Lógica Computacional 2017-2, nota de clase 12
Significado de programas lógicos: Modelos de Herbrand

Favio Ezequiel Miranda Perea   Araceli Liliana Reyes Cabello
Lourdes Del Carmen González Huesca   Pilar Selene Linares Arévalo

2 de mayo de 2017
Material desarrollado bajo el proyecto UNAM-PAPIME PE102117

Recordemos los dos significados que pueden tener los programas lógicos:

- Significado declarativo: el significado de un programa lógico $\mathbb{P}$ es el conjunto de todas las consecuencias lógicas del programa, noción asociada a las respuestas correctas.
- Significado operacional: el significado de un programa lógico $\mathbb{P}$ es el conjunto de todas los éxitos del programa, noción asociada a la de respuesta computada.

Estudiaremos ahora la equivalencia entre estos dos significados utilizando los modelos de Herbrand para poder definir formalmente la semántica de un programa lógico.

1. Universo y Modelos de Herbrand

Definición 1 (Universo de Herbrand) *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. El universo de Herbrand de $\mathcal{L}$ se define como el conjunto $\mathcal{H}_\mathcal{L}$ de los términos cerrados de $\mathcal{L}$. Es decir*

$$\mathcal{H}_\mathcal{L} = \{t \mid t \textit{ es un } \mathcal{L}\textit{-término cerrado } \}$$

Ejemplo 1.1

1. Si $\mathcal{L}_1 = \{a, b, P^{(1)}, Q^{(1)}, R^{(2)}\}$ entonces $\mathcal{H}_{\mathcal{L}_1} = \{a, b\}$
2. Si $\mathcal{L}_2 = \{c, a, f^{(1)}, g^{(1)}, P^{(1)}\}$ entonces
$\mathcal{H}_{\mathcal{L}_2} = \{c, a, f(c), f(a), g(c), g(a), f(f(a)), f(g(a)), f(f(c)), f(g(c)), g(g(a)), g(g(c)), \ldots\}$

Obsérvese que si el lenguaje NO contiene símbolos de función entonces el universo de Herbrand es finito y es simplemente el conjunto de símbolos de constante. Por otro lado si el lenguaje contiene al menos un símbolo de función y un símbolo de constante el universo de Herbrand se vuelve infinito. Si en un lenguaje no hubiera constantes se agrega una para poder formar el universo de Herbrand.

Definición 2 (Base de Herbrand) *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{H}_\mathcal{L}$ su universo de Herbrand. La base de Herbrand $\mathcal{B}_\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}$ se define como el conjunto de fórmulas atómicas cerradas, es decir, el conjunto de fórmulas atómicas cuyos argumentos pertenecen al universo de Herbrand de $\mathcal{L}$.*

Ejemplo 1.2 Con respecto a los lenguajes del ejemplo anterior se tiene

1. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}_1} = \{Pa, Pb, Qa, Qb, Raa, Rbb, Rab, Rba\}$

2. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}_2} = \{Pc, Pa, Pfc, Pfa, Pgc, Pga, Pffa, Pfga, Pffc, Pfgc, Pgga, Pggc, \ldots\}$

En particular nos interesará construir el universo y base de Herbrand de un programa lógico, definidos como sigue:

Definición 3 *Dado un programa lógico $\mathbb{P}$ definimos el universo $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ y la base de Herbrand $\mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ de $\mathbb{P}$ como:*

$$\mathcal{H}_{\mathbb{P}} =_{def} \mathcal{H}_{\mathcal{L}(\mathbb{P})} \qquad\qquad \mathcal{B}_{\mathbb{P}} =_{def} \mathcal{B}_{\mathcal{L}(\mathbb{P})}$$

donde $\mathcal{L}(\mathbb{P})$ es el lenguaje de los símbolos de constante, función y predicado que figuran en $\mathbb{P}$.

