Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2015/2016
SMPC1

Algèbre 1
Série N°1

Exercice 1. Résoudre, par la méthode de Gauss, les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $(S_1)\begin{cases} x+2y-3z &= -7 \\ -x+3y+5z &= 6 \\ 2x+7y-2z &= -9 \end{cases}$

2. $(S_2)\begin{cases} x-2y+3y-t+u &= 1 \\ x-2y+2z+t-u &= 3 \end{cases}$

3. $(S_3)\begin{cases} 4y+z &= 10 \\ 2x-2y+z &= 0 \\ x+z &= 5 \\ x-y-z &= 10 \end{cases}$

Exercice 2. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les seconds membres pourque les systèmes suivants aient au moins une solution (utiliser la méthode de Gauss).

1. $(S_1)\begin{cases} x+3y+2z &= a \\ -x+4y+z &= b \\ x+10y+5z &= c \end{cases}$

2. $(S_2)\begin{cases} x-3y &= a \\ 3x+y &= b \\ x+7y &= c \\ 2x+4y &= d \end{cases}$

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre, par la méthode de Gauss, les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $(S_1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+5x_2+5x_3 &= 5 \\ 2x_1+5x_2+5x_3 &= 5 \\ -x_2-x_3 &= m \end{cases}$

   (Extrait de l'examen d'algèbre 1, 2014-2015).

2. $(S_2)\begin{cases} x+y+z &= m+1 \\ mx+y+(m-1)z &= m \\ x+my+z &= 1 \end{cases}$

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2015/2016
SMPC1

Algèbre 1
Série N°2

Exercice 1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \left(\frac{1}{2} - 3i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{3}\right)$,
2. $z_2 = (1+2i)^2$,
3. $z_3 = \frac{1-2i}{1+2i}$,
4. $z_4 = (2+i)^3$.

$\Rightarrow a + bi$

Exercice 2. Déterminer le module et un argument de :

$$z = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}.$$

Exercice 3. (Extrait de l'examen d'algèbre 1, 2014/2015).
On donne les nombres complexes :

$$z_1 = \left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme algèbrique $a + ib$.
2. Déterminer le module puis un argument de z_1, z_2 et $z_1 z_2$.
3. Déterminer le module puis un argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et $Z' = z_2^{10}$. Ecrire Z et Z' sous forme algèbrique.

Exercice 4. Déterminer les racines carrées des nombres complexes :

1. $z_1 = -3 + 4i$.
2. $z_2 = -5 - 12i$
3. $z_3 = -24 - 10i$
4. $z_4 = -5i.$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \text{réel} \\ 2ab = \text{img.} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2) + |z|}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{-(a^2 - b^2) + |z|}{2}}$$

Exercice 5. Résoudre les équations dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 + iz + 5 - 5i = 0$.
2. $z^2 + z - iz - 5i = 0$.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser : 1) $\cos^4 x$; 2) $\sin^5 x$. $= \frac{1}{(2i)^5}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, transformer :

1. $\sin(3x)$ en polynomes en $\sin x$. α
2. $\cos(4x)$ en polynomes en $\cos x$.

Exercice 7. (Extrait de l'examen de rattrapage d'algèbre 1, 2014/2015).

On donne le nombre complexe $A = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

1. Chercher les racines carrées z de A sous forme algèbrique $a + ib$.
2. Ecrire A sous forme polaire $\rho e^{i\alpha}$ ou $\rho > 0$.
3. En posant $\boxed{z = re^{i\theta}}$, calculer d'une autre façon les racines carrées de A.
4. Déduire de 1. et de 3. les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ (Indication : utiliser $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$).

2) $\Rightarrow$ $e^{i\frac{\pi}{4}}$

3) :

$e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \boxed{r = 1}$ on pose $z^2 = r^2 e^{2\theta i}$

$2\theta \cancel{i} = \cancel{i}\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{8}}$

donc le racine : $e^{\frac{\pi}{8}i}$, $e^{-\frac{\pi}{8}i}$

4). on le resilta de raci : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) =$

$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} > 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ r

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2015/2016
SMPC1

Algèbre 1
Série N°3

Exercice 1. Effec tuer la division enclidienne de A par B dans les cas suivants :

$$\begin{array}{ll} A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 3 & , \quad B = X^2 - 2X + 2 \\ A = X^4 & , \quad B = X^2 + 1 \\ A = X^3 + iX - 3 & , \quad B = X - 2i \end{array}$$

Exercice 2. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre 3 :

$$A = 4X^4 - X^3 + 2X + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 + X + 1$$

Exercice 3. Soient $A = X^{16} - X^4 + X - 1$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.
Trouver le reste de la division euclidienne de A par B.
(**Indication** : Factoriser B puis considérer $X^{16} - X^4$).

Exercice 4. (Extrait de l'examen d'Algèbre 1, 2014-2015).
On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.

1. Montrer que de 2 est une racine de P.
2. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2.
3. Factoriser alors P dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5. (Extrait de l'examen d'Algèbre 1, 2014-2015).

1. Pour quelles valeurs de $n \in N, n \neq 0$, le polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $P(X) = X^n + X + 1$?
(**Indication** : Considérer la racicne $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ de Q et exprimer j^n en fonction du reste r de la division euclidienne de n par 3).
2. Dans le cas où Q divise P, déterminer l'ordre de multiplicité de la racine j de P.

Exercice 6. (Extrait de l'examen de rattrapage d'Algèbre 1, 2014-2015).
On considère le polynôme :

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + \alpha X^2 - 7X + 2, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer α pour que -2 soit une racine de P.
2. On suppose dans la suite de cet exercice que $\alpha = 8$, déterminer l'ordre de multiplicité de la racine -2.
3. Effectuer la division euclidienne de P par $X+2$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ (Indication : développer $(a-b)^4$).

Exercice 7. Décomposer les fractions

$$F(X) = \frac{X^2}{(X-1)^3(X+1)^2} \qquad \text{et} \qquad G(X) = \frac{1}{X(X-1)^2}$$

Exercice 8. 1. Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{X(X+1)}$.

2. En déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{1}{X^3(X^3+1)}$.

Exercice 9. Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X-1)^4}$$

Exercice 10. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

1. $\dfrac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3}$
2. $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$
3. $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos\theta+1}, \theta \in \mathbb{R}$
4. $\dfrac{1}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2}$

Série N°1

$$S\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-3y=3 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad L_1+L_2=L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-3y=3 \\ 0-y=3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

$S=\{2,-3\}$

Exercice 1 : Résoudre par la méthode de Gauss.

$$(S_1)\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -x+3y+5z=6 \\ 2x+7y-2z=-9 \end{cases}$$

Le tableau de Gauss.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & -2 & -9 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} L_2+L_1 \to L_2 \\ L_3-2L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{array}$$

➔ 5L'$_3$-3L'$_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}$$

$$\Rightarrow (S_n):\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 5y+2z=-1 \\ 14z=28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \{1,-1,2\}$$

L'ensemble de solution est $\Rightarrow \{1,-1,2\}$ le terme de la solution ….. par considérés sont appelés les pivats le Nombre de Pivat (non nuls). S'appelé le sang de (s) on noté rg(s)

2) $S_2\begin{cases} x-2y+3z-t+u=1 \\ x-2y+2z+t-u=3 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}$$

L_2-L_1

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{array}$$

Rg(S_2)=2 on a alors deux permcipol et troi……… alors u,y fonction et y, x et

$$S_2 \begin{cases} x-2y+3z-t+u=1 \\ \quad -z+2t-2u=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow : x = 2y - 3.2(t-u-1)+t-u+1$$

$$y = 2(t-u-1)/ \qquad t,u,y \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y-5t+4u+7 \\ y = 2(t-u-1) \end{cases}$$

L'ensemble de solution est : $S\{2x-5t+5u+7y \qquad 2t, 2(t-u-1), //)y.//\in y\mathbb{R}\}$

S_2 admet une finité de solution.

