

## Travaux dirigés de Thermodynamique : Série n° 1

Dérivées et DifférentiellesExercice 1

- ❖ Dériver deux fois les fonctions suivantes :

$$F(x) = x^n; \quad G(x) = 2x(1+x)^{-1}; \quad H(x) = (\log[x])^2$$

Exercice 2

- ❖ Pour les fonctions  $f(x, y)$  suivantes, donner l'expression des dérivées partielles.

$$F(x,y) = a + 3x^2 + \log(y); \quad G(x,y) = \log(x/y); \quad H(x,y) = \cos(x+y),$$

Exercice 3

- ❖ Soit une fonction  $U(x, y) = ax + c/(y - b)$  avec  $a, b$  et  $c$  des constantes.

Donner la forme différentielle de  $U(x,y)$ .

Exercice 4

- ❖ On a mesuré en laboratoire une quantité  $\delta Q$  correspondant aux variations d'une propriété  $Q$  en fonction de deux paramètres  $x$  et  $y$ . On a obtenu

$$\delta Q = a dx + \frac{cx}{y-b} dy. \text{ Est-ce une différentielle au sens mathématique ?}$$

Exercice 5

Variations et différentielles (application).

On considère : a) un carré de côté  $a = 10 \text{ cm}$ ; b) un cercle de rayon  $a = 10 \text{ cm}$ .

Pour chacun de ces deux cas :

1. Déterminer la variation  $\delta \ell$  du périmètre  $\ell$  et la variation  $\delta S$  de la surface  $S$ , lorsque «  $a$  » varie de  $\delta a$ .

Calculer  $\delta \ell$  et  $\delta S$ , pour  $\delta a = 0,1 \text{ cm}$  puis  $\delta a = 0,001 \text{ cm}$ .

- 2 - Calculer les dérivées  $\frac{\partial \ell}{\partial a}$  et  $\frac{\partial S}{\partial a}$  et les différentielles  $d \ell$  de  $\ell(a)$  et  $dS$  de  $S(a)$ , en fonction de  $a$  et  $da$ .

3. Déterminer les erreurs relatives commises sur les calculs de  $\delta \ell$  et  $\delta S$ , si on utilise respectivement les différentielles  $d \ell$  et  $dS$  au lieu des variations exactes  $\delta \ell$  et  $\delta S$ , en fonction de  $a$  et  $\delta a$ .

N.B : l'élément différentiel  $da$  s'identifie alors avec la variation  $\delta a$ .

Calculer ces erreurs pour  $\delta a = 0,1 \text{ cm}$  puis  $\delta a = 0,001 \text{ cm}$ .

*Travaux dirigés de Thermodynamique : Série n° 2*

**Exercice 6**

- ❖ Calculer les dérivées partielles suivantes pour un gaz parfait :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$



Que remarquez-vous ?

**Exercice 7**

- ❖ Démontrer qu'en général on a :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1$$

- ❖ Soit les coefficients thermo élastiques suivants :

~~Exercice 7~~ \* Le coefficient d'augmentation de volume à pression constante :  $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

~~Exercice 7~~ Le coefficient d'augmentation de pression à volume constante :  $\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

Le coefficient de compressibilité à température constante :  $\times = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

Démontrer que :

$$\frac{\times \cdot \beta}{\alpha} = \frac{1}{P}$$

- ❖ Calculez ces trois coefficients ( $\alpha, \beta, \times$ ) pour un gaz parfait et en déduire la relation qui les lie.

*P=Cte*

- ❖ Des mesures expérimentales ont montré que les coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme d'une mole d'un gaz s'expriment, en fonction des variables indépendantes : pression p et température T, par les équations

$$\alpha = \frac{R}{R.T + b.p} \quad \text{et} \quad \times = \frac{R.T}{p(R.T + b.p)} \quad (\text{Où R et b sont des constantes})$$

Trouvez l'équation d'état de ce gaz, relative à une mole.

## Travaux dirigés de Thermodynamique : Série n° 3

Exercice 8

- ❖ On met en contact deux morceaux de fer de températures ( $T_1=25^\circ\text{C}$ ,  $T_2=90^\circ\text{C}$ ) et de masse ( $m_1=100\text{g}$ ,  $m_2=150\text{g}$ ) dont la capacité calorifique est supposée indépendante de la température ( $C=0,46 \text{ J}\text{Kg}^{-1}$ ).

A l'équilibre thermique, calculer la température finale.

Exercice 9

$$C_e = 4,185 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$P = Cte$$

On mélange dans une enceinte calorifugé, à pression constante, une masse  $m_1$  d'eau à la température  $T_1=67^\circ\text{C}$  avec une masse  $m_2$  d'eau à la température  $T_2=27^\circ\text{C}$ .

- ❖ Quelle est la chaleur massique de l'eau ?
- ❖ Déterminer littéralement, puis numériquement la température d'équilibre ( $T_e$ ) en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .

A.N :  $m_1 = 10\text{g}$  et  $m_2=90\text{g}$

- ❖ Quelle masse d'eau peut-on mélanger à la masse  $m_1$  pour obtenir  $T_e=60^\circ\text{C}$  ?

Exercice 10

Rappeler les trois relations de la chaleur en cas générale.

- ❖ Calculer les coefficients calorimétriques ( $\underline{l}$ ,  $\underline{h}$ ,  $\underline{\lambda}$  et  $\underline{\mu}$ ) en fonction de  $C_p$ ,  $C_v$  et des dérivées partielles.
- ❖ Donner la relation de Meyer généralisée.
- ❖ Pour un gaz parfait, le volume molaire normal vaut 22,414 litres/mol, Calculer R en utilisant les unités du système international.
- ❖ Donner les trois relations de Clausius de la chaleur pour un gaz parfait ainsi que la relation de Meyer pour une mole.
- ❖ Sachant que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , calculer  $C_p$  et  $C_v$  pour  $\gamma=1.4$ .

Calorifugé = adiabatique = ne laisse pas passer la Q



### Exercice 11

On Considère deux moles d'oxygène (gaz supposé parfait) que l'on peut faire passer réversiblement de l'état initial A ( $P_A, V_A, T_A=300\text{K}$ ), et à la pression atmosphérique, à un état final B ( $P_B, V_B, T_B$ ) par trois chemins distincts :

- ❖ Une transformation isotherme dont la pression finale est le triple de la pression initiale,
- ❖ Une transformation isobare suivie d'une transformation isochore,
- ❖ Une transformation isochore suivie d'une transformation isobare.
- ❖ Calculer les trois quantités de chaleurs reçues ou cédées ( $Q_1, Q_2$  et  $Q_3$ ),
- ❖ Comparez ces quantités de chaleurs et conclure.

### Exercice 12

On comprime un gaz (supposé G.P) adiabatiquement d'un état initial (i) à un état final(f).

- ❖ Qu'est-ce que une transformation adiabatique ?
- ❖ Démontrer la loi de Laplace, et en déduire toutes les relations qui lient les paramètres ( $P, V, T$ ).

### Exercice 13

On effectue, de 3 façons différentes, la compression d'une mole du diazote  $N_2$  ( $\equiv$  Air) de l'état 1( $P_1 = P_0 = 1\text{bar}, V_1 = 3\text{L}$ ) à l'état 2 ( $P_2 = 3P_0, V_2 = 1\text{ litre}$ )

- ❖ Transformation isochore puis isobare
- ❖ Transformation isobare puis isochore
- ❖ Transformation telle que  $PV = \text{Cte}$

Représenter dans le diagramme de Clapeyron les 3 transformations.

Que représente l'aire limitée par les courbes représentantes ?

Que remarquez-vous ?

Calculer le travail pour chaque transformation.

Conclure.

Travaux dirigés de Thermodynamique : Série n° 5



Exercice 14

On considère un Système fermé

- ❖ Qu'est-ce qu'un Système fermé ?
- ❖ Enoncer le premier principe pour un Système fermé subissant une transformation finie de l'état 1 à l'état 2.
- ❖ Que traduit ce principe ?

