Lógica computacional

Tema: Lógica de primer orden: Especificación Formal y Semántica.

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Material desarrollado bajo el proyecto UNAM-PAPIME PE102117.

Especificación Formal

Algunos consejos:

- Nuestro objetivo es extraer predicados a partir de los enunciados dados en español de manera que el enunciado completo se construya al combinar dichos predicados mediante conectivos y cuantificadores.

  La Luna brilla.

  Daniela compró una película.

  Los leones comen carne cruda.

  Todos los días están soleados.

Especificación Formal

Algunos consejos:

- Si en el español aparecen frases como *para todos, para cualquier, todos, cualquiera,los, las etc.* debe usarse el **cuantificador universal**.
- Si en el español frases como *para algún, existe un, alguno,alguna, uno, una etc.* debe usarse el **cuantificador existencial.**
- En ciertas ocasiones, frases en español que involucran *alguien, algo* deben especificarse con un cuantificador universal y no un existencial.

  Por ejemplo, el enunciado *si alguien demasiado alto entra por la puerta entonces se pegará con el marco*, se puede reescribir en español como *cualquiera demasiado alto que entre por la puerta se pegará con el marco* , lo cual nos lleva a la fórmula $\forall x(A(x) \wedge E(x) \rightarrow P(x))$.

Especificación Formal

Algunos consejos:

- Cualquier especificación compuesta que involucre cuantificadores puede formarse identificando en ella alguno de los cuatro juicios aristotélicos:
  - Universal afirmativo: *Todo S es P*
    $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$.
  - Existencial afirmativo. *Algún S es P*
    $\exists x(S(x) \wedge P(x))$.
  - Universal negativo: *Ningún S es P*
    $\forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$
  - Existencial negativo: *Algún S no es P*
    $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

Especificación Formal

Algunos consejos:

- Las fórmulas $\exists x P(x)$ y $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y))$ expresan lo mismo: un objeto del universo cumple P.

  Para indicar que x, y representan elementos diferentes, se debe agregar explícitamente la propiedad $x \neq y$.

Especificación Formal

Ejemplos:

- *Todo día que está soleado no está nublado.*

$$\forall x(D(x) \wedge S(x) \rightarrow \neg N(x))$$

Donde $D(x) = x\ es\ día$, $S(x) = x\ está\ soleado$ y $N(x) = x\ está\ nublado$.

- *Hay una lanza que perfora a todos los escudos.*

$$\exists x(L(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow D(x, y)))$$

Donde $L(x) = x\ es\ lanza$, $E(x) = x\ es\ escudo$ y $P(x, y) = x\ perfora\ a\ y$.

- *Hay un profesor al que ningún estudiante le ha preguntado alguna duda.*

$$\exists w(P(w) \wedge \neg\exists z(E(z) \wedge \exists u(D(u) \wedge A(z, u, w))))$$

Donde $P(x) = x\ es\ profesor$, $E(x) = x\ es\ estudiante$, $D(x) = x\ es\ duda$ y $A(x, y, z) = x\ le\ pregunta\ y\ a\ z$.

Semántica Informal

Fórmula	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es Falsa?
$\forall x P(x)$	$P(x)$ es verdadera para todo x en el universo de discurso	Existe un x para el cual $P(x)$ es falsa.
$\exists x P(x)$	Existe un x para el cual $P(x)$ es verdadera.	$P(x)$ es falsa para todo x en el universo de discurso.

Semántica Informal

Fórmula	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es Falsa?
$\forall x \forall y P(x, y)$	$P(x, y)$ es verdadera para cualquier par de elementos x, y.	Existe un par x, y para el cual $P(x, y)$ es falsa.
$\exists x \exists y P(x, y)$	Existe un par x, y para el cual $P(x, y)$ es verdadera.	$P(x, y)$ es falsa para todo par de elementos x, y.
$\forall x \exists y P(x, y)$	Para todo elemento x, podemos encontrar un y tal que $P(x, y)$ es verdadera.	Existe un x tal que $P(x, y)$ es falsa para todo y.
$\exists x \forall y P(x, y)$	Existe un x para el cual $P(x, y)$ es verdadera para cualquier y.	Para todo x existe un y tal que $P(x, y)$ es falsa.

Interpretación o estructura

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ un lenguaje de primer orden. Una **estructura o interpretación** para $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío llamado el universo de la estructura, e $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que:

- Si $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{I}(P)$ es una función booleana que decide si una tupla está o no en la relación deseada, es decir, $\mathcal{I}(P) : M^n \to Bool$.
- Si $f^{(n)} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{I}(f)$ es una función $\mathcal{I}(f) : M^n \to M$.
- Si $c \in \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{I}(c)$ es un elemento de M, es decir $\mathcal{I}(c) \in M$.

Estado o Asignación

Un **estado, asignación o valuación de las variables** es una función $\sigma : \mathrm{Var} \to M$.

