Lógica computacional

Tema: Semántica de la Lógica Proposicional

Pilar Selene Linares Arévalo

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

febrero 2018

Material desarrollado bajo el proyecto UNAM-PAPIME PE102117.

Significado de los conectivos lógicos

Negación.

La **negación** de la fórmula P es la fórmula $\neg\mathbf{P}$.

Corresponde en español a : *No, no es cierto que, es falso que, etc.*

Tabla de verdad:

P	$\neg P$
0	1
1	0

Disyunción.

La **disyunción** de las fórmulas P, Q es la fórmula $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$.

Corresponde en español a : *o*

Tabla de verdad:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disyunción.

La **conjunción** de las fórmulas P, Q es la fórmula $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.

Corresponde en español a : *y, pero*

Tabla de verdad:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Significado de los conectivos lógicos

Implicación o condicional.

La **implicación** de las fórmulas P, Q es la fórmula $\mathbf{P} \to \mathbf{Q}$. Donde P es el *antecedente* y Q el *consecuente* de la implicación.

Corresponde en español a: *si P entonces Q; P es condición suficiente para Q; Q, si P; P sólo si Q; Q es condición necesaria para P.*

Tabla de verdad:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Significado de los conectivos lógicos

Equivalencia o bicondicional.

La **equivalencia** de las fórmulas P, Q es la fórmula $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$.

Corresponde en español a: *P es equivalente a Q, P si y sólo si Q, P es condición necesaria y suficiente para Q.*

Tabla de verdad:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Formalización

Estado o asignación de las variables

Un **estado o asignación** de las variables proposicionales es una función

$$\mathcal{I} : VarP \to \{0, 1\}$$

$$\mathcal{I}(r) = 1 \qquad \mathcal{I}(p) = 0 \qquad \mathcal{I}(t_{16}) = 1$$

Función de Interpretación

Dado un estado de las variables $\mathcal{I} : \mathit{VarP} \to \{0, 1\}$, definimos la **interpretación de las fórmulas** con respecto a $\mathcal{I}$ como la función $\mathcal{I}^* : \mathit{PROP} \to \{0, 1\}$ tal que:

- $\mathcal{I}^*(p) = \mathcal{I}(p)$ con $p \in \mathit{VarP}$.
- $\mathcal{I}^*(\top) = 1$ y $\mathcal{I}^*(\bot) = 0$.
- $\mathcal{I}^*(\neg\varphi) = 1$ syss $\mathcal{I}^*(\varphi) = 0$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1$ syss $\mathcal{I}^*(\varphi_1) = \mathcal{I}^*(\varphi_2) = 1$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 0$ syss $\mathcal{I}^*(\varphi_1) = \mathcal{I}^*(\varphi_2) = 0$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi_1 \to \varphi_2) = 0$ syss $\mathcal{I}^*(\varphi_1) = 1$ e $\mathcal{I}^*(\varphi_2) = 0$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 1$ syss $\mathcal{I}^*(\varphi_1) = \mathcal{I}^*(\varphi_2)$.

Haremos abuso de notación: escribiremos simplemente φ en lugar de φ^*.

Lema de Coincidencia

Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 : \mathit{PROP} \to \{0, 1\}$, dos estados que coinciden en las variables proposicionales de la fórmula φ, es decir, $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in \mathit{vars}(\varphi)$. Entonces

$$\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$$

Estado modificado o actualizado

Sean $\mathcal{I} : varp \rightarrow \{0,1\}$ un estado de las variables, p una variable proposicional y $v \in \{0,1\}$. Definimos la actualización de $\mathcal{I}$ en p por v, denotado $\mathcal{I}_{[p/v]}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_{[p/v\,]}(q) = \begin{cases} v & \text{si } q = p \\ \\ \mathcal{I}(q) & \text{si } q \neq p \end{cases}$$

El estado $\mathcal{I}_{[p/v]}$ se conoce como un estado modificado o una actualización de φ.

Lema de Sustitución

Sean $\mathcal{I}$ una interpretación, p una variable proposicional y ψ una fórmula tal que $\mathcal{I}(\psi) = v$. Entonces

$$\mathcal{I}\big(\varphi[p := \psi\,]\big) = \mathcal{I}_{[p/v\,]}(\varphi)$$

Conceptos Semánticos básicos

¿Cuántas interpretaciones hacen verdadera a φ?