Soit un système fermé, constitué de  $n$  mole d'un gaz parfait, de capacité  $C_V$  constante.

- ❖ Donner l'équation d'état du système.
- ❖ Donner l'expression de l'énergie interne et celle de l'enthalpie.
- ❖ Donner l'expression différentielle de l'énergie interne et celle de l'enthalpie en fonction de température.

Le système subit une transformation isentropique.

- ❖ Qu'est-ce qu'une transformation isentropique ?
- ❖ La quantité  $C_P/C_V$  reste constante, montrer que la grandeur  $T V^{\gamma-1}$  reste invariante.

On pose  $C_P/C_V = \gamma$  et  $R/\gamma-1 = C_V$

Exercice 15

Etude d'un cycle de Carnot

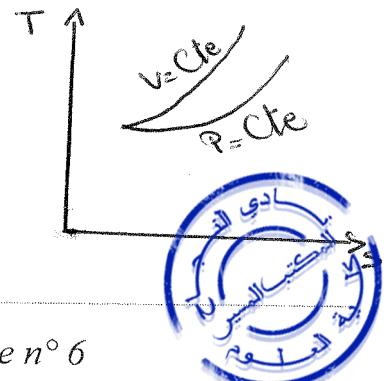
On fait subir à une mole de gaz parfait monoatomique une suite de transformations réversibles.

On donne le rapport  $(C_P/C_V) = 5/3$  et  $R = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ . On part d'un état représenté sur un diagramme (entropie, température) par un point  $M_1$ .

Le volume du gaz vaut alors  $V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3$  et la température est  $T_1 = 400 \text{ K}$ .

- \* ❖ On fait subir à ce gaz une détente isotherme, ce qui porte son volume à  $V_2 = 2 \cdot V_1$ . Calculer la pression finale  $P_2$ , la variation d'entropie  $S_2 - S_1$  et le travail  $W_1$  reçu par le gaz au cours de cette transformation.
- \* ❖ A partir de cet état, le gaz subit une transformation adiabatique, la température étant passée à  $T_3 = 300 \text{ K}$ . Calculer le travail  $W_2$ , la pression  $P_3$  et le volume  $V_3$ .
- ❖ Une compression isotherme où l'entropie a repris sa valeur initiale  $S_1$ . Calculer le travail  $W_3$  reçu par le gaz au cours de cette compression, ainsi que le volume  $V_4$  et la pression  $P_4$  en fin d'opération.
- ❖ Le cycle est fermé grâce à une compression adiabatique. Calculer le travail  $W_4$  reçu par le gaz au cours de cette transformation.
- ❖ Représentez le cycle dans le diagramme de Clapeyron.
- ❖ Sur le diagramme comment sont représentées les quantités de chaleur reçues par le gaz au cours de chacune des transformations, ainsi que la quantité de chaleur totale ?
- ❖ En déduire le travail et la quantité de chaleur mis en jeu au cours du cycle. Le principe d'équivalence est-il vérifié ?
- ❖ Quelle est la nature du cycle ? Justifiez votre réponse.

89  $T = \text{cte}$



Travaux dirigés de Thermodynamique : Série n° 6

**Exercice 16**

- ❖ Démontrer que la constante des gaz parfaits est égale à :  $R = 8.31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .
- ❖ Démontrer que, dans le diagramme (T, S), la pente des isochores est supérieur à la pente des isobares.
- ❖ Représenter ces transformations dans le diagramme (T.S), à partir d'un même point de l'axe des températures.

**Exercice 17**

Dans une machine thermique, une mole d'un gaz parfait décrit le cycle des transformations suivantes :

Initialement à l'état 1, ( $P_1=10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_1=300\text{k}$ ), il subit une évolution adiabatique jusqu'à l'état 2 : ( $P_2$ ,  $T_2$ ) ; Il se trouve alors en contact avec une source chaude, il se réchauffe, de façon isobare, jusqu'à  $T_3=900\text{k}$ .

Ensuite, il se détend de manière adiabatique réversible jusqu'à la pression  $P_4$ , sa température est alors  $T_4$ . Il achève de se refroidir, d'une façon isobare, au contact d'une source froide, il se trouve, alors dans l'état 1.

- ✓ 1. Quelle est la relation entre  $P_2$  et  $P_3$  ?
- ✓ 2. Tracer le cycle sur le diagramme de Clapeyron (P, V).
- ✓ 3. Démontrer que lors d'une transformation adiabatique, on a la relation suivante :  
$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte.}$$
- ✓ 4. En déduire l'expression de  $T_2$  en fonction de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $T_1$  et  $\gamma$  ;
- ✓ 5. En déduire l'expression de  $T_4$  en fonction de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $T_3$  et  $\gamma$ .
6. Exprimer en fonction des températures l'énergie  $Q_c$  échangée avec la source chaude et  $Q_f$  échangée avec la source froide.
7. Donner l'expression du travail de cycle en fonction de  $C_p$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ .
8. Soit le rapport  $\tau = \frac{P_2}{P_1}$ , Pour  $\tau = 4$  et  $\gamma = 1,4$ , Donner les valeurs numériques des différents paramètres (P, V, T), des travaux et des quantités de chaleurs échangées, quelle la nature du cycle ? justifier votre réponse.
9. donner le rendement  $\eta$  théorique de cette machine et démontrer qu'il peut s'écrire :

$$\eta = 1 - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

calculator the rendement

289, 3  
310, 4  
457, 12  
310, 14

٢٨٩, ٣  
٣١٠, ٤  
٤٥٧, ١٢  
٣١٠, ١٤

٥٦٤, ٢  
٥٦٤, ٣  
٥٦٤, ٤

# Thermodynamique

Série n° 1

Exercice 1 :

$$* F(x) = x^m \Rightarrow F'(x) = m x^{m-1}$$

$$F'(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

$$* G(x) = 2x(1+x)^{-1} \quad (f^m)' = m f' f^{m-1}$$

$$G'(x) = 2(1+x)^{-1} - 2x(1+x)^{-2}. \quad x \neq 0.$$

$$G'(x) = 2(1+x)^{-2} [-x + (1+x)]$$

$$G'(x) = 2(1+x)^{-2}$$

$$(\log(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow G''(x) = -4(1+x)^{-3}$$

$$f^m = m f' f^{m-1}$$

$$* H(x) = (\log(x))^2 \quad x > 0 \quad (\log(x))^2 = 2 \times \frac{1}{x} \times (\log(x))^{2-1}$$

$$H'(x) = \frac{2}{x} \log(x)$$

$$H''(x) = \frac{-2}{x^2} \log(x) + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2} (1 - \log x).$$

Exercice 2 :

$$F(x) = a + 3x^2 + \log(y).$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_y = 0 + 6x + 0 = 6x.$$



$$*\frac{\partial F}{\partial y}_x = 0 + 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$*\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} (6x) = 6$$

$$*\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \right)_x = -\frac{1}{y^2}$$

$$*\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y} \right)_y = 0$$

$$*\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} (6x)_x = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

$$* G(x,y) = \log \left( \frac{x}{y} \right) = \log(x) - \log(y)$$

$$*\frac{\partial G}{\partial x}_y = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

$$*\frac{\partial G}{\partial y}_x = 0 - \frac{1}{y} = -\frac{1}{y}$$

$$*\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$



$$*\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-1}{y} \right) = \frac{1}{y}$$

$$*\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y} \right) = 0$$

$$*\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x} \right) = 0$$



$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2 y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}$$

$$* H(x,y) = \cos(x+y).$$

$$*\frac{\partial H}{\partial x}_y = -\sin(x+y) ; * \frac{\partial H}{\partial y}_x = -\sin(x+y)$$

$$*\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}_y = -\cos(x+y) ; * \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}_x = -\cos(x+y).$$

$$*\frac{\partial H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\sin(x+y) \right) \\ = -\cos(x+y).$$

$$*\frac{\partial H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\sin(x+y) \right) = -\cos(x+y)$$

Exercice 3:  $U(x, y) = ax + \frac{c}{y-b}$

$a, b, c$  ctes.

