数学サブゼミ e 修了認定試験

1　ベクトル解析: ナヴィエ＝ストークス方程式の変形

気体や液体のことを流体と呼ぶ。気体は縮む流体であり、液体は縮まない流体である。流体の運動は右に示したナヴィエ＝ストークス (Navier-Stokes) 方程式と連続の方程式 (equation of continuity) に支配される。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p + \dfrac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} + f \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho\mathbf{v}) = 0 \end{cases}$$

ただし、$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)^T$、$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$、$\rho$ は流体の密度、μ は流体の粘性係数、p は圧力、f は外力を表す。

(1) div $\mathbf{v}$ を求めなさい。ただし、div $\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$ である (記号 $\cdot$ はスカラー積)。

(2) rot $\mathbf{v}$ を求めなさい。ただし、rot $\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v}$ であり、ベクトル積は $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ である。

(3) grad q^2 を計算しなさい。ただし、$q = |\mathbf{v}|$ で、grad $q^2 = \nabla q^2$ である。

(4) 粘性がない場合 ($\mu = 0$) のナヴィエ＝ストークス方程式をオイラーの運動方程式と言う。(2) および (3) の結果を用いてオイラーの運動方程式の左辺 $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ が $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{grad}\ q^2 - \mathbf{v}\times\omega$ と書き換えられることを示しなさい。ただし $\omega = \mathrm{rot}\ \mathbf{v}$ である。

(5) 以下の手順に従い、(4) の形のオイラーの運動方程式から渦度方程式 $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \mathrm{rot}\ (\mathbf{v}\times\omega)$ を導きなさい。ω を渦度と言い、$\omega = \mathrm{rot}\ \mathbf{v}$ である。

  (a) 外力を保存力と仮定すると $f = -\mathrm{grad}\ \Omega$ と書ける。これをオイラーの運動方程式に代入しなさい。

  (b) 密度 ρ が圧力 p だけの関数と仮定すると、$\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p = \mathrm{grad}\ P$ と書ける。これをオイラーの方程式に代入しなさい。

  (c) (5a)∼(5b) によって導かれた式の両辺の rot をとりなさい。ただし、rot(grad f)=0 である。

(6) $\omega = 0$ のとき流れは渦無しと呼ばれ、流速ベクトルは $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\ \Phi$ と書ける ($\because \omega = \mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\ \Phi) = 0$)。$\Phi$ を速度ポテンシャルと呼ぶ。渦度方程式に $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\ \Phi$ を代入し、一般化ベルヌーイの定理 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}q^2 + P + \Omega = f(t)$ を導きなさい。

(7) 縮まない流体 ($\rho =$ 一定) のを想定し、連続の方程式 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho\mathbf{v} = 0$ からラプラス方程式 $\nabla^2\Phi = 0$ を導きなさい。$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\ \Phi$、$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ f) = \nabla^2 f$ である。

2　多変量解析 I

2.1　判別分析

2.2　クラスター分析

進化系統樹