Lógica computacional

Tema: Semántica de la Lógica de Primer Orden II

Pilar Selene Linares Arévalo

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

marzo 2018

Material desarrollado bajo el proyecto UNAM-PAPIME PE102117.

Modelos

Uno de los problemas fundamentales en lógica es la búsqueda de modelos de un conjunto dado de fórmulas Γ.

Sabemos que un modelo para una fórmula φ es una interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$, es decir tal que $\mathcal{I}_\sigma(\varphi)$ para cualquier estado σ.

También sabemos que si bien una fórmula no necesariamente tiene un modelo, es decir, no necesariamente es verdadera o falsa, esta propiedad sí se cumple para los enunciados, puesto que no tienen variables libres que cambien de valor dependiendo del estado.

Modelos

Buscamos un modelo $\mathcal{M}$ para
$\Gamma = \{Pb, Qb, Rb, \exists x(Px \wedge \neg(Qx \vee Rx), \ \forall x(Rx \to Px)\}$.

Lo más fácil es ir construyendo un modelo para cada fórmula de Γ, si logramos que todas las fórmulas de Γ sean verdaderas al mismo tiempo entonces habremos construído un modelo para Γ.

Analicemos cada fórmula de Γ:

1. Pb: para que $\mathcal{M} \models Pb$ se debe cumplir que $b^{\mathcal{I}} \in P^{\mathcal{I}}$. Así que al menos debemos tener $P^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}\}$
2. Qb: para que $\mathcal{M} \models Q(b)$ se debe cumplir que $b^{\mathcal{I}} \in Q^{\mathcal{I}}$, así que basta $Q^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}\}$
3. Rb: para que $\mathcal{M} \models Q(b)$ se debe cumplir que $b^{\mathcal{I}} \in R^{\mathcal{I}}$ por lo que basta con $R = \{b^{\mathcal{I}}\}$.

Modelos

Buscamos un modelo $\mathcal{M}$ para
$\Gamma = \{Pb, Qb, Rb, \exists x(Px \wedge \neg(Qx \vee Rx), \ \forall x(Rx \to Px)\}$.

Analicemos cada fórmula de Γ:

1. $\exists x(Px \wedge \neg(Qx \vee Rx)$: hay un elemento de $|\mathcal{M}|$ que cumple P y no cumple Q ni R. Este elemento no puede ser $b^{\mathcal{I}}$ por lo que $P^{\mathcal{I}}$ debe tener al menos otro elemento, digamos $P^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}, m\}$.
2. $\forall x(Rx \to Px)$: todo elemento de Γ que cumple $R^{\mathcal{I}}$, también cumple $P^{\mathcal{I}}$, pero de acuerdo a como definimos $R^{\mathcal{I}}$ esto ya se satisface pues $b^{\mathcal{I}} \in R^{\mathcal{I}}$ y $b^{\mathcal{I}} \in P^{\mathcal{I}}$.

Modelos

Buscamos un modelo $\mathcal{M}$ para
$\Gamma = \{Pb, Qb, Rb, \exists x(Px \wedge \neg(Qx \vee Rx),\ \forall x(Rx \to Px)\}$.

De lo anterior tenemos que $P^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}, m\}$ y $Q^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}\} = R^{\mathcal{I}}$.

Para que el modelo resulte más natural podemos tomar
$M = \{0, 1\},\ b^{\mathcal{I}} = 0$ y $m = 1$, con lo que queda $\mathcal{M} = \langle\{0, 1\}, \mathcal{I}\rangle$ con
$P^{\mathcal{I}} = \{0, 1\}, Q^{\mathcal{I}} = \{0\} = R^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} = 0$.

Validez universal

El concepto de tautología en lógica proposicional tiene su contraparte en lógica de predicados mediante el concepto de validez universal.

Validez universal

Decimos que una fórmula φ es **universalmente válida** (o simplemente válida) si para toda interpretación $\mathcal{M}$ se cumple que $\mathcal{M} \models \varphi$, es decir, si φ es verdadera en cualquier interpretación posible, lo cual se denota con $\models \varphi$.

Validez universal

La noción de validez universal es análoga a la noción de tautología en lógica proposicional.

De hecho toda fórmula cuyo esqueleto proposicional es una tautología, resulta ser una fórmula universalmente válida.

Por ejemplo: $\models \forall x(Px \to Px \vee Qxy)$ puesto que en lógica proposicional se tiene que $\models P \to P \vee Q$.

Validez Universal

Ejercicio: Mostrar que $\models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$.

