KMO 대비반 중급 2주차 테스트

Taeyang Lee

October 22, 2025

Contents

1 대수

문제 1

$f(x) = \dfrac{4^x}{4^x+2}$ 이라 하자. 합 $f\left(\dfrac{1}{801}\right) + f\left(\dfrac{2}{801}\right) + f\left(\dfrac{3}{801}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{800}{801}\right)$ 의 값을 구하여라.

(20점)

풀이

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}.$$

대칭성을 이용하면

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{2}{4^x+2} = 1.$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{800} f\left(\frac{k}{801}\right) = \sum_{k=1}^{400} \left\{ f\left(\frac{k}{801}\right) + f\left(1 - \frac{k}{801}\right) \right\} = 400.$$

정답

$\boxed{400}$

문제 2
다음을 정수 범위에서 최대한 인수분해하였을 때, 곱해져 있는 항의 개수를 구하여라.

$$a^3(c^2-b^2)+b^3(a^2-c^2)+c^3(b^2-a^2).$$

(예: $ab(ab+bc)$는 3개의 항이 곱해져 있는 식이다.)

(20점)

풀이
[**풀이 1: 교대식의 성질 이용**]
주어진 식은 교대식이다. 교대식의 성질에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$(\text{교대식}) = (\text{교대식}) \times (\text{대칭식}).$$

인수정리에 의해 $(a-b)(b-c)(c-a)$인 교대식이 인수로 존재하므로, 나머지 부분은 2차 대칭식이어야 한다.
2차 대칭식은 기본대칭식

$$e_1 = a+b+c, \quad e_2 = ab+bc+ca, \quad e_3 = abc$$

의 사칙연산으로 표현되므로, $Ae_1^2 + Be_1e_2 + Ce_3$ 형태로 나타낼 수 있다.
계수를 비교하면 $A=1, B=1, C=0$이므로,

$$a^3(c^2-b^2)+b^3(a^2-c^2)+c^3(b^2-a^2) = (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$$

[**풀이 2: 직접 인수분해**]
주어진 식을 정리하면,

$$\begin{aligned}
&a^3(c^2-b^2)+b^3(a^2-c^2)+c^3(b^2-a^2)\\
&= a^3c^2 - a^3b^2 + b^3a^2 - b^3c^2 + c^3b^2 - c^3a^2\\
&= (a^3c^2 - b^3c^2) + (b^3a^2 - c^3a^2) + (c^3b^2 - a^3b^2)\\
&= c^2(a^3-b^3) + a^2(b^3-c^3) + b^2(c^3-a^3)\\
&= c^2(a-b)(a^2+ab+b^2) + a^2(b-c)(b^2+bc+c^2) + b^2(c-a)(c^2+ca+a^2)\\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).
\end{aligned}$$

따라서 곱해진 항의 개수는 **4개**이다.

정답

$\boxed{4}$

문제 3
다음 연립방정식의 해를 x, y, z라 할 때, $x^4 + y^4 + z^4$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34. \end{cases}$$

(20점)

풀이
세 문자 x, y, z에 대해 주어진 식은 대칭식(Symmetric Polynomial)이다.
따라서 기본대칭식

$$e_1 = x + y + z, \quad e_2 = xy + yz + zx, \quad e_3 = xyz$$

의 값만 알면 모든 대칭식의 값을 구할 수 있다.
문제에서 제시된 정보는 멱합(Power Sum)

$$p_1 = x + y + z, \quad p_2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad p_3 = x^3 + y^3 + z^3$$

이다.
이들은 e_1, e_2, e_3와 **뉴턴 항등식**(Newton's Identities) 관계를 가진다:

$$\begin{aligned} p_1 &= e_1 \\ p_2 &= e_1 p_1 - 2e_2 \\ p_3 &= e_1 p_2 - e_2 p_1 + 3e_3 \end{aligned}$$

문제에서 $p_1 = 4,\ p_2 = 14,\ p_3 = 34$가 주어졌다.
이를 대입하면

$$\begin{aligned} e_1 &= 4 \\ 14 &= 4 \cdot 4 - 2e_2 \\ 34 &= 4 \cdot 14 - 1 \cdot 4 + 3e_3 \\ \therefore e_2 &= 1, \quad e_3 = -6 \end{aligned}$$

이제 $p_4 = x^4 + y^4 + z^4$를 계산한다:

$$p_4 = e_1 p_3 - e_2 p_2 + e_3 p_1 = 4 \cdot 34 - 1 \cdot 14 + (-6) \cdot 4.$$

$$= 136 - 14 - 24 = 98.$$

정답

$\boxed{98}$

문제 4
$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97-x} = 5$일 때, $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{97-x}$의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
주어진 식에서 다음과 같이 치환하자
$a = \sqrt[4]{x},\ b = \sqrt[4]{97-x}$

