

モデル圏の理論

@paper3510mm*

2021 年 5 月 29 日

概要

Quillen によるモデル圏の理論を解説する.

目次

| | | |
|-------|--------------------|----|
| 0 | はじめに | 2 |
| 1 | 関手的分解とリフト性質 | 3 |
| 2 | モデル圏論の基礎 | 6 |
| 2.1 | モデル圏 | 6 |
| 2.2 | 射のホモトピー | 11 |
| 2.2.1 | Cylinder 対象と左ホモトピー | 12 |
| 2.2.2 | Path 対象と右ホモトピー | 17 |
| 2.2.3 | ホモトピー | 19 |
| 2.3 | モデル圏のホモトピー圏 | 22 |
| 2.3.1 | ホモトピー圏 | 22 |
| 2.3.2 | モデル圏の局所化 | 26 |
| 2.3.3 | 関手的分解を持つ場合 | 28 |
| 2.4 | 導来関手 | 29 |
| 2.5 | Quillen 随伴 | 33 |

* <https://paper3510mm.github.io/notes>.

0 はじめに

モデル圏とは、ホモトピー論を抽象的に行うための圏の枠組みである。モデル圏は、位相空間のホモトピー論において用いられていた *fibration*, *cofibration*, *weak equivalence* を公理化する形で、Quillen [Qui67] によって初めて導入された。現在では、Quillen [Qui67] によるオリジナルのものよりも洗練された定義が採用され、使われている。

導入された動機から明らかなように、位相空間の圏にモデル圏の構造が入る。他のモデル圏の具体例としては、単体的集合の圏や加群の複体の圏などがある。圏に入るモデル圏の構造は一般に一意ではなく、考えたいホモトピー論に合わせて扱うモデル圏構造を設定する。

本稿では、Quillen によるモデル圏の理論を解説する。圏論の基本的な知識は仮定する。

1 章では、関手的分解や射のリフト性質について、基本事項を確認する。

2 章では、モデル圏論の基礎を一通り解説する。

入門的な文献として、Dwyer-Spalinski [DwSp95] や Goerss-Schemmerhorn [GoSc07] はコンパクトにまとまっていてわかりやすい。よりしっかりと学ぶには、Hovey [Hov99] や Hirschhorn [Hir03, Part 2] や May-Ponto [MaPo12, Part 4] を見るとよい。

1 関手的分解とリフト性質

圏はすべて locally small であるとする.

定義 1.1. 圏 \mathcal{C} の射の圏 $\text{Arr}(\mathcal{C})$ とは,

- $\text{Arr}(\mathcal{C})$ の対象は, \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow X'$ である
- $\text{Arr}(\mathcal{C})$ の対象 $(f: X \rightarrow X')$ から $(g: Y \rightarrow Y')$ への射とは, \mathcal{C} の射 $k: X \rightarrow Y$ と $k': X' \rightarrow Y'$ の組 (k, k') であって

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{k'} & Y' \end{array}$$

を可換にするものである

となるような圏のこと.

射の圏 $\text{Arr}(\mathcal{C})$ は, ドメインを取る関手 $\text{dom}: \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ とコドメインを取る関手 $\text{cod}: \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ を自然に持つ. すなわち対象 $(f: X \rightarrow X') \in \text{Arr}(\mathcal{C})$ に対し $\text{dom } f = X$, $\text{cod } f = X'$ とし, $(f: X \rightarrow X')$ から $(g: Y \rightarrow Y')$ への射 $(k, k'): f \rightarrow g$ に対し $\text{dom}(k, k') = k$, $\text{cod}(k, k') = k'$ とする対応は, 関手 dom, cod を定める.

定義 1.2. 圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ について, f が g の retract であるとは, $\text{Arr}(\mathcal{C})$ の対象として f が g の retract であるときをいう. すなわち, \mathcal{C} の射 $i: X \rightarrow Y$, $i': X' \rightarrow Y'$, $r: Y \rightarrow X$, $r': Y' \rightarrow X'$ が存在して

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{r} & X \\ & \searrow f & \downarrow g & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{r'} & X' \\ & \swarrow & \nearrow & & \\ & & \text{id}_{X'} & & \end{array}$$

が可換図式になるときをいう.

補題 1.3. 圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ について f が g の retract であるとき, g が同型射ならば f も同型射である.

Proof. f は g の射であるから, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{r'} & X' \end{array}$$

であって $r \circ i = \text{id}_X, r' \circ i' = \text{id}_{X'}$ となるものが存在する. このとき $k = r \circ g^{-1} \circ i'$ と置けば

$$\begin{aligned} f \circ k &= f \circ r \circ g^{-1} \circ i' = r' \circ g \circ g^{-1} \circ i' = r' \circ i' = \text{id} \\ k \circ f &= r \circ g^{-1} \circ i' \circ f = r \circ g^{-1} \circ g \circ i = r \circ i = \text{id} \end{aligned}$$

となるから, f も同型射である. □

定義 1.4. \mathcal{C} を圏とする. 関手 $\alpha, \beta: \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Arr}(\mathcal{C})$ の組 (α, β) が関手的分解 (functorial factorization) であるとは,

- (i) $\text{dom} = \text{dom} \circ \alpha, \text{cod} \circ \alpha = \text{dom} \circ \beta, \text{cod} \circ \beta = \text{cod}$
- (ii) 任意の射 $(f: X \rightarrow X') \in \text{Arr}(\mathcal{C})$ に対して $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$

が成り立つときをいう.

注意 1.5. つまり関手的分解 (α, β) があると, 射 $f: X \rightarrow X'$ について

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \alpha(f) \searrow & & \nearrow \beta(f) \\ & \text{cod } \alpha(f) = \text{dom } \beta(f) & \end{array}$$

という分解があり, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ k \downarrow & & \downarrow k' \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

に対して

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha(f)} & \text{cod } \alpha(f) = \text{dom } \beta(f) & \xrightarrow{\beta(f)} & X' \\ k \downarrow & & \downarrow \text{cod } \alpha(k, k') = \text{dom } \beta(k, k') & & \downarrow k' \\ Y & \xrightarrow{\alpha(g)} & \text{cod } \alpha(g) = \text{dom } \beta(g) & \xrightarrow{\beta(g)} & Y' \end{array}$$

なる可換図式が得られる. なお [Hov99] での関手的分解の定義では, 条件 (ii) しか書かれていないが, ここでは cofibrant replacement 関手を定義するときに不十分であり, [Hov] で訂正がなされている.

定義 1.6. 圏 \mathcal{C} の射 $i: A \rightarrow B$, $p: X \rightarrow Y$ について, i が p に関して左リフト性 (left lifting property with respect to p) を持つ, ないし p が i に関して右リフト性 (right lifting property with respect to i) を持つとは, 任意の可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

に対して $f = h \circ i$, $g = p \circ h$ となる射 $h: B \rightarrow X$ が存在するときをいう. この h をリフトと呼ぶ.

より一般に射のクラス $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \text{mor}(\mathcal{C})$ に対して, \mathcal{M} が \mathcal{N} に関して左リフト性を持つ, ないし \mathcal{N} が \mathcal{M} に関して右リフト性を持つとは, 任意の $i \in \mathcal{M}$ と $p \in \mathcal{N}$ に対して i が p に関して左リフト性を持つときをいう.

補題 1.7 (Retract Argument). 射の分解 $f = p \circ i$ について, f が p に関して左リフト性を持つとき, f は i の retract である. 双対的に, f が i に関して右リフト性を持つとき, f は p の retract である.

Proof. $f = p \circ i: A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ とする. f が p に関して左リフト性を持つ場合, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \end{array}$$

について, $i = r \circ f$ かつ $\text{id}_C = p \circ r$ となる $r: C \rightarrow B$ が存在する. このとき

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \xrightarrow{\text{id}} & A & \xrightarrow{\text{id}} & A \\ f \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{p} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_C & & \end{array}$$

が可換になるから, f は i の retract である. 同様に, f が i に関して右リフト性を持つとき f は p の retract になる. \square

2 モデル圏論の基礎

モデル圏の基礎を解説する。[DwSp95] と [Hov99, Ch. 1] を参考にした。

2.1 モデル圏

定義 2.1. 圏 \mathcal{C} 上のモデル圏構造 (model category structure) とは、

三つの射のクラス \mathcal{W} , Cof , Fib の組 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$

であって

- (MC1) (2-out-of-3) \mathcal{C} の射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ について、 f, g, gf のうち二つが弱同値であるとき、もう一つも弱同値である
- (MC2) (Retracts) $\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}$ は retract で閉じる。すなわち \mathcal{C} の射 f, g について f が g の retract であるとき、 $g \in \mathcal{W}/\text{Cof}/\text{Fib}$ ならば $f \in \mathcal{W}/\text{Cof}/\text{Fib}$ である
- (MC3) (Liftings) Cof は $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ に関して左リフト性を持ち、 $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ は Fib に関して左リフト性を持つ
- (MC4) (Factorization) \mathcal{C} の任意の射 f に対して、 $i \in \text{Cof}$ と $p \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ による分解 $f = p \circ i$ および、 $i \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ と $p \in \text{Fib}$ による分解 $f = p \circ i$ が存在する

をみたすときをいう。

特に (MC1) より \mathcal{W} は合成で閉じる。命題 2.12 と系 2.16 において、

\mathcal{W} と Cof と Fib が同型射を含み合成で閉じる

ことも確認する。

注意 2.2. 圏 \mathcal{C} 上のモデル圏構造 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$ について、

- \mathcal{W} に属する射を弱同値 (weak equivalence) と呼び、記号 $\xrightarrow{\sim}$ で表す。
- Cof に属する射を cofibration と呼び、記号 \hookrightarrow で表す。
- Fib に属する射を fibration と呼び、記号 \twoheadrightarrow で表す。
- $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ に属する射を acyclic cofibration (または trivial cofibration) と呼び、記号 $\xrightarrow{\sim} \hookrightarrow$ で表す。
- $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ に属する射を acyclic fibration (または trivial fibration) と呼び、記号 $\twoheadrightarrow \xrightarrow{\sim}$ で表す。

定義 2.3. 圏 \mathcal{C} 上の関手的分解を持つモデル圏構造とは、

- \mathcal{C} 上のモデル圏構造 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$

- 関手的分解 (α, β) , (α', β')

の組であって

(MC4') (Functorial Factorization) \mathcal{C} の任意の射 f に対して, $\alpha(f) \in \text{Cof}$ かつ $\beta(f) \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ および, $\alpha'(f) \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ かつ $\beta'(f) \in \text{Fib}$ となる

をみたすときをいう.

定義 2.4. モデル圏 (model category) とは, モデル圏構造を備えた有限完備かつ有限余完備な圏のことをいう. モデル圏のモデル圏構造が関手的分解を持つとき, そのモデル圏は関手的分解を持つという.

この意味でのモデル圏を Quillen model category と呼ぶこともある.

注意 2.5. (i) モデル圏構造には, はじめから関手的分解を持つことを仮定することも多い. 本稿では一応分けて定義した.
(ii) モデル圏には, はじめから完備性と余完備性を仮定することも多い. 本稿では有限完備性・有限余完備性だけを仮定する.

モデル圏 \mathcal{C} は有限余完備かつ有限完備であるので, 特に空図式の余極限・極限として, 始対象 (initial object) \emptyset と終対象 (terminal object) $*$ を持つ.

定義 2.6. \mathcal{C} をモデル圏とする. 対象 $X \in \mathcal{C}$ について, X が cofibrant であるとは, 始対象からの一意的な射 $\emptyset \rightarrow X$ が cofibration であるときをいう. また X が fibrant であるとは, 終対象への一意的な射 $X \rightarrow *$ が fibration であるときをいう.

例 2.7. 有限完備かつ有限余完備な圏 \mathcal{C} に対して

$$\mathcal{W} = \text{Iso}(\mathcal{C}), \quad \text{Cof} = \text{Fib} = \text{mor}(\mathcal{C})$$

とすると, これは \mathcal{C} 上のモデル圏構造を定める. さらにこれは関手的分解も持つ. これを自明なモデル圏構造 (trivial model structure) と呼ぶ.