3) Résolution du système :

$$S_3 \begin{cases} 4y+z=10 \\ 2x-2+z=0 \\ x-y-1=10 \end{cases} \text{ tableau : } \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 1 & 10 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 10 \end{array}$$

$l_1 \to l_1$

$l_2 - 2l_1 \to l_2$

$l_3 - l_1 \to l_3$

$l_4 \to l_4$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 10 \end{array} \qquad 7l_4+3l_3 \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -50 \end{array}$$

d'où (S_3): $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=10 \\ Y+2z=-5 \\ -7z=0 \\ 0=50 \end{cases}$ donc (S_3) est incompatible il n'a pas de solution $S=\Phi$

EX : 2 Résoudre le système.

$$S_1\begin{cases}x+3y+2z=a\\-x+4y+z=b\\x+10y+5z=c\end{cases}\quad \text{Tableau}\quad \begin{array}{ccc|c}1&3&2&a\\-1&4&1&b\\1&10&5&c\end{array}$$

$L_2+L_1\to L_2^{'}$; $L_3-L_1\to L_3^{'}$

$$\Rightarrow\begin{array}{ccc|c}1&3&2&a\\0&7&3&a+b\\0&7&3&c-a\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc}1&3&2\\0&7&3\\0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}a\\a+b\\c-a\end{array}$$

➔ $a+b=c-a\Leftrightarrow 2a+b-c=0$

d'où (S) $\Rightarrow\begin{cases}x+3y+2y=a\\7y+3z=a+b\end{cases}$

$2a+b-c=0$ Condition compatible de (S_1).

1[ére] cas si : $2a+b-c\neq 0$ (S_1) est incompatible et $S=\Phi$

2[éme] cas si : $2a+b-c=0$ (S_2) est compatible : $S_2\begin{cases}x+3y+2z=0\\7y+3z=a+b\end{cases}$

on prend x,y communes principale
on calcule x,y on fonction.
$S=\{................\}$

2) soit $(S_2)\begin{cases}3x+y=b\\x+7y=c\\2x+4y=d\end{cases}$

Le tableau de Gauss de (S_2)

$$\begin{array}{cc|c|c}1&-3&a&L_1\\3&1&b&L_2\\1&7&c&L_3\\2&4&d&L_4\end{array}\quad ➔ \quad\begin{array}{cc|c|c}1&-3&a&\\0&10&b-3a&L_2-3L_1\\0&10&c-a&L_3-L_1\\0&10&d-2a&L_4-2L_1\end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c|c}1&-3&a&\\0&10&b-3a&\\0&10&c-a&L_3-L_1\\0&10&d-2a&L_4-L_1\end{array}\quad ➔ \quad\begin{array}{cc|c}[1]&-3&a\\0&[10]&b-3a\\0&0&2a-b+c\\0&0&a-b+d\end{array}$$

D'où $(S_2)\begin{cases}x-3y=a\\10y=b-3a\end{cases}$ ➔ $\begin{cases}0=2a-b+c\\0=a-b+d\end{cases}$

$1^{\text{ére}}$ cas : Si $2a-b+c\neq 0$ où $a-b+d\neq 0$

(S_2) et incompatible, il n'a pas de solution : $S=\Phi$

$2^{\text{éme}}$ cas : si $2a-b+c=0$ et $a-b+c=0$

(S_2) est compatible est :

$$\begin{cases} 7x-3y=a \\ 10y=b-3a \end{cases} \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{10}(b-3a)$$

L'ensemble de solution $S=\left\{\frac{1}{2}(a+3b),\frac{1}{10}(b-3a)\right\}$

Ex : 3

$$S_1\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+5x_2+5x_3=5 \\ 2x_1+5x_2+5x_3=5 \\ \qquad -x_2-x_3=m \end{cases}$$ Le tableau de Gauss de (S_1) $$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ & -1 & -1 & m \end{array}$$

$L_2-L_1\to L_1$; $L_3-2L_1\to L_2$ Et $L_4\to L_4$

$$\begin{array}{ccc|c} [1] & 1 & 1 & 1 \\ 0 & [4] & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 11 \end{array}$$

$4L_3-3L_2\to L_3$ Et $4L_4+L_2\to L_4$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4m+4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 4x_2+4x_3=4 \\ 0=4m+4 \end{cases}$$

D'où (S_1) compatible : $\quad\Leftrightarrow\quad m+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad m=-1$

$1^{\text{ére}}$ cas : Si $m\neq -1$; (S_1) et incompatible de solution $S=\Phi$

$2^{\text{éme}}$ cas ; Si $m=-1$

$$(S_1)=\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=1 \end{cases}$$

rg(S_1)=2

On a 2 ///// principales et une //// se cardué

On prend x_1, x_2 principales et x_3 secondaire

On calcule x_1 et x_2 on fonction de x_3 :

$$S_2 = \begin{cases} x1 = 0 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases} ; x_3 \in \mathbb{R}$$

$$S_2 = \{0, 1 - x_3\} ; x_3 \in \mathbb{R}$$

2)

$$(S_2)\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + ny + z = 1 \end{cases}$$ le tableau de (S_2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L_2 - mL_1$; $L_3 \to L_3 - L_1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1+m & -1 & m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{array}$$

$L_3 \to L_3 + L_2$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & -1 & -m^2 - m \end{array}$$

1ére cas : si $m \neq 1$

rg(S_2)=3

Donc (S2) est /// et $(S_2) \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 + m \\ (1-m)y - z = -m^2 \\ -z = -m^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + m - \dfrac{m}{1-m} - m^2 \\ y = \dfrac{m}{1-m} \\ z = m^2 + m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{1-m}\left(m^3 - m^2 - 2m\right) \\ y = \dfrac{m}{1-m} \\ z = m^2 + m \end{cases}$$

La solution : $S = \left\{ \dfrac{1}{1-m}\left(m^3 - m^2 - 2m\right) ; \left(\dfrac{m}{1-m}\right) ; \left(m^2 + m\right) \right\}$

2éme cas : m=1

$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = 1 \\ \end{cases}$ Impossible ➔ (S_2) est incompatible $S = \Phi$

Série N° 2 : (nombres complexes)

Exercice 1 :

Ecriture algébrique de nombres complexes

1) $z = \left(\frac{1}{2} - 3i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{3}\right)$

Rappel : s'écrit sous la forme : $z = a + bi$; avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$Z_1 = \left(\frac{1}{2} - 3i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i - i - i^2$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i - i + 1$$
$$= \frac{7}{6} - \frac{5}{6}i$$

2) $Z_2 = (1+2i)^2 = 1 + 4i + (2i)^2$
$$= 1 + 4i - 4$$
$$= -3 + 4i$$

3) $Z_3 = \dfrac{1-2i}{1+2i}$ soit $z = a + bi$; avec $a, b \in \mathbb{R}$. (le conjugué : المرافق de z est $\bar{z} = a - bi$)

$z.\bar{z} = a^2 - b^2$; $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ S'appel le module de Z

$$a^2 + b^2 = |Z|^2 \Leftrightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$Z_3 = \frac{(1-2i)(1-2i)}{1^2 - (2i)^2}$$
$$= \frac{1 - 2i - 2i + 4i^2}{1+4}$$
$$= \frac{1 - 4i - 4}{5}$$
$$= -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

4) $Z_4 = (2+i)^3$
$$= 2^3 + 3.2^2.i + 3.2.i^2 + i^3$$
$$= 8 + 12i - 6 - i$$
$$Z_4 = 2 + 11i$$

Remarque :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $i^n = ?$

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases}$$

On diviser n par 40

$n = 49 + r \qquad 0 \le r \le 3$

$$i^n = i^{49+r} = i^{49}.i^r = 1.i^r$$

$$\text{D'où} \quad i^n = \begin{cases} * & 1 & si & r = 0 \\ * & i & si & r = 1 \\ * & -1 & si & r = 2 \\ * & -i & si & r = 3 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Module d'argument :

