Université IBN Tofail

Faculté des Sciences

Département Informatique

Recherche Opérationnelle : Programmation liniéaire

Chapitre 1

Author:
Pr. Khalil IBRAHIMI

Filière:
Licence SMI, S5

November 19, 2021

1 Algorithme Simplexe

Une nouvelle méthode du Simplexe géométrique permet à partir d'une solution initiale (point de départ du polyèdre), lors de toute itération de passer d'un sommet à un sommet voisin en lequel la valeur de la fonction objectif est meilleure. L'algoritme s'arrête lorsqu'on ne trouve aucun sommet voisin dont la valeur de la fonction objectif est meilleure.

1.1 Condition d'utilisation

- Toutes les contraintes du PL doivent être en égalités (forme standard);
- Tous les secondes membres sont positifs;
- Si une contrainte i contient le second membre négatif $b_i < 0$, on mutliplie la conttrainte par -1.
- Si le signe d'une variable est inconnu à l'avance par exemple $x_i \geq -2$, on peut la remplacer par $x'_i = x_i + 2 \geq 0$. Si on pas la borne inférieur, on la ramplce par $x_i = x'_i - x_i"$ avec $x_i", x'_i \geq 0$.
- La fonction objectif est à maximiser;
- Introduire les variables d'écarts;
- Solution initiale réalisable en origine comme point de départ, sinon méthode à deux phases pour trouver une solution admissible comme nouveau point.

1.2 Exemple

1.2.1 La forme standard d'un PL

maximiser

$$3x_1 + x_2 + 2x_3$$

Sous les contraintes

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Les variables d'écarts x_4, x_5, x_6

Une solution intitiale à ce sytème correspond au sommet $O(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$. La fabrication est nulle donne un bénifice Z =0 (nul). Il s'agit d'une solution admissible au sens mathématique des contraintes.

1.2.2 Base en sommet origine O

Les variables de base en fonction des variables hors - base sont :

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$Z = 0 + 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

Augmenter la valeur de la fonction objectif Z revient à augmenter la valeur de l'une des variables hors base. On cherche la variable qui augmente de plus grande marge de bénifice, donc c'est la variable x_1 et les autres variables hors base sont nulles.

1.2.3 La forme standard d'un PL

La variable x_1 est augmenté d'une valeur θ et $(x_2 = 0, x_3 = 0)$

$$x_4 = 30 - \theta$$

$$x_5 = 24 - 2\theta$$

$$x_6 = 36 - 4\theta$$

$$Z = 0 + 3\theta$$

Il faut augmenter la valeur du θ en respectant les contraintes de positivités des variables. Donc, $30 - \theta \geq 0$, $24 - 2\theta \geq 0$ et $36 - 4\theta \geq 0$, ce qui donne la maximum possible est $\theta = 9$. On trouve un nouveau sommet $C = (0+9, 0, 0)$, c'est un programme qui génére un bénifice de 27.

Exemple [Base en sommet C] On cherhce x_1 en fonction de x_6 et on obtient $x_1 = 1/4(36 - x_2 - 2x_3 - x_6)^*$. En remplace x_1 par sa valeur dans les variables de base x_4 et x_5, le nouveau système est :

$$x_1 = 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6$$

$$x_4 = 21 - 3/4x_2 - 5/2x_3 + 1/4x_6$$
$$x_5 = 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6$$
$$Z = 27 + 1/4x_2 + 1/2x_3 - 3/4x_6$$

Cette opération porte le nom de PIVOT. Un pivot choisit une variable hors-base x_e (entrante, e=1), et une variable x_l de base dite sortante (l=6) de la base.

On augmente la valeur de la fonction objectif. On exprime les variables de base en C en fonction des variables hors base en C.

Exemple [Base en sommet voisin de C] Augmenter la valeur de la fonction objectif Z = 27 revient à augmenter la valeur de l'une des variables hors base. On cherche la variable qui augmente de plus grande marge de bénifice, donc c'est la variable x_3 et les autres variables hors base sont nulles. Donc $x_3 = \theta, x_2 = 0, x_6 = 0$

$$x_1 = 9 - 1/2\theta$$
$$x_4 = 21 - 5/2\theta$$
$$x_5 = 6 - 4\theta$$
$$Z = 27 + 1/2\theta$$

En respectant les contraintes non négativités, la valeur maximal d'augmentation est de 3/2. Donc,

$$x_3 = 1/4(6 - 3/2x_2 + 1/2x_6 - x_5)$$

.

