# Lógica Computacional 2018-2, nota de clase 12
# Sistemas de Deducción Natural

Favio Ezequiel Miranda Perea    Araceli Liliana Reyes Cabello
Lourdes Del Carmen González Huesca    Pilar Selene Linares Arévalo

14 de mayo de 2018

## 1. Introducción

Los sistemas de deducción natural, introducidos por Gerhard Gentzen en 1935, son formalismos deductivos que modelan el razonamiento matemático ordinario de manera más fiel que un sistema axiomático o que el método de Tableaux.

Un sistema de Deducción Natural consiste de reglas de inferencia donde las hipótesis se encuentran en la parte superior de una línea horizontal y la conclusión en la parte inferior. Los sistemas que abordaremos en este curso se distinguen por que las reglas describirán las formas para **introducir** y **eliminar** cada uno de los conectivos lógicos. Las pruebas o derivaciones se construyen en estos sistemas son mediante la aplicación de dichas reglas en una sucesión adecuada que relaciona conclusiones con premisas de reglas posteriores. De igual forma que en el razonamiento ordinario se pueden hacer hipótesis temporales durante la prueba, las cuales se pueden **descargar** al incorporarlas a la conclusión.

La importancia del uso de los sistemas de deducción natural son variados. Los sistemas computacionales de razonamiento automatizado usualmente se basan en métodos refutacionales como los tableaux pero los asistentes de prueba interactivos son útiles para razonar acerca de las propiedades de programas y están basados en los sistemas lógicos de deducción natural. Además, en fundamentos de lenguajes de programación la deducción natural juega también un papel importante por medio de la llamada correspondencia de Curry-Howard también conocida como el paradigma de **fórmulas como tipos**, cuya idea a grandes rasgos es que las pruebas lógicas contienen ciertas construcciones las cuales pueden interpretarse como programas, de modo que las proposiciones lógicas se convierten en tipos de un lenguaje de programación.

### 1.1. Significado de conectivos y cuantificadores

El adjetivo **natural** dado por Gentzen a estos sistemas deductivos se refiere al hecho de que modelan de manera tan cercana como sea posible el razonamiento natural de un humano, o al menos el razonamiento matemático hecho por personas mediante distintos juicios. Un juicio es una proposición acerca de una lógica, en nuestro caso es acerca del significado de una fórmula lógica. Este significado se entenderá si analizamos y comprendemos cuándo una fórmula es verdadera.

Analicemos a este respecto cada clase de fórmula de acuerdo a su esquema, es decir de acuerdo a su conectivo o cuantificador principal y también tomando en cuenta su utilidad como generador u obtención de información:

- Información básica: una fórmula $\varphi$ es cierta o la proposición hecha en $\varphi$ es verdadera, lo cual podemos denotar con $\varphi$ `true`.
  Este juicio será el más básico de todos.

- Conjunción: la fórmula $\varphi \wedge \psi$ es cierta solo si ambas $\varphi$ y $\psi$ son ciertas. Lo cual nos lleva al juicio:

$$\frac{\varphi\ \mathsf{true} \qquad \psi\ \mathsf{true}}{\varphi \wedge \psi\ \mathsf{true}}$$

  Esta clase de regla se conoce como regla de introducción porque introduce un conectivo en la conclusión en este caso $\wedge$.

  La siguiente cuestión es preguntarnos cómo usar la información $\varphi \wedge \psi$ $\mathsf{true}$, cuya respuesta nos lleva de nuevo el razonamiento natural:

$$\frac{\varphi \wedge \psi\ \mathsf{true}}{\varphi\ \mathsf{true}} \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi\ \mathsf{true}}{\psi\ \mathsf{true}}$$

- Implicación: ¿Cuando es verdadera una implicación? El razonamiento matemático nos dice que la implicación $\varphi \to \psi$ es cierta si al suponer el antecedente $\varphi$ cierto podemos probar que el consecuente $\psi$ es cierto. Esto nos lleva a la siguiente regla de introducción:

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi\ \mathsf{true}]\\ \vdots \\ \psi\ \mathsf{true}\end{array}}{\varphi \to \psi\ \mathsf{true}}$$

  Aquí los corchetes que encierran al juicio hipotético $\varphi$ $\mathsf{true}$ indican que en la conclusión tal hipotésis fue descargada, es decir después de introducir la implicación, la hipótesis hecha ya no es necesaria, es decir, se trataba de una hipótesis temporal.

  La regla de eliminación de la implicación modela una forma de razonamiento conocida desde Aristóteles y llamada *modus ponens*. De los juicios $\varphi \to \psi$ $\mathsf{true}$ y $\varphi$ $\mathsf{true}$ podemos obtener el juicio $\psi$ $\mathsf{true}$:

$$\frac{\varphi \to \psi\ \mathsf{true} \qquad \varphi\ \mathsf{true}}{\psi\ \mathsf{true}}$$

- La disyunción nos lleva a las siguientes reglas de introducción

$$\frac{\varphi\ \mathsf{true}}{\varphi \vee \psi\ \mathsf{true}} \qquad\qquad \frac{\psi\ \mathsf{true}}{\varphi \vee \psi\ \mathsf{true}}$$

  Lo cual captura el hecho de que una disyunción es cierta sólo si alguna de sus dos componentes lo es.

  Para obtener la regla de eliminación debemos considerar cómo utilizar correctamente el juicio $\varphi \vee \psi$ $\mathsf{true}$ dado que no sabemos con certeza cuál de las dos componentes es cierta. Si tratamos de probar $\chi$ $\mathsf{true}$ a partir de $\varphi \vee \psi$ $\mathsf{true}$ debemos llegar a tal juicio sin importar cuál de los dos casos se tome: $\varphi$ $\mathsf{true}$ o $\psi$ $\mathsf{true}$ válido. Esto nos lleva a hacer una prueba por casos capturada en la siguiente regla:

$$\frac{\varphi \vee \psi\ \mathsf{true} \qquad \begin{array}{c}[\varphi\ \mathsf{true}]\\ \vdots \\ \chi\ \mathsf{true}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi\ \mathsf{true}]\\ \vdots \\ \chi\ \mathsf{true}\end{array}}{\chi\ \mathsf{true}}$$

  Al igual que en la introducción de la implicación los corchetes indican que tal hipótesis es temporal y ha sido descargada.

