Année Universitaire 2024-2025

Cours d'électrocinétique

Première année Génie électrique

Université **A**ube **N**ouvelle

Dr Lassina Gaël SAWADOGO

Chapitre 1 : Le courant électrique continu

Introduction

L'électricité est une forme d'énergie produite par la circulation de charges électriques dans un corps conducteur ou semi-conducteur. Certains corps, en particulier les métaux (aluminium, cuivre...) sont de très bons conducteurs parce qu'ils possèdent des électrons qui peuvent se libérer de l'attraction du noyau de l'atome pour participer à la conduction électrique. Dans d'autres matériaux appelés isolants, les charges électriques ne peuvent pas circuler.

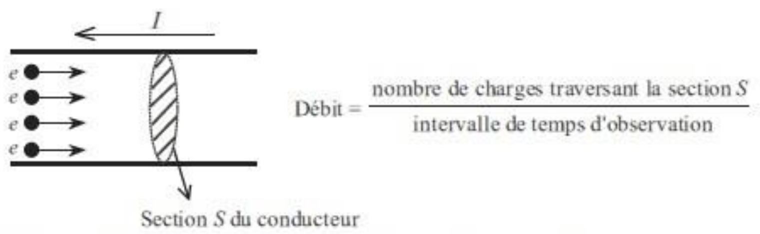
L'étude du mouvement de ces charges électriques et des phénomènes qui s'y rattachent est *l'électrocinétique*. En réalité, la mise en mouvement des charges dans un conducteur n'est pas instantanée. Le champ électromagnétique se propage le long du conducteur à une vitesse proche de la vitesse de la lumière qui est : $c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1} (mètres par seconde).

I. Courant électrique

1) Intensité du courant électrique

On appelle courant électrique, tout déplacement ordonné de particules chargées.

Soient *S* la surface de base d'un conducteur filiforme et *dq* la charge électrique qui traverse cette section pendant l'instant *dt* :



Déplacement des charges négatives et sens du courant dans un conducteur.

Figure : Intensité du courant électrique

On appelle intensité du courant électrique traversant la surface *S* à l'instant *t*, la grandeur algébrique :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

L'intensité du courant électrique se définit comme *un débit de charges* à travers une surface. Il s'exprime en coulomb par seconde (C/s) ou en ampère (A).

L'intensité du courant électrique tout comme la charge électrique est une ***grandeur algébrique*** pouvant être positive ou négative. Si elle est constante au cours du temps, on dira que le courant est continu.

2) Charge électrique et courant électrique

La charge élémentaire « $-q$ » est celle de l'électron. Il s'agit d'une charge négative exprimée en coulomb (C) et qui vaut : $-q = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Les charges en mouvement peuvent aussi être positives (ions positifs), mais pour les conducteurs, ce sont souvent les électrons qui contribuent majoritairement à la conduction électrique.

Supposons maintenant un conducteur de section dS : (par exemple d$S = 1$ cm^2), qui contient des porteurs de charges mobiles. Les collisions que subissent ces porteurs de charges sur les imperfections du réseau cristallin du conducteur, leur communiquent un mouvement désordonné dont la résultante du point de vue de transport de l'électricité, est nulle.

La batterie de l'exemple précédent est à l'origine de l'établissement d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ qui permet le déplacement des charges électriques avec une vitesse proportionnelle à $\overrightarrow{E}$. Cette vitesse notée $\overrightarrow{v}$ est égale à :

$$\overrightarrow{v} = \mu . \overrightarrow{E} \; (\mu \text{ représente la mobilité des charges exprimée en m}^2.\ \text{V}^{-1}.\ \text{s}^{-1})$$

En un intervalle de temps égal à 1 seconde, un certain nombre de charges « N » traversent la surface considérée « $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$».

$$N = \overrightarrow{v}.n.\overrightarrow{\mathrm{d}S}.\,\mathrm{d}t = \overrightarrow{v}.n.1\ \text{cm}^2.1\ \text{s}$$

n étant la densité des charges ; c'est-à-dire le nombre de porteurs par unité de volume. La charge électrique qui traverse la section en 1 seconde devient :

$$\mathrm{d}Q = qN = q.\overrightarrow{v}.n.\overrightarrow{\mathrm{d}S}.\,\mathrm{d}t$$

Le flux d'électrons qui circule dans le conducteur est appelé courant électrique I. Son intensité s'exprime en ampère (A).

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{J}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Généralement, « dQ » représente la quantité de charges (en coulomb) traversant la section « $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ » pendant l'intervalle de temps « dt » (en seconde).

La densité de courant est donc le courant par unité de surface $j = I/S$ unité (A.m^{-2})

Inversement, l'intensité du courant électrique à travers une surface S est le flux du vecteur densité de courant à travers S.

II. Tension et potentiel

1) Définitions

Au repos, les charges électriques d'un conducteur sont en mouvement désordonné sous l'effet de l'agitation thermique. Cependant, ce mouvement ne se traduit pas par un déplacement global susceptible de générer un courant électrique.

Pour mettre ces charges en mouvement dans une direction donnée, il est nécessaire d'appliquer une *différence de potentiel (d.d.p)* aux bornes du conducteur. Cette *différence de potentiel (d.d.p)* va donner naissance à un champ électrique à l'intérieur du conducteur. En présence de champ électrique, les électrons du conducteur seront soumis à une force électrique et auront un mouvement ordonné qui donnera naissance à un courant électrique.

La différence de potentiel est appelée *la tension électrique*. On la note *U* et elle s'exprime en *Volt.* Ainsi la tension U_{AB} entre deux points A et B d'un conducteur est égale à la différence de potentiel entre ces deux points A et B :

$U_{AB} = V_A - V_B$

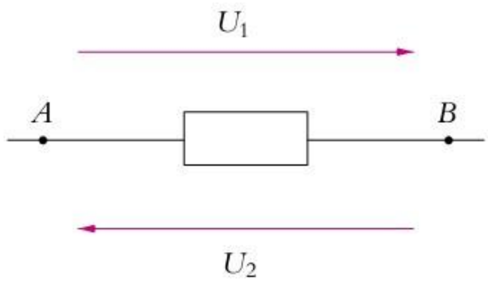


Figure : Représentation de la tension

On indique toujours une tension sur un schéma par une flèche dont le sens est très important. En effet, il s'agit du choix de l'orientation de la tension soit $U_1 = V_B - V_A$ soit $U_2 = V_A - V_B$.

Ce choix, comme celui de l'orientation de l'intensité, est parfaitement arbitraire mais permet de déterminer le point dont le potentiel est le plus élevé. Ainsi si $U_2 > 0$ alors le point A a un potentiel plus élevé que le point B.

2) Masse ou référence de potentiel

La tension électrique peut être mesurée expérimentalement grâce à un voltmètre ou un oscilloscope par contre aucun appareil ne permet d'accéder à la mesure du potentiel en un point donné.

Le potentiel est un état électrique dont la valeur en un point est définie à une constante près.

Pour fixer cette constante, on choisit arbitrairement une référence de potentiel nul, qu'on appelle la ***masse***.

Pour des raisons de sécurité, on relie la carcasse des appareils à la ***Terre***.

Souvent la Terre est également reliée à une borne de l'appareil : la masse est alors prise à la Terre.

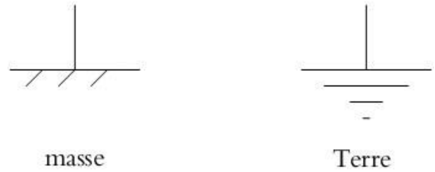


Figure : Symboles de la masse et de la Terre

IV. Dipôles

1) Définition

On appelle *dipôle électrocinétique* ou tout simplement *dipôle* tout système relié à un circuit électrique extérieur par deux bornes.

Quand on insère ce dipôle dans un circuit, une intensité électrique traverse en général ce dipôle et une tension s'installe à ses bornes.

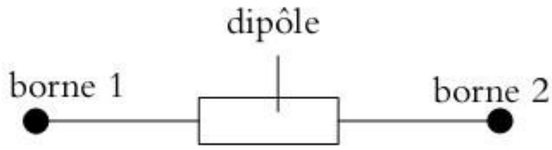


Figure 5.5 Définition d'un dipôle

2) Caractéristique d'un dipôle

Lorsque l'on souhaite tracer la caractéristique d'un dipôle, on s'intéresse à la **fonction u=f(i)** (caractéristique tension-courant). Si cette fonction est une **droite**, on parle de **dipôle linéaire**.

3) Dipôle actif ou passif

Un **dipôle passif** est un dipôle qui convertit toute l'énergie électrique qu'il reçoit en énergie thermique (conducteur ohmique, diode, ...).

Sa caractéristique passera forcément par l'origine du repère.

Un **dipôle actif** fournit à l'extérieur de l'énergie thermique et une autre forme d'énergie :

- Un générateur fournira de l'énergie thermique et de l'énergie électrique ;
- Un récepteur comme un moteur fournit de l'énergie thermique et de l'énergie mécanique à partir d'énergie électrique.

La caractéristique de ces dipôles ne passe pas par l'origine du repère.

V. Conventions récepteur et générateur

Il existe deux possibilités d'orientations relatives de la tension et de l'intensité au niveau d'un dipôle : de même sens ou de sens opposé.