例 2.8. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とする. 積圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ において, 射 $(f, g) \in \text{mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ が弱同値/cofibration/fibration であることを, f, g がそれぞれ \mathcal{C}, \mathcal{D} の弱同値/cofibration/fibration であることによって定義すると, これは $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 上のモデル圏構造を定める. これを積モデル圏構造 (product model structure) と呼ぶ.

同様にモデル圏の族 $\{\mathcal{C}_j\}_{j \in J}$ に対して積圏 $\prod_j \mathcal{C}_j$ 上にモデル圏構造が定まる.

例 2.9. モデル圏 \mathcal{C} に対して,

$$\mathcal{W}^{\text{op}} = \mathcal{W}, \quad \text{Cof}^{\text{op}} = \text{Fib}, \quad \text{Fib}^{\text{op}} = \text{Cof}$$

とすると, 組 $(\mathcal{W}^{\text{op}}, \text{Cof}^{\text{op}}, \text{Fib}^{\text{op}})$ は \mathcal{C}^{op} 上のモデル圏構造を定める. これを反対モデル圏構造 (opposite model structure) と呼ぶ.

反対モデル圏の存在から, モデル圏に関する命題について双対原理が適用できることがわかる.

命題 2.10. モデル圏 \mathcal{C} とその対象 $A \in \mathcal{C}$ について, コスライス圏 $A \backslash \mathcal{C}$ とスライス圏 \mathcal{C}/A は標準的にモデル圏構造を持つ.

Proof. 省略. □

モデル圏の基本的な性質を確認する.

命題 2.11. \mathcal{C} をモデル圏とする. \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ について次が成り立つ.

- (i) f が cofibration であることは, f がすべての acyclic fibration に関して左リフト性を持つことと同値である.
- (ii) f が acyclic cofibration であることは, f がすべての fibration に関して左リフト性を持つことと同値である.
- (iii) f が fibration であることは, f がすべての acyclic cofibration に関して右リフト性を持つことと同値である.
- (iv) f が acyclic fibration であることは, f がすべての cofibration に関して右リフト性を持つことと同値である.

Proof. (i) と (ii) だけ示す. (ii) と (iv) も同様である. f が cofibration/acyclic cofibration であるとき, acyclic fibration/fibration に関して左リフト性を持つことは定義より明らか.

f が acyclic fibration に関して左リフト性を持つとき, (MC4) より得られる分解 $f = p \circ i$ ($i \in \text{Cof}$, $p \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$) を取ると補題 1.7 より f は i の retract である. よって (MC2) より Cof は retract で閉じるから, f は cofibration である.

同様に f が fibration に関して左リフト性を持つとき, (MC4) より得られる分解 $f = p \circ i$ ($i \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$, $p \in \text{Fib}$) を取ると補題 1.7 より f は i の retract である. よって (MC2) より \mathcal{W} と Cof は retract で閉じるから, f は acyclic cofibration になる. □

命題 2.12. モデル圏 \mathcal{C} において, Cof, Fib は合成で閉じる.

Proof. Cof が合成で閉じることだけ示す. Fib に関して同様である. $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ を cofibration とするとき, 命題 2.11 より $g \circ f$ が任意の acyclic fibration $p: X \rightarrow Y$ に関して左

リフト性を持つことを確認すればよい．可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & X \\ f \downarrow & (*) & \downarrow p \\ B & & Y \\ g \downarrow & & \\ C & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

を考える．cofibration f が acyclic fibration p に関して左リフト性を持つから，可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{k} & & & X \\ f \downarrow & & & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $k'': B \rightarrow X$ が存在する．さらに cofibration g が acyclic fibration p に関して左リフト性を持つから，可換図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{k''} & X \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $h: C \rightarrow X$ が存在する．このとき h が可換図式 $(*)$ のリフトとなり， $g \circ f$ は p に関して左リフト性を持つ．よって $g \circ f$ は cofibration である． \square

命題 2.13. \mathcal{C} をすべての積と余積を持つモデル圏とする．

- (i) Cof と $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ は余積で閉じる．
- (ii) Fib と $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ は積で閉じる．

Proof. Cof が余積で閉じることだけ示す．他の場合も同様ないし双対である． $f_i: A_i \rightarrow B_i$ を cofibration とするとき，命題 2.11 より $\coprod_i f_i: \coprod_i A_i \rightarrow \coprod_i B_i$ が任意の acyclic fibration $p: X \rightarrow Y$ に関して左リフト性を持つことを確認すればよい．可換図式

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i A_i & \xrightarrow{k} & X \\ \coprod_i f_i \downarrow & (*) & \downarrow p \\ \coprod_i B_i & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

を考える．余積の標準的な射を in_i で表すとき，各 i について cofibration f_i は acyclic fibration p に関して左リフト性を持つから，可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{\text{in}_i} & \coprod_i A_i & \xrightarrow{k} & X \\ f_i \downarrow & & \downarrow \coprod_i f_i & & \downarrow p \\ B_i & \xrightarrow{\text{in}_i} & \coprod_i B_i & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $h_i: B_i \rightarrow X$ が存在する．さらに余積の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow h_i & \uparrow h \\ B_i & \xrightarrow{\text{in}_i} & \coprod_i B_i \end{array}$$

となる射 $h: \coprod_i B_i \rightarrow X$ が一意に存在する．このとき

$$\begin{aligned} p \circ h \circ \text{in}_i &= p \circ h_i = k' \circ \text{in}_i, \\ h \circ \coprod_i f_i \circ \text{in}_i &= h \circ \text{in}_i \circ f_i = h_i \circ f_i = k \circ \text{in}_i \end{aligned}$$

であるから余積の普遍性より $p \circ h = k'$, $h \circ \coprod_i f_i = k$ が成り立ち, h が可換図式 $(*)$ のリフトとなる．よって $\coprod_i f_i$ は cofibration である. \square

命題 2.14. \mathcal{C} をモデル圏とする．

- (i) Cof と $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ は pushout で閉じる．
- (ii) Fib と $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ は pullback で閉じる．

Proof. Cof が pushout で閉じることだけ示す．他の場合も同様ないし双対である． $f: A \rightarrow B$ を cofibration とし,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{t} & D \end{array}$$

を pushout 図式とする．命題 2.11 より g が任意の acyclic fibration $p: X \rightarrow Y$ に関して左リフト性を持つことを確認すればよい．可換図式

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & (*) & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

を考える．cofibration f は acyclic fibration p に関して左リフト性を持つから, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{k} & X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{t} & D & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $k'': B \rightarrow X$ が存在する．さらに pushout の普遍性により

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{s} & C \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{t} & D
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow k \\
 \searrow h \\
 \nearrow k''
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 X
 \end{array}$$

となる射 $h: D \rightarrow X$ が一意的存在する．このとき

$$p \circ h \circ t = p \circ k'' = k' \circ t, \quad p \circ h \circ g = p \circ k = k' \circ g$$

であるから pushout の普遍性より $p \circ h = k'$ が成り立ち、 h が可換図式 (*) のリフトとなる．よって g は cofibration である． \square

命題 2.15. モデル圏 \mathcal{C} の射 f について、 f が弱同値である必要十分条件は、 f が acyclic cofibration i と acyclic fibration p による合成 $f = p \circ i$ で表せることである．

Proof. 弱同値の合成は弱同値であるから、acyclic cofibration i と acyclic fibration p はの合成 $p \circ i$ も弱同値である．

逆に、 f が弱同値のとき、(MC4) より $f = p \circ i$ となる acyclic cofibration i と fibration p が存在する．ここで f と i が弱同値だから (MC1) より p も弱同値になる．よって f は acyclic cofibration と acyclic fibration の合成で表せる． \square

系 2.16. モデル圏において、同型射は弱同値かつ cofibration かつ fibration である．

Proof. 同型射は任意の射に対して左リフト性と右リフト性を持つから、命題 2.11 よりすぐにわかる． \square

今確認したモデル圏の基本的な性質をまとめると次のようになる．

系 2.17. モデル圏 \mathcal{C} において、

- (i) $\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}$ は、同型射を含み合成で閉じる．
- (ii) 弱同値のクラス \mathcal{W} と cofibration のクラス Cof と fibration のクラス Fib は、その中の二つがもう一つを互いに決定し合う．

Proof. (i) は命題 2.12 と系 2.16 より、(ii) は命題 2.11 と命題 2.15 より従う． \square

2.2 射のホモトピー

\mathcal{C} をモデル圏とする．ただし [DwSp95] に従って関手的分解を必ずしも持つとは限らない．

2.2.1 Cylinder 対象と左ホモトピー

対象 $A, B \in \mathcal{C}$ に対して, その余積 $A \amalg B$ の持つ標準的な射を $\text{in}_0: A \rightarrow A \amalg B$, $\text{in}_1: B \rightarrow A \amalg B$ とする. また射 $f: A \rightarrow C$ と $g: B \rightarrow C$ に対して, 余積の普遍性によって得られる

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\text{in}_0} & A \amalg B & \xleftarrow{\text{in}_1} & B \\ & \searrow f & \downarrow & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array}$$

を可換にするような一意的な射を, $f + g: A \amalg B \rightarrow C$ と表す.

定義 2.18. モデル圏 \mathcal{C} の対象 A の cylinder 対象とは,

- 対象 $A \wedge I \in \mathcal{C}$
- 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & A \wedge I & \end{array}$$

であって p が弱同値であるもの

の組のことをいう. さらに cylinder 対象の定義において, i が cofibration であるとき $A \wedge I$ は good であるといい, i が cofibration かつ p が fibration であるとき $A \wedge I$ は very good であるという. ここで

$$\begin{aligned} i_0 &= i \circ \text{in}_0: A \xrightarrow{\text{in}_0} A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I \\ i_1 &= i \circ \text{in}_1: A \xrightarrow{\text{in}_1} A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I \end{aligned}$$

と置くと, 普遍性から $i = i_0 + i_1$ であることに注意する.

モデル圏の定義 2.1 の (MC4) によって, $A \in \mathcal{C}$ の very good cylinder 対象は少なくとも一つは存在する. しかし, \mathcal{C} が関手的分解を持たなければ, 対応 $A \mapsto A \wedge I$ は一般に関手にはならない.

補題 2.19. 対象 $A \in \mathcal{C}$ の cylinder 対象 $A \wedge I$ に対して, $i_0, i_1: A \rightarrow A \wedge I$ は弱同値である. さらに A が cofibrant で $A \wedge I$ が good ならば, i_0, i_1 は acyclic cofibration であり, $A \wedge I$ も cofibrant 対象になる.

Proof. i_0 についてだけ確かめる. 定義から $p \circ i_0 = p \circ i \circ \text{in}_0 = (\text{id} + \text{id}) \circ \text{in}_0 = \text{id}$ であり, 今 p も id も弱同値だから, (MC1) より i_0 も弱同値である.

さらに A が cofibrant で $A \wedge I$ が good であるとき, 余積 $A \amalg A$ が pushout

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{in}_0 \\ A & \xrightarrow{\text{in}_1} & A \amalg A \end{array}$$

でもあることに注意すると, A が cofibrant より $\emptyset \rightarrow A$ が cofibration で, 命題 2.14 より Cof が pushout で閉じるから in_0 も cofibration である. 今 i が cofibration であるから, よって $i_0 = i \circ \text{in}_0$ も cofibration である. また射 $\emptyset \rightarrow A \xrightarrow{\text{in}_0} A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I$ がすべて cofibration であるから, $A \wedge I$ も cofibrant 対象になる. \square

定義 2.20. 射 $f, g: A \rightarrow X$ について, f から g への左ホモトピーとは,

- A の cylinder 対象 $A \wedge I$
- 射 $H: A \wedge I \rightarrow X$

の組であって

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\ \downarrow i_0+i_1 & \nearrow H & \\ A \wedge I & & \end{array}$$

を可換にするもののこと. この条件は $H \circ i_0 = f$ かつ $H \circ i_1 = g$ であることと同値である. このとき H は $A \wedge I$ を経由するという. $A \wedge I$ が good であるとき H は good であるといい, $A \wedge I$ が very good であるとき H は very good であるという.

f から g への左ホモトピー H が存在するとき, f と g は left homotopic であるといい, $H: f \stackrel{\ell}{\sim} g$ または単に $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ と書く.

補題 2.21. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が left homotopic であるとき,

$$f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$$

が成り立つ.

