Θεωρία Γραφημάτων

ΣΗΜΜΥ, 8ο εξάμηνο, Ροή Μ — Παπασκαρλάτος Αλέξανδρος

Έτος 2017-2018 — 03111097, εξάμηνο: 10+

1η σειρά ασκήσεων — 30-3-2018

1.1

Μια ακολουθία s είναι γραφική ανν η ανηγμένη s' είναι γραφική.
Παρακάτω για $s=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ θα υποθέτουμε πως υπάρχει γράφημα G με $|V(G)|=n$ και κορυφές $v_1, \dots, v_n$.
Και αν είναι εφικτό $\forall v_i \in V(G): d_G(v_i)=d_i,\ 1\le i\le n$

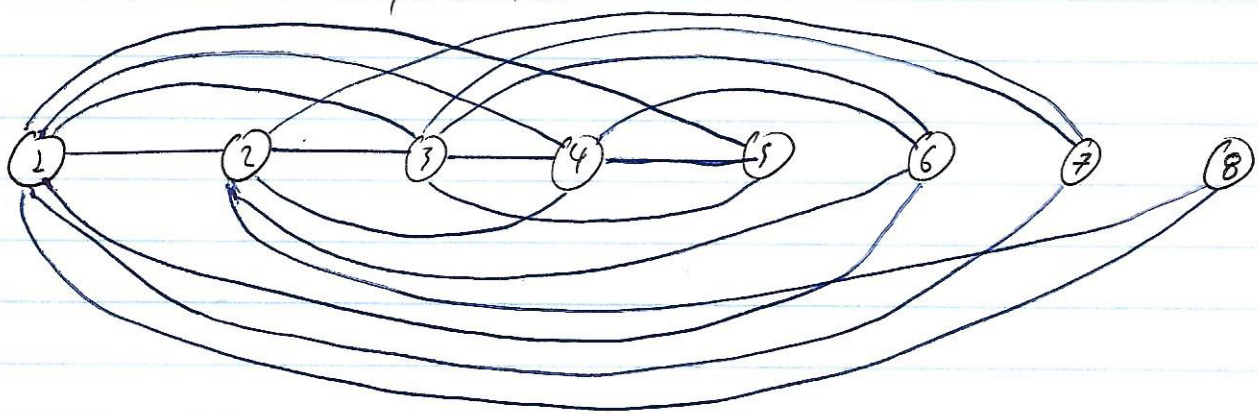
i. $s=(4; 4, 3, 2, 1) \xrightarrow{s'} (3, 2, 1, 0)$.
Δεν είναι γραφική. Στην s', η αντίστοιχη κορυφή v_1' με $d_1'=3$ δεν μπορεί να συνδεθεί με 3 κορυφές.

ii. $s=(4, 3, 2, 1)$
Δεν είναι γραφική. Η αντίστοιχη v_1 δεν μπορεί να συνδεθεί με 4 κορυφές

iii. $s=(7,7,6,5,4,4,3,2) \xrightarrow{s'} (6,5,4,3,3,2,1) \xrightarrow{s''}$

$\xrightarrow{s''} (4,3,2,2,1,0) \xrightarrow{s'''} (2,1,1,0,0) \rightarrow \dots$

Είναι γραφική ακολουθία. Ένα αντίστοιχο γράφημα G είναι το παρακάτω



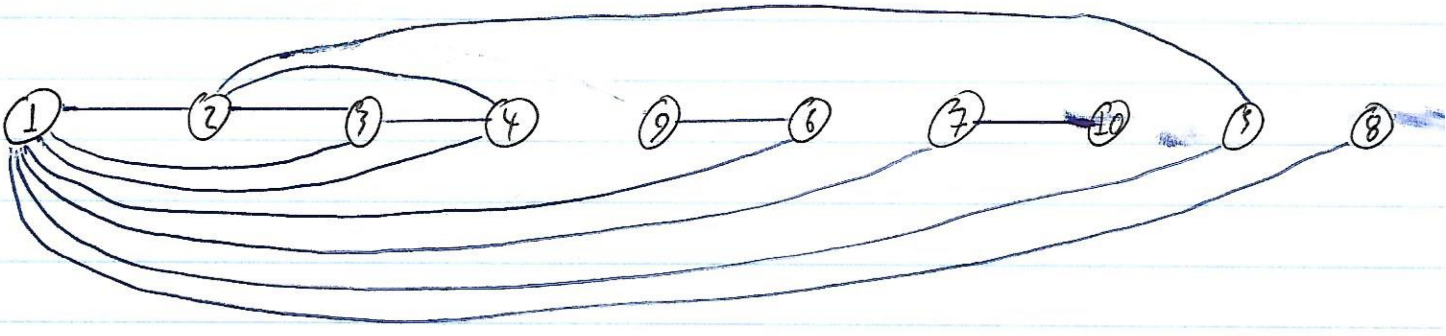
iv. $s=(7,6,6,5,4,3,2,1) \xrightarrow{s'} (5,5,4,3,2,1,0) \xrightarrow{s''} (4,3,2,1,0,0)$

