1　マルコフ

(1) Fgenome(1) * Mgenome(2,1) * Mgenome(3,2) ,, （ただし、行列における i 行、j 列にある要素を (i,j) として示している）

***** 解説 ***** （解説不要）

—– (2) Fnoncode ≡ Fgenome * 100 - Fcode * (n + shita) / (100 - shita - n) , Mnoncode ≡ Mgenome * Fgenome * 100 - Mcode * Fcode * (n + shita) / Fnoncode * (100 - shita - n) , Fnoncode(1) * Mnoncode(2,1) * Mnoncode(3,2) ,,

***** 解説 ***** noncode 領域を考えて、Fnoncode、Mnoncode を考えると 1 塩基頻度の保存より Fgenome * 100 = Fcode * (n + shita) + Fnoncode * (100 - shita -n) となる。したがって Fnoncode = Fgenome * 100 - Fcode * (n + shita) / (100 - shita - n)

また 2 塩基頻度の保存より、以下が成り立つ Mgenome * Fgenome * 100 = Mcode * Fcode * (n + shita) + Mnoncode * Fnoncode * (100 - shita - n) となる。したがって Mnoncode = Mgenome * Fgenome * 100 - Mcode * Fcode * (n + shita) / Fnoncode * (100 - shita - n)

2　ラプラス変換

2.1

問題文の定義より、$v(t) = -a\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + b\int_0^t v(u)\mathrm{du}$ 。
また、ラプラス変換の線形性より、$\mathcal{L}[v(t)] = V(s) = -a\mathcal{L}[\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}] + b\mathcal{L}[\int_0^t v(u)\mathrm{du}]$ が成り立つ。
$V(s) = -a\mathcal{L}[\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}] + b\mathcal{L}[\int_0^t v(u)\mathrm{du}] = -a(sV(s) - v(0)) + \frac{b}{s}V(s) = (\frac{b}{s} - as)V(s) + av(0)$.
ここで、a=1(sec),b=2(/sec),v(0)=1nM/sec を代入すると、
$V(s) = \frac{1}{1+s-\frac{2}{s}} = \frac{s}{s+s^2-2}$

2.2

1 で求めた $V(s)$ は、
$V(s) = \frac{s}{s+s^2-2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s+2})$ のように分解できる。
そこで、
$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s+2}] = \frac{1}{3}(\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s+2}]) = \frac{1}{3}(e^t + 2e^{-2t})$
よって、
$v(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2e^{-2t})$

KeyPoint ラプラス変換

$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau] = \frac{1}{s}F(s)$
$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$
$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - (s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f(0) + \ldots + sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0))$
$\mathcal{L}[t^nf(t)] = (-1)^n\frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{ds^n}}F(s)$

KeyPoint ラプラス逆変換

有理関数 F(s) が既約分数 $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ で表される時 (order P<order Q)、
Q(s)=0 が重根をもたないとすれば、
$Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots(s-\alpha_n)$ とすると
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{P(s)}{Q(s)}] = \sum_{j=1}^n c_je^{a_jt}(t \geq 0)$

$c_j = [(s-\alpha_j)F(s)]_{s=\alpha_j} = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}(j=1,2,\ldots,n)$.
Q(s)=0 が重根をもつならば (s=α のみ p 重根をもつとすると)、
$Q(s) = (s-\alpha)^p(s-\alpha_{p+1})\ldots(s-\alpha_n)$.
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{P(s)}{Q(s)}] = (c_{11}\frac{t^{p-1}}{(p-1)!} + c_{12}\frac{t^{p-2}}{(p-2)!} + \ldots + c_{1p})e^{at} + \sum_{j=p+1}^{n} c_j e^{a_j t}(t \geq 0)$.
$c_{1k} = \frac{1}{(k-1)!}[\frac{\mathrm{d^{k-1}}}{\mathrm{ds^{k-1}}}((s-\alpha)^p F(s))]_{s=\alpha}(k=1,2,\ldots,p)$
$c_j = [(s-^a lpha_j)F(s)]_{s=\alpha_j} = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}(j=p+1,p+2,\ldots,n)$

3 偏微分方程式 I: 拡散方程式を解く

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}V(x)W(t) &= V_t \cdot W + V \cdot W_t \\
&= V \cdot W_t \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x)W(t) &= \frac{\partial}{\partial x}(V_x \cdot W + V \cdot W_x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(V_x \cdot W) \\
&= V_{xx} \cdot W + V_x \cdot W_x \\
&= V_{xx} \cdot W
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
V \cdot W_t &= D \cdot V_{xx} \cdot W \\
\frac{1}{D}\frac{W_t}{W} &= \frac{V_{xx}}{V}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D}\frac{W_t}{W} &= \frac{V_{xx}}{V} = \lambda \\
\frac{1}{D}\frac{W_t}{W} &= \lambda \\
\frac{1}{D}\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} &= \lambda \\
\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dx^2} &= \lambda \\
\frac{dW}{dt} &= \lambda DW \\
\frac{d^2V}{dx^2} &= \lambda V
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dW}{dt} &= \lambda DW \\
\int \frac{1}{W}dW &= \int \lambda D dt \\
\ln W &= D\lambda t + C \\
W(t) &= Ce^{D\lambda t}
\end{aligned}$$

