Lógica computacional

Tema: Semántica de la Lógica de Primer Orden

Pilar Selene Linares Arévalo

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

marzo 2018

Material desarrollado bajo el proyecto UNAM-PAPIME PE102117.

Semántica formal

Interpretación (estructura)

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ un lenguaje o signatura de primer orden. Una **estructura o interpretación** para $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío llamado el universo de la estructura e $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que:

Semántica formal

Interpretación (estructura)

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ un lenguaje o signatura de primer orden. Una **estructura o interpretación** para $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío llamado el universo de la estructura e $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que:

- Si $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{I}(P)$ es una relación de m-argumentos sobre M, es decir $\mathcal{I}(P) \subseteq M^n$. Alternativamente podemos definir la interpretación de P como una función booleana que decide si una tupla está o no en la relación deseada, es decir, $\mathcal{I}(P) : M^n \to Bool$.

Interpretación (estructura)

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ un lenguaje o signatura de primer orden. Una **estructura o interpretación** para $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío llamado el universo de la estructura e $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que:

- Si $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{I}(P)$ es una relación de m-argumentos sobre M, es decir $\mathcal{I}(P) \subseteq M^n$. Alternativamente podemos definir la interpretación de P como una función booleana que decide si una tupla está o no en la relación deseada, es decir, $\mathcal{I}(P) : M^n \to Bool$.
- Si $f^{(n)} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{I}(f)$ es una función con dominio M^n y contradominio M, es decir
  $\mathcal{I}(f) : M^n \to M$.

Semántica formal

Interpretación (estructura)

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ un lenguaje o signatura de primer orden. Una **estructura o interpretación** para $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío llamado el universo de la estructura e $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que:

- Si $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{I}(P)$ es una relación de m-argumentos sobre M, es decir $\mathcal{I}(P) \subseteq M^n$. Alternativamente podemos definir la interpretación de P como una función booleana que decide si una tupla está o no en la relación deseada, es decir, $\mathcal{I}(P) : M^n \to Bool$.
- Si $f^{(n)} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{I}(f)$ es una función con dominio M^n y contradominio M, es decir
$\mathcal{I}(f) : M^n \to M$.
- Si $c \in \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{I}(c)$ es un elemento de M, es decir $\mathcal{I}(c) \in M$.

Semántica formal

Dada una interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ haremos uso de la siguiente notación :

Semántica formal

Dada una interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ haremos uso de la siguiente notación :

$$\begin{array}{rcl}
|\mathcal{M}| & =_{def} & M \\
P^{\mathcal{I}} & =_{def} & \mathcal{I}(P) \\
f^{\mathcal{I}} & =_{def} & \mathcal{I}(f) \\
c^{\mathcal{I}} & =_{def} & \mathcal{I}(c)
\end{array}$$

Interpretación de términos

Estado/ asignación

Un **estado**, asignación o valuación de las variables es una función $\sigma : \mathrm{Var} \to M$.

Interpretación de términos

Estado/ asignación

Un **estado**, asignación o valuación de las variables es una función $\sigma : \mathrm{Var} \to M$.

Estado modificado

Sea $\sigma : \mathrm{Var} \to M$ un estado de las variables. Dadas las variables $x_1, \ldots, x_n$ y los elementos del universo $m_1, \ldots, m_n \in M$ definimos el **estado modificado** o actualizado en $x_1, \ldots, x_n$ por $m_1, \ldots, m_n$ denotado $\sigma[x_1, \ldots, x_n/m_1, \ldots, m_n]$ o $\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,]$ como sigue:

$$\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,](y) = \begin{cases} \sigma(y) & \text{si } y \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \\ \\ m_i & \text{si } y = x_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Interpretación de términos

Interpretación de términos

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de los términos con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{TERM} \to |\mathcal{M}|$ como sigue:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{I}_\sigma(x) & = & \sigma(x) \\
\mathcal{I}_\sigma(c) & = & \mathcal{I}(c) \\
\mathcal{I}_\sigma\big(f(t_1, \ldots, t_n)\big) & = & f^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}_\sigma(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\sigma(t_n))
\end{array}
$$

Interpretación de términos

Hay una relación entre los estados modificados y las sustituciones:

Interpretación de términos

Hay una relación entre los estados modificados y las sustituciones:

Supóngase que tenemos un término t que tiene muchas presencias de la variable x y que queremos evaluar $t[x := r]$ en algún estado de cierta interpretación.