$z = a + bi \in \mathbb{C}$; $\qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \qquad ; \qquad z \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

On pose : $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{|Z|}$ est $\cos(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{b}{|Z|}$

θ est dit un arangement de z. $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= |z|e^{i\theta}$$

Rappel :

$|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$

$|\lambda z| = |\lambda|.|z| \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$z=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$$

$$Z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$$

$|z|=|Z|^2$ est arg(z)=20 arg(Z)

$|Z|$ est arg(z)

Pour $\frac{z_1}{z_2}=Z$

$z_1=1-i\sqrt{3}$ et $z_2=1+i$

$|z_1|=2$

$|z_2|=\sqrt{2}$

$$|Z|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$|z|=|Z|^{20}=20^{10}$

$$z_1=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\theta_1=-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\theta_2=\frac{\pi}{4}$$

$\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{-7\pi}{12}$ ou en déduit un argument

$z=z^{20}$

$\arg(z)=\theta=20\arg(z)$

$$=-\frac{140}{12}\pi$$

Exercice 3 :

$$Z_1=\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{8}-i\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\ ;\ Z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1) Forme algébrique :

$$Z_1=\sqrt{2}\times\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}-3i-i-\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}(-4i)$$

$$Z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1-i\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}=2\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-2i\sqrt{3}-3\right)$$

$$Z_2=\frac{1}{2}\left(-2-2i\sqrt{3}\right)=-1-i\sqrt{3}$$

2) Module est argument de : z_1 ; z_2 ; $z_1.z_2$

$$|Z_1|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\times|i|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|Z_2|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$$

$$Z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-i)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

D'où un argument de Z_1 et $\theta_1=-\frac{\pi}{2}$

$$Z_2=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

D'où un argument de Z_2 est $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 2$$

Un argument de $Z_1 Z_2$ est : $\theta = \theta_1 + \theta_2 = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4\pi}{3}$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

3) * $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

$$|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{11\pi}{6}$$

$$= -\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

4) $Z = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $Z' = z_2^{10}$ On a : $|z_1| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $|z_2| = 2$ et $\arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{2}$ et

$\arg(z_2) = \dfrac{4\pi}{3}$.

Alors : $Z = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

- $\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$$

$$= -\frac{11\pi}{6}$$

On peut …. prendre $\arg(Z)$:

$$\arg(Z) = -\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

- $Z' = z_2^{10}$; $|Z|'' = |z_2^{10}| = |z_2|^{10}$; $Z' = 2^{10}$

- $\arg(Z') = \arg\left(z_2^{10}\right) = 10\arg\left(z_2\right)$

- Z ; Z' forme algébrique on a : $\Rightarrow Z' = 2^{10}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z' = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Z = |Z| .e^{i\arg(z_1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$Z = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}i \ \ ; \ Z = a + bi$$

Exercice 3 :

Déterminer les racines carrées des nombres complexes.

1) $z_1 = -3 + 4i$: calculer $u^2 = z_1$

Posons $u = a + bi \ \ a,b \in \mathbf{R}$

$$u^2 = z_1 \Leftrightarrow \quad (a+bi)^2 = z_1 = -3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a^2 - b^2\right) + 2abi = -3 + 4i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = -3 & avec \quad b = \left(\frac{2}{a}\right) \\ ab = 2 \end{cases}$$

… de 1 on pose $a^2 = c$

1 $\Leftrightarrow$ $c^2 + 3c - 4 = 0$ 1’

$\Delta = 3^2 + 16 = 25$

Donc … de 1’

Sont $C_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$; $C_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$

Donc $a^2=1$; $a=1$ ou $a=-1$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}/\,a=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}/\,a=-1$$

2) Les racines carré de :

$z_2=-5-12i$

$z_2=|a-bi|^2=-5-12i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-5\\2ab=-12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-5\\b=-\dfrac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(-\dfrac{2}{a}\right)^2=-5\\b=-\dfrac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^4+5a^2-36=0\\ab=-6\end{cases}$$

On pose : $a^2=d\Leftrightarrow d^2+5d-36=0$

$\Delta=25+144=169=13^3$: d'où le racine (E) sont :

$$d_1=\frac{-5+13}{2}=4$$

$$d_2=\frac{-5-13}{2}=-9$$

: $a^2=d=4$ (cas $d=a^2>0$)

Donc a=2 ou a=-2

Finalement : $\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$

Racine de z_2 : $2-3i$ et $-2+3i$??

3) $z_4=-5i$

$$=5(-i)$$

$$=5e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

Soit u est racinée de z_4 , $u = r.e^{i\theta}$

$u^2 = z_4 \Leftrightarrow \quad r^2.e^{2i\theta} = 5.e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 5 \\ 2\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \quad ho\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{5} \\ \theta = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad , \quad k = 0 \quad ou \quad k = 1 \end{cases}$$

Ou encore, les racines carrées de z_4 en forme algébrique.

$u = \sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $u = -\sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice 5 :

Résoudre :

1) $Z^2 + iZ + 5 - 5i = 0$

$\Delta = i^2 - 4 \times 1 \times (5 - 5i)$

$= -1 - 20 + 2i = -21 + 20i$

Chercher les racine de Δ qui sont les carine de

$t = -21 + 20i$ (on fait de $\mathbb{C}$) des racines carres de t comme en Ex 4.

Les racines carrés de (Δ) sont : 2+5i et -2-5i.

Donc les racines de (E) sont :

$z_1 = \dfrac{-i + \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-i + (2 + 5i)}{2} = 2i + 1$

$z_2 = \dfrac{-i - \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-i + (-2 - 5i)}{2} = -3i - 1$

Exercice : 7

Soit : $A = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

Les racines carrée de A a+bi est racine carré $\sqrt{2}$ de A ($a, b \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow (a + bi)^2 = 1 + i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1 \\ 2ab = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\dfrac{1}{2a}\right)^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^4 - 4b^2 + 1 = 0 & (*) \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$(*) \qquad a^4 - a + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = 0 / \qquad \alpha = a^2$$

$$\Delta = 1^2 + 1 = 2$$

Donc : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \qquad a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

D'où : $b = \dfrac{1}{2a} = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

Ou : $b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Donc en déduit que r, c de A sont :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}}$$

2) On a :

$$z = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\left(\sqrt{2}+2\right)}} \text{ et Z}$$

On a : $|A|^2 = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = 1$

D'où : $|A| = 1$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}$$

D'où : $A = 1.e^{\frac{i\pi}{4}}$ $\qquad \begin{cases} p = 1 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

3) Posons : $Z = r.e^{i\theta}$

Z est racine carrée de : $A \Leftrightarrow z^2 = A$

$$\Leftrightarrow \left(r.e^{i\theta}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow r^2.e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{8} + 2k\pi \end{cases}$$

$z = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{8}}$

Puisque : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) > 0$

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$$

D'où : $\cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}}$

Exercice 6 :

Linéariser : on a $\cos(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{in} + e^{-in}\right)$; $\sin(x) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{in} - e^{-in}\right)$

1) $\left(\cos(x)\right)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\left(e^{in} + e^{-in}\right)\right)^4$

$$= \frac{1}{2^4}\left(e^{in} + e^{-in}\right)^4$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(e^{4in} + 4e^{3in}e^{-in} + 6e^{2in}e^{-2in} + 4e^{in}e^{-3in} + e^{-4in}\right)$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(2\cos(4x) + 4\left(2\cos(2x)\right) + 6\right)$$

D'où : $\left(\cos(x)\right)^4 = \dfrac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$

2) $\left(\sin(x)\right)^5 = \dfrac{1}{(2i)^5}.\left(e^{in} - e^{-in}\right)^5$

$$= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5in} - 5e^{4in}e^{-in} + 10e^{3in}e^{-2in} + 10e^{2in}e^{-3in} + 5e^{in}e^{-4in} - e^{-5in}\right)$$

$$= \frac{1}{2^5 i}\left((2i)\sin 5x - 5(2i)\sin 3x + 10(2i)\sin x\right)$$

$$\boxed{\left(\sin(x)\right)^5 = \frac{1}{2^4}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)}$$