- La verdad debe ser demostrable sin importar las hipótesis que tengamos, de manera que su regla de introducción es:

$$\frac{}{\top\ \mathsf{true}}$$

Dado que no tenemos información de cómo introducir la verdad, tampoco podemos tener información de como eliminarla, por lo que no hay regla de eliminación.

- Cuantificación Universal: ¿Bajo qué circunstancias debe la fórmula $\forall x\varphi$ ser verdadera?, la respuesta depende claramente del dominio de cuantificación. Por ejemplo, si sabemos que la variable $x$ toma como valores números naturales, entonces podemos concluir que $\forall x\varphi$ es verdadera si podemos probar que las fórmulas $\varphi[x := 0], \varphi[x := 1], \dots, \varphi[x := n], \dots$. Siguiendo esta idea, debemos considerar que si todas las instancias de una variable hacen que la fórmula sea verdadera, entonces una generalización también lo es, lo cual nos lleva a la siguiente regla:

$$\frac{\varphi[x := 0]\ \mathsf{true} \qquad \varphi[x := 1]\ \mathsf{true} \quad \dots \qquad \varphi[x := n]\ \mathsf{true} \quad \dots}{\forall x\varphi\ \mathsf{true}}$$

Tal regla no es efectiva dado que tendríamos un número infinito de premisas, usualmente se usa la regla de inducción en su lugar. Sin embargo, la elección de tal regla depende fuertemente de un dominio de cuantificación particular mientras que lo que nos interesa es probar la verdad en cualquier dominio posible. De manera que podremos decir que la fórmula $\forall x\varphi$ es verdadera si al no asumir algo acerca de $x$, podemos cercioranos de la verdad de $\varphi$, es decir tenemos la siguiente regla informal:

$$\frac{\varphi\ \mathsf{true} \qquad x\ \text{ parámetrica en } \varphi}{\forall x\varphi\ \mathsf{true}}$$

Por otro lado si sabemos que la fórmula $\forall x\varphi$ es cierta entonces deberíamos poder concluir la verdad de $\varphi[x := t]$ para cualquier objeto $t$, lo cual nos lleva a la siguiente regla:

$$\frac{\forall x\varphi\ \mathsf{true}}{\varphi[x := t]\ \mathsf{true}}$$

- Cuantificación Existencial: Si sabemos que $\varphi[x := t]$ es cierta para algún objeto $t$ entonces podemos concluir que la fórmula $\exists x\varphi$ es cierta, lo cual se modela mediante la regla:

$$\frac{\varphi[x := t]\ \mathsf{true}}{\exists x\varphi\ \mathsf{true}}$$

Por otro lado cuando conocemos la verdad de $\exists x\varphi$ no sabemos cuál es el objeto $t$ cuya existencia se asegura, de manera que sólo podemos asumir $\varphi$ sin hacer ninguna suposición acerca del valor representado por $x$, lo cual se puede hacer sin problemas dado que la $x$ estaba ligada en $A$. La regla de eliminación para el existencial es entonces similar al caso de la disyunción:

$$\frac{\exists x\varphi\ \mathsf{true} \qquad \begin{matrix}[\varphi\ \mathsf{true}]\\ \vdots \\ \psi\ \mathsf{true}\end{matrix} \qquad x \notin FV(\psi)}{\psi\ \mathsf{true}}$$

Se observa que no hemos hablado de la negación, conectivo de suma importancia que discutiremos más tarde. Una convención es la equivalencia que considera una abreviatura de falso como $\varphi \leftrightarrow \psi =_{def} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

## 2. Sistemas de Deducción Natural con Contextos

En esta sección presentamos sistemas de deducción natural con contextos o hipótesis localizadas, es decir, en cada paso de la deducción estarán disponibles todas las hipótesis. Esta presentación podría parecer más complicada que otras, sin embargo, la disponibilidad de todo el conjunto de hipótesis en cada momento es de gran utilidad como se verá al estudiar sistemas de tipos.

**Definición 1** *Un contexto es un conjunto finito de fórmulas* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$*. Usualmente denotaremos un contexto con* $\Gamma, \Delta, \Pi$*. En lugar de* $\Gamma \cup \Delta$ *escribimos* $\Gamma, \Delta$*. Análogamente* $\Gamma, \varphi$ *denota al contexto* $\Gamma \cup \{\varphi\}$*.*

En adelante hacemos la siguiente convención: siempre que un contexto sea de la forma $\Gamma, A$, suponemos que la fórmula $A$ no figura en $\Gamma$.

Si $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ entonces el conjunto de variables libres de $\Gamma$, denotado $FV(\Gamma)$, se define como la unión de los conjuntos de variables libres $FV(\varphi_i)$.

### 2.1. Reglas de inferencia

La relación de derivabilidad o deducibilidad $\Gamma \vdash A$, leida “la fórmula $A$ es derivable o deducible en el contexto $\Gamma$”, se define recursivamente a partir de la regla de inicio

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ (\textsc{Hip})$$

dando reglas de introducción y eliminación para cada conectivo que queremos esté presente en el sistema:

- Implicación:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to \mathrm{E})$$

- Conjunción:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\wedge \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\wedge \mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\wedge \mathrm{E})$$

- Disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ (\vee \mathrm{E})$$

- Cuantificador Universal:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}\ (\forall \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x := t]}\ (\forall \mathrm{E})$$

- Cuantificador Existencial:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}\ (\exists \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad x \notin FV(\Gamma, \psi)}{\Gamma \vdash \psi}\ (\exists \mathrm{E})$$

Obsérvese que mediante estas reglas de inferencia no estamos derivando fórmulas sino expresiones de la forma $\Gamma \vdash A$, conocidas como *secuentes*.

