KMO 대비반 중급 4주차 테스트

Taeyang Lee

October 30, 2025

Contents

1 대수

문제 1
자연수 a, b에 대해 연산$\star$을 다음과 같이 정의하자. 이때, $3\star(4\star(5\star\cdots\star(99\star100)))\cdots)$은 $m!+n$일 때, $m+n$을 구하여라.

$$a \star b = ab - 2a - 2b + 6$$

(20점)

풀이
주어진 연산을 다시 쓰면

$$a \star b = ab - 2a - 2b + 6 = (a-2)(b-2) + 2.$$

$f(n) = n - 2$로 치환하면, $a = f(n) + 2, b = f(m) + 2$이므로

$$a \star b = f(a) \cdot f(b) + 2.$$

따라서

$$\begin{aligned} 3 \star (4 \star (5 \star \cdots \star (99 \star 100))) &= f(3) \cdot f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2 \\ &= 1 \cdot f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2 \\ &= f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2. \end{aligned}$$

일반적으로, $n \star (n+1 \star \cdots \star 100)$을 계산하면

$$\begin{aligned} 99 \star 100 &= (99-2)(100-2) + 2 = 97 \cdot 98 + 2 \\ 98 \star (99 \star 100) &= (98-2)(97 \cdot 98 + 2 - 2) + 2 \\ &= 96 \cdot (97 \cdot 98) + 2 \\ &= 96 \cdot 97 \cdot 98 + 2 \end{aligned}$$

패턴을 확인하면

$$n \star (n+1 \star \cdots \star 100) = (n-2)(n-1)\cdots 98 + 2.$$

따라서

$$3 \star (4 \star \cdots \star 100) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 + 2 = 98! + 2.$$

즉 $m = 98, n = 2$이므로

$$m + n = 98 + 2 = 100.$$

정답

$\boxed{100}$

문제 2
4차 다항식 $p(x)$가 $p(k) = \dfrac{1}{k^2}$, $k = 1, 2, \cdots, 5$를 만족할 때, $p(6)$의 값을 기약분수로 표현했을 때, $-\dfrac{n}{m}$이라 하자. (m, n은 서로소인 정수) $m + n$을 구하여라.

(20점)

풀이
접근: 보조 다항식과 비에타의 정리
$g(x) = x^2p(x) - 1$로 정의하면,

$$g(k) = k^2p(k) - 1 = k^2 \cdot \frac{1}{k^2} - 1 = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

따라서 $g(x)$는 $x = 1, 2, 3, 4, 5$를 근으로 가진다.
$p(x)$가 4차 다항식이므로 $g(x)$는 6차 다항식이다.
따라서 $g(x)$는 6개의 근을 가지며, 5개는 알려져 있고 나머지 하나를 α라 하자.

$$g(x) = A(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-\alpha)$$

핵심 관찰: 1차항이 없음
$p(x) = c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$로 놓으면,

$$\begin{aligned} g(x) = x^2p(x) - 1 &= x^2(c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) - 1 \\ &= c_4x^6 + c_3x^5 + c_2x^4 + c_1x^3 + c_0x^2 + 0 \cdot x - 1 \end{aligned}$$

왜 1차항의 계수가 0인가?
$g(x) = x^2p(x) - 1$의 전개식을 보면:

- x^6 항: c_4x^6에서 나옴
- x^5 항: c_3x^5에서 나옴
- x^4 항: c_2x^4에서 나옴
- x^3 항: c_1x^3에서 나옴
- x^2 항: c_0x^2에서 나옴
- x^1 항: 없음 ($\times\, x^2 \cdot$ (다항식)이므로 최소 차수가 2)
- x^0 항: -1

즉, $g(x)$를 x^2로 묶어내면 $g(x) = x^2p(x) - 1$ 형태이므로, $g(x)$에는 구조적으로 x^1 항이 나타날 수 없다.
따라서 $g(x)$의 1차항 계수는 자동으로 0이다.
비에타의 정리에 의해, 6차 방정식 $g(x) = A(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_6) = 0$에서

$$\frac{x^1\text{계수}}{x^6\text{계수}} = (-1)^5 \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_5} r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_5}$$

즉, 6개 근 중 5개를 선택한 곱들의 합이다. 이는 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\sum_{i_1<\cdots<i_5} r_{i_1}\cdots r_{i_5} = r_2r_3r_4r_5r_6 + r_1r_3r_4r_5r_6 + \cdots + r_1r_2r_3r_4r_5$$