Δεν είναι γραφική. Στην s'', η αντίστοιχη v_1'' δεν μπορεί να συνδεθεί με $d_1''=4$ άλλες κορυφές.

v. $s=(7,4,3,3,2,2,2,1,1,1) \xrightarrow{s'} (3,2,2,1,1,1,0,1,1) \rightarrow$

$\xrightarrow{sort} (3,2,2,1,1,1,1,1,0) \xrightarrow{s''} (1,1,0,1,1,1,1,0) \xrightarrow{sort} (1,1,1,1,1,1,0,0)$

Είναι γραφική. Ένα αντίστοιχο γράφημα είναι το κάτωθι.



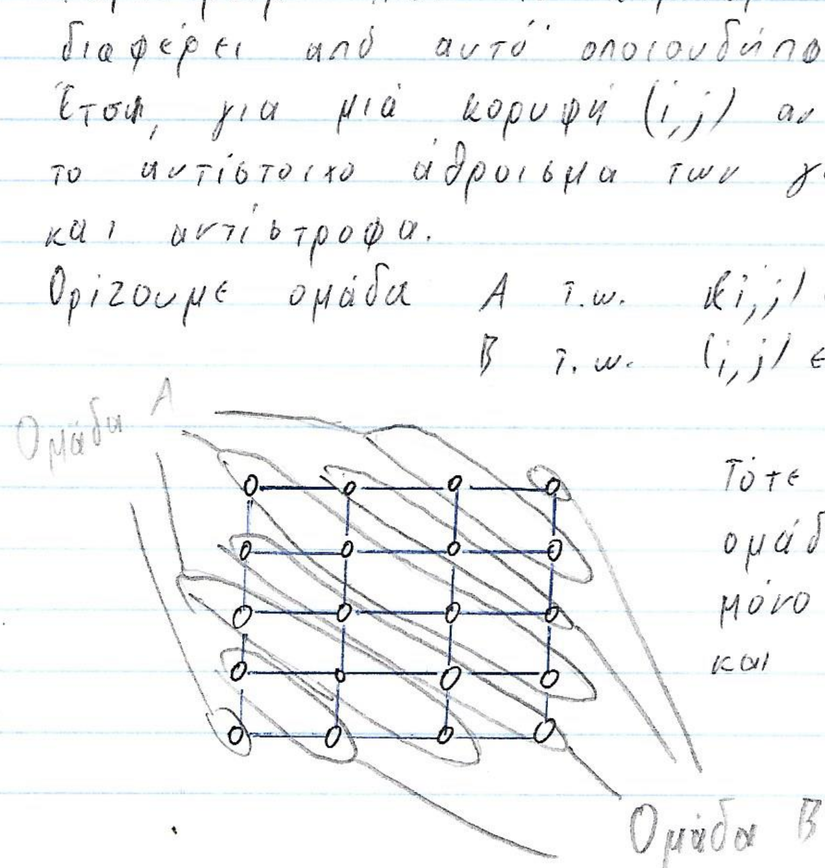
vi. $s = (5, 5, 3, 2, 1, x)$, $\quad 0 \leq x \leq 5$

Η s δεν είναι γραφική για καμία τιμή του x. Είναι $d_1 = d_2 = 5$ και $d_5 = 1$. Οι αντίστοιχες κορυφές v_1, v_2 θα πρέπει να συνδέονται η κάθεμια με όλες τις υπόλοιπες κορυφές, οπότε η v_5 θα έχει τουλάχιστον δύο ακμές, δηλαδή $d_G(v_5) \neq d_5$.

1.2

i. Έστω πλέγμα $R_{p,q}$, $p, q \geq 1$
Δίνουμε στην κάθε κορυφή συντεταγμένες (i, j), όπου i ο αριθμός της σειράς και j ο αριθμός της στήλης με $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$

a. Κάθε κορυφή (i, j) συνδέεται με τις $(i \pm 1, j)$ και $(i, j \pm 1)$. Παρατηρούμε πως το άθροισμα των συντεταγμένων μιας κορυφής $i+j$ διαφέρει από αυτό οποιουδήποτε γείτονά του κατά 1. Έτσι, για μιά κορυφή (i, j) αν το $i+j$ είναι άρτιο, τότε το αντίστοιχο άθροισμα των γειτόνων είναι περιττό και αντίστροφα.
Ορίζουμε ομάδα A τ.ω. $(i, j) \in A : i+j = 2k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$
B τ.ω. $(i, j) \in B : i+j = 2k+1$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$



Τότε σίγουρα, κορυφές της ομάδας A συνδέονται άμεσα μόνο με κορυφές της ομάδας B και όχι μεταξύ τους.