**Definición 2** *Una derivación del secuente* $\Gamma \vdash A$ *es una sucesión finita de secuentes* $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ *tal que:*

- $\Gamma_i \vdash A_i$ *es instancia de la regla* $(Hip)$ *ó*
- $\Gamma_i \vdash A_i$ *es conclusión de alguna regla de inferencia tal que las premisas necesarias figuran antes en la sucesión.*
- $\Gamma \vdash A$ *es el último elemento de la sucesión.*

También se puede ver a una derivación como un árbol:

**Definición 3** *Una prueba formal de* $\Gamma \vdash \varphi$ *es un árbol finito, cuyos nodos están etiquetados por expresiones* $\Gamma' \vdash \varphi'$ *y satisfacen las siguientes condiciones:*

- *La etiqueta de la raíz es* $\Gamma \vdash \varphi$*.*
- *Todas las hojas están etiquetadas con instancias de la regla* $(Hip)$*.*
- *La etiqueta de un nodo padre se obtiene mediante la aplicación de una de las reglas de inferencia a los nodos hijos.*

**Definición 4** *Si* $\vdash \varphi$ *es derivable, es decir si* $\varnothing \vdash \varphi$ *es derivable* ($\varphi$ *es derivable sin hipótesis) entonces decimos que* $\varphi$ *es un teorema.*

Mostramos ahora algunas reglas estructurales que pueden ser de ayuda en la construcción de derivaciones:

**Proposición 1** *Las siguientes reglas de inferencia son válidas:*

- *Intercambio de premisas:*

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi}{\Gamma, \psi, \varphi \vdash \chi}$$

- *Monotonía o debilitamiento:*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

- *Contracción:*

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}$$

- *Sustitución o Corte:*

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

# 3. La Negación

La negación es quizás el conectivo lógico más importante, recordemos por ejemplo que para definir en lógica clásica todos los conectivos y cuantificadores o para tener un conjunto completo de conectivos, basta quedarnos con uno de los conectivos binarios, un cuantificador y la negación, la cual es imprescindible.

Sin importar que otros conectivos estén presentes, un sistema de deducción natural puede clasificarse, de acuerdo a qué clase de negación tenga, como minimal, intuicionista o clásico.

## 3.1. Lógica Minimal $\mathsf{DN_m}$

Se dice que la lógica es minimal si no hay reglas para la negación $\neg$ ni para lo falso $\bot$. En un sistema minimal la constante $\bot$ está presente pero no tiene propiedades particulares. En la presencia de $\bot$, el símbolo de negación se define como

$$\neg A =_{def} A \to \bot$$

En cuyo caso hablamos de la negación constructiva, cuyas reglas de inferencia son:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg\ \mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg\ \mathrm{E})$$

Obsérvese que, de acuerdo a la definición de $\neg A$, estas reglas no son más que casos particulares de las reglas para la implicación $(\to \mathrm{I})$ y $(\mathrm{MP})$ respectivamente.

## 3.2. Lógica Intuicionista $\mathsf{DN_i}$

La lógica intuicionista [1] se obtiene al agregar a la lógica minimal la regla de eliminación de lo falso $(\bot E)$ conocida también como *ex-falso-quodlibet*.

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\mathrm{EFQ})$$

Se observa que cualquier fórmula derivada en la lógica minimal sigue siendo derivable en la lógica intuicionista. Además se pueden derivar nuevas fórmulas, en particular la regla de eliminación de la negación puede modificarse como sigue en la lógica intuicionista:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ (\neg\ \mathrm{E})$$

Más aún, el carácter constructivo de la negación restringe a la lógica de una manera importante, en particular el sistema no permite probar la tautología clásica $\varphi \vee \neg\varphi$ conocida como el principio del tercero excluido. Para convencernos de tal situación basta recordar qué significa el hecho de que una disyunción sea demostrable. En el caso del tercero excluido tendríamos que construir una prueba de $\varphi$ o bien una prueba de $\neg\varphi$ lo cual no es posible en general. Este hecho implica igualmente que la fórmula $\neg\neg\varphi \to \varphi$ **NO** es válida. Por otro lado es fácil dar una derivación de $\varphi \to \neg\neg\varphi$ desde la lógica minimal.
Otras fórmulas **NO** válidas en la lógica intuicionista son:

- $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.
- $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$.

[1] El nombre se debe a una corriente lógica para fundamentar las matemáticas desarrollada a principios del siglo XX.

- $\neg\forall x\varphi \to \exists x\neg\varphi$.
- $\forall x(\varphi \vee \psi) \to \varphi \vee \forall x\psi$ con $x \notin FV(\varphi)$.
- $(\psi \to \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$ con $x \notin FV(\psi)$.
- $(\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$ con $x \notin FV(\psi)$.
- $\forall x\neg\neg\varphi \to \neg\neg\forall x\varphi$.

Las demostraciones de la invalidez intuicionista de tales fórmulas utilizan técnicas de semánticas de Heyting ó forzamiento mediante marcos que no pertenecen a nuestro curso.

Las lógicas minimal e intuicionista también se conocen como lógicas constructivas porque toda fórmula se puede construir o derivar directamente, en particular se tienen las siguientes propiedades no válidas en la lógica clásica:

- Propiedad Disyuntiva: Si $\vdash_i \varphi \vee \psi$ entonces $\vdash_i \varphi$ ó $\vdash_i \psi$.
- Propiedad Existencial: Si $\vdash_i \exists x\varphi$ entonces existe un término $t$ tal que $\vdash_i \varphi[x := t]$.

## 3.3. Lógica clásica $\mathsf{DN_c}$

Para recuperar a la lógica clásica tenemos que postular alguna de las siguientes reglas:

- Tercero Excluido [2]

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (\mathrm{TE})$$

- Reducción al absurdo

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\mathrm{RAA})$$

  Esta regla es muy utilizada en razonamientos matemáticos.

- Eliminación de la doble negación [3]

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\neg\neg\ \mathrm{E})$$

Obsérvese que la regla (TE) permite probar $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ situación imposible de motivar en el ámbito constructivo. Esta situación rompe con la simetría de los conectivos dada por las reglas de introducción y eliminación. En particular en la lógica clásica podemos deducir disyunciones por medio de una regla distinta a la regla de introducción de la disyunción, a saber mediante el uso de la regla del tercero excluido.

[2] También conocidacomo ($TND$) por su nombre en latín *Tertium non datur*.

[3] La regla dual para introducción de la doble negación es válida desde la lógica minimal:

$$\frac{A}{\neg\neg A}\ (\neg\neg I)$$

### 3.4. Otras reglas de la negación clásica

Las siguientes reglas son de utilidad en la lógica clásica. Se deja como ejercicio mostrar que son derivables a partir de las reglas de negación dadas.

