数值分析第4次作业

唐高 航硕142 2014211217

26.解：对J法，其迭代公式为



对于两个A，可分别求出迭代矩阵B





其谱半径亦可求出：，根据迭代收敛的充要条件，J法对（1）收敛，对（2）不收敛。

对GS法，其迭代公式为



则可分别求出迭代矩阵B





其谱半径亦可求出：，根据迭代收敛的充要条件，GS法对（1）不收敛，对（2）收敛。

27. （1）由于A严格对角占优，故J法和GS法均收敛。

由J法的分量形式，可得



带入可得



GS迭代的分量形式为



带入可得



（2）不难求得A的特征值均为正，故为对称正定三对角阵。

易知其



其特征值和谱半径为



故最优松弛因子



根据迭代的计算公式



带入可得



28. 解：二阶的对称正定阵为对称正定的三对角阵，由定理6.3



故J法和GS法均收敛。

30. 证明：由于，按照Jordan标准型的定义，B可写为



其中J为Jordan块对角阵，其中



且，由于J的性质，易知



即每乘一次J，斜对角线上的1将右移一个单位，则对n维的J，当时，，

对k次迭代



故



故可知迭代n次后，解已为最终解。由于，故迭代法收敛。故可知最多迭代n次就可得到精确解。

31. 解：（1） 其迭代矩阵为



可求B的特征值：



可以解得



图解法可得



亦可只最优的满足



可知



此时，B的谱半径最小，迭代收敛最快。

（2） 不妨设A的任一特征向量为，其对应的特征值为，则



由于特征向量的任意性，故的特征向量与A一样，特征值满足



由于A对称正定，，若，B的谱半径必然大于1，则迭代不收敛，则，由A的特征值关于B的特征值单调下降，故



可得



要使B的谱半径最小，则当且仅当



可得



33. 解：由题意，易知



故



则



下面分析其收敛性：

由于



可知



于是



可令

则



所以与相似，故





与相似为对称正定阵



故



所以算法收敛。

35 解：取

可得J法公式：



其收敛的充要条件为



求的特征值，可得



故的特征值为的特征值及其相反数，则J法收敛的充要条件为



GS法公式：



收敛的充要条件为



其的特征值，则



故的特征值为0（n重）加上的特征值，故GS法收敛等价于



由于，则J法和GS法渐进收敛速度之比为1比2