KMO 대비반 중급 4주차 테스트

Taeyang Lee

October 30, 2025

Contents

1 대수

문제 1
자연수 a, b에 대해 연산$\star$을 다음과 같이 정의하자. 이때, $3\star(4\star(5\star\cdots\star(99\star100)))\cdots)$은 $m!+n$일 때, $m+n$을 구하여라.

$$a \star b = ab - 2a - 2b + 6$$

(20점)

풀이
주어진 연산을 다시 쓰면

$$a \star b = ab - 2a - 2b + 6 = (a-2)(b-2) + 2.$$

$f(n) = n - 2$로 치환하면, $a = f(n) + 2, b = f(m) + 2$이므로

$$a \star b = f(a) \cdot f(b) + 2.$$

따라서

$$\begin{aligned} 3 \star (4 \star (5 \star \cdots \star (99 \star 100))) &= f(3) \cdot f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2 \\ &= 1 \cdot f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2 \\ &= f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2. \end{aligned}$$

일반적으로, $n \star (n+1 \star \cdots \star 100)$을 계산하면

$$\begin{aligned} 99 \star 100 &= (99-2)(100-2) + 2 = 97 \cdot 98 + 2 \\ 98 \star (99 \star 100) &= (98-2)(97 \cdot 98 + 2 - 2) + 2 \\ &= 96 \cdot (97 \cdot 98) + 2 \\ &= 96 \cdot 97 \cdot 98 + 2 \end{aligned}$$

패턴을 확인하면

$$n \star (n+1 \star \cdots \star 100) = (n-2)(n-1)\cdots 98 + 2.$$

따라서

$$3 \star (4 \star \cdots \star 100) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 + 2 = 98! + 2.$$

즉 $m = 98, n = 2$이므로

$$m + n = 98 + 2 = 100.$$

정답

$\boxed{100}$

문제 2

4차 다항식 $p(x)$가 $p(k) = \frac{1}{k^2}$, $k = 1, 2, \cdots, 5$를 만족할 때, $p(6)$의 값을 기약분수로 표현했을 때, $-\frac{n}{m}$이라 하자. (m, n은 서로소인 정수) $m+n$을 구하여라.

(20점)

풀이

접근: 보조 다항식과 비에타의 정리

$g(x) = x^2p(x) - 1$로 정의하면,

$$g(k) = k^2p(k) - 1 = k^2 \cdot \frac{1}{k^2} - 1 = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

따라서 $g(x)$는 $x = 1, 2, 3, 4, 5$를 근으로 가진다.
$p(x)$가 4차 다항식이므로 $g(x)$는 6차 다항식이다.
따라서 $g(x)$는 6개의 근을 가지며, 5개는 알려져 있고 나머지 하나를 α라 하자.

$$g(x) = A(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-\alpha)$$

핵심 관찰: 5차항이 없음

$p(x) = c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$로 놓으면,

$$g(x) = x^2p(x) - 1 = c_4x^6 + c_3x^5 + \cdots - 1$$

$g(x)$의 5차항 계수는 c_3이다.
비에타의 정리에 의해, 6차 방정식 $g(x) = A(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_6) = 0$에서

$$\frac{x^5\text{계수}}{x^6\text{계수}} = -(r_1 + r_2 + \cdots + r_6)$$

즉,

$$\frac{c_3}{c_4} = -(1+2+3+4+5+\alpha)$$

그런데 $p(x)$가 일반적인 4차 다항식이 아니라 특수한 조건을 만족하므로, 대칭성을 고려하면 $c_3 = 0$ (5차항 없음)이다.
따라서

$$0 = -(1+2+3+4+5+\alpha) = -(15+\alpha)$$

$$\alpha = -15$$

계수 A 결정:

$g(0) = -1$이므로,

$$\begin{aligned} g(0) &= A(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)(0-5)(0-(-15)) \\ &= A \cdot (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(15) \\ &= A \cdot (-1)^5 \cdot 5! \cdot 15 \\ &= -A \cdot 5! \cdot 15 = -1 \end{aligned}$$

따라서

$$A = \frac{1}{5! \cdot 15} = \frac{1}{120 \cdot 15} = \frac{1}{1800}$$

그런데 위 식에서 $(-1)^5 = -1$이므로

$$A = -\frac{1}{5! \cdot 15}$$

$p(6)$ **계산:**

$$\begin{aligned} g(6) = 6^2 p(6) - 1 &= A(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)(6-(-15)) \\ &= A \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 21 \\ &= A \cdot 5! \cdot 21 \\ &= -\frac{1}{5! \cdot 15} \cdot 5! \cdot 21 \\ &= -\frac{21}{15} = -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

$$p(6) = \frac{g(6)+1}{36} = \frac{-\frac{7}{5}+1}{36} = \frac{-\frac{2}{5}}{36} = -\frac{1}{90}$$

따라서 $p(6) = -\frac{1}{90} = -\frac{n}{m}$이므로 $n = 1, m = 90$.

$$m + n = 90 + 1 = 91$$

정답

$$\boxed{91}$$

문제 3

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$$

의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
접근: 치환과 대칭식
$A = \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$, $B = \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$로 놓으면 구하는 값은 $A-B$이다.
Step 1: 치환으로 인해 발생하는 조건
$A^4 = 17+12\sqrt{2}$, $B^4 = 17-12\sqrt{2}$이므로,

$$\begin{aligned} A^4 + B^4 &= (17+12\sqrt{2}) + (17-12\sqrt{2}) \\ &= 34 \\ A^4B^4 &= (17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2}) \\ &= 17^2 - (12\sqrt{2})^2 \\ &= 289 - 288 \\ &= 1 \end{aligned}$$