Proof. 補題 2.19 より $i_0, i_1 \in \mathcal{W}$ であるから, (MC1) より

$$f = H \circ i_0 \in \mathcal{W} \iff H \in \mathcal{W} \iff g = H \circ i_1 \in \mathcal{W}$$

となる. \square

補題 2.22. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が left homotopic であるとき, f から g への good な左ホモトピーが存在する. さらに X が fibrant ならば, f から g への very good な左ホモトピーが存在する.

Proof. f, g が left homotopic のとき, cylinder 対象 $A \wedge I$ と射 $H: A \wedge I \rightarrow X$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\ i_0+i_1 \downarrow & \nearrow H & \\ A \wedge I & & \end{array}$$

が可換になる. ここで射 $i = i_0 + i_1: A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ に対して (MC4) より, 分解

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{i=i_0+i_1} & A \wedge I \\ i' \searrow & & \nearrow p' \\ & A \wedge I' & \end{array}$$

であって $i' \in \text{Cof}$ かつ $p' \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ であるものが存在する. このとき

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ i \searrow & & \nearrow p \\ i' \searrow & A \wedge I & \\ & \nearrow p' & \\ & A \wedge I' & \end{array}$$

は good cylinder 対象であり, $H' := H \circ p'$ が f から g への good 左ホモトピーを与える.

さらに X が fibrant であるとする. $p \circ p': A \wedge I' \xrightarrow{\sim} A$ に対して (MC4) と (MC1) より, 分解

$$\begin{array}{ccc} A \wedge I' & \xrightarrow{p \circ p'} & A \\ i'' \searrow & & \nearrow p'' \\ & A \wedge I'' & \end{array}$$

であって $i'' \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ かつ $p'' \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ であるものが存在する. このとき

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ i' \searrow & & \nearrow p \circ p' \\ & A \wedge I' & \\ i'' \searrow & & \nearrow p'' \\ & A \wedge I'' & \end{array}$$

は very good cylinder 対象である. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A \wedge I' & \xrightarrow{H'} & X \\ i'' \downarrow \wr & & \downarrow \\ A \wedge I'' & \longrightarrow & * \end{array}$$

に対して (MC3) よりリフト $H'': A \wedge I'' \rightarrow X$ が存在し, このとき $H'' \circ (i'' \circ i') = H' \circ i' = H \circ p' \circ i' = H \circ i = f + g$ より, H'' が f から g への very good 左ホモトピーを与える. \square

補題 2.23. A が cofibrant ならば, $\text{Hom}_C(A, X)$ 上の二項関係 \sim^ℓ は同値関係になる.

Proof. (反射律): 射 $f \in \text{Hom}_C(A, X)$ に対して, A の cylinder 対象として A 自身を取れば, $f: f \sim^\ell f$ となることがわかる.

(対称律): 射 $f, g \in \text{Hom}_C(A, X)$ に対して $H: f \sim^\ell g$ とする. $s = (\text{in}_1 + \text{in}_0): A \amalg A \rightarrow A \amalg A$ と置くと $(f + g) \circ s = (g + f)$ であるから

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{g+f} & X \\ \downarrow i_1+i_0 & \searrow s & \uparrow f+g \\ & A \amalg A & \\ & \swarrow i_0+i_1 & \uparrow H \\ A \wedge I & & \end{array}$$

が可換になるから, $H: g \sim^\ell f$ となる.

(推移律): 射 $f, g, h \in \text{Hom}_C(A, X)$ に対して, $f \sim^\ell g, g \sim^\ell h$ であるとする. 補題 2.22 より $H \circ i_0 = f$ かつ $H \circ i_1 = g$ となる good 左ホモトピー $H: A \wedge I \rightarrow X$ と, $H \circ i'_0 = g$ かつ $H \circ i'_1 = h$ となる good 左ホモトピー $H': A \wedge I' \rightarrow X$ が存在する. ここで pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & A \wedge I' \\ i_1 \downarrow \wr & \lrcorner & \downarrow b \\ A \wedge I & \xrightarrow{a} & A \wedge I'' \end{array}$$

を取ると, 補題 2.19 より $i_1, i'_0 \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ だから, 命題 2.14 より $a, b \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ となる. このとき $p \circ i_1 = \text{id}_A = p' \circ i'_0$ であるから pushout の普遍性より, $p = c \circ a$ かつ $p' = c \circ b$ となる射 $c: A \wedge I'' \rightarrow A$ が一意的存在する. $a, b, p, p' \in \mathcal{W}$ だから (MC1) より $c \in \mathcal{W}$ である. 射 $j_0, j_1: A \rightarrow A \wedge I''$ を $j_0 := a \circ i_0$, $j_1 := b \circ i'_1$ と定めると, $c \circ j_0 = c \circ a \circ i_0 = p \circ i_0 = \text{id}_A$, $c \circ j_1 = c \circ b \circ i'_1 = p' \circ i'_1 = \text{id}_A$ となるから

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ \searrow j_0+j_1 & & \nearrow c \\ & A \wedge I'' & \end{array}$$

は A の cylinder 対象となる. 再び, $H \circ i_1 = g = H' \circ i'_0$ であるから pushout の普遍性より, $H'' \circ a = H$ かつ $H'' \circ b = H'$ となる射 $H'': A \wedge I'' \rightarrow X$ が一意的存在する. このとき

$$\begin{aligned} H'' \circ (j_0 + j_1) &= H'' \circ (a \circ i_0 + b \circ i'_1) = (H'' \circ a \circ i_0 + H'' \circ b \circ i'_1) \\ &= (H \circ i_0 + H' \circ i'_1) = (f + h) \end{aligned}$$

となるから H'' は f から h への左ホモトピーとなる. □

一般に二項関係 \sim^ℓ で生成される同値関係を $\langle \sim^\ell \rangle$ と表し,

$$\pi^\ell(A, X) = \text{Hom}_C(A, X) / \langle \sim^\ell \rangle$$

と置く. 補題 2.23 より A が cofibrant なら $\langle \sim \rangle = \sim$ である.

補題 2.24. $A \in \mathcal{C}$ を cofibrant な対象とし, $p: Y \rightarrow X$ を acyclic fibration とする. このとき写像

$$p_*: \pi^\ell(A, Y) \rightarrow \pi^\ell(A, X); [f] \mapsto [p \circ f]$$

は well-defined な全単射写像である.

Proof. $H: f \sim^\ell g$ ならば $pH: pf \sim^\ell pg$ であるから, p_* は well-defined である.

任意の $[h] \in \pi^\ell(A, X)$ を取るとき, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $f: A \rightarrow Y$ が存在する. このとき $p_*([f]) = [p \circ f] = [h]$ となるから, p_* は全射である.

$f, g: A \rightarrow X$ について, $p_*([f]) = p_*([g])$ つまり $pf \sim^\ell pg$ であるとする. 補題 2.22 より pf から pg への good 左ホモトピー $H: A \wedge I \rightarrow X$ が存在する. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & Y \\ i \downarrow & \searrow pf+pg & \downarrow p \\ A \wedge I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $\tilde{H}: A \wedge I \rightarrow Y$ が存在し, これは f から g への左ホモトピーとなる. よって $f \sim^\ell g$ つまり $[f] = [g]$ となり, p_* は単射である. \square

補題 2.25. $X \in \mathcal{C}$ を fibrant な対象とし, $f, g: A \rightarrow X$ を射とする. このとき任意の射 $h: B \rightarrow A$ に対して, $f \sim^\ell g$ ならば $fh \sim^\ell gh$ となる.

Proof. 補題 2.22 より f から g への very good 左ホモトピー $H: A \wedge I \rightarrow X$ が存在する. A' の good cylinder 対象

$$\begin{array}{ccc} A' \amalg A' & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A' \\ i' \searrow & & \nearrow p' \\ & A' \wedge I & \end{array}$$

を一つ取る. 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A' \amalg A' & \xrightarrow{h \amalg h} & A \amalg A & \xrightarrow{i} & A \wedge I \\ i' \downarrow & \searrow \text{id} + \text{id} & \searrow \text{id} + \text{id} & \downarrow p & \downarrow p \\ A' \wedge I & \xrightarrow{\sim} & A' & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $k: A' \wedge I \rightarrow A \wedge I$ が存在する. このとき

$$\begin{array}{ccccc}
 & & fh+gh & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 A' \amalg A' & \xrightarrow{h \amalg h} & A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\
 \downarrow i' & & \downarrow i & \nearrow H & \\
 A' \wedge I & \xrightarrow{k} & A \wedge I & &
 \end{array}$$

が可換になるから, Hk は fh から gh への左ホモトピーとなる. □

補題 2.26. $X \in \mathcal{C}$ を fibrant な対象とすると, \mathcal{C} の合成は写像

$$\pi^\ell(A, X) \times \pi^\ell(B, A) \rightarrow \pi^\ell(B, X); ([f], [h]) \mapsto [f \circ h]$$

を誘導する.

Proof. 補題 2.24 と補題 2.25 より従う. □

2.2.2 Path 対象と右ホモトピー

対象 $A, B \in \mathcal{C}$ に対して, その積 $A \amalg B$ の持つ標準的な射を $\text{pr}_0: A \amalg B \rightarrow A$, $\text{pr}_1: A \amalg B \rightarrow B$ とする. また射 $f: C \rightarrow A$ と $g: C \rightarrow B$ に対して, 積の普遍性によって得られる

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & f \swarrow & \vdots & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\text{pr}_0} & A \amalg B & \xrightarrow{\text{pr}_1} & B
 \end{array}$$

を可換にするような一意的な射を, $(f, g): C \rightarrow A \amalg B$ と表す.

双対的に path 対象と右ホモトピーも定義できる.

定義 2.27. モデル圏 \mathcal{C} の対象 X の path 対象とは,

- 対象 $X^I \in \mathcal{C}$
- 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \times X \\
 \searrow i & & \nearrow p \\
 & X^I &
 \end{array}$$

であって i が弱同値であるもの

の組のことをいう. さらに path 対象の定義において, p が fibration であるとき X^I は good であるといい, p が fibration かつ i が cofibration であるとき X^I は very good であるという.

ここで

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{pr}_0 \circ p: X^I \xrightarrow{p} X \times X \xrightarrow{\text{pr}_0} X \\ p_1 &= \text{pr}_1 \circ p: X^I \xrightarrow{p} X \times X \xrightarrow{\text{pr}_1} X \end{aligned}$$

と置くと、普遍性から $p = (p_0, p_1)$ であることに注意する.

モデル圏の定義 2.1 の (MC4) によって, $X \in \mathcal{C}$ の very good path 対象は少なくとも一つは存在する. しかし, \mathcal{C} が関手的分解を持たなければ, 対応 $X \mapsto X^I$ は一般に関手にはならない.

補題 2.28. 対象 $X \in \mathcal{C}$ の path 対象 X^I に対して, $p_0, p_1: X^I \rightarrow X$ は弱同値である. さらに X が fibrant で X^I が good ならば, p_0, p_1 は acyclic fibration であり, X^I も fibrant 対象になる.

定義 2.29. 射 $f, g: A \rightarrow X$ について, f から g への右ホモトピーとは,

- X の path 対象 X^I
- 射 $H: A \rightarrow X^I$

の組であって

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(f,g)} & X \times X \\ & \searrow H & \uparrow (p_0, p_1) \\ & & X^I \end{array}$$

を可換にするもののこと. この条件は $p_0 \circ H = f$ かつ $p_1 \circ H = g$ であることと同値である. このとき H は X^I を経由するという. X^I が good であるとき H は good であるといい, X^I が very good であるとき H は very good であるという.

f から g への右ホモトピーが存在するとき, f と g は right homotopic であるといい, $f \sim g$ と書く.

補題 2.30. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が right homotopic であるとき,

$$f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$$

が成り立つ.

補題 2.31. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が right homotopic であるとき, f から g への good な右ホモトピーが存在する. さらに A が cofibrant ならば, f から g への very good な右ホモトピーが存在する.

補題 2.32. X が fibrant ならば, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ 上の二項関係 \sim は同値関係になる.

一般に二項関係 \sim で生成される同値関係を $\langle \sim \rangle$ と表し,

$$\pi^r(A, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) / \langle \sim \rangle$$

と置く. 補題 2.32 より X が fibrant なら $\langle \sim \rangle = \sim$ である.

