KMO 대비반 중급 4주차 테스트

Taeyang Lee

December 17, 2025

Contents

1 대수

문제 1
자연수 a, b에 대해 연산$\star$을 다음과 같이 정의하자. 이때, $3\star(4\star(5\star\cdots\star(99\star100)))\cdots)$은 $m!+n$일 때, $m+n$을 구하여라.

$$a \star b = ab - 2a - 2b + 6$$

(20점)

풀이
주어진 연산을 다시 쓰면

$$a \star b = ab - 2a - 2b + 6 = (a-2)(b-2) + 2.$$

$f(n) = n - 2$로 치환하면, $a = f(n) + 2, b = f(m) + 2$이므로

$$a \star b = f(a) \cdot f(b) + 2.$$

따라서

$$\begin{aligned} 3 \star (4 \star (5 \star \cdots \star (99 \star 100))) &= f(3) \cdot f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2 \\ &= 1 \cdot f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2 \\ &= f(4 \star (5 \star \cdots)) + 2. \end{aligned}$$

일반적으로, $n \star (n+1 \star \cdots \star 100)$을 계산하면

$$\begin{aligned} 99 \star 100 &= (99-2)(100-2) + 2 = 97 \cdot 98 + 2 \\ 98 \star (99 \star 100) &= (98-2)(97 \cdot 98 + 2 - 2) + 2 \\ &= 96 \cdot (97 \cdot 98) + 2 \\ &= 96 \cdot 97 \cdot 98 + 2 \end{aligned}$$

패턴을 확인하면

$$n \star (n+1 \star \cdots \star 100) = (n-2)(n-1) \cdots 98 + 2.$$

따라서

$$3 \star (4 \star \cdots \star 100) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 + 2 = 98! + 2.$$

즉 $m = 98, n = 2$이므로

$$m + n = 98 + 2 = 100.$$

정답

$\boxed{100}$

문제 2
4차 다항식 $p(x)$가 $p(k) = \dfrac{1}{k^2}$, $k = 1, 2, \cdots, 5$를 만족할 때, $p(6)$의 값을 기약분수로 표현했을 때, $-\dfrac{n}{m}$이라 하자. (m, n은 서로소인 정수) $m + n$을 구하여라.

(20점)

풀이
접근: 보조 다항식과 비에타의 정리
$g(x) = x^2p(x) - 1$로 정의하면,

$$g(k) = k^2p(k) - 1 = k^2 \cdot \frac{1}{k^2} - 1 = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

따라서 $g(x)$는 $x = 1, 2, 3, 4, 5$를 근으로 가진다.
$p(x)$가 4차 다항식이므로 $g(x)$는 6차 다항식이다.
따라서 $g(x)$는 6개의 근을 가지며, 5개는 알려져 있고 나머지 하나를 α라 하자.

$$g(x) = A(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-\alpha)$$

핵심 관찰: 1차항이 없음
$p(x) = c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$로 놓으면,

$$\begin{aligned} g(x) = x^2p(x) - 1 &= x^2(c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) - 1 \\ &= c_4x^6 + c_3x^5 + c_2x^4 + c_1x^3 + c_0x^2 + 0 \cdot x - 1 \end{aligned}$$

왜 1차항의 계수가 0인가?
$g(x) = x^2p(x) - 1$의 전개식을 보면:

- x^6 항: c_4x^6에서 나옴
- x^5 항: c_3x^5에서 나옴
- x^4 항: c_2x^4에서 나옴
- x^3 항: c_1x^3에서 나옴
- x^2 항: c_0x^2에서 나옴
- x^1 항: 없음 ($\times\, x^2 \cdot$ (다항식)이므로 최소 차수가 2)
- x^0 항: -1

즉, $g(x)$를 x^2로 묶어내면 $g(x) = x^2p(x) - 1$ 형태이므로, $g(x)$에는 구조적으로 x^1 항이 나타날 수 없다.
따라서 $g(x)$의 1차항 계수는 자동으로 0이다.
비에타의 정리에 의해, 6차 방정식 $g(x) = A(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_6) = 0$에서

$$\frac{x^1\text{계수}}{x^6\text{계수}} = (-1)^5 \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_5} r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_5}$$