Ces deux orientations relatives conduisent à deux conventions possibles :

- La *convention « récepteur »* où l'intensité I et la tension U sont choisies de sens opposé,
- La *convention « générateur »* où l'intensité I et la tension U sont choisies de même sens.

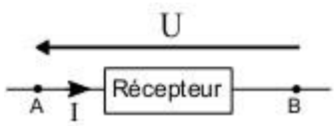


Figure a Convention récepteur

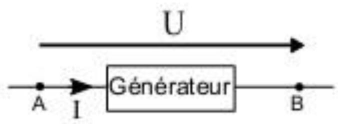


Figure b Convention générateur

VI. Conducteurs ohmiques

1) Caractéristique

Un conducteur ohmique est un dipôle qui vérifie la loi d'Ohm en convention récepteur :

$U=RI$

R est appelé résistance, elle est positive et s'exprime en ohms, de symbole Ω.

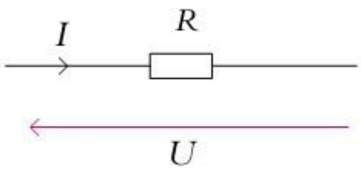


Figure : Symbole d'une résistance

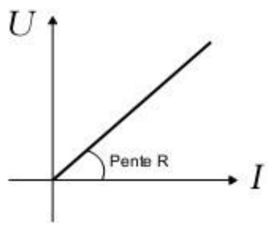


Figure : Caractéristique courant-tension

On peut également définir la conductance G comme l'inverse de la résistance : $G = 1/R$.

G s'exprime en Ω^{-1} ou en siemens, de symbole S. En convention récepteur, la loi d'Ohm s'écrit aussi : $I=GU$.

On peut représenter cette relation en traçant l'intensité I traversant la résistance en fonction de la tension à ses bornes (on dit qu'on trace la caractéristique courant-tension de la résistance).

2) Effet Joule

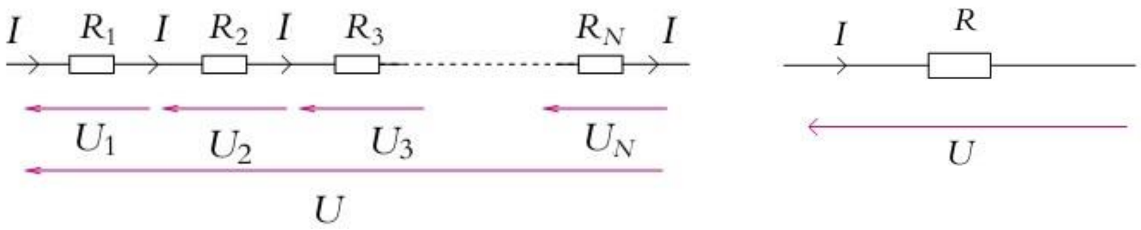
On appelle effet Joule la dissipation de l'énergie électrique reçue par énergie thermique dans un dipôle.

Le conducteur ohmique dissipe sous forme de chaleur la puissance : $P = R \times I^2$ou $P = \frac{U^2}{R}$.

3) Association de conducteurs ohmiques

3.1 Association en série

Objectif : N conducteurs ohmiques associés en série de résistances $\boldsymbol{R_i}$ à remplacer par une résistance unique $\boldsymbol{R_{éq}}$



$$\boldsymbol{U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_N = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \cdots + R_N I}$$

Or $U=RI_{eq}$ **donc**

$$\boldsymbol{R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N = \sum_{i=1}^{N} R_i}$$

3.2 Diviseur de tension

Objectif : on soumet l'association en série de deux résistances à une tension Ve et on cherche la tension aux bornes de chacune des résistances.

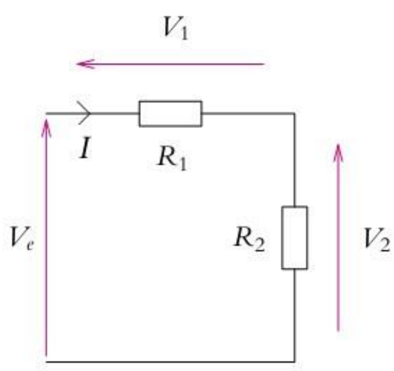


Figure : Diviseur de tension

Les expressions des tensions en fonction du courant parcourant les résistances sont :

$$\begin{cases} U_1 = R_1 I \\ U_2 = R_2 I \\ U_e = (R_1 + R_2) I \end{cases}$$

En faisant le rapport des expressions, on trouve :

$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_e$ et

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e$$

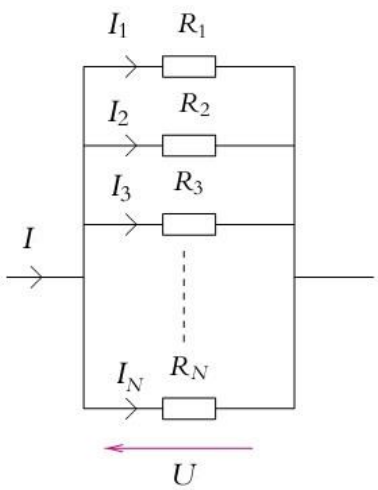
Les tensions *U₁* et *U₂* sont des fractions de la tension totale *Ve*, ce qui explique la dénomination « diviseur de tension » donnée à ce circuit.

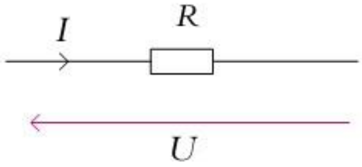
La relation générale pour la division de la tension pour N résistance est :

$$U_i = \frac{R_i}{R_{eq}} U_e$$

3.3 Association en parallèle

Objectif : N conducteurs ohmiques associés en série de résistances ***R_i*** à remplacer par une résistance unique ***$R_{éq}$***





On a la relation :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_N = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \cdots + \frac{U}{R_N} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}\right) U$$

Or $I = \frac{U}{R_{eq}}$ donc $\frac{1}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}\right) = \boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$

3.4 Diviseur de courant

Objectif : on soumet l'association en parallèle de deux résistances à un courant d'intensité totale I et on cherche l'intensité parcourant chacune des résistances.

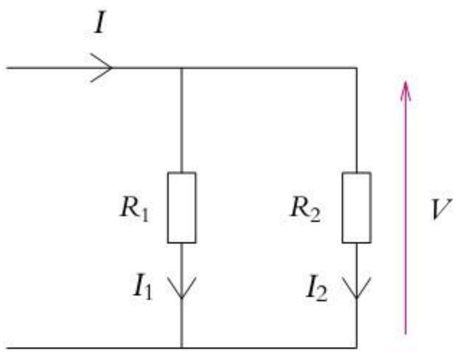


Figure : Diviseur de courant

En appliquant la loi d'Ohm on a

: $U = R_{eq} I = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2}$I or $\begin{cases} I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{cases}$

Les intensités I_1 et I_2 sont des fractions de l'intensité totale I, ce qui explique la dénomination « diviseur de courant » donnée à ce circuit.

La relation générale pour la division de la tension pour N résistance est :

$$I_i = \frac{R_{eq}}{R_i} I$$

3.5 Transformation de Kennely ou transformation triangle-étoile

On considère le triangle formé des résistances R_{12}, R_{13}, R_{23}. On peut remplacer le montage triangle par un montage en étoile constitué de 3 résistances r_1, r_2 *et* r_3 branchées également entre les point A_1, A_2, A_3 de telle sorte que les 2 montages soient équivalents.

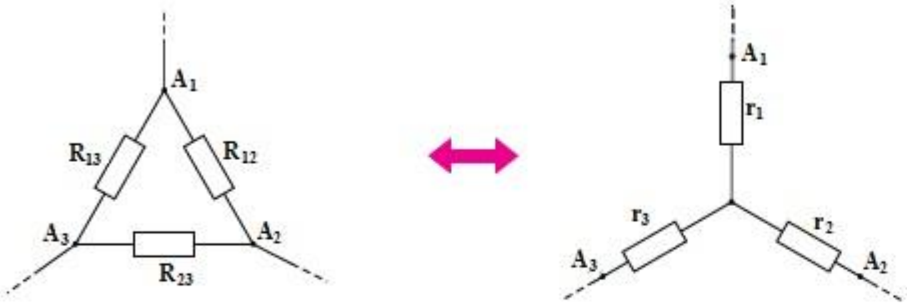


Figure 5.12 Transformation triangle-étoile

Objectif : on cherche les 3 résistances r_1, r_2 *et* r_3 du montage étoile en fonction des 3 résistances R_{12}, R_{13}, R_{23} du montage triangle.

$$\boldsymbol{r_1 = \frac{R_{12}.R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}}; \qquad \boldsymbol{r_2 = \frac{R_{12}.R_{32}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}}; \qquad \boldsymbol{r_3 = \frac{R_{23}.R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}}$$

Applications

On considère le montage suivant :

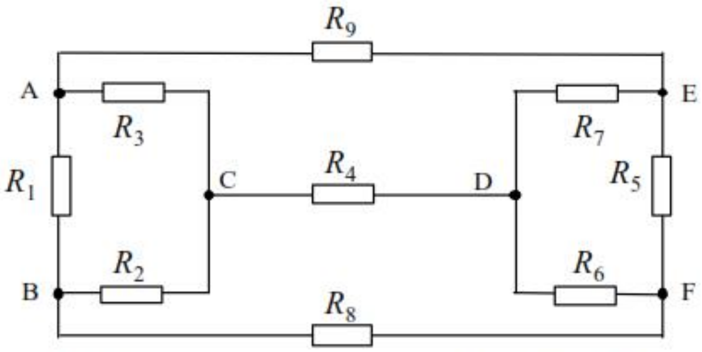


Figure 2.27 Circuit électrique comportant 9 résistances.

