Principe des méthodes de Monte Carlo

Pierre Gloaguen

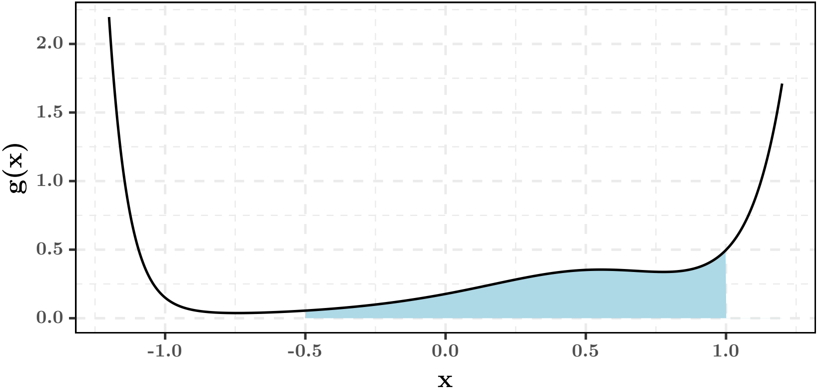
22/03/2020

Exemple introductif (1)

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels.

Supposons que l'on souhaite calculer une intégrale (finie) du type

$$I = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$



Exemple introductif (2)

$$I = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Exemple introductif (2)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overbrace{(b-a)g(x)}^{:=\varphi(x)} \frac{\mathbf{1}_{a \le x \le b}}{b-a}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Exemple introductif (2)

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overbrace{(b-a)g(x)}^{:=\varphi(x)} \frac{\mathbf{1}_{a\leq x\leq b}}{b-a}\mathrm{d}x \\ &= \mathbb{E}[\varphi(X)],\ \text{où } X \sim \mathcal{U}[a,b]. \end{aligned}$$

Exemple introductif (2)

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overbrace{(b-a)g(x)}^{:=\varphi(x)} \frac{\mathbf{1}_{a\leq x\leq b}}{b-a}\mathrm{d}x \\ &= \mathbb{E}[\varphi(X)],\ \text{où } X \sim \mathcal{U}[a,b]. \end{aligned}$$

Estimateur de Monte Carlo

On fixe un entier $M > 0$. On simule un échantillon $X_1, \ldots, X_M$ selon $X \sim \mathcal{U}[a,b]$, on pose alors l'estimateur:

$$\hat{I}_M = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \varphi(X_k)$$

Exemple introductif (2)

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overbrace{(b-a)g(x)}^{:=\varphi(x)} \frac{\mathbf{1}_{a \leq x \leq b}}{b-a}\mathrm{d}x \\ &= \mathbb{E}[\varphi(X)], \text{ où } X \sim \mathcal{U}[a,b]. \end{aligned}$$

Estimateur de Monte Carlo

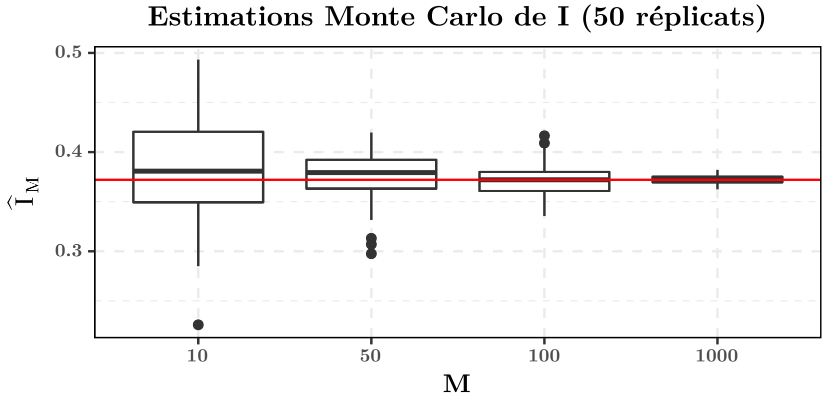
On fixe un entier $M > 0$. On simule un échantillon $X_1, \ldots, X_M$ selon $X \sim \mathcal{U}[a,b]$, on pose alors l'estimateur:

$$\hat{I}_M = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \varphi(X_k)$$

Remarques

- M est appelé **effort de Monte Carlo**;
- On suppose pour le moment qu'on **sait simuler selon** $\mathcal{U}[a,b]$;
- L'estimateur de I est une **variable aléatoire**.