즉, 6개 근 중 5개를 선택한 곱들의 합이다. 이는 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\sum_{i_1<\cdots<i_5} r_{i_1}\cdots r_{i_5} = r_2r_3r_4r_5r_6 + r_1r_3r_4r_5r_6 + \cdots + r_1r_2r_3r_4r_5$$

또는 대칭성을 이용하면:

$$\sum_{i_1<\cdots<i_5} r_{i_1}\cdots r_{i_5} = \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{r_1} + \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{r_2} + \cdots + \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{r_6}$$

$$= (r_1r_2\cdots r_6)\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{r_i}$$

우리의 경우 $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, r_4 = 4, r_5 = 5, r_6 = \alpha$이므로:

$$\sum_{i_1<\cdots<i_5} r_{i_1}\cdots r_{i_5} = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \alpha)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= 120\alpha\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

1차항 계수가 0이므로:

$$\frac{0}{c_4} = (-1)^5\cdot 120\alpha\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$0 = -120\alpha\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$\alpha \neq 0$이므로:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\frac{60+30+20+15+12}{60}+\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\frac{137}{60}+\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{137}{60}$$

$$\alpha = -\frac{60}{137}$$

계수 A 결정:
$g(0) = -1$이므로,

$$g(0) = A(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)(0-5)\left(0-\left(-\frac{60}{137}\right)\right)$$

$$= A\cdot(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)\left(\frac{60}{137}\right)$$

$$= A\cdot(-1)^5\cdot 5!\cdot\frac{60}{137}$$

$$= -A\cdot 120\cdot\frac{60}{137}$$

$$= -A\cdot\frac{7200}{137} = -1$$

따라서

$$A = \frac{137}{7200}$$

$p(6)$ **계산:**

$$\begin{aligned}
g(6) = 6^2p(6) - 1 = A(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)\left(6 - \left(-\frac{60}{137}\right)\right) \\
&= A \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(6 + \frac{60}{137}\right) \\
&= A \cdot 120 \cdot \frac{822+60}{137} \\
&= A \cdot 120 \cdot \frac{882}{137} \\
&= \frac{137}{7200} \cdot 120 \cdot \frac{882}{137} \\
&= \frac{120 \cdot 882}{7200} \\
&= \frac{105840}{7200} \\
&= \frac{1323}{90} \\
&= \frac{441}{30} \\
&= \frac{147}{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(6) &= \frac{g(6)+1}{36} \\
&= \frac{\frac{147}{10}+1}{36} \\
&= \frac{\frac{157}{10}}{36} \\
&= \frac{157}{360}
\end{aligned}$$

기약분수 확인:

$$\begin{aligned}
\gcd(157, 360) &= \gcd(157, 360 - 2 \cdot 157) = \gcd(157, 46) \\
&= \gcd(46, 157 - 3 \cdot 46) = \gcd(46, 19) \\
&= \gcd(19, 46 - 2 \cdot 19) = \gcd(19, 8) \\
&= \gcd(8, 19 - 2 \cdot 8) = \gcd(8, 3) \\
&= \gcd(3, 8 - 2 \cdot 3) = \gcd(3, 2) \\
&= \gcd(2, 1) = 1
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{157}{360}$은 기약분수이다.
따라서 $p(6) = \frac{157}{360} = \frac{n}{m}$이므로 $n = 157, m = 360$.

$$m + n = 360 + 157 = 517$$

정답

$\boxed{517}$

문제 3

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$$

의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
접근: 치환과 대칭식
$A=\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$, $B=\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$로 놓으면 구하는 값은 $A-B$이다.
Step 1: 치환으로 인해 발생하는 조건
$A^4=17+12\sqrt{2}$, $B^4=17-12\sqrt{2}$이므로,

$$\begin{aligned}A^4+B^4&=(17+12\sqrt{2})+(17-12\sqrt{2})\\&=34\\A^4B^4&=(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})\\&=17^2-(12\sqrt{2})^2\\&=289-288\\&=1\end{aligned}$$

따라서 $(AB)^4=1$이고, $A,B>0$이므로 $\boxed{AB=1}$.
Step 2: 대칭식 관점 - 기본 대칭식으로 표현
A^2와 B^2를 두 근으로 하는 이차방정식을 생각하면,
기본 대칭식:

$$\begin{aligned}e_1&=A^2+B^2\\e_2&=A^2B^2=(AB)^2=1\end{aligned}$$

e_1을 구하기 위해 거듭제곱 합(power sum)을 이용한다.

$$p_2=(A^2)^2+(B^2)^2=A^4+B^4=34$$

뉴턴의 항등식: $p_2=e_1^2-2e_2$

$$34=e_1^2-2\cdot 1$$

$$e_1^2=36$$

$e_1=A^2+B^2>0$이므로 $e_1=6$.