Déterminer la résistance équivalente entre les points A et E.

Application numérique : $R_1 = R_5 = 2\ \text{k}\Omega$, $R_3 = R_7 = 3\ \text{k}\Omega$, $R_2 = R_6 = 5\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 1\ \text{k}\Omega$ $R_8 = R_9 = 8\ \text{k}\Omega$.

4) Générateur idéal de tension

Générateur idéal de tension = générateur qui délivre une tension constante quel que soit l'intensité débitée.

Tension délivrée = force électromotrice (f.é.m.), notée E et unité en Volt (V) Sa caractéristique a pour équation : E=U

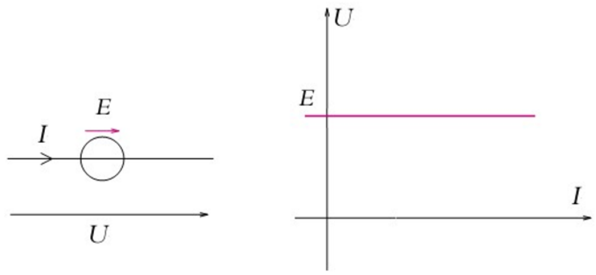
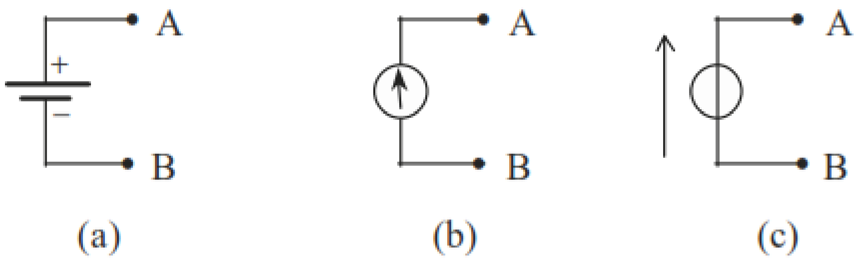


Figure : Générateur idéal de tension



Différents symboles pour une source de tension

5) Générateur idéal de courant

Générateur idéal de courant = générateur qui délivre une intensité constante quel que soit la tension à ses bornes.

Courant délivré = courant de court-circuit ou courant de Norton, noté I_N et unité en Ampère (A).

Sa caractéristique a pour équation : $I=I_N$

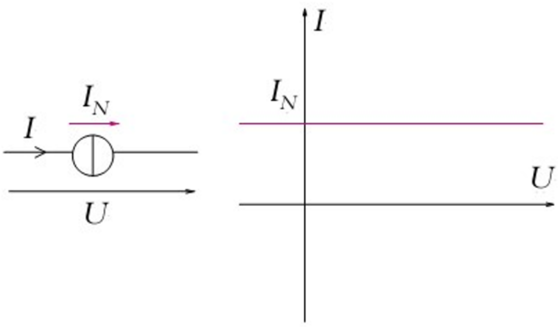
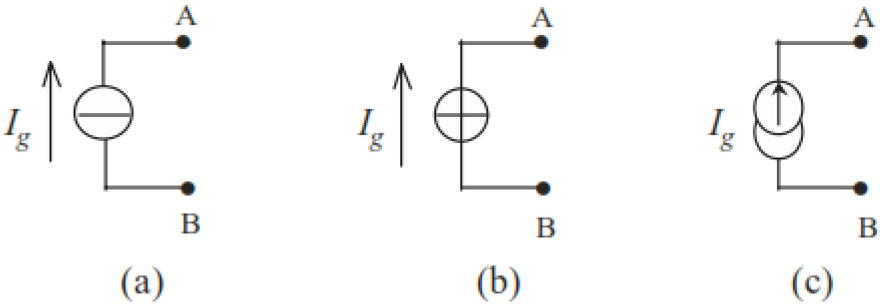


Figure : Générateur idéal de courant



Nouveaux symboles (a) et (b) et ancien symbole (c) d'une source de courant

Remarque

Tension de circuit ouvert : Si I = 0 alors U = E : tension de circuit ouvert. C'est la plus grande tension disponible aux bornes d'un générateur de tension.

Courant de court-circuit : Si U = 0 alors $I_{cc} = \frac{E}{r}$. C'est le plus grand courant que le générateur de tension peut délivrer à un circuit.

VIII. Récepteurs actifs

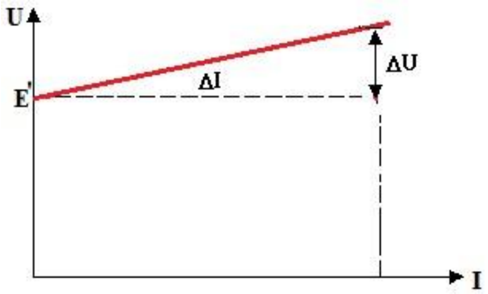
Un récepteur actif est un dipôle actif qui absorbe de l'énergie électrique et la restitue sous une autre forme d'énergie (chimique, mécanique…)

Il existe deux types de récepteurs actifs :

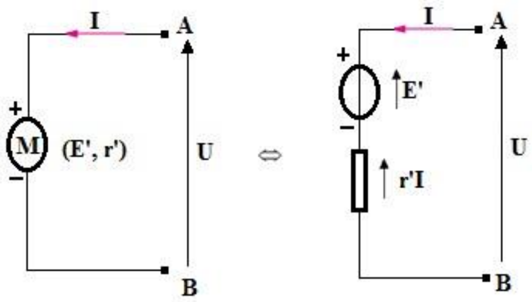
- **Les récepteurs polarisés** dont on connaît les bornes (batterie en charge par exemple).
- **Les récepteurs non polarisés** pour lesquels le sens de la polarisation est imposé par le sens du courant (cuve à électrolyse, moteur..).

Le choix du sens du courant dans la branche contenant le récepteur impose la polarité.

Caractéristique *I-V* d'un récepteur actif



Modèle équivalent de Thévenin **(ou** modèle série) d'un récepteur actif est le suivant :



A partir de la caractéristique du récepteur on peut écrire : $\boxed{U = E' + r\,I'}$.

E' force contre électromotrice du récepteur et ' s'exprime en (V), ***r*** la résistance interne du récepteur en (Ω).

Chapitre 2 : Méthodes de résolution des circuits linéaires en courant continu

Introduction

Ce chapitre sera l'occasion de définir les lois de l'électrocinétique qui permettent de déterminer les tensions et les courants dans un circuit quelconque.

I. Lois de Kirchhoff

1) Terminologie des circuits

- Un *dipôle* est un élément de circuit relié au reste du circuit par deux bornes.
- Une *branche* est un ensemble de dipôles reliés par des fils de connexion et disposés en série c'est-à-dire que chaque borne d'un dipôle n'est reliée qu'à un seul autre dipôle.
- Un *réseau* est l'ensemble des éléments d'un circuit électrique.
- Un *nœud* est un point où se rejoignent au moins trois branches.
- Une *maille* est un ensemble de branches se refermant sur elles-mêmes.

Sur la figure suivante, on a représenté une portion de circuit. Les fils dont une extrémité est libre sur le schéma sont en fait reliés à une partie du réseau non représentée.

- AB, BC, CD, DE, EA, BF, FG, GH et HC sont des branches.
- A, B, C, D, E, F, G et H sont des nœuds.
- ABCDEA, BFGHCB et ABFGHCDEA sont des mailles

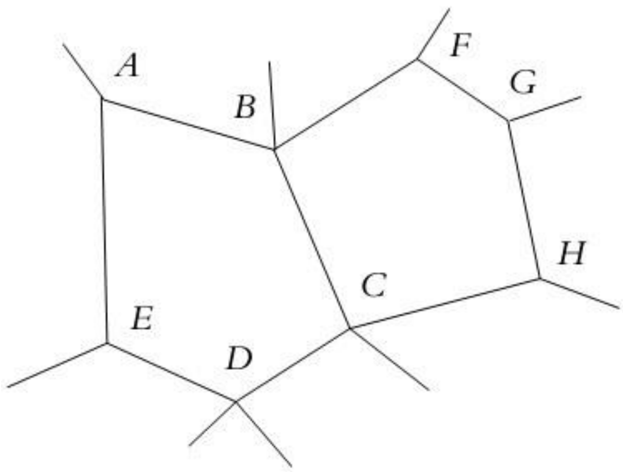


Figure : Partie d'un circuit électrique

2) Loi des nœuds

Dans le cas général, en utilisant la notation mathématique classique concernant « la somme », si nous supposons n branches accordées à un nœud, dont n_1 branches correspondent à des courants entrants et n_2 branches correspondent à des courants sortants, la loi des nœuds s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \quad \text{Il s'agit d'une somme algébrique .}$$

Nous pouvons aussi écrire la loi des nœuds :

$$\sum_{e=1}^{n_1} I_e = \sum_{s=1}^{n_2} I_s$$

L'indice « e » est pour le courant entrant et l'indice « s » est pour le courant sortant.