- Modus Tollens:

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}\ \mathrm{MT}$$

- Silogismo disyuntivo:

$$\frac{\Gamma \vdash A \lor B \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ \mathrm{SD}$$

## 4. Ejemplos de derivaciones

En lo que sigue denotamos con $\vdash_m, \vdash_i, \vdash_c$ a las relaciones de derivación en los sistemas minimal, intuicionista y clásico, respectivamente. De las definiciones es claro que el sistema intuicionista es una extensión conservativa del minimal y el clásico del intuicionista. Es decir, $\Gamma \vdash_m A$ implica $\Gamma \vdash_i A$ implica $\Gamma \vdash_c A$. Sin embargo ninguna de las afirmaciones recíprocas es válida en general. En los ejemplos siguientes debe entenderse que el sistema correspondiente es estrictamente necesario, es decir, para las derivaciones en $\vdash_i$ (respectivamente $\vdash_c$) no existe una derivación en $\vdash_m$ (respectivamente $\vdash_i$), aunque para mostrar formalmente estas afirmaciones se necesitan técnicas semánticas que van más allá del alcance de nuestro curso.

- Mostrar que: $\vdash_m (p \land q \to r) \to p \to q \to r$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \land q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash p$ | Hip |
| 2 | $p \land q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash q$ | Hip |
| 3 | $p \land q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash p \land q$ | $(\land I\ \ 1, 2)$ |
| 4 | $p \land q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash p \land q \to r$ | Hip |
| 5 | $p \land q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash r$ | $(\to E\ \ 3, 4)$ |
| 6 | $p \land q \to r\ ,\ p \vdash q \to r$ | $(\to I\ \ 5)$ |
| 7 | $p \land q \to r \vdash p \to q \to r$ | $(\to I\ \ 6)$ |
| 8 | $\vdash (p \land q \to r) \to p \to q \to r$ | $(\to I\ \ 7)$ |

- Sea $\Gamma = \{p \to q \lor r\ ,\ q \to r\ ,\ r \to s\}$, queremos mostrar $\Gamma \vdash_m p \to s$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Gamma,\ p\ \vdash\ p$ | $(Hip)$ |
| 2 | $\Gamma,\ p\ \vdash\ p \to q \lor r$ | $(Hip)$ |
| 3 | $\Gamma,\ p\ \vdash\ q \lor r$ | $(\to E)\ 1, 2$ |
| 4 | $\Gamma,\ p,\ q \vdash\ q$ | $(Hip)$ |
| 5 | $\Gamma,\ p,\ q \vdash\ q \to r$ | $(Hip)$ |
| 6 | $\Gamma,\ p,\ q \vdash\ r$ | $(\to E)\ 4, 5$ |
| 7 | $\Gamma,\ p,\ r \vdash\ r$ | $(Hip)$ |
| 8 | $\Gamma,\ p \vdash\ r$ | $(\lor E)\ 3, 6, 7$ |
| 9 | $\Gamma,\ p\ \vdash\ r \to s$ | $(Hip)$ |
| 10 | $\Gamma,\ p\ \vdash\ s$ | $(\to E)\ 8, 9$ |
| 11 | $\Gamma\ \vdash\ p \to s$ | $(\to I)\ 10$ |

- Demostrar que $\vdash_m A \to \neg\neg A$. Basta mostrar que $A, A \to \bot \vdash \bot$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A, A \to \bot \vdash A$ | $(Hip)$ |
| 2. | $A, A \to \bot \vdash A \to \bot$ | $(Hip)$ |
| 3. | $A, A \to \bot \vdash \bot$ | $(\to E)\ 1, 2$ |

- Demostrar que $\vdash_m \neg\neg(A \vee \neg A)$. Basta derivar $A \vee \neg A \to \bot \vdash_m \bot$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A$ | $(Hip)$ |
| 2. | $A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A \vee \neg A$ | $(\vee I)\ 1$ |
| 3. | $A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A \vee \neg A \to \bot$ | $(Hip)$ |
| 4. | $A \vee \neg A \to \bot, A \vdash \bot$ | $(\to E)\ 2, 3$ |
| 5. | $A \vee \neg A \to \bot \vdash A \to \bot$ | $(\to I)\ 4$ |
| 6. | $A \vee \neg A \to \bot \vdash A \vee \neg A$ | $(\vee I)\ 5$ |
| 7. | $A \vee \neg A \to \bot \vdash \bot$ | $(\to E)\ 3, 6$ |

- Demostrar el siguiente teorema $\vdash_m \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$. Hay que mostrar ambas implicaciones:

1. $\vdash_m \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$. Basta mostrar $A \vee B \to \bot, A \vdash_m \bot$ y $A \vee B \to \bot, B \vdash_m \bot$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \vee B \to \bot, A \vdash A$ | $(Hip)$ |
| 2. | $A \vee B \to \bot, A \vdash A \vee B$ | $(\vee I)\ 1$ |
| 3. | $A \vee B \to \bot, A \vdash A \vee B \to \bot$ | $(Hip)$ |
| 4. | $A \vee B \to \bot, A \vdash \bot$ | $(\to E)\ 2, 3$ |

La derivación faltante es análoga.

2. Para demostrar que $\vdash_m \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$, basta mostrar $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \bot$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \vee B$ | $(Hip)$ |
| 2. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A \wedge \neg B$ | $(Hip)$ |
| 3. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A$ | $(Hip)$ |
| 4. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A$ | $(\wedge E)\ 2$ |
| 5. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \bot$ | $(\to E)\ 3, 4$ |
| 6. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg A \wedge \neg B$ | $(Hip)$ |
| 7. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash B$ | $(Hip)$ |
| 8. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B$ | $(\wedge E)\ 6$ |
| 9. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \bot$ | $(\to E)\ 7, 8$ |
| 10. | $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \bot$ | $(\vee E)\ 1, 5, 9$ |

- Para demostrar el teorema $\vdash_i \neg A \vee B \to A \to B$ basta mostrar $\neg A \vee B, A \vdash B$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg A \vee B, A \vdash \neg A \vee B$ | $(Hip)$ |
| 2. | $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash A$ | $(Hip)$ |
| 3. | $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash \neg A$ | $(Hip)$ |
| 4. | $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash \bot$ | $(\to E)\ 2, 3$ |
| 5. | $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash B$ | $(\bot E)\ 4$ |
| 6. | $\neg A \vee B, A, B \vdash B$ | $(Hip)$ |
| 7. | $\neg A \vee B, A \vdash B$ | $(\vee E)\ 1, 5, 6$ |

- Para demostrar $\vdash_i A \vee \neg A \to \neg\neg A \to A$ basta mostrar $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A$.

$$
\begin{array}{rll}
1. & A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A \vee \neg A & (Hip) \\
2. & A \vee \neg A, \neg\neg A, A \vdash A & (Hip) \\
3. & A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash \neg A & (Hip) \\
4. & A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A & (Hip) \\
5. & A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash \bot & (\to E)\ 3,4 \\
6. & A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash A & (\bot E)\ 5 \\
7. & A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A & (\vee E)\ 1,2,6
\end{array}
$$

- El teorema $\vdash_c \neg\neg A \leftrightarrow A$ se demuestra en dos partes. La parte $\vdash A \to \neg\neg A$ ya fue probada. Basta probar entonces $\vdash \neg\neg A \to A$, es decir, $\neg\neg A \vdash A$. Pero esto es inmediato por la regla $(\neg\neg E)$.