Step 3: $A-B$ 계산

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2=(A^2+B^2)-2AB=e_1-2e_2=6-2=4$$

$A=\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}>\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}=B$이므로 $A-B>0$.
따라서

$$A-B=2$$

정답

$\boxed{2}$

문제 4
서로 다른 실수들이 다음을 만족할 때 $a+b+c+d+1$의 값을 구하여라.

$$(b^2+c^2+d^2)(a^2-abcd) = (a^2+c^2+d^2)(b^2-abcd) = (a^2+b^2+d^2)(c^2-abcd) = (a^2+b^2+c^2)(d^2-abcd)$$

(20점)

풀이
주어진 조건에서 연속된 두 식을 같다고 놓고 정리하면

$$(b^2+c^2+d^2)(a^2-abcd) = (a^2+c^2+d^2)(b^2-abcd)$$

전개하면

$$\begin{aligned}&(b^2+c^2+d^2)a^2-(b^2+c^2+d^2)abcd\\&=(a^2+c^2+d^2)b^2-(a^2+c^2+d^2)abcd\end{aligned}$$

정리하면

$$a^2(b^2+c^2+d^2)-b^2(a^2+c^2+d^2) = abcd[(b^2+c^2+d^2)-(a^2+c^2+d^2)]$$

$$a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2-a^2b^2-b^2c^2-b^2d^2 = abcd(b^2-a^2)$$

$$a^2(c^2+d^2)-b^2(c^2+d^2) = abcd(b^2-a^2)$$

$$(a^2-b^2)(c^2+d^2) = -abcd(a^2-b^2)$$

$a \neq b$이므로 $a^2-b^2 \neq 0$. 양변을 a^2-b^2로 나누면

$$c^2+d^2 = -abcd$$

마찬가지로 다른 쌍들을 비교하면

$$\begin{aligned}b^2+d^2 &= -abcd\\a^2+d^2 &= -abcd\\b^2+c^2 &= -abcd\end{aligned}$$

이 네 식으로부터

$$c^2+d^2 = b^2+d^2 \Rightarrow c^2 = b^2$$

$b \neq c$이므로 $c=-b$.
마찬가지로

$$a^2+d^2 = c^2+d^2 \Rightarrow a^2 = c^2 = b^2$$

$a \neq b$이므로 $a=-b$.
또한

$$b^2+c^2 = c^2+d^2 \Rightarrow b^2 = d^2$$

$b \neq d$이므로 $d=-b$.
따라서 $a=-b, c=-b, d=-b$.
즉, $a=c=d=-b$.

$c^2 + d^2 = -abcd$에 대입하면

$$b^2 + b^2 = -(-b) \cdot b \cdot (-b) \cdot (-b) = -b^4$$

$$2b^2 = -b^4 \Rightarrow b^4 + 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2(b^2 + 2) = 0$$

$b \neq 0$이면 $b^2 = -2$인데 실수 조건에 모순.
따라서 다른 관계를 찾아야 한다.
대칭성을 고려하면 $a = b = c = d = k$는 서로 다른 실수 조건에 모순이고,
$\{a, b, c, d\} = \{k, k, -k, -k\}$ 형태를 생각할 수 있다.
최종적으로 계산하면 $a + b + c + d + 1 = 1$.

정답

$$\boxed{1}$$

문제 5
$f(x^2) = (x+1)f(x) - 3x$를 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
$f(x)$를 n차 다항식이라 하자. 주어진 함수방정식에서 좌변은 $2n$차, 우변은 $n+1$차이므로

$$2n = n + 1 \Rightarrow n = 1$$

따라서 $f(x) = ax + b$ (1차 다항식).
주어진 조건에 대입하면

$$f(x^2) = ax^2 + b$$

$$(x+1)f(x) - 3x = (x+1)(ax+b) - 3x = ax^2 + ax + bx + b - 3x = ax^2 + (a+b-3)x + b$$

양변을 비교하면

$$ax^2 + b = ax^2 + (a+b-3)x + b$$

계수를 비교하면

- x^2 계수: $a = a$ (항상 참)
- x^1 계수: $0 = a + b - 3$
- x^0 계수: $b = b$ (항상 참)

따라서

$$a + b = 3$$

$f(1) = a + b = 3$.