β. Για $p=1$ ή $q=1$, το $R_{p,q}$ δεν περιέχει κύκλους.

Για $p\geq 2$ και $q\geq 2$, ελάχιστος κύκλος είναι το C_4. Εφόσον το R είναι διμερές, ο ζητούμενος κύκλος είναι άρτιος και ο ελάχιστος άρτιος κύκλος είναι ο C_4. Σχηματίζεται αν από το R διαγράψουμε όλες τις κορυφές, εκτός από τις $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,1)$.

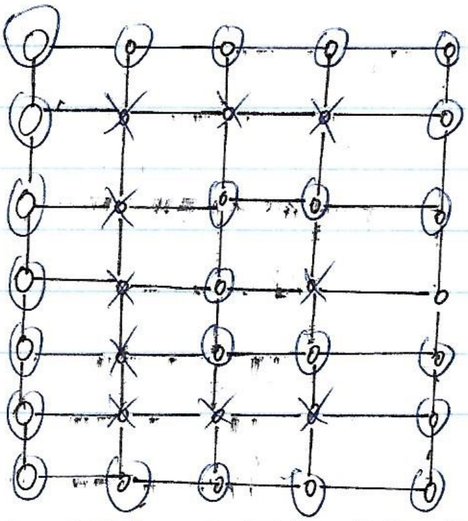
Για να προκύπτει κύκλος C_k ως επαγόμενο υπογράφημα, πρέπει στο τελικό υπογράφημα να υπάρχουν ακριβώς δύο γείτονες σε κάθε κορυφή (i,j) (και οι υπόλοιποι προφανώς να διαγραφούν).

Για $p=2$ ή $q=2$, μέγιστος κύκλος είναι ο C_4

Για $p,q>2$, ο κύκλος πρέπει να κάνει μια "φιδίσια" κίνηση ώστε να περνάει από όσες δυνατές περισσότερες κορυφές. Να μην παραβιάζει τους παραπάνω περιορισμούς πρέπει κάθε "αναστροφή" του "φιδιού" να περνάει από τουλάχιστον δύο ακμές κάθετα και χρειάζονται δύο αναστροφές για να επανέλθει στην αρχική του κατεύθυνση. (Φαίνεται καλύτερα στο κάτωθι σχήμα). Τότε, ο μέγιστος ζητούμενος κύκλος έχει κορυφές $k = Max\{2(p+q+(p-3)[(q-3)div 4],\ 2(p+q+(q-3)[(p-3)div 4]\}-4$

$$\boxed{k=2(p+q-2+Max\{(p-3)[(q-3)div 4],\ (q-3)[(p-3)div 4]\})}$$

$R_{7,5}$



Εδώ πχ έχουμε τις περιμετρικές κορυφές (μετρώντας και την $(4,3)$ για ευκολία στους υπολογισμούς) $2p+2q-4$, (-4 γιατί μετράμε τις γωνιακές δύο φορές), $2(q-3)$ για την ενδιάμεση αριστερή και μετά δεξιά κίνηση (-3 για να μη μετρήσουμε πάλι τα άκρα καθώς και την διαγραμμένη κορυφή ανάμεσα στην πρώτη στήλη και το φίδι. Αυτό

ii. Έστω γραφήματα G, H.

α. Το γράφημα $G*H$ είναι διμερές ανν $|E(G)|=|E(H)|=0$

Απόδειξη

$(\Leftarrow)$: Είναι $|E(G)|=|E(H)|=0$, δηλαδή τα G, H δεν έχουν ακμές. Στο $G*H$ κάθε κορυφή του G θα συνδέεται με κάθε κορυφή του H, αλλά με καμία άλλη του G. Έτσι, το $G*H$ είναι διμερές με ομάδες A, B, όπου $A \equiv G$ και $B \equiv H$. Μάλιστα, το $G*H$ είναι πλήρες διμερές καθώς κάθε κορυφή του A συνδέεται με κάθε κορυφή του B.

$(\Rightarrow)$: Έστω $|E(G)|>0$ ή $|E(H)|>0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε δύο κορυφές $v_1, v_2 \in V(G)$ με $(v_1, v_2) \in E(G)$ και μια κορυφή $u \in V(H)$.
Στο $G*H$ θα υπάρχουν οι ακμές $(v_1, u), (v_2, u), (v_1, v_2) \in E(G*H)$, άρα θα σχηματίζεται τρίγωνο. Όμως $G*H$ διμερές οπότε δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.
Άτοπο, άρα $|E(G)|=|E(H)|=0$

β. Το γράφημα $G \times H$ είναι διμερές ανν τα G, H είναι διμερή

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$: Είναι $G \times H$ διμερές. Έστω ότι τουλάχιστον ένα εκ των G, H δεν είναι διμερές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ πως το G δεν είναι διμερές. Τότε το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους $\{v_1, v_2, \ldots v_{2k+1}\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.
Έστω u μια κορυφή του H. Τότε στο $G \times H$ θα υπάρχει ο κύκλος $\{(v_1, u), (v_2, u), \ldots, (v_{2k+1}, u)\}$ που είναι περιττού μήκους. Όμως το $G \times H$ διμερές.
Άτοπο, άρα G, H διμερή.