- Para el teorema $\vdash_c \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ se tienen dos partes: la parte "$\leftarrow$" es válida minimalmente y por lo tanto válida en lógica clásica; para la otra parte hay que probar $\neg(A \wedge B) \vdash_c \neg A \vee \neg B$.

$$
\begin{array}{rll}
1. & \neg(A \wedge B) \vdash A \vee \neg A & (TE) \\
2. & \neg(A \wedge B), A \vdash B \vee \neg B & (TE) \\
3. & \neg(A \wedge B), A, B \vdash A & (Hip) \\
4. & \neg(A \wedge B), A, B \vdash B & (Hip) \\
5. & \neg(A \wedge B), A, B \vdash A \wedge B & (\wedge I)\ 3,4 \\
6. & \neg(A \wedge B), A, B \vdash \neg(A \wedge B) & (Hip) \\
7. & \neg(A \wedge B), A, B \vdash \bot & (\to E)\ 5,6 \\
8. & \neg(A \wedge B), A, B \vdash \neg A \vee \neg B & (\bot E)\ 7 \\
9. & \neg(A \wedge B), A, \neg B \vdash \neg B & (Hip) \\
10. & \neg(A \wedge B), A, \neg B \vdash \neg A \vee \neg B & (\vee I)\ 9 \\
11. & \neg(A \wedge B), A \vdash \neg A \vee \neg B & (\vee E)\ 2,8,10 \\
12. & \neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A & (Hip) \\
13. & \neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A \vee \neg B & (\vee I)\ 12 \\
14. & \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B & (\vee E)\ 1,11,13
\end{array}
$$

- $\vdash_c ((A \to B) \to A) \to A$. Por la ley de contrapositiva [4] basta mostrar $\neg A \vdash_c \neg((A \to B) \to A)$. Por otra parte, se puede probar que $C \wedge \neg D \vdash_m \neg(C \to D)$, por lo que basta mostrar $\neg A \vdash_c (A \to B) \wedge \neg A$, lo cual se sigue de $\neg A, A \vdash_c B$. Pero esto es inmediato de la regla $(\bot E)$.

[4] Se puede mostrar que esta ley es un teorema, es decir que $\vdash (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$.

Veamos ahora algunos ejemplos con cuantificadores.

- Mostrar que: $\vdash_m \forall v(Pv \to Qv) \to \forall x(\exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz))$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy) \vdash \forall v(Pv \to Qv)$ | Hip |
| 2 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy) \vdash \exists y(Py \wedge Rxy)$ | Hip |
| 3 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Py \wedge Rxy$ | Hip |
| 4 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Py \to Qy$ | $\forall E$ 1 |
| 5 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Py$ | $\wedge E$ 3 |
| 6 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Rxy$ | $\wedge E$ 3 |
| 7 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Qy$ | $\to E$ 4, 5 |
| 8 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Qy \wedge Rxy$ | $\wedge I$ 6, 7 |
| 9 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash \exists z(Qz \wedge Rxz)$ | $\exists I$ 8 |
| 10 | $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy) \vdash \exists z(Qz \wedge Rxz)$ | $\exists E$ 2, 9 |
| 11 | $\forall v(Pv \to Qv) \vdash \exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz)$ | $\to I$ (0 |
| 12 | $\forall v(Pv \to Qv) \vdash \forall x(\exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz))$ | $\forall I$ 11 |
| 13 | $\vdash \forall v(Pv \to Qv) \to \forall x(\exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz))$ | $\to I$ 12 |

- $\vdash_m \varphi \vee \forall x\psi \to \forall x(\varphi \vee \psi)$ con $x \notin FV(\varphi)$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\varphi \vee \forall x\psi, \varphi \vdash \varphi \vee \forall x\psi$ | $(Hip)$ |
| 2. | $\varphi \vee \forall x\psi, \varphi \vdash \varphi$ | $(Hip)$ |
| 3. | $\varphi \vee \forall x\psi, \varphi \vdash \varphi \vee \psi$ | $(\vee I, 2)$ |
| 4. | $\varphi \vee \forall x\psi, \varphi \vdash \forall x(\varphi \vee \psi)$ | $(\forall I, 3),\ x \notin FV(\{\varphi \vee \forall x\psi, \varphi\})$ |
| 5. | $\varphi \vee \forall x\psi, \forall x\psi \vdash \forall x\psi$ | $(Hip)$ |
| 6. | $\varphi \vee \forall x\psi, \forall x\psi \vdash \psi$ | $(\forall E, 5)$ |
| 7. | $\varphi \vee \forall x\psi, \forall x\psi \vdash \varphi \vee \psi$ | $(\vee I, 6)$ |
| 8. | $\varphi \vee \forall x\psi, \forall x\psi \vdash \forall x(\varphi \vee \psi)$ | $(\forall I, 7),\ x \notin FV(\{\varphi \vee \forall x\psi, \forall x\psi\})$ |
| 9. | $\varphi \vee \forall x\psi \vdash \forall x(\varphi \vee \psi)$ | $(\vee E, 1, 4, 8)$ |

- $\vdash_c \forall x(\varphi \vee \psi) \to \varphi \vee \forall x\psi$ con $x \notin FV(\varphi)$. Basta probar que $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash_c \forall x\psi$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash \forall x(\varphi \vee \psi)$ | $(Hip)$ |
| 2. | $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ | $(Hip)$ |
| 3. | $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ | $(\forall E, 1)$ |
| 4. | $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash \psi$ | $(RB, 2, 3)$[5] |
| 5. | $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash \forall x\psi$ | $(\forall I, 4), x \notin FV(\{\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi\})$ |

[5] Aquí $RB$ denota a la regla de resolución binaria, válida en lógica clásica, se deja como ejercicio su demostración.

