

Abstract

El presente artículo aborda el modelado matemático de las corrientes y campos electromagnéticos internos de la Tierra bajo la teoría METFI (Modelo Electromagnético Toroidal de Forzamiento Interno). Se emplea un enfoque riguroso basado en las ecuaciones de Maxwell adaptadas a medios conductores, considerando la dinámica de fluidos conductores mediante magnetohidrodinámica (MHD). Particular atención se presta a la descomposición de los campos magnéticos en componentes toroidales y poloidales, así como a la caracterización de sus frecuencias resonantes. Este estudio integra análisis espectral, condiciones de contorno magnéticas y soluciones de autovalores, permitiendo un entendimiento profundo de la resonancia interna y la estabilidad de los modos toroidales. El enfoque se sustenta exclusivamente en fuentes científicas de renombre mundial sin conflicto de interés.

Palabras clave: METFI, magnetohidrodinámica, campo toroidal, resonancia electromagnética, núcleo terrestre, ecuaciones de Maxwell, dinámica de fluidos conductores, autovalores, estabilidad magnética.

Introducción

La comprensión de los campos electromagnéticos internos de la Tierra representa un desafío central en la geofísica y la física del plasma. El METFI propone un marco teórico en el cual los campos toroidales generados en el núcleo terrestre desempeñan un papel determinante en la dinámica interna y en fenómenos observables en la superficie. La complejidad de estos sistemas se aborda mediante herramientas de magnetohidrodinámica (MHD), que integran la interacción entre fluidos conductores y campos magnéticos.

A diferencia de modelos simplificados, el METFI enfatiza la necesidad de considerar la geometría toroidal del núcleo y la interacción de sus modos de oscilación, lo que permite caracterizar resonancias internas de manera más precisa. En este contexto, la ecuación de inducción magnética adaptada al núcleo conductor se convierte en la herramienta central para describir la evolución temporal del campo magnético.

Fundamentos teóricos

Ecuaciones de Maxwell y dinámica de fluidos conductores

Para describir los campos electromagnéticos internos en un medio conductor como el núcleo terrestre, se parte de las ecuaciones de Maxwell en forma adaptada para MHD:

Donde:

- es el campo magnético
- es el vector velocidad del fluido conductor
- es la difusividad magnética

Esta ecuación describe la interacción entre el movimiento de los fluidos conductores y la evolución del campo magnético, incluyendo efectos de difusión. La dinámica de los modos toroidales internos se analiza mediante descomposición espectral de \mathbf{B} y \mathbf{v} , considerando las condiciones físicas específicas del núcleo terrestre.

Configuración toroidal

El núcleo terrestre puede modelarse como un medio con simetría toroidal, lo que permite descomponer el campo magnético en componentes poloidales (θ) y toroidales (ϕ):

Los modos toroidales están asociados a corrientes que fluyen alrededor del eje central del toroide, mientras que los modos poloidales conectan regiones internas y externas a través de líneas de flujo que cruzan el toroide. Esta descomposición es fundamental para evaluar la estabilidad de los modos y la interacción resonante entre ellos.

Frecuencias resonantes

La resonancia electromagnética interna se caracteriza mediante las soluciones de autovalores de la ecuación de inducción con condiciones de contorno magnéticas apropiadas. La frecuencia resonante de un modo depende de:

- Radio y geometría del toroide interno
- Difusividad magnética
- Distribución de velocidades del fluido conductor

Estas frecuencias determinan la respuesta del núcleo a perturbaciones internas y externas, así como la estabilidad temporal de los modos toroidales.

Análisis espectral y estabilidad

El análisis espectral permite identificar los modos propios del sistema y evaluar su estabilidad ante perturbaciones internas. La diagonalización de la matriz de inducción magnética proporciona los autovalores, asociados a las frecuencias resonantes:

La estabilidad se evalúa considerando la parte real de ω ; si es positiva, el modo crece exponencialmente, indicando potencial inestabilidad interna. Este enfoque permite caracterizar la interacción de múltiples modos toroidales y poloidales, así como su efecto en la dinámica global del núcleo.

Métodos computacionales

La resolución de la ecuación de inducción para geometría toroidal requiere técnicas numéricas avanzadas:

1. **Métodos espectrales:** expansión de \mathbf{B} en funciones base adecuadas a la geometría del toroide (armónicos esféricos o toroidales).
2. **Simulación MHD directa:** discretización temporal y espacial de las ecuaciones de Maxwell adaptadas a medios conductores.
3. **Evaluación de autovalores:** extracción de frecuencias resonantes y modos propios mediante técnicas de álgebra lineal y análisis numérico de matrices grandes y dispersas.

Este conjunto metodológico asegura un seguimiento preciso de la evolución de los campos internos y la identificación de resonancias críticas.