補題 2.33. $X \in \mathcal{C}$ を fibrant な対象とし, $i: A \rightarrow B$ を acyclic cofibration とする. このとき写像

$$i^*: \pi^r(B, X) \rightarrow \pi^r(A, X); [f] \mapsto [f \circ i]$$

は well-defined な全単射写像である.

補題 2.34. $A \in \mathcal{C}$ を cofibrant な対象とし, $f, g: A \rightarrow X$ を射とする. このとき任意の射 $h: X \rightarrow Y$ に対して, $f \sim g$ ならば $h \circ f \sim h \circ g$ となる.

補題 2.35. $A \in \mathcal{C}$ を cofibrant な対象とするとき, \mathcal{C} の合成は写像

$$\pi^r(X, Y) \times \pi^r(A, X) \rightarrow \pi^r(A, Y); ([h], [f]) \mapsto [h \circ f]$$

を誘導する.

2.2.3 ホモトピー

次の補題にあるように, A が cofibrant で X が fibrant ならば左ホモトピーと右ホモトピーは一致する.

補題 2.36. 射 $f, g: A \rightarrow X$ に対して,

- (i) A が cofibrant のとき, $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ ならば $f \sim g$ である.
- (ii) X が fibrant のとき, $f \sim g$ ならば $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ である.

Proof. (ii) は (i) の双対だから, (i) だけ示す. 補題 2.22 より, good cylinder 対象

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ \searrow i_0 + i_1 & & \nearrow p \\ & A \wedge I & \end{array}$$

と射 $H: A \wedge I \rightarrow X$ で $H \circ (i_0 + i_1) = (f + g)$ となるものが存在する. A は cofibrant だから補

題 2.19 より i_0 は acyclic cofibration である. X の good path 対象

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \times X \\ & \searrow j & \nearrow q \\ & X^I & \end{array}$$

を一つ取るとき, $(fp, H) \circ i_0 = (fpi_0, Hi_0) = (f \circ \text{id}, f) = (\text{id}, \text{id}) \circ f$ であるから図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{j} & X^I \\ i_0 \downarrow \wr & & & \searrow (\text{id}, \text{id}) & \downarrow q \\ A \wedge I & \xrightarrow{(fp, H)} & X \times X & & \end{array}$$

は可換で, よって (MC3) よりリフト $K: A \wedge I \rightarrow X^I$ が存在する. このとき $q \circ K \circ i_1 = (fp, H) \circ i_1 = (fpi_1, Hi_1) = (f, g)$ となるから

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(f, g)} & X \times X \\ & \searrow K \circ i_1 & \uparrow q \\ & X^I & \end{array}$$

が可換になり, $K \circ i_1$ は f から g への右ホモトピーとなる. □

A を cofibrant な対象, X を fibrant な対象とすると, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ 上の二項関係 $\overset{\ell}{\sim}$ と $\overset{r}{\sim}$ は一致するから, これを $\sim := \overset{\ell}{\sim} = \overset{r}{\sim}$ とする. $f \sim g$ であるとき, f と g は homotopic であるという. さらに補題 2.23 や補題 2.32 より, \sim は同値関係であり

$$\pi(A, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) / \sim$$

と置く.

注意 2.37. 射 $f, g: A \rightarrow X$ について, A は cofibrant で X は fibrant であるとする. A の good cylinder 対象 $A \wedge I$ と X の good path 対象 X^I を任意に取ったとき, 補題 2.36 の証明から

$$f \sim g \iff A \wedge I \text{ を経由する } f \text{ から } g \text{ への左ホモトピーが存在する}$$

$$f \sim g \iff X^I \text{ を経由する } f \text{ から } g \text{ への右ホモトピーが存在する}$$

が成り立つ.

命題 2.38. \mathcal{C} をモデル圏とし, $A, X \in \mathcal{C}$ を cofibrant かつ fibrant であるとする. このとき任意の射 $f: A \rightarrow X$ について

$$f \text{ は弱同値である} \iff f \text{ は homotopy inverse を持つ}$$

が成り立つ. ここで f の homotopy inverse とは, $g \circ f \sim \text{id}_A$ かつ $f \circ g \sim \text{id}_X$ となるような射 $g: X \rightarrow A$ のことをいう.

Proof. f が弱同値であるとする. (MC4) より分解

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & X \\ & \searrow q & \nearrow p \\ & C & \end{array}$$

が存在する. (MC1) より p も弱同値であり, X が fibrant だから C も fibrant である. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{id}_A} & A \\ q \downarrow \wr & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & * \end{array}$$

に対して (MC3) よりリフト $r: C \rightarrow A$ が存在し, このとき $r \circ q = \text{id}_A$ となる. 一方, q が acyclic cofibration であるから補題 2.33 より全単射 $q^*: \pi^r(C, C) \rightarrow \pi^r(A, C)$ が得られる. このとき $q^*([qr]) = [qrq] = [q] = q^*([\text{id}_C])$ となるから $[qr] = [\text{id}_C]$, つまり $qr \sim \text{id}_C$ となる. よって r は q の homotopy inverse である. 同様に p の homotopy inverse s が得られ, このとき rs が f の homotopy inverse となる.

逆に f が homotopy inverse $g: X \rightarrow A$ を持つとする. (MC4) より分解

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow q & \nearrow p \\ & C & \end{array}$$

が存在する. (MC1) より p が弱同値であることを示せば十分である. $fg \sim \text{id}_X$ の左ホモトピーを $H: X \wedge I \rightarrow X$ とする. 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{q} & C \\ & \searrow \text{in}_0 & & \searrow f & \downarrow p \\ & & X \amalg X & & \\ i_0 \downarrow & \swarrow i & \searrow fg + \text{id}_X & & \downarrow \\ X \wedge I & \xrightarrow{H} & X & & \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $H': X \wedge I \rightarrow C$ が存在する. $s = H' \circ i_1$ と置けば, $ps = pH'i_1 = Hi_1 = \text{id}_X$ が成り立つ. 一方, q は弱同値であるから, 前半の証明より homotopy inverse r を持つ. このとき $p \sim pqr = fr$ がわかる. H' は右ホモトピー $qg \sim s$ を与えるから, $sp \sim qgp \sim qgfr \sim rq \sim \text{id}_C$ となる. 特に補題 2.21 より sq が弱同値になる. 図式

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\ p \downarrow & & \downarrow sp & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

が可換であるから p は sp の retract となり, よって (MC2) より p は弱同値になる. \square

2.3 モデル圏のホモトピー圏

2.2 節で議論した結果を用いれば、モデル圏 \mathcal{C} に対して次の六つの圏が得られる：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_c &:= \{\text{cofibrant な対象のなす } \mathcal{C} \text{ の充満部分圏} \} \subseteq \mathcal{C}, \\ \mathcal{C}_f &:= \{\text{fibrant な対象のなす } \mathcal{C} \text{ の充満部分圏} \} \subseteq \mathcal{C}, \\ \mathcal{C}_{cf} &:= \{\text{cofibrant かつ fibrant な対象のなす } \mathcal{C} \text{ の充満部分圏} \} \subseteq \mathcal{C}, \\ \pi\mathcal{C}_c &:= \{\text{cofibrant な対象とその間の射の右ホモトピー類のなす圏} \}, \\ \pi\mathcal{C}_f &:= \{\text{fibrant な対象とその間の射の左ホモトピー類のなす圏} \}, \\ \pi\mathcal{C}_{cf} &:= \{\text{cofibrant かつ fibrant な対象とその間の射のホモトピー類のなす圏} \}.\end{aligned}$$

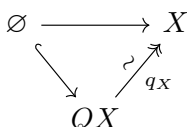
これらを用いてモデル圏のホモトピー圏を構成する。

その際、(co)fibrant replacement/resolution を取ることが重要になってくる。これはホモロジー代数における入射分解や射影分解のアナロジーである。

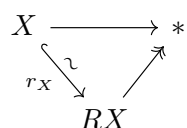
2.3.1 ホモトピー圏

まず関手的分解を持つとは限らないモデル圏において考える。

各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して、定義 2.1 の (MC4) より

$$\exists QX : \text{cofibrant}, \quad \exists q_X : QX \xrightarrow{\sim} X : \text{acyclic fibration},$$


となる。同様に

$$\exists RX : \text{fibrant}, \quad \exists r_X : X \xrightarrow{\sim} RX : \text{acyclic cofibration},$$


となる。このような cofibrant な対象 $QX \in \mathcal{C}$ と fibrant な対象 $RX \in \mathcal{C}$ を一つ取り固定しておく。ただし X が cofibrant なら $QX = X$, fibrant なら $RX = X$ とする。

このとき、acyclic fibration $q_X : QX \xrightarrow{\sim} X$ または単に QX を X の cofibrant resolution と呼び、acyclic cofibration $r_X : X \xrightarrow{\sim} RX$ または単に RX を X の fibrant resolution と呼ぶことにする。

注意 2.39. $X \in \mathcal{C}$ が fibrant ならば、一意的な射 $X \rightarrow *$ が fibration であるから、 $QX \rightarrow X \rightarrow *$ も fibration になり、 QX も fibrant になる。同様に、 X が cofibrant ならば RX も cofibrant である。

補題 2.40. モデル圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{\tilde{f}} & QY \\ q_X \downarrow \wr & & q_Y \downarrow \wr \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

を可換にするような射 $\tilde{f}: QX \rightarrow QY$ が存在する. さらに \tilde{f} は左ホモトピーまたは右ホモトピーの差を除いて f にしか依存せず,

$$\tilde{f} \in \mathcal{W} \iff f \in \mathcal{W}$$

が成り立つ. さらに Y が fibrant ならば, \tilde{f} は左ホモトピーまたは右ホモトピーの差を除いて f の左ホモトピー類にしか依存しない.

Proof. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & QY \\ \downarrow & & q_Y \downarrow \wr \\ QX & \xrightarrow{f \circ q_X} & Y \end{array}$$

に対して (MC3) より, リフト $\tilde{f}: QX \rightarrow QY$ が存在し, (MC1) より f が弱同値であることと \tilde{f} が弱同値であることが同値になる. \tilde{f} が左ホモトピーの差を除いて一意であることは補題 2.24 より従い, 右ホモトピーの差を除いて一意であることは補題 2.36 より従う. 最後の主張も補題 2.25 より従う. \square

注意 2.41. 補題 2.40 より, $f = \text{id}_X$ ならば $\tilde{f} \sim \text{id}_{QX}$ であり, $h = g \circ f$ ならば $\tilde{h} \sim \tilde{g} \circ \tilde{f}$ となる. したがって対応 $X \mapsto QX$ は, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対し $Q(f) = [\tilde{f}] \in \pi^r(QX, QY)$ と定めることで関手

$$Q: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$$

を定める. この関手 Q を cofibrant replacement 関手と呼ぶことがある (が, 本稿ではこの用語を, 関手的分解がある場合にとっておく. 2.3.3 小節を見よ).