Exemple introductif (3)



Cas générique

On veut calculer une intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x$$

où f est une fonction positive, telle que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x = 1$, alors on se sert du fait que

$$I = \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

où X est une variable aléatoire de densité f.

Estimateur de Monte Carlo

On fixe un entier $M > 0$. On simule un échantillon $X_1, \ldots, X_N$ selon $X \sim f(\cdot)$, on pose alors l'estimateur:

$$\hat{I}_N = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \varphi(X_k)$$

Pourquoi?

Les $\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_N)$ sont des variables aléatoires i.i.d. d'espérance $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ finie, avec $X \sim f(\cdot)$.

Pourquoi?

Les $\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_N)$ sont des variables aléatoires i.i.d. d'espérance $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ finie, avec $X \sim f(\cdot)$.

Loi des grands nombres:

$$\frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_N)}{M} \xrightarrow[M \to \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

Propriétés

Sans biais

$$\mathbb{E}[\hat{I}_N] = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbb{E}[\varphi(X_k)] \overset{\text{id. distrib}}{=} \mathbb{E}[\varphi(X)] = I$$

Propriétés

Sans biais

$$\mathbb{E}[\hat{I}_N] = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbb{E}[\varphi(X_k)] \overset{\text{id. distrib}}{=} \mathbb{E}[\varphi(X)] = I$$

Variance Si $\mathbb{V}[\varphi(X)] < \infty$

$$\mathbb{V}[\hat{I}_N] \overset{\text{ind.}}{=} \frac{1}{M^2}\sum_{k=1}^{M}\mathbb{V}[\varphi(X_k)] \overset{\text{id. distrib}}{=} \frac{1}{M}\mathbb{V}[\varphi(X)]$$

Propriétés

Sans biais

$$\mathbb{E}[\hat{I}_N] = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbb{E}[\varphi(X_k)] \overset{\text{id. distrib}}{=} \mathbb{E}[\varphi(X)] = I$$

Variance Si $\mathbb{V}[\varphi(X)] < \infty$

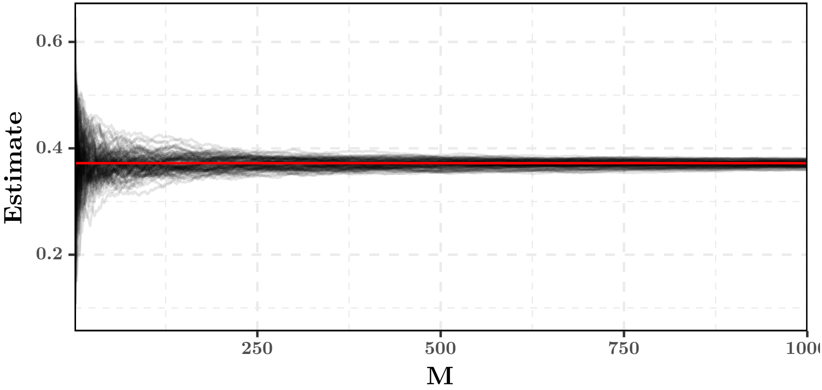
$$\mathbb{V}[\hat{I}_N] \overset{\text{ind.}}{=} \frac{1}{M^2}\sum_{k=1}^{M}\mathbb{V}[\varphi(X_k)] \overset{\text{id. distrib}}{=} \frac{1}{M}\mathbb{V}[\varphi(X)]$$

Loi La loi des grands nombres nous donne la loi asymptotique

$$\sqrt{M}\left(\hat{I}_N - I\right) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}[\varphi(X)])$$

Loi de l'estimateur

- 100 réplicats d'échantillons Monte Carlo de taille $M = 1000$.