Ejemplo 1.1 Si $\mathbb{P} = \{nat(0).,\ nat(s(X)) \text{:-}\ nat(X).\}$ entonces $\mathcal{L}(\mathbb{P}) = \{nat^{(1)}, 0, s^{(1)}\}$ y

$$\mathcal{H}_{\mathbb{P}} = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots\} \qquad \mathcal{B}_{\mathbb{P}} = \{nat(0), nat(s(0)), nat(s(s(0))), \ldots\}$$

Ejemplo 1.2 Si $\mathbb{P}$ es el programa lógico para caminos en una gráfica (como en la nota 11) entonces el lenguaje de $\mathbb{P}$ es $\mathcal{L}(\mathbb{P}) = \{a, b, c, d, e, f, edge^{(2)}, path^{(2)}\}$ y $\mathcal{H}_{\mathbb{P}} = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{P}} = \{edge(a,a), edge(a,b) \ldots, edge(f,e), edge(f,f), path(a,a), path(a,b) \ldots, path(f,e), path(f,f)\}$$

Definición 4 (Interpretación de Herbrand) *Decimos que una interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ de un lenguaje dado $\mathcal{L}$ es una interpretación o modelo de Herbrand si y sólo si se cumple lo siguiente:*

1. *$M = \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ es decir, el universo de $\mathcal{M}$ es el universo de Herbrand de $\mathcal{L}$.*
2. *Para todo símbolo de constante c, se cumple $\mathcal{I}(c) = c$.*
3. *Para todo símbolo de función $f^{(n)}$, se cumple $\mathcal{I}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(t_1, \ldots, t_n)$.*
4. *Para todo símbolo de predicado $P^{(n)}$ es un subconjunto de $P^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^n$*

Obsérvese que en una interpretación de Herbrand los símbolos de constante y de función se interpretan como ellos mismos y que lo único que no está determinado es la interpretación de los símbolos de predicado por esta razón a los modelos de Herbrand tambien se les llama modelos sintácticos.

1.1. Representación de modelos de Herbrand

Una manera útil de representar modelos de Herbrand es mediante subconjuntos de la base de Herbrand del lenguaje en cuestión. Dado un modelo de Herbrand $\mathcal{M}$, representamos a $\mathcal{M}$ mediante el subconjunto $B_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ de aquellas fórmulas atómicas que son verdaderas en $\mathcal{M}$. De esta manera, si la base es finita, es posible construir todos los modelos de Herbrand, y en el caso en que la base es infinita el número de modelos de Herbrand también, pero pueden enumerarse efectivamente como subconjuntos de la base.

Ejemplo 1.3 Si $\mathcal{L} = \{a, P^{(1)}, Q^{(1)}\}$ entonces

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = \{a\} \quad \mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{Pa, Qa\}$$

y existen cuatro interpretaciones o modelos de Herbrand para $\mathcal{L}$:

1. $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models Pa$ y $\mathcal{M}_1 \models Qa$
2. $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models Pa$ y $\mathcal{M}_2 \not\models Qa$

3. $\mathcal{M}_3$ tal que $\mathcal{M}_3 \not\models Pa$ y $\mathcal{M}_3 \models Qa$
4. $\mathcal{M}_4$ tal que $\mathcal{M}_4 \not\models Pa$ y $\mathcal{M}_4 \not\models Qa$

Cada modelo corresponde a un subconjunto $B_{\mathcal{M}_i}$ de la base como sigue:

1. $B_{\mathcal{M}_1} = \mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{Pa, Qa\}$ representa a $\mathcal{M}_1$
2. $B_{\mathcal{M}_2} = \{Pa\}$ representa a $\mathcal{M}_2$
3. $B_{\mathcal{M}_3} = \{Qa\}$ representa a $\mathcal{M}_3$
4. $B_{\mathcal{M}_4} = \varnothing$ representa a $\mathcal{M}_4$

Dado que cada subconjunto de $B \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ determina de manera única a un modelo de Herbrand $\mathcal{M}$, identificamos a $\mathcal{M}$ con B. Por ejemplo, el modelo $\mathcal{M}_2$ del ejemplo anterior, se define como $\mathcal{M}_2 = \{Pa\}$.

