Annexe 7 : Approche Alkire-Foster

La méthodologie développée par Alkire et Foster (2007) comprend l'identification des pauvres en considérant une série de privation dont les individus (au sens large) souffrent et l'agrégation des informations afin de refléter la pauvreté de la société. La méthode Alkire-Foster (AF) est une mesure simple de la pauvreté multi dimensionnelle, mais elle peut être décomposée et analysée (par groupe, zone géographique) de manière à éclairer les politiques.

Pour mesurer la pauvreté dans un contexte multidimensionnelle, Alkire et Foster établissent une matrice de scores de bien-être ou matrice des accomplissements (y) dans $d$dimensions sur une population de n individus. Soit $y = [y_{ij}]$la matrice des accomplissements de taille $n \times d$ pour des individus i dans des dimensions$j$, où $y_{ij} \geq 0$ est l'accomplissement de l'individu i dans la dimension$j$. Chaque vecteur ligne $y_i = y_{i.} = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{id})$ donne les accomplissements individuels de l'individu i dans chaque dimension, alors que chaque vecteur colonne $y_{.j} = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})$ donne la distribution des accomplissements dans la dimension j pour tous les individus. Pour pondérer les dimensions, il faut définir un vecteur de pondération $w = (w_1, \dots, w_d)$ dont le $j^{ème}$élément w_j représente la pondération appliquée à la dimension j. Nous déterminons les w_j de telle sorte que $\sum_{j=1}^{d} w_j = d$, à savoir la somme des pondérations dimensionnelles par rapport au nombre total de dimensions. Cette pondération peut être normalisée par l'utilisation du vecteur $w' = w/d$, ainsi, $\sum_{j=1}^{d} w'_j = 1$.

On définit ensuite un vecteur $z = (z_j)_{0 \leq j \leq d}$, constitué par les seuils de privations des différentes dimensions ($z_j > 0$ est le seuil de privations dans la dimension j).

La méthode de mesure M_0 peut être résumée en trois étapes. D'abord, nous construisons une matrice des privations $g^0 = [g_{ij}^0]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}}$ telle que :

$$\begin{cases} g_{ij}^0 = w_j & \text{si} \quad y_{ij} < z_j \\ g_{ij}^0 = 0 & \text{si} \quad y_{ij} \geq z_j \end{cases}$$

On construit à partir de la matrice g^0, un vecteur colonne de comptage des privations individuelles, $c = (c_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $c_i = \sum_{j=1}^{d} g_{ij}^0$ représente la somme des entrées dans une ligne donnée et les privations pondérées subies par une personne i.

La deuxième étape consiste à identifier les personnes multi dimensionnellement pauvres (c'est-à-dire les personnes dont les privations cumulées atteignent un certain seuil fixé). Fixons un seuil de pauvreté k tel que : $0 < k \leq d$.

Un individu i est identifié comme multi dimensionnellement pauvre si le cumul de ses privations pondérées $c_i \geq k$. On qualifie ainsi cette méthode de « méthode d'identification à double seuil », parce qu'elle utilise les seuils de privations z_j pour savoir si un individu subit ou non une privation dans chaque dimension et le seuil de pauvreté k pour identifier qui est multi dimensionnellement pauvre.

La dernière étape consiste au calcul de l'IPM. Le premier indice dans la méthode AF est (headcount ratio) noté H appelé incidence de la pauvreté dans le cadre multidimensionnel, soit la proportion de personnes pauvres :

$$H = \frac{q}{n}$$

Où q désigne le nombre d'individus pauvres.

Cet indice ne respecte pas le principe de « mono tonicité », car si le nombre de privations c_i augmente pour un individu pauvre, l'indice H reste inchangé. A cet égard, la méthode AF propose un ratio ajusté M_0 (proportion ajustée des individus pauvres) tel que :

$$M_0 = H \times A$$

C'est le produit entre l'incidence (H) et l'intensité (A) qui représente le nombre moyen de privations subies par les pauvres, c'est-à-dire l'intensité de la pauvreté multidimensionnelle. A est la moyenne de la fraction d'intensité de privations chez les pauvres :

$$A = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{c_i(k)}{dq}$$

On en déduit que :

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(k)}{nd} = \frac{c_T(k)}{nd}$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{d} g_{ij}^{0}(k)}{nd}$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \frac{g_{ij}^{0}(k)}{nd}$$

$$M_0 = \frac{1}{nd}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} g_{ij}^0(k) \qquad (1)$$

