

# Chapitre 1

## Raisonnement logique

### 1.1 Opérations logiques les plus élémentaires

Les objets mathématiques et les relations sont des assemblages des signes et des lettres suivants placés les uns à côté des autres :

- 1) les signes logiques les plus élémentaires  $\vee$  (ou) et  $\neg$  (négation) ;
- 2) les lettres qui sont des objets mathématiques “totalement indéterminés” ;
- 3) les signes purement mathématiques  $=$  et  $\in$  (cf. Chapitre 2).

Un des systèmes possibles consiste à ajouter aux signes logiques précédents les deux signes logiques de Hilbert  $\varepsilon$  et  $\Box$  qui servent par exemple à définir le quantificateur existentiel d’une façon convaincante et de rendre l’axiome de choix “assez intuitif”.

Voici quelques exemples d’objets mathématiques et des relations.

- (OM 1) Les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.
- (OM 2) Les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ .
- (OM 3) Les fonctions numériques, les applications, les triangles...
- (OM 4) Les lettres  $x, y, z, t, \dots$
- (R 1)  $1+1=2$  ;
- (R 2)  $1+2=4$  ;
- (R 3)  $\pi \in \mathbb{Q}$  ;
- (R 4)  $1 > 0$  ;
- (R 5) Quels que soient  $x, y \in \mathbb{N}$ , on a  $x + y = y + x$  ;
- (R 6) Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x^2 + 1 = 0$ .

On va d’abord introduire les signes logiques les plus élémentaires  $\vee$  et  $\neg$  qu’on va désigner par les mots ou et non respectivement. Ces signes sont employés pour former des relations.

Soient  $R$  et  $S$  deux relations. La relation

$$R \text{ ou } S$$

s'appelle la *disjonction logique* des relations  $R$  et  $S$ .

La relation

$$\text{non } R$$

s'appelle la *négation* de la relation  $R$ .

Maintenant on va se servir des deux signes précédents pour définir le signe  $\implies$ .

On désigne par

$$R \implies S$$

la relation

$$(\text{non } R) \text{ ou } S.$$

Elle s'appelle une *implication logique* et se lit  $R$  implique  $S$ .

## 1.2 Axiomes et théorèmes

Les *axiomes* sont de deux types :

- Des règles dans lesquelles interviennent des relations “arbitraires” et qui, appliquées à des relations spécifiques, aboutissent à d'autres relations spécifiques ;
- Des relations adoptés définitivement.

Les axiomes logiques qu'on va introduire dans ce chapitre sont du premier type.

Les relations *vraies* ou *théorèmes* sont ceux qui sont obtenues par application itérée des deux règles suivantes :

(RV 1) Toute relation qui découle d'un axiome est vraie.

(RV 2) Si  $R$  et  $S$  sont des relations telles que  $R$ ,  $R \implies S$  sont vraies, alors  $S$  est vraie aussi.

Une relation est dite *fausse* si sa négation est vraie.

**Remarque 1.2.1.** Une relation vraie dans un système d'axiomes de la théorie des ensembles peut ne pas l'être dans un autre système. Il y a des relations qui ne sont ni vraies ni fausses (qu'on ne peut pas ni les démontrer ni démontrer leurs négations). Ces relations s'appellent des relations *indécidables*. Si une relation  $R$  est indécidable on peut ajouter au système d'axiomes adopté l'axiome  $R$  ou bien  $\text{non } R$ . L'adoption de l'axiome de choix a été faite de cette manière.

**Remarque 1.2.2.** En plus des relations vraies, fausses et indécidables, on définit les relations *contradictoires* qui sont à la fois vraies et fausses. Après des siècles en faisant des mathématiques on a pas encore trouver de contradiction.

## 1.3 Axiomes logiques et tautologies

Les axiomes logiques sont

(AL 1) Si  $R$  est une relation, la relation

$$(R \text{ ou } R) \implies R$$

est vraie.

(AL 2) Si  $R$  et  $S$  sont des relations, la relation

$$R \implies (R \text{ ou } S)$$

est vraie.