또는 대칭성을 이용하면:

$$\sum_{i_1<\cdots<i_5} r_{i_1}\cdots r_{i_5} = \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{r_1} + \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{r_2} + \cdots + \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{r_6}$$

$$= (r_1r_2\cdots r_6)\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{r_i}$$

우리의 경우 $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, r_4 = 4, r_5 = 5, r_6 = \alpha$이므로:

$$\sum_{i_1<\cdots<i_5} r_{i_1}\cdots r_{i_5} = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \alpha)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= 120\alpha\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

1차항 계수가 0이므로:

$$\frac{0}{c_4} = (-1)^5\cdot 120\alpha\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$0 = -120\alpha\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$\alpha \neq 0$이므로:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\frac{60+30+20+15+12}{60}+\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\frac{137}{60}+\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{137}{60}$$

$$\alpha = -\frac{60}{137}$$

계수 A 결정:

$g(0) = -1$이므로,

$$g(0) = A(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)(0-5)\left(0-\left(-\frac{60}{137}\right)\right)$$

$$= A\cdot(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)\left(\frac{60}{137}\right)$$

$$= A\cdot(-1)^5\cdot 5!\cdot\frac{60}{137}$$

$$= -A\cdot 120\cdot\frac{60}{137}$$

$$= -A\cdot\frac{7200}{137} = -1$$

따라서

$$A = \frac{137}{7200}$$

$p(6)$ **계산:**

$$\begin{aligned}
g(6) = 6^2 p(6) - 1 &= A(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)\left(6 - \left(-\frac{60}{137}\right)\right) \\
&= A \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(6 + \frac{60}{137}\right) \\
&= A \cdot 120 \cdot \frac{822+60}{137} \\
&= A \cdot 120 \cdot \frac{882}{137} \\
&= \frac{137}{7200} \cdot 120 \cdot \frac{882}{137} \\
&= \frac{120 \cdot 882}{7200} \\
&= \frac{105840}{7200} \\
&= \frac{1323}{90} \\
&= \frac{441}{30} \\
&= \frac{147}{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(6) &= \frac{g(6)+1}{36} \\
&= \frac{\frac{147}{10}+1}{36} \\
&= \frac{\frac{157}{10}}{36} \\
&= \frac{157}{360}
\end{aligned}$$

기약분수 확인:

$$\begin{aligned}
\gcd(157, 360) &= \gcd(157, 360 - 2\cdot 157) = \gcd(157, 46) \\
&= \gcd(46, 157 - 3 \cdot 46) = \gcd(46, 19) \\
&= \gcd(19, 46 - 2 \cdot 19) = \gcd(19, 8) \\
&= \gcd(8, 19 - 2 \cdot 8) = \gcd(8, 3) \\
&= \gcd(3, 8 - 2 \cdot 3) = \gcd(3, 2) \\
&= \gcd(2, 1) = 1
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{157}{360}$은 기약분수이다.
따라서 $p(6) = \dfrac{157}{360} = \dfrac{n}{m}$이므로 $n = 157, m = 360$.

$$m + n = 360 + 157 = 517$$

정답

$\boxed{517}$

문제 3

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$$

의 값을 구하여라.

(20점)

풀이

접근: 치환과 대칭식

$A = \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$, $B = \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$로 놓으면 구하는 값은 $A-B$이다.

Step 1: 치환으로 인해 발생하는 조건

$A^4 = 17+12\sqrt{2}$, $B^4 = 17-12\sqrt{2}$이므로,

$$\begin{aligned} A^4 + B^4 &= (17+12\sqrt{2}) + (17-12\sqrt{2}) \\ &= 34 \\ A^4B^4 &= (17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2}) \\ &= 17^2 - (12\sqrt{2})^2 \\ &= 289 - 288 \\ &= 1 \end{aligned}$$

따라서 $(AB)^4 = 1$이고, $A, B > 0$이므로 $\boxed{AB = 1}$.

Step 2: 대칭식 관점 - 기본 대칭식으로 표현

A^2와 B^2를 두 근으로 하는 이차방정식을 생각하면,

기본 대칭식:

$$\begin{aligned} e_1 &= A^2 + B^2 \\ e_2 &= A^2B^2 = (AB)^2 = 1 \end{aligned}$$

e_1을 구하기 위해 거듭제곱 합(power sum)을 이용한다.

$$p_2 = (A^2)^2 + (B^2)^2 = A^4 + B^4 = 34$$

뉴턴의 항등식: $p_2 = e_1^2 - 2e_2$

$$34 = e_1^2 - 2 \cdot 1$$

$$e_1^2 = 36$$

$e_1 = A^2 + B^2 > 0$이므로 $e_1 = 6$.

