Algèbre linéaire 1) EEA1

Dr Kamdié

Exo 1

1) a) Taille de $A = 3 \times 4$

b) $a_{14} = 4$; $a_{23} = 3$; $a_{33} = 0{,}2$ et $a_{32} = 17$

c) Transposé de A : $${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 22 \\ -6 & 7 & 17 \\ 8 & 3 & 0{,}2 \\ 4 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

2) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$b_{11} = 2\times1 - 1 = 1$

$b_{12} = 2\times1 - 2 = 0$

$b_{32} = 2\times3 - 2 = 4$

3) Produits : AB impossible à cause de l'incompatibilité des tailles $(3\times4) \times (3\times3)$

$4 \neq 3$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0{,}2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{BA = \begin{pmatrix} -21 & -23 & 7{,}8 & -4 \\ 25 & 13 & 30{,}2 & 42 \\ 71 & 49 & 52{,}6 & 88 \end{pmatrix}}$$

Exo 2

1) Système : $(S)\begin{cases} x + 5y = 1 & (E_1) \\ x + 6y = 0 & (E_2) \\ z + 5t = 0 & (E_3) \\ z + 6t = 1 & (E_4) \end{cases}$

$(E_1) \leftarrow (E_1)$

$(E_2) \leftarrow (E_2) - (E_1)$

$(E_3) \leftarrow (E_3)$

$(E_4) \leftarrow (E_4) - (E_3)$

$\Rightarrow (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 1 \\ y = -1 \\ z + 5t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \\ z = -5 \\ t = 1 \end{cases}$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}^4} = \{(6;-1;1;-5)\}}$$

Exo2 (suite)

2) a) Traduct° : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 5a+6c & 5b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 5a+6c=0 \\ 5b+6d=1 \end{cases}$$

2

b) Solut° : $\begin{cases} c=-5 \\ d=1 \\ a=6 \\ b=-1 \end{cases}$

c) Vérificat° $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -1+1 \\ 30-30 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1

Exo 3

1) Mq E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

* $0_{\mathbb{R}^3} \in E$ car $0 - 3\times 0 + 0 = 0$

* soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans E et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Mq $\alpha X + \beta Y \in E$.

On a : $\alpha X + \beta Y = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta a \\ \alpha y + \beta b \\ \alpha z + \beta c \end{pmatrix}$ et $(\alpha x + \beta a) - 3(\alpha y + \beta b) + (\alpha z + \beta c)$

$= \alpha(x - 3y + z) + \beta(a - 3b + c)$

$= \alpha \times 0 + \beta \times 0$ car $x - 3y + z = 0$ car $X \in E$

$a - 3b + c = 0$ car $Y \in E$

$= 0$

1

Ainsi $\alpha X + \beta Y \in E$

2) Mq $\dim_{\mathbb{R}}(E) \leq 2$.

1

On a : $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\} = \{(x,y,z) \mid x = 3y - z\}$

$= \{(x,y,z) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$E = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}}(E) \leq 2}$

E est engendré par 2 vect., donc $\Rightarrow$

3) Vérificat : * u : $1 - 3\times 1 + 2 = 3 - 3 = 0$, donc $u \in E$

* v : $2 - 3\times 1 + 1 = 3 - 3 = 0$, donc $v \in E$

1

Dépendance linéaire : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc, u et v sont linéairement indépendants.

Donc, $\dim_{\mathbb{R}}(E) \geq 2$ car E contient 2 vect. lin. indepd.

4) Base de E : De (2) et (3), on a : $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2$.

D'où $\{u ; v\}$ est une base.

0,2