II/

1) transforme :

$\sin(3x)$ en polynômes en $\sin(x)$:

$$\sin(3x) = In\left(e^{3in}\right)$$

$$= In\left[\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^3\right]$$

Calculer : $\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^3$?

$$\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^3 = \cos^3(x) - 3\cos^2(x)i\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(3x) = \mathrm{Im}\left[\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^3\right]$$

$$= 3\cos^2(x)i\sin(x) - i\sin^3(x)$$

$$= 3\left(1-\sin^2(x)\right)i\sin(x) - i\sin^3(x)$$

$$= 3\left(\cos^2(x)\right)\sin(x) - \sin^3(x)$$

$$\sin(3x) = -4\sin 3x + 3\sin x$$

Pour : $P(X) = -4X^3 + 3X$

$$\sin 3x = P(\sin x)$$

2) $\cos 4x = \mathrm{Re}\left[e^{i4x}\right]$

$$= \dots\dots\dots$$

Calculer : $\left(\cos x + i\sin x\right)^4$

$$= \cos^4 x + 4\cos^3(x)i\sin(x) - 6\cos^2(x)i\sin^2(x) - 4\cos(x)\left(i\sin x\right)^3 + \sin^4 x$$

D'où $\cos^4 x = \mathrm{Re}\left(e^{i4x}\right)$

$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$$

$$= \cos^4 x - 6\cos^2(x)\left(1-\cos^2 x\right) + \left(1-\cos^2 x\right)^2$$

$$= \cos^4 x - \cos^2 x + 6\cos^4(x) + 1$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 6\cos^4(x)$$

Donc pour : $Q = 8X^4 + 1 - 8X^2$

Où : $\cos(4x) = Q(\cos x)$

Série 3

Exercice 1 :

Effectuer la D.E de A par B :

- $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 3$
- $B = X^2 - 2X + 2$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 + 2X^2 - 3 & X^2 - 2X + 2 \\
\underline{-X^4 + 2X^3 - 2X^2} & \overline{X^2 + X + 2} \\
0 + X^3 - 0 - 3 & \\
\underline{-X^3 + 2X^2 - 2X} & \\
0 + 2X^2 - 2X - 3 & \\
\underline{-2X^2 + 4X - 4} & \\
0 + 2X - 7 &
\end{array}$$

D'où : $A = B \times \underbrace{\left(X^2 + X + 2\right)}_{\text{quotient}} + \underbrace{\left(2X - 7\right)}_{\text{reste}}$

- A=X ; $B = X^2 + 1$

$$\begin{array}{c|c}
X & X^2 + 1 \\
\underline{0} & \overline{\quad 0 \quad} \\
X &
\end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Quotient } = 0 \\ \text{reste} = A \end{cases}$$

On générale :

Si $\deg A < \deg B$ et $B \neq 0$

- Le quotient de la D.E de A par B est 0.
- Le reste de D.E de A par B et A.

- $A = X^3 + iX - 3$
- $B = X - 2i$

$X^3 + iX - 3 \qquad X - 2i$

D'où $A = B\left(X^2 + 2iX + (i - 4)\right) - (5 + 8i)$

Exercice 2 :

Rappel : soit …. Avec … et …. Alors il existe …. Unique

Alors que : ………….

- Le polynôme P s'appelle le quatient de la ddivisier … de A pas B à l'ordre.

Donc $a^2 = 1$; $a = 1$ ou $a = -1$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} / a = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} / a = -1$$

2) Les racines carré de :

$z_2 = -5 - 12i$

$z_2 = |a - bi|^2 = -5 - 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ b = -\dfrac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(-\dfrac{2}{a}\right)^2 = -5 \\ b = -\dfrac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 5a^2 - 36 = 0 \\ ab = -6 \end{cases}$$

On pose : $a^2 = d \Leftrightarrow d^2 + 5d - 36 = 0$

$\Delta = 25 + 144 = 169 = 13^3$: d'où le racine (E) sont :

$$d_1 = \frac{-5 + 13}{2} = 4$$

$$d_2 = \frac{-5 - 13}{2} = -9$$

$: a^2 = d = 4\,(\text{ cas } d = a^2 > 0)$

Donc a=2 ou a=-2

Finalement : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

Racine de z_2 : $2 - 3i$ et $-2 + 3i$??

3) $z_4 = -5i$

$= 5(-i)$

$= 5e^{\frac{-i\pi}{2}}$

D'où X^2+X+1 division

$P(X)=X^n+X+1$

$\Leftrightarrow P\left(\overline{j}\right)=0$

$\Leftrightarrow j^n+j+1=0$

On a : $j^0=1$; $j^1=j$; $j^2=\overline{j}$; $j^3=j$; $j^4=j$; $j^5=j^2$

$$\begin{cases} si & n=3k & ; & j^n=\left(j^3\right)^k=1 \\ si & n=3k+1 & ; & j^n=j \\ si & n=3k+2 & ; & j^n=j^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} si & n=3k & ; & P(j)=j^{3k}+j+1=2j\neq 0 \\ si & n=3k+1 & ; & P(j)=j^{3n+1}+j+1=2j+1\neq 0 \\ si & n=3k+1 & ; & P(j)=j^{3k+2}+j+1=j^2+j+1=0 \end{cases}$$

Donc : X^2+X+1 divisi X^4+X+1

n est de la forme n=3k+2 $k\in\mathbf{N}$

$\Leftrightarrow \quad \{2;5;8;11;14.....\}$

3) X^2+X+1 divisi P donc

$P=X^{3k+2}+X+1$

$P(j)=j^{3k+2}+j+1=j^2+j+1=0$

$P(X)=(3k+2)\left(X^{3k+2}\right)+1$

$P(j)=(3k+2)\left(j^{3k+2}\right)+1=(3k+2)j+k$

$(3k+2)j+1\neq 0$

Car ……… $j=-\dfrac{1}{3k+2}\in\mathbb{R}$ impossible.

D'où P(j)=0 et P'$(\text{j})\neq 0$ …….

$\Rightarrow$j et racine d'ordre 1 de P(X) :

Exercice 6 :

$P(X)=X^5-2X^4-2X^3+\alpha X^2-7X+2 \quad \alpha\in\mathbb{R}$

1) $P(-2)=(-2)^5-2(-2)^4-2(-2)^3+\alpha(-2)^2-7(-2)+2$

$$=-32-32+16+4.\alpha+14+2=0$$

$$\alpha=8$$

On $P(-2)=0$

2) $P'(X)=5X^4-8X^2-6X^2+2\alpha X-7$

$P'(-2)=5(-2)^4-8(-2)^2-6(-2)^2+16(-2)-7$

$$= 80 + 64 - 24 - 32 - 7 = 81 \neq 0$$

Donc (-2) c'est un racine d'ordre 1 (ou simple de ….)

3) Division de P(X) par X+2 :

$$\begin{array}{l|l}
X^5 - 2X^4 - 2X^3 + 8X^2 - 7X + 2 & \underline{X + 2} \\
\underline{-X^5 - 2X^4} & X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 \\
0 - 4X^4 - 2X^3 + 8X^2 - 7X + 2 & \\
\quad \underline{4X^4 + 8X^3} & \\
\qquad 0 + 6X^3 + 8X^2 - 7X + 2 & \\
\qquad \quad \underline{+6X^3 - 12X^2} & \\
\qquad \quad 0 - 4X^2 - 7X + 2 & \\
\qquad \quad \underline{+4X^2 + 8X + 2} & \\
\qquad \qquad \quad 0 + X + 2 & \\
\qquad \qquad \quad \underline{-X - 2} & \\
\qquad \qquad \qquad \quad 0 &
\end{array}$$

D'où $P(X) = (X + 2)\left(X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1\right)$

4) Remarque : on s'inspirant de la ……..

