KMO 대비반 중급 2주차 테스트

Taeyang Lee

October 16, 2025

Contents

1 대수

문제 1

$f(x) = \dfrac{4^x}{4^x+2}$ 이라 하자. 합 $f\left(\dfrac{1}{801}\right) + f\left(\dfrac{2}{801}\right) + f\left(\dfrac{3}{801}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{800}{801}\right)$ 의 값을 구하여라.

(20점)

풀이

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}.$$

대칭성을 이용하면

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{2}{4^x+2} = 1.$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{800} f\left(\frac{k}{801}\right) = \sum_{k=1}^{400} \left\{ f\left(\frac{k}{801}\right) + f\left(1 - \frac{k}{801}\right) \right\} = 400.$$

정답

$\boxed{400}$

문제 2
다음을 정수 범위에서 최대한 인수분해하였을 때, 곱해져 있는 항의 개수를 구하여라.

$$a^3(c^2-b^2)+b^3(a^2-c^2)+c^3(b^2-a^2).$$

(예: $ab(ab+bc)$는 3개의 항이 곱해져 있는 식이다.)

(20점)

풀이
[**풀이 1: 교대식의 성질 이용**]
주어진 식은 교대식이다. 교대식의 성질에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$(\text{교대식}) = (\text{교대식}) \times (\text{대칭식}).$$

인수정리에 의해 $(a-b)(b-c)(c-a)$인 교대식이 인수로 존재하므로, 나머지 부분은 2차 대칭식이어야 한다.
2차 대칭식은 기본대칭식

$$e_1 = a+b+c, \quad e_2 = ab+bc+ca, \quad e_3 = abc$$

의 사칙연산으로 표현되므로, $Ae_1^2 + Be_1e_2 + Ce_3$ 형태로 나타낼 수 있다.
계수를 비교하면 $A=1, B=1, C=0$이므로,

$$a^3(c^2-b^2)+b^3(a^2-c^2)+c^3(b^2-a^2) = (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$$

[**풀이 2: 직접 인수분해**]
주어진 식을 정리하면,

$$\begin{aligned}
&a^3(c^2-b^2)+b^3(a^2-c^2)+c^3(b^2-a^2)\\
&= a^3c^2 - a^3b^2 + b^3a^2 - b^3c^2 + c^3b^2 - c^3a^2\\
&= (a^3c^2 - b^3c^2) + (b^3a^2 - c^3a^2) + (c^3b^2 - a^3b^2)\\
&= c^2(a^3-b^3) + a^2(b^3-c^3) + b^2(c^3-a^3)\\
&= c^2(a-b)(a^2+ab+b^2) + a^2(b-c)(b^2+bc+c^2) + b^2(c-a)(c^2+ca+a^2)\\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).
\end{aligned}$$

따라서 곱해진 항의 개수는 **4개**이다.

정답

$\boxed{4}$

문제 3
다음 연립방정식의 해를 x, y, z라 할 때, $x^4 + y^4 + z^4$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34. \end{cases}$$

(20점)

풀이
세 문자 x, y, z에 대해 주어진 식은 대칭식(Symmetric Polynomial)이다.
따라서 기본대칭식

$$e_1 = x + y + z, \quad e_2 = xy + yz + zx, \quad e_3 = xyz$$

의 값만 알면 모든 대칭식의 값을 구할 수 있다.
문제에서 제시된 정보는 멱합(Power Sum)

$$p_1 = x + y + z, \quad p_2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad p_3 = x^3 + y^3 + z^3$$

이다.
이들은 e_1, e_2, e_3와 **뉴턴 항등식**(Newton's Identities) 관계를 가진다:

$$\begin{aligned} p_1 &= e_1 \\ p_2 &= e_1 p_1 - 2e_2 \\ p_3 &= e_1 p_2 - e_2 p_1 + 3e_3 \end{aligned}$$

문제에서 $p_1 = 4,\ p_2 = 14,\ p_3 = 34$가 주어졌다.
이를 대입하면

$$\begin{aligned} e_1 &= 4 \\ 14 &= 4 \cdot 4 - 2e_2 \\ 34 &= 4 \cdot 14 - 1 \cdot 4 + 3e_3 \\ \therefore e_2 &= 1, \quad e_3 = -6 \end{aligned}$$

이제 $p_4 = x^4 + y^4 + z^4$를 계산한다:

$$p_4 = e_1 p_3 - e_2 p_2 + e_3 p_1 = 4 \cdot 34 - 1 \cdot 14 + (-6) \cdot 4.$$

$$= 136 - 14 - 24 = 98.$$

정답

$\boxed{98}$

문제 4
$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97-x} = 5$일 때, $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{97-x}$의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
주어진 식에서 다음과 같이 치환하자
$a = \sqrt[4]{x},\ b = \sqrt[4]{97-x}$

문제의 조건은

$$e_1 = a + b = 5$$

이며, 구하는 값은 $e_2 = ab$이다.
또한 $a^4 + b^4 = 97$이 주어졌다.