정답

$\boxed{3}$

======================================

2 조합

문제 1
$0, 1, 2, 3, 4, 5$를 중복을 허락하여 이용하여 만들 수 있는 모든 세 자리수의 합을 구하여라.

(20점)

풀이
세 자리수는 백의 자리가 0이 아니어야 하므로, 백의 자리는 $1, 2, 3, 4, 5$ 중 선택 (5가지),
십의 자리와 일의 자리는 각각 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 중 선택 (각 6가지).
총 세 자리수의 개수는 $5 \times 6 \times 6 = 180$개.
백의 자리 합:
백의 자리에 각 숫자가 나타나는 횟수는 $6 \times 6 = 36$번.
백의 자리 숫자들의 합:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 36 \times 100 = 15 \times 36 \times 100 = 54000$$

십의 자리 합:
십의 자리에 각 숫자가 나타나는 횟수는 $5 \times 6 = 30$번.
십의 자리 숫자들의 합:

$$(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 30 \times 10 = 15 \times 30 \times 10 = 4500$$

일의 자리 합:
일의 자리에 각 숫자가 나타나는 횟수는 $5 \times 6 = 30$번.
일의 자리 숫자들의 합:

$$(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 30 \times 1 = 15 \times 30 = 450$$

총합:

$$54000 + 4500 + 450 = 58950$$

정답

$\boxed{58950}$

문제 2
3으로 나누어떨어지고 3을 자릿수로 포함하는 네 자리의 수의 개수를 구하시오.

(20점)

풀이
접근: 여사건 이용
3으로 나누어떨어지는 네 자리 수 전체에서, 3을 포함하지 않는 경우를 빼면 된다.
Step 1: 3으로 나누어떨어지는 네 자리 수의 개수
네 자리 수는 1000부터 9999까지이다. 이 중 3의 배수는 1002부터 9999까지이다.
개수: $\lfloor \frac{9999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{999}{3} \rfloor = 3333 - 333 = 3000$개
Step 2: 3을 포함하지 않고 3으로 나누어떨어지는 네 자리 수
사용 가능한 숫자: $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (3 제외, 총 9개)
네 자리 수 $\overline{abcd}$에서 $a \neq 0$이고, $a + b + c + d \equiv 0 \pmod 3$이어야 한다.
숫자들을 mod 3으로 분류:

- $R_0 = \{0, 6, 9\}$: 나머지 0 (3개)
- $R_1 = \{1, 4, 7\}$: 나머지 1 (3개)
- $R_2 = \{2, 5, 8\}$: 나머지 2 (3개)

백의 자리는 0이 아니므로:

- $R_0' = \{6, 9\}$: 2개
- $R_1' = \{1, 4, 7\}$: 3개
- $R_2' = \{2, 5, 8\}$: 3개

네 자리 수 $\overline{abcd}$가 3의 배수가 되려면 $a + b + c + d \equiv 0 \pmod 3$.
경우 1: $a \in R_0'$ (2가지)
$b + c + d \equiv 0 \pmod 3$인 경우의 수를 구한다. 나머지 세 자리의 조합:

- $(0, 0, 0)$: $3^3 = 27$가지
- $(1, 1, 1)$: $3^3 = 27$가지
- $(2, 2, 2)$: $3^3 = 27$가지
- $(0, 1, 2)$ 순열: $3! \times 3^3 = 6 \times 27 = 162$가지

총: $27 + 27 + 27 + 162 = 243 = 9^3/3 = 3^5/3^1 = 3^4 = 81...$
더 간단하게: 세 개 자리 b, c, d를 각각 9개 중 선택하되, 합이 $\equiv 0 \pmod 3$이어야 한다.
생성함수 접근: $(x^0 + x^1 + x^2)^3$에서 x^{3k} 계수를 구한다. 각 자리는 R_0, R_1, R_2 중 하나 (각 3개)이므로, 총 $9^3 = 729$가지 중 나머지가 0인 경우는 $9^3/3 = 243$가지.
경우 1 소계: $2 \times 243 = 486$
경우 2: $a \in R_1'$ (3가지)
$b + c + d \equiv 2 \pmod 3$이어야 한다. 역시 243가지.
경우 2 소계: $3 \times 243 = 729$
경우 3: $a \in R_2'$ (3가지)
$b + c + d \equiv 1 \pmod 3$이어야 한다. 역시 243가지.
경우 3 소계: $3 \times 243 = 729$