(AL 3) Si  $R$  et  $S$  sont des relations, la relation

$$(R \text{ ou } S) \implies (S \text{ ou } R)$$

est vraie.

(AL 4) Si  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont des relations, la relation

$$(R \implies S) \implies ((T \text{ ou } R) \implies (T \text{ ou } S))$$

est vraie.

D'après (AL 2) et (AL 3), si l'une au moins des relations  $R$  et  $S$  est vraie, alors la relation :  $R \text{ ou } S$  est vraie en cohérence avec le sens intuitif du mot ou.

**Remarque 1.3.1.** S'il existerait une relation contradictoire  $R$  (à la fois vraie et fausse) alors toute autre relation serait aussi contradictoire. En effet, si  $S$  une relation, d'après (AL 2),

$$(\text{non } R) \implies (R \implies S)$$

est vraie, donc  $R \implies S$ ,  $S$  sont vraies.

Les critères obtenus par application de ces 4 axiomes et de l'axiome (AL 5) du paragraphe 1.8 seulement, s'appellent des *tautologies*. On présente les plus importants :

(TL 1) Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  des relations. Si  $R \implies S$  et  $S \implies T$  sont vraies, alors  $R \implies T$  est vraie.

(TL 2) Si  $R$  et  $S$  sont deux relations,  $R \implies (S \text{ ou } R)$  est vraie.

(TL 3) Si  $R$  est une relation,  $R \implies R$  est vraie.

(TL 4) Si  $R$  est une relation,  $R \text{ ou } (\text{non } R)$  est vraie.

(TL 5) Si  $R$  est une relation,  $R \implies (\text{non non } R)$  est vraie.

(TL 6) Si  $R$  est une relation et  $S$  est une relation vraie,  $R \implies S$  est vraie.

(TL 7) Soient  $R$  et  $S$  des relations. La relation

$$(R \implies S) \implies ((\text{non } S) \implies (\text{non } R))$$

est vraie.

(TL 8) Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont des relations. Si  $R \implies S$  est vraie, la relation

$$(R \text{ ou } T) \implies (S \text{ ou } T)$$

est vraie.

(TL 9) Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  des relations. Si  $R \implies S$  est vraie, la relation

$$(S \implies T) \implies (R \implies T)$$

est vraie.

(TL 10) Soient  $R$ ,  $S$ ,  $T$  et  $U$  sont des relations. Si les relations  $R \implies S$ ,  $T \implies U$  sont vraies,

$$(R \text{ ou } T) \implies (S \text{ ou } U)$$

est vraie.

On va maintenant les démontrer.

(TL 1) D'après (AL 4), la relation

$$(S \implies T) \implies (((\text{non } R) \text{ ou } S) \implies ((\text{non } R) \text{ ou } T))$$

est vraie. Cette dernière n'est rien d'autre que

$$(S \implies T) \implies ((R \implies S) \implies (R \implies T)).$$

On conclut en utilisant (RV 2).

(TL 2) Il suffit d'appliquer (AL 2), (AL 3) et (TL 1).

(TL 3) D'après (AL 1) et (AL 2),  $R \implies (R \text{ ou } R)$  et  $(R \text{ ou } R) \implies R$  sont vraies. On conclut en utilisant (TL 1).

(TL 4) D'après (TL 3),  $(\text{non } R) \text{ ou } R$  est vraie. On conclut en utilisant (AL 3) et (RV 2).

(TL 5) est une conséquence immédiate de (TL 4).

(TL 6) est évidente.

(TL 7) D'après (TL 5) et (AL 4),

$$((\text{non } R) \text{ ou } S) \implies ((\text{non } R) \text{ ou } (\text{non non } S))$$

est vraie. Or ((AL 3)),

$$((\text{non } R) \text{ ou } (\text{non non } S)) \implies ((\text{non non } S) \text{ ou } (\text{non } R))$$

est vraie. Donc, par (TL 1),

$$((\text{non } R) \text{ ou } S) \implies ((\text{non non } S) \text{ ou } (\text{non } R))$$

est vraie.

(TL 8) Immédiate d'après (AL 3), (AL 4) et (TL 1).