Sea $\mathcal{M}$ una interpretación y σ un estado de las variables, hay 2 casos:

- $\boldsymbol{\mathcal{I}_\sigma(\neg\exists x\varphi) = 1}$. Es equivalente a $\mathcal{I}_\sigma(\exists x\varphi) = 0$ cuya definición es que no existe $m \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1$

  Es decir, para todo $m \in |\mathcal{M}|$, $\mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 0$ o equivalentemente para todo $m \in |\mathcal{M}|$, $\mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\neg\varphi) = 1$

  Lo anterior significa que $\mathcal{I}_\sigma(\forall x\neg\varphi) = 1$.

Validez Universal

Ejercicio: Mostrar que $\models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$.

Sea $\mathcal{M}$ una interpretación y σ un estado de las variables, hay 2 casos:

- $\boldsymbol{\mathcal{I}_\sigma(\neg\exists x\varphi) = 0}$. Es decir, $\mathcal{I}_\sigma(\exists x\varphi) = 1$ syss existe $m \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1$.

  Lo anterior sucede syss existe $m \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\neg\varphi) = 0$ syss no para todo $m \in |\mathcal{M}|$, $\mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\neg\varphi) = 1$

  Por lo tanto $\mathcal{I}_\sigma(\forall x\neg\varphi) = 0$.

Validez Universal

Ejercicio: Mostrar que $\models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$.

De lo anterior concluimos que en cualquier caso se tiene que $\mathcal{I}_\sigma(\neg\exists x\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\forall x\neg\varphi)$, es decir, $\mathcal{I}_\sigma(\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi) = 1$.

Por lo tanto $\mathcal{M} \models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$.

Como además $\mathcal{M}$ es una interpretación arbitraria, se tiene que $\models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$.

Equivalencia lógica

Equivalencia lógica

Sean φ, ψ fórmulas. Decimos que φ es **lógicamente equivalente** a ψ, denotado con $\varphi \equiv \psi$, si y sólo si $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, es decir si y sólo si la fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ es universalmente válida.

Equivalencia lógica

Las siguientes equivalencias lógicas serán de utilidad más adelante:

- **Negación de cuantificaciones** (Leyes de De Morgan generalizadas):
  1. $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
  2. $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
- **Eliminación de cuantificaciones múltiples.**
  1. $\forall x\forall x\varphi \equiv \forall x\varphi$.
  2. $\exists x\exists x\varphi \equiv \exists x\varphi$.

Equivalencia lógica

Las siguientes equivalencias lógicas serán de utilidad más adelante:

- **Renombre de variables**.
  Si y no figura libre en φ entonces:
  1. $\forall x \varphi \equiv \forall y(\varphi[x := y])$.
  2. $\exists x \varphi \equiv \exists y(\varphi[x := y])$.

- **Eliminación de cuantificaciones vacuas.**
  Si x no figura libre en φ entonces:
  1. $\forall x \varphi \equiv \varphi$.
  2. $\exists x \varphi \equiv \varphi$.

Consecuencia lógica

consecuencia lógica

Sean Γ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula. Decimos que φ es **consecuencia lógica** de Γ, denotado con $\Gamma \models \varphi$, si y sólo si todo modelo de Γ es un modelo de φ.

Es decir, $\Gamma \models \varphi$ si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \Gamma$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi$.

Si $\Gamma \models \varphi$ también decimos que Γ *implica lógicamente* a φ.

Consecuencia lógica

Las siguientes observaciones son importantes:

- Al igual que en lógica proposicional el símbolo $\models$ está sobrecargado y se usa para las relaciones *"ser modelo de"* y *"ser consecuencia lógica de"*.
- Al no cambiar la definición de consecuencia lógica las propiedades de ésta siguen siendo válidas. En particular el argumento con premisas $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ y conclusión φ, es correcto si y sólo si $\Gamma \models \varphi$.

Indecibilidad LPO

Decidir validez universal, equivalencia lógica y consecuencia lógica son problemas son **indecidibles**, es decir, no existe un algoritmo para poder decidir el problema en general.

Teorema de Indecibilidad de Church.

El problema de validez universal es indecidible. Es decir, no puede existir un algoritmo que reciba un enunciado φ como entrada y decida si $\models \varphi$.

Equivalencia lógica indecidible

La equivalencia lógica es indecidible. Es decir, no puede existir un algoritmo que reciba como entrada dos fórmulas φ y ψ y decida si $\varphi \equiv \psi$.

Indecibilidad LOP

Consecuencia lógica indecidible

La consecuencia lógica es indecidible. Es decir, no puede existir un algoritmo que reciba como entrada un conjunto finito de fórmulas Γ y una fórmula φ y decida si $\Gamma \models \varphi$.

Satisfacibilidad indecidible

Es indecidible si una fórmula es satisfacible. Es decir, dada una fórmula φ no existe un algoritmo que decida si existe un modelo $\mathcal{M}$ y un estado σ tal que $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$.