数学サブゼミ d 修了認定試験

1　マルコフモデル: 遺伝子領域の予測

Masarus tomitinius はゲノム中の θ%が遺伝子コード領域と確認されている原核生物である。いま、「ある塩基の出現確率が直前の塩基のみに依存する」と仮定した確率モデル (定常 1 次マルコフモデル) を用いて未知コード領域を予測する。

$$M = \begin{pmatrix} P(A|A) & P(T|A) & P(G|A) & P(C|A) \\ P(A|T) & P(T|T) & P(G|T) & P(C|T) \\ P(A|G) & P(T|G) & P(G|G) & P(C|G) \\ P(A|C) & P(T|C) & P(G|C) & P(C|C) \end{pmatrix}$$

$$F = (P(A), P(T), P(G), P(C))^T$$

右に示した行列 M は、任意の領域における塩基 r_k の出現確率を、直前の塩基が r_{k-1} であるという条件付き確率 $P(r_k|r_{k-1})$ で表したものである。また、行列 F の各要素は各塩基 r_k の直前の塩基に **よらない** 出現確率 $P(r_k)$ である。コード領域、全ゲノムにおけるこの行列 M、F をそれぞれ、M_{code}、M_{genome}、F_{code}、F_{genome} とする。

(1) コード領域に 3 塩基配列 ATG が現われる確率を示しなさい。

(2) *Masarus tomitinius* の未知コード領域が全ゲノムの n%を占めるとき、非コード領域に 3 塩基配列 ATG が現われる確率を示しなさい。

2　ラプラス変換: 微分積分方程式が微分積分なしで解ける

時刻 t におけるある転写因子 TF の発現速度 $v(t)$ は、観測開始から時刻 t までの TF の全発現量と正の相関があり、時刻 t における TF の発現速度の増加率と負の相関があることがわかっている。これを微分積分方程式 $v(t) = -a\dfrac{dv(t)}{dt} + b\displaystyle\int_0^t v(u)du$ (ただし $a = 1.0\ \mathrm{sec}, b = 2.0\ \mathrm{sec}^{-1}, v(0) = 1.0\mathrm{nM/sec}$) で表現した。

(1) ラプラス変換し、$V(s)$ について解きなさい。ただし、$V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ である。

(2) (1) の結果をラプラス逆変換して微分積分方程式の解 $v(t)$ を求めなさい。

3　偏微分方程式 I: 拡散方程式を解く

グルコース主体の培地で育つ直径 $1\mu\mathrm{m}$ ほどの球形微生物がいる。いま、細胞内におけるグルコースの濃淡を知りたい。グルコース濃度は $y(x,t)+0.5\mathrm{mM}$ で表されるものとし、$y(x,t)$ は拡散方程式 $\dfrac{\partial}{\partial t}y(x,t) = D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)$ に従う。細胞膜の位置を $x = 0\mu\mathrm{m}$ および $x = 1.0\mu\mathrm{m}$、細胞の中心を $x = 0.5\mu\mathrm{m}$ とおき、時間 $t = 0\mathrm{sec}$ における濃度分布を $y(x,0) = 0.5\cos 2\pi x\mathrm{mM}$、グルコースの拡散定数を $D = 25\mu\mathrm{m}^2/\mathrm{sec}$ とする。また、境界条件を $\dfrac{\partial}{\partial x}y(0,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}y(1,t) = 0$ とする。

(1) 未知関数 $y(x,t)$ が x の関数 $V(x)$ と t の関数 $W(t)$ の積になっている ($y(x,t) = V(x)W(t)$) と仮定して、$\dfrac{\partial}{\partial t}y(x,t)$ と $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)$ を求めなさい。

(2) (1) で求めた結果を拡散方程式に代入し、変数分離しなさい。

(3) (2) の式を定数 λ と等しいとおき、$V(x)$、$W(t)$ それぞれについての常微分方程式に書き直しなさい。

(4) (3) で求めた $W(t)$ についての常微分方程式を解きなさい。任意定数を含んだ解でよい。

(5) (3) で求めた $V(x)$ についての常微分方程式を解きなさい。任意定数を含んだ解でよい。

(6) 上記の境界条件を満たすように、(5) の解が含む任意定数の値を定めなさい。

(7) 求まった $V(x)$、$W(t)$ から $y(x,t)$ を書き下ろしなさい。重ね合わせを忘れないこと。

(8) 初期条件 $y(x,0) = 0.5\cos 2\pi x\mathrm{mM}$ をあてはめて拡散方程式の解を導きなさい。

(9) 細胞の中央における 0.001 秒後のグルコース濃度はどの程度と考えられるか。