形式変形理論概要

2022年1月23日　@paper3510mm

Literature :

§1-3、: Manetti : Deformation theory via differential graded Lie algebras (2005)
Manetti : Differential graded Lie algebras and formal deformation theory (2006)
「変形理論」, 第3回琵琶湖若手数学者勉強会 報告集 (2004)

§2、 Sernesi : Deformations of algebraic schemes (2006)
+ 藤木明先生による書評
Hartshorne : Deformation theory (2010)

§4、 Porta : Derived formal moduli problems (2013)

§0. Intro

▨ 変形理論の起源： Kodaira-Spencer 理論 (1958)
　└ 複素構造の変形.
　　= 複素多様体の座標系の貼り合わせ方をちょっと変える.

▨ 複素構造の変形 $<$ 解析的　⇝ 倉西空間
　　　　　　　　　代数(幾何)的.

- 複素多様体 X の無限小変形とは、

$$\pi : X_A \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A : \text{flat sur.} \quad (A : \text{Artin local ring with } A/\mathfrak{m}_A = \mathbb{C})$$

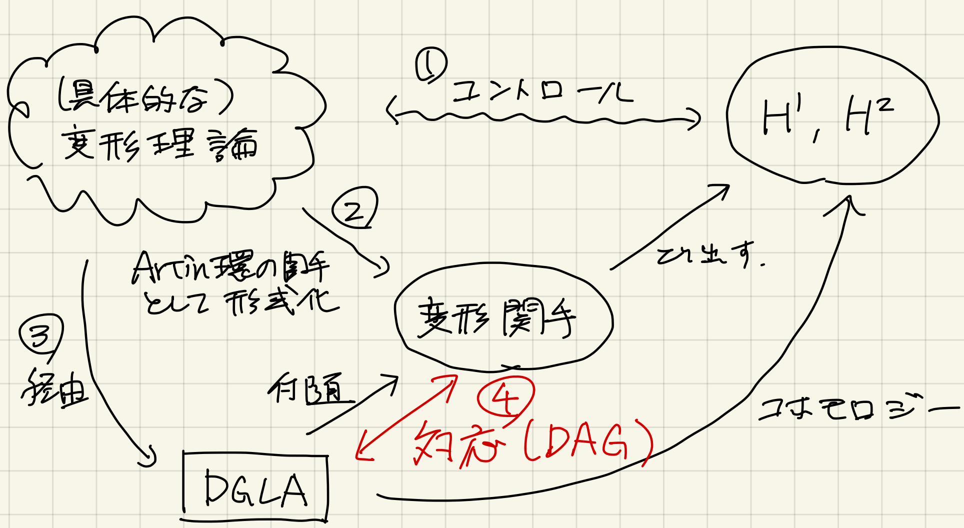
s.t.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X_A \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}\,A \end{tikzcd} \quad : \text{pullback.}$$

のこと.
特に、$A = k[t]/(t^2)$ のとき、一次の無限小変形という

- 問題意識は2つ.
  - 変形の方向はどれくらいあるか.　⟶ 一次の無限小変形
  - 変形はどれくらい滑らかにできるか.　⟶ 変形の障害類

- X：コンパクト複素多様体に対して、$\Theta_X = \mathcal{H}om(\Omega^1, \mathcal{O}_X)$: holo. vector bundle とすると、
  - X の一次の無限小変形は、$H^1(X, \Theta_X)$ の元と1対1に対応する.
  - X の障害類は、$H^2(X, \Theta_X)$ の元で与えられる

▨ 様々な変形理論
- 複素多様体の変形　$\leftrightarrow$　$H^1(X, \Theta_X)$
- 代数の変形　$\leftrightarrow$　$HH^2(A, A)$: Hochschild コホモロジー
- スキームの変形
- ベクトル束の変形
- Poisson 構造の変形
- アーベル圏の変形　　etc...



§1. 形式変形理論

k = base field, $\mathrm{ch}\, k = 0$ を fix する.
A : local k-algebra の極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ で表す.

§§1-1. アルティン環の関手と接空間

$$\mathrm{Art} = \mathrm{Art}_k : \text{cat. of} \begin{cases} \text{obj} : \text{local Artin } k\text{-alg. } (A, \mathfrak{m}_A) \quad \text{s.t. } A/\mathfrak{m}_A = k \\ \text{mor} : \text{local homomorphism} \end{cases}$$

Rmk 1.1

A : k-alg. に対し、

A is Noether $:\Longleftrightarrow$ A のイデアルの上昇列は必ず停留する.
$\Longleftrightarrow$ すべてのイデアルは有限生成

A is Artin $:\Longleftrightarrow$ A のイデアルの減少列は必ず停留する.
$\Longleftrightarrow$ A : Noether かつ $\dim A = 0$

すべての素イデアルが極大イデアル

$(A, \mathfrak{m}_A)$: local Artin k-alg について、次が成り立つ

- A の Krull 次元は 0.
  よって、 $\mathrm{Spec}\, A = \{\mathfrak{m}_A\}$
- $\mathfrak{m}_A$ はべき零 (nilpotent) である.
- $\alpha : B \to A$: local sur. なら、 $\alpha|_{\mathfrak{m}_B} : \mathfrak{m}_B \to \mathfrak{m}_A$: sur.
- zero ring は含まない (local でない)

例 1.2

重要な例は、 $k[\varepsilon] = k[t]/(t^2) \in \mathrm{Art}_k$
他には、 $k[t]/(t^n) \in \mathrm{Art}_k$ も

Rmk 1.3

Art_k の射 $\beta : B \to A$, $\gamma : C \to A$ に対し、

$$B \times_A C := \{(b, c) \in B \times C \mid \beta(b) = \gamma(c)\}$$

は Art_k の pullback を与える.
$B \times_A C$ は、 $\mathfrak{m}_B \times_{\mathfrak{m}_A} \mathfrak{m}_C = \mathrm{Ker}(B \times_A C \to k)$ を極大イデアルに持つ局所環.

Def 1.4

Artin環の関手 (functor of Artin rings) とは、

$F: \mathrm{Art}_k \longrightarrow \mathrm{Set}$: functor s.t. $F(k) = \{*\}$

のこと. Artin環の関手の間の射とは、nat. trans. $\phi: F \Rightarrow G$ のこと.

以降 FやGは Artin環の関手とする.