(TL 9) D'après (TL 7) et (RV 2),  $(\text{non } S) \implies (\text{non } R)$  est vraie. Par (TL 8),

$$((\text{non } S) \text{ ou } T) \implies ((\text{non } R) \text{ ou } T)$$

est vraie.

(TL 10) Exercice.

## 1.4 Méthodes de démonstration

### 1.4.1 Méthode de l'hypothèse auxiliaire ou de raisonnement direct

Dans ce qui suit, une relation est vraie signifie qu'elle vraie dans les mathématiques (usuelles).

Soient  $R$  et  $S$  deux relations. Si on suppose que  $R$  est vraie, c'est-à-dire, on l'ajoute provisoirement aux axiomes des mathématiques, et on démontre que  $S$  est vraie dans les "nouvelles" mathématiques, alors l'implication  $R \implies S$  est vraie.

En effet, si  $S$  est obtenue par application des axiomes des mathématiques, ou bien si  $S$  est la relation  $R$ , alors  $R \implies S$  est vraie. Si  $S$  est obtenue par application itérée de (RV 2) :  $R_1, R_2, \dots, R_n$  (dans les "nouvelles" mathématiques), avec  $R_n$  est la relation  $S$ , et chaque  $R_i$  est précédée d'une relation  $R_j$  et d'une relation  $R_k$  :  $R_j \implies R_i$ . On va démontrer de proche en proche que chaque implication  $R \implies R_i$  est vraie. Si  $R \implies R_j$  et  $R \implies (R_j \implies R_i)$  sont vraies. Alors, d'après (TL 9),  $(R_j \implies R_i) \implies (R \implies R_i)$  est vraie. D'après (TL 1),  $R \implies (R \implies R_i)$ , c'est-à-dire,  $(\text{non } R) \text{ ou } (R \implies R_i)$  est vraie. Par (AL 2),  $(\text{non } R) \implies (R \implies R_i)$  est vraie. D'après (TL 8),

$$[(\text{non } R) \text{ ou } (R \implies R_i)] \implies [(R \implies R_i) \text{ ou } (R \implies R_i)]$$

est vraie. Donc  $(R \implies R_i) \text{ ou } (R \implies R_i)$  est vraie, et d'après (AL 1),  $R \implies R_i$  est vraie aussi.

**Exercice 1.4.1.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres positifs. Montrer que si  $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$  alors  $a = b$ .

### 1.4.2 Raisonnement par l'absurde

Soit  $R$  une relation. Supposons que  $(\text{non } R)$  soit vraie et qu'il existe une relation contradictoire dans les "nouvelles" mathématiques. D'après la remarque 1.3.1, la relation  $R$  est vraie. Donc la relation

$$(\text{non } R) \implies R$$

est vraie. D'après (AL 4), la relation

$$(R \text{ ou } \text{non } R) \implies (R \text{ ou } R).$$

En appliquant (TL 4) et (AL 1), on obtient que  $R$  est vraie.

Pour montrer qu'une relation  $R$  est vraie, le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que  $(\text{non } R)$  soit vraie, puis à chercher une relation contradictoire.

Voici quelques applications de cette méthode.

(TL 11) Si  $R$  est une relation,  $(\text{non non } R) \implies R$  est vraie.

(TL 12) Si  $R$  et  $S$  sont des relations,

$$((\text{non } S) \implies (\text{non } R)) \implies (R \implies S)$$

est vraie.

Pour démontrer (TL 11), supposons que  $(\text{non non } R)$  soit vraie et démontrons que  $R$  est vraie. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $(\text{non } R)$  est vraie. Donc on obtient une contradiction.

On démontre de même (TL 12). L'implication  $(\text{non } S) \implies (\text{non } R)$  s'appelle la *contraposée* de l'implication  $R \implies S$ .

On dit qu'on raisonne par *contraposition* si on applique (TL 12).

**Exercice 1.4.2.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2$  est pair implique que  $n$  est pair.

**Exercice 1.4.3.** En raisonnant par l'absurde et en utilisant l'exercice précédent, montrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

### 1.4.3 Méthode de disjonction des cas

Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  des relations. Si les relations

$$R \text{ ou } S, \quad R \implies T, \quad S \implies T,$$

sont vraies,  $T$  est vraie.