Pour calculer la valeur de M_0 utilisée pour l'IPM, on construit une seconde matrice $g^0(k)$, obtenue à partir de g^0 en remplaçant sa $ième$ ligne$g_{i.}^0$par un vecteur nul toutes les fois où $c_i < k$. Ainsi, la matrice $g^0(k) = [\, g_{ij}^0(k)]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le d}}$ telle que :

$$\begin{cases} g_{ij}^0(k) = g_{ij}^0 & \text{si} \quad c_i \ge k \\ g_{ij}^0(k) = 0 & \text{si} \quad c_i < k \end{cases}$$

Cette matrice représente les privations pondérées des seuls individus qui ont été identifiés comme pauvres sans les privations des non-pauvres. Elle est aussi appelée matrice des privations pondérées censurée. La relation (1) montre que M_0 est la moyenne de la matrice $g^0(k)$ soit $M_0 = \mu(g^0(k))$, où μ représente l'opérateur de la moyenne arithmétique.

M_0 satisfait au critère de monotonicité dimensionnelle : si une personne pauvre subit une privation en plus (respectivement en moins) dans une dimension supplémentaire, alors M_0 augmente (respectivement baisse).

On notera que M_0 peut aussi se décomposer en sous-groupes de population. Soit une partition de la population en p sous-groupes de taille n_s et d'IPM M_0^s, $1 \le s \le n$. On désigne par $c_T^s(k)$ la somme du cumul des privations pondérées censurées dans le sous-groupe s.

On a alors :

$$M_0^s = \frac{c_T^s(k)}{n_s d}$$

Or :

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(k)}{nd} = \frac{c_T(k)}{nd} = \sum_{s=1}^{n_s} \frac{n_s}{n} \times \frac{c_T^s(k)}{n_s d}$$

$$M_0 = \sum_{s=1}^{n_s} \frac{n_s}{n} M_0^s$$

La contribution $C_s$du sous-groupe s à M_0 donne ainsi :

$$C_s = \frac{\frac{n_s}{n} M_0^s}{M_0}$$

Par ailleurs, après l'étape d'identification, M_0 peut être ventilé par dimension. Soit $h_j(k)$ le taux de privations pondérées censurées chez les pauvres dans la dimension j. On aura :

$$h_j(k) = \frac{\mu\left(g_{.j}^0(k)\right)}{w_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_{ij}^0(k)}{nw_j}$$

Or :

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \frac{g_{ij}^0(k)}{nd} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{n} \frac{w_j}{d} \times \frac{g_{ij}^0(k)}{nw_j} = \sum_{j=1}^{d} \frac{w_j}{d} \sum_{i=1}^{n} \frac{g_{ij}^0(k)}{nw_j}$$

$$M_0 = \sum\nolimits_j \left(\frac{w_j}{d}\right) \times h_j(k)$$

De même, la contribution $C_j$de la dimension j à M_0 donne :

$$C_j = \frac{\left(\frac{w_j}{d}\right) \times h_j(k)}{M_0}$$

En plus de la mono tonicité et la décomposition, la mesure M_0 vérifie d'autres propriétés qui sont, entre autres :

- ✓ la symétrie : la permutation de deux observations ne change pas l'indice (garanti de l'anonymat) ;
- ✓ échelle d'invariance : la multiplication d'une dimension et de son seuil par un même facteur non nul ne change pas l'indice ;
- ✓ Invariance de réplication : la réplication de toutes les observations à un nombre fini, ne change pas la valeur de l'indice ;
- ✓ l'ordinalité : toute transformation ne changeant pas les niveaux dans les dimensions, ne change pas l'indice.

Lorsque les données sont cardinales et satisfont à des hypothèses supplémentaires, nous identifions d'autres mesures au sein de la famille M_α qui peuvent être calculées pour refléter l'écart et la sévérité de la pauvreté multidimensionnelle. Elles remplacent la matrice binaire g^0 par une matrice des écarts normalisés ou par des écarts normalisés à la puissance d'un réel positif α. Il suffit alors d'appliquer la fonction d'identification, de censurer les privations des non-pauvres et de prendre la moyenne des matrices respectives pour produire des mesures d'ordre supérieur.