例 1.5

(i) $* : \mathrm{Art}_k \longrightarrow \mathrm{Set}$ は Artin環の関手. (自明な関手)
$A \longmapsto \{*\}$

(ii) R = local k-algebra s.t. $R/\mathfrak{m}_R \cong k$ に対し、

$h_R : \mathrm{Art}_k \longrightarrow \mathrm{Set}$; $A \longmapsto \mathrm{Hom}(R, A) := \{\text{local } k\text{-alg. hom } R \to A\}$

とすると、h_R : functor of Artin rings.

(∵) $A = k$ のとき、$R \to R/\mathfrak{m}_R \cong k$: k-alg. hom. で、$(R \to R/\mathfrak{m}_R) \in \mathrm{Hom}(R, k)$

$f: R \to k$: $\underset{\text{local}}{k\text{-alg.}}$ hom. があるとき、$f(\mathfrak{m}_R) = 0$ だから、

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[drr, bend left, "id"] & & \\ R \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & R/\mathfrak{m}_R \arrow[r, dashed, "\exists!", "\cong"'] & k \end{tikzcd}$$

よって、$f = (R \to R/\mathfrak{m}_R \cong k)$ となり、$\mathrm{Hom}(R, k) = \{*\}$ ■

(iii) V = k-vec. space とする.

$T_V : \mathrm{Art}_k \longrightarrow \mathrm{Set}$; $A \longmapsto V \otimes \mathfrak{m}_A$

とすると、T_V : functor of Artin rings. □

さて、Art_k における pullback 図式

$$\begin{tikzcd} B \times_A C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & A \end{tikzcd} \quad : \text{pullback}$$

を考える. このとき、F: Artin環の関手に対して

$$\begin{tikzcd} F(B\times_A C) \arrow[dr, dashed, "\exists!\eta"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & F(B)\times_{F(A)} F(C) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & F(C) \arrow[d, "F(\gamma)"] \\ & F(B) \arrow[r, "F(\beta)"'] & F(A) \end{tikzcd}$$

によって $\eta: F(B\times_A C) \longrightarrow F(B)\times_{F(A)} F(C)$ が得られる.

Def 1.6

F: Artin環の関手 is a deformation functor (変形関手)

$:\Longleftrightarrow$ (1) $^\forall B \longrightarrow A$: sur. in Art_k, η : sur.

(2) $A = k$ なら、η : bij.

F is homogeneous $:\Longleftrightarrow$ $^\forall B \longrightarrow A$: sur. in Art_k, η : bij.

homogeneous $\Rightarrow$ deformation functor である.

$k[\varepsilon] := k[x]/(x^2)$ と定める $(\varepsilon = \bar{x},\ \varepsilon^2 = 0)$

Def 1.7

F: functor of Artin rings に対し、$t_F := F(k[\varepsilon])$ を、F の接空間 (tangent space) という。

Prop 1.8

F = deformation functor に対して、t_F は自然な k-vec. sp. の構造をもつ
$\phi : F \Rightarrow G$: Artin環の関手の射 は、k-linear hom $t_\phi : t_F \to t_G$ を誘導する。

proof

- $F(k) = \{*\}$ だから、

$$k \hookrightarrow k[\varepsilon]$$
$$\rightsquigarrow \quad F(k) = \{*\} \longrightarrow F(k[\varepsilon]) = t_F$$

によって、元 $0 \in t_F$ を定める

- (H_2) より $F(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) = t_F \times t_F$ だから、

$$k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon] \longrightarrow k[\varepsilon] \ ; \ (a + b_1\varepsilon,\ a + b_2\varepsilon) \mapsto a + (b_1 + b_2)\varepsilon$$
$$\rightsquigarrow \quad t_F \times t_F \longrightarrow t_F$$

によって 和 を定める。

- $c \in k$ に対し、

$$k[\varepsilon] \longrightarrow k[\varepsilon] \ ; \ a + b\varepsilon \mapsto a + cb\varepsilon$$
$$\rightsquigarrow \quad t_F \longrightarrow t_F$$

によって、スカラー倍を定める。

これにより、t_F : k-vec. sp. となる。
$\phi : F \Rightarrow G$ に対し、$\phi(k[\varepsilon]) : t_F \to t_G$ が k-linear hom になることもわかる。 ∎

nat. trans. $\phi : F \Rightarrow G$ があると、Art_k の射 $B \to A$ に対して、

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[dr, dashed, "\exists! \rho"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\phi_B"'] & & \\
& G(B) \times_{G(A)} F(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & F(A) \arrow[d, "\phi_A"] \\
& G(B) \arrow[r] & G(A)
\end{tikzcd}$$

によって $\rho : F(B) \to G(B) \times_{G(A)} F(A)$ が得られる。

Def 1.9

F, G: functor of artin rings.
$\phi : F \Rightarrow G$ = nat. trans.
について、

(1) ϕ is 不分岐 (unramified) $:\Leftrightarrow$ $t_\phi : t_F \to t_G$: inj.
(2) ϕ is 滑らか (smooth) $:\Leftrightarrow$ $\forall \beta : B \to A$: sur. in Art_k,
$\rho : F(B) \to G(B) \times_{G(A)} F(A)$: surj.
(3) ϕ is étale $:\Leftrightarrow$ ϕ : unramified かつ smooth.
(4) F is smooth $:\Leftrightarrow$ $F \to *$: smooth
$\Leftrightarrow$ $\forall \beta : B \to A$: sur. in Art_k,
$F(\beta) : F(B) \to F(A)$: sur.

Rmk 1.10

ϕ : smooth $\Leftrightarrow$ ${}^\forall B \twoheadrightarrow A$: sur in Art_k,
$$\begin{tikzcd} h_A \arrow[r, "\forall"] \arrow[d] & F \arrow[d, "\phi"] \\ h_B \arrow[r, "\forall"'] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & G \end{tikzcd}$$

Prop 1.11

$\phi : F \Rightarrow G$: smooth のとき、 ${}^\forall A \in Art_k$, $\phi_A : F(A) \longrightarrow G(A)$: sur

特に、 $t_\phi : t_F \longrightarrow t_G$: sur.

proof

$\beta : A \longrightarrow A/m_A = k$: sur. と考えれば、 $\rho = \phi_A$ となるから OK ■

Cor 1.12

ϕ : étale ならば、 $t_\phi : t_F \longrightarrow t_G$: bij. (hence, iso.) □

§§1-2、障碍理論

Def 1.13

Art_k の small surjection とは、

$$\alpha : B \twoheadrightarrow A : \text{sur. in } \mathrm{Art}_k \quad \text{s.t.}\ m_B \cdot I = 0 \quad (I := \mathrm{Ker}(\alpha))$$

のこと。

このとき、I : vec. space over $B/m_B = k$ となる. B : Noether より I は有限次元.