Intervalle de confiance

On note

$$\sigma^2 = \mathbb{V}[\varphi(X)].$$

Ainsi, en notant z_α le quantile d'ordre $\alpha \in]0,1[$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, si on définit l'intervalle aléatoire

$$J_M = \left[\hat{I}_M - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{M}} ; \hat{I}_M + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{M}} \right]$$

Alors,

$$\mathbb{P}(J_M \ni I) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha$$

J_M est donc un intervalle de confiance asymptotique au niveau 1 - α pour la valeur de I.

Intervalle de confiance (2)

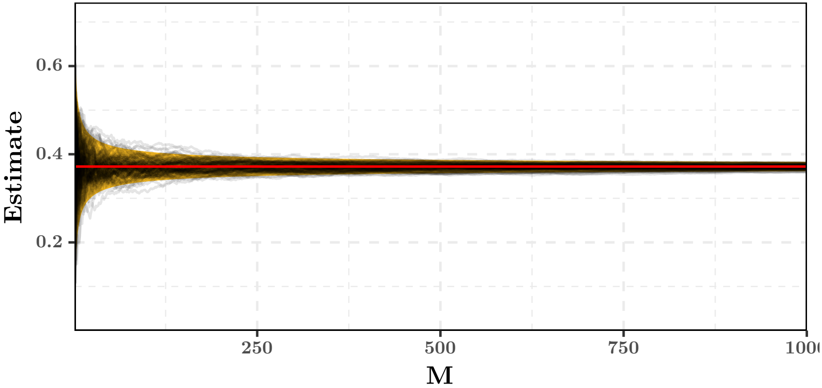
En pratique cependant, cet intervalle n'est pas calculable car σ^2 est inconnu

On dispose cependant d'un estimateur consistant de σ^2 donné par

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \left(\varphi(X_k) - \hat{I}_M \right)^2$$

- Dans l'expression précédente, on remplace σ^2 par son estimateur.
- Le lemme de Slutski nous assure que les propriétés de J_M restent vraies.

Intervalle de confiance (3)



Comparaison avec l'intégration numérique

L'objectif présenté ici est de calculer, en dimension d, une intégrale:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x$$

- Calcul possible par méthode numérique (méthode des cubes).

Comparaison avec l'intégration numérique

L'objectif présenté ici est de calculer, en dimension d, une intégrale:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x$$

- Calcul possible par méthode numérique (méthode des cubes).

- **Intégration numérique:** Pour une fonction g de classe C^s, l'erreur est de l'ordre $\frac{1}{M^{\frac{s}{d}}}$ (où M est le nombre d'évaluations de la fonction).
  - Il faut connaître la régularité de g!
  - L'erreur augmente avec la dimension.

Comparaison avec l'intégration numérique

L'objectif présenté ici est de calculer, en dimension d, une intégrale:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x$$

- Calcul possible par méthode numérique (méthode des cubes).

- **Intégration numérique:** Pour une fonction g de classe C^s, l'erreur est de l'ordre $\frac{1}{M^{\frac{s}{d}}}$ (où M est le nombre d'évaluations de la fonction).
  - Il faut connaître la régularité de g!
  - L'erreur augmente avec la dimension.
- **Méthodes Monte Carlo:** Pour les méthodes de Monte Carlo, l'écart type de l'erreur est de l'ordre $\frac{1}{M^{\frac{1}{2}}}$.
  - Indépendamment de la régularité de g!
  - Indépendamment de la dimension!

Ainsi, ces méthodes deviennent vite avantageuses quand d est grand.