

KMO 대비반 중급 12주차 테스트

Taeyang Lee

December 18, 2025

Contents

| | |
|----------------|----------|
| 1 대수 | 2 |
| 문제 1 | 2 |
| 풀이 | 2 |
| 정답 | 2 |
| 문제 2 | 3 |
| 풀이 | 3 |
| 정답 | 3 |
| 문제 3 | 4 |
| 풀이 | 4 |
| 정답 | 4 |
| 문제 4 | 4 |
| 풀이 | 4 |
| 정답 | 4 |
| 문제 5 | 5 |
| 풀이 | 5 |
| 정답 | 5 |
| 2 조합 | 6 |
| 문제 1 | 6 |
| 풀이 | 6 |
| 정답 | 6 |
| 문제 2 | 7 |
| 풀이 | 7 |
| 정답 | 7 |
| 문제 3 | 8 |
| 풀이 | 8 |
| 정답 | 8 |
| 문제 4 | 9 |
| 풀이 | 9 |
| 정답 | 9 |
| 문제 5 | 10 |
| 풀이 | 10 |
| 정답 | 10 |

1 대수

문제 1

양의 실수 x, y 에 대하여

$$k = \frac{3y^2 + 2xy + x^2}{2xy + y^2}$$

의 최소값을 구하여라.

풀이

분모를 양수로 두고

$$k(2xy + y^2) - (3y^2 + 2xy + x^2) \geq 0$$

을 x 에 대한 이차식으로 보면,

$$(k-1)x^2 + 2y(k-1)x + y^2(k-3) \geq 0$$

이 항상 성립해야 한다. 판별식이 0 이하:

$$\Delta = 4y^2(k-1)^2 - 4(k-1)y^2(k-3) \leq 0$$

$$(k-1)[(k-1) - (k-3)] \leq 0 \Rightarrow k \geq 2$$

$x = y$ 일 때 $k = 2$ 성립.

정답

2

문제 2

실수 a, b 가

$$a^2 + 200ab + 10000 = 0 \quad (b \neq -1)$$

을 만족 할 때,

$$\frac{a+100}{b+1}$$

의 최댓값을 구하여라.

풀이
식은

$$(a + 100b)^2 = 0 \Rightarrow a = -100b$$

대입하면

$$\frac{a+100}{b+1} = \frac{100(1-b)}{b+1}$$

$t = \frac{1-b}{1+b}$ 라 두면,

$$t \leq 1$$

최댓값은 $b \rightarrow -1^+$ 에서 접근.

정답

100

문제 3

$$|x + y + 1| + |x + 1| + |y + 3| = 3$$

을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때 $M + 2m$ 의 값을 구하여라.

풀이

평면에서 절댓값의 합은 삼각형 영역을 만든다. 꼭짓점은

$$(-1, -3), (0, -1), (-2, -1)$$

최소는 무게중심:

$$m = \frac{(-1)^2 + (-3)^2 + (0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}{3} = 5$$

최대는 꼭짓점 중 가장 먼 점:

$$M = 10$$

정답

[20]

문제 4

실수 $x > 2, y > 3$ 에 대해

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-9}}$$

의 최소값을 구하여라.

풀이

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$$

코시-슈바르츠:

$$(x+y)^2 \leq (\sqrt{x+2} + \sqrt{y+3})(\sqrt{x-2} + \sqrt{y-3})$$

평등은

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{y+3}{y-3}$$

에서 성립. 최소값은 $x = 4, y = 6$ 일 때 = 8.

정답

[8]

문제 5

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$$

을 만족하는 실수 x, y 에 대해

$$xy(x-y)(x-2y)$$

의 최댓값을 구하여라.

풀이

조건식은

$$(x-y)^2 + y^2 = 4$$

치환 $u = x - y, v = y$. 목표식은

$$(u+v)v \cdot u \cdot (u-v)$$

대칭성에 의해 $u^2 = v^2$ 에서 극값. 대입하여 최대값 = 4.

정답

4

2 조합

문제 1

각 자리가 1, 2, 3으로 이루어진 6자리 양의 정수 중 1도 이웃하지 않고 2도 이웃하지 않는 경우의 수를 구하여라.

풀이

1과 2가 연속되지 않도록 배치. 가능한 문자열은 자동적으로

$$3^6 - 2 \cdot 5^5 + 4^4 = 96$$

정답

96

문제 2

6등분된 원판을 뺄강, 노랑, 파랑으로 색칠한다. 이웃한 부채꼴은 서로 다른 색이어야 하며 회전이 달라도 다른 것으로 센다.

풀이

첫 칸 3가지, 이후 각 칸 2가지.

$$3 \cdot 2^5 = 96$$

정답

96

문제 3

1×1 , 1×2 직사각형을 이용해 2×6 보드를 채우는 경우의 수를 구하여라.

풀이

점화식:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

초기조건 $a_1 = 1, a_2 = 2$.

$$a_6 = 13$$

정답

13

문제 4

한 번에 1,3,4칸을 오를 수 있을 때 10계단을 오르는 방법의 수를 구하여라.

풀이

점화식

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$$

계산하면

$$a_{10} = 64$$

정답

[64]

문제 5

일렬로 놓인 20개의 집에 편지를 배달하거나 하지 않는다. 서로 이웃한 두 집에도, 연속한 세 집에도 모두 배달하지 않는 경우의 수를 구하여라.

풀이

길이 3 이상 연속 불가 \rightarrow 점화식

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$$

초기값 계산 후

$$a_{20} = 4181$$

정답

4181

Practice makes perfect!