문제의 조건은
$$e_1 = a + b = 5$$
이며, 구하는 값은 $e_2 = ab$이다.
또한 $a^4 + b^4 = 97$이 주어졌다.
$$a^2 + b^2 = e_1^2 - 2e_2 = 25 - 2e_2$$
이고, 따라서
$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = (25 - 2e_2)^2 - 2e_2^2.$$
주어진 조건 $a^4 + b^4 = 97$을 대입하면
$$(25 - 2e_2)^2 - 2e_2^2 = 97.$$
이를 전개하면
$$625 - 100e_2 + 4e_2^2 - 2e_2^2 = 97,$$
$$2e_2^2 - 100e_2 + 528 = 0,$$
$$e_2^2 - 50e_2 + 264 = 0.$$
따라서
$$e_2 = 44 \quad \text{또는} \quad e_2 = 6.$$
그런데 $ab = e_2 \leq \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{25}{4} = 6.25$가 되어야 하므로 가능한 해는
$$e_2 = 6.$$

정답

$\boxed{6}$

문제 5
$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$을 만족시키는 양의 정수 (m, n)의 순서쌍의 개수를 구하여라.

(20점)

풀이
주어진 식을 정리하면

$$m^3 + n^3 + 3mn(m+n) = (m+n)^3$$

조건은 $3mn(m+n) = 99mn$이므로 $m + n = 33$

양의 정수 해는 $(m, n) = (1, 32), (2, 31), \ldots, (32, 1)$로 32개이다.

정답

$\boxed{32}$

2 조합

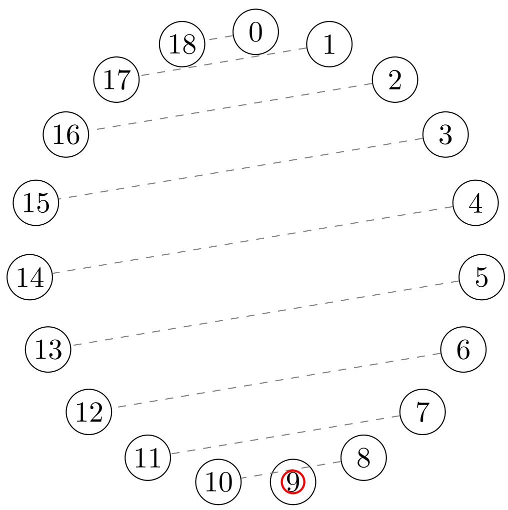
문제 1
어느 부부가 아홉 쌍의 부부를 집으로 초대하여 파티를 열었다. 이 자리에 모인 열 쌍의 부부는 서로 아는 사이도 있고, 처음 만나는 사이도 있다. 이들 가운데 서로 알던 사람들은 악수를 하지 않았지만, 처음 만나는 사람들은 정중하게 악수를 한 번씩 나누었다. 저녁 식사가 끝나고 집 주인은 그 자리에 모인 19명(집 주인의 부인과 손님들)에게 오늘 모임에서 악수를 몇 번 하였는지 질문하였다. 놀랍게도 이들이 악수한 횟수는 모두 달랐다. 이때 집 주인의 부인은 악수를 몇 번 하였는지 구하시오.

(20점)

풀이
19명의 악수 횟수는 자기 자신과 와이프를 제외하므로
최소값 0회, 최대값 18회이고, $0, 1, 2, \ldots, 18$ 으로 유일하게 결정된다.
부부는 서로 악수를 하지 않으므로 한 쌍의 악수 횟수 합은 항상 18이 된다.

18회 악수한 사람은 본인의 배우자를 제외한 모든 사람과 악수했다.
따라서 0회 악수한 사람은 그 사람의 배우자이다.
마찬가지로 17회와 1회, 16회와 2회, $\cdots$가 각각 부부이다.

이러한 쌍은 $(18, 0), (17, 1), (16, 2), \cdots, (10, 8), (9, 9)$로 10쌍이다.
집 주인 부부가 $(9, 9)$에 해당하므로, 집 주인의 부인은 9회 악수했다.



악수 횟수 페어: 합이 항상 18. (9,9)가 집주인 부부

정답

$\boxed{9}$

문제 2
정팔각형의 변을 따라 움직이는 로봇이 있다. 이 로봇은 정팔각형의 한 변을 지나가는데 1분이 걸리며, 각 꼭짓점에서 가던 방향으로 계속 가거나 반대 방향으로 방향을 바꿀 수 있다. 이 로봇이 한 꼭짓점 A에서 출발하여 10분 동안 계속 움직여 다시 꼭짓점 A로 돌아오는 경우의 수를 구하여라.