$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 = (X - 1)^4$

$P(X) = (X + 2)(X - 1)^4$

C'est la fraction de P(X) dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 7 : Les éléments simples

- dans $\mathbb{R}[X]$:

1- Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$

2- La factorisation des les formes : $\dfrac{a}{(X - a)}$

3- La factorisation $\dfrac{bX + c}{\left(X^2 + \beta X + \gamma\right)^m}$ et $\beta^2 - 4\Delta < 0$; $b, c, \beta \in \mathbb{R}$

- Dans $\mathbb{C}[X]$: les éléments simples sont :

1- Les polynômes de $\mathbb{C}[X]$

2- Les factorisations de forme $\dfrac{\delta}{(X - \gamma)r}$; $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{N}^*$

Exemple : $F(X) = \dfrac{X^4}{X^3 - X}$

1) Réduire : c'est écrire $F\left(X\right)=\dfrac{A\left(X\right)}{B\left(X\right)}$, avec A, B n'ont pas racines communes : $P=\dfrac{X^{3}}{X^{3}-1}$

2) Déterminer la partie entière de F(X) c'est le quotient de la division E de numération par de dominateur

Pour : $F(X)=\dfrac{X^{3}}{X^{3}-1}$

$$\begin{array}{l|l} X^{3} & X^{2}-1 \\ \cline{2-2} \underline{-X^{3}+X} & X \\ \quad 0+X & \end{array} \quad ; \quad \frac{X^{3}}{X^{2}-1}=\frac{\left(X^{2}-1\right)}{X^{2}-1}X+\frac{X}{X^{2}-1}$$

➔ $F\left(X\right)=X+\dfrac{X}{X^{2}-1}$

⇨ Partie entière :

Remarque : $F=\dfrac{A}{B}$ et $\deg A<\deg B$: La partie entière de F est nulle

3) Factorisation dénominateur :

$X^{2}-1=\left(X+1\right)\left(X-1\right)$

4) Ecrire la décomposition théorique en élément simple de F(X) : $\exists a,b\in\mathbb{R}$ telle que : $F\left(X\right)=X+\dfrac{a}{X+1}+\dfrac{b}{X-1}$

En fait : $\dfrac{X}{X^{2}-1}=\dfrac{a}{X+1}+\dfrac{b}{X-1}$

5) Calcule des constantes :

$H(X)=\dfrac{X}{X^{2}-1}=\dfrac{a}{X+1}-\dfrac{b}{X-1}$

$H(X)\left(X+1\right)=\dfrac{X}{X-1}=a+\dfrac{b\left(X+1\right)}{X-1}$

- $x\to-1$: $\dfrac{1}{1-X}=a$ ➔ $a=\dfrac{1}{2}$
- $H(X)\left(X-1\right)=\dfrac{X}{X+1}=\dfrac{a\left(X-1\right)}{\left(X+1\right)}+b$
- $x\to1$: $\dfrac{1}{1+X}=b$ ➔ $b=\dfrac{1}{2}$

D'où : $F\left(X\right)=X+\dfrac{1}{2\left(X+1\right)}+\dfrac{1}{2\left(X-1\right)}$

Ex 7 : $G(X)=\dfrac{1}{X\left(X-1\right)^{2}}$

1) G est réduite.
2) La partie entière est nulle.
3) Le dénomination est factorisé $X(X-1)^2$.
4) Décomposition théorique de G(X) il existe a, b1 et $b_2 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$G(X)=\frac{a}{X}+\frac{b_1}{(X-1)}+\frac{b_2}{(X-1)^2}$$

5) Calcule constantes : a, b_1 ; b_2

$$G(X)X=\frac{1}{(X-1)^2}=a+\frac{b_1X}{(X-1)}+\frac{b_2X}{(X-1)^2}$$

- $x\to 0$: $\frac{1}{(0-1)^2}=a+0+0$ ➔ $\boxed{a=1}$

$$G(X)(X-1)=\frac{1}{X}=\frac{a(X^2-1)}{X}+b_1(X-1)+b_2$$

- $x\to 1$: $\frac{1}{1}=0+0+b_2$ ➔ $\boxed{b_2=1}$

$$G(X)(X)=\frac{1}{(X-1)^2}=a+\frac{b_1.X}{X-1}+\frac{b_2.X}{(X-1)^2}$$

- $x\to\infty$: $a=a+b+0$ ➔ $\boxed{b=-a=-1}$

Finalement : $G(X)=\frac{1}{X}-\frac{1}{(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}$

$$F(X)=\frac{X^2}{(X-1)^3(X+1)^2}$$

- F est réduite
- La partie entire de F(X) est nulle
- Factoritions du d'enomination $(X-1)^3(X+1)^2$
- Décomposition théorique de F(X) il ixiste
- Calcule les constante a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 ??

$$F(X)(X-1)^3=\frac{X^2}{(X+1)^2}=a_1(X-1)^2+a_2(X-1)+a_3+\frac{b_1(X-1)^3}{X+1}+\frac{b_2(X-1)^3}{(X+1)^2}$$

- $x\to 1$: $\frac{1}{(1+1)^2}=0+0+a_3+0+0$ ➔ $\boxed{a_3=\frac{1}{4}}$

$$F(X)(X+1)^2=\frac{X^2}{(X-1)^3}=\frac{a_1(X-1)^2}{(X-1)}+\frac{a_2(X+1)^2}{(X-1)^2}+\frac{a_3(X+1)^2}{(X-1)^3}+b_1(X+1)+b_2$$

- $x \to -1$: $\dfrac{(-1)^2}{(-1-1)^3} = b_2 + b_1(X+1).....b_2$ ➔ $\boxed{b_2 = -\dfrac{1}{8}}$

$$X.F(X) = \frac{X^3}{(X-1)^3(X+1)^2} = \frac{a_1X}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{b_1X}{X+1} + \frac{b_2X}{(X+1)^2}$$

- $x \to \infty$: $0 = a_1 + 0 + 0 + b_1 + 0$ ➔ $\boxed{a_1 = b_1}$

$F(0) = 0 = -a_1 + a_2 - a_3 + b_1 + b_2$

$$F(2) = \frac{2^2}{(2-1)^2(2+1)^2} = \frac{4}{9} = a_1 + a_2 + a_3 + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4}$$

Avec l'équation (1), (2) et (3) on

$a_1 = -\dfrac{1}{16}$; $b_1 = \dfrac{1}{16}$; $b_2 = \dfrac{1}{4}$; $a_3 = \dfrac{1}{4}$ et $b_2 = -\dfrac{1}{8}$

$$F(X) = \frac{-1}{16(X-1)} + \frac{1}{8(X-1)^2} + \frac{1}{4(X-1)^3} + \frac{1}{16(X+1)} - \frac{1}{8(X+1)^2}$$

Ex 3 (dans la série 3) :

$A = X^{16} - X^4 + X - 1$
$B = X^3 + X^2 + X + 1$

Trouver le reste de D.E de Apar B !

$B = X^3 + X^2 + X + 1$
$B(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$

Donc -1 est un racine de B.
Alors on va D.E B par X+1

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X^2 + X + 1 & X+1 \\ \cline{2-2} \underline{-X^3 - X^2} \quad\quad\quad\quad & X^2 + 1 \\ 0 + 0 + X + 1 & \\ \underline{-X - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$B = (X+1)(X^2+1)$

Chercher les racines de B.