[redacted]

- Si $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para **toda interpretación** $\mathcal{I}$ decimos que φ es una **tautología o fórmula válida** y escribimos $\models \varphi$.

- Si $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para **alguna interpretación** $\mathcal{I}$ decimos que φ es **satisfacible**, que φ es verdadera en $\mathcal{I}$ o que $\mathcal{I}$ es **modelo** de φ y escribimos $\mathcal{I} \models \varphi$

- Si $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ para **alguna interpretación** $\mathcal{I}$ decimos que φ es **falsa o insatisfacible** en $\mathcal{I}$ o que $\mathcal{I}$ no es modelo de φ y escribimos $\mathcal{I} \not\models \varphi$

- Si $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ para **toda interpretación** $\mathcal{I}$ decimos que φ es una **contradicción** o fórmula no satisfacible.

Conceptos Semánticos básicos

Similarmente si Γ es un conjunto de fórmulas decimos que:

[redacted]

- Γ **es satisfacible** si tiene un modelo, es decir, si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$. Lo cual denotamos a veces, abusando de la notación, con $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$.

- Γ **es insatisfacible** o no satisfacible si no tiene un modelo, es decir, si no existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

Propiedades

Sea Γ un conjunto de fórmulas, $\varphi \in \Gamma$, τ una tautología y χ una contradicción.

- Si Γ es satisfacible entonces :
  - $\Gamma \setminus \{\varphi\}$ es satisfacible.
  - $\Gamma \cup \{\tau\}$ es satisfacible.
  - $\Gamma \cup \{\chi\}$ es insatisfacible.
- Si Γ es insatisfacible entonces :
  - $\Gamma \cup \{\psi\}$ es insatisfacible, para cualquier $\psi \in PROP$.
  - $\Gamma \setminus \{\tau\}$ es insatisfacible.

Equivalencia de Fórmulas

Equivalencia

Dos fórmulas φ, ψ son **equivalentes** si $\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}(\psi)$ para toda interpretación $\mathcal{I}$. En tal caso escribimos

$$\varphi \equiv \psi$$

Proposición :

Sean φ, ψ dos fórmulas. Entonces

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \models \varphi \leftrightarrow \psi$$

Regla de Leibniz

Sean φ, ψ, χ fórmulas y $p \in varP$

$$\frac{\varphi \equiv \psi}{\chi[p := \varphi] \equiv \chi[p := \psi]}$$

Consecuencia Lógica

Consecuencia Lógica

Sean Γ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula. Decimos que φ es **consecuencia lógica** de Γ si para toda interpretación $\mathcal{I}$ que sastisface a Γ, se tiene $\mathcal{I}(\varphi) = 1$.

Es decir, si se cumple que siempre que $\mathcal{I}$ satisface a Γ entonces necesariamente $\mathcal{I}$ satisface a φ. En tal caso escribimos

$$\Gamma \models \varphi$$

Consecuencia Lógica

La relación de consecuencia lógica cumple las siguientes propiedades:

- Si $\varphi \in \Gamma$ entonces $\Gamma \models \varphi$.
- Principio de refutación: $\Gamma \models \varphi$ syss $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible.
- $\Gamma \models \varphi \to \psi$ syss $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- Insatisfacibilidad implica trivialidad: Si Γ es insatisfacible entonces $\Gamma \models \varphi$ para toda $\varphi \in PROP$.
- Si $\Gamma \models \bot$ entonces Γ es insatisfacible.
- $\varphi \equiv \psi$ syss $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \varphi$.
- $\models \varphi$ (es decir si φ es tautología) syss $\varnothing \models \varphi$ (es decir φ es consecuencia lógica del conjunto vacío).

Correctud de argumentos lógicos

Un argumento con premisas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ y conclusión ψ es **lógicamente correcto** si la conclusión se sigue de las premisas, es decir, si $\{\varphi_1, ..., \varphi n\} \models \psi$.

Para mostrar la correctud del argumento lógico $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \, / \therefore \, \psi$ mediante interpretaciones, se puede proceder de alguna de las siguientes formas:

- **Método directo:** probar la consecuencia $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.
- **Método indirecto (refutación):** probar que el conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ es insatisfacible.