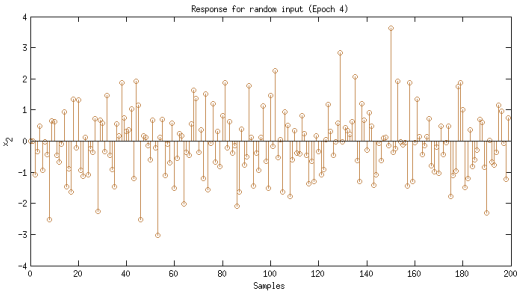

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 3
x1
Samples

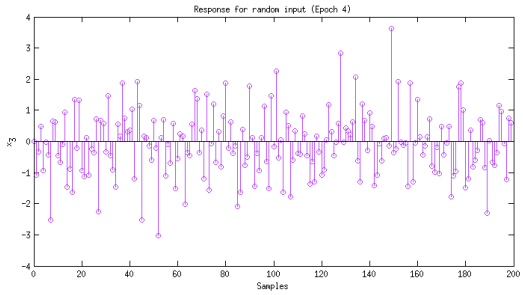

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 3
x2
Samples

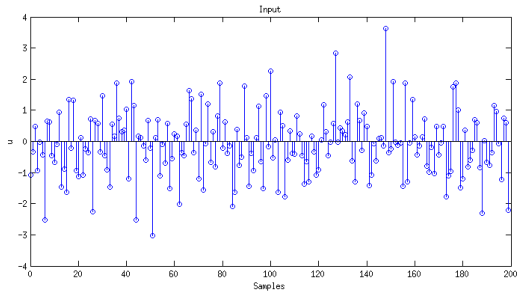

Impulse responses for Q-Learned system for epoch 3
x3
Samples

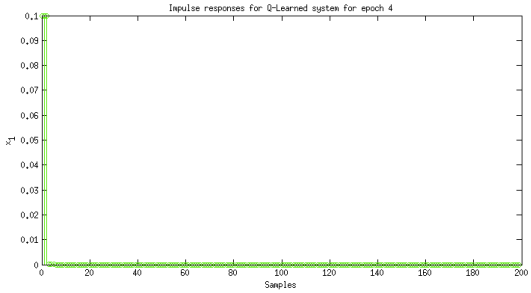

x 10^-17
Input of Q-Learned System for the new policy
u
Samples

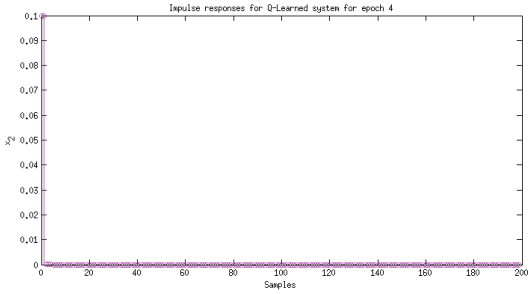


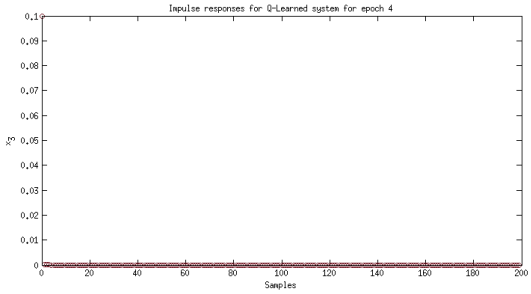


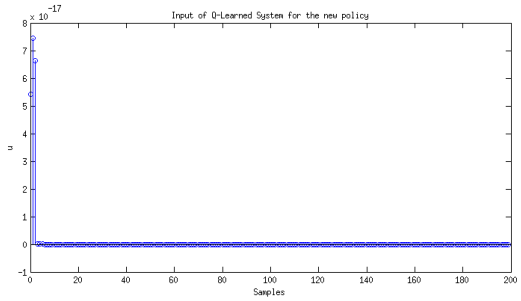












5 Πηγαίος Κώδικας

(Ζητούμενο Α) Για τον υπολογισμό των H, K

```
function [ H, K_opt ] = q_learning(A, B, K, Q, rho, Niter, Hprev, x0
    , u_samples)

    % Initialize variables

    x = x0;

    Y = [];
```

```
    X = [];

    % Policy Iteration
    for n = 1 : Niter
        u = u_samples(:, n);
        % Calculate quadratic combinations
        phi = kron([x; u], [x; u])';

        % Calculate reward function
        r = x' * Q * x + u' * rho * u;

        % Forward pass to the model
        x = A * x + B * u;
        t = [x; K * x];

        % Calculate new quadratic combinations


        r = r + t' * Hprev * t;

        % Append to matrices
        X = [X; phi];
        Y = [Y; r];

    end

    % Solve Least Squares Problem
    psi = pinv(X) * Y;

    dim = length(x) + length(u);
    H = reshape(psi, dim, dim);

    % Get desired elements
    Hux = H(length(x) + 1 : end, 1:length(x));
    Huu = H(length(x) + 1 : end, length(x) + 1 : end);

    % Policy Improvement - Find optimal value of gain
    K_opt = -inv(Huu) * Hux;

end
```