Art_k の small extension とは、

$$e : \ 0 \to I \to B \xrightarrow{\alpha} A \to 0 : \text{exact} \quad \text{with } \alpha = \text{small sur.}$$

のこと。

特に $\dim_k I = 1$ のとき、principal small extension という.

例 1.14

$$0 \to (x)/(x^2) \to k[x]/(x^2) \to k[x]/(x) \to 0$$

は principal small extension

$$0 \to (x)/(x^3) \to k[x]/(x^3) \to k[x]/(x) \to 0$$

は small extension. (principal ではない)

Prop 1.15

すべての Art_k の sur. は、有限個の small sur. の合成で表せる.

proof

$\alpha : B \to A$: sur. in Art_k をとる。 $I = \mathrm{Ker}(\alpha)$ とおく。

$$n(\alpha) = n := \min\{ n' \mid m_B^{n'} \cdot I = 0 \} \geq 1$$

とおく。 B : Artin だから m_B はべき零で、n は有限の値になる.

$n = 1$ のとき、 $m_B \cdot I = 0$ となるから、 α : small sur.

$n \geq 2$ のとき、 $J = m_B^{n-1} \cdot I$ とおくと、 $J \subseteq I = \mathrm{Ker}(\alpha)$ より、

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\ B' := B/J \arrow[ur, dashed, "\exists \alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

このとき $\mathrm{Ker}(\beta) = J$ で、 $m_B \cdot J = 0$ より、 β : small sur. となる.

また、 $\mathrm{Ker}(\alpha') = \overline{I}$, $m_{B'} = \overline{m_B}$ だから、

$$\overline{m_B}^{\,n-1} \cdot \overline{I} = \overline{m_B^{n-1} \cdot I} = \overline{J} = 0$$

が成り立ち、 $n(\alpha') < n(\alpha)$ となる.

これを繰り返せば、いずれ $n = 1$ となり、small sur. の有限個の合成に分解できる ■

Lem 1.16

$\phi : F \Rightarrow G$: nat. trans. に対して、

$\forall \beta : B \longrightarrow A$: small sur. in Art_k, $\rho : F(B) \longrightarrow G(B) \times_{G(A)} F(A)$: sur.

ならば、ϕ : smooth. である。

proof

$\alpha : B \to A$: sur. が、$\alpha = (B \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{\alpha'} A)$, β = small sur. と分解できるとする。

$$
\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[dr, "\rho_\beta"] \arrow[drr, bend left, "F(\beta)"] \arrow[ddr, dashed, "\rho_\alpha"'] \arrow[dddr, bend right, "\phi_B"'] & & & \\
& \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & F(B') \arrow[d, "\rho_{\alpha'}"'] \arrow[dr, bend left, "F(\alpha')"] \arrow[dd, dashed, bend left, "\phi_B"] & \\
& \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \times \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & F(A) \arrow[d, "\phi_A"] \\
& G(B) \arrow[r, "G(\beta)"'] \arrow[rr, bend right, "G(\alpha)"'] & G(B') \arrow[r, "G(\alpha')"'] & G(A)
\end{tikzcd}
$$

より,

$$
\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[rr, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\rho_\beta"'] & \circlearrowleft & \cdot \\
& \cdot \arrow[ur, "(\rho_{\alpha'}\text{の pullback})"'] &
\end{tikzcd}
$$

となる。仮定より ρ_β = sur. である。

もし、$\rho_{\alpha'}$ = sur. なら、($\rho_{\alpha'}$ の pullback) も sur. となるから、ρ_α = sur. となる。

すべての sur. α は、有限個の small sur. の合成で表せるから、これをくり返していけばよい

∎

Cor 1.17

F : Artin環の関手 が smooth $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha : B \longrightarrow A$: small sur. $F(B) \longrightarrow F(A)$: sur.

pf

$G = *$ とすればよい。 ∎

Def 1.18

$F: Art_k \to Set$: functor of Artin rings.

Fに対する障碍理論 (obstruction theory) とは、

・ V : k-vec. sp.

・ Art_k の small ext. $e = 0 \to I \to B \xrightarrow{\alpha} A \to 0$ に対して、

$v_e : F(A) \to V \otimes_k I$: map.

を与える対応

の組であって、

(1) $\xi \in F(A)$ が $F(B)$ に持ち上がるならば、 $v_e(\xi) = 0$

i.e. $v_e(F\alpha(FB)) = 0$

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[d, "F\alpha"'] \arrow[dr, "0"] & \\ F(A) \arrow[r, "v_e"'] & V\otimes_k I \end{tikzcd}$$

(2) small ext. の間の map

$$\begin{array}{ccccccccc} e_1 : & 0 \to & I_1 & \to & B_1 & \to & A_1 & \to 0 \\ & & \downarrow \alpha_I & \circlearrowleft & \downarrow \alpha_B & \circlearrowleft & \downarrow \alpha_A & \\ e_2 : & 0 \to & I_2 & \to & B_2 & \to & A_2 & \to 0 \end{array}$$

with $\alpha_A, \alpha_B \in Art_k$

に対して、

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[r, "v_{e_1}"] \arrow[d, "F\alpha_A"'] & V\otimes_k I_1 \arrow[d, "id\otimes\alpha_I"] \\ F(A_2) \arrow[r, "v_{e_2}"'] & V\otimes_k I_2 \end{tikzcd}$$

$a \mapsto v_{e_1}(\xi)$

$F\alpha_A(\xi) \mapsto v_{e_2}(F\alpha_A(\xi)) = (id\otimes\alpha_I)(v_{e_1}(\xi))$

をみたすもの。

このとき、V を障碍空間 (obstruction space), v_e を障碍写像 (obstruction map) という

Def 1.19

(V, v_e) : obstruction theory for F is 完全 (complete)

:⟺ (1) の逆が成り立つ。

i.e. $v_e(\xi) = 0 \iff \xi \in F(A)$ は $F(B)$ に持ち上がる。

Prop 1.20

$\phi: F \Rightarrow G$: nat. trans, (V, v_e) : obst. theory for G.