En effet, d'après (TL 10),

$$(R \text{ ou } S) \implies (T \text{ ou } T)$$

est vraie. Par (AL 1) et (TL 1),

$$(R \text{ ou } S) \implies T$$

est vraie. Finalement  $T$  est vraie.

Dans la pratique, on prend pour  $S$  la négation de  $R$ . Donc pour montrer que  $T$  est vraie il suffit de montrer que  $R \implies T$ ,  $(\text{non } R) \implies T$  sont vraies.

**Exercice 1.4.4.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ .

## 1.5 La conjonction

On va introduire le signe  $\wedge$ , qu'on désigne par le mot et.

La relation

$$\text{non}[(\text{non } R) \text{ ou } (\text{non } S)]$$

se désigne par

$$R \text{ et } S$$

et s'appelle la *conjonction logique* des relations  $R$  et  $S$ .

(TL 13) Si  $R$  et  $S$  sont des relations, les relations

$$(R \text{ et } S) \implies R, \quad (R \text{ et } S) \implies S$$

sont vraies.

Si en plus  $R$  et  $S$  sont vraies,  $(R \text{ et } S)$  l'est aussi.

D'après (AL 2),

$$(\text{non } R) \implies [(\text{non } R) \text{ ou } (\text{non } S)]$$

est vraie. Par (TL 7),

$$(R \text{ et } S) \implies (\text{non non } R)$$

est vraie. On conclut par application de (TL 11) et (TL 1). De même on montre l'autre implication.

Maintenant, si  $R$  et  $S$  sont vraies. Supposons que  $(R \text{ et } S)$  est fausse, c'est-à-dire,

$$\text{non non}[(\text{non } R) \text{ ou } (\text{non } S)]$$

est vraie. Par (TL 11),  $(\text{non } R) \text{ ou } (\text{non } S)$ , c'est-à-dire,  $R \implies (\text{non } S)$ , est vraie. Alors  $S$  est fausse, ce qui est absurde. Alors  $(R \text{ et } S)$  est vraie.

Soient  $R$  et  $S$  sont des relations. Les relations  $R$ ,  $S$  sont vraies, si et seulement si, la relation  $(R \text{ et } S)$  est vraie, en cohérence avec le sens intuitif du mot et.

## 1.6 L'équivalence

Soient  $R$  et  $S$  des relations. On désigne par  $R \iff S$  la relation

$$(R \implies S) \text{ et } (S \implies R).$$

Elle s'appelle *équivalence logique*. Si cette équivalence est vraie, on dit que  $R$  est *équivalente* à  $S$  ou  $R$  et  $S$  sont *équivalentes*.

On laisse au lecteur de démontrer les tautologies suivantes :

(TL 14) Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  des relations.

Si  $R \iff S$  est vraie alors  $S \iff R$  est vraie.

Si  $R \iff S$  et  $S \iff T$  sont vraies, alors  $R \iff T$  est vraie.

(TL 15) Soient  $R$ ,  $S$  deux relations équivalentes, et soit  $T$  une relation. Alors les relations suivantes sont vraies :

$$(\text{non } R) \iff (\text{non } S) \tag{1.1}$$

$$(R \implies T) \iff (S \implies T) \tag{1.2}$$

$$(T \implies R) \iff (T \implies S) \tag{1.3}$$

$$(R \text{ et } T) \iff (S \text{ et } T) \tag{1.4}$$

$$(R \text{ ou } T) \iff (S \text{ ou } T) \tag{1.5}$$

(TL 16) Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  des relations. Alors les relations suivantes sont vraies :

$$(R \text{ ou } R) \iff R \tag{1.6}$$

$$(R \text{ ou } S) \iff (S \text{ ou } R) \tag{1.7}$$

$$((R \text{ ou } S) \text{ ou } T) \iff (R \text{ ou } (S \text{ ou } T)) \tag{1.8}$$