$$a^2 + b^2 = e_1^2 - 2e_2 = 25 - 2e_2$$

이고, 따라서

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = (25 - 2e_2)^2 - 2e_2^2.$$

주어진 조건 $a^4 + b^4 = 97$을 대입하면

$$(25 - 2e_2)^2 - 2e_2^2 = 97.$$

이를 전개하면

$$625 - 100e_2 + 4e_2^2 - 2e_2^2 = 97,$$
$$2e_2^2 - 100e_2 + 528 = 0,$$
$$e_2^2 - 50e_2 + 264 = 0.$$

따라서

$$e_2 = 44 \quad \text{또는} \quad e_2 = 6.$$

그런데 $ab = e_2 \le \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{25}{4} = 6.25$가 되어야 하므로 가능한 해는

$$e_2 = 6.$$

정답

$\boxed{6}$

문제 5
$m^3+n^3+99mn=33^3$을 만족시키는 양의 정수 (m,n)의 순서쌍의 개수를 구하여라.

(20점)

풀이

$$m^3+n^3+3mn(m+n)=(m+n)^3$$

조건은 $3mn(m+n)=99mn$이므로 $m+n=33$

양의 정수 해는 $(m,n)=(1,32),(2,31),\ldots,(32,1)$로 32개이다.

정답

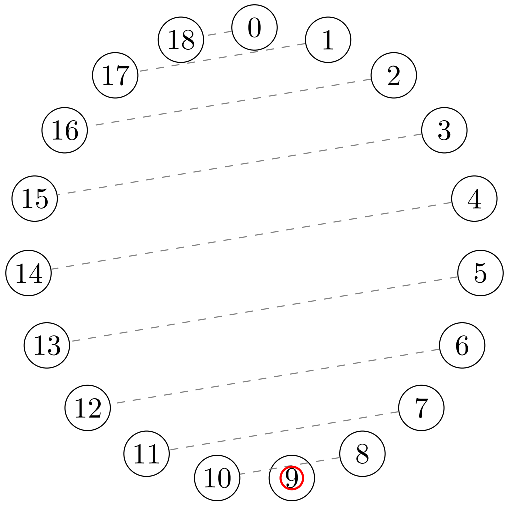
$\boxed{32}$

2 조합

문제 1
어느 부부가 아홉 쌍의 부부를 집으로 초대하여 파티를 열었다. 이 자리에 모인 열 쌍의 부부는 서로 아는 사이도 있고, 처음 만나는 사이도 있다. 이들 가운데 서로 알던 사람들은 악수를 하지 않았지만, 처음 만나는 사람들은 정중하게 악수를 한 번씩 나누었다. 저녁 식사가 끝나고 집 주인은 그 자리에 모인 19명(집 주인의 부인과 손님들)에게 오늘 모임에서 악수를 몇 번 하였는지 질문하였다. 놀랍게도 이들이 악수한 횟수는 모두 달랐다. 이때 집 주인의 부인은 악수를 몇 번 하였는지 구하시오.

(20점)

풀이
집주인을 제외한 19명의 악수 횟수는 가능한 값 전부인 $0, 1, 2, \ldots, 18$을 각각 한 번씩 차지한다. 부부는 서로 악수를 하지 않으므로 한 쌍의 악수 횟수 합은 항상 18이 된다. 따라서 $(18, 0), (17, 1), (16, 2), \ldots, (10, 8), (9, 9)$의 10쌍이 형성된다. 집주인 부부는 $(9, 9)$에 해당하므로 집주인의 부인은 9회 악수했다.



악수 횟수 페어: 합이 항상 18. (9,9)가 집주인 부부

풀이
집 주인을 제외한 19명의 악수 횟수가 모두 다르다. 가능한 악수 횟수는 최소 0회에서 최대 18회이다. 따라서 19명이 $0, 1, 2, \cdots, 18$회를 각각 한 번씩 차지한다.
18회 악수한 사람은 본인의 배우자를 제외한 모든 사람과 악수했다. 따라서 0회 악수한 사람은 그 사람의 배우자이다. 마찬가지로 17회와 1회, 16회와 2회, ⋯가 각각 부부이다. 이러한 쌍은 $(18, 0)$, $(17, 1)$, $(16, 2)$, ⋯, $(10, 8)$, $(9, 9)$로 10쌍이다. 집 주인 부부가 $(9, 9)$에 해당하므로, 집 주인의 부인은 9회 악수했다.

정답

$\boxed{9}$

문제 2
정팔각형의 변을 따라 움직이는 로봇이 있다. 이 로봇은 정팔각형의 한 변을 지나가는데 1분이 걸리며, 각 꼭짓점에서 가던 방향으로 계속 가거나 반대 방향으로 방향을 바꿀 수 있다. 이 로봇이 한 꼭짓점 A에서 출발하여 10분 동안 계속 움직여 다시 꼭짓점 A로 돌아오는 경우의 수를 구하여라.