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_x dy$$

\*  $\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_y = a$

\*  $\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_x = -\frac{c}{(y-b)^2}$



$$dU = a dx - \frac{c}{(y-b)^2} dy$$

Exercice 4:

$$\delta Q = a dx + \frac{cx}{y-b} dy$$

$$\delta Q = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

avec  $A(x, y) = a$ .

et  $B(x, y) = \frac{cx}{y-b}$   $c \neq 0$ .

$\delta Q$  est une différentielle totale exacte

$\Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$

$$* \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_x = 0$$



$$* \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_y = \frac{c}{y-b} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_y$$

S  $\varphi$  n'est pas une différentielle exacte

$f R = a dx - \frac{c}{(y-b)^2} dy$ .  $R$  est différentielle exacte.

$$\delta R = \delta \left( ax + \frac{c}{y-b} \right) = dU$$

$$U = ax + \frac{c}{y-b} \quad dU = SR \quad ; \quad R = U$$

Exercice 5:



	Carré	Cercle
périmètre	$P_{\text{carré}} = 4a$	$l_{\text{cercle}} = 2\pi a$
Surface	$S_{\text{carré}} = a^2$	$S_{\text{cercle}} = \pi a^2$

$$a = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$S_{a_1} = 0,1 \text{ m}^2 = 0,001 \text{ m}^2$$

$$f a_2 = 0,001 = 0,00001$$

$$a \rightarrow a + da$$

$$l(a) \rightarrow l(a + da).$$

$$S(a) \rightarrow S(a + da).$$

$$\Rightarrow ) \quad dl = l(a + da) - l(a).$$

$$dS = S(a + da) - S(a).$$

	$a = 0,1$	$a + \delta a_1 = 0,101$	$a + \delta a_2 = 0,10001$
$l_{\text{carre}}$	0,4	0,404	0,40004
$S_{\text{carre}}$	—	0,004	0,00004
$l_{\text{ cercle}}$	0,628	0,63428	0,6280628
$\delta l_{\text{ cercle}}$	—	$6,28 \cdot 10^{-3}$	$6,28 \cdot 10^{-5}$
$S_{\text{carre}}$	0,1	0,010201	0,010002
$\delta S_{\text{carre}}$	—	0,000201	0,000002
$S_{\text{ cercle}}$	0,0314	0,03203114	0,03140628
$\delta S_{\text{ cercle}}$	—	$6,3114 \cdot 10^{-4}$	$6,280314 \cdot 10^{-6}$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx$$

$$l(a) \rightarrow dl = \left( \frac{\partial l}{\partial a} \right) da$$

$$S(a) \rightarrow dS = \left( \frac{\partial S}{\partial a} \right) da$$

$$* \frac{\partial l_{\text{carre}}}{\partial a} = 4 \Rightarrow \delta l_{\text{carre}} = 4 da$$

$$* \frac{\partial l_{\text{ cercle}}}{\partial a} = 2\pi \Rightarrow \delta l_{\text{ cercle}} = 2\pi da$$

$$* \frac{\partial S_{\text{carre}}}{\partial a} = 2a \Rightarrow \delta S_{\text{carre}} = 2a da$$

$$* \frac{\partial S_{\text{ cercle}}}{\partial a} = 2\pi a \Rightarrow \delta S_{\text{ cercle}} = 2\pi a da$$



$\delta a$	$10^{-3}$	$10^{-5}$
$\delta l_{\text{carre}}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$
$\delta l_{\text{ cercle}}$	$6,28 \cdot 10^{-3}$	$6,28 \cdot 10^{-5}$
$\delta S_{\text{ carre}}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$
$\delta S_{\text{ cercle}}$	$6,28 \cdot 10^{-4}$	$6,28 \cdot 10^{-5}$



$$\delta S_{\text{carre}} = S(a + \delta a) - S(a).$$

$$= \pi(a + \delta a)^2 - \pi a^2.$$

$$= 2\pi a \delta a + \underline{\underline{\pi a^2}}.$$

$$\delta l_{\text{carre}} = l(a + \delta a) - l(a).$$

$$= 4(a + \delta a) - 4a.$$

$$= 4 \delta a = \delta l_{\text{carre}}.$$

$$\delta S_{\text{carre}} = S(a + \delta a) - S(a).$$

$$= (a + \delta a)^2 - a^2.$$

$$= 2a \delta a + \underline{\underline{\pi a^2}}$$

$$\delta S_{\text{carre}} = \delta S_{\text{carre}} + \delta a^2.$$

Série 2: Gaz parfait:  $PV = mRT$ .

Exercice 6:

$$PV = mRT \Rightarrow V = \frac{mRT}{P}$$

$$* \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{mRT}{P} \right)_P$$

$$* \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{mR}{P} = \frac{V}{T}$$



$$* \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{PV}{mR} \right)_V = \frac{V}{mR} = \frac{T}{P}$$

$$* \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{mRT}{V} \right)_T = -\frac{mRT}{V^2} = -\frac{P}{V}$$

$$* \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{PV}{mR} \right)_P = \frac{P}{mR} = \frac{T}{V}$$

$$* \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{mRT}{P} \right)_T = -\frac{mRT}{P^2} = -\frac{V}{P}$$

$$* \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{mRT}{V} \right)_V = \frac{mR}{V} = \frac{P}{T}$$

Remarque: •  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \times \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = 1$

$$\bullet \quad \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \times \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 1$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \times \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z = 1$$

$$\bullet \quad \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = 1$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = -1$$

Pour un gaz parfait:

$$\left( -\frac{V}{P} \right) \times \left( \frac{P}{T} \right) \times \left( \frac{T}{V} \right) = -1$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \times \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \times \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$



Exercice 7:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \times \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \times \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

$$* \frac{\partial V}{\partial P} = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT.$$

$$* \frac{\partial P}{\partial V} = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT.$$

$$\delta V = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left( \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT.$$

$$\delta V = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV + \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dT.$$

A V et T Done:

$$* \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = 1$$

$$* \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \\ = - \frac{1}{\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P}$$

Carr  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \times \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = 1$



$$\Rightarrow \left\{ \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = -1 \right\}$$

$$* \text{Cara: } \alpha = \frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

$$\chi = -\frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Maintener que:  $\frac{\chi \times \beta}{\alpha} = \frac{1}{P}$

$$\frac{\chi \times \beta}{\alpha} = \frac{-\frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \frac{1}{P} \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V}{\frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P} = - \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \frac{1}{P} \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \\ \times \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P$$

$$\frac{\chi \times P}{\alpha} = -\frac{1}{P} \times \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \right]$$

$$= -\frac{1}{P} \times (-1)$$

$$\frac{\chi \times P}{\alpha} = \frac{1}{P}$$

Done:  $\frac{\chi \times P}{\alpha} = \frac{1}{P}$



Pour un gaz parfait:

$$\alpha = \frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \times \frac{V}{T} = \frac{1}{T}$$

$$P = \frac{1}{P} \times \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{P} \times \frac{P}{T} \times \frac{1}{T}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \times \left( -\frac{V}{P} \right) = \frac{1}{P}$$

$$\frac{\chi_T \times P}{\alpha} = \frac{\frac{1}{P} \times \frac{1}{T}}{\frac{1}{T}} = \frac{1}{P}$$

$$\alpha = \frac{R}{RT + bP} = \frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\chi = \frac{RT}{P(RT + bP)} = -\frac{1}{V} \times \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{RV}{RT+bP}$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP.$$

$$P = \text{cte} \Rightarrow dP = 0.$$



$$\therefore dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

$$\therefore dV = \frac{RV}{RT+bP} \times dT \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{R}{RT+bP} dT$$

$$\Rightarrow \ln V = \ln (RT + bP) + C(P).$$

$$\text{seit } C(P) = \ln f(P).$$

$$V = f(P)(RT + bP)$$

$$X = -\frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -XV.$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial f}{\partial P}(RT + bP) + f(P) \times \frac{\partial}{\partial P}(RT + bP)_T$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T &= \frac{\partial f}{\partial P}(RT + bP) + f(P) \times b \\ &= -XV \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -xV = -\left[\frac{RT}{P(RT+bP)}\right] \left[f(P)(RT+bP)\right]$$

$$= -\frac{RT}{P} \times f(P).$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} (RT + bP) + bf = -\left(\frac{RT}{P}\right) f.$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} (RT + bP) + \frac{f}{P} (RT + bP) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} + \frac{f}{P} = 0 \quad \frac{\partial f}{f} + \frac{\partial P}{P} = 0.$$



$$\ln f + \ln P = \text{cte} = \ln A_0 \Rightarrow A_0 = \text{cte}.$$

$$f(P)P = A_0 \Rightarrow f(P) = \frac{A_0}{P}$$

$$V = \frac{A_0}{P} (RT + bP)$$

$$PV = A_0 (RT + bP)$$

Gas parfait: pas d'interaction entre les particules.  
Pression faible.