Exemple :

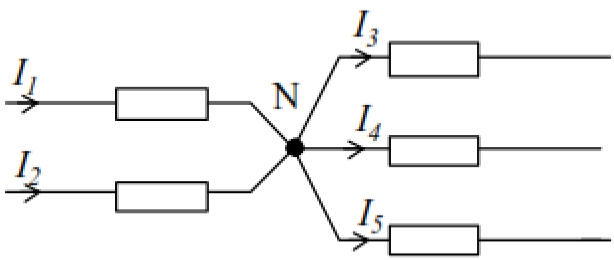


Figure : Nœud d'un circuit

$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$

Ou encore, la somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent. **$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$**

3) Loi des mailles

3.1 Loi des mailles

La somme algébrique des tensions le long d'une maille comportant n branches est nulle :

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k U_k = 0$$

Avec $\varepsilon_k = 1$ si la tension U_k est dans le sens positif choisi et $\varepsilon_k = -1$ si la tension U_k est dans le sens opposé au sens positif choisi.

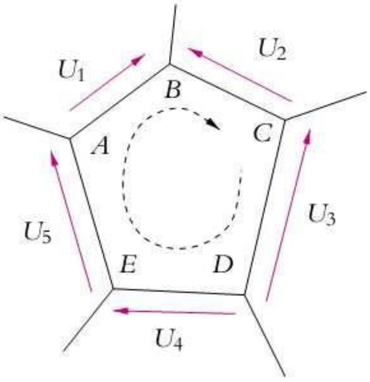


Figure : Maille à cinq branches

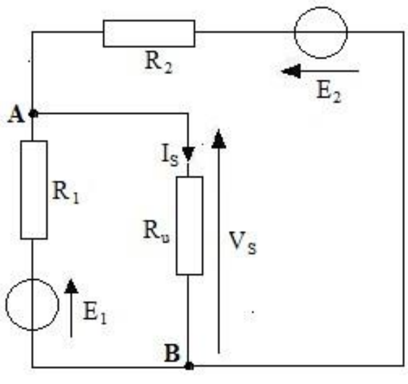
En pratique, on choisit un sens positif représenté par la flèche en pointillés et on obtient la relation suivante :

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 = 0$$

Application 1

Le montage de la figure ci-dessous comporte deux générateurs parfaits $E_1 = 10V$, $E_2 = 7$ V et trois résistances $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$ et $R_u = 1k\Omega$.

Déterminer la tension V_S et l'intensité I_S



3.2 Autre formulation de la loi des mailles

Pour une branche quelconque, on a :

$$V_A - V_B = \sum R_i I_i - \sum \varepsilon E_i \quad \text{(loi d'Ohm généralisée)}$$

Pour une maille on : $\sum R_i I_i = \sum \varepsilon E_i$

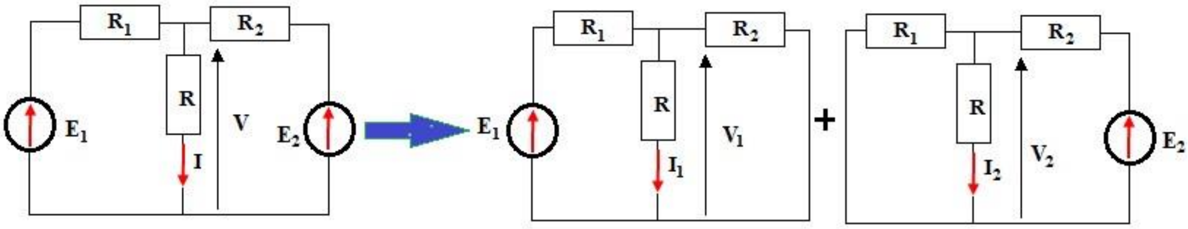
Avec comme convention :

- Les RI sont comptés positivement si le sens de parcours de la maille et le courant dans la branche sont identique et négativement dans le cas contraire.
- ε = ***+1*** si on sort du générateur ou du récepteur par la borne positive, ε = ***-1*** si on sort par la borne négative.

II. Théorème de superposition

1) Enoncé

Dans un réseau linéaire alimenté par plusieurs sources indépendantes, l'intensité du courant circulant dans une branche (respectivement la tension entre 2 points) est la somme algébrique des intensités



des courants (respectivement des tensions) dues à chaque source dans cette branche, les autres sources autonomes étant rendues passives.

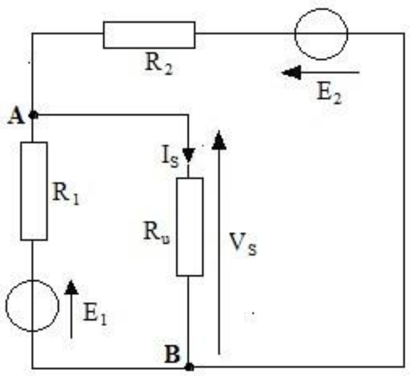
$I = I_1 + I_2$ et $V = V_1 + V_2$

Remarque : *Passiver une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.*

Application

Le montage de la figure ci-dessous comporte deux générateurs parfaits E_1 = 10V, E_2 = 7V et trois résistances R_1 = 1kΩ, R_2 = 1kΩ et R_u = 1kΩ.

Déterminer la tension V_S et l'intensité I_S



III. Théorème de Millman

On considère un nœud **A** d'un circuit auquel aboutissent *k* branches et vers lequel convergent tous les courants $\boldsymbol{I_k}$ des *k* branches. Les potentiels $\boldsymbol{V_i}$ des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un *<u>même potentiel de référence</u>* $\boldsymbol{V_{réf}}$. $\boldsymbol{R_i}$ est la résistance de la branche *i* et $\boldsymbol{G_i}$ sa conductance. On veut calculer le potentiel au point A en fonction des $\boldsymbol{R_i}$ et $\boldsymbol{V_i}$.

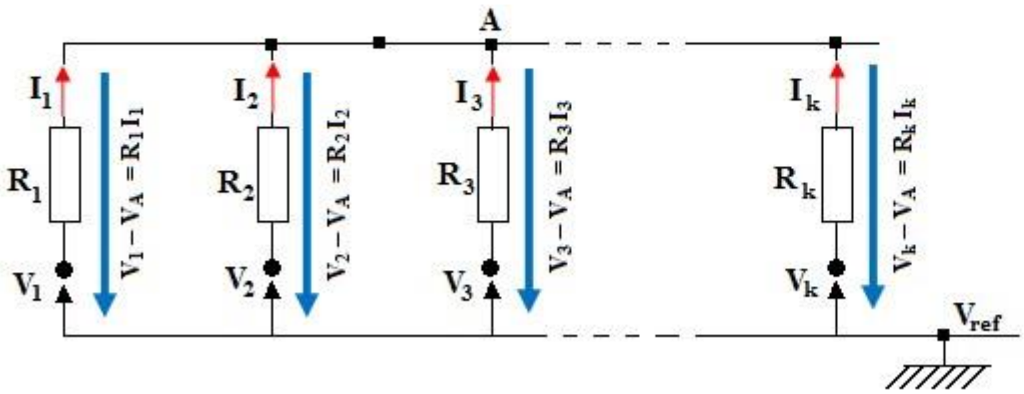


Figure : Loi des nœuds en termes de potentiels

soit

La loi des nœuds au point ***A*** s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k} I_i = I_1 + I_2 + \ldots + I_k = 0 \quad \text{or} \quad I_k = \frac{V_k - V_A}{R_k}$$

donc

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \ldots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

A partir de l'équation précédente on peut écrire que :

$$V_A = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + ... + \frac{V_k}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_k}} \qquad V_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{V_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i}}$$

Remarque :

Le théorème de Millman n'est qu'une façon particulière d'exprimer la loi des nœuds.

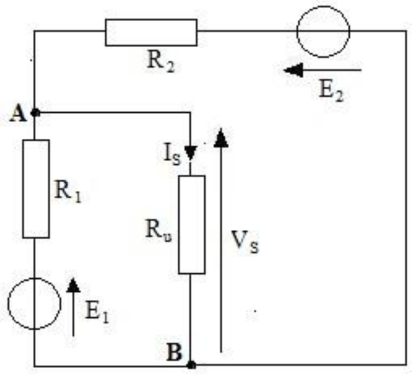
Lorsque le circuit comporte des générateurs de tension et de courant, le théorème de Millman s'écrit :

$$V_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{E_i}{R_i} + I_{Ni}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i}}$$

Application 1

Le montage de la figure ci-dessous comporte deux générateurs parfaits E_1 = 10V, E_2 = 7V et trois résistances R_1 = 1kΩ, R_2 = 1kΩ et R_u = 1kΩ.

