# 線形代数２：固有値と安定性

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \tag{1}$$

(1)
固有値は行列 J が与えられている時に

$$|\lambda\ I - J| = 0 \cdots \text{行列式}\ I \cdots J\ \text{と次元数の同じ単位行列}\ w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

となるようなλを考えればよい。
行列式は以下のようになり、

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{3}{4}\right) = 0\ \text{よって}\ \lambda = \frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}\ \text{となる。この二つの}\lambda\text{が固有値。} \tag{3}$$

固有ベクトルは

$$(J - \lambda\ I)(x) = 0 \cdots \text{行列式} \tag{4}$$

を満たすようなベクトル x のことなので固有値 $\frac{-1}{2}$ の時は

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

　を満たすベクトル x は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

固有値 $\frac{-3}{4}$ の時は

$$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

　を満たすベクトル x は

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

(２) 対角化は試験問題に載せてあるように $P^{-1}AP = \Lambda$
の過程を示す。P の逆行列は

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

なので $P^{-1}AP = \Lambda$ を解くと

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \tag{10}$$

よって対角化は示された。
(３) $J^n$ は

$$J^n = D \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} D^{-1} \tag{11}$$

で求まるのでこれを計算すると

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \tag{12}$$

となる。(４) 時間を t →∞としたときに n →∞となっているため、時間発展の結果は

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \tag{13}$$

のλに固有値を代入したものになり、実質０に収束するため、時間変化が０になる、すなわち定常状態に戻ると推測される。
終了