B=0 $\Leftrightarrow (X+1)(X^2+1) = 0$

X+1=0 ou $X^2+1=0$

X=-1 ou $\Delta = 0 - 4.1.1 = -4 < 0$

$X_1 = -\dfrac{i\sqrt{4}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{i\sqrt{4}}{2}$

$\boxed{X_1 = -i}$ et $\boxed{X_2 = i}$ $\boxed{X = 1}$

$C(-1) = 0$; $C(1) = 0$; $C(-i) = 0$; $C(i) = 0$

$C(X) = (X-1)(X+1)(X+i)(X-i)Q(X)$

$C(X)=\left(X^2+1\right)\left(X+1\right)Q(X)$

$C(X)=\left(X^4-1\right)Q(X)$

$$\begin{array}{r|l}
X^{16}-X^4 & X^4-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^{16}+X^{12}+X^4} & X^{12}+X^8+X^4 \\
0+X^{12}-X^4 & \\
\underline{X^{12}+X^8} & \\
0+X^8-X^4 & \\
\underline{-X^8+X^4} & \\
0 &
\end{array}$$

$$C(X)=\left(X^{12}+X^8+X^4\right)\left(X^4-1\right)$$
$$=\left(X^{12}+X^8+X^4\right)\left(X^2-1\right)\left(X^2+1\right)$$
$$A=B.Q(X)+R$$
$$A=B.Q(X)+X-1$$

EX 8 :

1) Décomposer dans $\mathbb{R}$ la fonction

$F(X)=\dfrac{1}{X(X+1)}$ $\quad \exists a,b\in\mathbb{R}$ telle que $F(X)=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{(X+1)}$

Calcule a et b.

$$F(X)=\frac{1}{X(X+1)}=\frac{a(X+1)+bX}{X(X+1)}=\frac{(a+b)X+a}{X(X+1)}$$

$\begin{cases}a+b=0\\ a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\ a=1\end{cases}$ donc $F(X)=\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X+1}$

D'où $F(X)=-\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{1}{X}$

2) $G(X)=\dfrac{1}{X^3\left(X^3+1\right)}$

Facteur : $X^3+1 \qquad a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$X^3+1=(X+1)\left(X^2-X.1+1\right)$

$\Delta\left(X^2-X+1\right)=1^2-4=-3<0$

D'où : $X^3\left(X^3+1\right)=X^3(X+1)\left(X^2-X+1\right)$

et la fraction dans $\mathbb{R}[X]$ théoriquement $\exists a_1;a_2$ et a_3. $b,\alpha\in\mathbb{R}$

telle que : $G(X)=\dfrac{a_1}{X}+\dfrac{a_2}{X^2}+\dfrac{a_3}{X^3}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{\alpha X+B}{X^2-X+1}$

$G(X)=F(X^3)$

$G(X)=\dfrac{1}{X^3}-\dfrac{1}{X^3+1}$

$a_1+a_2=0$ et $a_3=1$ et $-\dfrac{1}{X^3+1}=\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1}$

$-1=0X^2+0X+(-1)$

$$\frac{-1}{X^3+1}=\frac{b(X^2-X+1)+(\alpha X+\beta)(X+1)}{(X+1)(X^2-X+1)}$$

$$=\frac{(b+\alpha)X^2+(-b+\alpha+\beta)X+(b+\beta)}{(X+1)(X^2-X+1)}$$

D'où $\begin{cases} b+\alpha=0 \\ -b+\alpha+\beta=0 \\ b+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-b \\ 2\alpha+\beta=0 \\ -\alpha+\beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{3} \\ b=-\dfrac{1}{3} \\ \beta=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$G(X)=\frac{1}{X^3}-\frac{1}{3(X+1)}+\frac{X-2}{3(X^2-X+1)}$$

Ex 9 :

$$F(X)=\frac{1}{(X^2+1)(X-1)^4}$$

Théoriquement il existe : $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ et $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{R}$:

Telle que : $F(X)=\dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+1}+\dfrac{a^1}{X-1}+\dfrac{a^2}{(X-1)^2}+\dfrac{a^3}{(X-1)^3}+\dfrac{a^4}{(X-1)^4}$

Calcule les constantes : a_1,a_2,a_3,a_4 et α,β

On utilise la division suivant

Pour : $\boxed{Y=X-1}$

Donc : $X=Y+1$; $X^2+1=(Y+1)^2+1$

$$F(X)=\frac{1}{(Y^2+2Y+2)Y^4}$$

Effet la D.S.P $\nearrow$ de 1 par Y^3+Y+1 à l'ordre 3.

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{-1-Y-Y^{2}} & \underline{2+2Y+Y^{2}} \\
0-Y-Y^{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{4}Y^{2} \\
\quad \underline{Y+Y^{2}+\frac{1}{2}Y^{3}} & \\
\qquad\qquad 0+\frac{1}{2}Y^{3}\ldots\ldots &
\end{array}
$$

$$1=\left(2+2Y+Y^{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{4}Y^{2}\right)+\left(-\frac{Y^{4}}{4}\right)$$

$$F(X)=\frac{\left(2+2Y+Y^{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{4}Y^{2}\right)}{\left(2+2Y+Y^{2}\right)Y^{4}}+\frac{Y^{4}\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(2+2Y+Y^{2}\right)Y^{4}}$$

$$F(X)=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{4}Y^{2}\right)}{Y^{4}}+\frac{-1}{4\left(2+2Y+Y^{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2Y^{4}}-\frac{1}{2Y^{3}}+\frac{1}{4Y^{2}}+\frac{-1}{4\left(Y^{2}+2Y+2\right)}$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{2(\alpha-1)^{4}}-\frac{1}{2(\alpha-1)^{3}}+\frac{1}{4(\alpha-1)^{2}}+\frac{-1}{4\left(\alpha^{2}+1\right)}$$

D'où :

$a_1=0$

$a_2=\frac{1}{4}$ et $\alpha=0$

$a_3=-\frac{1}{2}$ et $\beta=-\frac{1}{4}$

$a_4=-\frac{1}{4}$

Ex 10 :

1- $F(X)=\dfrac{X^{5}+2}{\left(X^{2}+X+1\right)^{3}}$

Le racine de $X^{2}+X+1$:

$\Delta=(-1)^{2}-4\times1\times1=-3$

$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$

$\left(X^{2}+X+1\right)^{3}=(X-1)\left(X^{2}+X+1\right)$

Les racine : $X=1$; j et $\overline{j}$.

j et $\overline{j}$ ne sont pas racine de $X^{5}+2$

- La partie entière est nulle car :

$\deg\left(X^2+X+1\right)^3=6>\deg\left(X^5+2\right)=5$

Le téoriquement il existe : α_1,β_1 ; α_2,β_2 et $\alpha_3,\beta_3\in\mathbb{R}$.

Telle que : $F(X)=\dfrac{\alpha_1X+\beta_1}{X^2+X+1}+\dfrac{\alpha_2X+\beta_2}{}+\dfrac{\alpha_3X+\beta_3}{}$

Calcule les constantes : $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3$

On va utilisé la division euclidien …….

Le D.E de X^5+2 par X^2+X+1

$$
\begin{array}{r|l}
X^5+2 & \underline{X^2+X+1} \\
\underline{-X^5-X^4-X^3} & X^3-X^2+1 \quad \text{quotient} \\
0-X^4-X^3+2 & \\
\underline{X^4+X^3+X^2} & \\
0+X^2+2 & \\
\underline{-X^2-X-1} & \\
0-X-1 & : \text{ le reste}
\end{array}
$$

Alors : $X^5+2=\left(X^2+X+1\right)\left(X^3-X^2+1\right)+\left(-X+1\right)$

$$
\begin{aligned}
F(X)=\frac{X^5+2}{\left(X^2+X+1\right)^3}&=\frac{\left(X^2+X+1\right)\left(X^3-X^2+1\right)}{\left(X^2+X+1\right)^3}+\frac{-X+1}{\left(X^2+X+1\right)^3}\\
&=\frac{\left(X^3-X^2+1\right)}{\left(X^2+X+1\right)^2}+\frac{-X+1}{\left(X^2+X+1\right)^3}
\end{aligned}
$$

$\alpha_3=-1$ et $\beta_3=1$.