補題 2.42. モデル圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ r_X \downarrow \wr & & r_Y \downarrow \wr \\ RX & \xrightarrow{\bar{f}} & RY \end{array}$$

を可換にするような射 $\bar{f}: RX \rightarrow RY$ が存在する. さらに \bar{f} は右ホモトピーまたは左ホモトピーの差を除いて f にしか依存せず,

$$\bar{f} \in \mathcal{W} \iff f \in \mathcal{W}$$

が成り立つ。 X が cofibrant ならば、 \bar{f} は右ホモトピーまたは左ホモトピーの差を除いて f の右ホモトピー類にしか依存しない。

Proof. 補題 2.40 の双対である。 \square

注意 2.43. 補題 2.42 より、 $f = \text{id}_X$ ならば $\bar{f} \sim \text{id}_{RX}$ であり、 $h = g \circ f$ ならば $\bar{h} \sim \bar{g} \circ \bar{f}$ となる。したがって対応 $X \mapsto RX$ は、 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対し $R(f) = [\bar{f}] \in \pi^\ell(RX, RY)$ と定めることで関手

$$R: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$$

を定める。この関手 R を fibrant replacement 関手と呼ぶことがある（が、本稿ではこの用語を、関手の分解がある場合にとっておく。2.3.3 小節を見よ）。

補題 2.44. 関手 $Q: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$ は、部分圏 \mathcal{C}_f に制限することで関手 $Q': \pi\mathcal{C}_f \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ を誘導する。同様に関手 $R: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_f$ は、部分圏 \mathcal{C}_c に制限することで関手 $R': \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ を誘導する。

Proof. R が R' を誘導することだけ確認する。そのためには、 $X, Y \in \mathcal{C}_c$ と \mathcal{C} の射 $f, g: X \rightarrow Y$ に対して、 $f \sim g$ ならば $R(f) = R(g)$ を示せばよい。 X が cofibrant だから、これは補題 2.42 から従う。 \square

定義 2.45. モデル圏 \mathcal{C} に対して、 \mathcal{C} のホモトピー圏 (homotopy category) $\text{Ho}\mathcal{C}$ を

- $\text{ob}(\text{Ho}\mathcal{C}) := \text{ob}(\mathcal{C})$
- $\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y) := \text{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(R'QX, R'QY) = \pi(RQX, RQY)$

となる圏として定義する。Quillen homotopy category と呼ぶ。

注意 2.46. モデル圏 \mathcal{C} のホモトピー圏 $\text{Ho}\mathcal{C}$ は、標準的な関手

$$\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$$

を持つ。これは射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して $\gamma(f) = R'Q(f) \in \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y)$ を対応させる関手である。 X, Y が cofibrant かつ fibrant な対象であれば、その構成から

$$\gamma_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y) = \pi(X, Y)$$

は全射となる。

ホモトピー圏の定義において $R'Q$ の部分を $Q'R$ に置き換えても、双対性から結果は変わらない；2.3.2 小節で得られる普遍性から、それらは圏同型になる。

命題 2.47. \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$\gamma(f) \text{ が } \mathbf{Ho}\mathcal{C} \text{ の同型射である} \iff f \text{ が弱同値である}$$

が成り立つ. また $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$ の任意の射は, \mathcal{C} の射による γ の像と \mathcal{C} の弱同値による γ の像の逆射の有限個の合成で表せる.

Proof. 構成から $\gamma(f) = R'Q(f)$ は, 射 $\tilde{f}: RQX \rightarrow RQY$ のホモトピー類であり, $\gamma(f)$ が同型であるということとは \tilde{f} が homotopy inverse を持つということである. したがって命題 2.38 と補題 2.40 と補題 2.42 より

$$\begin{aligned} \gamma(f) = [\tilde{f}] \text{ が } \mathbf{Ho}\mathcal{C} \text{ の同型射である} &\iff \tilde{f} \text{ が homotopy inverse を持つ} \\ &\iff \tilde{f} \text{ が弱同値である} \\ &\iff f \text{ が弱同値である} \\ &\iff f \text{ が弱同値である} \end{aligned}$$

となる.

また $v: X \rightarrow Y$ を $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$ の任意の射とする. $X \in \mathcal{C}$ に対して, cofibrant resolution $q_X: QX \xrightarrow{\sim} X$ と fibrant resolution $r_{QX}: QX \xrightarrow{\sim} RQX$ は弱同値だから, $\gamma(q_X), \gamma(r_{QX})$ は同型射である. このとき $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$ の射 $\gamma(r_{QY}) \circ \gamma(q_Y)^{-1} \circ v \circ \gamma(q_X) \circ \gamma(r_{QX})^{-1}: RQX \rightarrow RQY$ が得られるが, 注意 2.46 より

$$\gamma_{RQX, RQY}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(RQX, RQY) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\mathcal{C}}(RQX, RQY)$$

が全射であるから, ある \mathcal{C} の射 $f: RQX \rightarrow RQY$ が存在して $\gamma(f) = \gamma(r_{QY}) \circ \gamma(q_Y)^{-1} \circ v \circ \gamma(q_X) \circ \gamma(r_{QX})^{-1}$ となる. したがって $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$ の射 v は

$$v = \gamma(q_Y) \circ \gamma(r_{QY})^{-1} \circ \gamma(f) \circ \gamma(r_{QX}) \circ \gamma(q_X)^{-1} \quad (\spadesuit)$$

と表せる. □

系 2.48. \mathcal{C} をモデル圏, $F, G: \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を関手, $\theta: F \circ \gamma \Rightarrow G \circ \gamma$ を自然変換とするとき, 射の族 $\{\theta_X\}_{X \in \mathcal{C}}$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ も定める.

Proof. 射の族 $\{\theta_X\}_{X \in \mathcal{C}}$ が自然変換 $F \Rightarrow G$ を定めるためには, 任意の $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$ の射 $v: X \rightarrow Y$ に対して

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & G(X) \\ F(v) \downarrow & & \downarrow G(v) \\ F(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & G(Y) \end{array}$$

が可換になることを示せばよい. これは, 命題 2.47 の証明で得た表示 (\spadesuit) を使えば直ちにわかる. □

補題 2.49. \mathcal{C} をモデル圏とし, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を \mathcal{C} の弱同値を \mathcal{D} の同型にうつすような関手とする. このとき \mathcal{C} の射 $f, g: A \rightarrow X$ について, $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ または $f \stackrel{r}{\sim} g$ ならば $F(f) = F(g)$ となる.

Proof. 双対性より $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ の場合だけ示す. 補題 2.22 より f から g への good な左ホモトピー $H: A \wedge I \rightarrow X$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ \swarrow i_0 + i_1 & & \nearrow w \\ & A \wedge I & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\ \downarrow i_0 + i_1 & & \nearrow H \\ & A \wedge I & \end{array}.$$

このとき $w i_0 = \text{id}_A = w i_1$ だから $F(w)F(i_0) = F(w)F(i_1)$ である. ここで w が弱同値より $F(w)$ が同型射になり, $F(i_0) = F(i_1)$ がわかる. よって $H i_0 = f$, $H i_1 = g$ より $F(f) = F(H)F(i_0) = F(H)F(i_1) = F(g)$ となる. \square

2.3.2 モデル圏の局所化

一般に圏の局所化は, 与えられた射のクラスを同型にうつすような関手の中で普遍的なものとして定義される.

定義 2.50. \mathcal{C} を圏とし, $\mathcal{W} \subseteq \text{mor}(\mathcal{C})$ を射のあるクラスとする. \mathcal{W} に関する \mathcal{C} の狭義局所化 (strict localization) とは, 圏 $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ と関手 $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ の組であって,

- (i) Q は \mathcal{W} を可逆にする, すなわちすべての $w \in \mathcal{W}$ に対して $Q(w)$ は同型射になる
- (ii) \mathcal{W} を可逆にする任意の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 関手 $F': \mathcal{C}_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{D}$ が一意的に存在して $F' \circ Q = F$ となる

をみたすときをいう. 普遍性から, 狭義局所化は存在すれば一意的な圏同型を除いて一意である.

以降, 狭義局所化のことを単に局所化と呼ぶ.

圏の局所化はいつでも存在するとは限らないが, モデル圏の場合, 弱同値に関する局所化は常に存在する.

定理 2.51. モデル圏 \mathcal{C} に対して, 関手 $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho} \mathcal{C}$ は弱同値のクラス \mathcal{W} に関する局所化である.

Proof. 命題 2.47 より, 関手 γ は弱同値を可逆にする.

弱同値を可逆にする関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を任意に取る. このとき関手 $F': \text{Ho} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を

- $X \in \text{ob}(\text{Ho} \mathcal{C}) = \text{ob}(\mathcal{C})$ に対して, $F'(X) := F(X)$ とする
- $\text{Ho} \mathcal{C}$ の射 $v: X \rightarrow Y$ に対して, 命題 2.47 の証明で得た表示 (♠) より

$$v = \gamma(q_Y) \circ \gamma(r_{QY})^{-1} \circ \gamma(f) \circ \gamma(r_{QX}) \circ \gamma(q_X)^{-1}$$

となる \mathcal{C} の射 $f: RQ(X) \rightarrow RQ(Y)$ が存在する。このとき

$$F'(v) := F(q_Y) \circ F(r_{QY})^{-1} \circ F(f) \circ F(r_{QX}) \circ F(q_X)^{-1}$$

とする。 \mathcal{C} の射 $g: RQ(X) \rightarrow RQ(Y)$ も $v = \gamma(q_Y) \circ \gamma(r_{QY})^{-1} \circ \gamma(g) \circ \gamma(r_{QX}) \circ \gamma(q_X)^{-1}$ をみたすとする、

$$\gamma(f) = \gamma(r_{QY}) \circ \gamma(q_Y)^{-1} \circ v \circ \gamma(q_X) \circ \gamma(r_{QX})^{-1} = \gamma(g)$$

より $f \sim g$ がわかる。このとき補題 2.49 より $F(f) = F(g)$ となるから、 $F'(v)$ は well-defined である

によって定義する。このとき $F = F' \circ \gamma$ となる。このような F' の一意性も構成から明らかである。 \square

以降、 $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$ のことも単に局所化と呼ぶことがある。

系 2.52. $\mathcal{C}, \mathcal{C}_j$ ($j \in J$) をモデル圏とすると、圏同型

$$\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{op}}) \cong (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}, \quad \text{Ho}\left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j\right) \cong \prod_{j \in J} \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$$

が成り立つ。

Proof. $\mathcal{C}, \mathcal{C}_j$ の局所化を $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$, $\gamma_j: \mathcal{C}_j \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ とする。

圏同型 $\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{op}}) \cong (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}$ を示すためには、関手 $\gamma^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}$ が局所化の普遍性を持つことを確認すればよい。 γ^{op} が \mathcal{C}^{op} の弱同値を可逆にすることは明らか。 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ を \mathcal{C}^{op} の弱同値を可逆にする関手とすると、これは \mathcal{C} の弱同値を可逆にする関手 $\bar{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ と対応し、局所化の普遍性から $\bar{F} = \bar{F}' \circ \gamma$ となる関手 $\bar{F}': \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ が一意的に存在する。 \bar{F}' が $F': (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ に対応するとすれば、 F' は $F = F' \circ \gamma^{\text{op}}$ となる一意的な射である。よって $\gamma^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}$ は \mathcal{C}^{op} の弱同値による局所化である。

圏同型 $\text{Ho}(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j) \cong \prod_{j \in J} \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ を示すためには、関手 $\prod_j \gamma_j: \prod_j \mathcal{C}_j \rightarrow \prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ が局所化の普遍性を持つことを確認すればよい。 $\prod_j \gamma_j$ が $\prod_j \mathcal{C}_j$ の弱同値を可逆にすることは明らか。 $F: \prod_j \mathcal{C}_j \rightarrow \mathcal{E}$ を $\prod_j \mathcal{C}_j$ の弱同値を可逆にする関手とすると、関手 $F': \prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j) \rightarrow \mathcal{E}$ を

- 対象 $(X_j)_j \in \text{ob}(\prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)) = \prod_j \text{ob}(\mathcal{C}_j)$ に対して、 $F'((X_j)_j) := F((X_j)_j)$ とする
- $\prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ の射 $(v_j)_j: (X_j)_j \rightarrow (Y_j)_j$ に対して、命題 2.47 の証明で得た表示 (♠) より

$$v_j = \gamma_j(q_{Y_j}) \circ \gamma_j(r_{QY_j})^{-1} \circ \gamma_j(f_j) \circ \gamma_j(r_{QX_j}) \circ \gamma_j(q_{X_j})^{-1}$$

となる \mathcal{C}_j の射 $f_j: RQ(X_j) \rightarrow RQ(Y_j)$ が存在する。このとき

$$F'((v_j)_j) := (F(q_{Y_j}) \circ F(r_{QY_j})^{-1} \circ F(f_j) \circ F(r_{QX_j}) \circ F(q_{X_j})^{-1})_j$$

とする。補題 2.49 より $F'(v)$ が well-defined であることもわかる

によって定義する．このとき $F = F' \circ \prod_j \gamma_j$ となる．このような F' の一意性も構成から明らかである．よって $\prod_j \gamma_j: \prod_j \mathcal{C}_j \rightarrow \prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ は $\prod_j \mathcal{C}_j$ の弱同値による局所化である． \square

2.3.3 関手的分解を持つ場合

モデル圏 \mathcal{C} が関手的分解 (α, β) を持つとき，次の対応によって関手 $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が定まる：