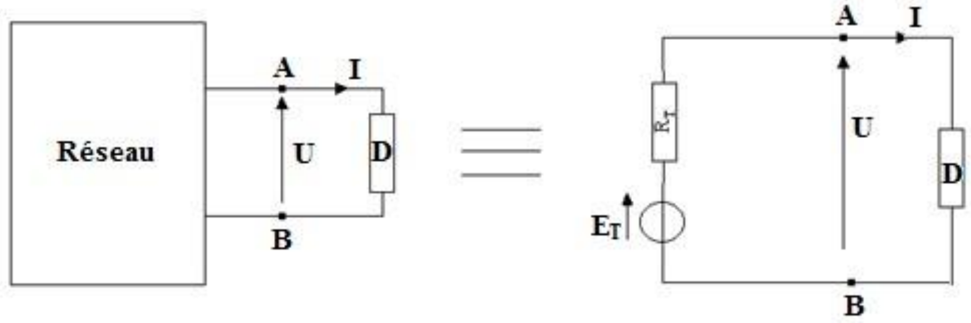
Déterminer la tension V_S et l'intensité I_S



IV. Théorème de Thevenin

1) Enoncé

Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par un générateur de tension de f.é.m E_T et de résistance interne R_T.

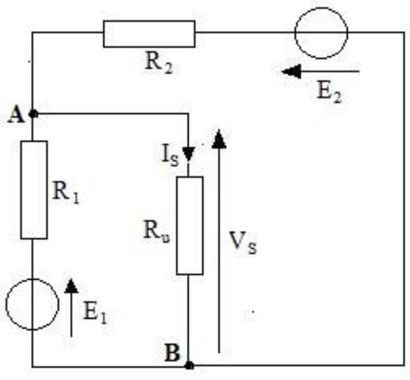


- E_T est la tension mesurée à vide entre A et B
- R_T est la résistance mesurée entre A et B quand D est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont remplacés par leurs résistances internes (les f.é.m. sont remplacées par des court-circuits et les sources de courant sont enlevées et toute branche qui en contenait une reste ouverte)

2) Application

Le montage de la figure ci-dessous comporte deux générateurs parfaits E_1 = 10V, E_2 = 7V et trois résistances R_1 = 1kΩ, R_2 = 1kΩ et R_u = 1kΩ.

Déterminer la tension V_S et l'intensité I_S

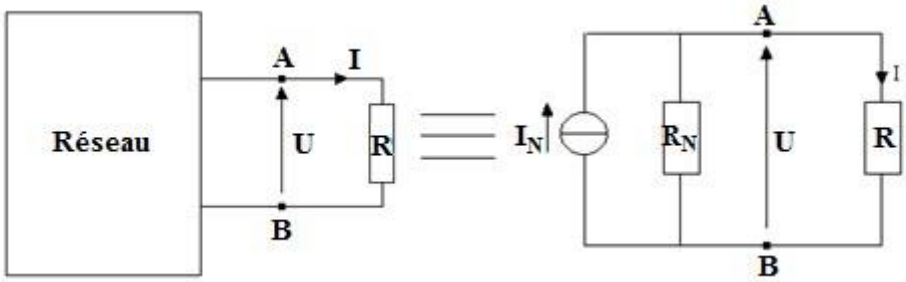


V. Théorème de Norton

1) Enoncé

Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par une source de courant d'intensité

I_N et de résistance interne R_N.

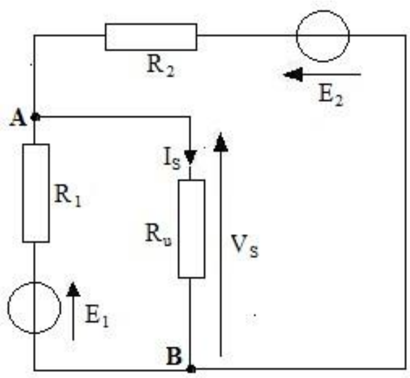


- I_N est le courant de court-circuit entre A et B
- R_N est la résistance mesurée entre A et B lorsque la résistance R est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont passivés (remplacés par leurs résistances internes).

2) Application

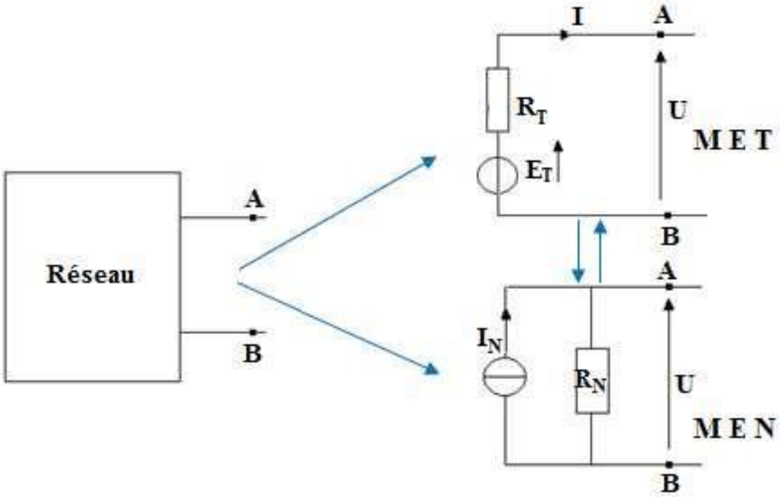
Le montage de la figure ci-dessous comporte deux générateurs parfaits E_1 = 10V, E_2 = 7V et trois résistances R_1 = 1kΩ, R_2 = 1kΩ et R_u = 1kΩ.

Déterminer la tension V_S et l'intensité I_S



Remarque

- Le théorème de Norton est la transformation duale du théorème de Thevénin.
- La connaissance d'un modèle équivalent permet la déduction immédiate du modèle dual car $R_N = R_T$ et $E_T = R_T \cdot I_N$.



La source de tension (E_T, R_T) est remplacée par une source de courant (I_N, R_N).

$$I_N = \frac{E_T}{R_T} = \frac{E_T}{R_N} = E_T \cdot G_N$$

Chapitre 3 : Courant électrique en régime alternatif sinusoïdal.

I. Rappels sur les nombres complexes

1. Définition

Un nombre complexe s'écrit sous la forme de Z = a + ib avec $i^2 = -1$

- a = Re (z)
- b = Im (z)
- si a = 0 → z ϵ i IR
- b = 0 → z ϵ IR

2. Propriétés

a +ib = 0 → $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

a +ib = a'+ib' → $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

<u>CONJUGAISON</u>

Z = a + ib conjugaison $\bar{Z}$= a – ib

<u>PROPRIETES</u>

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}\ (z \neq 0)$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ n ϵ IN*
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$
- z +$\bar{z}$ = 2a = 2 IR(z)
- z - $\bar{z}$ = 2Im(z) = 2ib
- z x $\bar{z}$ = $a^2 + b^2$ = $IR(z)^2 = Im(z)^2$
- Si z = - $\bar{z}$ → z ϵ iIR
- Si z = $\bar{z}$ → z ϵ IR

3. Nombres complexes et géométrie

Z = a + ib

<u>MODULE</u>

z = a + ib $module\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

<u>INTERPRETATION GEOMETRIQUE</u>

Z affixe du point M alors on a $|z|$ = OM

- A et B deux points du plan d'affixe z_A et z_B

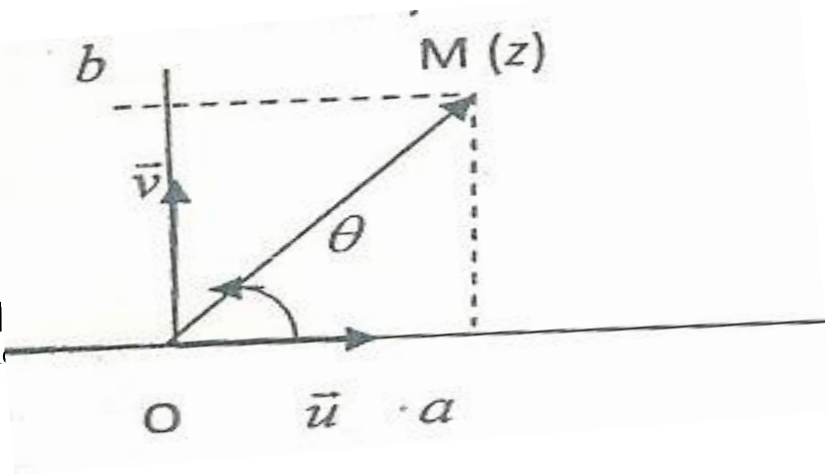
$|Z_A - Z_B|$ = $|Z_B - Z_A|$ =AB

<u>PROPRIETES</u>

- $|Z\ X\ Z'|$ = $|Z|$ x $|Z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $|z + z'| \leq |z|$ + $|z'|$
- $|z|$ = $|-z|$ = $|\bar{z}|$
- $|z^n|$ = $|z|^n$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

<u>ARGUMENT</u>

Argument de z → arg (z)
Z = a + ib → M (a,b)



Arg (z) = θ + 2kπ ou arg(z) = $\theta[2\pi]$
Si $\theta\ \epsilon\ ]-\pi;\pi]$ alors on note l'argum

<u>PROPRIETE</u>

- arg (z x z') = $[\arg(z) + \arg(z')][2\pi]$
- arg ($\bar{z}$) = - arg (z) $[2\pi]$
- arg (-z) = π + arg (z) $[2\pi]$
- arg ($\frac{1}{z}$) = - arg (z) $[2\pi]$
- arg (z^n) = n arg(z) $[2\pi]$
- Si z = z' → $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')[2\pi] \end{cases}$
- On cherche le θ en posant $\begin{cases} \cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} \\ sin\theta = \frac{Im\ (z)}{|z|} \end{cases}$