とする。

(i) $v_e' := v_e \circ \phi_A$ とおくと、 (V, v_e') : obst. theory for F となる。

(ii) さらに ϕ : smooth で、 (V, v_e) : complete ならば、 (V, v_e') も complete である。

proof

(i) 明らか。

(ii) Art の small sur $\alpha: B \twoheadrightarrow A$ をとる。

$\xi \in F(A)$ に対し、 $v_e'(\xi) = v_e(\phi_A(\xi)) = 0$ とする。

(V, v_e) : complete より、

$\exists \mu \in G(B)$, $G(\alpha)(\mu) = \phi_A(\xi)$

このとき、

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[dr, dashed, "\rho"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "F(\alpha)"'] & & \\ & F(A)\times_{G(A)} G(B) \arrow[r] \arrow[d] & G(B) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ & F(A) \arrow[r, "\phi_A"'] & G(A) \end{tikzcd}$$

(ξ, μ) μ

$\xi \mapsto \phi_A(\xi)$

を考えると、 $(\xi, \mu) \in F(A)\times_{G(A)} G(B)$

ϕ : smooth より、 ρ : sur. だから、

$\exists \nu \in F(B)$, $\rho(\nu) = (\xi, \mu)$

特に $F(\alpha)(\nu) = \xi$ となる。 よって、 (V, v_e') も complete. ▨

Fが complete obst. theory (V, v_e) をもてば、Vをより大きな vec. sp. に埋め込むことで無限に多くの complete obst. theory を作ることができる。
よって"最小"のものを探すことが重要となる。

Def 1.21

$(V, v_e), (W, w_e)$: obst. theory for F

障碍理論の射 $(V, v_e) \longrightarrow (W, w_e)$ とは、

$\theta : V \longrightarrow W$: k-linear map

であって、

$\forall e$: small ext.,

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "v_e"] \arrow[dr, "w_e"'] & V \otimes_k I \arrow[d, "\theta\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & W \otimes_k I \end{tikzcd}$$

となるもの.

Fに対する障碍理論 (O_F, ob_e) について、

(O_F, ob_e) is 普遍 (universal)

$:\Leftrightarrow$ $\forall (V, v_e)$: obst. theory for F, $\exists ! \ (O_F, ob_e) \longrightarrow (V, v_e)$

universal obst. theory が求めたい"最小"の obst. theory である

Thm 1.22 (Fantechi–Manetti 1998)

F: $\mathrm{Art}_k \longrightarrow \mathrm{Set}$: deformation functor に対して、universal obst. theory (O_F, ob_e) は存在.
さらに、これは complete である.
また、任意の $x \in O_F$ は、

$\exists e = 0 \longrightarrow k \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$: principal small ext., $\exists \xi \in F(A)$, $ob_e(\xi) = x$.

をみたす. □

proof

quite long and not easy ■

Cor 1.23

F: deformation functor, (V, v_e): complete obstruction theory for F
のとき、

$$O_F \cong \langle \{ x \in V \mid \exists e: \text{principal small ext.}\ \exists \xi \in F(A),\ x = v_e(\xi) \} \rangle \subseteq V$$

proof

右辺の V の subspace を V' とする.
唯一の obst. theory の射 $\theta : O_F \to V$ をとると、上の Thm より $\theta(O_F) = V'$
V: complete より、θ: inj. だから、 $O_F \cong V'$ がわかる ■

$z \in O_F$ について、$ob_e(\xi) = z$ となる e, ξ をとる
$\theta(z) = 0$ とすると、

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & & \\ F(A) \arrow[r, "ob_e"] & O_F \arrow[r, "\theta"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \exists \eta \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & \\ \xi \arrow[r, mapsto] & z \arrow[r, mapsto] & 0 \end{tikzcd}$$

$0 = z$

具体的な状況で、何が obst. theory か、obstruction がどう記述できるかを調べるのは大変！

Thm 1.24

F, G: deformation functors $\phi : F \Rightarrow G$ = nat. trans.
に対して、次は同値
(1) ϕ: smooth
(2) $t_\phi : t_F \to t_G$: sur. かつ $ob_\phi : O_F \to O_G$: bij.
(3) $t_\phi : t_F \to t_G$: sur. かつ $ob_\phi : O_F \to O_G$: inj. $\square$

Cor 1.25

F, G: deformation functors, $\phi : F \Rightarrow G$: nat. trans.
のとき、

$$\phi : \text{étale} \iff \begin{array}{l} t_\phi : t_F \to t_G : \text{bij.} \\ ob_\phi : O_F \to O_G : \text{inj.} \end{array}$$

proof

ϕ: unramified $\iff$ t_ϕ: inj. より明らか. ■

Cor 1.26

F: deformation functor, G: homogeneous, $\phi : F \Rightarrow G$ = nat. trans.
について、

$t_\phi : t_F \to t_G$: bij. かつ $ob_\phi : O_F \to O_G$: inj.

ならば、ϕ: iso. $\square$

Cor 1.27

F: deformation functor is smooth $\iff$ $O_F = 0$ $\square$

このように、O_F は F の smoothness の度合いを表す.

§2. 例：複素多様体の変形

$k=\mathbb{C}$ とし、コンパクト複素多様体 X の変形を考える.

Def 2.1
X: cpt cpx mfd. に対し、X の $A\in \mathrm{Art}_{\mathbb{C}}$ 上の (無限小) 変形 とは、
$\pi: X_A \longrightarrow \operatorname{Spec} A$: flat sur.
s.t.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X_A \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C} \arrow[r, hook] & \operatorname{Spec}A \end{tikzcd} \quad : \text{pullback}$$
のことをいう.
$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \hookrightarrow \operatorname{Spec}A$: closed imm. だから $X \hookrightarrow X_A$: closed imm. である.
特に $A=k[\varepsilon]$ のとき、一次の無限小変形 (first order infinitesimal deformation) という

$\Updownarrow$

$\mathcal{O}_A \to \mathcal{O}_X$
s.t. $\mathcal{O}_A$: flat over A
$\mathcal{O}_A\otimes_A \mathbb{C} \to \mathcal{O}_X$: iso.

Rmk 2.2
X と X_A の底空間は一致する.

Def 2.3
X_A, X_A': deformations of X over A are equivalent.
$:\Longleftrightarrow$ $\exists f: X_A \longrightarrow X_A'$: iso. over $\operatorname{Spec}A$.
s.t.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, hook] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X_A \arrow[r, "\cong"', "f"] & X_A' \end{tikzcd}$$

Def 2.4
X: cpt cpx mfd に対して、$\mathrm{Def}_X: \mathrm{Art} \longrightarrow \mathrm{Set}$ を、
$\mathrm{Def}_X(A) := \{ \operatorname{Spec}A$ 上の変形の同値類$\}$
によって定める.

Prop 2.5
Def_X は deformation functor. $\square$

Thm 2.6
$\mathrm{Def}_X(k[\varepsilon]) = \{X$ の 1次の無限小変形の同値類$\}$ $\cong$ $H^1(X, \Theta_X)$: bij.
ここで、$\Theta_X = \mathcal{H}om(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ $\square$

Thm 2.7
$H^2(X,\Theta_X)$ は、Def_X の complete obst. space になる. $\square$

よって、特に、$H^2(X,\Theta_X)=0$ なら、obst. がない.

