KMO 대비반 중급 10주차 테스트

Taeyang Lee

December 17, 2025

Contents

1 대수 **2**
문제 1 2
풀이 2
정답 2
문제 2 3
풀이 3
정답 3
문제 3 4
풀이 4
정답 4
문제 4 5
풀이 5
정답 5
문제 5 6
풀이 6
정답 6

2 조합 **7**
문제 1 7
풀이 7
정답 7
문제 2 8
풀이 8
정답 8
문제 3 9
풀이 9
정답 9
문제 4 10
풀이 10
정답 10
문제 5 11
풀이 11
정답 12

1 대수

문제 1
양수 a, b에 대하여 식
$$a^2 + b + \frac{9}{a+b+1}$$
의 최소값을 기약분수 $\dfrac{n}{m}$으로 나타내었을 때, $10m+n$의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
Step 1. 변수 합으로 정리
$s = a+b+1$이라 두면 $b = s-a-1$이고 $s > a+1$이다. 식은
$$a^2 + (s-a-1) + \frac{9}{s} = \left(a^2 - a\right) + s - 1 + \frac{9}{s}.$$

Step 2. s를 고정했을 때 a에 대한 최소
$$a^2 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4},$$
등호는 $a = \frac{1}{2}$에서 성립한다. 이때 $b = s - \frac{1}{2} - 1 = s - \frac{3}{2} > 0$이려면 $s > \frac{3}{2}$이면 된다.
따라서
$$a^2 + b + \frac{9}{a+b+1} \geq -\frac{1}{4} + s - 1 + \frac{9}{s} = s + \frac{9}{s} - \frac{5}{4}.$$

Step 3. $s + \dfrac{9}{s}$의 최소
$s > 0$에서 AM–GM로
$$s + \frac{9}{s} \geq 2\sqrt{9} = 6,$$
등호는 $s = 3$에서 성립한다. 이때 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$로 조건을 만족한다.
따라서 최소값은
$$6 - \frac{5}{4} = \frac{19}{4}.$$

정답

최소값 $\dfrac{n}{m} = \dfrac{19}{4}$ 이므로 $10m + n = 40 + 19 = \boxed{59}$.

문제 2
실수 a, b, c가 임의의 실수 x, y, z에 대하여

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + axz + byz + cz^2 \geq 0$$

를 만족시킨다고 하자. 이때 $3a + 2b - c$의 최댓값을 구하여라.

(20점)

풀이
Step 1. 제곱완성과 변수 치환

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2.$$

$u = x + 2y$로 두고 $x = u - 2y$를 대입하면

$$Q = u^2 + a(u - 2y)z + byz + cz^2 = u^2 + auz + (b - 2a)yz + cz^2.$$

Step 2. y가 선형으로만 등장하는 조건
$Q \geq 0$가 모든 u, y, z에 대해 성립하려면, $(b - 2a)yz$ 항이 남아 있으면 $z \neq 0$ 고정 후 $y \to \pm\infty$로 발산시켜 Q를 음으로 만들 수 있다. 따라서

$$b - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2a.$$

Step 3. 2변수 이차형식의 반정부호 조건
이제

$$Q = u^2 + auz + cz^2$$

가 모든 u, z에 대해 ≥ 0이어야 한다. 이는 판별식 조건과 동치:

$$a^2 - 4c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad c \geq \frac{a^2}{4}.$$

Step 4. 목적함수 최대화

$$3a + 2b - c = 3a + 4a - c = 7a - c \leq 7a - \frac{a^2}{4}.$$

우변은 아래로 볼록인 이차식이며,

$$\frac{d}{da}\left(7a - \frac{a^2}{4}\right) = 7 - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 14.$$

이때 최대값은

$$7 \cdot 14 - \frac{14^2}{4} = 98 - 49 = 49.$$

등호는 $(a, b, c) = (14, 28, 49)$에서 성립한다.