(⇐): Είναι G, H διμερή. Έστω οι αντίστοιχες ομάδες A_G, B_G και C_H, D_H. Κάθε κορυφή του $G \times H$ θα ανήκει σε ένα εκ των $A_G C_H$, $A_G D_H$, $B_G C_H$, $B_G D_H$.
Στο $G \times H$, δύο κορυφές $(x,y), (z,w)$ συνδέονται ανν
i. $x, z \in V(G)$, $(x,z) \in E(G)$, $y \equiv w \in V(H)$ ή
ii. $x \equiv z \in V(G)$, $y, w \in V(H)$, $(y,w) \in E(H)$.
Συνεπώς, επειδή οι κορυφές κάθε ομάδας δε συνδέονται άμεσα μεταξύ τους, στο $G \times H$, κορυφές από το σύνολο $A_G C_H$ συνδέονται μόνο με κορυφές των $A_G D_H$ και $B_G C_H$. Αντίστοιχα για τα υπόλοιπα σύνολα.
Έτσι, σχηματίζονται οι ομάδες $\{A_G C_H, B_G D_H\}$ και $\{A_G D_H, B_G C_H\}$.

1.3. Γράφημα G, μη κανονικό με $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m = \frac{rn}{2}$ με $r \in \mathbb{Z}$ και $1 \leq r \leq n-2$
Νδο $\Delta(G) - \delta(G) \geq 2$

Είναι $d(G) = \dfrac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{|V(G)|} = \dfrac{2|E(G)|}{|V(G)|} = \dfrac{2m}{n} = \dfrac{2\frac{rn}{2}}{n} = r$

Επίσης, $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$

Έστω $d(G) = \delta(G) \Leftrightarrow \dfrac{\sum d_G(v)}{n} = \delta(G) \Leftrightarrow d_G(v_1) + d_G(v_2) + \ldots + d_G(v_n) = n\delta(G)$

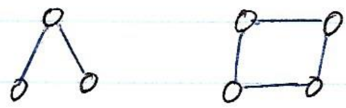
$\xrightarrow{\forall v \in V(G): d_G(v) \geq \delta(G)} d_G(v_1) = d_G(v_2) = \ldots = d_G(v_n) = \delta(G)$

Όμως, τότε το G είναι κανονικό με βαθμό $\delta(G)$.
Άτοπο, άρα $d(G) \neq \delta(G)$.
Όμοια, προκύπτει $\Delta(G) \neq d(G)$
Συνεπώς, $\delta(G) < d(G) < \Delta(G) \Leftrightarrow \delta(G) < r < \Delta(G) \xLeftrightarrow{\text{όλοι ακέραιοι}}$
$\delta(G) + 1 \leq r \leq \Delta(G) - 1 \Rightarrow \Delta(G) - \delta(G) \geq 2$

14. Γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και $m > \frac{n^2}{4}$ ακμές. Συνεκτικό.
Νδο το G περιέχει τρίγωνο.

Θα αποδείξω με επαγωγή με βήμα 2 πως ένα G με $n \geq 3$ κορυφές έχει μέγιστο αριθμό ακμών $m \leq \frac{n^2}{4}$ προκειμένου να μην περιέχει τρίγωνο

Βάση: Εξετάζοντας εξαντλητικά τα γραφήματα χωρίς τρίγωνα και κορυφές $n=3$ και $n=4$, παρατηρούμε πως ο μέγιστος αποδεκτός αριθμός ακμών είναι αντίστοιχα $m=2$ και $m=4$, όπου πράγματι $2 \leq \frac{3^2}{4}$ και $4 \leq \frac{4^2}{4}$.

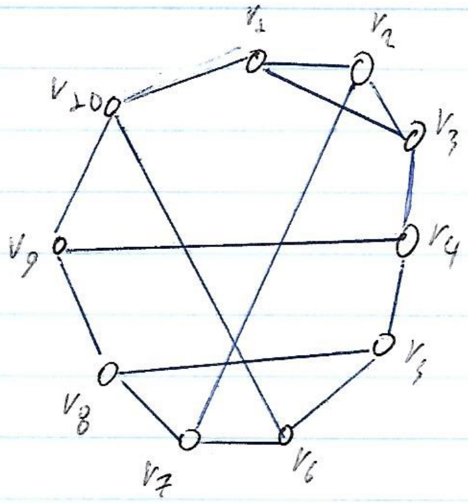


Ε.Υ. Έστω ότι κάθε γράφημα χωρίς τρίγωνα με n κορυφές έχει το πολύ $\frac{n^2}{4}$ ακμές