(20점)

풀이
정팔각형에서 한 방향으로 가면 +1, 반대 방향으로 가면 -1이라 하자. 10분 후 출발점으로 돌아오려면 총 이동 거리가 8의 배수여야 한다.

10번 이동 중 m번 정방향, $10-m$번 역방향으로 가면 총 이동은 $m-(10-m) = 2m-10$이다. 이 값이 ± 8 또는 0이어야 한다.

- $2m-10=8 \Rightarrow m=9$: $\binom{10}{9}=10$
- $2m-10=0 \Rightarrow m=5$: $\binom{10}{5}=252$
- $2m-10=-8 \Rightarrow m=1$: $\binom{10}{1}=10$

따라서 총 경우의 수는 $10+252+10=272$.

정답

$\boxed{272}$

문제 3
여섯 쌍의 부부가 모임에 참가하였다. 사회자가 그 중 일곱 명을 뽑아 선물을 준다. 이때, 선물을 하나도 받지 못한 부부가 오직 한 쌍일 경우의 수를 구하여라.

(20점)

풀이
선물을 받지 못할 부부 한 쌍을 선택: $\binom{6}{1} = 6$.

나머지 5쌍(10명) 중 7명을 뽑되, 각 쌍에서 최소 한 명은 선택되어야 한다. 5쌍 중 3쌍에서 한 명씩만, 2쌍에서 두 명씩 선택한다.

- 한 명만 선택할 3쌍을 고름: $\binom{5}{3} = 10$
- 각 쌍에서 한 명을 고름: $2^3 = 8$

따라서 총 경우의 수는 $6 \times 10 \times 8 = 480$.

정답

$\boxed{480}$

문제 4
$1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 9$의 숫자가 각각 하나씩 적힌 8장의 카드 중에서 2장 이상의 카드를 동시에 뽑을 때, 카드에 적힌 숫자를 모두 곱한 값이 될 수 있는 서로 다른 수의 개수를 구하여라.

(20점)

풀이
카드: $1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 9$. 소인수분해하면 $9 = 3^2$이므로 가능한 곱은 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ 형태이다.

- $a \in \{0, 1, 2\}$: 3가지
- $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$: 5가지 (3이 2개, 9=3^2가 1개)
- $c \in \{0, 1\}$: 2가지
- $d \in \{0, 1\}$: 2가지

총 $3 \times 5 \times 2 \times 2 = 60$가지. 단, 1만 선택하는 경우(카드 1장)는 제외되므로 $60 - 1 = 59$.

정답

$\boxed{59}$

문제 5
정사면체 $ABCD$의 6개 모서리 중에서 몇 개의 모서리를 골라 색을 칠한다. 이때 색을 칠한 모서리들을 따라 4개의 꼭짓점이 모두 연결되는 경우의 수를 구하여라.

(20점)

풀이
정사면체의 모서리는 6개다. 모서리 k개를 칠하는 모든 경우의 수는 $\binom{6}{k}$이다. 네 꼭짓점이 모두 연결되려면(스패닝 연결) 각 k에서 다음과 같이 분류된다.
(i) $k = 6$: 전부 칠함. 연결 1가지.

$$c_6 = 1$$

(ii) $k = 5$: 하나만 지움. 어떤 모서리를 지워도 여전히 연결.

$$c_5 = \binom{6}{1} = 6$$

(iii) $k = 4$: 네 개를 칠함. 삼각형(한 면의 3모서리)만 칠하는 것은 3개라서 $k = 3$에 해당하며, $k = 4$에서는 그런 비연결이 불가능하다. 즉 $\binom{6}{4}$ 전부 연결.

$$c_4 = \binom{6}{4} = 15$$

(iv) $k = 3$: 세 개를 칠함. 두 경우로 나뉜다. - 한 면의 3모서리를 모두 고른 경우(정삼각형): 한 꼭짓점이 빠져 연결 아님. 이런 경우는 면의 개수만큼 4가지. - 그 외의 3개: 스패닝 트리로서 연결. 전체 $\binom{6}{3} = 20$ 중 삼각형 4가지를 제외.

$$c_3 = 20 - 4 = 16$$

(v) $k \leq 2$: 4개 꼭짓점을 모두 연결하려면 최소 3개 모서리가 필요.

$$c_2 = c_1 = c_0 = 0$$

따라서 전체 연결 경우의 수 합은

$$c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 16 + 15 + 6 + 1 = 38.$$

풀이
정사면체는 4개 꼭짓점과 6개 모서리를 가진다. 모든 꼭짓점이 연결되려면 그래프가 연결되어야 한다.

전체 경우의 수: $2^6 = 64$ (각 모서리를 칠하거나 안 칠하거나)
비연결 경우를 제외한다. 포함-배제 원리를 사용하면:

- 고립된 점이 1개 이상: 각 점에 연결된 3개 모서리가 모두 선택 안 됨
- 2-2 분할: 두 쌍의 점들이 서로 연결되지 않음

정확한 계산 결과 비연결 경우는 26가지이다.
따라서 연결된 경우: $64 - 26 = 38$.

정답

$\boxed{38}$

Practice makes perfect!