§3. DGLA に付随する変形関手

k: fixed field, $\mathrm{ch}(k) = 0$

Def 3.1

k 上の DGLA (differential graded Lie algebra) とは、

- $L = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L^i$: $\mathbb{Z}$-graded k-vector space.
- $[\,,\,] : L \times L \to L$: bilinear map, called bracket
- $d : L \to L$: linear map, called differential

の組 $(L, d, [\,,\,])$ であって、

(0) dg-module : $d(L^i) \subseteq L^{i+1}$
$\qquad d \circ d = 0$

(1) bracket $[\,,\,]$ is homogeneous and skewsymmetric

i.e. $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$

$[a,b] + (-1)^{|a||b|}[b,a] = 0$ $\quad$ (a, b: homo. element, $|a|, |b|$: its degree)

(2) Jacobi identity:

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{|a||b|}[b,[a,c]] \quad (a,b,c : \text{homo. elem.})$$

(3) Leibniz rule:

$$d[a,b] = [da, b] + (-1)^{|a|}[a, db] \quad (a, b : \text{homo. elem.})$$

をみたすもの.

DGLA の射とは、$d, [\,,\,]$ を保つ graded vec. sp. の準同型のこと.

$\rightsquigarrow$ DGLA : cat of DGLAs

例 3.2

- Lie algebra は、grading が 0 に集中した DGLA
- dg k-vec. sp. は、$[\,,\,] = 0$ な DGLA.
- L: DGLA のとき、$H^*(L) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(L)$ も $d = 0$ の DGLA になる

例 3.3

L: DGLA, $\mathfrak{m}$: 可換な結合的積をもつ k-vec. sp.

に対して、

$$L \otimes_k \mathfrak{m} : \cdots \xrightarrow{d \otimes 1} L^0 \otimes_k \mathfrak{m} \xrightarrow{d \otimes 1} L^1 \otimes_k \mathfrak{m} \xrightarrow{d \otimes 1} \cdots$$

$$d(x \otimes r) = dx \otimes r$$

$$[x \otimes r, y \otimes s] = [x,y] \otimes rs$$

の組は、DGLA $L \otimes_k \mathfrak{m}$ を定める.

$\mathfrak{m}$ が nilpotent (たとえば、$\mathfrak{m}$ が local Artin k-alg. の極大イデアル) のとき、

$L \otimes_k \mathfrak{m}$ も nilpotent で、$a \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ に対し

$$[a, -] : L \otimes \mathfrak{m} \longrightarrow L \otimes \mathfrak{m}$$

も nilpotent で、

$$e^{[a,-]} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a,-]^n}{n!}, \quad L \otimes \mathfrak{m} \longrightarrow L \otimes \mathfrak{m}$$

が well-defined に定まる.

例 3.4

(V, ∂): dg k-module に対し、

$$\mathrm{Hom}^\bullet(V,V) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^i(V,V) \quad : \text{graded } k\text{-vec. sp.}$$

$$\mathrm{Hom}^i(V,V) := \{ f : V \longrightarrow V : \text{linear} \mid f(V^n) \subseteq V^{n+i} \}$$

は、

$$[f,g] = fg - (-1)^{|f||g|} gf$$

$$df = [\partial, f] = \partial f - (-1)^{|f|} f\partial \qquad (\text{rmk} : \partial \in \mathrm{Hom}^1(V,V) \text{ である})$$

によって DGLA になる。

これを $\mathrm{Hom}^*(V,V)$ と表す。

Toy Example 3.5 (有界複体の無限小変形)

k-vec. sp. の有界複体

$$(V,\partial): \quad 0 \to V^0 \xrightarrow{\partial} V^1 \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} V^n \to 0$$

空間のコホモロジー

を考える。(V,∂) の無限小変形を考えてみる。

(A, m_A): local Artin k-alg. で $A/m_A = k$ であるものをとる

(V,∂) の A 上の無限小変形 (infinitesimal deformation) を、

$$(V_A, \partial_A): \quad 0 \longrightarrow V^0 \otimes_k A \xrightarrow{\partial_A} V^1 \otimes_k A \xrightarrow{\partial_A} \cdots \xrightarrow{\partial_A} V^n \otimes_k A \to 0 \quad : \text{cpx.}$$

s.t. $V_A/m_A \cong V$

$$\left(\text{i.e.} \quad \begin{array}{ccccc} V_A & : & V^i \otimes A & \xrightarrow{\partial_A} & V^{i+1} \otimes A \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ V_A/m_A & : & V^i \otimes A/m_A & \longrightarrow & V^{i+1} \otimes A/m_A \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & \circlearrowleft & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ V & : & V^i & \xrightarrow{\partial} & V^{i+1} \end{array}\right)$$

として定義する。

k-vec. sp. として $A \cong k \oplus m_A$ であることより、

$$V_A{}^i = V^i \otimes_k A \cong V^i \otimes_k (k \oplus m_A) \cong V^i \oplus (V^i \otimes_k m_A)$$

よって、$V_A/m_A \cong V$ が成り立つということは、differential について、

$$\partial_A = \partial + \xi \qquad \text{for some } \xi \in \mathrm{Hom}^1(V,V) \otimes_k m_A$$

と表せるということ (?)

さらに、(V_A, ∂_A) が cpx. つまり $\partial_A{}^2 = 0$ が成り立つということは、

$$0 = \partial_A^2 = (\partial + \xi)^2 = \partial^2 + \partial\xi + \xi\partial + \xi^2$$

$$= (\partial\xi - (-1)^{|\xi|}\xi\partial) + \frac{\xi^2 - (-1)^{|\xi||\xi|}\xi^2}{2}$$

$$= d\xi + \frac{1}{2}[\xi,\xi] \qquad \text{in } \mathrm{Hom}^*(V,V) \otimes m_A$$

が成り立つということ。

すなわち、(V,∂) の A 上の変形とは、

$$\xi \in \mathrm{Hom}^1(V,V) \otimes m_A \qquad \text{s.t.} \quad d\xi + \frac{1}{2}[\xi,\xi] = 0$$

のこと。

さらに同値な変形は同一視して考えたい
(V, ∂) の A 上の変形 $(V_A, \bar{\partial}_A)$, $(V'_A, \bar{\partial}'_A)$ が同型であるとは、

$$\exists \phi : (V_A, \partial_A) \longrightarrow (V'_A, \bar{\partial}'_A) : \text{ dg hom.}$$
$$\text{s.t. } \forall i,\quad \phi_i : V_A^i \longrightarrow V_A'^i : A\text{-iso. かつ } \phi_i \equiv id_{V^i} \bmod m_A$$