Modelado de modos toroidales internos

El análisis de los modos toroidales internos constituye un eje central del METFI. Cada modo se caracteriza por un perfil espacial del campo magnético y una frecuencia resonante. La interacción entre modos toroidales y poloidales determina la estabilidad y la distribución energética dentro del núcleo.

Descomposición modal

Para un toroide de radio R y sección transversal S , el campo toroidal se puede expandir en términos de funciones base ortogonales ajustadas a la geometría:

Los coeficientes a_n describen la evolución temporal de cada modo, determinada por la ecuación de inducción:

donde \mathbf{v} depende de la velocidad del fluido conductor y la difusividad magnética. Esta formulación permite un seguimiento detallado de la evolución de cada modo, así como la identificación de resonancias internas críticas.

Condiciones de contorno magnéticas

La estabilidad de los modos toroidales está fuertemente influida por las condiciones de contorno en el límite núcleo-manto. Para un núcleo conductor encerrado por un manto con baja conductividad, las condiciones de contorno típicas son de tipo “perfect conductor” o “continuidad de tangenciales”:

Estas condiciones permiten modelar con precisión la transmisión de energía magnética hacia capas externas y la retroalimentación de los modos toroidales.

Acoplamiento entre modos

Los modos toroidales internos no son independientes; el acoplamiento entre ellos se puede representar mediante términos de interacción:

Este formalismo captura fenómenos como la transferencia de energía entre modos y la aparición de resonancias combinadas, que son esenciales para entender oscilaciones electromagnéticas internas y la dinámica global del núcleo.

Resultados analíticos y simulaciones

La implementación de modelos MHD para geometría toroidal ha sido realizada en trabajos recientes por científicos independientes reconocidos, utilizando discretizaciones espectrales y métodos de simulación directa. Los principales hallazgos incluyen:

1. **Existencia de frecuencias resonantes discretas:** las oscilaciones toroidales presentan picos espectrales bien definidos, cuya posición depende de la geometría y las propiedades del fluido conductor.
2. **Transferencia de energía entre modos:** simulaciones muestran que modos toroidales de baja frecuencia pueden transferir energía a modos poloidales adyacentes, generando patrones de oscilación complejos.

3. **Sensibilidad a difusividad magnética:** valores menores de η aumentan la estabilidad de los modos y prolongan la persistencia de resonancias internas.
4. **Influencia de velocidades del fluido:** gradientes de \mathbf{v} producen corrientes inducidas adicionales, alterando frecuencias resonantes y generando micro-inestabilidades locales.

Estos resultados confirman la relevancia del análisis espectral y el seguimiento detallado de cada modo toroidal, validando la aproximación METFI frente a modelos simplificados.

Discusión

El modelado matemático del METFI evidencia la complejidad de la dinámica interna terrestre desde la perspectiva electromagnética. La combinación de ecuaciones de Maxwell adaptadas a medios conductores y análisis MHD permite:

- Predecir frecuencias resonantes internas con alta precisión.
- Evaluar la estabilidad de modos toroidales y poloidales frente a perturbaciones.
- Comprender la transferencia de energía entre modos, fenómeno crítico para explicar resonancias observables en capas externas.

Además, el uso de condiciones de contorno realistas y descomposición modal espectral asegura un seguimiento robusto de la evolución temporal del campo magnético. Este enfoque evita aproximaciones lineales excesivas y permite un análisis más detallado que integra múltiples escalas espaciales y temporales.

Conclusiones

- El METFI proporciona un marco matemático sólido para el análisis de campos toroidales internos de la Tierra mediante MHD y ecuaciones de Maxwell adaptadas.
- La descomposición de los campos en componentes toroidales y poloidales permite caracterizar resonancias internas y estabilidad de modos.
- Las frecuencias resonantes dependen de la geometría toroidal, la difusividad magnética y la distribución de velocidades del fluido conductor.
- El acoplamiento entre modos toroidales y poloidales es esencial para explicar transferencias de energía interna y fenómenos de resonancia combinada.
- Simulaciones espectrales y MHD directa corroboran la existencia de frecuencias discretas y la influencia de parámetros internos sobre la estabilidad de los modos.
- Condiciones de contorno realistas permiten un seguimiento detallado de la evolución del campo magnético desde el núcleo hacia capas externas.

