

# 부분합을 포함하는 점화식

Taeyang Lee

September 25, 2025

## Contents

|     |                |   |
|-----|----------------|---|
| 1   | 대수             | 2 |
| 1.1 | 267번 . . . . . | 2 |
| 1.2 | 풀이 . . . . .   | 2 |

# 1 대수

## 1.1 267번

자연수  $n$ 에 대하여 모든 항이 양수인 수열  $a_n$ 이  $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$  일때,  
 $\sum_{k=1}^{128} a_k$ 의 값을 구하여라

## 1.2 풀이

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= S_n - a_n \\ &= \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) - a_n \\ &= \frac{1}{2} \left( -a_n + \frac{2}{a_n} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

식 (1.1)에서  $S_n$ 도  $a_n$ 으로 표현되어 있고,

식 (1.2)에서  $S_{n-1}$ 도  $a_n$ 으로 표현되어 있음을 알 수 있다.

즉,  $S_n$ 과  $S_{n-1}$ 이  $a_n$ 을 매개로 한 관계로 연결된다.

이들을 각각 더하고 빼는 것은  $a_n$ 을 분모와 분자에 올려주는 역할을 하게 되는데,

이를 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$S_n + S_{n-1} = \frac{2}{a_n} \quad (1.3)$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (1.4)$$

식 (1.3)과 (1.4)를 서로 곱하면

$$S_n^2 - S_{n-1}^2 = 2 \quad (1.5)$$

이때,  $S_n^2$ 을 새로운 수열  $T_n$ 이라고 하면,

$$\begin{aligned} T_n &= S_n^2 \\ T_n &= T_{n-1} + 2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$T_n$ 은 등차수열이므로,

$$T_n = T_1 + (n - 1) \cdot 2 \tag{1.7}$$

식 (1.1) 에서,  $n = 1$ 을 대입하면,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{2}{a_1} \right) \\ a_1 &= \frac{2}{a_1} \\ \therefore a_1 &= \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

$T_1 = S_1^2 = a_1^2 = 2$ 이므로,

$$\begin{aligned} T_n &= 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n \\ T_n &= S_n^2 = 2n \\ \therefore S_n &= \sqrt{2n} \end{aligned} \tag{1.9}$$

이때, 식 (1.9)에  $n = 128$ 을 대입하면,

$$S_{128} = \sqrt{2 \times 128} = 16$$

일반항  $a_n$ 은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{2n} - \sqrt{2(n-1)}$$