Ε.Β. Έστω γράφημα H χωρίς τρίγωνα με $n+2$ κορυφές. Από εκφώνηση εξετάζουμε συνεκτικά γραφήματα. Επιλέγουμε δύο κορυφές $\{v, u \in V(H)$ τ.ω. $(v,u) \in E(H)$, δηλαδή συνδέονται με ακμή. Δημιουργώ επαγόμενο γράφημα G διαγράφοντας τις κορυφές v, u, οπότε $V(G)=n$. Από Ε.Υ., το G έχει το πολύ $\frac{n^2}{4}$ ακμές.

Έστω στο H το $\{u,v\}$ έχει τουλάχιστον $n+1$ ακμές προς το G. Όμως, επειδή το G έχει n κορυφές, από αρχή του περιστερώνα, θα υπάρχει κορυφή $w \in G$ τ.ω. $(u,w), (v,w) \in E(H)$ και επειδή $(u,v) \in E(H)$, σχηματίζεται τρίγωνο. Άτοπο, άρα υπάρχουν το πολύ n ακμές ανάμεσα στα $\{u,v\}$ κ' G.
Οπότε, το H έχει $|E(H)| \leq |E(G)| + |E(\{v,u\})| + n \Leftrightarrow m \leq \frac{n^2}{4} + 1 + n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m \leq \frac{(n+2)^2}{4}$

1.5.



$k=10$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
$k=9$: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
$k=8$: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10
$k=7$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10
$k=6$: 1, 2, 3, 4, 9, 10
$k=5$: 1, 3, 4, 9, 10
$k=4$: 5, 6, 7, 8
$k=3$: 1, 2, 3

Έστω έχουμε κυβικό γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \dots, v_{10}\}$, το οποίο έχει τουλάχιστον έναν k-κύκλο για κάθε k με $3 \le k \le 10$.

Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, πως ο C_{10} σχηματίζεται ως εξής: $v_1 \circ v_2 \circ v_3 \circ v_4 \circ v_5 \circ v_6 \circ v_7 \circ v_8 \circ v_9 \circ v_{10}$. Μετρώντας μονάχα αυτές τις αντίστοιχες ακμές, έχουμε 10 ακμές. Εφόσον το γράφημα είναι 3-κανονικό με $|V(G)| = 10$, θα έχει συνολικά $|E(G)| = \frac{\Sigma d_G(v)}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

Κάθε νέα ακμή που θα προστίθεται ως χορδή στον C_{10}, θα σχηματίζει δύο νέους κύκλους.
Αν συνδεθούν οι v_i και v_j, θα σχηματιστούν οι κύκλοι $v_i \circ v_{i+1} \circ \dots \circ v_{j-1} \circ v_j$ και $v_i \circ v_{i-1} \circ \dots \circ v_{j+1} \circ v_j$

Επειδή, θα προστεθούν 5 ακμές για να φτάσει το γράφημα τις 15, θα σχηματιστούν τουλάχιστον $5 \cdot 2 = 10$ νέοι κύκλοι. Επειδή ο κάθε κύκλος έχει μέγεθος k, $3 \le k \le 10$, από αρχή του περιστερώνα, τουλάχιστον δύο από τους κύκλους θα έχουν το ίδιο μέγεθος.
(Στην πραγματικότητα παραπάνω, αλλά δύο αρκούν για να απαντήσουμε στην ερώτηση)

1.6

i Στα ισόμορφα γραφήματα κάθε κορυφή ν του ενός γραφήματος αντιστοιχεί σε μια ισοδύναμη κορυφή $f(v)$ του άλλου γραφήματος.

Στα αυτοσυμπληρωματικά κάθε κορυφή $v \in V(G)$ αντιστοιχεί σε μια άλλη κορυφή $u \in V(G)$ η οποία είναι ισοδύναμη στο $\bar{G}$. Προφανώς αν $v, u \in V(G)$, τότε $v, u \in V(\bar{G})$.

Στην άσκηση που εξετάζουμε, τα G_1, G_2 είναι αυτοσυμπληρωματικά. Στο G ακμές ανάμεσα στις κορυφές του G_1 θα συμπληρωθούν όπως και πριν. Όμοια για το υπογράφημα G_2. Συνεπώς, για να δείξουμε ότι το G είναι αυτοσυμπληρωματικό, αρκεί να εξετάσουμε τις ακμές από το G_1 στο G_2

Στο συμπλήρωμα $\overset{\text{γενικά}}{\text{ισχύει}}$ $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n-1$, όπου $n = |V(G)|$.