Interpretación de términos

Hay una relación entre los estados modificados y las sustituciones:

Supóngase que tenemos un término t que tiene muchas presencias de la variable x y que queremos evaluar $t[x := r]$ en algún estado de cierta interpretación.

Para ello aplicamos la definición y cada vez que encontramos una presencia del subtérmino r en $t[x := r]$ debemos calcular el valor de r en el mismo estado; lo cual es poco práctico.

Interpretación de términos

Hay una relación entre los estados modificados y las sustituciones:

Supóngase que tenemos un término t que tiene muchas presencias de la variable x y que queremos evaluar $t[x := r]$ en algún estado de cierta interpretación.

Para ello aplicamos la definición y cada vez que encontramos una presencia del subtérmino r en $t[x := r]$ debemos calcular el valor de r en el mismo estado; lo cual es poco práctico.

Una mejor manera de evaluar $t[x := r]$ sería evaluar r en el estado dado σ, lo cual nos da cierto valor m y evaluar el término $t[x := r]$ en el estado modificado $\sigma[x/m]$. El resultado será el mismo.

Interpretación de términos

Lema de coincidencia para términos

Sean $t \in \text{TERM}$ y σ_1, σ_2 dos estados de las variables tales que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda variable x que figura en t. Entonces $\mathcal{I}_{\sigma_1}(t) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(t)$.

Interpretación de términos

Lema de coincidencia para términos

Sean $t \in \text{TERM}$ y σ_1, σ_2 dos estados de las variables tales que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda variable x que figura en t. Entonces $\mathcal{I}_{\sigma_1}(t) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(t)$.

Lema de sustitución para términos

Sean $r \in \text{TERM}$, σ un estado de las variables, $[\vec{x} := \vec{t}\,]$ una sustitución y $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que $\mathcal{I}_\sigma(t_i) = m_i \;\; 1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces

$$\mathcal{I}_\sigma\big(r[\vec{x} := \vec{t}\,]\big) = \mathcal{I}_{\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,]}(r)$$

Interpretación de fórmulas

Ya que sabemos cómo interpretar términos, es posible definir la interpretación de fórmulas.

Interpretación de fórmulas

Ya que sabemos cómo interpretar términos, es posible definir la interpretación de fórmulas.

Interpretación de fórmulas I

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \mathsf{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\bot) = 0 \qquad\qquad \mathcal{I}_\sigma(\top) = 1$$

Interpretación de fórmulas

Ya que sabemos cómo interpretar términos, es posible definir la interpretación de fórmulas.

Interpretación de fórmulas I

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \mathsf{FORM} \to \{0, 1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\bot) = 0 \qquad\qquad \mathcal{I}_\sigma(\top) = 1$$

Interpretación de fórmulas

Ya que sabemos cómo interpretar términos, es posible definir la interpretación de fórmulas.

Interpretación de fórmulas I

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \mathsf{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\bot) \;=\; 0 \qquad\qquad \mathcal{I}_\sigma(\top) \;=\; 1$$

$$\mathcal{I}_\sigma\big(P(t_1,\ldots,t_m)\big) \;=\; 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \big(\mathcal{I}_\sigma(t_1),\ldots,\mathcal{I}_\sigma(t_m)\big) \in P^{\mathcal{I}}$$

Interpretación de fórmulas

Ya que sabemos cómo interpretar términos, es posible definir la interpretación de fórmulas.

Interpretación de fórmulas I

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\bot) \;=\; 0 \qquad\qquad \mathcal{I}_\sigma(\top) \;=\; 1$$

$$\mathcal{I}_\sigma\big(P(t_1,\ldots,t_m)\big) \;=\; 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \big(\mathcal{I}_\sigma(t_1),\ldots,\mathcal{I}_\sigma(t_m)\big) \in P^{\mathcal{I}}$$

$$\mathcal{I}_\sigma(t_1 = t_2) \;=\; 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(t_1) = \mathcal{I}_\sigma(t_2)$$

Interpretación de fórmulas II

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) \; = \; 1 \qquad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$$

Interpretación de fórmulas II

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{FORM} \to \{0, 1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) \;=\; 1 \qquad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$$

Interpretación de fórmulas II

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{FORM} \rightarrow \{0,1\}$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) &= 1 && \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0 \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \wedge \psi) &= 1 && \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1
\end{aligned}
$$