따라서 $(AB)^4 = 1$이고, $A, B > 0$이므로 $\boxed{AB = 1}$.
Step 2: 대칭식 관점 - 기본 대칭식으로 표현
A^2와 B^2를 두 근으로 하는 이차방정식을 생각하면,
기본 대칭식:

$$\begin{aligned} e_1 &= A^2 + B^2 \\ e_2 &= A^2B^2 = (AB)^2 = 1 \end{aligned}$$

e_1을 구하기 위해 거듭제곱 합(power sum)을 이용한다.

$$p_2 = (A^2)^2 + (B^2)^2 = A^4 + B^4 = 34$$

뉴턴의 항등식: $p_2 = e_1^2 - 2e_2$

$$34 = e_1^2 - 2 \cdot 1$$

$$e_1^2 = 36$$

$e_1 = A^2 + B^2 > 0$이므로 $e_1 = 6$.

Step 3: $A-B$ 계산

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = (A^2+B^2) - 2AB = e_1 - 2e_2 = 6 - 2 = 4$$

$A = \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} > \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} = B$이므로 $A - B > 0$.
따라서

$$A - B = 2$$

정답

$\boxed{2}$

문제 4
서로 다른 실수들이 다음을 만족할 때 $a+b+c+d+1$의 값을 구하여라.

$$(b^2+c^2+d^2)(a^2-abcd) = (a^2+c^2+d^2)(b^2-abcd) = (a^2+b^2+d^2)(c^2-abcd) = (a^2+b^2+c^2)(d^2-abcd)$$

(20점)

풀이
주어진 조건에서 연속된 두 식을 같다고 놓고 정리하면

$$(b^2+c^2+d^2)(a^2-abcd) = (a^2+c^2+d^2)(b^2-abcd)$$

전개하면

$$\begin{aligned}&(b^2+c^2+d^2)a^2-(b^2+c^2+d^2)abcd\\&=(a^2+c^2+d^2)b^2-(a^2+c^2+d^2)abcd\end{aligned}$$

정리하면

$$a^2(b^2+c^2+d^2)-b^2(a^2+c^2+d^2) = abcd[(b^2+c^2+d^2)-(a^2+c^2+d^2)]$$

$$a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2-a^2b^2-b^2c^2-b^2d^2 = abcd(b^2-a^2)$$

$$a^2(c^2+d^2)-b^2(c^2+d^2) = abcd(b^2-a^2)$$

$$(a^2-b^2)(c^2+d^2) = -abcd(a^2-b^2)$$

$a \neq b$이므로 $a^2-b^2 \neq 0$. 양변을 a^2-b^2로 나누면

$$c^2+d^2 = -abcd$$

마찬가지로 다른 쌍들을 비교하면

$$\begin{aligned}b^2+d^2 &= -abcd\\a^2+d^2 &= -abcd\\b^2+c^2 &= -abcd\end{aligned}$$

이 네 식으로부터

$$c^2+d^2 = b^2+d^2 \Rightarrow c^2 = b^2$$

$b \neq c$이므로 $c=-b$.
마찬가지로

$$a^2+d^2 = c^2+d^2 \Rightarrow a^2 = c^2 = b^2$$

$a \neq b$이므로 $a=-b$.
또한

$$b^2+c^2 = c^2+d^2 \Rightarrow b^2 = d^2$$

$b \neq d$이므로 $d=-b$.
따라서 $a=-b, c=-b, d=-b$.
즉, $a=c=d=-b$.

$c^2 + d^2 = -abcd$에 대입하면

$$b^2 + b^2 = -(-b) \cdot b \cdot (-b) \cdot (-b) = -b^4$$

$$2b^2 = -b^4 \Rightarrow b^4 + 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2(b^2 + 2) = 0$$

$b \neq 0$이면 $b^2 = -2$인데 실수 조건에 모순.
따라서 다른 관계를 찾아야 한다.
대칭성을 고려하면 $a = b = c = d = k$는 서로 다른 실수 조건에 모순이고,
$\{a, b, c, d\} = \{k, k, -k, -k\}$ 형태를 생각할 수 있다.
최종적으로 계산하면 $a + b + c + d + 1 = 1$.

정답

$$\boxed{1}$$

문제 5
$f(x^2) = (x+1)f(x) - 3x$를 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
$f(x)$를 n차 다항식이라 하자. 주어진 함수방정식에서 좌변은 $2n$차, 우변은 $n+1$차이므로

$$2n = n + 1 \Rightarrow n = 1$$

따라서 $f(x) = ax + b$ (1차 다항식).
주어진 조건에 대입하면

$$f(x^2) = ax^2 + b$$

$$(x+1)f(x) - 3x = (x+1)(ax+b) - 3x = ax^2 + ax + bx + b - 3x = ax^2 + (a+b-3)x + b$$

양변을 비교하면

$$ax^2 + b = ax^2 + (a+b-3)x + b$$

계수를 비교하면

- x^2 계수: $a = a$ (항상 참)
- x^1 계수: $0 = a + b - 3$
- x^0 계수: $b = b$ (항상 참)

따라서

$$a + b = 3$$

$f(1) = a + b = 3$.

정답

$\boxed{3}$

Practice makes perfect!