$$(\text{non non } R) \iff R \tag{1.9}$$

$$(R \implies S) \iff ((\text{non } S) \implies (\text{non } R)) \tag{1.10}$$

$$(R \text{ et } R) \iff R \tag{1.11}$$

$$(R \text{ et } S) \iff (S \text{ et } R) \tag{1.12}$$

$$((R \text{ et } S) \text{ et } T) \iff (R \text{ et } (S \text{ et } T)) \tag{1.13}$$

$$(R \text{ ou } S) \iff \text{non} [(\text{non } R) \text{ et } (\text{non } S)] \tag{1.14}$$

$$(R \text{ ou } S) \iff ((\text{non } R) \implies S) \tag{1.15}$$

$$(R \text{ et } (\text{non } S)) \iff \text{non } (R \implies S) \tag{1.16}$$

$$(R \text{ ou } (S \text{ et } T)) \iff (R \text{ ou } S) \text{ et } (R \text{ ou } T) \tag{1.17}$$

$$(R \text{ et } (S \text{ ou } T)) \iff (R \text{ et } S) \text{ ou } (R \text{ et } T) \tag{1.18}$$

(TL 17) Soient  $R$  et  $S$  des relations.

Si  $R$  est fausse,  $(R \text{ ou } S) \iff S$  est vraie.

Si  $R$  est vraie,  $(R \text{ et } S) \iff S$  est vraie.



## 1.7 Substitutions dans une relation

Soient  $R$  une relation,  $A$  un objet mathématique, et  $x$  une lettre (qui est aussi un objet mathématique “totalement indéterminé”). Si on substitue dans la relation  $R$ ,  $A$  à la lettre  $x$ , on obtient une relation que l’on appelle la relation obtenue en *substituant*  $A$  à  $x$  dans  $R$ , ou en *donnant* à  $x$  la valeur  $A$  dans  $R$ . Cette relation sera désignée par

$$(A \mid x)R.$$

Si  $x$  ne figure pas dans  $R$ , la relation  $(A \mid x)R$  n’est autre que  $R$ . Si  $(A \mid x)R$  est vraie, on dit que l’objet mathématique  $A$  *vérifie la relation*  $R$ .

Pour signaler que la lettre  $x$  figure effectivement dans la relation  $R$ , on note celle-ci par

$$R\{x\}.$$

Dans ce cas, on note  $(A \mid x)R$  par

$$R\{A\}.$$

De même, si  $x$  et  $y$  deux lettres distinctes figurant dans  $R$ , on préfère la notation

$$R\{x, y\}$$

à  $R$ .

**Exemples 1.7.1.** — Soit la relation  $R\{x\} : (x \in \mathbb{R}) \text{ et } (x^2 + 1 = 0)$ . Il n’existe pas d’objet mathématique vérifiant  $R\{x\}$ .

— Soit la relation  $S\{x, y\} : (x, y) \in \mathbb{N}^2 \implies (x + y = y + x)$ . Tout couple de  $\mathbb{N}^2$  vérifie  $x + y = y + x$ .

(TL 18) Soient  $R$  une relation,  $A$  un objet mathématique, et  $x$  une lettre. Si la relation  $R$  est vraie, la relation obtenue en substituant  $A$  à  $x$ , est vraie.

En effet, si  $R$  est une relation obtenue par application des axiomes logiques ou bien si  $R$  axiome de second type (ne contient pas la lettre  $x$ ), alors  $(A \mid x)R$  est vraie (vérification facile). Si  $R$  une relation quelconque, c’est-à-dire, si  $R$  est obtenue par application itérée de (RV 2) :  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , avec  $R_n$  est la relation  $R$ , et chaque  $R_i$  est précédée d’une relation  $R_j$  et d’une relation  $R_k : R_j \implies R_i$ . Donc obtient

$$(A \mid x)R_1, (A \mid x)R_2, \dots, (A \mid x)R_n$$

avec  $(A \mid x)R_n$  est la relation  $(A \mid x)R$ , et chaque  $(A \mid x)R_i$  est précédée d’une relation  $(A \mid x)R_j$  et d’une relation  $(A \mid x)R_k : (A \mid x)R_j \implies (A \mid x)R_i$ . La relation  $(A \mid x)R_1$  est vraie. On démontre de proche en proche que les relations  $(A \mid x)R_i$  sont vraies.