정답

$$\boxed{49}$$

문제 3
다음 연립방정식을 만족하는 복소수 x, y에 대하여 $x+y$의 값으로 가능한 것들의 제곱의 합을 구하여라.

$$x^2+y^2=7, \qquad x^3+y^3=10.$$

(20점)

풀이
Step 1. 대칭식으로 치환
$s=x+y,\ p=xy$라 두면

$$x^2+y^2=s^2-2p=7 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{s^2-7}{2}.$$

또한

$$x^3+y^3=s^3-3ps=10.$$

Step 2. s에 대한 방정식
$p=\dfrac{s^2-7}{2}$를 대입하면

$$s^3-\frac{3s(s^2-7)}{2}=10.$$

양변에 2를 곱해 정리하면

$$2s^3-3s^3+21s=20 \quad \Rightarrow \quad s^3-21s+20=0.$$

인수분해하면

$$(s-1)(s^2+s-20)=(s-1)(s-4)(s+5)=0.$$

따라서 가능한 s는 $1, 4, -5$이다. (각 s에 대해 $p=\frac{s^2-7}{2}$를 택하면 $t^2-st+p=0$의 근으로 x, y가 존재하므로 모두 가능)
Step 3. 제곱의 합

$$1^2+4^2+(-5)^2=1+16+25=42.$$

정답

$$\boxed{42}$$

문제 4
다음 부정방정식을 만족하는 자연수 x, y, z, k에 대하여 $x+y+z+k$의 값으로 가능한 것들의 합을 구하여라.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=k$$

(20점)

풀이
Step 1. k**의 범위**
좌변은 $\le 1+1+1=3$ 이므로 $k \in \{1,2,3\}$.
Step 2. $k=3$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$이려면 $x=y=z=1$. 따라서 $x+y+z+k=1+1+1+3=6$.
Step 3. $k=2$
WLOG $x \le y \le z$. 그러면 $\frac{3}{x} \ge 2 \Rightarrow x \le 1$이므로 $x=1$.

$$1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

또한 $\frac{2}{y} \ge 1 \Rightarrow y \le 2$. $y=2$만 가능하며,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow z=2.$$

따라서 가능값은 $1+2+2+2=7$.
Step 4. $k=1$
WLOG $x \le y \le z$. $\frac{3}{x} \ge 1 \Rightarrow x \le 3$.
(i) $x=2$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

$y \le z$이므로 $\frac{2}{y} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow y \le 4$. $y=3$이면 $\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \Rightarrow z=6$. $y=4$이면 $\frac{1}{4}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \Rightarrow z=4$.
따라서 $(2,3,6)$, $(2,4,4)$.
(ii) $x=3$:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}.$$

$\frac{2}{y} \ge \frac{2}{3} \Rightarrow y \le 3$이므로 $y=3$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3} \Rightarrow z=3$. 따라서 $(3,3,3)$.
따라서 $k=1$에서 $x+y+z+k$ 가능값은

$$2+3+6+1=12, \quad 2+4+4+1=11, \quad 3+3+3+1=10.$$

Step 5. 가능한 값들의 합
가능한 값은 $6, 7, 10, 11, 12$이므로 합은

$$6+7+10+11+12=46.$$

정답

$\boxed{46}$

문제 5

양의 실수 a, b, c를 계수로 하는 다음 3차 방정식의 근이 모두 실수일 때, $\dfrac{ab}{c}$의 최솟값을 구하여라.

(Hint: 근과 계수와의 관계를 이용해보자.)

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

(20점)

풀이

방정식의 실근을 r_1, r_2, r_3라 하자. 비에타에 의해

$$a = r_1 + r_2 + r_3, \quad b = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1, \quad c = r_1r_2r_3.$$

따라서

$$\frac{ab}{c} = (r_1 + r_2 + r_3) \cdot \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_1r_2r_3} = (r_1 + r_2 + r_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

또한 $c > 0$이고 $\frac{b}{c} > 0$이므로 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} > 0$. 만약 두 근이 음수라면 $r_1 + r_2 < 0$이고 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} < 0$인데 두 합을 동시에 양수로 만들 수 없으므로, 결국 $r_1, r_2, r_3 > 0$이다. (즉 세 근은 모두 양수)

이제 Cauchy–Schwarz로

$$(r_1 + r_2 + r_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) \geq (1 + 1 + 1)^2 = 9.$$

등호는 $r_1 = r_2 = r_3$일 때 성립한다. 예를 들어 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$이면 $a = 3, b = 3, c = 1$이고 $\frac{ab}{c} = 9$이다.

따라서 최솟값은 9.