Estado modificado o actualizado

Sea $\sigma : \mathrm{Var} \to M$ un estado de las variables. Dadas las variables $x_1, \ldots, x_n$ y los elementos del universo $m_1, \ldots, m_n \in M$ definimos el **estado modificado o actualizado** en $x_1, \ldots, x_n$ por $m_1, \ldots, m_n$ denotado $\sigma[x_1, \ldots, x_n/m_1, \ldots, m_n]$ o $\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,]$ como sigue:

$$\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,](y) = \begin{cases} \sigma(y) & \text{si } y \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \\ \\ m_i & \text{si } y = x_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Interpretación de Términos

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{TERM} \to |\mathcal{M}|$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_\sigma(x) &= \sigma(x) \\
\mathcal{I}_\sigma(c) &= \mathcal{I}(c) \\
\mathcal{I}_\sigma\big(f(t_1, \ldots, t_n)\big) &= f_\sigma^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\sigma(t_n))
\end{aligned}
$$

Lema de coincidencia para términos

Sean $t \in \mathrm{TERM}$ y σ_1, σ_2 dos estados de las variables tales que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda variable x que figura en t. Entonces

$$\mathcal{I}_{\sigma_1}(t) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(t).$$

Lema de sustitución para términos

Sean $r \in \text{TERM}$, σ un estado de las variables, $[\vec{x} := \vec{t}\,]$ una sustitución y $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que $\mathcal{I}_\sigma(t_i) = m_i \;\; 1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces

$$\mathcal{I}_\sigma\big(r[\vec{x} := \vec{t}\,]\big) = \mathcal{I}_{\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,]}(r)$$

Interpretación de Fórmulas

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** sobre fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \mathsf{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\bot) \;=\; 0 \qquad\qquad \mathcal{I}_\sigma(\top) \;=\; 1$$

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{I}_\sigma\big(P(t_1,\ldots,t_m)\big) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \big(\mathcal{I}_\sigma(t_1),\ldots,\mathcal{I}_\sigma(t_m)\big) \in P^{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I}_\sigma(t_1 = t_2) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(t_1) = \mathcal{I}_\sigma(t_2) \\
\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0 \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \wedge \psi) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1
\end{array}$$

Interpretación de Fórmulas

continuación:

$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1 \text{ e } \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0$$

$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi)$$

$$\mathcal{I}_\sigma(\forall x \varphi) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \text{ para todo } m \in M$$

$$\mathcal{I}_\sigma(\exists x \varphi) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \text{ para algún } m \in M$$

Lema de coincidencia para fórmulas

Sean φ una fórmula y σ_1, σ_2 dos estados de las variables tales que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda variable $x \in FV(\varphi)$. Entonces

$$\mathcal{I}_{\sigma_1}(\varphi) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(\varphi).$$

Lema de sustitución para fórmulas

Sean $\varphi \in \mathrm{FORM}$, σ un estado de las variables, $[\vec{x} := \vec{t}\,]$ una sustitución y $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que $\mathcal{I}_\sigma(t_i) = m_i \;\; 1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces

$$\mathcal{I}_\sigma\big(\varphi[\vec{x} := \vec{t}\,]\big) = \mathcal{I}_{\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,]}(\varphi)$$

Verdad y Satisfacibilidad

Sean φ una fórmula y $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación. Entonces

- φ es **satisfacible en** $\mathcal{M}$ si existe un estado de las variables σ tal que $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$, lo cual suele denotarse con $\mathcal{M} \models \varphi[\sigma]$ o con $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$.
- φ es **verdadera en** $\mathcal{M}$ si para todo estado de las variables σ se tiene $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$, es decir, si φ es satisfacible en $\mathcal{M}$ en todos los estados posibles.

  En tal caso también decimos que $\mathcal{M}$ es un **modelo** de φ lo cual se denotará con $\mathcal{M} \models \varphi$.

Falsedad

Sean $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación y φ una fórmula. Decimos que φ es **falsa en** $\mathcal{M}$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. Es decir φ es falsa si y sólo si su negación $\neg\varphi$ es verdadera.

En lógica proposicional las nociones de ser falsa y no ser verdadera coinciden. Sin embargo, en lógica de predicados la equivalencia se pierde.

Una fórmula no verdadera es aquella tal que es insatisfacible en algún estado de sus variables, o bien tal que su negación es satisfacible en algún estado de sus variables. Sin embargo, para poder afirmar que φ es falsa, por definición tendríamos que mostrar que $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, es decir que $\neg\varphi$ es satisfacible en **todos** los estados posibles. Por lo tanto la noción de falsedad es más fuerte que la noción de no ser verdadera.

La relación de verdad en lógica de predicados no tiene las mismas propiedades que su contraparte en la lógica proposicional.

Por ejemplo, sean $\mathcal{L} = \{P^{(1)}, Q^{(1)}\}$, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ donde $P^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser par" y $Q^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser impar".
Entonces $\mathcal{M} \models P(x) \vee Q(x)$ puesto que cualquier número natural es par o es impar.

Sin embargo, no se cumple que $\mathcal{M} \models P(x)$ ni que $\mathcal{M} \models Q(x)$. Puesto que el valor de x no puede ser siempre par o siempre impar, todo depende del estado de las variables.

Propiedades de la relación de verdad

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces

- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ y $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \psi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi$ y $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \forall\varphi$. donde $\forall\varphi$ denota a la cerradura universal de φ, es decir a la fórmula obtenida al cuantificar universalmente todas las variables libres de φ.