- $\vdash_m \exists x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$ con $x \notin FV(\psi)$. Basta ver que $\exists x(\varphi \to \psi),\ \forall x\varphi \vdash_m \psi$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\exists x(\varphi \to \psi),\ \forall x\varphi \vdash \exists x(\varphi \to \psi)$ | $(Hip)$ |
| 2. | $\exists x(\varphi \to \psi),\ \forall x\varphi, \varphi \to \psi \vdash \forall x\varphi$ | $(Hip)$ |
| 3. | $\exists x(\varphi \to \psi),\ \forall x\varphi, \varphi \to \psi \vdash \varphi$ | $(\forall E, 2)$ |
| 4. | $\exists x(\varphi \to \psi),\ \forall x\varphi, \varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi$ | $(Hip)$ |
| 5. | $\exists x(\varphi \to \psi),\ \forall x\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ | $(\to E, 3, 4)$ |
| 6. | $\exists x(\varphi \to \psi),\ \forall x\varphi \vdash \psi$ | $(\exists E, 1, 5),\ x \notin FV(\{\exists x(\varphi \to \psi), \psi\})$ |

- $\vdash_c (\forall x\varphi \to \psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$ con $x \notin FV(\psi)$. Puesto que estamos en lógica clásica basta probar $\forall x\varphi \to \psi \vdash_c \neg\forall x\neg(\varphi \to \psi)$, es decir, $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash_c \bot$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \forall x\neg(\varphi \to \psi)$ | $(Hip)$ |
| 2. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg(\varphi \to \psi)$ | $(\forall E, 1)$ |
| 3. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi \wedge \neg\psi$ | $(equiv.\ logica, 2)$ |
| 4. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$ | $(\wedge E, 3)$ |
| 5. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \forall x\varphi$ | $(\forall I, 4),\ x \notin FV(\{\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi)\})$ |
| 6. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \forall x\varphi \to \psi$ | $(Hip)$ |
| 7. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \psi$ | $(\to E, 5, 6)$ |
| 8. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi$ | $(\wedge E, 3)$ |
| 9. | $\forall x\varphi \to \psi,\ \forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \bot$ | $(\to E, 7, 8)$ |

- $\vdash_m \forall xA \to \neg\exists x\neg A$. Basta ver que $\forall xA,\ \exists x\neg A \vdash_m \bot$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall xA, \exists x\neg A \vdash \exists x\neg A$ | $(Hip)$. |
| 2. | $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash \neg A$ | $(Hip)$. |
| 3. | $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash \forall xA$ | $(Hip)$. |
| 4. | $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash A$ | $(\forall E, 3)$. |
| 5. | $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash \bot$ | $(\to E, 2, 4)$. |
| 6. | $\forall xA, \exists x\neg A \vdash \bot$ | $(\exists E, 1, 5),\ x \notin FV(\{\forall xA, \exists x\neg A, \bot\})$. |

- $\vdash_c \neg\exists x\neg A \to \forall xA$. Basta ver que $\neg\exists x\neg A \vdash_c \forall xA$ y como $x \notin FV(\neg\exists x\neg A)$ basta con $\neg\exists x\neg A \vdash_c A$, para lo cual mostramos $\neg\exists x\neg A \vdash_c \neg\neg A$, es decir $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash_c \bot$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \exists x\neg A \to \bot$ | $(Hip)$. |
| 2. | $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \neg A$ | $(Hip)$. |
| 3. | $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \exists x\neg A$ | $(\exists I, 2)$. |
| 4. | $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \bot$ | $(\to E, 1, 3)$. |

## 5. Estrategias de derivación

Las siguientes estrategias se basan en las reglas de introducción y permiten construir una fórmula de acuerdo a su conectivo principal.

- Para derivar $\Gamma \vdash A \to B$ basta derivar $\Gamma, A \vdash B$.
- Para derivar $\Gamma \vdash A \wedge B$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash B$
- Para derivar $\Gamma \vdash A \vee B$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ o bien $\Gamma \vdash B$
- Para derivar $\Gamma \vdash \forall x A$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ donde s.p.g. $x \notin FV(\Gamma)$
- Para derivar $\Gamma \vdash \exists x A$ basta encontrar un término $t$ tal que $\Gamma \vdash A[x := t]$

Las siguientes estrategias se basan en las reglas de eliminación y permiten construir una fórmula $C$ usando una premisa particular:

- Aplicación: para derivar $\Gamma, A \to C \vdash C$, basta derivar $\Gamma, A \to C \vdash A$
- Para derivar $\Gamma, A \wedge B \vdash C$ basta derivar $\Gamma, A, B \vdash C$
- Para derivar $\Gamma, A \vee B \vdash C$ basta derivar $\Gamma, A \vdash C$ y $\Gamma, B \vdash C$
- Para derivar $\Gamma, \exists x A \vdash C$ basta derivar $\Gamma, A \vdash C$ donde $x \notin FV(\Gamma, C)$

La siguiente estrategia corresponde al uso de un lema, la fórmula $A$, en matemáticas. Se recomienda utilizarla cuando las anteriores no funcionan directamente.

- Aserción: Para derivar $\Gamma \vdash C$ basta proponer $A$ y derivar tanto $\Gamma \vdash A$ como $\Gamma, A \vdash C$ .

El uso adecuado de las estrategias anteriores nos llevar eventualmente a buscar pruebas assumptiones. Las siguientes estrategias permiten concluir pruebas o disminuir el número de subpruebas en una prueba particular.

- Para derivar $\Gamma, A \vdash A$ no hay nada más que hacer pues esta es una derivación válida.
- Para derivar $\Gamma, \forall x A \vdash A[x := t]$ no hay nada más que hacer pues esta es una derivación válida.