のときをいう。このとき、$\phi_i \equiv id_{V^i} \bmod m_A$ ということは、

$$\phi = \oplus_i \phi_i = id_V + \eta \quad \text{for some } \eta \in Hom^0(V, V) \otimes m_A$$

と表せるということ (?)
さらに、m_A : nilpotent であるから、η も nilpotent で:

$$a := \log(id + \eta) := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \eta^n$$

とおけば、

$$\phi = e^{\log \phi} = e^a \quad \text{for some } a \in Hom^0(V, V) \otimes m_A$$

と表せる。
さらに、ϕ が dg. hom. である、つまり

$$\begin{tikzcd}
V^i \otimes A \arrow[r, "\bar{\partial}_A"] \arrow[d, "\phi^i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V^{i+1} \otimes A \arrow[d, "\phi^{i+1}"] \\
V^i \otimes A \arrow[r, "\bar{\partial}'_A"] & V^{i+1} \otimes A
\end{tikzcd}$$

が成り立つということは、

$$\bar{\partial}'_A = e^a \circ \bar{\partial}_A \circ e^{-a}$$

が成り立つということであり、$\bar{\partial}_A = \bar{\partial} + \xi$, $\bar{\partial}'_A = \bar{\partial} + \xi'$ と表したとき、

$$e^a \circ b \circ e^{-a} = e^{[a, -]}(b)$$

が成り立つことを用いると、

$$\begin{aligned}
\xi' = \bar{\partial}'_A - \bar{\partial} &= e^{[a,-]}(\bar{\partial}_A) - \bar{\partial} \\
&= e^{[a,-]}(\bar{\partial} + \xi) - \bar{\partial} \\
&= (\bar{\partial} + \xi) + [a, -](\bar{\partial} + \xi) + \frac{[a,-]^2}{2}(\bar{\partial} + \xi) + \cdots \\
&\quad - \bar{\partial} \\
&= \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,-]^n}{(n+1)!}\left([a, \bar{\partial}] + [a, \xi]\right) \\
&= \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,-]^n}{(n+1)!}\left([a, \xi] - da\right)
\end{aligned}$$

$[a, \bar{\partial}] = -[\bar{\partial}, a] = -da$ より

となる。
すなわち、$(V_A, \bar{\partial}_A) = \xi$, $(V', \bar{\partial}'_A) = \xi'$ が同値であるとは、

$$\exists a \in Hom^0(V, V) \otimes m_A, \quad \xi' = \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,-]^n}{(n+1)!}\left([a, \xi] - da\right)$$

となるときをいう。 $\square$

この Toy example のように、次を導入する.

Def 3.6

$L = \mathrm{DGLA}$ に対して、functor $MC_L : \mathrm{Art}_k \longrightarrow \mathrm{Set}$ を、

$$MC_L(A) := \{ x \in L^1 \otimes_k m_A \mid dx + \tfrac{1}{2}[x,x] = 0 \}$$

によって定める.

$dx + \frac{1}{2}[x,x] = 0$ を Maurer-Cartan equation といい、

MC_L を、L に付随する Maurer-Cartan 関手 という.

Def 3.7

$x, y \in L \otimes m_A$ に対して、

x, y are gauge equivalent

$$:\Leftrightarrow \exists a \in L^0 \otimes m_A, \quad y = e^a * x := x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,-]^n}{(n+1)!}([a,x] - da)$$

・を $L^0 \otimes m_A$ の Baker-Campell-Hausdorff 積とするとき、

$$e^a * (e^b * x) = e^{a \cdot b} * x$$

が成り立ち、$*$ は、作用

$$* : \exp(L^0 \otimes m_A) \curvearrowright L \otimes m_A$$

を定める. これを gauge action という.

Maurer-Cartan 元は、gauge action のもとで安定であることもわかる.

Def 3.8

$L = \mathrm{DGLA}$ に対して、functor $\mathrm{Def}_L : \mathrm{Art}_k \longrightarrow \mathrm{Set}$ を、

$$\mathrm{Def}_L(A) := MC_L(A) / \sim_{\text{gauge}}$$

によって定める. これを L に付随する変形関手 という

Toy example の計算は、

(V, δ) の無限小変形の関手 $= \mathrm{Def}_L \quad (L = \mathrm{Hom}^*(V,V) : \mathrm{DGLA})$

であることを示している.

Prop 3.9

$L = \mathrm{DGLA}$ に対し、MC_L, Def_L : functor of Artin rings.

proof

$MC_L(k) = \{ x \in L^1 \otimes_k 0 \mid \cdots \} = \{0\}$

$\mathrm{Def}_L(k) = \{0\}$ よって OK ▨

MC_L や Def_L について 調べる.

<u>Rmk 3.10</u>

L = DGLA に対し、 MC_L の接空間は、

$$t_{MC_L} = MC_L(k[\varepsilon]) = \{x \in L^1 \otimes_k k\varepsilon \mid dx + \tfrac{1}{2}[x,x] = 0\}$$
$$\cong \{x \in L^1 \mid dx = 0\}$$
$$= Z^1(L)$$

$[l \otimes a\varepsilon, l \otimes a\varepsilon] = [l,l] \otimes a^2\varepsilon^2 = 0$

Def_L の接空間は、

$$t_{\mathrm{Def}_L} = \mathrm{Def}_L(k[\varepsilon]) = \{x \in L^1 \otimes_k k\varepsilon \mid dx + \tfrac{1}{2}[x,x] = 0\} / \{da \mid a \in L^0 \otimes_k k\varepsilon\}$$
$$\cong Z^1(L)/B^1(L) = H^1(L)$$

<u>Lem 3.11</u>

$\alpha : B \longrightarrow A$: sur. in Art_k に対して、

$x \in MC_L(A)$ が $MC_L(B)$ の元に持ち上がる

$\Longleftrightarrow$ $[x] \in \mathrm{Def}_L(A)$ が $\mathrm{Def}_L(B)$ の元に持ち上がる.

<u>proof</u>

($\Rightarrow$) は明らか.

