소수는 무한하다.

Taeyang Lee

October 14, 2025

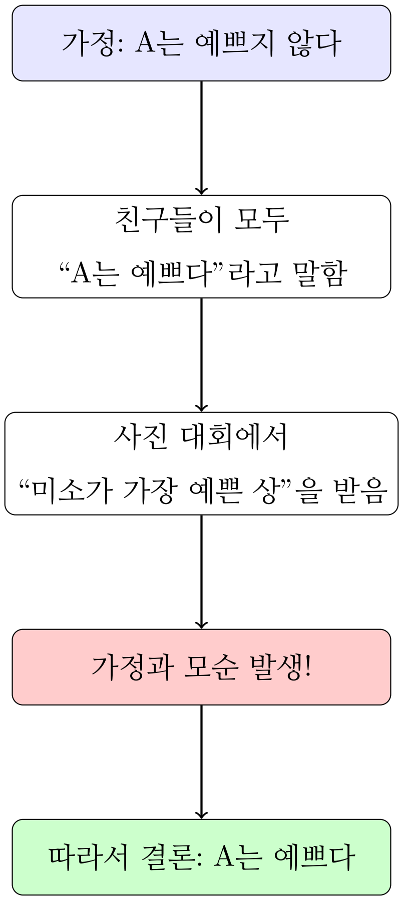
Contents

1 서론

자명하게 생각되는 수학적 지식을 수학적 엄밀성 위에서 증명해보이는 것은 매우 의미있는 행위이다. 이번 article에서는 소수가 무한함을 보이는 여러가지 증명을 보이고 이를 통해 다양한 발상해 대해 생각해보도록 한다.

1.1 귀류법: proof by contradiction

여러가지 증명기법들 중 귀류법에 대해 먼저 알아보자. 영어식 표현을 해석해보면, ”모순에 의한 증명”이라는 뜻인데, 어떤 명제가 참임을 보이기 위해 그것의 반대를 가정하고 모순을 이끌어내는 방식이다.



자연수 n에 대하여 모든 항이 양수인 수열 a_n이 $\sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ 일때, $\sum_{k=1}^{128} a_k$의 값을 구하여라

1.2 풀이

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_n \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= S_n - a_n \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n \\ &= \frac{1}{2}\left(-a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

식 (1.1)에서 S_n도 a_n으로 표현되어 있고,

식 (1.2)에서 S_{n-1}도 a_n으로 표현되어 있음을 알 수 있다.

즉, S_n과 S_{n-1}이 a_n을 매개로 한 관계로 연결된다.

이들을 각각 더하고 빼는 것은 a_n을 분모와 분자에 올려주는 역할을 하게 되는데,

이를 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$S_n + S_{n-1} = \frac{2}{a_n} \tag{1.3}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \tag{1.4}$$

식 (1.3)과 (1.4)를 서로 곱하면

$${S_n}^2 - {S_{n-1}}^2 = 2 \tag{1.5}$$

이때, ${S_n}^2$을 새로운 수열 T_n이라고 하면,

$$\begin{aligned} T_n &= {S_n}^2 \\ T_n &= T_{n-1} + 2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

T_n은 등차수열이므로,

$$T_n = T_1 + (n-1) \cdot 2 \tag{1.7}$$

식 (1.1) 에서, $n = 1$을 대입하면,

$$\begin{aligned} S_1 = a_1 &= \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) \\ a_1 &= \frac{2}{a_1} \\ \therefore a_1 &= \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

$T_1 = {S_1}^2 = {a_1}^2 = 2$이므로,

$$\begin{aligned} & T_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n \\ & T_n = {S_n}^2 = 2n \\ \therefore \quad & S_n = \sqrt{2n} \end{aligned} \tag{1.9}$$

이때, 식 (1.9)에 $n = 128$을 대입하면,

$$S_{128} = \sqrt{2 \times 128} = 16$$

일반항 a_n은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{2n} - \sqrt{2(n-1)}$$