Si  $P \rightarrow 0$

Si  $P$  tend vers 0.

$$PV = nRT \quad \text{donc } n = 1 \text{ nombre de mole}$$

Pour  $m = 1$  mole  $\Rightarrow n = 1$

$$P(v-b) = RT$$



Équation des Van der Waals  $m = 1$ .

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V-b) = RT. \quad b = \text{constante}$$

Série 3:

Exercice 8:

système isolé:  $Q_T = 0$ .

Etat initial  $T_1 = 25^\circ\text{C}$   $T_2 = 90^\circ\text{C}$ .

Etat final: Équilibre  $Q_T = 0$ .

$$Q_T = Q_2 + Q_1 = 0$$

$$m_2 \mathcal{H} (T_e - T_2) + m_1 \mathcal{H} (T_e - T_1) = 0$$

$$(m_1 + m_2) T_e = m_1 T_1 + m_2 T_2$$

$$T_e = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

AN:

$$T_e = \frac{(100g)(25^\circ C) + (150)(90^\circ C)}{150 + 100}$$

$$T_e = 64^\circ C.$$

$$T_e = \frac{(100)(25 + 273,15) + (150)(90 + 273,15)}{100 + 150}$$

$$T_e = 337,15 K = 64^\circ C.$$

Rq : Attention : en générale, il faut utiliser (K) pour la température.

Exercice 9:



①  $C = 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$   
 $= 4,18 J \text{ g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

②  $T_e = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = \frac{(10g)(67^\circ C) + (90g)(27^\circ C)}{10 + 90}$

$$T_e = 31^\circ C.$$

③ Etat initial :  $m_1 = 10g$   $T_1 = 67^\circ C$   
 $m_2 = 90g$   $T_2 = 27^\circ C$ .

Etat final :  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = ?$   $T_e = 60^\circ C$ .

$$m_2(T_e - T_2) + m_1(T_e - T_1) = 0$$

$$m_2 = m_1 \left( \frac{T_1 - T_e}{T_e - T_2} \right) = 10 \times \left( \frac{67 - 60}{60 - 27} \right)$$

$$m_2 = 2,12 \text{ g.} \quad \Delta T(\text{K}) = \Delta T(\text{C}^\circ).$$

Exercice 10:

$$(T, V) : \delta Q = C_V dT + l dV.$$

$$(T, P) : \delta Q = C_P dT + R dP.$$

$$(P, V) : \delta Q = \lambda dP + \mu dV.$$



$$\textcircled{1}: C_V dT + l dV = C_P dT + R dP.$$

$$\text{Si } P = \text{cte} \quad dP = 0.$$

$$C_V dT + l dV = C_P dT.$$

$$l dV = (C_P - C_V) dT.$$

$$l = (C_P - C_V) \frac{dT}{dV}_P.$$

$$P = \text{cte} \Rightarrow dP = 0.$$

$$\delta F = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV.$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \Rightarrow \ell = (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$$

④ Si  $V = \text{cte}$   $dV = 0$ .

$$\Rightarrow C_P dT + n dP = C_V dT$$

$$\Rightarrow n dP = (C_V - C_P) dT$$

$$\Rightarrow n = (C_V - C_P) \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -(C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

Si  $V = \text{cte}$   $dV = 0$ .

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

$$\Rightarrow n = -(C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

⑤ Si  $V = \text{cte}$ .  $dV = 0$ .

$$\lambda dP = C_V dT \Rightarrow \lambda = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

$$\lambda = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$



$$P = \text{cte} \quad dP = 0$$

$$\mu dP = CP dT \Rightarrow \mu = CP \left( \frac{dT}{dP} \right)_V$$

$$\mu = CP \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

② Mayer généralisée.



$$CP - CV = T \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right].$$

③: Gaz parfait:  $PV = mRT$ .

$$R = \frac{PV}{mT}$$

Conditions normales:

$$m = 1 \text{ mole.}$$

$$V = 22,414 \text{ l} = 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$P = 1 \text{ atm} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

$$T = 0^\circ C = 273,15 \text{ K.}$$

$$R = \frac{(22,414 \cdot 10^{-3})(10^5)}{1 \times 273,15} = 8,314 \text{ Pa m}^3 \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

④:

$$CP - CV = P \times \left( \frac{P}{T} \times \frac{V}{T} \right) = \frac{PV}{T} = mR.$$

$$* \quad l = (C_p - C_v) \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = (mR) \left( \frac{T}{V} \right) = \frac{mRT}{V} = P.$$

$$* \quad P = - (C_p - C_v) \times \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = - mR \times \frac{T}{P} = - \frac{mRT}{P} = - V.$$

$$* \quad \lambda = C_v \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \Rightarrow \nu = C_p \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_P$$

$$\left. \begin{aligned} & C_p - C_v = mR \\ & \gamma = \frac{C_p}{C_v} \end{aligned} \right\}$$



$$C_V = \left( \frac{C_p}{C_v} - 1 \right) = mR \Rightarrow C_V = (\gamma - 1) = mR.$$

$$* \quad C_V = \frac{mR}{\gamma - 1}$$

$$* \quad C_p = \gamma C_V = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \times mR.$$

$$* \quad \lambda = C_V \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \frac{mR}{\gamma - 1} \left( \frac{T}{P} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} \times \left( \frac{mRT}{P} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{V}{\gamma - 1}$$

$$* \quad \nu = C_p \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \times mR \right) \times \left( \frac{T}{V} \right).$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \times \frac{mRT}{V} = P \times \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

$$\delta Q_2 = C_V dT + P dV.$$

$$= C_p dT - V dP.$$

$$= \left( \frac{V}{\gamma-1} \right) dP + \left( \frac{P\gamma}{\gamma-1} \right) dV.$$



A.N.:

$$\gamma = 1,4$$

$$n = 1 \text{ mole}, R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

$$C_V = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{(1 \text{ mole}) \times (8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1})}{1,4-1}$$

$$C_V = 20,78 \text{ J K}^{-1}.$$

$$C_P = \gamma C_V = (1,4) (20,78).$$

$$C_P = 29,1 \text{ J K}^{-1}.$$

Montrer que:  $C_P - C_V = T \left( \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right).$

$$\ell = (C_P - C_V) \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

$$C_P - C_V = \ell \times \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\ell = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, ?$$

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - PdV$$

$$dU = C_V dT + (l - P) dV$$

diff Totale exakte.