($\Leftarrow$): $[x] \in \mathrm{Def}_L(A)$ が $\mathrm{Def}_L(B)$ の元 $[y]$ に持ち上がるとすると、

$$\begin{array}{ccccccc} MC_L(B) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Def}_L(B) & & y & \longmapsto & [y] \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & & & \downarrow \\ MC_L(A) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Def}_L(A) & & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

より, $[\alpha(y)] = [x]$、つまり,

$$\exists\, a \in L^0 \otimes_k m_A, \quad \alpha(y) = e^a * x$$

α = sur. より $L^0 \otimes_k m_B \longrightarrow L^0 \otimes_k m_A$: sur. だから、

$$\exists\, b \in L^0 \otimes_k m_B, \quad (id \otimes \alpha)(b) = a$$

このとき、$y' = e^{-a} * y$ とすると、

$$y' \longmapsto e^{-a} * \alpha(y) = e^{-a} * (e^a * x)$$
$$= e^{-a+a} * x$$
$$= x$$

$[-a,a]=0$ より

となる. ▨

Prop 3.12

L = DGLA に対し、

(i) MC_L : homogeneous 特に deformation functor

(ii) Def_L : deformation functor

proof

(i) $B \to A \leftarrow C$ in Art_k に対して、

$$L^1 \otimes_k m_{B\times_A C} \cong (L^1 \otimes_k m_B) \times_{(L^1\otimes_k m_A)} (L^1 \otimes_k m_C)$$

であり、この同型のもとで Maurer-Cartan 元は対応するから、

$$MC_L(B\times_A C) \cong MC_L(B) \times_{MC_L(A)} MC_L(C)$$

よって特に、MC_L = homogeneous.

(ii) Art_k の射 $\beta : B \to A$, $\gamma : C \to A$ について、β = sur. とする.

$$\begin{tikzcd}
Def_L(B\times_A C) \arrow[dr, dashed, "\eta"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& Def_L(B)\times_{Def_L(A)} Def_L(C) \arrow[r] \arrow[d] & Def_L(C) \arrow[d] \\
& Def_L(B) \arrow[r] & Def_L(A)
\end{tikzcd}$$

$([x],[y]) \in Def_L(B)\times_{Def_L(A)} Def_L(C)$ をとる.

$$\begin{tikzcd}
& MC_L(C) \arrow[d, "\gamma"] \\
MC_L(B) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & MC_L(A) \arrow[d] \\
Def_L(B) \arrow[r] & Def_L(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & y \arrow[d, mapsto] \\
x \arrow[d, mapsto] & \exists x' \arrow[r, mapsto] & \gamma(y) \arrow[d, mapsto] \\
{[x]} \arrow[rr, mapsto] & & {[\beta(x)] = [\gamma(y)]}
\end{tikzcd}$$

$\gamma(y) \in MC_L(A)$ について、$[\gamma(y)] = [\beta(x)] \in Def_L(A)$ は、$[x] \in Def_L(B)$ に持ち上がるから、上の lem 3.11 より、$\gamma(y) \in MC_L(A)$ も $x' \in MC_L(B)$ に持ち上がる.

$$\therefore \quad \beta(x') = \gamma(y) \quad , [x'] = [x]$$

(i)より MC_L : homogeneous だから、$(x', y) \in MC_L(B)\times_{MC_L(A)} MC_L(C)$ に対応して、$z \in MC_L(B\times_A C)$ が存在し、このとき、

$$\eta([z]) = ([x'],[y]) = ([x],[y])$$

よって、η = sur.

また $A = k$ のとき、

$$Def_L(B\times C) \xrightarrow{\eta} Def_L(B)\times Def_L(C) \quad : \text{sur.}$$

$[z], [z'] \in Def_L(B\times C)$ について、$\eta([z]) = \eta([z'])$ とする.

$z, z' \in MC_L(B\times C)$ を $z = (x,y)$, $z' = (x', y') \in MC_L(B)\times MC_L(C)$ と表すて、

$$\eta([z]) = ([x],[y]) = ([x'],[y']) = \eta([z'])$$

$$\therefore \quad \exists b \in L^0 \otimes m_B, \ x = e^b * x', \qquad \exists c \in L^0 \otimes m_C, \ y = e^c * y'$$

$$\therefore \quad \exists (b,c) \in L^0 \otimes (m_B \times m_C), \qquad (x,y) = e^{(b,c)} * (x', y')$$

よって $[z] = [z']$ となるから、η = inj. ∎

Prop 3.13

$H^2(L)$ は、MC_L の complete obst. space になる.

proof

Art_k の small ext.

$$e = 0 \longrightarrow I \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0, \quad \alpha = \text{small sur}$$

に対して、$v_e : MC_L(A) \longrightarrow H^2(L)\otimes I$ を次のように定義する:

$x \in MC_L(A) = \{x \in L^1\otimes m_A \mid dx + \frac{1}{2}[x,x] = 0\}$ をとる.

α = sur. より $1\otimes\alpha : L^1\otimes m_B \longrightarrow L^1\otimes m_A$: sur. であるから、

$$\exists\, \tilde{x} \in L^1\otimes m_B, \quad (1\otimes\alpha)(\tilde{x}) = x$$

このとき、

$$h := d\tilde{x} + \frac{1}{2}[\tilde{x},\tilde{x}] \in L^2\otimes m_A$$

とおくと、

$$\begin{aligned}(1\otimes\alpha)(h) &= d((1\otimes\alpha)(\tilde{x})) + \frac{1}{2}[(1\otimes\alpha)(\tilde{x}), (1\otimes\alpha)(\tilde{x})] \\ &= dx + \frac{1}{2}[x,x] = 0\end{aligned}$$

であるから、

$$h \in \mathrm{Ker}(1\otimes\alpha) = L^2\otimes I$$

となる. さらに、

$$\begin{aligned}dh &= d^2\tilde{x} + \frac{1}{2}d[\tilde{x},\tilde{x}] \\ &= 0 + \frac{1}{2}([d\tilde{x},\tilde{x}] - [\tilde{x},d\tilde{x}]) \qquad \hookleftarrow [\tilde{x},d\tilde{x}] = -[d\tilde{x},\tilde{x}] \\ &= [d\tilde{x},\tilde{x}] \\ &= [h,\tilde{x}] - \frac{1}{2}[[\tilde{x},\tilde{x}],\tilde{x}]\end{aligned}$$

ここで、$m_B\cdot I = 0$ より、$[L^2\otimes I, L^1\otimes m_A] = 0$ となることから、$[h,\tilde{x}] = 0$

また Jacobi identity より $[[\tilde{x},\tilde{x}],\tilde{x}] = 0$ もわかる.

よって、$dh = 0$、すなわち $h \in Z^2(L\otimes I) = Z^2(L)\otimes I$

このとき、

$$v_e(x) := [h] \in H^2(L\otimes I) = H^2(L)\otimes I$$

と定める. これは、x の持ち上げ $\tilde{x}$ のとり方によらない.