Στο G_2 έστω κορυφή $v \in V(G_2)$ με $d_{G_2}(v) < \frac{n}{2}$, τότε στο G αυτή θα συνδεθεί με όλες τις κορυφές του G_1. *
Στο $\bar{G_2}$ η $f(v) \equiv u \in V(\bar{G})$ θα έχει $d_{\bar{G_2}}(u) < \frac{n}{2}$ ως ισοδύναμη της $v \in V(G)$, άρα $(n-1) - d_{\bar{G_2}}(u) > (n-1) - \frac{n}{2} \Rightarrow d_{G_2}(u) > \frac{n}{2} - 1$

$\xrightarrow[\text{όλοι ακέραιοι}]{n \text{ άρτιο}} d_{G_2}(u) \geq \frac{n}{2}$, οπότε η $f(v) \equiv u$ δε θα

συνδεθεί στο G με κορυφές του G_1. Συνεπώς, θα συνδεθεί στο $\bar{G}$ με όλες τις κορυφές του $\bar{G_1}$
Συνεπώς για $v, u \in V(G_2)$ με $u \equiv f(v) \in V(\bar{G_2})$ η u θα συνεχίσει να είναι ισοδύναμη της v για $v, u \in V(G)$ ~~διαλαδή~~ $u \equiv f(v) \in V(\bar{G})$

* Στο $\bar{G}$ η $v \in V(\bar{G})$ δε θα συνδέεται με καμία κορυφή του $\bar{G_1}$

Όμοιο συμπέρασμα για κορυφή v με $d_{G_2}(v) \geq \frac{n}{2}$.

Τελικά, το G είναι αυτοσυμπληρωματικό.

ii. Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχει κανονικό αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 5^n κορυφές, $\forall n \geq 1$

Βάση: Γνωρίζουμε πως το C_5 είναι αυτοσυμπληρωματικό και είναι 2-κανονικό με $5^1 = 5$ κορυφές

Ε.Υ.: Έστω υπάρχει γράφημα αυτοσυμπληρωματικό και κανονικό με 5^n κορυφές.

Ε.Β.: Θα κατασκευάσουμε γράφημα αυτοσυμπληρωματικό και κανονικό με 5^{n+1} κορυφές.
Αρχικά κατασκευάζουμε γράφημα με 5^n κορυφές και ίδιες ιδιότητες, έστω G_1.
Έπειτα, χρησιμοποιώντας το P_4 ως G_2 επιτελούμε τη διαδικασία που περιγράψαμε στο (i) ερώτημα.
Παράγουμε γράφημα G με $5^n + 4$ κορυφές.
Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία 5^n φορές χρησιμοποιώντας ως G_1 το γράφημα που προέκυψε από το προηγούμενο loop και ως G_2 το P_4.

Έτσι, καταλήγουμε σε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $5^n + 4 \cdot 5^n = 5 \cdot 5^n = 5^{n+1}$ κορυφές

iii. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή (με βήμα 4)

Βάση: Για το $n \equiv 0 \pmod 4$ παίρνουμε ως βάση το P_4
Για το $n \equiv 1 \pmod 4$ παίρνουμε ως βάση το C_5

Ε.Υ. Έστω υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα μεγέθους n

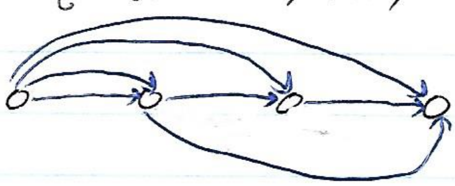
Ε.Β. Κατασκευάζω αυτοσυμπληρωματικό γράφημα μεγέθους $n+4$ ως εξής.
Αρχικά, κατασκευάζω γράφημα G_1 μεγέθους n (μπορώ από Ε.Υ.).
Έπειτα, εφαρμόζω τη διαδικασία του ερωτήματος (i) χρησιμοποιώντας το προαναφερθέν G_1 και το P_4 ως G_2. Το νέο γράφημα G έχει μέγεθος $n+4$ και είναι αυτοσυμπληρωματικό

Λοιπόν, αποδείξαμε το ζητούμενο για $n = 4k$ ή $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή για κάθε $n \equiv 0 \pmod 4$ ή $n \equiv 1 \pmod 4$

1.7

i. Θα το αποδείξουμε κατασκευαστικά. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(G)$. Θα σχηματίσουμε τις ακμές ως εξής $(v_1, v_2), (v_1, v_3), \dots (v_1, v_n), (v_2, v_3), \dots (v_2, v_n), \dots$
$\dots (v_{n-2}, v_{n-1}), (v_{n-2}, v_n) (v_{n-1}, v_n) \in E(G)$
Τότε το $d_G^+(v_1) = n-1$, $d_G^+(v_2) = n-2, \dots, d_G^+(v_n) = 0$