Con esta idea en mente, si deseamos verificar que una fórmula atómica A es verdadera en $\mathcal{M}$ basta ver que $A \in B_{\mathcal{M}}$

El siguiente lema nos dice cómo se evaluan los términos en una interpretación de Herbrand:

Lema 1 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación de Herbrand para $\mathcal{L}$, t un término con variables $x_1, \ldots, x_n$ y ν un estado de las variables tal que $\nu(x_i) = r_i$ donde $r_i \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ es decir, r_i es un término cerrado, para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces:*

$$\mathcal{I}_\nu(t) = t[x_1 := r_1, \ldots, x_n := r_n]$$

En particular si t es un término cerrado entonces $\mathcal{I}_\nu(t) = t$

Demostración. (Por inducción sobre los términos). Ejercicio. $\dashv$

El lema anterior nos dice que la interpretación de términos en un modelo de Herbrand coincide con aplicar una sustitución al término y que los términos cerrados se interpretan como ellos mismos.

2. El Teorema de Herbrand

El teorema de Herbrand es esencial para describir la semántica de programas lógicos, a continuación lo estudiamos con detalle.

Definición 5 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{K}$ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas cerradas y universales. El conjunto de instancias cerradas $\varphi\sigma$ o cerraduras universales, donde $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ pertenece a $\mathcal{K}$, se llama conjunto de instancias cerradas de $\mathcal{K}$ y se denota $IC(\mathcal{K})$.*

A continuación presentamos el Teorema Clásico de Herbrand enunciado de forma adecuada a nuestras necesidades.

Teorema 1 (de Herbrand) *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con al menos una constante y $\mathcal{K}$ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados universales. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{K}$ tiene un modelo.*
2. *$\mathcal{K}$ tiene un modelo de Herbrand.*
3. *$IC(\mathcal{K})$ tiene un modelo.*
4. *$IC(\mathcal{K})$ tiene un modelo de Herbrand.*

Demostración. Debido a que todo modelo de Herbrand es un modelo, las implicaciones $b \Rightarrow a$ y $d \Rightarrow c$ son triviales.
La válidez universal de la fórmula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi \rightarrow \varphi\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ hace inmediatas a las implicaciones $a \Rightarrow c$ y $b \Rightarrow d$. Así que basta probar la implicación $c \Rightarrow b$.
Sea $\mathcal{M}$ un modelo de $IC(\mathcal{K})$. Definimos una estructura de Herbrand $\mathcal{N} = \langle \mathcal{H_L}, \mathcal{I} \rangle$, para lo cual basta decir como se interpretan los símbolos de predicado, puesto que por definición los símbolos de constante y de función se interpretan como ellos mismos. Si P es un símbolo de predicado n-ario, entonces definimos:

$$P^{\mathcal{N}} = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid \mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n)\}$$

Obsérvese que, por construcción de $\mathcal{N}$, se cumple que:

$$\mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n) \text{ si y sólo si } \mathcal{N} \models P(t_1, \ldots, t_n)$$

es decir, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ validan a las mismas fórmulas atómicas cerradas. Dicho resultado se puede extender a cualquier fórmula cerrada libre de cuantificadores mediante inducción sobre fórmulas (ejercicio [1]).
Por último veamos que $\mathcal{N}$ es modelo de $\mathcal{K}$. Sea $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ una fórmula de $\mathcal{K}$. Queremos demostrar que $\mathcal{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$, lo cual es equivalente a mostrar que para cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H_L}$, $\mathcal{N} \models \varphi[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$. Pero esta última afirmación es equivalente, por lo recién observado a que para cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H_L}$, $\mathcal{M} \models \varphi[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$, lo cual es cierto puesto que $\varphi[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ pertenece a $IC(\mathcal{K})$ y por hipótesis, $\mathcal{M}$ es modelo de $IC(\mathcal{K})$. De manera que $\mathcal{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ por lo que $\mathcal{N}$ es un modelo de Herbrand de $\mathcal{K}$. $\dashv$