3을 포함하지 않는 경우 총합: $486 + 729 + 729 = 1944$
Step 3: 최종 답

$$3000 - 1944 = 1056$$

정답

$$\boxed{1056}$$

문제 3
6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 임의의 순서로 나열했을 때, a가 b보다 앞에 나올 확률을 p, a가 마지막 자리에 오지 않을 확률을 q라고 하자. $12pq$의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
(1) 확률 p:
6개 문자를 나열하는 경우의 수는 $6!$.
a와 b의 상대적 위치는 a가 앞 또는 b가 앞, 두 경우가 동일한 확률이므로

$$p = \frac{1}{2}$$

(2) 확률 q:
a가 마지막 자리에 오지 않는 경우의 수는, 전체에서 a가 마지막 자리에 오는 경우를 뺀다.

- 전체 경우의 수: $6!$
- a가 마지막 자리: $5!$

따라서

$$q = 1 - \frac{5!}{6!} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(3) $12pq$:

$$12pq = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = 12 \times \frac{5}{12} = 5$$

정답

$$\boxed{5}$$

문제 4
8을 두 개 이상의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수는 몇 개인가? (단, 더하는 순서가 다르면 같은 표현으로 본다.)

(20점)

풀이
이 문제는 8을 두 개 이상의 자연수로 분할하는 방법의 수를 구하는 문제이다. 순서가 다르면 같은 표현으로 보므로, 이는 정수 분할(integer partition) 문제이다.

방법 1: 중복조합 관점
8을 자연수 1, 2, 3, ..., 8로 분할하는 것을 생각하자. 각 자연수 i를 a_i개 사용한다고 하면:

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \cdots + 8 \cdot a_8 = 8$$

여기서 $a_i \geq 0$이고, $\sum_{i=1}^{8} a_i \geq 2$ (두 개 이상 사용).
최대 항의 크기 m에 따라 분류: $a_m \geq 1$이고 $a_i = 0$ for $i > m$.

최대 항 = 1: $a_1 = 8 \to 1+1+1+1+1+1+1+1$ (1가지)

최대 항 = 2: $2a_2 + a_1 = 8$, $a_2 \geq 1$
a_2를 먼저 정하면 $a_1 = 8 - 2a_2 \geq 0$이므로 $a_2 \leq 4$.

- $a_2 = 1$: $a_1 = 6 \to 2+1+1+1+1+1+1$
- $a_2 = 2$: $a_1 = 4 \to 2+2+1+1+1+1$
- $a_2 = 3$: $a_1 = 2 \to 2+2+2+1+1$
- $a_2 = 4$: $a_1 = 0 \to 2+2+2+2$

중복조합: $H(2, 8)$에서 조건 $1 \leq a_2 \leq 4$를 만족하는 경우 $\to$ **4가지**

최대 항 = 3: $3a_3 + 2a_2 + a_1 = 8$, $a_3 \geq 1$
<u>$a_3 = 1$인 경우:</u> $2a_2 + a_1 = 5$

- $a_2 = 0$: $a_1 = 5 \to 3+1+1+1+1+1$
- $a_2 = 1$: $a_1 = 3 \to 3+2+1+1+1$
- $a_2 = 2$: $a_1 = 1 \to 3+2+2+1$

$H(2, 5) = \binom{5+1}{1} = 6$이지만 $a_2 \leq 2$ (최대 항이 3)이므로 3가지.
<u>$a_3 = 2$인 경우:</u> $2a_2 + a_1 = 2$

- $a_2 = 0$: $a_1 = 2 \to 3+3+1+1$
- $a_2 = 1$: $a_1 = 0 \to 3+3+2$

$H(2, 2) = 3$이지만 $a_2 \leq 1$이므로 2가지.
최대 항이 3인 경우: $3 + 2 =$ **5가지**

최대 항 = 4: $4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 8$, $a_4 \geq 1$
<u>$a_4 = 1$인 경우:</u> $3a_3 + 2a_2 + a_1 = 4$, $a_3 \leq 1$
  $a_3 = 0$일 때: $2a_2 + a_1 = 4$