$$\frac{\delta (C_V)}{\delta V}_T = \frac{\delta (l - P)}{\delta T}_V$$



$$\textcircled{1} \quad \frac{\delta (C_V)}{\delta V}_T = \frac{\delta l}{\delta T}_V - \frac{\delta P}{\delta T}_V$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$$dS = \left(\frac{C_V}{T}\right) dT + \left(\frac{l}{T}\right) dV$$

$$\frac{\delta}{\delta V} \left(\frac{C_V}{T}\right)_T = \frac{\delta}{\delta T} \left(\frac{l}{T}\right)_V$$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\delta (C_V)}{\delta V}\right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\delta l}{\delta T}\right)_V - \frac{l}{T^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\delta (C_V)}{\delta V}_T = \frac{\delta l}{\delta T}_V - \frac{l}{T}$$

$$\text{Done } \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow l = T \frac{\delta P}{\delta T}_V$$

Série n° 4:

Exercice 11:

$$m = 2 \text{ mol e}, R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Transformation reversible : suite d'états d'équilibre.

i) Transformation isotherme:

$$\begin{array}{l} \text{état A} \\ \left\{ \begin{array}{l} P_A = ? \\ V_A = ? \\ T_A = 300 \text{ K} \end{array} \right. \end{array} \xrightarrow[\text{T=cste.}]{\text{isotherme}} \begin{array}{l} P_B = 3 P_A \\ V_B = ? \\ T_B = T_A \end{array}$$

$$\text{On a: } Q_1 = C_V dT + pdV.$$

$$\text{or } T = \text{cte} \Rightarrow dT = 0.$$



$$\text{donc: } \delta Q = P dV.$$

$$\Rightarrow Q_1 = \int_{V_A}^{V_B} P dV \quad \text{or } T = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow PV = mRT \Rightarrow P = \frac{mRT}{V}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \int_{V_A}^{V_B} \frac{mRT}{V} dV = mRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

$$Q_1 = mRT \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right). \quad \text{or } P_B = 3P_A.$$

$$\text{et } P_B V_B = \underbrace{mRT_B}_{T_B > T_A} = P_A V_A$$

$$P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow P_A V_A = 3 P_A V_B.$$

$$V_A = 3 V_B \Rightarrow V_B = \frac{V_A}{3}$$

$$\varphi_1 = mRT \ln\left(\frac{v_B}{v_A}\right) = mRT \ln\left(\frac{\frac{v_A}{3}}{v_A}\right) = -mRT \ln(3).$$

AN:  $\varphi_1 = -5480,31 \text{ J}$ .

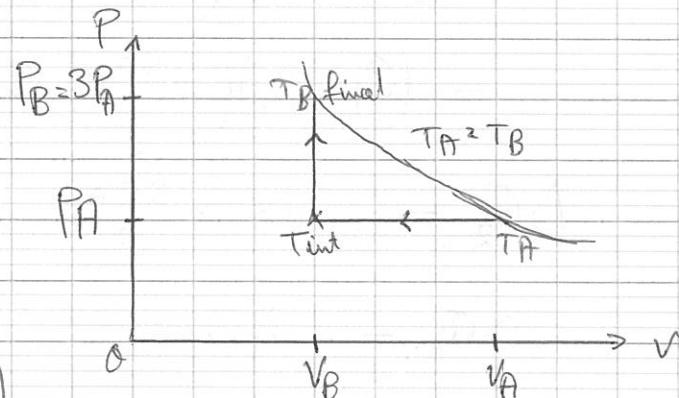
On a un gaz parfait  $dU = c_V dT$  d'après le P.P.T

On a:  $dU = dQ + dW$ .

car  $T = \text{cte}$   
 $dU = 0 \Rightarrow dQ = -dW$ .



$$\Rightarrow \varphi_1 = -w_1.$$



$$\Delta Q_A = C_p (T_{int} - T_A).$$

$$\Delta Q_B = C_V (T_B - T_{int})$$

$$\Delta Q_2 = \Delta Q_A + \Delta Q_B = C_p (T_{int} - T_A) + C_V (T_B - T_{int}).$$

or  $T_B = T_A$ .

$$\Delta Q_2 = C_p (T_{int} - T_A) + C_V (T_A - T_{int}).$$

$$\Delta Q_2 = (C_p - C_V) (T_{int} - T_A)$$

$$\Delta Q_2 = (c_p - c_v)(T_{int} - T_A).$$

Calcul de  $T_{int}$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_A V_A = mRT_A \\ P_{int} V_{int} = mRT_{int} \end{array} \right.$$

$$\text{or } \left\{ \begin{array}{l} P_A = P_{int} \\ V_{int} = V_B = \frac{V_A}{3} \end{array} \right.$$

$$\frac{mRT_A}{V_A} = \frac{mRT_{int}}{V_{int}} = \frac{3T_{int}}{V_A}$$

$$\Rightarrow T_A = 3T_{int} \Rightarrow T_{int} = \frac{T_A}{3}$$



$$\Delta Q_2 = (c_p - c_v) \left( \frac{T_A}{3} - \frac{3T_A}{3} \right).$$

$$= (c_p - c_v) \left( -\frac{2T_A}{3} \right) = -(c_p - c_v) \times \left( \frac{2T_A}{3} \right).$$

$$\text{AN: } \Delta Q_2 = -mR \times \frac{2T_A}{3}$$

$$\Delta Q_2 = -3325,6 \text{ J.}$$

$$\Delta W_2 = - \int P dV = -P(V_{int} - V_A).$$

$$= -mR(T_{int} - T_A) = -mR\left(\frac{T_A}{3} - T_A\right).$$

$$\Delta W_2 = mR\left(\frac{2}{3}T_A\right).$$

$$\text{AN: } \Delta W_2 = 3325,6 \text{ J.}$$

٩

للمزيد من الدروس والتمارين زوروا موقعنا الإلكتروني

[www.clubnajah.com](http://www.clubnajah.com)

لا تترددوا في طرح استفساراتكم عبر البريد الإلكتروني أو صفحتنا الرسمية عبر الفايسبوك

[Clubnajah2013@gmail.com](mailto:Clubnajah2013@gmail.com)

[www.facebook.com/succes.club](https://www.facebook.com/succes.club)

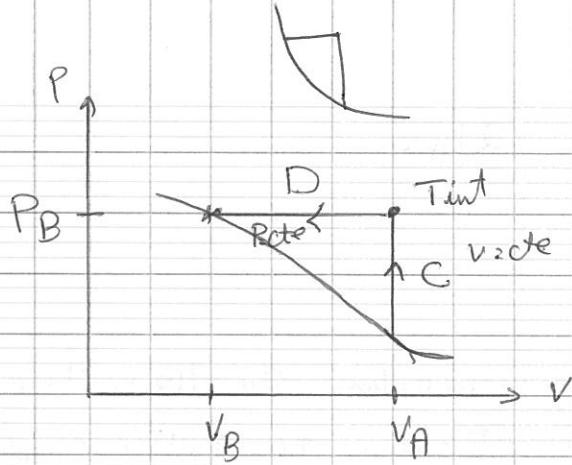
ووفق للجم

بات

مع تحيات المكتب المسير لنادي النجاح



ع



$$\Delta Q_C = C_V (T_{int} - T_A)$$

$$\Delta Q_D = \varphi (T_B - T_{int})$$

$$= c_p (T_A - T_{int}).$$

$$\Delta Q_3 = \Delta Q_C + \Delta Q_D$$

$$\Delta Q_3 = C_V (T_{int} - T_A) + C_p (T_A - T_{int}).$$

$$\Delta Q_3 = (C_V - C_p) (T_{int} - T_A).$$

$$= -mR (T_{int} - T_A).$$



Calcul de  $T_{int}$ :

$$\begin{cases} P_A V_A = mRT_A \\ P_{int} V_{int} = mRT_{int} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} V_{int} = V_A \\ P_{int} = P_B = 3P_A \end{cases}$$

$$\text{Or} : \begin{cases} P_A V_A = mRT_A \\ P_{int} V_{int} = mRT_{int} = 3P_A V_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{int} = 3T_A$$

$$\text{Donc } \Delta Q_3 = -mR (3T_A - T_A) = -2mRT_A.$$

$$\text{AN: } \Delta Q_3 = -9976 \text{ J.}$$

$$\Delta W_3 = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = -P_B (V_B - V_A) = -3P_A \left( \frac{V_A}{3} - V_A \right).$$

$$\Delta W_3 = -3 P_A \left( -\frac{2V_A}{3} \right) = 2P_A V_A.$$

AN:  $\Delta W_3 = 9976 J$ .