(5) $\lambda < 0$ の場合のみ解があるのでそれについて示す。$y'' + ay' + by = 0$ の特性方程式 $s^2 + as + b = 0$ の解が $s_1 = \alpha + \beta i$、$s_2 = \alpha - \beta i$ であるとき、y の一般解は $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ である。いま、$\frac{d^2V}{dx^2} = \lambda V$ の特性方程式は $s^2 - \lambda = 0$ だから、$s_1 = \sqrt{-\lambda}i$、$s_2 = -\sqrt{-\lambda}i$。よって、

$$\begin{aligned} V(x) &= C_1 e^{0\cdot x}\cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 e^{0\cdot x}\sin(\sqrt{-\lambda}x) \\ &= C_1\cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{-\lambda}x) \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}y(0,t) &= V_x(0)W(t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}y(1,t) &= V_x(1)W(t) = 1 \end{aligned}$$

$W(t) \neq 0$ なので

$$V_x(0) = V_x(1) = 0$$

である。ここで、

$$V_x(x) = -C_1\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

であるから、

$$\begin{aligned} V_x(0) &= C_2\sqrt{-\lambda} = 0 \\ V_x(1) &= -C_1\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda} + C_2\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda < 0$ だから $C_2\sqrt{-\lambda} = 0$ より $C_2 = 0$ である。$C_2 = 0$ より

$$V_x(1) = -C_1\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda} = 0$$

C_1, C_2 がともに 0 だと $V = 0$ となってしまうので、$C_1 \neq 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \sin\sqrt{-\lambda} &= 0 \\ \sqrt{-\lambda} &= n\pi \end{aligned}$$

解は

$$V = C_1\cos(n\pi x)$$

(7) $y(x,t) = V(x)W(t)$ より、

$$y(x,t) = C_1\cos(n\pi x)\cdot C_2 e^{D\lambda t}$$

(6) で求めた結果より $\sqrt{-\lambda} = n\pi$ だから、

$$y(x,t) = C_1\cos(n\pi x)\cdot C_2 e^{-Dn^2\pi^2 t}$$

任意定数をひとくくりにして

$$y(x,t) = C\cos(n\pi x)\cdot e^{-Dn^2\pi^2 t}$$

これをすべての n について重ねあわせて

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n)\cos(n\pi x)\cdot e^{-Dn^2\pi^2 t}$$

(8)

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} C(n)\cos(n\pi x)\cdot e^{-Dn^2\pi^2\cdot 0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C(n)\cos(n\pi x) \\ &= 0.5\cos 2\pi x \end{aligned}$$

初期条件の関数 $g(x) = 0.5\cos 2\pi x$ がフーリエ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} C(n)\cos(n\pi x)$ で表現されていると解釈できるので、係数 $C(n)$ はフーリエ級数展開で求まる。

$$C(n) = 2\int_0^1 g(x)\cdot\cos(n\pi x)dx$$

なので、

$$\begin{aligned} C(n) &= 2\int_0^1 \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\cdot\cos(n\pi x)dx \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi x)\cdot\cos(n\pi x)dx \end{aligned}$$

$C(n)$ は $n = 2$ の場合を除いて 0 となる。
よって

$$\begin{aligned} C(2) &= \int_0^1 \cos(2\pi x)\cdot\cos(2\pi x)dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C(n)\cos(n\pi x)\cdot e^{-Dn^2\pi^2 t} \\ &= C(2)\cos(2\pi x)\cdot e^{-4D\pi^2 t} \\ &= \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\cdot e^{-4D\pi^2 t} \end{aligned}$$

(9)

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\cdot e^{-4D\pi^2 t}$$

x=0.5、t=0.001、D=25 を代入して

$$\begin{aligned} y(0.5,30) &= \frac{1}{2}\cos(2\pi\cdot 0.5)\cdot e^{-4\cdot 25\cdot\pi^2\cdot 0.001} \\ &= \frac{1}{2}\cos(\pi)\cdot e^{-3\pi^2} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-3\pi^2} \end{aligned}$$

グルコース濃度は $y(x,t) + 0.5\text{mM}$ だから

$$[\text{Glucose}] = 0.5(1 - e^{-3\pi^2})\text{mM}$$