

## SMIA (S1), Algèbre 1

### Série N<sup>o</sup> : 1

**Ex. 1** — Soient  $R, S, T$  et  $U$  sont des relations. Montrer que si les relations  $R \Rightarrow S$ ,  $T \Rightarrow U$  sont vraies, la relation

$$(R \text{ ou } T) \Rightarrow (S \text{ ou } U)$$

est vraie.

**Ex. 2** — Soient  $R$  et  $S$  des relations. Démontrer que :

Si  $R$  est fausse,  $(R \text{ ou } S) \iff S$  est vraie.

Si  $R$  est vraie,  $(R \text{ et } S) \iff S$  est vraie.

**Ex. 3** — Soient  $R$  et  $S$  deux relations. Montrer que, si  $R$  est fausse, la relation  $R \implies S$  est vraie. Peut-on déduire de là que  $S$  est vraie ?

**Ex. 4** — Soient  $R$  et  $S$  des relations. Montrer que la relation

$$[R \text{ et } (\text{non } R)] \implies S$$

est vraie.

**Ex. 5** — Écrire la contraposée et la négation des implications suivantes :

- (i) Si  $x \geq 0$  alors  $f(x) < 0$  ;
- (ii) Si  $ab = 0$  alors  $a = 0$  ou  $b = 0$  ;
- (iii) Si  $p$  divise  $ab$  alors  $p$  divise l'un d'entre eux ;
- (iv) Si  $A$  est non vide alors  $A$  possède un plus petit élément.

## Devoir à la maison

**Ex. 6** — Soient  $R, S$  deux des relations équivalentes, et soit  $T$  une relation. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\text{non } R) &\iff (\text{non } S) \\
(R \implies T) &\iff (S \implies T) \\
(T \implies R) &\iff (T \implies S) \\
(R \text{ et } T) &\iff (S \text{ et } T) \\
(R \text{ ou } T) &\iff (S \text{ ou } T)
\end{aligned}$$

**Ex. 7** — Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  des relations. Démontrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(R \text{ ou } R) &\iff R \\
(R \text{ ou } S) &\iff (S \text{ ou } R) \\
((R \text{ ou } S) \text{ ou } T) &\iff (R \text{ ou } (S \text{ ou } T)) \\
(\text{non non } R) &\iff R \\
(R \implies S) &\iff ((\text{non } S) \implies (\text{non } R)) \\
(R \text{ et } R) &\iff R \\
(R \text{ et } S) &\iff (S \text{ et } R) \\
((R \text{ et } S) \text{ et } T) &\iff (R \text{ et } (S \text{ et } T)) \\
(R \text{ ou } S) &\iff \text{non } [(\text{non } R) \text{ et } (\text{non } S)] \\
(R \text{ ou } S) &\iff ((\text{non } R) \implies S) \\
(R \text{ et } (\text{non } S)) &\iff \text{non } (R \implies S) \\
(R \text{ ou } (S \text{ et } T)) &\iff (R \text{ ou } S) \text{ et } (R \text{ ou } T) \\
(R \text{ et } (S \text{ ou } T)) &\iff (R \text{ et } S) \text{ ou } (R \text{ et } T)
\end{aligned}$$