KMO 대비반 중급 3주차 테스트

Taeyang Lee

October 23, 2025

Contents

1 대수

문제 1
다음 식을 계산하여라.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

(20점)

풀이
각 항의 분모를 유리화하면

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

따라서 주어진 합은 망원급수(telescoping series)가 된다:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\\
&=\sum_{n=1}^{99}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\
&=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\\
&=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9.
\end{aligned}$$

정답

$\boxed{9}$

문제 2

$S = \sum_{k=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{k}}$일 때, $[S]$의 값을 구하여라. (20점)

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

풀이

[풀이 1: 텔레스코핑을 이용한 부등식]

복잡하여 연산하기 어려운 수열의 합을, 수열의 각 항보다 크거나 더 작은 적절한 식을 통하여 텔레스코핑 합으로 표현할 수 있는 꼴로 바꾸어 합의 범위를 쌍각해보자.
주어진 식을 k에 대한 식으로 나타내고, 텔레스코핑 계산을 진행해보자.

$$\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

각 항을 유리화하면

$$\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

이로부터 다음을 얻는다:
Lower bound:

$$\sum_{k=1}^{120} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < \sum_{k=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{k}} = S$$

망원급수로 계산하면:

$$2(\sqrt{121}-\sqrt{1}) < S \Rightarrow 2(11-1) < S \Rightarrow 20 < S$$

Upper bound (첫 번째 항 주의):
$k \geq 2$일 때 $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$이지만, $k = 1$일 때는 $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = 2(\sqrt{1}-\sqrt{0})$으로 등호가 성립한다.
따라서:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \sum_{k=2}^{120} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= 2(\sqrt{1}-\sqrt{0}) + \sum_{k=2}^{120} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &< 2(\sqrt{1}-\sqrt{0}) + \sum_{k=2}^{120} 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) \\ &= 2(\sqrt{1}-\sqrt{0}) + 2(\sqrt{120}-\sqrt{1}) \\ &= 2\sqrt{120} \approx 21.91 \end{aligned}$$

더 정확히 계산하면, $2\sqrt{120} = 2\sqrt{4 \cdot 30} = 4\sqrt{30} < 4 \cdot 5.5 = 22$이고 $2\sqrt{120} > 2\sqrt{100} = 20$이다.

하지만 $\sqrt{120} \approx 10.95$이므로 $2\sqrt{120} \approx 21.91$, 즉 $2\sqrt{120} - 1 \approx 20.91$이다.
그런데 첫 번째 항에서 등호를 사용했으므로 실제로는:

$$S < 1 + \sum_{k=2}^{120} 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 1 + 2(\sqrt{120} - 1) = 2\sqrt{120} - 1 < 21$$

따라서 $20 < S < 21$이므로 $[S] = 20$

[풀이 2: 적분을 이용한 부등식]
각 항 $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$에 대해 다음 부등식이 성립한다:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

이를 $k = 1$부터 $k = 120$까지 더하면,

$$\sum_{k=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_1^{121} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

적분을 계산하면

$$\int_1^{121} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{121} = 2\sqrt{121} - 2\sqrt{1} = 22 - 2 = 20.$$

따라서

$$\sum_{k=2}^{121} \frac{1}{\sqrt{k}} < 20 < \sum_{k=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{k}} = S.$$

좌변을 정리하면

$$S - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{121}} < 20,$$

$$S < 20 + 1 - \frac{1}{11} = 21 - \frac{1}{11} = \frac{230}{11} \approx 20.909.$$

또한 $S > 20$이므로,

$$20 < S < 21.$$

따라서 $[S] = 20.$

정답

$$\boxed{20}$$

문제 3

$$\sum_{k=0}^{11} k!(k^2+k+1)$$

을 13으로 나눈 나머지를 구하여라.