4. Forme trigonométrique et exponentielle

- z = $|z|(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$ F.trigo
- z = $|z|e^{i\theta}$(avec $e^{i\theta}$= cos θ + i sin θ) F.expo

<u>OPERATIONS</u>

Soit z = r$e^{i\theta}$ et z' = r'$e^{i\theta'}$

- $\bar{z}$ = r$e^{-i\theta}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
- zz' = rr'$e^{i(\theta + \theta')}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

FORMULE DE MOIVRE

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

$\rightarrow$ $(\cos\theta + isin\ \theta)^n$ = cosn θ $+isin\ \theta$

FORMULE D'EULER

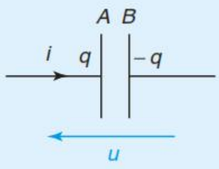
$$\begin{cases} cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

II. Quelques notions fondamentales

1. Le condensateur

Un condensateur est un dipôle constitué de deux conducteurs (les armatures) séparés par un matériau isolant.
Les condensateurs sont faiblement conducteurs. Dans les exercices, en l'absence d'indication particulière, un condensateur est considéré comme idéal, c'est-à-dire qu'aucun courant ne traverse le matériau isolant.
La capacité *C* d'un condensateur lie la tension aux bornes et la charge des armatures.

$q = Cu$ | q charge de l'armature A en coulomb (C).
$u = v_A - v_B$ tension aux bornes en volt (V).
C capacité du condensateur en farad (F).



En convention récepteur :

$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$ | q charge d'une armature en coulomb (C).
i intensité du courant arrivant sur l'armature portant la charge q en ampère (A).

Un condensateur stocke de l'énergie électrique entre ses armatures. Le stockage est réversible.

$$w_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

u tension aux bornes du condensateur en volt (V).
w_C énergie stockée dans le condensateur en joule (J).
C capacité du condensateur en farad (F).

Démonstration de l'expression de l'énergie à partir de la puissance p reçue :

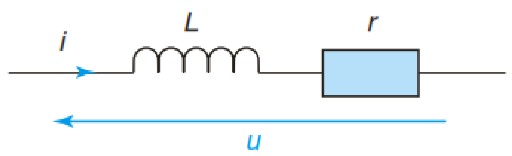
$$p = ui = \frac{\mathrm{d}w_C}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}w_C = uC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u^2}{2}\right) \Rightarrow w_C = \frac{1}{2}Cu^2.$$

(L'énergie est nulle quand la tension est nulle.)
Une variation instantanée de l'énergie stockée impliquerait une puissance infinie, ce qui est physiquement impossible.

L'énergie, la tension aux bornes et la charge d'un condensateur sont des fonctions continues du temps ; elles ne peuvent pas subir de discontinuité.

2. La bobine

Une bobine est un dipôle constitué d'un enroulement de fil conducteur autour d'un matériau magnétique. Elle a toujours une résistance, celle du fil. Une bobine idéale est une bobine dont on peut négliger la résistance ; elle est caractérisée par son inductance propre. Une bobine réelle d'inductance et de résistance peut être considérée comme l'association en série d'une bobine idéale d'inductance et d'un résistor de résistance. En l'absence d'indication dans un exercice sur la valeur de sa résistance, une bobine est considérée comme idéale.



En convention récepteur :

$$u = ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

i intensité du courant traversant la bobine en ampère (A).
u tension aux bornes en volt (V).
L inductance propre de la bobine en henry (H).
r résistance de la bobine en ohm (Ω).

Le passage du courant provoque le stockage d'énergie magnétique dans la bobine. Le stockage est réversible.

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2$$

i intensité du courant traversant la bobine en ampère (A).
w_L énergie stockée dans la bobine en joule (J).
L inductance propre de la bobine en henry (H).

Démonstration de l'expression de l'énergie à partir de la puissance p reçue :

$$p = ui = \frac{\mathrm{d}w_L}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}w_L = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{i^2}{2}\right) \Rightarrow w_L = \frac{1}{2}Li^2.$$

(L'énergie est nulle quand le courant est nul.)
Une variation instantanée de l'énergie stockée impliquerait une puissance infinie, ce qui est physiquement impossible.

L'énergie et l'intensité du courant qui traverse une bobine sont des fonctions continues du temps ; elles ne peuvent pas subir de discontinuité.

3. Tension en régime sinusoïdal

Dans le cas du régime sinusoïdal, on utilise les nombres complexes pour simplifier les calculs des dipôles de nature différente.
Une grandeur sinusoïdale (courant ou différence de potentiel) est caractérisé par deux nombres : l'amplitude et la phase instantanée $\Phi(t) = \omega\, t + \theta$.

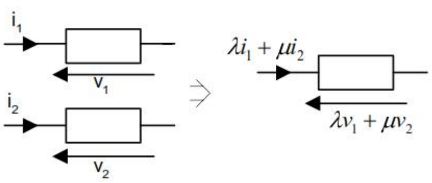
Il est donc naturel de représenter une grandeur sinusoidale par un nombre complexe lorsque le circuit est linéaire et que les opérations à effectuer sont aussi linéaires.

Définition : un circuit est linéaire si :

soumis à un courant $i_1(t) = I_0 \cos\omega\, t$, la différence de potentiel est $v_1(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$

soumis à un courant $i_2(t) = I_0 \sin\omega\, t$, la différence de potentiel est $v_2(t) = V_0 \sin(\omega\, t + \varphi)$

alors soumis à la combinaison linéaire $\lambda i_1(t) + \mu i_2(t)$, la différence de potentiel est de la forme $\lambda v_1(t) + \mu v_2(t)$



Posons $\lambda = 1$ et $\mu = j$. La différence de potentiel associée à la combinaison linéaire
$\underline{i}(t) = i_1(t) + ji_2(t) = I_0(\cos\omega\, t + j\sin\omega\, t) = I_0 \exp(j\omega\, t)$ est la suivante :
$\underline{v}(t) = v_1(t) + jv_2(t) = V_0\left(\cos(\omega\, t + \varphi) + j\sin(\omega\, t + \varphi)\right) = V_0 \exp(j\omega\, t + j\varphi)$
Dans le reste de ce document, on se limitera à l'étude des circuits linéaires avec des opérateurs linéaires (addition, multiplication par constante, dérivation, intégration).
Si le courant est de la forme $i_1(t) = I_0 \cos\omega\, t = \Re(\underline{i}(t))$ partie réelle de $\underline{i}(t)$, la différence de potentiel $v_1(t) = V_0(\cos\omega\, t + \varphi) = \Re(\underline{v}(t))$ partie réelle de $\underline{v}(t)$.
De même la différence de potentiel $v_2(t)$ associé au courant $i_2(t) = I_0 \sin\omega\, t = \Im(\underline{i}(t))$ est

De même la différence de potentiel $v_2(t)$ associé au courant $i_2(t) = I_0 \sin\omega\ t = \Im(\underline{i}(t))$ est $v_2(t) = V_0(\sin\omega\ t + \varphi) = \Im(\underline{v}(t))$

On définit l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle comme suit :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}}$$

avec $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\ t)$ et $\underline{v} = V_0 \exp(j\omega\, t + j\varphi)$

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \left|\underline{Z}\right| \exp(j \arg(\underline{Z})) \\ &= \frac{V_0}{I_0}\frac{\exp(j\omega t + j\varphi)}{\exp(j\omega t)} \\ &= \frac{V_0}{I_0}\exp(j\varphi)\end{aligned}$$

Le module de l'impédance complexe $\underline{Z}$ est égal à :

$$\boxed{\left|\underline{Z}\right| = \frac{V_0}{I_0}}$$

et l'argument de l'impédance complexe $\underline{Z}$ est égal à :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \varphi}$$

On a donc :

$$\underline{Z} = \frac{V_0}{I_0}\exp(j\varphi)$$

<u>Cas de la résistance</u> :

$$\underline{v} = RI_0 \exp(j\omega\ t)$$

L'impédance complexe de la résistance est donc : $\underline{Z} = R$

On retrouve les résultats obtenus en utilisant le diagramme de Fresnel.

<u>Cas de la bobine</u> :

$$v = L\frac{di}{dt}$$

On a :

$$\underline{v} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\ \underline{i} = jL\omega\ I_0 \exp(j\omega\ t)$$

L'impédance complexe de la bobine est donc : $\boxed{\underline{Z} = jL\omega}$

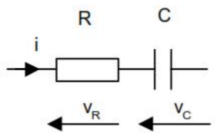
Cas du condensateur :

$$v = \frac{1}{C}\int i dt$$

L'impédance complexe du condensateur est donc : $\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}}$

Comme dans le paragraphe précédent sur le diagramme de Fresnel, nous allons maintenant étudier l'association de dipoles de nature différentes en utilisant les impédances complexes.