D.E de X^3-X^2+1 par X^2+X+1

$$
\begin{array}{r|l}
X^3-X^2+1 & \underline{X^2+X+1} \\
\underline{-X^3-X^2-X} & X-2 \\
-2X^2-X+1 & \\
\underline{2X^2+2X+3} & \\
X+4 &
\end{array}
$$

D'où : $X^3-X^2+1=\left(X^2+X+1\right)\left(X-2\right)+\left(X+3\right)$

$$
\begin{aligned}
\frac{X^3-X^2+1}{\left(X^2+X+1\right)^2}&=\frac{\left(X^2+X+1\right)\left(X-2\right)}{\left(X^2+X+1\right)^2}+\frac{X+4}{\left(X^2+X+1\right)^2}\\
&=\frac{X-2}{\left(X^2+X+1\right)}+\frac{X+4}{\left(X^2+X+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

Finalement :

$$
\boxed{F(X)=\frac{X-2}{\left(X^2+X+1\right)}+\frac{X+4}{\left(X^2+X+1\right)^2}+\frac{-X+1}{\left(X^2+X+1\right)^3}}
$$

3) $G(X)=\dfrac{1}{\left(X^2+1\right)\left(X^2+X+1\right)}$

Il existe $a,b\in\mathbb{R}$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Telle que : $G(X)=\dfrac{aX+b}{\left(X^2+1\right)}+\dfrac{\alpha X+\beta}{\left(X^2+X+1\right)}$

Calcule : a,b,α,β

$$G(X)\left(X^2+1\right)=\left(X^2+X+1\right)=(aX+b)+\frac{(\alpha X+\beta)\left(X^2+1\right)}{\left(X^2+X+1\right)}$$

- $x\to i$

donc : $\dfrac{1}{i^2+i+1}=ai+b+0$

$$=\frac{1}{i}=-i$$

D'où $a=-1$ et $b=0$

$$G(X)\left(X^2+X+1\right)=\frac{1}{\left(X^2+1\right)}=\frac{(aX+b)\left(X^2+X+1\right)}{\left(X^2+1\right)}+(\alpha X+\beta)$$

- $X\to j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\dfrac{1}{j^2+1}=\alpha j+\beta$

Or $j^2+j+1=0$ ➔ $j^2+1=-j$

Donc : $-\dfrac{1}{j}=\alpha j+\beta$

⇨ $-1=\alpha j^2+\beta j$

⇨ $=\alpha(-j-1)+\beta j$

⇨ $=(-\alpha+\beta)j-\alpha$

⇨ $\begin{cases}-\alpha+\beta=0\\-\alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=1\\\alpha=1\end{cases}$

$$\boxed{G(X)=\frac{-X}{\left(X^2+1\right)}+\frac{X+1}{\left(X^2+X+1\right)}}$$

4) $H(X)=\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos\theta+1}\quad \theta\in\mathbb{R}$

- X^2 et $X^4-2X^2\cos\theta+1$ n'est pas de racine.
- La partie intaire de H(X) est nulle car
  $\deg\left(X^2\right)=2<\deg\left(X^4-2X^2\cos\theta+1\right)=4$

- Factoriation :

$$B(X)=X^4-2X^2\cos\theta+1$$
$$=X^4-(2\cos\theta)X^2+\cos^2\theta-\cos^2\theta+1$$
$$=\underbrace{X^4-(2\cos\theta)X^2+\cos^2\theta}_{(X^2-\cos\theta)^2}+\underbrace{1-\cos^2\theta}_{\sin^2\theta}$$

$$B(X)=(X^2-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$$
$$=(X^2-\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2$$
$$=(2-\cos\theta-i\sin\theta)(2-\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(X^2-e^{i\theta})(X^2-e^{-i\theta})$$

- $e^{i\theta}\in\mathbb{R}\ :\ \cos\theta+i\sin\theta\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sin\theta=0$

$\Leftrightarrow \theta=K\pi$

- $e^{i\theta}\notin\mathbb{R}\Leftrightarrow\theta\neq K\pi$, le cas suivant.

1[iér] cas : $\theta=2K\pi$

$$B(X)=(X^2-1)(X^2-1)$$
$$=(X^2-1)(X+1)^2$$

2[éme] cas : $\theta=(2K+1)\pi$

$$B(X)=(X^2+1)(X^2+1)$$
$$=(X^2+1)^2$$

3[éme] cas : $\theta\neq K\pi$

$(e^{i\theta}\in\mathbb{C}\text{ et } e^{i\theta}\in\mathbb{R})$ car $\sin\theta\neq0$

$X=re^{i\alpha}$ et racine de $X-re^{i\alpha}\Leftrightarrow X^2=r^2e^{i2\alpha}=e^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=1\\2\alpha=\theta+2K\pi\ , \qquad h=0,1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\\alpha=\dfrac{\theta}{2}+K\pi\end{cases}$$

Donc : $X^2-e^{i\theta}=\left(\alpha-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\left(X-e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}\right)$

$$=\left(\alpha-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\left(X+e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

Forment les racines : $X^2+e^{i\theta}$

Sont ....

Car : $B(X)\in\mathbb{R}[X]$

Finalement : $B(X)=(X-\gamma)(X-\overline{\gamma})(X+\overline{\gamma})(X+\gamma)$

Ou $\gamma=e^{i\frac{\theta}{2}}=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$B(X)=(X-\gamma)(X-\overline{\gamma})(X+\overline{\gamma})(X+\gamma)$

………………………………

$$B(X)=\left(X^2+\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)X+1\right)\left(X^2+\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)X+1\right)$$

1^{ier} cas : $\theta=2K\pi$

$$H(X)=\frac{X^2}{(X+1)^2(X-1)^2}$$

$$=\frac{a_1}{X+1}+\frac{a_2}{(X+1)^2}+\frac{b_1}{X-1}+\frac{b_2}{(X-1)^2}$$

$H(X)=H(-X)$ (H est paire)

$$H(X)=H(-X)=\frac{-a_1}{X-1}+\frac{a_2}{(X-1)^2}+\frac{-b_1}{X+1}+\frac{b_2}{(X-1)^2}$$

⇨ $-a_1=b_1$ et $a_2=b_2$

Calcule des constantes : a_1,a_2,b_1,b_2

$$H(X)(X-1)^2=\frac{X^2}{(X+1)^2}$$

$$=\left(\frac{a_1}{X+1}-\frac{a_2}{(X+1)^2}\right)(X-1)^2+b_1(X-1)+b_2$$

- $x\mapsto 1$: on obtient

$$\frac{1}{(1+1)^2}=b_2 \rightarrow b_2=\frac{1}{4} \rightarrow a_2=\frac{1}{2}$$

- $x\mapsto 0$:

$H(0)=0 \quad a_1+a_2-b_1+b_2$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=a_1-b_1+\frac{1}{2}\\ a_1+b_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-\frac{1}{4}\\ b_1=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Donc : $H(X)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(X+1)}+\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{1}{(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}\right)$

$2^{\text{éme}}$ cas : $\theta=(2K+1)\pi$

$B(X)=(X^2+1)^2$

$$H(X)=\frac{X^2}{(X^2+1)^2}=\frac{(X^2+1)-1}{(X^2+1)^2}=\frac{X^2+1}{(X^2+1)^2}-\frac{1}{(X^2+1)^2}$$

3éme : $\theta\neq K\pi \Leftrightarrow \quad \sin\theta\neq 0$

$$H(X)=\frac{X^2}{\left(X^2-\left(2\cos\frac{\theta}{2}\int X+1\right)\left(X^2+\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)X+1\right)\right)}$$

$$=\frac{aX+b}{X^2-\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)X+1}+\frac{cX+d}{X^2+\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)X+1}$$

$$H(X)=H(-X)=\frac{-aX+b}{X^2+\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)X+1}+\frac{-cX+d}{X^2-\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)X+1}$$

$\Leftrightarrow \quad a=-c$ et $d=b$

Ils peut de calculer , et b.