## 6. Tácticas

Las estrategias anteriores pueden mecanizarse mediante un procedimiento de búsqueda de pruebas orientado a metas. Una meta es simplemente un secuente $\Gamma \vdash A$ correspondiente a la prueba deseada. Usando las estrategias definidas en la sección anterior, este secuente se transforma en una secuencia de uno o más secuentes digamos $\Gamma_1 \vdash A_1; \dots ; \Gamma_k \vdash A_k$ siendo la nueva meta a resolver el secuente $\Gamma_1 \vdash A_1$, el cual genera nuevas submetas, y así sucesivamente. El proceso de búsqueda se simplifica con las siguientes definiciones:

- $\mathcal{S}$ denota a una secuencia finita de metas (posiblemente vacía, denotada $\Box$)

$$\mathcal{S} =_{def} \mathcal{G}_1; \dots ; \mathcal{G}_k$$

- El proceso de búsqueda aplica una estrategia a la primera meta de la secuencia actual Si al aplicar cierta estrategia a la meta $\mathcal{G}_1$ se generan las submetas $\mathcal{G}'_{11};\mathcal{G}'_{12};\ldots;\mathcal{G}'_{1k}$ entonces escribimos

$$\mathcal{G}_1;\mathcal{S} \;\triangleright\; \mathcal{G}'_{11};\mathcal{G};_{12};\ldots;\mathcal{G}_{1k};\mathcal{S}$$

y a este proceso le llamamos táctica.

- La relación $\mathcal{S}\triangleright\mathcal{S}'$ puede leerse como "para demostrar la secuencia $\mathcal{S}$ es suficiente demostrar la secuencia $\mathcal{S}'$". Por ejemplo:

  - Para demostrar que $p,q \vdash (q \vee r) \wedge p$
    es suficiente demostrar que $p,q \vdash q \vee r$ y que $p,q \vdash p$ por lo que escribimos $p,q \vdash (q \vee r) \wedge p \;\triangleright\; p,q \vdash q \vee r \;;\; p,q \vdash p$.
  - Para demostrar que $p,q \vdash q \vee r$ y $p,q \vdash p$
    es suficiente demostrar $p,q \vdash q$ y $p,q \vdash p$ por lo que escribimos $p,q \vdash q \vee r \;;\; p,q \vdash p \;\triangleright\; p,q \vdash q \;;\; p,q \vdash p$.
  - Para demostrar que $p,q \vdash q$ y $p,q \vdash p$
    es suficiente demostrar $p,q \vdash p$ (pues $p,q \vdash q$ es inmediato) por lo que escribimos $p,q \vdash q \;;\; p,q \vdash p \;\triangleright\; p,q \vdash p$.
  - Para demostrar $p,q \vdash p$
    hemos terminado pues $p,q \vdash p$ es inmediato por lo que escribimos $p,q \vdash p \;\triangleright\; \Box$

A continuación definimos las tácticas particulares. Aquí $\mathcal{S}$ denota a una secuencia arbitraria de metas y una expresión de la forma $H : A$ denota a una hipótesis etiquetada con el nombre $H$ el cual se usa como referencia en la definición de la táctica. En general un contexto tiene todas las hipótesis etiquetadas, es decir, es de la forma $\Gamma = \{H_1 : A_1, \ldots, H_n : A_n\}$.

- `intro`: $\Gamma \vdash A \to B;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma, A \vdash B;\mathcal{S}$
- `split`: $\Gamma \vdash A \wedge B;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash A;\Gamma \vdash B;\mathcal{S}$
- `left`: $\Gamma \vdash A \vee B;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash A;\mathcal{S}$
- `right`: $\Gamma \vdash A \vee B;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash B;\mathcal{S}$
- `intro`: $\Gamma \vdash \forall x A;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash A;\mathcal{S}$ donde s.p.g $x \notin FV(\Gamma)$
- `exists t`: $\Gamma \vdash \exists x A;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash A[x := t];\mathcal{S}$ para algún $t$.
- `apply` H: $\Gamma, H : A \to B \vdash B;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma, H : A \to B \vdash A;\mathcal{S}$
- `destruct` H: $\Gamma, H : A \wedge B \vdash C;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma, H_1 : A, H_2 : B \vdash C;\mathcal{S}$
- `destruct` H: $\Gamma, H : A \vee B \vdash C;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma, H_1 : A \vdash C;\Gamma, H_2 : B \vdash C;\mathcal{S}$
- `apply` H: $\Gamma, H : \forall x A \vdash A[x := t];\mathcal{S} \;\triangleright\; \mathcal{S}$
- `destruct` H: $\Gamma, H : \exists x A \vdash C;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma, H_1 : A \vdash C;\mathcal{S}$ donde $x \notin FV(\Gamma)$

- `assumption`: $\Gamma, H : A \vdash A; \mathcal{S} \;\triangleright\; \mathcal{S}$ en particular $\Gamma, A \vdash A \;\triangleright\; \square$

- `assert` $A$: $\Gamma \vdash C; \mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash A; \Gamma,\ H : A \vdash C; \mathcal{S}$

Los nombres de las tácticas corresponden al nombre del comando en el asistente de prueba Coq visto en el laboratorio.

Veamos algunos ejemplos de derivación mediante tácticas.

- Probar que: $\vdash (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r$

$$
\begin{array}{ll}
\vdash p \wedge q \to r \to p \to q \to r & \textit{intro} \\
H_1 : p \wedge q \to r \vdash p \to q \to r & \textit{intro} \\
H_1 : p \wedge q \to r\ ,\ H_2 : p \vdash q \to r & \textit{intro} \\
H_1 : p \wedge q \to r\ ,\ H_2 : p\ ,\ H_3 : q \vdash r & \textit{apply}\ \ H_1 \\
H_1 : p \wedge q \to r\ ,\ H_2 : p\ ,\ H_3 : q \vdash p \wedge q & \textit{split} \\
H_1 : p \wedge q \to r\ ,\ H_2 : p\ ,\ H_3 : q \vdash p\ ;\ H_1 : p \wedge q \to r\ ,\ H_2 : p\ ,\ H_3 : q \vdash q & \textit{assumption} \\
H_1 : p \wedge q \to r\ ,\ H_2 : p\ ,\ H_3 : q \vdash q & \textit{assumption} \\
\square &
\end{array}
$$

