부분합을 포함하는 점화식

Taeyang Lee

October 14, 2025

Contents

1 대수

1.1 267번

자연수 n에 대하여 모든 항이 양수인 수열 a_n이 $\sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ 일때,
$\sum_{k=1}^{128} a_k$의 값을 구하여라

1.2 풀이

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_n \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= S_n - a_n \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n \\ &= \frac{1}{2}\left(-a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

식 (1.1)에서 S_n도 a_n으로 표현되어 있고,
식 (1.2)에서 S_{n-1}도 a_n으로 표현되어 있음을 알 수 있다.
즉, S_n과 S_{n-1}이 a_n을 매개로 한 관계로 연결된다.
이들을 각각 더하고 빼는 것은 a_n을 분모와 분자에 올려주는 역할을 하게 되는데,
이를 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$S_n + S_{n-1} = \frac{2}{a_n} \tag{1.3}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \tag{1.4}$$

식 (1.3)과 (1.4)를 서로 곱하면

$${S_n}^2 - {S_{n-1}}^2 = 2 \tag{1.5}$$

이때, ${S_n}^2$을 새로운 수열 T_n이라고 하면,

$$T_n = {S_n}^2$$
$$T_n = T_{n-1} + 2 \tag{1.6}$$

T_n은 등차수열이므로,

$$T_n = T_1 + (n-1) \cdot 2 \tag{1.7}$$

식 (1.1) 에서, $n = 1$을 대입하면,

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$$
$$a_1 = \frac{2}{a_1}$$
$$\therefore a_1 = \sqrt{2} \tag{1.8}$$

$T_1 = {S_1}^2 = {a_1}^2 = 2$이므로,

$$T_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$$
$$T_n = {S_n}^2 = 2n$$
$$\therefore \quad S_n = \sqrt{2n} \tag{1.9}$$

이때, 식 (1.9)에 $n = 128$을 대입하면,

$$S_{128} = \sqrt{2 \times 128} = 16$$

일반항 a_n은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{2n} - \sqrt{2(n-1)}$$