- 対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して，始対象からの一意的な射を $!: \emptyset \rightarrow X$ としたとき， $Q(X) := \text{cod } \alpha(!) = \text{dom } \beta(!)$ とする．このとき分解

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!} & X \\ \searrow \alpha(!) & & \nearrow \beta(!) \\ & Q(X) & \end{array}$$

があり， $Q(X)$ は cofibrant な対象である．

- 射 $f: X \rightarrow Y$ に対して，可換図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!} & X \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow f \\ \emptyset & \xrightarrow{!} & Y \end{array}$$

を考えて， $Q(f) := \text{cod } \alpha(\text{id}, f) = \text{dom } \beta(\text{id}, f)$ とする．このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \emptyset & \hookrightarrow & Q(X) & \xrightarrow[\beta(!)]{\sim} & X \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow Q(f) & & \downarrow f \\ \emptyset & \hookrightarrow & Q(Y) & \xrightarrow[\beta(!)]{\sim} & Y \end{array}$$

がある．

この関手 Q を cofibrant replacement 関手と呼ぶ．さらに各 $X \in \mathcal{C}$ について $q_X = \beta(!): Q(X) \rightarrow X$ と置けば，これは自然変換 $q: Q \Rightarrow \text{Id}$ をなす．これを cofibrant resolution という．

同様に，次の対応によって関手 $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が定まる：

- 対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して，終対象への一意的な射を $!: X \rightarrow *$ としたとき， $R(X) := \text{cod } \alpha(!) = \text{dom } \beta(!)$ とする．このとき分解

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!} & X \\ \searrow \alpha(!) & & \nearrow \beta(!) \\ & R(X) & \end{array}$$

があり， $R(X)$ は fibrant な対象である．

- 射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{!} & * \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ Y & \xrightarrow{!} & * \end{array}$$

を考えて, $R(f) := \text{cod } \alpha(f, \text{id}) = \text{dom } \beta(f, \text{id})$ とする. このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\alpha(!)]{\sim} & R(X) & \longrightarrow & * \\ f \downarrow & & \downarrow R(f) & & \downarrow \text{id} \\ Y & \xrightarrow[\alpha(!)]{\sim} & R(Y) & \longrightarrow & * \end{array}$$

がある.

この関手 R を fibrant replacement 関手と呼ぶ. さらに各 $X \in \mathcal{C}$ について $r_X = \alpha(!): X \rightarrow R(X)$ と置けば, これは自然変換 $r: \text{Id} \Rightarrow R$ をなす. これを fibrant resolution という.

これらを用いることで, 同様にホモトピー圏を構成できる.

2.4 導来関手

モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が弱同値を保つとき, 局所化の普遍性から

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \gamma_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow \gamma_{\mathcal{D}} \\ \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow[\text{Ho } F]{\text{---}} & \text{Ho } \mathcal{D} \end{array}$$

を可換にする関手 $\text{Ho } F$ が一意的に存在する. しかし, 一般にはすべての F が弱同値を保つとは限らない. そのような場合に $\text{Ho } F$ に準じた関手を考えたものが導来関手である.

定義 2.53. \mathcal{C} をモデル圏とし, $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$ を弱同値による局所化とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について,

- (i) F の左導来関手 (left derived functor) とは, 関手 $\mathbf{L}F: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\tau: \mathbf{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$ の組 $(\mathbf{L}F, \tau)$ であって,

- 任意の関手 $G: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\theta: G \circ \gamma \Rightarrow F$ に対して, 自然変換 $\xi: G \Rightarrow \mathbf{L}F$ が一意的に存在して, $\theta = \tau \circ \xi \gamma$ となる

という普遍性が成り立つときをいう.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \gamma \downarrow & \nearrow \tau & \searrow F \\ \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{L}F} & \mathcal{D} \end{array}$$

(ii) F の右導来関手 (right derived functor) とは、関手 $\mathbf{R}F: \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\sigma: F \Rightarrow \mathbf{R}F \circ \gamma$ の組 $(\mathbf{R}F, \sigma)$ であって、

- 任意の関手 $G: \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\theta: F \Rightarrow G \circ \gamma$ に対して、自然変換 $\xi: \mathbf{R}F \Rightarrow G$ が一意的存在して、 $\theta = \xi \gamma \circ \sigma$ となる

という普遍性が成り立つときをいう。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \gamma \downarrow & \swarrow F & \\ \mathbf{Ho}\mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{R}F} & \mathcal{D} \end{array}$$

σ

言い換えれば、 F の左導来関手とは局所化 γ に沿った F の右 Kan 拡張のことであり、 F の右導来関手とは局所化 γ に沿った F の左 Kan 拡張のことである。普遍性から、左導来関手や右導来関手は、存在すれば一意的自然同型を除いて一意である。

注意 2.54. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が弱同値を可逆にするならば、定理 2.51 より $F = F' \circ \gamma$ となる関手 $F': \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が一意に存在し、系 2.48 により (F', id) が F の左導来関手 $\mathbf{L}F$ かつ右導来関手 $\mathbf{R}F$ になることがわかる。

補題 2.55. \mathcal{C} をモデル圏とする。

- 関手 $F: \mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ が (cofibrant 対象の間の) acyclic cofibration を可逆にすると、 \mathcal{C}_c の射 $f, g: A \rightarrow B$ が \mathcal{C} の射として right homotopic ならば、 $F(f) = F(g)$ となる。特に F は関手 $\pi\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ を誘導する。
- 関手 $F: \mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{D}$ が (fibrant 対象の間の) acyclic fibration を可逆にすると、 \mathcal{C}_f の射 $f, g: X \rightarrow Y$ が \mathcal{C} の射として left homotopic ならば、 $F(f) = F(g)$ となる。特に F は関手 $\pi\mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{D}$ を誘導する。

Proof. (ii) は (i) の双対だから、(i) だけ示す。

補題 2.31 より f から g への very good な右ホモトピー $H: A \rightarrow B^I$ が存在する：

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & B \times B \\ w \searrow & & \nearrow (p_0, p_1) \\ & B^I & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(f, g)} & B \times B \\ H \searrow & & \nearrow (p_0, p_1) \\ & B^I & \end{array}$$

ここで $B \in \mathcal{C}_c$ だから B^I も cofibrant 対象であり、 w は \mathcal{C}_c の射である。仮定より $F(w)$ は同型射である。このとき $p_0 w = \text{id}_B = p_1 w$ より $F(p_0)F(w) = F(p_1)F(w)$ となるから $F(p_0) = F(p_1)$ がわかる。よって $p_0 H = f$, $p_1 H = g$ より $F(f) = F(p_0)F(H) = F(p_1)F(H) = F(g)$ となる。 \square

命題 2.56. \mathcal{C} をモデル圏とする.

- (i) 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が, \mathcal{C} の cofibrant 対象の間の弱同値を可逆にするとき, F の左導来関手 $(\mathbf{L}F, \tau)$ が存在する. さらにすべての cofibrant 対象 $X \in \mathcal{C}$ について $\tau_X: \mathbf{L}F(X) \rightarrow F(X)$ は同型射になる.
- (ii) 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が, \mathcal{C} の fibrant 対象の間の弱同値を可逆にするとき, F の右導来関手 $(\mathbf{R}F, \sigma)$ が存在する. さらにすべての fibrant 対象 $X \in \mathcal{C}$ について $\sigma_X: F(X) \rightarrow \mathbf{R}F(X)$ は同型射になる.

Proof. (ii) は (i) の双対だから, (i) だけ示す.

合成関手 $\mathcal{C}_c \hookrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ を考えると, これは特に acyclic cofibration を可逆にするから, 補題 2.55 により関手 $F': \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ が誘導される. このとき $F' \circ Q: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ は弱同値を可逆にする.

\therefore \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $F' \circ Q(f) = F'([f]) = F(\tilde{f})$ である. f が弱同値であるとき補題 2.40 より射 $\tilde{f}: QX \rightarrow QY$ は cofibrant 対象の間の弱同値になるから, 仮定より $F' \circ Q(f) = F(\tilde{f})$ は同型射になる.

したがって局所化の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \pi\mathcal{C}_c \\ \gamma \downarrow & & \downarrow F' \\ \mathbf{Ho}\mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{L}F} & \mathcal{D} \end{array}$$

を可換にする関手 $\mathbf{L}F: \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が一意に存在する. また各 $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathbf{L}F(\gamma(X)) = \mathbf{L}F(X) = F(QX)$ であり, $\tau_X := F(q_X): \mathbf{L}F(X) = F(QX) \rightarrow F(X)$ と置くとこれは自然変換 $\tau: \mathbf{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$ を与える. X が cofibrant 対象ならば, $QX = X$ で $q_X = \text{id}$ だから, $\tau_X = F(\text{id}) = \text{id}$ であることに注意する.

このとき組 $(\mathbf{L}F, \tau)$ が F の左導来関手であることを示す. 関手 $G: \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\theta: G \circ \gamma \Rightarrow F$ を任意に取る. 各 $X \in \mathcal{C}$ に対して

$$\xi_X := \theta_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1}: G(X) \rightarrow G(QX) \rightarrow F(QX) = \mathbf{L}F(X)$$

と置くと, \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ について

$$\begin{array}{ccccc} G(X) & \xrightarrow{G(\gamma(q_X))^{-1}} & G(QX) & \xrightarrow{\theta_{QX}} & F(QX) = \mathbf{L}F(X) \\ G \circ \gamma(f) \downarrow & & \downarrow G \circ \gamma(\tilde{f}) & & \downarrow F(\tilde{f}) = F'(Q(f)) = \mathbf{L}F \circ \gamma(f) \\ G(Y) & \xrightarrow{G(\gamma(q_Y))^{-1}} & G(QY) & \xrightarrow{\theta_{QY}} & F(QY) = \mathbf{L}F(Y) \end{array}$$

が可換になるから, $\{\xi_X\}_X$ は自然変換 $\xi: G \circ \gamma \Rightarrow \mathbf{L}F$ をなす. 系 2.48 より自然変換 $\xi: G \Rightarrow \mathbf{L}F$ も得る. このとき θ の自然性を用いれば, $X \in \mathcal{C}$ に対し $\tau_X \circ \xi_{\gamma(X)} = F(q_X) \circ \theta_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1} =$

θ_X となり, $\tau \circ \xi \gamma = \theta$ が成り立つことがわかる. 別な自然変換 $\xi': G \Rightarrow \mathbf{L}F$ も $\tau \circ \xi' \gamma = \theta$ をみたすとする. QX が cofibrant 対象だから $\tau_{QX} = \text{id}$ であることより, $\theta_{QX} = \tau_{QX} \circ \xi'_{QX} = \xi'_{QX}$ である. $\mathbf{L}F \circ \gamma(q_X) = F'([\widetilde{q_X}]) = F'([\widetilde{\text{id}}]) = F(\text{id}) = \text{id}$ に注意すれば, ξ' の自然性から

$$\xi'_X = \mathbf{L}F(\gamma(q_X)) \circ \xi'_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1} = \text{id} \circ \theta_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1} = \xi_X$$

となり, 自然変換として $\xi' = \xi$ がわかる. 以上より $(\mathbf{L}F, \tau)$ が F の左導来関手となる. \square

定義 2.57. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏, $\gamma_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$, $\gamma_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ を弱同値による局所化とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について,

- (i) F の全左導来関手 (total left derived functor) とは, 関手 $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ の左導来関手 $\mathbf{L}F = \mathbf{L}(\gamma_{\mathcal{D}} \circ F): \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ のことをいう.
- (ii) F の全右導来関手 (total right derived functor) とは, 関手 $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ の右導来関手 $\mathbf{R}F = \mathbf{R}(\gamma_{\mathcal{D}} \circ F): \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ のことをいう.

系 2.58. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とする.

- (i) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を cofibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, F の全左導来関手 $\mathbf{L}F$ が存在する.
- (ii) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を fibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, F の全右導来関手 $\mathbf{R}F$ が存在する.

Proof. 全導来関手は関手 $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ の導来関手であるから, 命題 2.56 よりその存在がわかる. \square

命題 2.59. \mathcal{C}, \mathcal{D} を関手的分解を持つモデル圏とする.

- (i) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を cofibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を cofibrant replacement 関手とすると

$$\text{Ho } F \circ \text{Ho } Q: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}_c \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$$

は F の全左導来関手になる.