(Hint : Wilson 정리 : 소수 p에 대하여 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$)

(20점)

풀이
주어진 식을 망원급수로 변형한다.

$$k!(k^2+k+1) = k!\{k(k+1)+1\} = k(k+1)!+k! = (k+2)!-2(k+1)!+k!.$$

증명:

$$\begin{aligned}(k+2)!-2(k+1)!+k! &= (k+2)(k+1)!-2(k+1)!+k! \\ &= (k+1)![(k+2)-2]+k! \\ &= k(k+1)!+k!\end{aligned}$$

따라서 합을 취하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11} k!(k^2+k+1) &= \sum_{k=0}^{11}[(k+2)!-2(k+1)!+k!] \\ &= [(2!-2\cdot 1!+0!)+(3!-2\cdot 2!+1!)+\cdots+(13!-2\cdot 12!+11!)]\end{aligned}$$

이는 망원급수이므로

$$\sum_{k=0}^{11}[(k+2)!-2(k+1)!+k!] = 13!-2\cdot 12!+11!-0!+2\cdot 1!$$

더 간단히, 첫 항과 마지막 항만 남아서

$$= 13!-12!$$

Wilson 정리 적용:
13은 소수이므로 Wilson 정리에 의해 $12! \equiv -1 \pmod{13}$.
또한 $13! \equiv 0 \pmod{13}$ (13이 인수로 포함).
따라서

$$13!-12! \equiv 0-(-1) \equiv 1 \pmod{13}$$

정답

$\boxed{1}$

문제 4
$0, 1, 2, 3$이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}$$

을 만족할 때, $12A + 16B + 24C + 48D$의 값을 구하여라. (20점)

풀이
부분분수 분해를 이용하여 A, B, C, D를 구한다.
방법: 특수값 대입
양변에 $x(x-1)(x-2)(x-3)$을 곱하면

$$1 = A(x-1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x-1)(x-3) + Dx(x-1)(x-2).$$

$x = 0$을 대입:

$$1 = A(-1)(-2)(-3) \Rightarrow 1 = -6A \Rightarrow A = -\frac{1}{6}.$$

$x = 1$을 대입:

$$1 = B(1)(-1)(-2) \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

$x = 2$를 대입:

$$1 = C(2)(1)(-1) \Rightarrow 1 = -2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$x = 3$을 대입:

$$1 = D(3)(2)(1) \Rightarrow 1 = 6D \Rightarrow D = \frac{1}{6}.$$

따라서

$$\begin{aligned} 12A + 16B + 24C + 48D &= 12\left(-\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{2}\right) + 24\left(-\frac{1}{2}\right) + 48\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= -2 + 8 - 12 + 8 \\ &= 2. \end{aligned}$$

정답

$$\boxed{2}$$

문제 5

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{10^3-1}{10^3+1}=\frac{q}{p}$$

(단, p, q는 서로소인 자연수) 일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (20점)

풀이
각 항을 인수분해하여 단순화한다.

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}.$$

$n=2$일 때:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{7}{9}=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}.$$

$n=3$일 때:

$$\frac{3^3-1}{3^3+1}=\frac{26}{28}=\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}=\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}.$$

일반적으로

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}.$$

주목할 점: n^2+n+1은 $(n+1)^2-(n+1)+1$과 같으므로, 분자의 n^2+n+1과 다음 항의 분모 $(n+1)^2-(n+1)+1$이 소거된다.
[**망원곱셈 (Telescoping Product)**]

$$\begin{aligned}\prod_{n=2}^{10}\frac{n^3-1}{n^3+1}&=\prod_{n=2}^{10}\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}\\&=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdot\frac{4\cdot 31}{6\cdot 21}\cdots\frac{9\cdot 111}{11\cdot 91}\\&=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots 9)(7\cdot 13\cdot 21\cdots 111)}{(3\cdot 4\cdot 5\cdots 11)(3\cdot 7\cdot 13\cdots 91)}.\end{aligned}$$

분자와 분모에서 공통 항이 소거되면:

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 111}{10\cdot 11\cdot 3}=\frac{222}{330}=\frac{37}{55}.$$

$\gcd(37,55)=1$이므로, $q=37$, $p=55$.
따라서 $p+q=55+37=92$.

정답

$\boxed{92}$