$\tilde{y} \in L^1\otimes m_B$ も、$(1\otimes\alpha)(\tilde{y}) = x$ をみたすとすると、

$$(1\otimes\alpha)(\tilde{y} - \tilde{x}) = x - x = 0$$

より、

$$\exists\, t \in L^1\otimes I, \quad \tilde{y} = \tilde{x} + t$$

このとき、$[L^1\otimes I, L^1\otimes m_B] = 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}h' := d\tilde{y} + \frac{1}{2}[\tilde{y},\tilde{y}] &= d\tilde{x} + dt + \frac{1}{2}[\tilde{x}+t, \tilde{x}+t] \\ &= d\tilde{x} + dt + \frac{1}{2}[\tilde{x},\tilde{x}] \\ &= h + dt\end{aligned}$$

よって、$H^2(L)\otimes I$ の元として、$[h'] = [h]$ となる.

このとき、$(H^2(L), v_e)$: obst. theory をなす.

(1) Art_k の small extension

$$e : 0 \longrightarrow I \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0, \quad \alpha = \text{small sur.}$$

に対し、$x \in MC_L(A)$ が $\tilde{x} \in MC_L(B)$ に持ちあがるとする.

このとき、

$$h = d\tilde{x} + \frac{1}{2}[\tilde{x},\tilde{x}] = 0$$

であるから、$v_e(x) = [h] = [0] = 0$ となる.

(2) もすぐにわかる.

さらに、$(H^2(L), v_e)$: complete であることを示す.

$x \in MC_L(A)$ について、$v_e(x) = [h] = 0$ in $H^2(L)\otimes I$ であるとすると、

$\exists l \in L^1\otimes I \subseteq L^1\otimes m_B$, $h = dl$

$\bar{x} = \tilde{x} - l \in L^1\otimes m_B$ とおけば、

$$\begin{aligned} d\bar{x} + \tfrac{1}{2}[\bar{x}, \bar{x}] &= (d\tilde{x} - dl) + \tfrac{1}{2}[\tilde{x} - l, \tilde{x} - l] \\ &= d\tilde{x} - dl + \tfrac{1}{2}[\tilde{x}, \tilde{x}] \\ &= h - dl = 0 \end{aligned}$$

$[L^1\otimes I, L^1\otimes m_B] = 0$ より

より, $\bar{x} \in MC_L(B)$ であり, $(1\otimes\alpha)(\bar{x}) = (1\otimes\alpha)(\tilde{x}) - 0 = x$ となる.

$l \in L^1\otimes I$ より

Prop 3.14

L = DGLA に対して、 $MC_L \longrightarrow Def_L$: smooth.

proof

$\beta: B \to A$: sur. in Art_k に対して、

$$\eta : MC_L(B) \longrightarrow Def_L(B) \times_{Def_L(A)} MC_L(A) \quad : sur.$$

を示したい。

$([y], x) \in Def_L(B) \times_{Def_L(A)} MC_L(A)$ に対し、$[y] \in Def_L(B)$ の代表元 $y \in MC_L(B)$ をとる.

今、$[x] \in Def_L(A)$ は $[y] \in Def_L(B)$ に持ち上がるから、上の lem3.11 より、

$\exists y' \in MC_L(B)$, $MC_L(B) \longrightarrow MC_L(A)$: $y' \longmapsto x$

lem3.11 の証明から、$[y'] = [y]$ であるから、

$$\eta(y') = ([y'], x) = ([y], x)$$

となり, η = sur.

Cor 3.15

MC_L と Def_L の universal obstruction space は同型 : $O_{MC_L} \cong O_{Def_L}$

特に、$H^2(L)$ の subspace として実現できる.

pf

smoothness より従う.

Cor 3.16

$H^2(L) = 0$ なら、MC_L, Def_L : smooth. □

Rmk 3.17

$L \mapsto \mathrm{Def}_L$ は関手的.

つまり, DGLAの射 $f: L \to M$ に対して,

$$\mathrm{Def}(f): \mathrm{Def}_L \Longrightarrow \mathrm{Def}_M$$

が得られる.

Thm 3.18

DGLAの射 $f: L \to M$ について,

(a) $H^0(f): H^0(L) \longrightarrow H^0(M)$: sur.

(b) $H^1(f): H^1(L) \longrightarrow H^1(M)$: bij.

(c) $H^2(f): H^2(L) \longrightarrow H^2(M)$: inj.

が成り立つとき,

$$\mathrm{Def}(f): \mathrm{Def}_L \Longrightarrow \mathrm{Def}_M : \text{iso}. \qquad \square$$

Cor 3.19

L, M are quasi-isomorphic in DGLA

$\Rightarrow \quad \mathrm{Def}_L \cong \mathrm{Def}_M. \qquad \square$

これより, 変形関手は, quasi-isomorphic な DGLA によらない.

§4. Guiding principle

このように、与えられた変形関手 F が、 $F \simeq \mathrm{Def}_L$ $(L:\overset{\text{適切}}{\mathrm{DGLA}})$ と表せれば、変形理論はよくわかる。

例4.1
X = cpt cpx mfd に対し、KS_X : Kodaira-Spencer DGLA のとき、
$$\mathrm{Def}_X \simeq \mathrm{Def}_{KS_X}$$

この逆を主張するのが、次の原理 (or スローガン) である。

Principle 4.2 (Kontsevich, Drinfeld)
In $\mathrm{ch}\, k = 0$, every deformation problem is governed by a DGLA.

すなわち、
体 k $(\mathrm{ch}\, k = 0)$ 上定義された代数的・幾何的対象の変形関手 F について、
$$F \simeq \mathrm{Def}_L$$
となる $L \in$ DGLA が存在してしかるべきである $\square$

これは次のように定式化され、正しい。

Thm 4.3 (Pridham, Lurie)
$\mathrm{ch}(k) = 0$ のとき、formal moduli functor のなす ∞-cat Moduli と、dg Lie algebra のなす ∞-cat Lie_k は、同値である。

ここで、
Lie_k : DGLA のなすモデル圏の Dwyer-Kan localization の homotopy coherent nerve.
Moduli : comm. dg Alg. のなすモデル圏の DK-localization の htpy coh. nerve の、small algebra のなす full sub-∞-cat. CAlg_k^{sm} から、sSet への functor であって、いいかんじのもの。
$\subseteq \mathrm{Fun}(\mathrm{CAlg}_k^{sm}, \mathrm{sSet})$ $\square$