Exemple [Base en sommet C] On cherhce x_3 en fonction de x_5 et on obtient $x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$. En remplace x_2 par sa valeur dans les variables de base x_1 et x_4, le nouveau système est :

$$x_1 = 33/4 - 1/16x_2 + 1/8x_5 - 5/16x_6$$
$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$
$$x_4 = 69/4 + 3/16x_2 + 5/8x_5 - 1/16x_6$$

$$Z = 111/4 + 1/16x_2 - 1/8x_5 - 11/16x_6$$

Remarque: x_3 est la varirable entrante dans la base et x_5 est la variable sortante de la base. On augmente la valeur de la fonction objectif. On exprime les variables de base en C en fonction des variables hors base en vosin de C, D.

.Exemple [Base en sommet voisin de D] Augmenter la valeur de la fonction objectif Z = 111/4 revient à augmenter la valeur de l'une des variables hors base. On cherche la variable qui augmente de plus grande marge de bénéfice, donc c'est la seule variable x_2 et les autres variables hors base sont nulles. Donc $x_2 = \theta, x_5 = 0, x_6 = 0$

$$x_1 = 33/4 - 1/16\theta$$

$$x_4 = 69/4 + 3/16\theta$$

$$x_3 = 3/2 - 3/8\theta$$

$$Z = 111/4 + 1/16\theta$$

En respectant les contraintes non négativités, la valeur maximal d'augmentation est de 4.

$$x_2 = 8/3(3/2 - x_3 - 1/4x_5 + 1/8x_6)$$

.Exemple [Base en sommet C] On cherhce x_2 en fonction de x_3 et on obtient $x_2 = 8/3(-3/2 - x_3 + 1/4x_5 - 1/8x_6)$. En remplace x_2 par sa valeur dans les variables de base, le nouveau système est :

$$x_1 = 8 + x_3/6 + x_5/6 - x_6/3$$

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

$$x_4 = 18 - x_3/2 + x_5/2$$

$$Z = 28 - 1/6x_3 - 1/6x_5 - 2/3x_6$$

Remarque: x_2 est la varirable entrante dans la base et x_3 est la variable sortante de la base. Toutes les coefficients de la fonction Z sont négatifs et donc pas d'augmentation possible et la solution optimale est $x^* = (8, 4, 0, 18, 0, 0)$ qui donne la valeur maximal de $Z = 3 * 8 + 4 + 0 = 28$. $B = \{1, 2, 4\}$, $N = \{3, 5, 6\}$

Algorithm 1 Mécanisme PIVOT (N, B, A, b, c, v, l, e) du simplexe.

1. Calcule des coefficients de nouvelle variable de base x_e.
$\hat{b}_e = b_l / a_{le}$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{a}_{ej} = a_{lj}/a_{le}$
$\hat{a}_{el} = 1/a_{le}$
2. Calcule des coefficients des contraintes restantes.
Pour tout $i \in B - \{l\}$ faire $\hat{b}_i = b_i - a_{ie}\hat{b}_e$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ie}\hat{a}_{ej}$
$\hat{a}_{il} = -a_{ie}\hat{a}_{el}$
3. Calcule de la fonction objectif:
$\hat{v} = v + c_e\hat{b}_e$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{c}_j = c_j - c_e\hat{a}_{ej}$
$\hat{c}_l = -c_e\hat{a}_{el}$
4. Mise à jour d'ensemble de nouvelles varirables de base/hors-base.
$\hat{N} = N - \{e\} \cup \{l\}$ et $\hat{B} = B - \{l\} \cup \{e\}$
5. Retourne la nouvelle forme standard $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$

1.3 Mécanisme PIVOT

Le PIVOT reçoit en entrée n-uplet (N, B, A, b, c, v, l, e) une forme standard et retourne n-uplet $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$ d'une nouvelle forme standard. Il utilise une variable entrante x_e d'indice e et une variable sortante x_l d'indice l à chaque appel du procédure.