Es importante observar que el teorema de Herbrand sólo es válido para enunciados universales. Por ejemplo si $\mathcal{K} = \{Pa, \exists x \neg Px\}$ entonces $\mathcal{K}$ es un conjunto de fórmulas cerradas pero no universales y claramente tiene un modelo, digamos $M = \{0, 1\}$ con $\mathcal{I}(a) = 0$ y $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$, pero $\mathcal{K}$ no tiene un modelo de Herbrand pues el universo de Herbrand es $\mathcal{H_L} = \{a\}$ de manera que los únicos modelos de Herbrand son los representados por $\varnothing$ que corresponde a una interpretación donde Pa es falsa y por lo tanto no es modelo de $\mathcal{K}$; y el representado por $\{Pa\}$ que tampoco es modelo de $\mathcal{K}$ pues $\exists x \neg Px$ es falsa.

Dado que las cláusulas son enunciados universales, se tiene el siguiente

Corolario 1 *Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de cláusulas de Horn. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *$\mathcal{C}$ tiene un modelo.*
- *$\mathcal{C}$ tiene un modelo de Herbrand.*

En lo que resta de esa nota presentamos algunos resultados semánticos para programas lógicos de Horn.

2.1. Semática declarativa de programas lógicos

Debido a las formas de sus cláusulas, un programa lógico $\mathbb{P}$ siempre tiene un modelo en particular debido al teorema de Herbrand basta estudiar los modelos de Herbrand del programa $\mathbb{P}$. El significado declarativo del programa $\mathbb{P}$ consiste de todas las consecuencias lógicas de $\mathbb{P}$ y puede representarse con un modelo particular llamado el modelo mínimo de Herbrand de $\mathbb{P}$.

Construir la base de Herbrand de $\mathbb{P}$ es importante debido a la siguiente

[1] Hay que probar el siguiente

Lema 2 *Si φ es un enunciado sin cuantificadores entonces $\mathcal{M} \models \varphi$ syss $\mathcal{N} \models \varphi$.*

Proposición 1 *Si $\mathbb{P}$ es un programa lógico entonces $\mathbb{P}$ tiene un modelo de Herbrand*

Demostración. La base de Herbrand $\mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ representa al modelo que hace verdaderas a todas las fórmulas atómicas del lenguaje lo cual implica que todas las cláusulas de $\mathbb{P}$ son verdaderas debido a su forma (hechos o reglas). $\dashv$

De manera que cualquier programa lógico tiene al menos un modelo de Herbrand, enseguida veremos que existe un modelo de Herbrand mínimo con respecto a la contención.

Proposición 2 *Sea $\mathbb{P}$ un programa lógico. $\mathbb{P}$ tiene un modelo de Herbrand mínimo $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ definido por:*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}} = \bigcap\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \ \textit{ es modelo de Herbrand de } \ \mathbb{P}\}$$

Demostración. Sabemos que $\mathbb{P}$ tiene al menos un modelo de Herbrand representado por la base de Herbrand $\mathcal{B}_{\mathbb{P}}$. Es fácil ver que si $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ son modelos de Herbrand de $\mathbb{P}$ su intersección también lo es. De manera que el modelo mínimo de Herbrand $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ está bien definido. $\dashv$

Proposición 3 *Sea $\mathbb{P}$ un programa lógico. El modelo de Herbrand mínimo $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ se representa con el conjunto de átomos que son consecuencia lógica de $\mathbb{P}$. Es decir,*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}} \mid \mathbb{P} \models A\}$$

Demostración.
$\subseteq$). Sea $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$. Veamos que $\mathbb{P} \models A$. Si esto no sucediera entonces $\mathbb{P} \cup \{\neg A\}$ tendría un modelo y por el teorema de Herbrand tendría un modelo de Herbrand $\mathcal{N}$. Pero entonces como $\mathcal{N} \models \neg A$ mos que $A \notin \mathcal{N}$ pero por minimalidad $\mathcal{M}_{\mathbb{P}} \subseteq \mathcal{N}$ y entonces también $A \in \mathcal{N}$ lo cual es absurdo.
$\supseteq$). Sea A tal que $\mathbb{P} \models A$. Queremos ver que $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$. Como $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ es modelo de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P} \models A$ entonces $\mathcal{M}_{\mathbb{P}} \models A$, es decir, $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