$$H(X)\left(X^2-2\cos\frac{\theta}{2}X+1\right)=\frac{X^2}{X^2+2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)X+1}$$

$$=aX+b+\frac{cX+d}{X^2+2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)X+1}$$

- $X\to e^{i\frac{\theta}{2}}$:

$e^{i\frac{\theta}{2}}$ est racine de $X^2-2\cos\frac{\theta}{2}X+1$

On a : $\dfrac{\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2}{\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)+1}=ae^{i\frac{\theta}{2}}+b$

$$\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\theta}+\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)+1}=\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}+e^{i\theta}+1+1}=\frac{e^{i\theta}}{2\left(e^{i\theta}+1\right)}=ae^{i\frac{\theta}{2}}+b$$

Espace vectoriel :

1) (E,t) est une groupe commutatif : c'est-à-dire : $\forall u,v,w\in E$ on a :

- $(u+v)+w=u(v+w)$
- $u+v=v+u$
- $\exists E$ telque $u+e=e+u=w \qquad \forall x\in E$

on note $e=0_E$

- $u+v'=v'+u=0_E$

u' est le symétrique de u : $\boxed{u'=-u}$

2)

- $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
- $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
- $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

- $1_K u = u$

$\mathbf{R}^2 = \{(x,y)/x.y \in \mathbf{R}\}$; $\forall u = (x,y)$; $v = (a,b)$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

$u + v = (x.y) + (ab)$

$= (a+x),(y+b)$

$= (a+x, y+b)$

$\alpha u = (\alpha x, \alpha y)$

$O_{\mathrm{R}}(0,0)$

$-u = -(x,y)$

$= (-x,-y)$

$u(x_1,x_2,x_3,x_4.........x_n)$

$v(y_1,y_2,y_3,y_4.........y_n)$

- $u + v = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4.........x_n+y_n)$
- $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4.........\alpha x_n)$

On a : $O_{\mathbf{R}^n} = (0,0,...,0)$

$-u = (-x_1,-x_2,-x_3,-x_4.........-x_n)$

$= (-u)(1)$

$= (-1)u$

3) $K[X]$; $K = \mathrm{R}$ ou $\mathbf{C}$

4) $E = F([a,b];\mathbf{R}) = \{F:[a,b] \mapsto \mathbf{R}\}$ / f : fonction définie sur $[a,b]$

Définition :

Soit : (E_i, t_i) un e.v ……….. et F partie de E : $(F \le E)$ telle que E est sous e.v de E :

Si $F \ne \phi$ et (E_i, t_i) est un e.v sur K

Proposition :

Soit (E_i, t_i) un e.V sur K et $F \le E$

Alors F est un e.v de $E \begin{cases} 1) F \ne \phi \\ 2) \\ 3) \forall \alpha \in K ; \forall u \in F \quad \alpha u \in F \end{cases}$

Ex 1 (Série 4) :

Les parties suivante de R^2, soit-elles des s.e.v de R^2

1) $F_3 = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 / y = 2x\}$

- $F_3 \ne \phi$

$O_{\mathrm{R}^2} = (0,0) \in F_3$

$(\sqrt{3}, 2\sqrt{5}) \in F_3$

Soit : $u=(x,y)\in F_3$ et $v=(a,b)\in F_3$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. a –t on $u+v\in F_3$? Et $\alpha u\in F_3$?

On a : y =2x ; b =2r

u + v = (x,y) + (a + b)

= (x+a,y+b)

Y+b= 2(x+9)

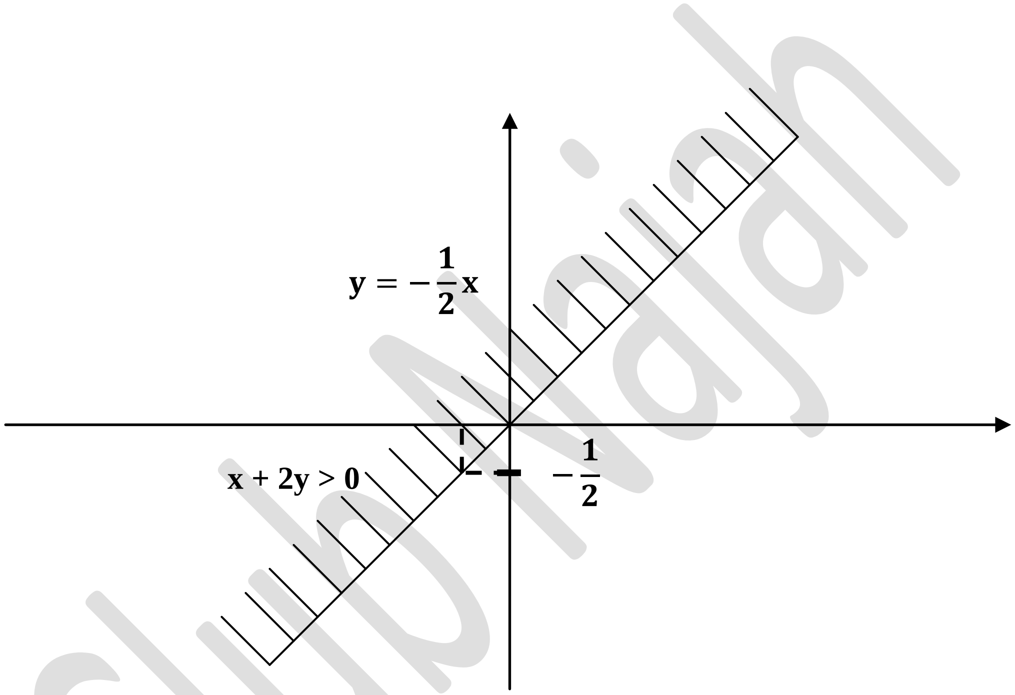
⇨ $u+v\in F_3$

$\alpha u=\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$

Or : y = 2x, donc : $\alpha y=2\alpha x$; d'où $\alpha u\in F_3$

D'où F_3 est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

a) $F_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+2y\ge 0\in\mathbb{R}^2\right\}$



- $F_1\neq\phi$: $O_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in F$

$(1,2)\in F_1$ car $1+2\times 2=5\ge 0$

$\Gamma_n:(-1)\times(1,2)=(-1,-2)\notin F_3$ car $-1\times 2(r)=-5<0$

Donc F1 n'est pas un e.v de $\mathbb{R}^2$

b) $F_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\right\}$

$O_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\notin F_2$

⇨ F_2 n'est pas un e.v de $\mathbb{R}^2$

c) $F_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 2x+3y=1\right\}$

F_4 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ car : $O_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\notin F$

2) La partie suivante sont-elles des s.e.v de $\mathbb{R}^3$

d) $F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

- $F_5 \neq \phi$, car : $O_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F_5$
- Soit : $u(a,b,c) \in F_5$ et $v(x,y,z) \in F_5$

On a : a + b + c = 0 et x + y + z = 0

$(u,v) = (a+x, b+y, c+z) \in F_5$

$$(a+x)+(b+y)+(c+z) = (a+b+c)+(x+y+z)$$
$$= 0+0 = 0$$

⇨ $u - v \in F_5$

- Soit : $u = (a,b,c) \in F_5$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha u = (\alpha a, \alpha b, \alpha c) \in F_5$$
$$\alpha a + \alpha b + \alpha c = \alpha(a,b,c) \text{ et } a+b+c = 0 \text{ et } \alpha(a,b,c) = 0$$

$\alpha u \in F_5$ d'où F_5 n'est pas e.v de $\mathbb{R}^3$

e) $F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 1\}$: $O_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin F_6$

⇨ N'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

f) $F_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \quad et \quad z = 1\}$

$= \{(x,-x,1) / x \in \mathbb{R}\}$: $O_{\mathbb{R}^3} \notin F_7$ n'est pas un e.v de $\mathbb{R}^3$.

g) h - 2y = 0 et x – y + z = 0

$F_8 \neq \phi$ cas $(0,0,0) \in F_8$

- soit $(x,y,z) \in F_8$