Université Sultane Moulay Sliman
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°1: Les nombres réels

Exercice 1.

(1) Démontrer que: $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{ (inégalité de Bernoulli).}$$

(2) Montrer que:
  (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$. Étudier dans quel cas on a égalité
  (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$.

(3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1; a_2 ...; a_n$ $b_1; b_2 ...; b_n$ $2n$ nombres réels. Etablir les inégalités suivantes:
  (a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad \text{(considérer : } f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2)$$

  (b) L'inégalité de Minkowski:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Exercice 2.

(1) Montrer qu'un entier q tel q^2 soit un multiple de 3 est un multiple de 3 . En déduire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(2) Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

Exercice 3.

(1) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.

(2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r+x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.

(3) En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 4.

(1) Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que
  (a) $A \subset B \Longrightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$
  (b) $A \cup B$ admet une borne inférieure et que $\inf(A \cup B)=\min(\inf A, \inf B)$

(2) Étant donné A et B deux ensembles de réels strictement positifs,
  (a) Montrer que $\sup(A.B)=\sup A \times \sup B$.
  (b) Montrer que si $\inf A>0$, alors $\sup\left(\dfrac{1}{A}\right)=\dfrac{1}{\inf A}$
  (c) Montrer que si $\inf A=0$, alors $\sup\left(\dfrac{1}{A}\right)=+\infty$.

(3) Si A et B deux ensembles de réels, que peut-on dire de $\sup(A.B)$?

Exercice 5.
Trouver $\inf A$, $\sup A$, $\max A$ et $\min A$ quand ils existent dans chacun des cas suivants:

(1) $A = \{0\} \cup]1;2[$,

(2) $A = \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$,

(3) $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(4) $A = \left\{\dfrac{n}{mn+1}, (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

(5) $A = \left\{\dfrac{n}{mn+1}, (n,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$

Exercice 6.
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup\{|x-y|, (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$$

Exercice 7.
Soient X une parties non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que si $M = \sup X \notin X$, il existe alors pour tout réel $\varepsilon > 0$ une infinité d'éléments de X dans l'intervalle $]M-\varepsilon, M[$.

Exercice 8.

(1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E(x+n) = E(x) + n$,

(2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

(3) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad E(x) + E(y) \leq E(x+y)$

Exercice 9.
Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1], (1-t)x + ty \in I$$

Exercice 10.
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que A est dense dans B et B est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.
Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ dans les cas suivants

(1) $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

(2) $A = \mathbb{Q}$.