Rq: on remarque que la variation du travail et la chaleur dépend du chemin suivi donc il n'y a pas de facteurs d'état.

### Exercice 12:

① une transformation est dite adiabatique si il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur.

② Pour un GP:  $\left\{ \begin{array}{l} \delta Q = C_V dT + P dV \\ \delta Q = C_P dT + (-V dP) \\ \delta Q = \frac{V}{\gamma-1} dP + \frac{\gamma P}{\gamma-1} dV \end{array} \right.$



On a:  $C_V dT + P dV = 0 = \delta Q$ : transformation adiabatique  
 $\delta Q = 0$

$$\Rightarrow C_V dT + \frac{mRT}{V} dV = 0$$

$$\Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + mR \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + (C_P - C_V) \frac{dV}{V} = 0 \quad \times \frac{1}{C_V}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + \left( \frac{C_P}{C_V} - 1 \right) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\int \frac{dT}{T} + \int (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$



$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{cte.}$$

$$\ln (TV^{\gamma-1}) = \text{cte.}$$

①  $TV^{\gamma-1} = \text{cte.}$

on a  $mRT = PV$ .

$$T = \frac{PV}{mR}$$

$$\Rightarrow \frac{PV}{mR} V^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow PV^{\gamma} = \text{cte.}$$

$\Rightarrow PV^{\gamma} = \text{cte.}$  ②

$$\text{on a: } V = \frac{mRT}{P}$$

③  $T \times \left( \frac{mRT}{P} \right)^{\gamma-1} = \text{cte.}$

$$T^1 \times \frac{T^1}{P^{\gamma-1}} = \text{cte.}, \quad T^1 \times T^{\gamma-1} \times P^{1-\gamma} = \text{cte.}$$

$$T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{cte.} \Rightarrow \left\{ T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cte.} \right.$$

Exercice 13:

①.

on a:

$$P_1 = 10^5 \text{ Pa.}$$

$$V_1 = 3\ell = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{mR}$$

$$P_{11} =$$

isochore

$V_{11} = V_1$

isobaric

$T_{11}$

$$P_2 = 3 P_0$$

$$V_2 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_2 =$$

$$W_1 = 0 \quad \text{car } (V_2 \text{ cte}).$$

$$W_2 = - \int p dV = -P_2 (V_2 - V_{\text{int}}) = -P_2 (V_2 - V_1)$$

$$\text{AN: } W_2 = -3 \cdot 10^5 (10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3})$$

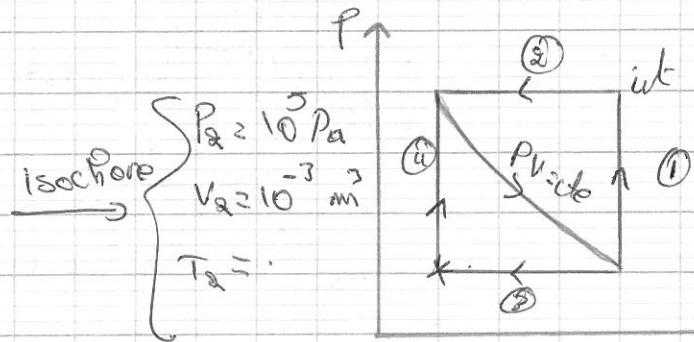


$$W_2 = 600 \text{ J.} \Rightarrow W_T = W_1 + W_2 = 600 \text{ J.}$$

2<sup>ème</sup> transformation:

$$\begin{cases} P_1 = 10^5 \text{ Pa} \\ V_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases} \xrightarrow{\text{isobare}} \begin{cases} P_{\text{int}} = P_1 \\ V_{\text{int}} = V_2 \\ T_{\text{int}} = \dots \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{isochore}} \begin{cases} P_2 = 10^5 \text{ Pa} \\ V_2 = 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_2 = \dots \end{cases}$$



$$W_3 = -P_1 (V_{\text{int}} - V_1) = -P_1 (V_2 - V_1).$$

$$W_3 = -10^5 (10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}) = 200 \text{ J.}$$

$$W_4 = 0.$$

Rq:  $W_{T_2} \neq W_T$ , c'est pas une fonction d'état

Rq l'air limité par les courbes présente le travail.

3<sup>ème</sup> transformation:

$$\begin{cases} P_1 \\ V_1 \\ T_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{isotherme}} \begin{cases} P_2 \\ V_2 \\ T_2 = T_1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{isochore}}$$

$$W = - \int p dV = - nRT \int \frac{dV}{V}$$

$$W = - nRT \left[ \ln \frac{V_2}{V_1} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$W = - 8,314 \times 36,6 \times \ln \left( \frac{1 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$= 334,29 \text{ J}$$



Exercice 15:

Etude d'un cycle de carnot:

entropie:  $dS = \frac{d\Phi}{T}$

$$dS = \int \frac{d\Phi}{T}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = 3,32 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_1 = 400 \text{ K} \end{array} \right\}$$

isotherme

$$\left. \begin{array}{l} P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{P_1}{2} = 16,6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_2 = 2V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ T_2 = T_1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} \\ \frac{\text{adiabatique}}{PV^\gamma} \\ V_3 \end{array} \right\} T_3 = 300 \text{ K}$$

$$W_1 = \int_1^2 -pdV = - \int_1^2 nRT \frac{dV}{V} = - nRT \ln(2)$$

$$\text{or } T = \text{cte} \Rightarrow P_2 V_2 = P_1 V_1 \Rightarrow P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)$$

$$dS = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{d\Phi}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_0^2 \frac{nRT}{T} \frac{dV}{V}$$

$$DS = \int_1^2 mR \frac{dV}{V} = mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = mR \ln(2).$$

$$\begin{cases} P_3 = P_2 \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ T_3 = 300K \end{cases}$$

$$P_4 = P_1 \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$V_4 = V_1 \times \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\begin{cases} P_1 \\ V_1 \\ T_1 \end{cases}$$

$$P_2 V_2^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma}$$

$$\frac{mRT_2}{V_2} V_2^{\gamma} = \frac{mRT_3}{V_3} V_3^{\gamma}$$

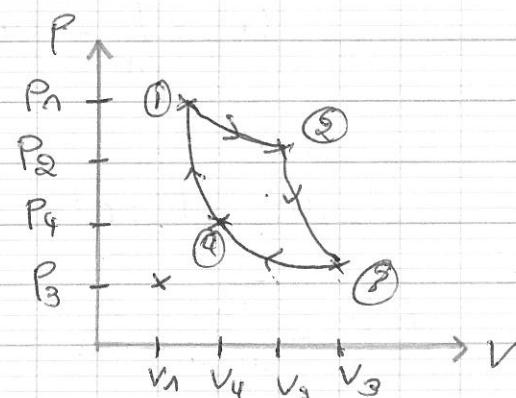
$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 P_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$



$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{P_3 V_3 - P_2 V_2}{\gamma-1} = \int_2^3 C_V dT = C_V (T_3 - T_2) \\ &= \frac{R}{\gamma-1} (T_3 - T_2). \end{aligned}$$

$$U_3 = -mRT \int_3^4 \frac{dV}{V} = -mRT \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

$$W_4 = \frac{P_1 V_1 - P_4 V_4}{\gamma-1}$$



	V (m³)	P (Pa)	T (K)	relation
Etat(1)	$10^{-3}$	3328000	400	$PV = \text{cte}$
Etat(2)	$2 \cdot 10^{-3}$	1664000	400	$TV^{8-1} = \text{cte}$
Etat(3)	0,00307854	810774,606	300	
Etat(4)	0,001539	1621549	300	