- (ii) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を fibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を fibrant replacement 関手とすると

$$\text{Ho } F \circ \text{Ho } R: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}_f \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$$

は F の全右導来関手になる.

Proof. 命題 2.56 と同様にして, 導来関手の普遍性を持つことが確認できる. \square

注意 2.60. 命題 2.56 で構成した導来関手は, cofibrant replacement 関手 Q , つまり各 X に対応する cofibrant 対象 QX の取り方に依存する. 言い換えれば, 導来関手の構成にはモデル圏の構造だけでなく, QX の選択も必要となる. [Hov99] ではこのような状況を避けるために関手的分解を持つモデル圏だけを考えている. つまり, cofibrant replacement 関手をモデル圏の構造から標準的に得られるようにして, 導来関手をモデル圏の構造だけに依存して定義されるようにしている.

2.5 Quillen 随伴

随伴とは, 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ と自然な全単射

$$\Phi = \Phi_{A,X}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(X))$$

の組 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ のことであった. 自然な全単射 Φ から単位 (unit) と呼ばれる自然な射 $\eta = \eta_A: A \rightarrow GF(A)$ と余単位 (counit) と呼ばれる自然な射 $\varepsilon = \varepsilon_X: FG(X) \rightarrow X$ が得られ, \mathcal{D} の射 $g: F(A) \rightarrow X$ や \mathcal{C} の射 $f: A \rightarrow G(X)$ について

$$\Phi(g) = G(g) \circ \eta_A, \quad \Phi^{-1}(f) = \varepsilon_X \circ F(f)$$

となっているのであった.

補題 2.61. 圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と \mathcal{C} の射 $f: A \rightarrow B$ と \mathcal{D} の射 $g: X \rightarrow Y$ について,

$$F(f) \text{ は } g \text{ に関して左リフト性を持つ} \iff f \text{ は } G(g) \text{ に関して左リフト性を持つ}$$

が成り立つ.

Proof. 随伴 $F \dashv G$ があるとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{u} & X \\ F(f) \downarrow & & \downarrow g \\ F(B) & \xrightarrow{v} & Y, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi(u)} & G(X) \\ f \downarrow & & \downarrow G(g) \\ B & \xrightarrow{\Phi(v)} & G(Y) \end{array}$$

の可換性は同値である. このことから主張は直ちに従う. \square

\mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とする.

命題 2.62. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 次は同値である.

- (i) F は cofibration と acyclic cofibration を保つ.
- (ii) G は fibration と acyclic fibration を保つ.
- (iii) F は cofibration を保ち, G は fibration を保つ.

(iv) F は acyclic cofibration を保ち, G は acyclic fibration を保つ.

Proof. (i) \Leftrightarrow (iii) だけ示す. 他も同様である. (i) \Rightarrow (iii): F が cofibration と acyclic cofibration を保つとすると, $F(\text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C})) \subseteq \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{D})$ である. このとき \mathcal{D} の射 g について, 命題 2.11 と補題 2.61 より

$$\begin{aligned} g \in \text{Fib}(\mathcal{D}) &\iff \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{D}) \text{ は } g \text{ に関して左リフト性を持つ} \\ &\implies F(\text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C})) \text{ は } g \text{ に関して左リフト性を持つ} \\ &\iff \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C}) \text{ は } G(g) \text{ に関して左リフト性を持つ} \\ &\iff G(g) \in \text{Fib}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

となるから, G は fibration を保つ.

(iii) \Rightarrow (i): F が cofibration を保ち, G が fibration を保つとすると, $G(\text{Fib}(\mathcal{D})) \subseteq \text{Fib}(\mathcal{C})$ である. このとき \mathcal{C} の射 f について, 命題 2.11 と補題 2.61 より

$$\begin{aligned} f \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C}) &\iff f \text{ は } \text{Fib}(\mathcal{C}) \text{ に関して左リフト性を持つ} \\ &\implies f \text{ は } G(\text{Fib}(\mathcal{D})) \text{ に関して左リフト性を持つ} \\ &\iff F(f) \text{ は } \text{Fib}(\mathcal{D}) \text{ に関して左リフト性を持つ} \\ &\iff F(f) \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

となるから, F は acyclic cofibration を保つ. □

定義 2.63. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が Quillen 随伴 (Quillen adjunction) であるとは, 命題 2.62 の同値な条件をみたすときをいう. このとき左随伴 F を左 Quillen 関手 (left Quillen functor) といい, 右随伴 G を右 Quillen 関手 (right Quillen functor) という.

注意 2.64. 左随伴は余極限を保つから, 左 Quillen 関手 F は始対象を保ち, 特に cofibrant な対象を保存する. 双対的に, 右 Quillen 関手 G は終対象を保ち, 特に fibrant な対象を保存する.

例 2.65. \mathcal{C} を完備かつ余完備なモデル圏, J を集合とする.

このとき \mathcal{C} が完備であることから, 積を取る関手 $\prod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は対角関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ の右随伴になっている. 積圏 \mathcal{C}^J に積モデル圏構造を入れてモデル圏とすると, 随伴 $\Delta \dashv \prod$ において左随伴 Δ は cofibration と acyclic cofibration を保つから, これは Quillen 随伴である. 特に $\prod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は右 Quillen 関手である.

同様に, 余積を取る関手 $\coprod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は対角関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ の左随伴になっている. 積圏 \mathcal{C}^J に積モデル圏構造を入れてモデル圏とすると, 随伴 $\coprod \dashv \Delta$ において右随伴 Δ は fibration と acyclic fibration を保つから, これは Quillen 随伴である. 特に $\coprod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は左 Quillen 関手である.

補題 2.66 (K. Brown の補題). \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とすると、関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について次が成り立つ.

- (i) F が \mathcal{C} の cofibrant な対象の間の acyclic cofibration を \mathcal{D} の弱同値にうつすとき、 F は \mathcal{C} の cofibrant な対象の間のすべての弱同値を \mathcal{D} の弱同値にうつす.
- (ii) F が \mathcal{C} の fibrant な対象の間の acyclic fibration を \mathcal{D} の弱同値にうつすとき、 F は \mathcal{C} の fibrant な対象の間のすべての弱同値を \mathcal{D} の弱同値にうつす.

特に、 F が左 Quillen 関手であるとき、 F は cofibrant な対象の間の弱同値を保つ. 双対的に $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が右 Quillen 関手であるとき、 G は fibrant な対象の間の弱同値を保つ.

Proof. (ii) は (i) の双対だから、(i) だけ示す. $A, B \in \mathcal{C}$ を cofibrant 対象とし、 $f: A \rightarrow B$ をその間の弱同値とする. 射 $f + \text{id}_B: A \amalg B \rightarrow B$ に対して、(MC4) より $(f + \text{id}_B) = p \circ i$ となる cofibration $i: A \amalg B \rightarrow C$ と acyclic fibration $p: C \rightarrow B$ が存在する. ここで図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\quad} & A \\ \downarrow & & \downarrow \text{in}_0 \\ B & \xrightarrow{\text{in}_1} & A \amalg B \end{array}$$

は pushout 図式であるから、命題 2.14 より in_0, in_1 は cofibration になり、 $i \circ \text{in}_0: A \rightarrow C$ と $i \circ \text{in}_1: B \rightarrow C$ も cofibration である. 特に C が cofibrant な対象になる. $p \circ i \circ \text{in}_0 = f$ と $p \circ i \circ \text{in}_1 = \text{id}_B$ と p が弱同値であるから、(MC1) より $i \circ \text{in}_0$ と $i \circ \text{in}_1$ も弱同値である. よって仮定から $F(i \circ \text{in}_0), F(i \circ \text{in}_1)$ が弱同値になる. このとき $F(p) \circ F(i \circ \text{in}_1) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}$ が弱同値であることから、(MC1) より $F(p)$ が弱同値であることがわかり、したがって $F(f) = F(p) \circ F(i \circ \text{in}_0)$ も弱同値となる. \square

命題 2.67. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏、 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をその間の Quillen 随伴とする. このとき全導来関手 $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$ が存在し、これらは随伴 $\langle \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G, \tilde{\Phi} \rangle: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ をなす.

Proof. 左 Quillen 関手 F は acyclic cofibration を保つから、K. Brown の補題 2.66 より cofibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつす. よって系 2.58 より全左導来関手 $\mathbb{L}F$ が存在する. 双対的に右 Quillen 関手 G の全右導来関手 $\mathbb{R}G$ も存在する.

まず cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ と fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して、全単射

$$\Phi: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(X))$$

のもとでホモトピー関係が対応することを確認する. \mathcal{D} の射 $f, g: F(A) \rightarrow X$ について $f \sim g$ であるとき、特に $f \stackrel{r}{\sim} g$ であるから、補題 2.31 より f から g への good 右ホモトピー $H: F(A) \rightarrow X^I$

が存在する：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \times X \\ & \searrow i \sim & \uparrow p \\ & & X^I, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{(f, g)} & X \times X \\ & \searrow H & \uparrow p \\ & & X^I. \end{array}$$

ここで X が fibrant であるから good path 対象 X^I も fibrant である．右 Quillen 関手 G は積と fibration と fibrant 対象の間の弱同値を保つから，可換図式

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & G(X) \times G(X) \\ & \searrow G(i) \sim & \uparrow G(p) \\ & & G(X^I), \end{array}$$

が得られ， $G(X^I)$ は $G(X)$ の good path 対象となることがわかる．全単射 Φ のもとで射 $(f, g): F(A) \rightarrow X \times X$ は $(\Phi(f), \Phi(g)): A \rightarrow G(X) \times G(X)$ に対応することから，可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\Phi(f), \Phi(g))} & G(X) \times G(X) \\ & \searrow \Phi(H) & \uparrow G(p) \\ & & G(X^I) \end{array}$$

が成り立ち， $\Phi(H)$ は $\Phi(f)$ から $\Phi(g)$ への右ホモトピーとなる．よって $\Phi(f) \sim \Phi(g)$ が成り立つ．同様に $\Phi(f) \sim \Phi(g)$ ならば $f \sim g$ が成り立つことがわかるから，全単射 Φ のもとでホモトピー関係が対応する．したがって Φ は自然な全単射

$$\pi_{\mathcal{C}}(F(A), X) \cong \pi_{\mathcal{D}}(A, G(X))$$

を誘導する．

さて $A \in \mathcal{C}$ と $X \in \mathcal{D}$ を任意の対象とする． \mathcal{C} の cofibrant replacement 関手を Q ， \mathcal{D} の fibrant replacement 関手を R で表すとする．全導来随伴の構成から $\mathbb{L}F(A) = F(QA)$ は cofibrant で $\mathbb{R}G(X) = G(RX)$ は fibrant である．よって全単射

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{D}}(\mathbb{L}F(A), X) &\xrightarrow{(\gamma(r_X))^*} \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{D}}(F(QA), RX) \\ &\cong \pi_{\mathcal{D}}(F(QA), RX) \\ &\cong \pi_{\mathcal{C}}(QA, G(RX)) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{C}}(QA, G(RX)) \\ &\xrightarrow{(\gamma(q_A)^{-1})^*} \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{C}}(A, \mathbb{R}G(X)) \end{aligned}$$

が得られる．これは関手 $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ としての自然同型を与え，系 2.48 より関手 $\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}) \cong \text{Ho}(\mathcal{C})^{\text{op}} \times \text{Ho}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Set}$ としての自然同型にもなる．したがって随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ が成り立つ． \square

この随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ を $F \dashv G$ の導来随伴 (derived adjunction) という. 導来随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ の unit を $\tilde{\eta}$, counit を $\tilde{\varepsilon}$ とすると, 命題 2.67 の証明より

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_A &= \gamma(\Phi(r_{F(QA)})) \circ \gamma(q_A)^{-1} = \gamma(G(r_{F(QA)})) \circ \gamma(\eta_{QA}) \circ \gamma(q_A)^{-1} \\ &\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{\eta}_A} & \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(A)) = GR(FQ(A)) \\ \gamma(q_A)^{-1} \downarrow & & \nearrow \gamma(G(r_{F(QA)})) \\ QA & \xrightarrow{\gamma(\eta_{QA})} & G(F(QA)) \end{array} \\ \tilde{\varepsilon}_X &= \gamma(r_X)^{-1} \circ \gamma(\Phi^{-1}(q_{G(RX)})) = \gamma(r_X)^{-1} \circ \gamma(\varepsilon_{RX}) \circ \gamma(F(q_{G(RX)})) \\ &\quad \begin{array}{ccc} FQ(GR(X)) = \mathbb{L}F(\mathbb{R}G(X)) & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_X} & X \\ \gamma(F(q_{G(RX)})) \searrow & & \uparrow \gamma(r_X)^{-1} \\ & F(G(RX)) \xrightarrow{\gamma(\varepsilon_{RX})} & RX \end{array} \end{aligned}$$

である.