La variable entrante est de la forme :

$$x_e = \hat{b}_e - \sum_{j \in N - \{e\}} \hat{a}_{ej}x_j - \hat{a}_{el}x_l$$

Mise à jour des autres variables de bases $i \in B - \{l\}$:

$$x_i = \hat{b}_i - \sum_{j \in N - \{e\}} \hat{a}_{ij}x_j - \hat{a}_{il}x_l$$

Mise à jour de la fonction objectif:

$$z = \hat{v} + \sum_{j \in N - \{e\}} \hat{c}_j x_j + \hat{c}_l x_l$$

Théorème.
Considérons l'appel à $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$=PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, e) dans

lequel la valeur du pivot $a_{le} \neq 0$. Soit $\bar{x}$ la solution de base après l'appel, alors $\bar{x}_j = 0$ pour tout $j \in \hat{N}$, $\bar{x}_e = \frac{b_l}{a_{le}}$, $\bar{x}_i = b_i - a_{ie}\hat{b}_e$ pour tout $i \in \hat{B} - \{e\}$

1.4 Formalisme de l'algorithme simplexe

Algorithm 2 Algorithme Simplexe.

1. Initialisation.
(N, B, A, b, c, v) = initialise-simplexe (A, b, c)
2. Simplexe.
Tant que $j \in$ N vérifie $c_j > 0$
faire choisir un indice $e \in N$ tel que $c_e > 0$
pour tout indice $i \in B$
faire is $a_{ie} > 0$ alors $\delta_i = b_i/a_{ie}$
sinon $\delta_i = \infty$
choisir un indice $l \in B$ qui minimise δ_i
si $\delta_i = \infty$
alors retourner non borné
sinon (N, B, A, b, c, v) = PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, e)
Fin de tant que
pour i allant de 1 à n, faire si $i \in B$, alors $\bar{x}_i = b_i$, sinon $\bar{x}_i = 0$
retourner $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ la solution optimale.

L'algorithme résume la méthode de maximisation par les tableaux directement.

Lemme 1 Etand donné un programme linéaire (A, b, c), supposez l'initialisation retourne une forme standard pour laquelle la solution est réalisable. Si simplexe retourne une solution optimale, cette solution est réalisable pour PL. Si simplexe retourne non borné, alors le programme PL est non borné.

Lemme 2 Soit (A, b, c) un programme linéaire sous forme canonique. Etant donné un ensemble de variable de base B, il y a unicité de la forme standard associée.

Lemme 3 Soit I un ensemble d'indices. Pour tout $i \in I$, soeint α_i et β_i des réels, et soit x_i une variable à valeur réelle. Soit γ un réel quelconque. Supposons pour toute configuration des x_i, l'on ait

$$\sum_i \alpha_i x_i = \gamma + \sum_i \beta_i x_i$$

alors $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in I$, et $\gamma = 0$.

1.5 Terminaison de l'algorithme Simplexe

Chaque itération de l'algorithme simplexe augmentait la valeur de la fonction objectif associée àla solution de base. Il se peut qu'une itération laisse la valeur de la fonction objectif inchangée. Ce phénomène porte le nom de dégénérescence, donc $b_l = 0$.
Lemme 1 Si SIMPLEXE n'arrive pas à se terminer en au plus C_{n+m}^{m} itérations, alors il boucle.
Lemme 2 Si Initialisation-SIMPLEXE retourne une forme standard pour laquelle la solution de base est réalisable, alors soit SIMPLEXE signale qu'un PL est non borné, soit il se termine avec une solution réalisable en au plus C_{n+m}^{m} itérations.