Cas de l'association d'une résistance et d'une capacité en série :



i sinusoidal => $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\ t)$

v_R => $\underline{v}_R = R\underline{i}$

v_C => $\underline{v}_C = \dfrac{\underline{i}}{jC\omega}$

$$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_C = \left[R + \frac{1}{jC\omega}\right]\underline{i} = \underline{Z}.\underline{i}$$

On retrouve le module et l'argument de $\underline{Z} = |\underline{Z}|\exp(j\varphi)$:

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = -\frac{1}{RC\omega}$$

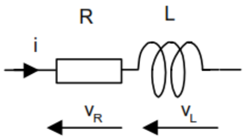
$$\varphi = -\arctan\frac{1}{RC\omega}$$

A partir de ce calcul il est possible d'exprimer $u(t)$

Par exemple, si $i(t) = I_0 \sin \omega\, t$ alors nous aurons :

$u(t) = I_0 |\underline{Z}| \sin(\omega t + \varphi)$

<u>Cas de l'association d'une résistance et d'une bobine en série :</u>



i sinusoidal => $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\, t)$

v_R => $\underline{v}_R = R\underline{i}$

v_L => $\underline{v}_L = jL\omega\, \underline{i}$

$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_L = [R + jL\omega]\;\; \underline{i} = \underline{Z}.\underline{i}$

On retrouve le module et l'argument de $\underline{Z} = |Z| \exp(j\varphi)$:

$|Z| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ et $\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$

$\varphi = \arctan \dfrac{L\omega}{R}$

Si $i(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$, on a la relation $i(t) = \Re(\underline{i})$

$\underline{v} = [R + jL\omega] I_0 \exp(j\omega t)$

$= |\underline{Z}| \exp(j\varphi) I_0 \exp(j\omega t)$

$= |\underline{Z}| I_0 \exp(j\omega t + j\varphi)$

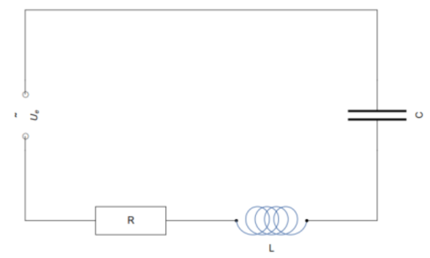
$v(t) = \Re(\underline{v}) = |\underline{Z}| I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

En résumé :

Si $i(t) = I_0 \cos(\omega\, t) = \Re(\underline{i})$ et $v(t) = \Re(\underline{v})$

Si $i(t) = I_0 \sin(\omega\, t) = \Im(\underline{i})$ et $v(t) = \Im(\underline{v})$

<u>Cas de l'association d'une résistance, une bobine et un condensateur en série</u>



i sinusoidal => $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\ t)$

v_R => $\underline{v}_R = R\underline{i}$

v_L => $\underline{v}_L = jL\omega\ \underline{i}$

v_C => $\underline{v}_C = \dfrac{\underline{i}}{jC\omega}$

$\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{R}} + \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{L}} + \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{C}}$

Résonnance d'intensité

Cherchons l'expression de $i(t) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$. On utilise les amplitudes complexes :

$$\underline{E}_\mathrm{m} = E_\mathrm{m} \quad \text{et} \quad \underline{I}_\mathrm{m} = I_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\varphi).$$

La loi de Pouillet nous donne directement :

$$\underline{I}_\mathrm{m} = \frac{E_\mathrm{m}}{R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \quad \text{et} \quad I_\mathrm{m} = |\underline{I}_\mathrm{m}| \Rightarrow I_\mathrm{m} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

La courbe représentant $I_\mathrm{m}(\omega)$, l'amplitude de l'intensité du courant, s'appelle courbe de résonance en intensité.

$I_\mathrm{m}(0) = 0$ et $\lim\limits_{\omega \to \infty} I_\mathrm{m} = 0$. I_m étant positif, cette courbe passe par un maximum pour une valeur de ω que l'on appellera ω_r, la pulsation de résonance.

Le numérateur étant indépendant de ω, I_m est maximum lorsque le dénominateur est minimum.

$L\omega_\mathrm{r} - \dfrac{1}{C\omega_\mathrm{r}} = 0 \Rightarrow \omega_\mathrm{r} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, on obtient donc $\omega_\mathrm{r} = \omega_0$.

En utilisant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$ et en notant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, on peut écrire :

$$U_\mathrm{Rm} = RI_\mathrm{m} = \frac{E}{D} \quad \text{avec} \quad D = \sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

U_Rm est l'amplitude de la tension aux bornes du résistor R.
Il y a donc résonance d'intensité pour toute valeur de Q et la pulsation de résonance est indépendante de Q.

$I_\mathrm{m}(\omega_\mathrm{r}) = I_\mathrm{mmax} = \dfrac{E}{R}$.

Soit ω_1 et ω_2 définis par :

$$I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_{m\max}}{\sqrt{2}},$$

avec $I_{m\max} = I\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = \frac{E}{R}.$

On caractérise la résonance par la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

$$I_m(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

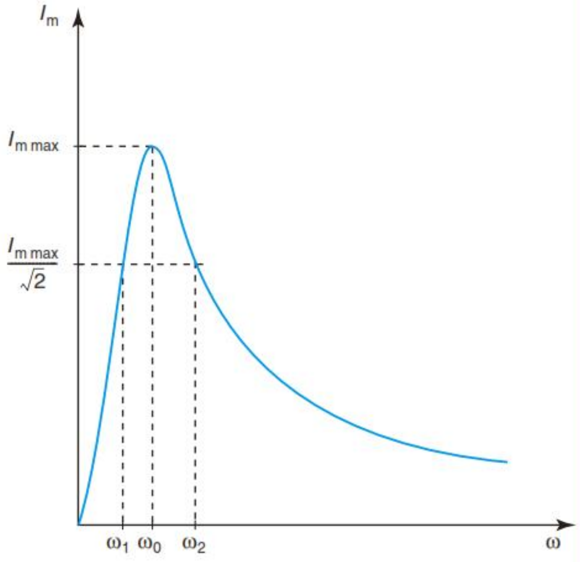
$$R\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 2R^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \pm R = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \pm \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0$$

Fig. 23 *Variation de l'amplitude de l'intensité avec la pulsation*



$$\omega^2 + \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

$$\omega^2 - \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

Les solutions négatives n'ont pas de sens physique.
On remarque que ω_2 et ω_1 ne sont pas symétriques par rapport à ω_0, ce que l'on peut remarquer sur la figure 23.

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$ et $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q}$ (car $Q = \frac{L\omega_0}{R}$), on a donc :

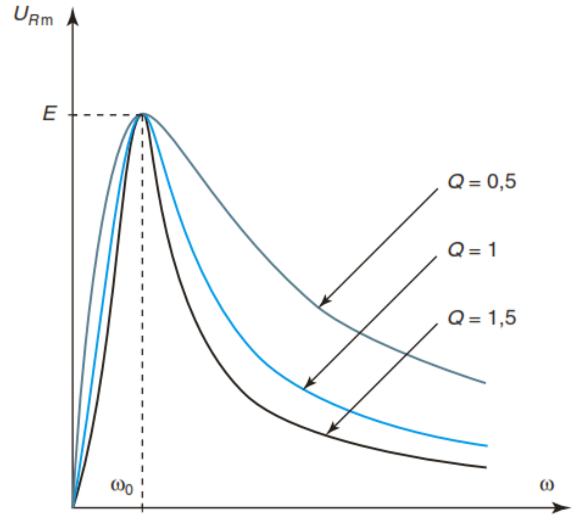
$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

Comparaison des courbes de résonance pour différentes valeurs de *Q*

De la relation $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$, on peut déduire que le facteur de qualité Q caractérise la résonance :

- plus Q est important, plus $\Delta\omega$ est petit : plus la résonance est dite « aigue » ;
- plus Q est petit, plus $\Delta\omega$ est grand : plus la résonance est dite « floue ».

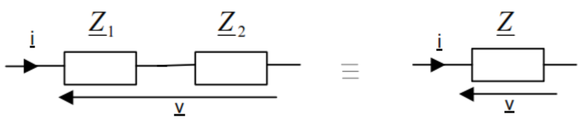
Variation de l'amplitude de la tension aux bornes du résistor avec la pulsation pour $Q = 0{,}5$; 1 et 1,5



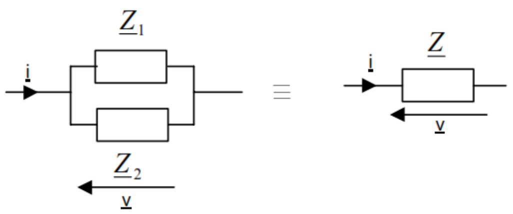
On constate bien sur ce graphe que la pulsation de résonance, égale à ω_0, est indépendante de Q.

III. Quelques lois en régime variable

On retrouve avec les impédances complexes les même lois que celles établies pour l'association de résistances de même nature :



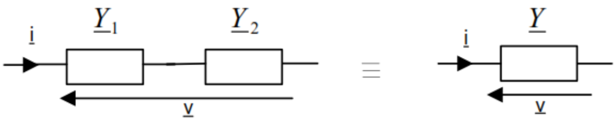
$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$



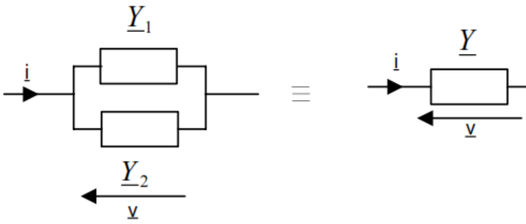
$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

On a ainsi vu que l'utilisation de l'impédance complexe permet de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques ce qui simplifie grandement l'étude de l'association de circuits de nature différente en régime sinusoidal.