例 2.68. \mathcal{C} を完備かつ余完備なモデル圏, J を集合とする. 積圏 \mathcal{C}^J に積モデル圏構造を入れてモデル圏とする. 例 2.65 より, 随伴 $\coprod \dashv \Delta \dashv \prod$ は Quillen 随伴であった.

ここで対角関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ が弱同値を保つことから, 注意 2.54 より Δ の全左導来関手と全右導来関手は一致する. これは, 系 2.52 の同型 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}^J) \cong (\mathrm{Ho} \mathcal{C})^J$ を通じて $\mathrm{Ho} \mathcal{C}$ の対角関手 $\Delta: \mathrm{Ho} \mathcal{C} \rightarrow (\mathrm{Ho} \mathcal{C})^J$ になる.

よって命題 2.67 より Quillen 随伴 $\coprod \dashv \Delta \dashv \prod$ の導来随伴として, 随伴 $\mathbb{L}(\coprod) \dashv \Delta \dashv \mathbb{R}(\prod)$ が得られる. 特に $\mathrm{Ho} \mathcal{C}$ の対角関手 Δ が左右の随伴を持つから, $\mathrm{Ho} \mathcal{C}$ はすべての積と余積を持つ.

命題 2.69. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏, $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をその間の Quillen 随伴とする. このとき次は同値である.

- (i) 導来随伴 $\langle \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G, \tilde{\Phi} \rangle$ は随伴同値である.
- (ii) 任意の cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ について, \mathcal{C} の射 $A \xrightarrow{\eta_A} G(F(A)) \xrightarrow{G(r_{FA})} GR(FA)$ は弱同値であり, 任意の fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ について, \mathcal{D} の射 $FQ(GX) \xrightarrow{F(q_{GX})} F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X$ は弱同値である.
- (iii) 任意の cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ と任意の fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して, \mathcal{D} の射 $g: F(A) \rightarrow X$ が弱同値であることと \mathcal{C} の射 $\Phi(g): A \rightarrow G(X)$ が弱同値であることは同値である.

Proof. (i) \Leftrightarrow (ii): 対象 $A \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{D}$ に対して, 命題 2.47 より

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_A = \gamma(\Phi(r_{FQA})) \circ \gamma(q_A)^{-1} \text{ が同型射} &\iff \gamma(\Phi(r_{FQA})) \text{ が同型射} \\ &\iff \Phi(r_{FQA}) = G(r_{FQA}) \circ \eta_{QA} \text{ が弱同値} \\ \tilde{\varepsilon}_X = \gamma(r_X)^{-1} \circ \gamma(\Phi^{-1}(q_{GRX})) \text{ が同型射} &\iff \gamma(\Phi^{-1}(q_{GRX})) \text{ が同型射} \\ &\iff \Phi^{-1}(q_{GRX}) = \varepsilon_{RX} \circ F(q_{GRX}) \text{ が弱同値} \end{aligned}$$

となる．よって $A \in \mathcal{C}$ が cofibrant なら $QA = A$ で、 $X \in \mathcal{D}$ が fibrant なら $RX = X$ であるから、主張が成り立つ．

(iii) \Rightarrow (ii): cofibrant な対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して、弱同値 $r_{F(A)}: F(A) \xrightarrow{\sim} R(F(A))$ を考えると、(iii) より $\Phi(r_{FA}) = G(r_{FA}) \circ \eta_A: A \rightarrow GR(FA)$ も弱同値になる．同様に fibrant な対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して、(iii) より $\Phi^{-1}(q_{GX}) = \varepsilon_X \circ F(q_{GX}): FQ(GX) \rightarrow X$ も弱同値になる．

(ii) \Rightarrow (iii): cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ と任意の fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ を任意に取る． \mathcal{D} の射 $g: F(A) \rightarrow X$ が弱同値であるとき、可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) & \xrightarrow{G(g)} & G(X) \\ \parallel & & \downarrow G(r_{FA}) & & \downarrow G(r_X) \\ A & \xrightarrow{\Phi(r_{FA})} & GR(FA) & \xrightarrow{G(\bar{g})} & G(RX) \end{array}$$

を考える．まず (ii) から $\Phi(r_{FA}) = G(r_{FA}) \circ \eta_A$ は弱同値である．次に g が弱同値であることから補題 2.42 より $\bar{g}: R(FA) \rightarrow RX$ が弱同値であり、K. Brown の補題 2.66 より右 Quillen 関手 G は fibrant 対象の間の弱同値を保つから、 $G(\bar{g}), G(r_X)$ も弱同値である．よって (MC1) より、 $G(g) \circ \eta_A = \Phi(g)$ も弱同値であることがわかる．

同様に \mathcal{C} の射 $f = \Phi(g): A \rightarrow G(X)$ が弱同値であるとき、可換図式

$$\begin{array}{ccccc} F(QA) & \xrightarrow{F(\tilde{f})} & FQ(GX) & \xrightarrow{\Phi^{-1}(q_{GX})} & X \\ F(q_X) \downarrow & & \downarrow F(q_{GX}) & & \parallel \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & FG(X) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & X \end{array}$$

を考えれば、上辺と左辺が弱同値になり、(MC1) より $\varepsilon_X \circ F(f) = \Phi^{-1}(f)$ も弱同値になることがわかる． \square

定義 2.70. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の Quillen 随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が Quillen 同値 (Quillen equivalence) であるとは、命題 2.69 の同値な条件をみたすときをいう．

系 2.71. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏、 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle, \langle F \dashv G', \Phi' \rangle, \langle F' \dashv G, \Phi'' \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をその間の Quillen 随伴とすると、

$$\begin{aligned} \langle F \dashv G, \Phi \rangle \text{ は Quillen 同値である} &\iff \langle F \dashv G', \Phi' \rangle \text{ は Quillen 同値である} \\ \langle F \dashv G, \Phi \rangle \text{ は Quillen 同値である} &\iff \langle F' \dashv G, \Phi'' \rangle \text{ は Quillen 同値である} \end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof. 命題 2.69 より

$$\begin{aligned}
F \dashv G \text{ は Quillen 同値である} &\iff \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G \text{ は随伴同値である} \\
&\iff \mathbb{L}F \text{ は圏同値である} \\
&\iff \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G' \text{ は随伴同値である} \\
&\iff F \dashv G' \text{ は Quillen 同値である}
\end{aligned}$$

となる．二つ目の主張も同様。 \square

この系より F を単に Quillen 同値であると言ったりする。

系 2.72. $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ をモデル圏, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ を左 Quillen 関手 (または右 Quillen 関手) とする．このとき F, G, GF のうち二つが Quillen 同値であるならば, もう一つも Quillen 同値である。

Proof. 自然同型 $\mathbb{L}(GF) \cong \mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F$ が成り立つことから, すぐにわかる。 \square

系 2.73. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の Quillen 随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について, 次は同値である。

- (i) $\langle F \dashv G, \Phi \rangle$ は Quillen 同値である。
- (ii) F は次をみたす。
 - (a) F は cofibrant 対象の間の弱同値を反射する．すなわち cofibrant 対象 $A, B \in \mathcal{C}$ の間の射 $f: A \rightarrow B$ に対して, $F(f)$ が弱同値ならば f も弱同値である。
 - (b) すべての fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して, \mathcal{D} の射 $FQ(GX) \xrightarrow{F(q_{GX})} F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X$ は弱同値である。
- (iii) G は次をみたす。
 - (a) G は fibrant 対象の間の弱同値を反射する．すなわち fibrant 対象 $X, Y \in \mathcal{D}$ の間の射 $g: X \rightarrow Y$ に対して, $G(g)$ が弱同値ならば g も弱同値である。
 - (b) すべての cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して, \mathcal{C} の射 $A \xrightarrow{\eta_A} G(F(A)) \xrightarrow{G(r_{FA})} GR(FA)$ は弱同値である。

Proof. (i) \Leftrightarrow (ii) だけ示す．(i) \Leftrightarrow (iii) も同様である。

(i) \Rightarrow (ii): 命題 2.69 の (ii) より, (b) は成り立つ．cofibrant 対象 $A, B \in \mathcal{C}$ の間の射 $f: A \rightarrow B$ について, $F(f)$ が弱同値であるとする．可換図式

$$\begin{array}{ccc}
F(QA) & \xrightarrow{F(\tilde{f})} & F(QB) \\
F(q_A) \downarrow & & \downarrow F(q_B) \\
F(A) & \xrightarrow[\sim]{F(f)} & F(B)
\end{array}$$

において, K. Brown の補題 2.66 より F が cofibrant 対象の間の弱同値を保つから, $F(q_A), F(q_B)$

は弱同値になる．よって (MC1) より, $F(\tilde{f})$ も弱同値になり, $\mathbb{L}F(\gamma(f)) = \gamma(F(\tilde{f}))$ が同型になる．ここで $\mathbb{L}F$ が圏同値であるから, $\gamma(f)$ も同型である．したがって f は弱同値になる．

(ii) \Rightarrow (i): $\langle \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G, \tilde{\Phi} \rangle$ が随伴同値であることを示す．まず (b) より counit $\tilde{\varepsilon}_X$ が同型であることがわかるから, unit $\tilde{\eta}_A$ が同型であることを示せばよい．随伴の三角等式より可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}F(A) & \xrightarrow{\mathbb{L}F(\tilde{\eta}_A)} & \mathbb{L}F \circ \mathbb{R}G \circ \mathbb{L}F(A) \\ & \searrow & \downarrow \tilde{\varepsilon}_{\mathbb{L}F(A)} \\ & & \mathbb{L}F(A) \end{array}$$

があるが, $\tilde{\varepsilon}_{\mathbb{L}F(A)}$ が同型だから $\mathbb{L}F(\tilde{\eta}_A)$ も同型となる．ここで $\tilde{\eta}_A = \gamma(f) \circ \gamma(w)^{-1}$ となる \mathcal{C} の射 f と弱同値 w が存在することに注意すると, $\mathbb{L}F(\tilde{\eta}_A) = \mathbb{L}F(\gamma(f)) \circ \mathbb{L}F(\gamma(w)^{-1})$ が同型であるということは $\mathbb{L}F(\gamma(f)) = \gamma(F(\tilde{f}))$ が同型であるということである．すると $F(\tilde{f})$ が弱同値になり, 仮定 (a) から \tilde{f} も弱同値で, 補題 2.40 より f も弱同値となる．よって $\gamma(f)$ が同型となるから, $\tilde{\eta}_A = \gamma(f) \circ \gamma(w)^{-1}$ も同型となる．したがって $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ は随伴同値である． \square

参考文献

- [DwSp95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. *Homotopy theories and model categories*. In: *Handbook of Algebraic Topology*, 73–126, 1995.
- [GoSc07] Paul Goerss and Kristen Schemmerhorn. *Model categories and simplicial methods*. In: *Interactions between homotopy theory and algebra*, Contemporary Mathematics 436, 3–49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. <https://arxiv.org/abs/math/0609537>.
- [Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Mathematical Surveys and Monographs 99, American Mathematical Society, 2003. <https://web.math.rochester.edu/people/faculty/doug/otherpapers/pshmain.pdf>.
- [Hov99] Mark Hovey. *Model categories*. Mathematical Surveys and Monographs 63, American Mathematical Society, 1999.
- [Hov] Mark Hovey. “Errata to Model Categories.” <https://hopf.math.purdue.edu/Hovey/model-err.pdf>.
- [MaPo12] J. P. May and Kate Ponto. *More concise algebraic topology. Localization, completion, and model categories*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012.
- [Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics 43, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [数学の犬] 数学の犬. 『モデル圏』. https://sites.google.com/site/mathdogs1121/model_category.