1.6 Problème de la soultion de base initiale

Lemme : Prgramme auxiliéaire
Soit L un programme linaéaire sous forme canonique. Soit L_{laux} le programme linéaire à $n+1$ variables :
maximiser

$$-x_0$$

sous les contriantes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 \leq b_i$$

pour $i = 1, 2, ..., m$ et $x_j \geq 0$ pour $j = 0, 1, ..., n$.
Alors L est réalisable si est seulement si la valeur de l'objectif optimale de L_{aux} est 0.
L'objectif est de trouver une solution de base admissible qui servira de point de départ pour l'algorithme du simplexe. L'idée est de résoudre un problème intermédiaire de minimisation dont la solution fournira le point de départ de la méthode du simplexe. Ce problème intermédiaire porte le nom de Phase I du simplexe. Puis de suivre la méthode standard du simplexe (Phase II).
Exemple: Soit le programme linéaire:
Maximiser

$$2x_1 - x_2$$

sous les contraintes

$$2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2$$

Algorithm 3 INITALISE-SIMPLEXE (A, b, c)

1. Soit l l'indice du b_i minimal. Alors si $b_l \geq 0$, la solution de base initiale est réalisable?, Alors retourner (N, B, A, b, c, 0)
2.Former un programme linéaire auxiliéaire L_{aux} en ajoutant $-x_0$ sur chaque équation de contraintes et en choisissant la fonction objectif sur $-x_0$.
3. On appel le PIVOT sur la forme standard finale de L_{aux} $(N, B, A, b, c, v) = PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, 0)$
4. Solution au programme auxiliéaire. On a maintenant la solution réalisable pour L_{aux}.
Répéter le simplexe sauf l'initialisation, jusqu'à l'obtention d'une solution optimale pour L_{aux}.
5. Si la solution de base $\bar{x}_0 = 0$ alors retourner la forme standard finale en supprimant x_0 et en restaurant la fonction objectif originale.
Sinon retourne irréalisable.

$$2x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4$$

$$x_1, x_2, x_0 \geq 0$$

La solution de base initiale n'est pas réalisable. Donc, on utlise le programme liniéaire auxiliaire.
Maximiser

$$-x_0$$

sous les contraintes

$$2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2$$

$$2x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4$$

$$x_1, x_2, x_0 \geq 0$$

Convertir cette forme en forme standard dont la solution de base est iréalisable ($x_4 = -4$). Puis, on fait appel au PIVOT pour convertir cette forme standard en une forme standard dont la solution est réalisable (4, 0, 0, 6, 0). Ensuite, on fait appel au Pivot de manière répétée jusqu'à obtenir une solution optimale au L_{aux}
En faisant $x_0 = 0$, on a une forme standard dont la solution de base est réalisable.
Maximiser

$$4/5 + 9/5x_1 - x_4/5$$

sous les contraintes

$$x_2 = 4/5 + x_1/5 + x_4/5$$

$$x_3 = 14/5 - 9/5x_1 + x_4/5$$

1.7 Maximisation par la méthode des tableaux

A partir de la forme standard du P.L, on exprime la solution au sommet à l'origine sous forme d'un tableau (lines sont les variables de base et les colonnes sont toutes les variables).
Critères de Dantzig:

- Critère 1. Pour déterminer la colonne qui doit entrer dans la base (entrante), on choisit celle qui comporte le $c_j > 0$ le plus grand de la fonction économique.
- Critère 2. Pour déterminer la colonne qui doit sortir de la base, on choisit celle d'indice l tel que b_k/a_{ke} soit le plus petit ($l = k$).

Exemple :

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$Z = 0 + 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

i	j	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	b
4		1	1	3	1	0	0	30
5		2	2	5	0	1	0	24
6		4	1	2	0	0	1	36
		3	1	2	0	0	0	$z = 0$

i est l'indice des lignes de la variable de base et j est l'indice des colonnes. Les formules de mise à jour des coefficents des variables sont dans le mécanisme PIVOT.
Le premier critère donne $c_e = 3$ et le critère 2 donne $min(30/1 = 30, 24/2 = 12, 36/4 = 9) = 9, indice = 6 = l$.

Après quelques itérations, on obtient:

i	j	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	b
1		1	0	$-1/6$	0	$-1/6$	$1/6$	8
2		0	1	$8/3$	0	$2/3$	$-1/3$	4
4		0	0	$1/2$	1	$1/2$	0	18
		0	0	$-1/6$	0	$-1/6$	$-2/3$	$z = 28$

Tous les c_j sont négatifs, on arrêt. Le bénéfice total est 28 qui correspond à la solution (8, 4, 0).