(Ζητούμενο Β) Το κύριο αρχείο `main.m`

```
% Q Learning for Optimal Control with LQR Criterion
% Author: Marios Papachristou
% AM: 03115101
% email: papachristoumarios@gmail.com

%% Parameters
% Actual System Dynamics
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 0 0];
B = [0; 0; 1];
```

```
dim = size(A, 1) + size(B, 2);


% Sampling Period
Ts = 1;
sys = ss(A, B, zeros(size(A)), zeros(size(B)), Ts);

% Choose initial condition
x0 = 0.1 * ones(length(A), 1);

% LQR Parameters
rho = 1;
Q = eye(size(A));

%% Ideal LQR
% Solution to DARE
[Kid, Pid, e] = dlqr(A, B, Q, rho);

% Ideal H matrix
Hid = [Q + A' * Pid * A A' * Pid * B;
       B' * Pid * A rho + B' * Pid * B];


% Number of iterations
Niter = 200;
time = 0 : Niter - 1;
epochs = 4;

gain_norms = zeros(epochs, 1);
H_norms = zeros(epochs, 1);

%% Q Learning
L = randn(size(B'));
Hp = zeros(dim, dim);
for ep = 1 : epochs

    % Take random inputs
    u_samples = randn(size(B, 2), Niter);

    [H, K] = q_learning(A, B, L, Q, rho, Niter, Hp, x0, u_samples);

    L = K;
    Hp = H;

    % Update norms plot
    gain_norms(ep) = norm(L - Kid, 'fro');
    H_norms(ep) = norm(H - Hid, 'fro');

    % Plot results for epoch
    Aq_c = A - B * K;
```

```
    q_learning_model = ss(Aq_c, zeros(size(B)), zeros(size(A)),
       zeros(size(B)), Ts);

    [~, ~, x_q] = lsim(q_learning_model, zeros(1, Niter), time, x0);

    figure;
    for i = 1 : length(x0)
        subplot(2, 2, i);
        stem(time, x_q(:, i), 'color', rand(1,3));
        title(sprintf('Impulse responses for Q-Learned system for
           epoch %d', ep));
        xlabel('Samples');
        ylabel(sprintf('x_%d', i));
    end

    subplot(2,2,4);
    stem(time, - K * x_q');
    title('Input of Q-Learned System for the new policy');
    xlabel('Samples');
    ylabel('u');

    % Simulate response under random noise

    [~, ~, x_n] = lsim(sys, u_samples, time);
    figure;
    for i = 1 : length(x0)
        subplot(2, 2, i);
        stem(time, x_n(:, i), 'color', rand(1,3));
        title(sprintf('Response for random input (Epoch %d)', ep));
        xlabel('Samples');
        ylabel(sprintf('x_%d', i));
    end

    subplot(2,2,4);
    stem(time, u_samples);
    title('Input');
    xlabel('Samples');
    ylabel('u');

end

%% Plot norm differences

figure;
plotyy(1:epochs, H_norms, 1 : epochs, gain_norms);
title('Norms difference from ideal (Frobenius)');
legend('|| H - H* ||', '|| K - K* ||');
xlabel('Epochs');


%% Ideal LQR
```

```
Aid_c = A - B * Kid;

ideal_model = ss(Aid_c, zeros(size(B)), zeros(size(A)), zeros(size(B
   )), Ts);
[~, ~, x_id] = lsim(ideal_model, zeros(1, Niter), time, x0);


figure;
hold on;
for i = 1 : length(x0)
    stem(time, x_id(:, i), 'color', rand(1,3));
end
title('Impulse responses for ideal system')
legend('x1', 'x2', 'x3')
xlabel('Samples')
ylabel('State vector')

hold off

hold off

figure;
hold on
stem(time, - Kid * x_id');
title('Input of Ideal System')
xlabel('Samples')

hold off
```

Αναφορές

[1] Bradtke, Steven J. "Reinforcement learning applied to linear quadratic regulation." Advances in neural information processing systems. 1993.