数学サブゼミ b 修了認定試験

1 統計的検定 II

1.1 配列の出現周期

霊長類 *Yugius Katsuyukius* ミトコンドリアゲノム中の `ctggtg` という 6 塩基オリゴ配列の出現周期を調べたところ、存在数は 7 個で、周期は 352bp (分散= 50bp) であった。また、この裏配列、`caccag` の場合は存在数 10 個、周期は 318bp (分散 = 46bp) であった。表と裏で配列出現周期傾向が有意に異なるとすれば何らかの選択圧が存在している可能性が高い。このオリゴ配列の出現周期に差があるかどうか統計的検定によって判定しなさい。正規分布、t 分布、χ^2 分布、F 分布、ポアソン分布のうち利用すべき分布を選び、有意水準 0.05 で検定すること。

1.2 長い配列の出現頻度

ある遺伝子近辺 8197 塩基の範囲に 6 塩基配列 5′-`GCTATA`-3′ が 1 つも見つからなかった。このようなことは通常起こり得るかを統計的に検定しなさい。正規分布、t 分布、χ^2 分布、F 分布、ポアソン分布のうちから利用すべき分布を選び、有意水準 0.05 で検定すること。

1.3 相関係数

表は、細菌菌株 (No.1〜7) のメタノールとエタノール (C1,C2) に対する資化性[1]を 3 段階評価 (0,1,2) でまとめた結果である。

(1) C1,C2 間の関係を数値要約するために、Pearson の積率相関係数 r_p を求めなさい。
(2) データを順位に変換した表を作成し、Spearman の順位相関係数 r_s を求めなさい。
(3) (1) で求めた r_p の有意性について統計的検定を行いなさい。

菌株 No.	C1	C2
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1
5	1	2
6	2	1
7	2	2

2 線形代数 II: 固有値と安定性

定常状態にある酵素反応系モデルをテイラー展開で 1 次の項まで近似したところ、下のような式に書き下ろすことができた。

$$\frac{d}{dt}\vec{s} = \mathbf{J}\cdot\vec{s} \qquad \text{ただし} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} \Delta[S_1] \\ \Delta[S_2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{J}$ の固有値・固有ベクトルを求めなさい。
(2) 行列 $\mathbf{J}$ を対角化しなさい。「行列を対角化する」とは、任意の行列 A の固有ベクトル $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n$ を各列に並べた行列を $P = (\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n)$、固有値を対角要素に並べた行列を Λ とおいたとき、$P^{-1}AP = \Lambda$ を求めることを言う。右にその導出過程を示す。
(3) 対角化の結果を用いて $\mathbf{J}^n$ を求めなさい。

固有値・固有ベクトルの定義より、

$$\begin{aligned} A(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n) &= (\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ AP &= P\Lambda \\ P^{-1}AP &= \Lambda \end{aligned}$$

(4) この系に摂動を与えた場合、物質濃度が発散するか再び定常状態に戻るかを推定しなさい。$t \to \infty$ のとき $n \to \infty$ とする。

---

[1] 何らかの物質を分解して利用できる性質のこと。