- Sea $\Gamma = \{H : p \to q \vee r,\ H' : q \to r,\ H'' : r \to s\}$. Queremos mostrar que $\Gamma \vdash p \to s$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Gamma \vdash p \to s$ | intro |
| 2 | $\Gamma,\ H_1 : p \vdash s$ | apply $H''$ |
| 3 | $\Gamma,\ H_1 : p \vdash r$ | assert $q \vee r$ |
| 4 | $\Gamma,\ H_1 : p \vdash q \vee r \quad ; \quad \Gamma,\ H_1 : p,\ H_2 : q \vee r \vdash r$ | apply $H$ |
| 5 | $\Gamma,\ H_1 : p \vdash p \quad ; \quad \Gamma,\ H_1 : p,\ H_2 : q \vee r \vdash r$ | assumption |
| 6 | $\Gamma,\ H_1 : p,\ H_2 : q \vee r \vdash r$ | destruct $H_2$ |
| 7 | $\Gamma,\ H_1 : p,\ H_2 : q \vdash r \quad ; \quad \Gamma,\ H_1 : p,\ H_3 : r \vdash r$ | apply $H'$ |
| 8 | $\Gamma,\ H_1 : p,\ H_2 : q \vdash q \quad ; \quad \Gamma,\ H_2 : p,\ H_3 : r \vdash r$ | assumption |
| 9 | $\Gamma,\ H_1 : p,\ H_3 : r \vdash r$ | assumption |
| 10 | $\square$ | |

## 6.1. Tácticas para la negación

Las siguientes tácticas son útiles cuando hay que razonar con negación:

- `absurd (A)` : $\Gamma \vdash B\,;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash A\ ;\ \Gamma \vdash \neg A\,;\mathcal{S}$

- `contradict H`: $\Gamma, H : \neg A \vdash B\,;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash A\,;\mathcal{S}$

- `contradict H`: $\Gamma, H : \neg A \vdash \neg B\,;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma, H : B \vdash A\,;\mathcal{S}$

- `contradict H`: $\Gamma, H : A \vdash B\,;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma \vdash \neg A\,;\mathcal{S}$

- `contradict H`: $\Gamma, H : A \vdash \neg B\,;\mathcal{S} \;\triangleright\; \Gamma, H : B \vdash \neg A\,;\mathcal{S}$

Las siguientes tácticas sólo están disponibles en la lógica clásica al importar la biblioteca `Classical`

- `exact (classic (A))`: $\Gamma \vdash A \vee \neg A\,; \mathcal{S} \;\rhd\; \mathcal{S}$

- `exact (NNPP (A))`: $\Gamma \vdash \neg\neg A \to A\,; \mathcal{S} \;\rhd\; \mathcal{S}$

La primera de estas tácticas es útil en combinación con `assert` para agregar una instancia del tercero excluido al contexto y la segunda para agregar una instancia de la parte clásica de la ley de doble negación . Otras tácticas útiles derivada de éstas son:

- `destruct (classic (A))`: $\Gamma \vdash B\,; \mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma, A \vdash B\,;\; \Gamma, \neg A \vdash B;\; \mathcal{S}.$

- `apply (NNPP(A))`: $\Gamma \vdash A\,;\; \mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma \vdash \neg\neg A\,;\; \mathcal{S}$

## 7. Los teoremas de completud y correctud para la lógica clásica

Finalizamos nuestras consideraciones acerca de los sistemas de deducción natural mencionando los teoremas de correctud y completud para la lógica clásica $\mathsf{DN_c}$ que vinculan el mundo de la semántica con el de la sintáxis de manera biunívoca.

**Teorema 1 (Correctud de $\mathsf{DN_c}$)** *Sean $\Gamma$ un conjunto de fórmulas y $\varphi$ una fórmula. La relación $\vdash_c$ es correcta con respecto a la consecuencia lógica,es decir:*

$$\textit{Si } \Gamma \vdash_c \varphi \textit{ entonces } \Gamma \models \varphi.$$

***Demostración.*** Inducción sobre $\Gamma \vdash_c \varphi$. Lo cual equivale a probar que todas las reglas del sistema $\mathsf{DN_c}$ preservan la noción $\models$ pero esto es justo lo que dice la proposición **??**.

**Teorema 2 (Completud de $\mathsf{DN_c}$)** *Sean $\Gamma$ un conjunto de fórmulas y $\varphi$ una fórmula. El sistema $\mathsf{DN_c}$ es completo con respecto a la relación $\vdash_c$, es decir:*

$$\textit{Si } \Gamma \models \varphi \textit{ entonces } \Gamma \vdash_c \varphi.$$

***Demostración.*** Omitimos la demostración dado que las técnicas necesarias pertenecen al ámbito de la lógica matemática pura.

## 8. Reglas del sistema de Fitch (con cajas)

Una presentación común del sistema de deducción natural es usando el llamado sistema de Fitch o sistema de cajas. Enunciamos aquí sus reglas, en este sistema las derivaciones son sucesiones de fórmulas y no de secuentes.

- Conjunción:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,(\wedge\ \mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge\ \mathrm{E}) \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge\ \mathrm{E})$$

- Implicación:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{A}\\ \vdots \\ \mathrm{B}\end{array}}}{A \to B}\,(\to I) \qquad\qquad \frac{A \to B \qquad A}{B}\,(\mathrm{MP})$$

- Disyunción $$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee\ \mathrm{I}) \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee\ \mathrm{I}) \qquad \frac{\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{A}\\ \vdots\\ \mathrm{C}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{B}\\ \vdots\\ \mathrm{C}\end{array}}}{\mathrm{C}}\ (\vee E)$$

- Verdad:

$$\frac{}{\top}\ (\top\ \mathrm{I})$$

- Cuantificación universal:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}x_0 \text{ parámetro}\\ \vdots\\ A[x := x_0]\end{array}}}{\forall x A}\ (\forall I)$$

La condición de que $x_0$ sea un parámetro significa que $x_0$ no puede figurar libre fuera de su caja.

$$\frac{\forall x \mathrm{A}}{\mathrm{A}[x := t]}\ (\forall\ \mathrm{E})$$

- Cuantificación existencial: $$\frac{A[x := t]}{\exists x A}\ (\exists\ \mathrm{I}) \qquad \frac{\exists x A \quad \boxed{\begin{array}{c}A[x := x_0]\\ \vdots\\ B\end{array}} \quad x_0 \ \text{ parámetro}}{B}\ (\exists E)$$

$x_0$ parámetro significa que $x_0$ no puede estar libre fuera de su caja, en particular $x_0$ no debe estar libre en $B$.