- $a_2 = 0$: $a_1 = 4 \to 4+1+1+1+1$
- $a_2 = 1$: $a_1 = 2 \to 4+2+1+1$
- $a_2 = 2$: $a_1 = 0 \to 4+2+2$

$H(2,4) = 5$에서 $a_2 \le 2$인 것 $\to$ 3가지
$a_3 = 1$일 때: $2a_2 + a_1 = 1$, $a_2 \le 1$

- $a_2 = 0$: $a_1 = 1 \to 4+3+1$

$H(2,1) = 2$에서 $a_2 = 0$인 것 $\to$ 1가지
$a_4 = 2$인 경우: $3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$

- $a_3 = a_2 = a_1 = 0 \to 4+4$

1가지
최대 항이 4인 경우: $3+1+1 =$ **5가지**

최대 항 = 5: $5a_5 + 4a_4 + \cdots + a_1 = 8$, $a_5 \ge 1$, $a_i = 0$ for $i \ge 6$
$a_5 = 1$: 나머지 3을 1, 2, 3, 4로 표현

- $5+3$
- $5+2+1$
- $5+1+1+1$

3가지

최대 항 = 6: $6a_6 + \cdots = 8$, $a_6 = 1$이면 나머지 2

- $6+2$
- $6+1+1$

2가지

최대 항 = 7: $7+1 \to$ **1가지**

최대 항 = 8: 8 하나만 (조건 위반, 제외)

총합: $1+4+5+5+3+2+1 = 21$

방법 2: 자연수의 분할 (Partition) 관점
n을 양의 정수로 분할하는 방법의 수를 $p(n)$이라 하자. 8의 분할은 $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k \ge 1$이고 $\sum x_i = 8$인 수열의 개수이다.
최대 항 m과 항의 개수 k에 따라 분류:

- $k = 2$: $(7,1), (6,2), (5,3), (4,4) \to$ 4가지
- $k = 3$: $(6,1,1), (5,2,1), (4,3,1), (4,2,2), (3,3,2) \to$ 5가지
- $k = 4$: $(5,1,1,1), (4,2,1,1), (3,3,1,1), (3,2,2,1), (2,2,2,2) \to$ 5가지
- $k = 5$: $(4,1,1,1,1), (3,2,1,1,1), (2,2,2,1,1) \to$ 3가지
- $k = 6$: $(3,1,1,1,1,1), (2,2,1,1,1,1) \to$ 2가지

- $k=7$: $(2,1,1,1,1,1,1) \to 1$가지
- $k=8$: $(1,1,1,1,1,1,1,1) \to 1$가지

총합: $4+5+5+3+2+1+1=21$

방법 3: 생성함수
정수 n의 분할 개수는 다음 생성함수의 x^n 계수:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i+x^{2i}+x^{3i}+\cdots)$$

각 인수 $\frac{1}{1-x^i}$는 자연수 i를 0개, 1개, 2개, ... 사용하는 것을 의미한다.
8의 경우:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)} \\ &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots) \\ &\quad \times (1+x^4+x^8)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8) \end{aligned}$$

x^8의 계수를 구하면 8의 전체 분할 개수 $p(8)=22$.
이 중 (8) (8 하나만 사용)을 제외: $22-1=21$

방법 4: 직접 나열

1. $7+1$
2. $6+2$
3. $6+1+1$
4. $5+3$
5. $5+2+1$
6. $5+1+1+1$
7. $4+4$
8. $4+3+1$
9. $4+2+2$
10. $4+2+1+1$
11. $4+1+1+1+1$
12. $3+3+2$
13. $3+3+1+1$
14. $3+2+2+1$
15. $3+2+1+1+1$

16. $3+1+1+1+1+1$
17. $2+2+2+2$
18. $2+2+2+1+1$
19. $2+2+1+1+1+1$
20. $2+1+1+1+1+1+1$
21. $1+1+1+1+1+1+1+1$

총 21가지

정답

$\boxed{21}$

문제 5
$1, 2, 3, \cdots, n$의 순열인 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 $a_i \geq n-i-1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$을 만족하는 것의 개수를 a_n이라 할 때, a_7의 값을 구하여라.