Π.χ για $n = 4$



Ετσ τουρνουα, επειδή κάθε κόμβος έχει ακριβώς μία ακμή με κάθε άλλη κορυφή, είτε προς τα μέσα, είτε προς τα έξω ισχύει $\forall v \in V(G): d_G^-(v) + d_G^+(v) = n-1$
Οπότε $d_G^-(v_1) = 0$, $d_G^-(v_2) = 1, \dots, d_G^-(v_n) = n-1$

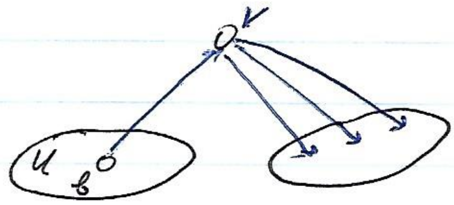
ii. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή.

Βάση: $n=1$ ισχύει τετριμμένα

Ε.Υ. Έστω ισχύει για κάθε τουρνουά G με $|V(G)| \leq n$

Ε.Β. Έστω έχουμε τουρνουά H με $|V(H)| = n+1$.
Διαλέγουμε τυχαίο κόμβο $v \in V(H)$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: α) $d_G^+(v) = n$, δηλαδή η v έχει εξωτερική ακμή προς όλες τις άλλες κορυφές. Τότε η v είναι βασιλιάς.
β) Υπάρχουν $u_1, u_2, \dots u_k \in V(H)$ με $(u_1, v), (u_2, v), \dots (u_k, v) \in E(G)$ με $1 \leq k \leq n$.
Δημιουργώ επαγόμενο υπογράφημα U διαγράφοντας την κορυφή v και όλες τις κορυφές στις οποίες πηγαίνει η v.

Είναι $|V(U)|<|V(H)| \Leftrightarrow |V(U)|<n+1 \Leftrightarrow |V(U)|\le n$
Από επαγωγική υπόθεση το U έχει $\beta\in V(U)$ βασιλιά. Τότε στο H, η β είναι βασιλιάς, καθώς πηγαίνει σε οποιοδήποτε $u\in V(U)$ με το πολύ δύο βήματα, στο v με ένα βήμα και στις υπόλοιπες κορυφές με δύο βήματα μέσω του v (καθώς το v πηγαίνει σε αυτές με ένα βήμα).

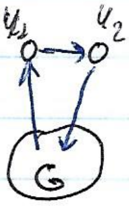


iii. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή με βήμα 2.

Βάση: Θα κατασκευάσουμε τέτοια τουρνουά με $n=5$ και $n=6$ κορυφές. Είναι τα κάτωθι.

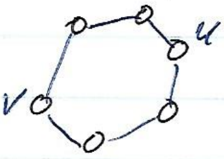
Ε.Υ: Έστω υπάρχει τέτοιο τουρνουά με n κορυφές

Ε.Β: Θα κατασκευάσω τέτοιο τουρνουά με $n+2$ κορυφές. Αρχικά κατασκευάζω τέτοιο τουρνουά G με n κορυφές. Έπειτα, προσθέτω κορυφές u_1, u_2 με τις εξής ακμές. $(u_1,u_2)\in E(H)$ και $\forall v\in V(G)$: $(u_2,v),(v,u_1)\in E(H)$. Έτσι κάθε $v\in G$ πηγαίνει σε κάθε άλλη κορυφή του G σε το πολύ δύο βήματα από κατασκευή και Ε.Υ και η u_2 πηγαίνει σε κάθε $v\in V(G)$ σε ένα βήμα, η u_1 σε δύο βήματα μέσω της u_2 και κάθε $v\in V(G)$ πηγαίνει στη u_1 σε ένα βήμα και στη u_2 σε δύο μέσω της u_1. Τέλος, η u_1 πάει στη u_2 σε ένα βήμα και η u_2 στη u_1 σε δύο βήματα μέσω οποιασδήποτε $v\in V(G)$. Οπότε, όλες οι κορυφές είναι βασιλιάδες.



1.8. $a,b \in \mathbb{N}$, $a \le b \le 2a$

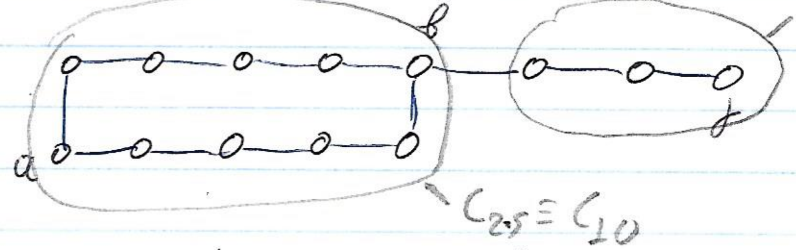
Γενικά, σε κάθε άρτιο κύκλο C_{2k}, είναι $rad(C) = diam(C) = k$
Αυτό συμβαίνει γιατί ξεκινώντας από οποιαδήποτε κορυφή $v \in V(C_{2k})$, η αντιδιαμετρική της κορυφή απέχει k. π.χ. C_6, $rad(C) = diam(C) = 3$



Αντίστοιχα, σε ένα μονοπάτι P_ℓ είναι $diam(P) = \ell - 1$ (απόσταση των άκρων), $rad(P) = \ell \text{ div } 2$ (απόσταση των άκρων από το μέσο).