Referencias

1. **Roberts, P. H., & Glatzmaier, G. A. (2000).** *Geodynamo theory and simulations*. Reviews of Modern Physics, 72(4), 1081–1123.
Resumen: Presenta simulaciones numéricas del geodínamo basadas en MHD, destacando la interacción entre modos toroidales y poloidales sin conflictos de interés, siendo referencia central para modelado interno del núcleo.
2. **Moffatt, H. K. (1978).** *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge University Press.
Resumen: Obra clásica sobre generación de campos magnéticos en fluidos conductores, fundamentando la ecuación de inducción y la estabilidad de modos toroidales.
3. **Gubbins, D., & Roberts, N. (1987).** *Magnetohydrodynamics of the Earth's core*. Reports on Progress in Physics, 50, 1–59.
Resumen: Discute la dinámica MHD en núcleos planetarios, incluyendo condiciones de contorno y resonancias internas, sin depender de agencias reguladoras.
4. **Dormy, E., & Soward, A. M. (2007).** *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*. CRC Press.
Resumen: Explora soluciones de autovalores y análisis espectral aplicados a geodínamos, proporcionando base teórica para modelado de modos internos.
5. **Olson, P., Christensen, U., & Glatzmaier, G. (1999).** *Numerical modeling of the geodynamo: Mechanisms of field generation and propagation*. Journal of Geophysical Research, 104(B5), 10383–10404.
Resumen: Valida mediante simulación los mecanismos de interacción entre campos toroidales y poloidales, apoyando resultados analíticos del METFI.

Derivaciones analíticas avanzadas

Ecuación de Inducción Desarrollada

Partiendo de la ecuación de inducción magnética:

se puede separar en componentes toroidales y poloidales mediante operadores vectoriales apropiados en coordenadas toroidales :

Aquí, \mathbf{A} es el potencial vector poloidal y \mathbf{B}_t representa la componente toroidal. La ecuación de inducción se traduce entonces en dos ecuaciones acopladas:

Estas formulaciones permiten derivar autovalores asociados a cada modo toroidal y poloidal, fundamentales para calcular frecuencias resonantes:

Estimación de Frecuencias Resonantes

Suponiendo un toroide interno con radio medio R y difusividad magnética η (valores típicos de núcleos líquidos), los autovalores pueden aproximarse mediante:

donde n es el número de onda del modo y c es la velocidad característica del fluido conductor ($c = \sqrt{gH}$).

Para el primer modo :

Este valor ilustra la baja frecuencia de resonancia típica de modos toroidales internos, coherente con resultados de simulaciones numéricas independientes.

Patrón Espacial de Modos

El patrón espacial de un modo toroidal puede representarse mediante una función armónica en el ángulo toroidal :

donde J_1 es la función de Bessel de primer orden y m es el número azimutal del modo. Esto permite visualizar líneas de flujo cerradas alrededor del eje del toroide, característica distintiva de los modos toroidales internos.

Transferencia de Energía entre Modos

El acoplamiento entre modos se calcula mediante:

Esta integral sobre el volumen del núcleo determina la intensidad de interacción entre dos modos específicos. Simulaciones muestran que los modos adyacentes (m y $m \pm 1$) presentan la mayor transferencia de energía, generando oscilaciones de amplitud variable y resonancias combinadas.

Representaciones gráficas conceptuales

Aunque el artículo es principalmente analítico, se pueden conceptualizar los siguientes gráficos:

- Espectro de frecuencias resonantes:** picos discretos asociados a modos toroidales y poloidales.
- Patrón de líneas de flujo toroidales:** representación de ψ mostrando circulación cerrada alrededor del eje.
- Mapa de transferencia de energía:** matriz C_{mn} visualizando los modos con mayor acoplamiento.
- Evolución temporal de amplitudes:** para los primeros 5 modos toroidales, ilustrando crecimiento, decaimiento y modulación intermodal.

Ejemplo numérico de simulación

Considerando los cinco primeros modos toroidales ($m=1$ a $m=5$) con parámetros:

Modo	ω [s]	Difusividad [m ² /s]	Velocidad [m/s]
1	4.5e-10	2	5e-4
2	9.0e-10	2	5e-4

3	1.35e-9	2	5e-4
4	1.8e-9	2	5e-4
5	2.25e-9	2	5e-4

Estos valores permiten construir un espectro de resonancia discreta y simular la evolución temporal de amplitudes considerando acoplamientos, lo que reproduce patrones de oscilación complejos observables en el núcleo interno.

Síntesis final y seguimiento de resultados

El METFI, mediante derivaciones analíticas, modelado espectral y simulaciones MHD, permite un **seguimiento detallado de los modos toroidales internos**, sus frecuencias resonantes y estabilidad. Los resultados confirman que:

- La resonancia interna es discreta y altamente sensible a la geometría toroidal y difusividad magnética.
- La transferencia de energía entre modos explica patrones de oscilación combinada y micro-inestabilidades.
- Las simulaciones numéricas y representaciones gráficas conceptuales facilitan el seguimiento de la evolución temporal de cada modo.