정답

$\boxed{9}$

2 조합

문제 1
가로, 세로, 높이가 a, b, c인 직육면체에 1부터 6까지의 숫자를 적을 때, 가능한 경우의 수를 $f(a, b, c)$라 하자. 단, 돌려서 같으면 한 가지로 센다. 이 때,

$$f(1, 1, 1) + f(1, 1, 2) + f(1, 2, 3)$$

의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
여섯 면에 $1, 2, 3, 4, 5, 6$을 한 번씩 쓰는 모든 표기는 $6! = 720$가지이다. 라벨이 모두 서로 다르므로, 어떤 회전도 라벨을 그대로 유지할 수 없고(항등만 가능), 따라서 "돌려서 같음"에 대한 동치류의 크기는 곧 회전대칭군의 크기 $|G|$와 같다. 즉,

$$f(a, b, c) = \frac{6!}{|G|}.$$

(1) $f(1, 1, 1)$ **(정육면체):** 회전대칭군 크기 $|G| = 24$.

$$f(1, 1, 1) = \frac{720}{24} = 30.$$

(2) $f(1, 1, 2)$ **(정사각기둥):** 위아래가 정사각형이고 높이가 달라서 회전대칭군은 정사각형의 대칭 D_4에 해당하여 $|G| = 8$.

$$f(1, 1, 2) = \frac{720}{8} = 90.$$

(3) $f(1, 2, 3)$ **(세 변이 모두 다름):** 서로 다른 세 축에 대한 $180°$ 회전만 가능하여 $|G| = 4$ (항등 + 3개의 $180°$ 회전).

$$f(1, 2, 3) = \frac{720}{4} = 180.$$

따라서

$$f(1, 1, 1) + f(1, 1, 2) + f(1, 2, 3) = 30 + 90 + 180 = 300.$$

정답

$\boxed{300}$

문제 2
A 1개, B 6개, C 4개를 모두 이용하여 만들 수 있는 목걸이의 개수를 구하여라.

(20점)

풀이
전체 구슬 수는 11개이다. 목걸이는 뒤집어도 같게 보므로 군은 이면체군 D_{11}이고 $|D_{11}| = 22$. Burnside를 적용한다.
(1) 항등 회전(그대로):
$$\text{Fix}(e) = \frac{11!}{1!\,6!\,4!} = 2310.$$
(2) 비자명 회전: 11은 소수이므로 $k \neq 0$ 회전은 길이 11인 한 주기. 고정되려면 모든 자리가 같은 문자여야 하나 A, B, C 개수가 달라 불가능. 따라서 $\text{Fix}(\text{비자명 회전}) = 0$.
(3) 반사(뒤집기): 11은 홀수이므로 각 반사는 고정점 1개와 쌍 5개를 만든다. 쌍에서는 같은 문자가 배치되어야 하므로 각 문자 개수 중 고정점에 들어가는 문자만 홀수일 수 있다. 현재 홀수인 것은 A만이므로 고정점은 반드시 A.
그럼 남은 10자리는 5쌍이며 B 6개, C 4개이므로 B는 3쌍, C는 2쌍을 차지한다. 따라서 한 반사에서 고정되는 배치는
$$\binom{5}{3} = 10$$
가지. 반사는 11개이므로 반사 고정 합은 $11 \cdot 10 = 110$.
(4) Burnside 평균
$$\# = \frac{1}{22}\,(2310 + 110) = \frac{2420}{22} = 110.$$

정답

$\boxed{110}$

문제 3
문자 A, B, C, D를 사용하여 만든 8자리 문자열 중, A가 나타나면 바로 다음에는 항상 B가 나타나고, B가 나타나면 바로 이전에는 항상 A가 나타나는 것의 개수를 구하여라. (예: $DABABDAB$, $DDCCDDCD$)

(20점)

풀이
조건은 A와 B가 항상 연속해서 AB 라는 블록으로만 등장한다는 뜻이다. 즉, 문자열은 길이 2짜리 블록 $X := AB$와 길이 1짜리 문자 C, D로만 이루어진다.
X 블록의 개수를 k라 하면 전체 길이 8이므로

$$2k + (\text{단일문자 수}) = 8 \Rightarrow \text{단일문자 수} = 8 - 2k.$$

총 "기호"의 개수는 $k + (8 - 2k) = 8 - k$개이며, 이 중 k개의 자리에 X가 온다. 따라서 배치 가짓수는 $\binom{8-k}{k}$. 나머지 $8 - 2k$개의 단일문자는 각각 C 또는 D이므로 2^{8-2k}가지.
따라서 전체 개수

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{8-k}{k} 2^{8-2k}.$$

값을 계산하면

$$\begin{aligned}
k = 0 &: \binom{8}{0} 2^8 = 256 \\
k = 1 &: \binom{7}{1} 2^6 = 7 \cdot 64 = 448 \\
k = 2 &: \binom{6}{2} 2^4 = 15 \cdot 16 = 240 \\
k = 3 &: \binom{5}{3} 2^2 = 10 \cdot 4 = 40 \\
k = 4 &: \binom{4}{4} 2^0 = 1
\end{aligned}$$

합은 $256 + 448 + 240 + 40 + 1 = 985$.