Χρησιμοποιώντας αυτές τις παρατηρήσεις, μπορούμε να κατασκευάσουμε το ζητούμενο γράφημα G ως εξής (με δοσμένα a, b):
i. Κατασκευάζουμε κύκλο μεγέθους $2a$, C_{2a}
ii. Κατασκευάζουμε μονοπάτι μεγέθους $b-a$, P_{b-a}
iii. Συνδέουμε το ένα άκρο του μονοπατιού με μια οποιαδήποτε κορυφή του κύκλου (έστω v)

Πχ. για $a=5$, $b=8$



Λοιπόν, ο κόμβος v του κύκλου που συνδέεται με το μονοπάτι θα είναι ένα κέντρο του G και θα απέχει a από το αντιδιαμετρικό του σημείο στον κύκλο και $b-a$ από το ακραίο του μονοπατιού (σημειώνουμε πως $b \le 2a \Leftrightarrow b - a \le a$). Από την άλλη το ακραίο του μονοπατιού χρειάζεται $b-a$ για να φτάσει τον κύκλο και επιπλέον a για να φτάσει το αντιδιαμετρικό του v. Τελικά, $rad(G) = a$, $diam(G) = b - a + a = b$

1.9 Απόδειξη

(i⇒ii): Έστω κορυφή $a_0 \in V(G)$ που έχει ακμές με τις $b_1, b_2, \dots, b_l \in V(G)$ και δεν έχει ακμές με τις $a_1, a_2, \dots, a_m \in V(G)$

Τότε $\forall i, j$: $(a_0, a_i) \notin E(G)$ και $(a_0, a_j) \notin E(G)$, άρα και $(a_i, a_j) \notin E(G)$, δηλαδή τα a_i, a_j δε συνδέονται άμεσα για όλα τα i, j
Οπότε, αποτελούν μια ομάδα k-μερούς γραφήματος.

Έστω $(a_i, b_j) \notin E(G)$ για κάποιο i, j. Όμως, τότε $(a_0, a_i) \notin E(G)$ και $(a_i, b_j) \notin E(G)$, άρα $(a_0, b_j) \notin E(G)$. Άτοπο, από υπόθεση. Άρα $\forall i, j$ $(a_i, b_j) \in E(G)$, άρα το k-μερές γράφημα είναι πλήρες.
Σημειώνουμε πως η τυχαία κορυφή a_0 έχει τουλάχιστον μια ακμή αφού το γράφημα είναι συνεκτικό

(ii⇒i): Έστω 3 τυχαίες κορυφές $u, v, w \in V(G)$.
Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις.

α) Έστω ομάδα A και $u, v, w \in A$, τότε $(u,v) \notin E(G)$, $(v,w) \notin E(G)$, $(w,u) \notin E(G)$. Ισχύει η (i)
β) Έστω ομάδες A, B και $u, v \in A$, $w \in B$, τότε $(u,v) \notin E(G)$, $(v,w) \in E(G)$, $(u,w) \in E(G)$. Ισχύει η (i)
γ) Έστω ομάδες A, B, Γ και $u \in A$, $v \in B$, $w \in Γ$, τότε $(u,v), (u,w), (w,v) \in E(G)$. Ισχύει η (i)

Βλέπουμε πως σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις-σχέσεις ανάμεσα σε 3 κορυφές ισχύει η (i), άρα αποδείχθηκε.

1.10. Απλό συνεκτικό G με n κορυφές και $k(G) \geq 1$.
Νδο $n \geq k(G)(diam(G)-1)+2$

Το G είναι k-συνεκτικό, οπότε για κάθε ζεύγος $u, v \in V(G)$ υπάρχουν k διακεκριμένα μονοπάτια (u,v)

Επιλέγω κορυφές $u, v \in V(G)$ τ.ω. $dist(u,v) = diam(G)$
Τότε κάθε διακεκριμένο (u,v) μονοπάτι l_i θα έχει μέγεθος $l_i \geq diam(G)+1$ δηλαδή θα περιέχει $l_i - 2 \geq diam(G)-1$ ενδιάμεσες κορυφές (δε μετράμε τις u, v αυτές καθαυτές).

Οπότε συνολικά για τις κορυφές του G, ισχύει ότι $n \geq 2 + (l_1 - 2) + (l_2 - 2) + \dots + (l_k - 2) \Rightarrow$

$$n \geq k(G)(diam(G)-1)+2$$