1.8 Méthode des deux phases

Pour résoudre un problème général d'un P.L, on utilise la méthode à deux phases.
Phase 1. Résolution du problème auxiliaire
Introduire des variables artificielles y_i pour construire une base initiale et minimiser $w = \sum y_i$ par simplexe. Si $w > 0$, alors on arrêt (impossible de trouver une solution réalisable au problème original) sinon, pour $w = 0$, le problème a des solutions admissibles, on cherche à éliminer de la base toutes les variables artificielles par PIVOT.
Phase 2. Résolution du problème P.L.
On appel à l'algorithme simplexe à partir de la forme standard de la phase 1.
Exemple.
Max

$$z = 2x_1 + x_2$$

Sous les contraintes

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_i \geq 0$$

Trouver la solution de base initiale en utilisant les deux phases.

1.9 Méthode du grand M

Lorsqu'il y a dans la forme standard d'un PL de maximisation des contraintes = ou $\geq$, on utilise la méthode du grand M.

Définition

La méthode du grand M consiste à introduire des variables artificielles dans les contraintes d'égalité et d'inégalité suppérieur ou égal à et dans la fonction objectif. Chaque variable artificielle sera accompagné d'un coefficient -M ($M > 0$ très grand). Ceci est pour exlure les variables artificielles de la solution optimale (pénalisation).

La solution optimale est lorsque on a toutes les coeficcients de z sont nulles ou négatifs.

Ojectif du grand M

L'objectif est de faire sortir de la base les variables artifcielles. La fonction objectif devient alors $Z' = Z - M\sum a_i$ pour un problème de maximisation de Z. Sinon $Z' = Z + M\sum a_i$ en cas de minimisation.

[Exemple]

Max

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

Sous les contraintes

$$-x_1 - x_2 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 7$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

On la contrainte avec suppérieure ou égale à, on ajoute une variable artificielle $a_1 \geq 0$.

Max

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Ma_1$$

Sous les contraintes

$$a_1 = 7 + x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

$$x_5 = 7 - x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_6 = 4 - x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

1.10 Dualité d'un programme linéaire

Définition Un programme linéaire de maximisation, a un programme linéaire dual dans lequel l'objectif est de minimiser et dont la valeur optimale égale à celle du programme origine (primal).

Primal maximiser

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sous les contraintes de positivités

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ pour \ i = 1, ..., m$$

$$x_j \geq 0 \ pour \ j = 1, ..., n$$

En générale, pour déterminer le dual de P.L. donné sous forme quelconque, on commence par le ramener à la forme cnonique ou standard.
Dual minimiser

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Sous les contraintes de positivités

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ pour \ j = 1, ..., n$$

$y_i \geq 0 \ pour \ i = 1, ..., m$

Lemme 3: Dualité faible Pour toute solution réalisable $\bar{x}$ du primale et toute solution réalisable $\bar{y}$ du dual, alors

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

Corollaire Pour toute solution réalisable $\bar{x}$ du primale et toute solution réalisable $\bar{y}$ du dual, alors is

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

Alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont solutions *optimales* pour les programmes linéaires primal et dual respectivement.

Solution optimale du dual Supposons que la dernière forme standard du primal par simplexe est comme suit:

$$z = v' + \sum_{j \in N} c'_j x_j$$

$$x_i = b'_i - \sum_{j \in N} a'_{ij} x_j \ i \in B$$

alors, une solution optimale du duale est

$$\bar{y}_i = \Big\{ -c'_{n+i} \ si \ n+i \in N, \ sinon \ 0$$

[Primal] Soit le primal d'un PL

$$Max \ Z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3$$

$$x_1 \leq 1000$$

$$x_2 \leq 500$$

$$x_3 \leq 1500$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Le primal contient 4 contraintes, donc, on utilise 4 variables y_i. [dual] Le dual du primal est

$$Min \ Z' = 1000y_1 + 500y_2 + 15000y_3 + 6750y_4$$

$$y_1 + 3y_4 \geq 4$$

$$y_2 + 6y_4 \geq 12$$

$$y_3 + 2y_4 \geq 3$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

1.11 Interpretation économique de la dualité

L'objectif est de minimiser le prix à payer pour racheter toutes les ressources à condition que le prix unitaire à une activité $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ est suppérieur au profit c_j.

1.12 Programme linéaire entier

Dans un programme linéaire dont les variables $x_i \in N$, alors le programme est dit entier.