Interpretación de fórmulas II

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \mathsf{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$
\begin{array}{rclll}
\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) & = & 1 & \text{si y sólo si} & \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0 \\[1em]
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \wedge \psi) & = & 1 & \text{si y sólo si} & \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1 \\[1em]
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \vee \psi) & = & 0 & \text{si y sólo si} & \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0
\end{array}
$$

Interpretación de fórmulas II

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{FORM} \to \{0, 1\}$ como sigue:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0 \\[1em]
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \land \psi) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1 \\[1em]
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \lor \psi) & = & 0 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0 \\[1em]
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \to \psi) & = & 0 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1 \text{ e } \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0
\end{array}
$$

Interpretación de fórmulas II

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$
\begin{array}{rcll}
\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0 \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \land \psi) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1 \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \lor \psi) & = & 0 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0 \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \to \psi) & = & 0 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1 \text{ e } \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0 \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) & = & 1 & \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi)
\end{array}
$$

Interpretación de fórmulas III

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \mathrm{FORM} \to \{0, 1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\forall x \varphi) \;=\; 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \;\text{ para todo } m \in M$$

Interpretación de fórmulas III

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma : \text{FORM} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\forall x\varphi) \ = \ 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \ \text{ para todo } m \in M$$

Interpretación de fórmulas III

Sea σ un estado de las variables. Definimos la **función de interpretación** o significado de las fórmulas con respecto a σ, $\mathcal{I}_\sigma$: FORM $\to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mathcal{I}_\sigma(\forall x\varphi) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \text{ para todo } m \in M$$

$$\mathcal{I}_\sigma(\exists x\varphi) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \text{ para algún } m \in M$$

Interpretación de fórmulas

Análogamente al caso de términos se cumplen los lemas de coincidencia y sustitución.

Interpretación de fórmulas

Análogamente al caso de términos se cumplen los lemas de coincidencia y sustitución.

Lema de coincidencia para fórmulas

Sean φ una fórmula y σ_1, σ_2 dos estados de las variables tales que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda variable $x \in FV(\varphi)$. Entonces $\mathcal{I}_{\sigma_1}(\varphi) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(\varphi)$.

Interpretación de fórmulas

Análogamente al caso de términos se cumplen los lemas de coincidencia y sustitución.

Lema de coincidencia para fórmulas

Sean φ una fórmula y σ_1, σ_2 dos estados de las variables tales que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda variable $x \in FV(\varphi)$. Entonces $\mathcal{I}_{\sigma_1}(\varphi) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(\varphi)$.

Interpretación de fórmulas

Análogamente al caso de términos se cumplen los lemas de coincidencia y sustitución.

Lema de coincidencia para fórmulas

Sean φ una fórmula y σ_1, σ_2 dos estados de las variables tales que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda variable $x \in FV(\varphi)$. Entonces $\mathcal{I}_{\sigma_1}(\varphi) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(\varphi)$.

Lema de sustitución para fórmulas

Sean $\varphi \in \mathrm{FORM}$, σ un estado de las variables, $[\vec{x} := \vec{t}\,]$ una sustitución y $m_1, \dots, m_n \in M$ tales que $m_i = \mathcal{I}_\sigma(t_i)$ $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces

$$\mathcal{I}_\sigma\big(\varphi[\vec{x} := \vec{t}\,]\big) = \mathcal{I}_{\sigma[\vec{x}/\vec{m}\,]}(\varphi)$$

Interpretación de fórmulas

Satisfacibilidad, verdad y falsedad.

Sean φ una fórmula y $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación. Entonces

Satisfacibilidad, verdad y falsedad.

Sean φ una fórmula y $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación. Entonces

- φ es **satisfacible** en $\mathcal{M}$ si existe un estado de las variables σ tal que $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$, lo cual suele denotarse con $\mathcal{M} \models \varphi[\sigma]$ o con $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$.

Satisfacibilidad, verdad y falsedad.

Sean φ una fórmula y $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación. Entonces

- φ es **satisfacible** en $\mathcal{M}$ si existe un estado de las variables σ tal que $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$, lo cual suele denotarse con $\mathcal{M} \models \varphi[\sigma]$ o con $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$.
- φ es **verdadera** en $\mathcal{M}$ si para todo estado de las variables σ se tiene $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$, es decir, si φ es satisfacible en $\mathcal{M}$ en todos los estados posibles.

  En tal caso también decimos que $\mathcal{M}$ es un **modelo** de φ lo cual se denotará con $\mathcal{M} \models \varphi$.