	$\Delta W(f)$	$\Phi(f)$	D.H	$DS(f K^{-1})$
isotherme	-2307 $-nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	2307	0	$\frac{\Phi}{T} = 5,766$
adiabatique	$\frac{P_3 V_3 - V_2 P_2}{8-1}$ $= -1247,38$	0	$CV(T_3 - T_2)$ $= 1247,38$	0
isotherme	$-nRT \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$ 1330	-W	$CV(T_f - T_i)$ $= 0$	$\frac{\Phi}{T} = -5,766$
adiabatique	$\frac{P_1 V_1 - P_4 V_4}{8-1}$ $= 1247$	0	$CV(T_1 - T_4)$ $= 1247$	0

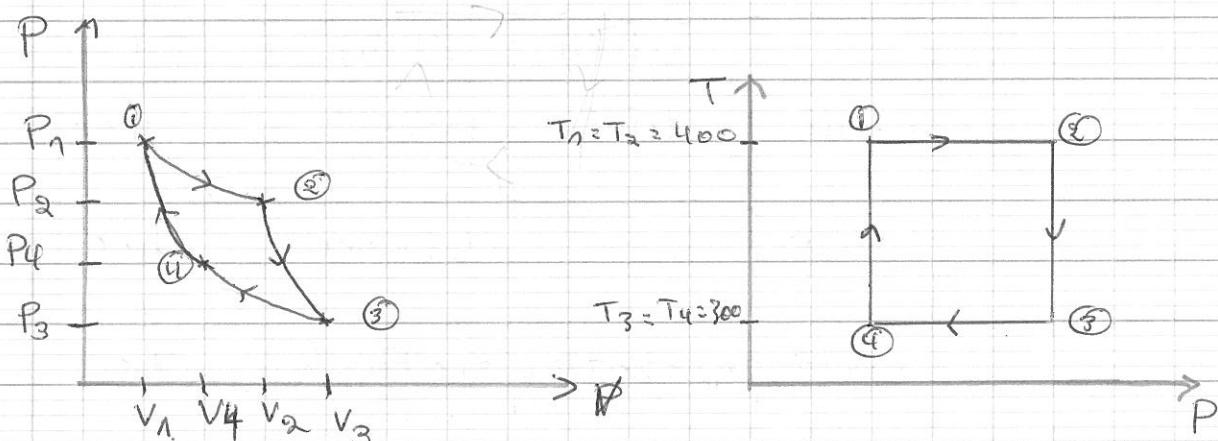
$$W_C = -576,698, Q_C = 576,698, DH = 0$$

$$DS = 0$$

$$\Rightarrow (W_{ad1} < 0, \Delta Q_1 > 0, \Delta Q_2 < 0)$$

c'est le cycle moteur.





### Exercice 14 :

système fermé : il n'échange pas de matière avec l'intérieur mais il échange de l'énergie.

La variation de l'énergie interne au cours d'une transformation est égale à la somme de la quantité de chaleur et du travail échangés

$$\Delta U = W_{12} + Q_{12}$$

l'équation d'état :

$$PV = mRT$$



en expression de  $\Delta U$  et  $\Delta H$ .

$$\Delta U = W_{12} + Q_{12}$$

$$\Delta H = \Delta U + (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

expression différentiel.

Pour un gaz parfait :

$$dU = C_V dT$$

$$dH = C_P dT$$



\* isentropique = adiabatique.

dans une transformation isentropique c'est adiabatique

le système n'échange pas de chaleur avec l'exterieur

\*

$$dQ = C_V dT + PdV$$

on a transformation adiabatique.

$$C_V dT + PdV = 0$$

$$C_V dT + mRT \frac{dV}{V} = 0$$

$$C_V \cancel{dT} + mRT \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + mRT \frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{C_V}{C_V} \frac{dT}{T} + \left( \frac{C_P}{C_V} - 1 \right) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \ln T + (\gamma - 1) \ln V = \ln \text{cte.}$$

$$\ln T + \ln V^{\gamma-1} = \ln \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \ln (T V^{\gamma-1}) = \ln \text{cte.}$$

$$T V^{\gamma-1} = \text{cte}$$



Exercice 16:

dans les conditions normales:

$$P = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

$$T = 273 \text{ K}$$

$$V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$m = 1$$

$$\text{On a: } PV = nRT.$$

$$R = \frac{PV}{nT}$$

$$R = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 22,4 \cdot 10^{-3}}{273 \times 1}$$

$$R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

Dans une transformation isochore:

$$dS = \frac{C_V dT}{T} \Rightarrow S_{12} = \int_1^2 C_V \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow S_{12} = C_V \ln T \Rightarrow T = e^{\frac{S}{C_V}}$$

dans le cas d'une trajet isobare

$$S_{12} = \int_1^2 C_P \frac{dT}{T} = C_P \ln T.$$

$$\Rightarrow T = e^{\frac{S}{C_P}}$$

$$e^{\frac{S}{C_V}}, e^{\frac{S}{C_P}}$$

$$C_V < C_P$$

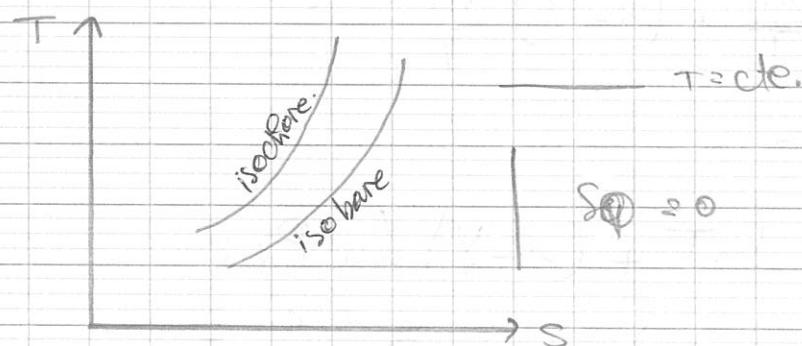


$$\frac{1}{C_V} > \frac{1}{C_P} \Rightarrow \text{Si } S > 0 \quad \frac{S}{C_P} < \frac{S}{C_V}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{S}{C_P}} < e^{\frac{S}{C_V}}$$

donc la pente de l'isochore est supérieure à la pente  
l'isobare.

représentation : c'est de la forme  $y = e^{ax}$ .



## Exercice 17:

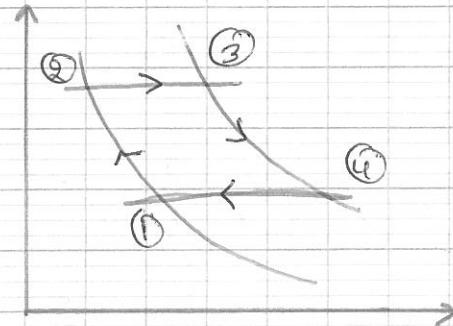
- 1 - 2 Adiabatique.
- 2 - 3 isobare.
- 3 - 4 Adiabatique.
- 4 - 1 isobare.



①  $P_2 = P_3$ . car 2 - 3 isobare.

② diagramme de Clapeyron.