Dado que $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ contiene exactamente a todos los átomos que son consecuencia lógica de $\mathbb{P}$ entonces este modelo corresponde realmente al significado intensional o estandar de $\mathbb{P}$. Es decir, la semántica declarativa de $\mathbb{P}$ está dada por $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

2.2. Procedimiento para hallar el modelo mínimo de Herbrand

Desde el punto de vista puramente matemático la semántica declarativa de un programa lógico ha quedado definida mediante el modelo mínimo. Sin embargo, en la práctica no es claro cómo construir directamente a $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, pues su definición involucra a una intersección generalmente infinita. A continuación veremos que existe una manera **mecánica** para construir el modelo mínimo.

Definición 6 *Dado un programa lógico $\mathbb{P}$, el operador de consecuencia inmediata $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}$ se define como sigue*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{P}}(\mathcal{K}) = \{P \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}} \mid P \text{ :- } Q_1, \ldots, Q_m \textit{ es instancia cerrada de una cláusula de } \mathbb{P} \textit{ y } Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{K}\}$$

donde $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{P}}$.

Definición 7 *Sea $\mathbb{P}$ un programa lógico. Definimos las iteraciones del operador de consecuencia inmediata $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}$ para $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ recursivamente como sigue:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0(\mathcal{K}) &= \mathcal{K} \\
\mathcal{T}_{n+1}(\mathcal{K}) &= \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(\mathcal{T}_n(\mathcal{K})) \\
\mathcal{T}_\omega(\mathcal{K}) &= \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n(\mathcal{K})
\end{aligned}$$

El modelo mínimo de Herbrand de un programa lógico puede obtenerse mediante las iteraciones del operador de consecuencia inmediata iniciando en el conjunto vacío, como lo asegura la siguiente

Proposición 4 *Sean $\mathbb{P}$ un programa lógico y $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ su mínimo modelo de Herbrand. Entonces $\mathcal{M}_{\mathbb{P}} = \mathcal{T}_{\omega}(\varnothing)$.*

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.1 Sea $\mathbb{P}$ el siguiente programa $\{p(X,a) \text{:- } q(X).\ p(X,Y) \text{:- } q(X), r(Y).\ q(a).\ r(b).\ q(b).\ r(c).\}$

- El lenguaje de $\mathbb{P}$ es $\mathcal{L}(\mathbb{P}) = \{a, b, c, p^{(2)}, q^{(1)}, r^{(1)}\}$
- El universo de Herbrand de $\mathbb{P}$ es $\mathcal{H}_{\mathbb{P}} = \{a, b, c\}$
- La base de Herbrand de $\mathbb{P}$ es

$$\mathcal{B}_{\mathbb{P}} = \{q(a), q(b), q(c), r(a), r(b), r(c), p(a,a), p(a,b), p(a,c), p(b,a), p(b,b), p(b,c), p(c,a), p(c,b), p(c,c)\}$$

- El modelo mínimo de Herbrand de $\mathbb{P}$ es:
  - $\mathcal{T}_0(\varnothing) = \varnothing$
  - $\mathcal{T}_1(\varnothing) = \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(\mathcal{T}_0(\varnothing)) = \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(\varnothing) = \{q(a), r(b), q(b), r(c)\}$
  - $\mathcal{T}_2(\varnothing) = \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(\mathcal{T}_1(\varnothing)) = \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(\{q(a), r(b), q(b), r(c)\})$
    $= \{q(a), r(b), q(b), r(c), p(a,a), p(b,a), p(a,b), p(a,c), p(b,b), p(b,c)\}$
  - $\mathcal{T}_3(\varnothing) = \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(\mathcal{T}_2(\varnothing)) = \mathcal{T}_2(\varnothing)$
- En el paso $n = 3$ la sucesión se estabiliza y concluimos

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}} = \mathcal{T}_{\omega}(\varnothing) = \{q(a), r(b), q(b), r(c), p(a,a), p(b,a), p(a,b), p(a,c), p(b,b), p(b,c)\}$$

2.3. Semática operacional de programas lógicos

El significado operacional de un programa lógico consiste en los resultados obtenidos al ejecutar el programa.