(20점)

풀이
문제 이해:
$1, 2, 3, \cdots, n$을 한 줄로 나열하는 순열 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 중에서, 모든 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대해 $a_i \geq n-i-1$을 만족하는 순열의 개수를 구한다.
$n = 7$일 때 조건:

$$\begin{aligned} a_1 &\geq 7-1-1 = 5 \\ a_2 &\geq 7-2-1 = 4 \\ a_3 &\geq 7-3-1 = 3 \\ a_4 &\geq 7-4-1 = 2 \\ a_5 &\geq 7-5-1 = 1 \\ a_6 &\geq 7-6-1 = 0 \text{ (항상 참)} \\ a_7 &\geq 7-7-1 = -1 \text{ (항상 참)} \end{aligned}$$

작은 n부터 계산:
n = 1: 조건 $a_1 \geq -1$ (항상 참) $\Rightarrow f(1) = 1$
n = 2: 조건 $a_1 \geq 0, a_2 \geq -1$ (모두 항상 참) $\Rightarrow f(2) = 2! = 2$
n = 3: 조건 $a_1 \geq 1, a_2 \geq 0, a_3 \geq -1$
$a_1 \geq 1$이므로 $a_1 \in \{1, 2, 3\}$ 모두 가능하고, 나머지 조건도 항상 참이므로 모든 순열이 조건을 만족한다. $\Rightarrow f(3) = 3! = 6$
점화식 유도:
$n \geq 3$일 때, 첫 번째 위치에 올 수 있는 수를 분석한다.
조건: $a_1 \geq n-1-1 = n-2$
따라서 $a_1 \in \{n-2, n-1, n\}$ (3가지)
경우 1: $a_1 = n$
나머지 $a_2, \cdots, a_n$에 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$을 배치한다.
조건: $a_i \geq n-i-1$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$
$(b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}) = (a_2, a_3, \cdots, a_n)$로 놓으면,

$$b_j = a_{j+1} \geq n-(j+1)-1 = n-j-2 = (n-1)-j-1$$

즉, $\{1, 2, \cdots, n-1\}$의 순열 중 $b_j \geq (n-1)-j-1$을 만족하는 것과 같다.
이는 정확히 $f(n-1)$이다.
경우 2: $a_1 = n-1$
나머지 $\{1, 2, \cdots, n-2, n\}$을 배치한다.
조건: $a_2 \geq n-2-1 = n-3$
n을 제외하면 $\{1, 2, \cdots, n-2\}$에서 가장 큰 수는 $n-2$이고, $n-2 \geq n-3$이므로 a_2로 사용 가능한 수가 충분하다.
실제로, $\{1, 2, \cdots, n-2, n\}$을 각각 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$로 치환 $(n \to n-1)$하면, 조건이 $f(n-1)$과 동일한 구조가 된다.
따라서 이 경우도 $f(n-1)$개.
경우 3: $a_1 = n-2$
나머지 $\{1, 2, \cdots, n-3, n-1, n\}$을 배치한다.

마찬가지로 조건 분석과 치환을 통해, 이 경우도 $f(n-1)$개임을 보일 수 있다.
점화식:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-1) + f(n-1) = 3 \cdot f(n-1) \quad (n \geq 3)$$

일반항 유도:
초기조건: $f(3) = 6 = 3!$
점화식: $f(n) = 3 \cdot f(n-1)$ $(n \geq 3)$
이를 풀면:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3 \cdot f(n-1) \\ &= 3 \cdot 3 \cdot f(n-2) = 3^2 \cdot f(n-2) \\ &= 3^3 \cdot f(n-3) \\ &\vdots \\ &= 3^{n-3} \cdot f(3) = 3^{n-3} \cdot 3! = 3^{n-3} \cdot 6 \end{aligned}$$

정리하면:

$$f(n) = 3^{n-3} \cdot 3! = 6 \cdot 3^{n-3} = 2 \cdot 3^{n-2} \quad (n \geq 3)$$

답:

$$f(7) = 3^{7-3} \cdot 3! = 3^4 \cdot 6 = 81 \cdot 6 = 486$$

정답

$\boxed{486}$

Practice makes perfect!