## 1.8 Quantificateurs

On a vu trois procédés fondamentaux pour créer des relations : la disjonction logique, la négation, et la substitution d'un objet à une lettre. On introduit maintenant un autre procédé fondamental par l'intermédiaire du signe logique :

$$\exists$$

On lui attribue un sens en cohérence avec le sens intuitif de l'expression "il existe", et on l'appelle le *quantificateur existentiel*.

Soient  $R$  une relation et  $x$  une lettre. On admet provisoirement (cf. la section suivante) la définition de la relation

$$(\exists x) R \quad \text{ou} \quad (\exists x) R\{x\}$$

qui se lit :

$$\textit{il existe } x \textit{ tel que } R.$$

On retiendra seulement que si la relation  $(\exists x) R$  est vraie alors on peut trouver un objet mathématique spécifique  $A$  tel que  $(A \mid x)R$  est vraie. On ajoute le critère suivant aux axiomes logiques :

(AL 5) Soient  $R$  une relation,  $x$  une lettre, et  $A$  un objet mathématique. La relation

$$(A \mid x)R \implies (\exists x) R$$

est vraie.

Donc pour que la relation  $(\exists x) R$  soit vraie il faut et il suffit qu'on puisse trouver un objet mathématique vérifiant  $(A \mid x)R$ .

La relation (R 6) s'écrit

$$(\exists x) [(x \in \mathbb{R}) \text{ et } (x^2 + 1 = 0)],$$

relation qui est bien évidemment fausse.

Le *quantificateur universel*

$$\forall$$

s'obtient du signe  $\exists$  : On désigne par

$$(\forall x) R$$

la relation

$$\text{non} [(\exists x) (\text{non } R)]$$

et se lit

$$\textit{pour tout } x, R$$

ou

*on a  $R$ , quel que soit  $x$ .*

La relation (R 5) s'écrit

$$(\forall x)(\forall y) [(x, y) \in \mathbb{N}^2 \implies (x + y = y + x)],$$

qui est une relation vraie.

(TL 19) Soient  $R$  une relation,  $x$  une lettre, et  $A$  un objet mathématique. La relation

$$(\forall x) R \implies (A \mid x)R$$

est vraie.

En effet, d'après (AL 5), La relation

$$(A \mid x)(\text{non } R) \implies (\exists x) (\text{non } R)$$

est vraie. Sa contraposée

$$\text{non} [(\exists x) (\text{non } R)] \implies \text{non} [(A \mid x)(\text{non } R)]$$

est encore vraie. Donc

$$(\forall x) R \implies \text{non non} [(A \mid x)R].$$

Or

$$\text{non non} [(A \mid x)R] \iff (A \mid x)R$$

est vraie. On conclut par application de (TL 1).

En utilisant (TL 18) on peut facilement démontrer :

**Remarque 1.8.1.** Soient  $R$  et  $S$  deux relations et  $x$  une lettre.

Si  $R \implies S$  est vraie,

$$(\exists x) R \implies (\exists x) S, \quad (\forall x) R \implies (\forall x) S$$

sont vraies.

Si  $R \iff S$  est vraie,

$$(\exists x) R \iff (\exists x) S, \quad (\forall x) R \iff (\forall x) S$$

sont vraies.

Comme exercice et en utilisant la remarque précédente, démontrer

(TL 20) Soient  $R$  une relation et  $x$  une lettre. La relation

$$\text{non} ((\exists x) R) \iff (\forall x) (\text{non } R)$$

est vraie.

Noter que, si tout objet mathématique  $A$  vérifie la relation  $R$ , alors  $(\forall x) R$  est vraie. Supposons qu'elle est fausse, donc  $(\exists x) (\text{non } R)$  est vraie. On peut trouver un objet  $B$  tel que la relation  $(B \mid x)(\text{non } R)$ , qui est identique à  $\text{non} (B \mid x)R$ , soit vraie. Or  $(B \mid x)R$  est vraie. Contradiction.