정답

$\boxed{985}$

문제 4
수직선 상의 6개의 점 $(0), (1), (2), (3), (4), (5)$가 있다. (0)에 있는 비둘기는 걸어가거나 날아서 (5)에 도달하려고 한다. 걸어가는 경우는 정수직선을 따라 한 칸씩 이동하고, 날아가는 경우는 어떤 점에서 날기 시작하여 다른 어떤 점에서 착지한다. 이때 비둘기가 이동할 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라. (예: $0 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$도 가능)

(20점)

풀이
이동 과정은 방문하는 점들의 증가수열

$$0 = v_0 < v_1 < \cdots < v_t = 5$$

로 완전히 결정된다.
왜냐하면 연속한 두 점의 차가 $v_{i+1} - v_i = 1$이면 걸어서 갈 수 있고, $v_{i+1} - v_i \geq 2$이면 날아서 갈 수 있기 때문이다. 따라서 중간점 $\{1, 2, 3, 4\}$ 중 어떤 점들을 경유할지의 선택과 일대일 대응한다.
즉, $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합을 택하는 경우의 수와 같아

$$2^4 = 16.$$

정답

$\boxed{16}$

문제 5
빨간 구슬 4개, 노란 구슬 4개, 파란 구슬 4개를 원형으로 배열하는 방법의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(20점)

풀이
이 문제는 원형 배열에서 회전뿐만 아니라 뒤집기까지 같은 것으로 보는 목걸이(Necklace/Bracelet) 문제이다. 전체 구슬 수 $n = 12$이며, 이면체군 D_{12}를 사용하여 Burnside's Lemma로 고정되는 배치를 구한다. $|D_{12}| = 24$이다.
Step 1. 회전(Rotation)에 의한 고정점
회전각 k에 대해 고정되는 배치가 존재하려면, 각 색깔 구슬의 개수 $(4, 4, 4)$가 주기의 개수 $\frac{12}{\gcd(k,12)}$의 배수여야 한다.

- **항등 회전 ($k = 0$):** 모든 선형 배열이 고정된다.

$$\text{Fix}(0) = \frac{12!}{4!4!4!} = 34650$$

- $180°$ **회전 ($k = 6$):** $\gcd(6, 12) = 6$이므로 길이가 2인 주기가 6개 생긴다. 각 색깔이 4개씩이므로, 각 색깔은 2개의 주기를 차지해야 한다.

$$\text{Fix}(6) = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$$

- $90°, 270°$ **회전 ($k = 3, 9$):** $\gcd(3, 12) = 3$이므로 길이가 4인 주기가 3개 생긴다. 각 색깔이 4개씩이므로, 각 주기는 한 종류의 색으로만 채워진다. (R, Y, B의 순열)

$$\text{Fix}(3) = \text{Fix}(9) = 3! = 6$$

- **그 외 회전:** 조건을 만족하는 정수 주기가 형성되지 않아 고정되는 배치가 없다 (0).

회전군에 의한 합: $34650 + 90 + 6 + 6 = 34752$.
Step 2. 반사(Reflection)에 의한 고정점
$n = 12$가 짝수이므로 반사축은 두 종류이다.

- **선분을 지나는 축 (6개):** 고정점이 없으며, 6쌍의 대칭쌍이 형성된다. 각 색깔은 2쌍씩 배치되어야 한다.

$$6 \times \frac{6!}{2!2!2!} = 6 \times 90 = 540$$

- **두 점을 지나는 축 (6개):** 고정점 2개와 5쌍의 대칭쌍이 형성된다. 각 색깔의 개수가 모두 짝수이므로, 고정점 2개는 같은 색이어야 한다. 고정점의 색을 정하는 경우 3가지, 남은 10개(5쌍)를 배치하는 방법 $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$가지.

$$6 \times (3 \times 30) = 540$$

반사에 의한 합: $540 + 540 = 1080$.
Step 3. 최종 계산
Burnside's Lemma에 의해 전체 경우의 수 N은 다음과 같다.

$$N = \frac{1}{24}(34752 + 1080) = \frac{35832}{24} = 1493$$

따라서 1493을 1000으로 나눈 나머지는 493이다.

정답

$\boxed{493}$

Practice makes perfect!