On retrouve avec les admittances complexes les même lois que celles établies pour l'association de condensateurs de même nature :

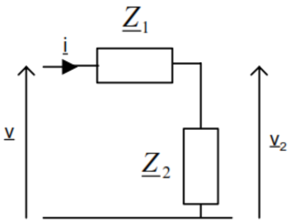


$$\frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2}$$



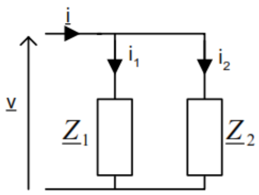
$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

Diviseur de tension



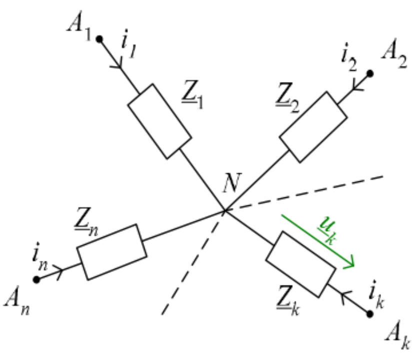
$$\underline{v}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{v}$$

Diviseur de courant



$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{i}$$

Théorème de Millman



$$\underline{v}_N = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{v}_{A_k}}{\underline{Z}_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underline{v}_{A_k}\underline{Y}_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k}$$

Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale $s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi)$ est :

$$S_{\text{moyenne}} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T S_{\text{Max}} \cos(\omega t)\,dt$$
$$S_{\text{moyenne}} = \frac{S_{\text{Max}}}{\omega . T}\left[\sin(\omega t)\right]_0^T = 0$$

Puisque la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale pure est nulle, nous n'utilisons que rarement en électricité la notion de la valeur maximale S_{Max} d'une fonction *périodique*. En revanche, nous préférons lui substituer une grandeur plus significative S_{eff}, appelée valeur efficace, telle que :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$$

Si nous prenons le cas particulier d'un signal sinusoïdal $s(t)$ avec :

$$s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi),$$

la valeur efficace devient :

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_{\text{Max}}^2 \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{S_{\text{Max}}^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt$$

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_{\text{Max}}^2}{2T}\left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{S_{\text{Max}}^2}{2} \qquad \text{soit :} \quad S_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{Max}}}{\sqrt{2}}$$

IV. Etude du circuit RLC

1. Notion de puissance instantanée

En électricité, la puissance **p (en watts)** est égale au produit de la tension par le courant :

p(t)= u(t).i(t).

En courant alternatif, comme u et i varient en fonction du temps, la puissance (sauf cas particuliers) n'est pas constante, on appelle **p** ou **p(t) la puissance instantanée**

2. Notion de puissance active

L**a puissance active P** (en watts, symbole W), souvent appelée **puissance** tout court est égale à la moyenne de la puissance instantanée et correspond à l'énergie effectivement transférée, ou convertie (l'énergie est égale à la puissance multipliée par le temps).

D'une façon générale, s'il y a un déphasage quelconque entre le courant et la tension et **à condition que le courant reste sinusoïdal**, la puissance active s'exprime par :

P = U.I.cos(φ)

Où V et I sont les valeurs efficaces de la tension et du courant, (cos(φ) est le cosinus de l'angle de déphasage φ).

Lorsque u et i sont en phase (charge résistive, φ = 0 et cos(φ) = 1) :

$$P = U.I = \frac{1}{2}.U_M.I_M$$

Lorsque u et i déphasés de φ= 90° (charge purement inductive ou purement capacitive, cos(φ) = 0) :

$P = 0$

La figure suivante montre l'évolution de la puissance instantanée p(t) pour une charge purement résistive (Figure a), une autre purement inductive (Figure b) et une charge résistive et inductive (Figure c) :

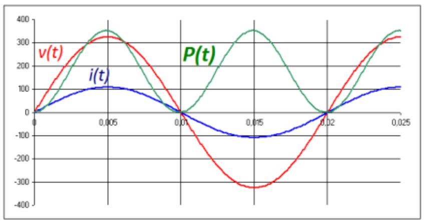


Figure a :Curcuit purement résistif

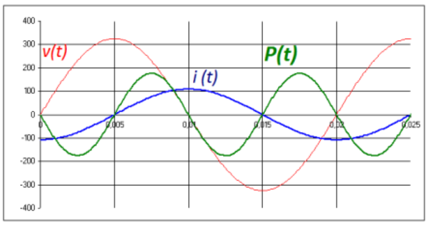


Figure b :Curcuit purement inductif

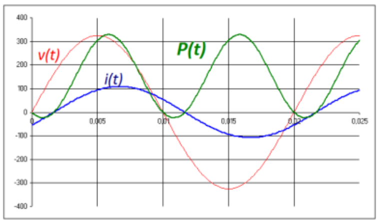


Figure c :Curcuit partiellement résistif et inductif

La puissance instantanée p(t) reste toujours positive (Figure a) dans le cas d'une charge résistive, autrement dit, la charge est, en chaque instant, consommatrice d'énergie. Alors que dans le cas d'une charge purement inductive (Figure b) ou purement capacitive, on peut remarquer que la puissance instantanée est purement alternative, ce qui explique qu'elle ait une valeur moyenne nulle, donc une puissance active égale à zéro. Avec les conventions choisies, lorsque la puissance instantanée est positive, la charge stocke de l'énergie, puis lorsqu'elle est négative, elle la déstocke. Autrement dit, ce type de charge, purement réactive, ne consomme pas d'énergie mais fait circuler du courant entre la source (réseau) et la charge. Ce courant, qui ne transporte pourtant pas d'énergie en moyenne (puissance active nulle), occasionne des pertes par effet Joule (chaleur dissipée) dans les lignes ainsi que dans les transformateurs et les générateurs. Comme c'est la valeur efficace du courant qui est dimensionnante pour les lignes et autres équipements situés en amont de l'abonné, ce courant « inutile » conduit à des surcoûts (investissement et pertes d'énergie) qu'il faut bien payer.

3. La puissance apparente

La puissance apparente S représente la capacité de transport d'une ligne électrique, n'est pas exprimé en watts, mais en volts-ampères (VA, prononcer véa) :

S = U.I

Dans une installation domestique, la **puissance souscrite** (en volts-ampères ou VA) au distributeur qui correspond à l'abonnement et à la valeur maximale du courant efficace tolérée par le disjoncteur qui a été réglé de façon cohérente avec celle-ci. C'est pourquoi la puissance souscrite est une puissance apparente qui s'exprime en VA. Pour faire une analogie avec une distribution de fluide, le réglage du courant de disjonction est en quelque sorte le réglage du débit maximal.

4. Le facteur de puissance

On appelle **facteur de puissance, noté $\boldsymbol{F_P}$**, le rapport entre la puissance active et la puissance apparente :

$\boldsymbol{F_P} = \frac{P}{S}$, il est toujours inférieur ou égal à 1.

Dans le cas où la charge est linéaire, c'est-à-dire que le courant reste sinusoïdal, la puissance active s'exprime par :

P = U.I.cos($\boldsymbol{\varphi}$), alors : le facteur de puissance vaut :

$\boldsymbol{F_P = cos(\varphi)}$.

Si la charge est purement résistive, la puissance apparente est égale à la puissance active et le facteur de puissance est maximal et égal à 1, c'est le cas idéal correspondant au minimum de courant appelé au réseau, pour une puissance active donnée et donc pour une consommation d'énergie donnée.

Mais dès qu'il y a des charges réactives, souvent inductives (transformateurs, moteurs…), le courant se trouve partiellement déphasé par rapport à la tension et, pour la même puissance active (et la même énergie consommée), on consomme un courant efficace plus élevé, ce que traduit un facteur de puissance inférieur à 1 et, donc, à plus de courant efficace appelé au réseau à puissance active donnée.

5. Puissance réactive

On appelle **puissance réactive** (notée **Q, en VAR** ou volts-ampères-réactifs, prononcer var) la composante de la puissance apparente représentant la composante réactive du courant :

Q = U.I.sin($\boldsymbol{\varphi}$)

Dans ces conditions de charges linéaires, absorbant donc un courant sinusoïdal, la relation qui lie la puissance apparente S à la puissance active P et à la puissance réactive Q est la suivante :

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Tableau récapitulatif des différentes grandeurs et leurs unités

GRANDEUR	SYMBOLE DE LA GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE DE L'UNITÉ
Tension (ddp)	*U* (ou *V*)	volt	V
Force électromotrice	*E*	volt	V
Intensité	*I*	ampère	A
Résistance	*R*	ohm	Ω
Impédance	*Z*	ohm	Ω
Capacité	*C*	farad	F
Inductance	*L*	henry	H
Période	*T*	seconde	s
Fréquence	*f*	hertz	Hz
Energie	*W*	joule	J
Puissance	*P*	watt	W
Puissance apparente	*S*	volt-ampère	VA
Température	*θ* (ou *T*)	degré kelvin	K
Force	*F*	newton	N
Quantité d'électricité	*Q*	coulomb	C