③ adiabatique:  
 $\oint \delta Q = 0$



$$C_p dT - V dP = 0$$

$$C_p = \frac{mR\gamma}{\gamma-1}, \quad V = \frac{mRT}{P}$$

$$\frac{mR\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - \frac{mRT}{P} \frac{dP}{P} = 0$$

$$\gamma \frac{dT}{T} - (\gamma-1) \frac{dP}{P} = 0$$

$$\gamma \frac{dT}{T} + (1-\gamma) \frac{dP}{P} = 0$$

Intégration:

$$\gamma \ln T + (1-\gamma) \ln P \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln T^\gamma + \ln P^{1-\gamma} \geq 0$$

$$\ln(T^\gamma P^{1-\gamma}) = \text{cte.}$$

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$$

④ 1 - 2 adiabatique:

$$T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}$$

$$T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$



⑤ 3 - 4 adiabatique:

$$T_3^\gamma P_3^{1-\gamma} = T_4^\gamma P_4^{1-\gamma}$$

$$T_4 = T_3 \left( \frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow P_3 = P_2 \text{ et } P_4 = P_1$$

$$T_4 = T_3 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

6: 3 - 2 : Isobare.

$$P = \text{cte} \quad dP = 0.$$

$$\delta Q_{23} = C_p dT$$

$$\Rightarrow Q_{2-3} = \int_2^3 Cp dT.$$

$$Q_c = Cp(T_3 - T_2).$$

4 - 1 isobare:

$$\delta Q_{4-1} = Cp dT \Rightarrow Q_{4-1} = \int Cp dT.$$

$$Q_f = Q_{a-n} = Cp(T_1 - T_4).$$

(+) 1<sup>er</sup> principe:

$$\Delta U = U_f - U_i = Q_{i \rightarrow f} + w_{i \rightarrow f}.$$

cycle:  $\Delta U = 0$ .

$$w_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = 0.$$



$$w_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}}$$

$$w_{\text{cycle}} = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1}$$

$$Q_{1-2} = 0$$

par adiabatiques.

$$Q_{3-4} = 0$$

$$Q_{\text{cycle}} = Q_{2-3} + Q_{4-1}.$$

$$= Cp(T_3 + T_1 - T_2 - T_4)$$

$$W_{\text{cycle}} = C_p (T_2 + T_4 - T_1 - T_3).$$

8 -

	$T \text{ (K)}$	$P \text{ (Pa)}$	$V \text{ (m}^3\text{)}$
Etat(1)	300	$10^5$	$24,93 \cdot 10^{-3}$
Etat(2)	445,8	$4 \cdot 10^5$	$9,27 \cdot 10^{-3}$
Etat(3)	900	$4 \cdot 10^5$	$18,72 \cdot 10^{-3}$
Etat(4)	605,66	$10^5$	$50,39 \cdot 10^{-3}$



$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$$

$$V_1 = 24,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\gamma = \frac{P_2}{P_1} = 4$$

$$\Rightarrow P_2 = 4 P_1$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\therefore T_2 = T_1 \gamma^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_2 = 300 \text{ (K)}^{\frac{1,4-1}{1,4}}$$

$$T_2 = 445,8 \text{ K}$$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2}$$

$$V_2 = 9,27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$V_3 = \frac{nRT_3}{P_3}$$

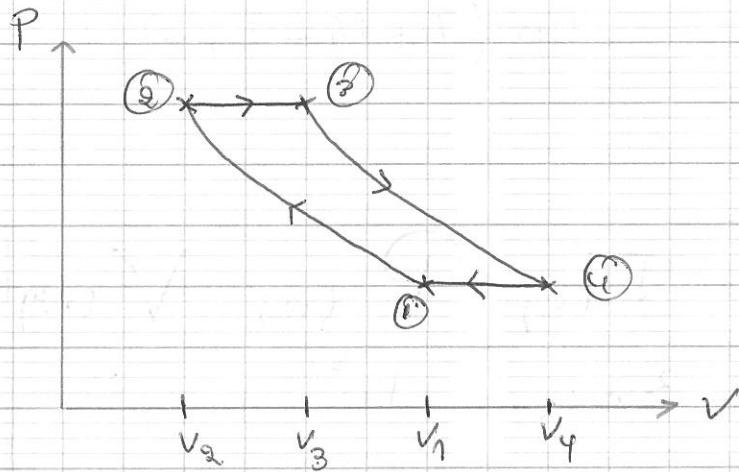
$$V_3 = 18,72 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_4 = T_3 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_4 = T_3 \gamma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_1 T_2 = T_1 T_3$$

$$T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2} = 605,66$$



\* 1-2 Adiabatique.

$$Q_{1-2} = 0$$

$$W_{1-2} = \Delta U = c_V (T_2 - T_1).$$



$$W_{1-2} = \frac{mR}{8-1} (T_2 - T_1).$$

\* 2-3 Isochore  $P = P_2 = P_3$ .

$$Q_{2-3} = C_P (T_3 - T_2) = \frac{mR\gamma}{8-1} (T_3 - T_2)$$

$$W_{2-3} = - \int_2^3 P dV = -P_2 \int_{V_2}^{V_3} dV.$$

$$= -P_2 (V_3 - V_2)$$

$$W_{2-3} = -mR (T_3 - T_2).$$

### 3-4 Adiabatique:

$$P_{3-4} = 0$$

$$W_{3-4} = \frac{mR}{\gamma-1} (T_4 - T_3).$$

4-1 Isochorie  $P_1 = P_2 = P_4$ .

$$\Phi_{4-1} = Cp(T_1 - T_4).$$



$$W_{4-1} = -P(V_1 - V_4).$$

$$= -mR (T_1 - T_4).$$

	$W(\text{J})$	$\Phi(\text{J})$
1-2 Adiab	3032,69	0
2-3 isobare	-3778,94.	13226,30
3-4 Adiab	-6122,87.	0
4-1 Isobare.	2543,09	-8900,82
cycle	$\Sigma W = -4325,48$	$\Sigma \Phi = 4325,48$

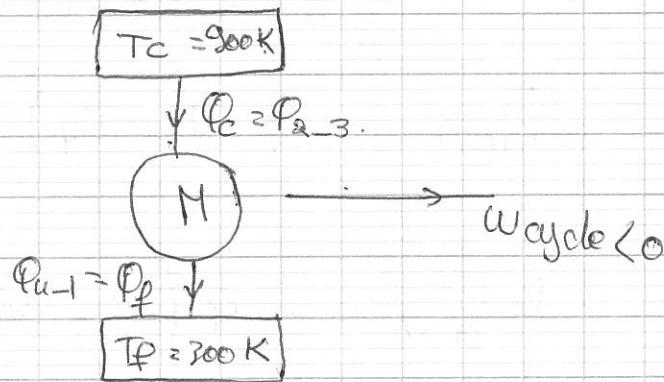
$$R = 8,32 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

$$|W_{\text{cycle}}| = |\Phi_{\text{cycle}}|$$

le principe d'équivalence est vérifier c'est un moteur

$$\omega_{\text{cycle}} = -4325,48 \text{ rad/s} < 0.$$

$$\dot{Q}_c = \dot{Q}_{2-3} > 0. \quad \dot{Q}_f = \dot{Q}_{4-1} < 0$$



$$\Rightarrow \eta = -\frac{\omega_{\text{cycle}}}{\dot{Q}_{\text{cycle}}} = -\frac{\omega_{\text{cycle}}}{\dot{Q}_c}$$

$$\eta = -\frac{C_p (T_2 + T_4 - T_1 - T_3)}{(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} = \alpha.$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4 \left(1 - \frac{T_1}{T_4}\right)}{T_3 \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right)} = 1 - \frac{T_4 (1 - \alpha)}{T_3 (1 - \alpha)}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3}$$

$$T_4 = T_3 \cdot 6^{\frac{1-8}{8}}$$

$$\eta = 1 - 6^{\frac{1-8}{8}}$$

$$\text{AN: } \eta = -\frac{\omega_{cycle}}{\varphi_c} = -\frac{(-4325, 48)}{13226, 30} =$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{605,66}{900} =$$

$$\eta = 1 - 6^{\frac{1-8}{8}} = 1 - 4^{\frac{1-1,4}{1,4}} =$$

$$\eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{300}{900}$$

$$\eta_{\text{carnot}} = 66,67 \%$$



للمزيد من الدروس والتمارين زورا موقعنا الإلكتروني

[www.clubnajah.com](http://www.clubnajah.com)

لا تترددوا في طرح استفساراتكم عبر البريد الإلكتروني أو صفحتنا الرسمية عبر الفايسبوك

[Clubnajah2013@gmail.com](mailto:Clubnajah2013@gmail.com)

[www.facebook.com/succes.club](http://www.facebook.com/succes.club)

وفيق للجم

بات

مع تحيات المكتب المسير لنادي النجاح



مع