(20점)

풀이
정팔각형에서 한 방향으로 가면 +1, 반대 방향으로 가면 -1이라 하자. 10분 후 출발점으로 돌아오려면 총 이동 거리가 8의 배수여야 한다.
10번 이동 중 m번 정방향, $10-m$번 역방향으로 가면 총 이동은 $m-(10-m)=2m-10$이다. 이 값이 ± 8 또는 0이어야 한다.

- $2m-10=8 \Rightarrow m=9$: ${}_{10}C_9=10$
- $2m-10=0 \Rightarrow m=5$: ${}_{10}C_5=252$
- $2m-10=-8 \Rightarrow m=1$: ${}_{10}C_1=10$

따라서 총 경우의 수는 $10+252+10=272$.

정답

$\boxed{272}$

문제 3
여섯 쌍의 부부가 모임에 참가하였다. 사회자가 그 중 일곱 명을 뽑아 선물을 준다. 이때, 선물을 하나도 받지 못한 부부가 오직 한 쌍일 경우의 수를 구하여라.

(20점)

풀이
선물을 받지 못할 부부 한 쌍을 선택: ${}_6C_1 = 6$.
나머지 5쌍(10명) 중 7명을 뽑되, 각 쌍에서 최소 한 명은 선택되어야 한다.
5쌍 중 3쌍에서 한 명씩만, 2쌍에서 두 명씩 선택한다.

- 한 명만 선택할 3쌍을 고름: ${}_5C_3 = 10$
- 각 쌍에서 한 명을 고름: $2^3 = 8$

따라서 총 경우의 수는 $6 \times 10 \times 8 = 480$.

정답

$\boxed{480}$

문제 4
$1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 9$의 숫자가 각각 하나씩 적힌 8장의 카드 중에서 2장 이상의 카드를 동시에 뽑을 때, 카드에 적힌 숫자를 모두 곱한 값이 될 수 있는 서로 다른 수의 개수를 구하여라.

(20점)

풀이
카드: $1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 9$. 소인수분해하면 $9 = 3^2$이므로 가능한 곱은 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ 형태이다.

- $a \in \{0, 1, 2\}$: 3가지
- $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$: 5가지 (3이 2개, 9=3^2가 1개)
- $c \in \{0, 1\}$: 2가지
- $d \in \{0, 1\}$: 2가지

총 $3 \times 5 \times 2 \times 2 = 60$가지. 단, 1만 선택하는 경우(카드 1장)는 제외되므로 $60 - 1 = 59$.

정답

$\boxed{59}$

문제 5
정사면체 $ABCD$의 6개 모서리 중에서 몇 개의 모서리를 골라 색을 칠한다. 이때 색을 칠한 모서리들을 따라 4개의 꼭짓점이 모두 연결되는 경우의 수를 구하여라.

(20점)

풀이
[**풀이 1: 모서리 개수별 분류**]
정사면체는 4개의 꼭짓점과 6개의 모서리를 가진다. 4개의 꼭짓점이 모두 연결되려면 색칠한 모서리를 따라 어떤 두 꼭짓점 사이에도 경로가 존재해야 한다.
모서리 k개를 칠하는 경우를 분류하면:
(i) $k = 6$: 모든 모서리를 칠함.

$$c_6 = 1$$

(ii) $k = 5$: 5개를 칠함. 어떤 모서리 하나를 빼도 나머지로 4개 꼭짓점을 연결할 수 있다.

$$c_5 =_6 C_1 = 6$$

(iii) $k = 4$: 4개를 칠함. 정사면체에서 4개 모서리로는 고립된 꼭짓점이 생기지 않는다. 즉 ${}_6C_4$ 모두 연결된다.

$$c_4 =_6 C_4 = 15$$

(iv) $k = 3$: 3개를 칠함. 두 경우로 나뉜다.

- 한 면의 3개 모서리를 모두 선택(정삼각형): 한 꼭짓점이 고립되므로 연결되지 않음. 이런 경우는 4가지.
- 나머지 경우: 4개 꼭짓점을 모두 거쳐가는 트리 형태이므로 연결됨. 전체 ${}_6C_3 = 20$에서 4가지를 제외.

$$c_3 = 20 - 4 = 16$$

(v) $k \leq 2$: 4개 꼭짓점을 모두 연결하려면 최소 3개 모서리가 필요하므로

$$c_2 = c_1 = c_0 = 0$$

따라서 전체 연결 경우의 수는

$$c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 16 + 15 + 6 + 1 = 38.$$

[**풀이 2: 여사건 이용 (포함-배제 원리)**]
정사면체는 4개 꼭짓점과 6개 모서리를 가진다. 각 모서리를 칠하거나 칠하지 않는 경우는 총 $2^6 = 64$가지다.
이 중에서 4개 꼭짓점이 연결되지 않는 경우를 구하여 전체에서 빼면 된다.
연결되지 않는 경우:

- **Type 1:** 고립된 꼭짓점이 존재하는 경우
  - 1개 꼭짓점 고립: 그 꼭짓점과 연결된 3개 모서리를 모두 칠하지 않음 $\rightarrow {}_4C_1 \times 2^3 = 32$
  - 2개 꼭짓점 고립: ${}_4C_2 \times 2^0 = 6$
  - 3개 이상 고립: ${}_4C_3 +_4 C_4 = 5$

- **Type 2:** 고립된 점은 없지만 두 그룹으로 분리되는 경우
  - 2-2 분할: 정사면체를 두 쌍으로 나누는 방법은 3가지
  - 각 분할에서 그룹 내부 연결만 있는 경우를 계산

포함-배제 원리를 적용하고 중복을 제거하면, 연결되지 않는 경우는 총 26가지이다.
따라서 연결되는 경우: $64 - 26 = 38$.

[**풀이 3: 그래프 이론 관점**]
※ 그래프 이론 기본 개념:
(1) 완전그래프(Complete Graph) K_n:
n개의 꼭짓점을 가지며, 임의의 서로 다른 두 꼭짓점이 모두 **간선**(edge, 모서리)으로 연결되어 있는 그래프.
여기서 **간선**이란 두 꼭짓점을 잇는 선을 의미하며, 영어로는 edge, 즉 모서리를 뜻한다.
정사면체의 모서리가 바로 간선의 예시이다.
K_n의 간선 개수는 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$개이다.
예를 들어, K_3는 정삼각형 (꼭짓점 3개, 간선 3개), K_4는 정사면체 (꼭짓점 4개, 간선 6개)이다.
(2) 차수(Degree):
한 꼭짓점의 **차수**란 그 꼭짓점에 연결된 간선의 개수를 의미한다.
예시:

- 완전그래프 K_4에서 각 꼭짓점의 차수는 3 (나머지 3개 꼭짓점과 모두 연결)
- 한 꼭짓점이 **고립**되었다 = 그 꼭짓점의 차수가 0
- 연결된 그래프 = 모든 꼭짓점의 차수 ≥ 1

(3) 트리(Tree):
n개의 꼭짓점을 가진 **연결 그래프** 중에서 사이클(cycle)이 없는 그래프. 트리는 정확히 $n-1$개의 간선을 가진다.
예: 4개 꼭짓점을 연결하는 트리는 정확히 3개 간선 필요.

정사면체는 4개 꼭짓점과 6개 모서리를 가지므로 완전그래프 K_4와 대응된다.

$$K_4\text{의 간선 개수} = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

이 문제는 K_4의 6개 간선 중 일부를 선택하여 4개 꼭짓점이 모두 **연결된** 부분그래프를 만드는 경우의 수를 구하는 것이다.
연결 그래프의 조건:

- **필요조건 1:** 간선 개수 $\geq n-1$ (4개 꼭짓점을 연결하려면 최소 3개 간선 필요)
- **필요조건 2:** 각 꼭짓점의 차수 ≥ 1 (모든 꼭짓점이 최소 하나의 간선과 연결)

케이스별 계산:
(i) $k = 6$: 완전그래프 K_4 자체. 당연히 연결.

$${}_6C_6 = 1$$

(ii) $k = 5$: K_4에서 간선 하나를 제거. 남은 5개 간선으로도 여전히 모든 꼭짓점 연결 가능.

$${}_6C_5 = 6$$

(iii) $k = 4$: 간선 2개를 제거. 제거한 2개 간선이 인접하지 않으면 연결 유지. K_4에서 간선 2개를 고르는 ${}_6C_2 = 15$가지 모두 연결 유지.

$${}_6C_4 = 15$$

(iv) $k = 3$: 간선 3개로 4개 꼭짓점을 연결. 이는 **트리**(cycle이 없는 연결 그래프) 구조여야 한다.

- K_4에서 3개 간선을 고르는 경우: ${}_6C_3 = 20$
- 이 중 한 면의 3개 간선(정삼각형)을 선택하면 한 꼭짓점이 고립: 4가지
- 연결된 경우: $20 - 4 = 16$

(v) $k \le 2$: 간선이 2개 이하면 4개 꼭짓점을 모두 연결 불가능 (트리 조건: n개 꼭짓점 연결에는 최소 $n-1$개 간선 필요).
따라서 총 연결된 경우:

$$1 + 6 + 15 + 16 = 38$$

정답

$$\boxed{38}$$

Practice makes perfect!