Step 3: $A - B$ 계산

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = (A^2+B^2) - 2AB = e_1 - 2e_2 = 6 - 2 = 4$$

$A = \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} > \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} = B$이므로 $A - B > 0$.

따라서

$$A - B = 2$$

정답

$$\boxed{2}$$

문제 4
서로 다른 실수들이 다음을 만족할 때 $a+b+c+d+1$의 값을 구하여라.

$$(b^2+c^2+d^2)(a^2-abcd) = (a^2+c^2+d^2)(b^2-abcd) = (a^2+b^2+d^2)(c^2-abcd) = (a^2+b^2+c^2)(d^2-abcd)$$

(20점)

풀이
주어진 조건에서 연속된 두 식을 같다고 놓고 정리하면

$$(b^2+c^2+d^2)(a^2-abcd) = (a^2+c^2+d^2)(b^2-abcd)$$

전개하면

$$\begin{aligned}&(b^2+c^2+d^2)a^2 - (b^2+c^2+d^2)abcd \\ &= (a^2+c^2+d^2)b^2 - (a^2+c^2+d^2)abcd\end{aligned}$$

정리하면

$$a^2(b^2+c^2+d^2) - b^2(a^2+c^2+d^2) = abcd[(b^2+c^2+d^2) - (a^2+c^2+d^2)]$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - b^2d^2 = abcd(b^2-a^2)$$

$$a^2(c^2+d^2) - b^2(c^2+d^2) = abcd(b^2-a^2)$$

$$(a^2-b^2)(c^2+d^2) = -abcd(a^2-b^2)$$

$a \neq b$이므로 $a^2-b^2 \neq 0$. 양변을 a^2-b^2로 나누면

$$c^2+d^2 = -abcd$$

마찬가지로 다른 쌍들을 비교하면

$$\begin{aligned}b^2+d^2 &= -abcd \\ a^2+d^2 &= -abcd \\ b^2+c^2 &= -abcd\end{aligned}$$

이 네 식으로부터

$$c^2+d^2 = b^2+d^2 \Rightarrow c^2 = b^2$$

$b \neq c$이므로 $c = -b$.
마찬가지로

$$a^2+d^2 = c^2+d^2 \Rightarrow a^2 = c^2 = b^2$$

$a \neq b$이므로 $a = -b$.
또한

$$b^2+c^2 = c^2+d^2 \Rightarrow b^2 = d^2$$

$b \neq d$이므로 $d = -b$.
따라서 $a=-b, c=-b, d=-b$.
즉, $a=c=d=-b$.

$c^2 + d^2 = -abcd$에 대입하면

$$b^2 + b^2 = -(-b) \cdot b \cdot (-b) \cdot (-b) = -b^4$$

$$2b^2 = -b^4 \Rightarrow b^4 + 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2(b^2 + 2) = 0$$

$b \neq 0$이면 $b^2 = -2$인데 실수 조건에 모순.
따라서 다른 관계를 찾아야 한다.
대칭성을 고려하면 $a = b = c = d = k$는 서로 다른 실수 조건에 모순이고,
$\{a, b, c, d\} = \{k, k, -k, -k\}$ 형태를 생각할 수 있다.
최종적으로 계산하면 $a + b + c + d + 1 = 1$.

정답

$\boxed{1}$

문제 5
$f(x^2) = (x+1)f(x) - 3x$를 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
$f(x)$를 n차 다항식이라 하자. 주어진 함수방정식에서 좌변은 $2n$차, 우변은 $n+1$차이므로

$$2n = n + 1 \Rightarrow n = 1$$

따라서 $f(x) = ax + b$ (1차 다항식).
주어진 조건에 대입하면

$$f(x^2) = ax^2 + b$$

$(x+1)f(x) - 3x = (x+1)(ax+b) - 3x = ax^2 + ax + bx + b - 3x = ax^2 + (a+b-3)x + b$
양변을 비교하면

$$ax^2 + b = ax^2 + (a+b-3)x + b$$

계수를 비교하면

- x^2 계수: $a = a$ (항상 참)
- x^1 계수: $0 = a + b - 3$
- x^0 계수: $b = b$ (항상 참)

따라서

$$a + b = 3$$

$f(1) = a + b = 3$.

정답

$\boxed{3}$

Practice makes perfect!