Definición 8 *El conjunto de éxito de un programa lógico $\mathbb{P}$ se define como*

$$\mathcal{E}_{\mathbb{P}} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}} \mid \mathbb{P} \cup \{?{-}A\} \text{ tiene una SLD-refutación } \}$$

La semántica operacional del programa $\mathbb{P}$ se define como el conjunto de éxitos $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$. Veamos un ejemplo

Ejemplo 2.2 Sea $\mathbb{P}$ el siguiente programa $\{p(f(X)) \text{:- } p(X).,\ p(a).,\ q(b).\}$. Entonces

- El lenguaje de $\mathbb{P}$ es $\mathcal{L}(\mathbb{P}) = \{a, b, p^{(1)}, q^{(1)}, f^{(1)}\}$
- El universo de Herbrand de $\mathbb{P}$ es $\mathcal{H}_{\mathbb{P}} = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots\}$
- La base de Herbrand de $\mathbb{P}$ es

$$\mathcal{B}_{\mathbb{P}} = \{p(a), p(b), q(a), q(b), p(f(a)), p(f(b)), q(f(a)), q(f(b)), \ldots\}$$

- Claramente las metas $?{-}p(a)$. y $?{-}q(b)$. tienen una SLD-refutación por lo tanto pertenecen a $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$.
- La meta $?{-}p(f(a))$. tiene éxito pues tenemos una SLD-refutación a partir de las instancias $p(f(a)) \text{:- } p(a)$. y $p(a)$. de las cláusulas del programa.
- Similarmente podemos verificar que $?{-}p(f^n(a))$. tiene éxito para cualquier $n \geq 0$. Más aún si una meta es éxitosa entonces es de esta forma (salvo $? - q(b)$).
- Por lo tanto el conjunto de éxitos es:

$$\mathcal{E}_{\mathbb{P}} = \{p(a), q(b)\} \cup \{p(f^n(a)) \mid n \geq 1\}$$

3. Equivalencia de ambas semánticas

Finalmente observamos la equivalencia de ambas semánticas. Esta equivalencia es corolario de ciertos resultados teóricos que dependen del teorema de Herbrand.

Proposición 5 *Sea $\mathbb{P}$ un programa lógico definido. La semánticas declarativa y operacional para $\mathbb{P}$ coinciden. Es decir,*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}} = \mathcal{E}_{\mathbb{P}}$$

De manera que toda consecuencia lógica atómica de $\mathbb{P}$ es un éxito de $\mathbb{P}$ y viceversa, todo éxito $G \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ es consecuencia lógica de $\mathbb{P}$, es decir, cumple $\mathbb{P} \models G$.

4. Incompletud e Incorrectud de Prolog

Debido a que las implementaciones de PROLOG no verifican las presencia de una variable en un término en la unificiación de $\{X, t\}$ las propiedades de correctud completud no son válidas como lo muestran los siguientes ejemplos:

- Incorrectud: PROLOG contesta que `true` a una meta que no es consecuencia lógica del programa:

  ```
  test :- p(X,X).

  p(Y,f(Y)).

  --------------------
  ?- test.
  true.

  ?- p(X,X).
  X = f(X).
  ```

- Incompletud: en el siguiente ejemplo `q` es consecuencia lógica del programa pero PROLOG se cicla y queda sin recursos sin poder contestar afirmativamente.

  ```
  p :- q.
  p :- r.
  q :- p.
  r.

  --------------------------
  ?- q.
  ERROR: Out of local stack
     Exception: (4,193,042) p ? abort
  % Execution Aborted
  ?-
  ```