Interpretación de fórmulas

Satisfacibilidad, verdad y falsedad.

Sean φ una fórmula y $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación. Entonces

- φ es **satisfacible** en $\mathcal{M}$ si existe un estado de las variables σ tal que $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$, lo cual suele denotarse con $\mathcal{M} \models \varphi[\sigma]$ o con $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$.
- φ es **verdadera** en $\mathcal{M}$ si para todo estado de las variables σ se tiene $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$, es decir, si φ es satisfacible en $\mathcal{M}$ en todos los estados posibles.

  En tal caso también decimos que $\mathcal{M}$ es un **modelo** de φ lo cual se denotará con $\mathcal{M} \models \varphi$.
- φ es **falsa** en $\mathcal{M}$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. Es decir φ es falsa si y sólo si su negación $\neg\varphi$ es verdadera.

Interpretación de fórmulas

¡En lógica de predicados decir que φ es falsa y no es verdadera NO es lo mismo!.

Interpretación de fórmulas

¡En lógica de predicados decir que φ es falsa y no es verdadera NO es lo mismo!.

- Si φ no es verdadera (es decir, si $\mathcal{M} \not\models \varphi$), entonces existe un estado σ tal que $\mathcal{M} \not\models_\sigma \varphi$, es decir $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$ o bien φ es insatisfacible en el estado σ.

Interpretación de fórmulas

¡En lógica de predicados decir que φ es falsa y no es verdadera NO es lo mismo!.

- Si φ no es verdadera (es decir, si $\mathcal{M} \not\models \varphi$), entonces existe un estado σ tal que $\mathcal{M} \not\models_\sigma \varphi$, es decir $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$ o bien φ es insatisfacible en el estado σ.
- Una fórmula no verdadera es aquella tal que es insatisfacible en algún estado de sus variables, o bien tal que su negación es satisfacible en algún estado de sus variables.

Interpretación de fórmulas

¡En lógica de predicados decir que φ es falsa y no es verdadera NO es lo mismo!.

- Si φ no es verdadera (es decir, si $\mathcal{M} \not\models \varphi$), entonces existe un estado σ tal que $\mathcal{M} \not\models_\sigma \varphi$, es decir $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$ o bien φ es insatisfacible en el estado σ.
- Una fórmula no verdadera es aquella tal que es insatisfacible en algún estado de sus variables, o bien tal que su negación es satisfacible en algún estado de sus variables.
- Para poder afirmar que φ es falsa, tendríamos que mostrar que $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, es decir que $\neg\varphi$ es satisfacible en **todos** los estados posibles.

Interpretación de fórmulas

¡En lógica de predicados decir que φ es falsa y no es verdadera NO es lo mismo!.

- Si φ no es verdadera (es decir, si $\mathcal{M} \not\models \varphi$), entonces existe un estado σ tal que $\mathcal{M} \not\models_\sigma \varphi$, es decir $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$ o bien φ es insatisfacible en el estado σ.
- Una fórmula no verdadera es aquella tal que es insatisfacible en algún estado de sus variables, o bien tal que su negación es satisfacible en algún estado de sus variables.
- Para poder afirmar que φ es falsa, tendríamos que mostrar que $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, es decir que $\neg\varphi$ es satisfacible en **todos** los estados posibles.

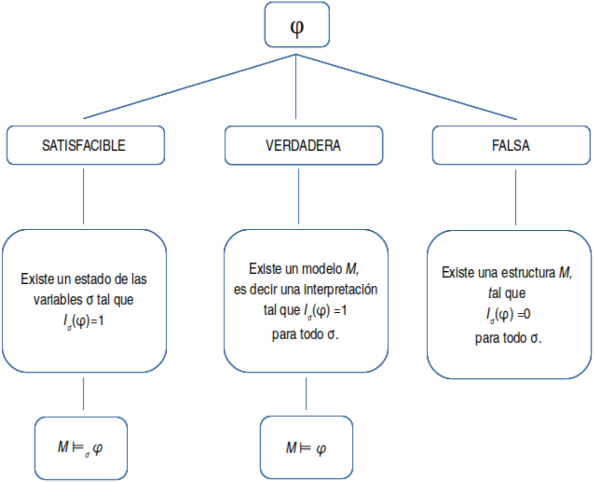
Interpretación de fórmulas

¡En lógica de predicados decir que φ es falsa y no es verdadera NO es lo mismo!.

- Si φ no es verdadera (es decir, si $\mathcal{M} \not\models \varphi$), entonces existe un estado σ tal que $\mathcal{M} \not\models_\sigma \varphi$, es decir $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$ o bien φ es insatisfacible en el estado σ.
- Una fórmula no verdadera es aquella tal que es insatisfacible en algún estado de sus variables, o bien tal que su negación es satisfacible en algún estado de sus variables.
- Para poder afirmar que φ es falsa, tendríamos que mostrar que $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, es decir que $\neg\varphi$ es satisfacible en **todos** los estados posibles.

Si una fórmula φ no es verdadera, no podemos concluir que φ es falsa.

Interpretación de fórmulas



Propiedades noción verdad

La relación de verdad en lógica de predicados no tiene las mismas propiedades que su contraparte en la lógica proposicional, propiedades que sí hereda la relación de satisfacibilidad.

Propiedades noción verdad

La relación de verdad en lógica de predicados no tiene las mismas propiedades que su contraparte en la lógica proposicional, propiedades que sí hereda la relación de satisfacibilidad.

Sean $\mathcal{L} = \{P^{(1)}, Q^{(1)}\}$, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ donde $P^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser par" y $Q^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser impar".

Propiedades noción verdad

La relación de verdad en lógica de predicados no tiene las mismas propiedades que su contraparte en la lógica proposicional, propiedades que sí hereda la relación de satisfacibilidad.

Sean $\mathcal{L} = \{P^{(1)}, Q^{(1)}\}$, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ donde $P^{\mathcal{I}}$ es la propiedad “ser par” y $Q^{\mathcal{I}}$ es la propiedad “ser impar”.

Entonces $\mathcal{M} \models P(x) \vee Q(x)$ puesto que cualquier número natural es par o es impar.

Propiedades noción verdad

La relación de verdad en lógica de predicados no tiene las mismas propiedades que su contraparte en la lógica proposicional, propiedades que sí hereda la relación de satisfacibilidad.

Sean $\mathcal{L} = \{P^{(1)}, Q^{(1)}\}$, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ donde $P^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser par" y $Q^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser impar".

Entonces $\mathcal{M} \models P(x) \vee Q(x)$ puesto que cualquier número natural es par o es impar.
Sin embargo no se cumple que $\mathcal{M} \models P(x)$ ni que $\mathcal{M} \models Q(x)$. Puesto que el valor de x no puede ser siempre par o siempre impar.

Propiedades noción verdad

La relación de verdad en lógica de predicados no tiene las mismas propiedades que su contraparte en la lógica proposicional, propiedades que sí hereda la relación de satisfacibilidad.

Sean $\mathcal{L} = \{P^{(1)}, Q^{(1)}\}$, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ donde $P^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser par" y $Q^{\mathcal{I}}$ es la propiedad "ser impar".

Entonces $\mathcal{M} \models P(x) \vee Q(x)$ puesto que cualquier número natural es par o es impar.
Sin embargo no se cumple que $\mathcal{M} \models P(x)$ ni que $\mathcal{M} \models Q(x)$. Puesto que el valor de x no puede ser siempre par o siempre impar.

Observemos que si una disyunción es verdadera en $\mathcal{M}$ entonces no necesariamente lo es alguna de sus subfórmulas. Es decir, $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ no implica que $\mathcal{M} \models \varphi$ o $\mathcal{M} \models \psi$.

Propiedades noción verdad

Veamos ahora algunas propiedades de la relación de verdad.

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces

Propiedades noción verdad

Veamos ahora algunas propiedades de la relación de verdad.

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces

- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.

Propiedades noción verdad

Veamos ahora algunas propiedades de la relación de verdad.

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces

- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ y $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \psi$.

Propiedades noción verdad

Veamos ahora algunas propiedades de la relación de verdad.

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces

- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ y $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \psi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$.

Propiedades noción verdad

Veamos ahora algunas propiedades de la relación de verdad.

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces

- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ y $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \psi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi$ y $\mathcal{M} \models \psi$.

Propiedades noción verdad

Veamos ahora algunas propiedades de la relación de verdad.

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces

- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ y $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \psi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi$ y $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \forall\varphi$. donde $\forall\varphi$ denota a la cerradura universal de φ, es decir a la fórmula obtenida al cuantificar universalmente todas las variables libres de φ.