Electrostatique

I. Loi de coulomb

II. Champ et potentiel électrique

III. Condensateurs (équilibre électrique des conducteurs capacité et coefficients d’influence)

Electrostatique

Introduction

L'électrostatique traite de l'interaction des charges électriques au repos placées dans le vide. Le champ électrique est appelé champ électrostatique s'il est invariant dans le temps.

I. Loi de Coulomb

1) Charges électriques

Dans tout phénomène physique intervient un «objet» dont la structure confère certaines propriétés à l'espace qui l'entoure. Dans le cas de la gravitation, l'objet est constitué par une masse. En électrostatique, l'objet est une charge, mesurée en coulomb (C) dans le système international.
Ainsi, la charge électrique que l'on note ''q'' est une grandeur qui rend compte des interactions électromagnétiques entre particules aussi bien que la masse ''m'' rend compte des interactions gravitationnelles.

La charge électrique d'un corps représente la quantité d'électricité portée par ce corps. Cette charge est un multiple de la charge élémentaire.

$q = n \cdot e$ avec q en coulomb (C) et $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$

Pour un électron q = -e et pour un proton q = +e

Electrostatique

a. Charges ponctuelles

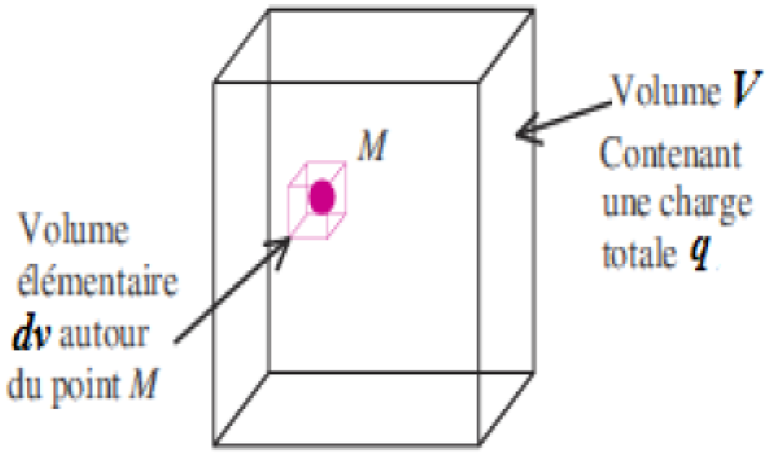
C'est un corps électrisé de dimensions assez petites de telle sorte qu'il peut être assimilé à un point dans l'espace. Dans le cas contraire on a une distribution continue de charges.

b. Distribution continue de charges

- **Distribution volumique de charges**

On considère un volume **τ** qui contient toute la charge q. Un élément de volume $d\tau$ contient une portion de la charge q notée dq.

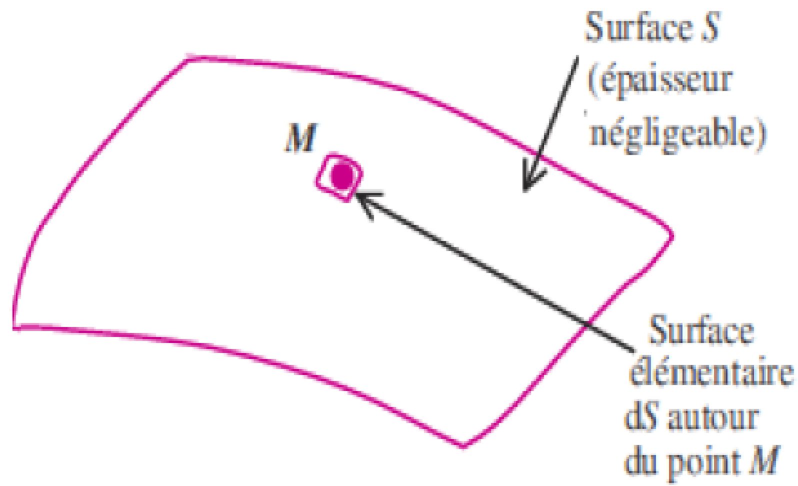
La densité volumique de charge ρ représente la charge par unité de volume soit $\rho(M) = \dfrac{dq}{d\tau} \Rightarrow q = \int_{\tau} \rho d\tau$. La ***densité volumique*** ρ s'exprime en $C.m^{-3}$.



Electrostatique

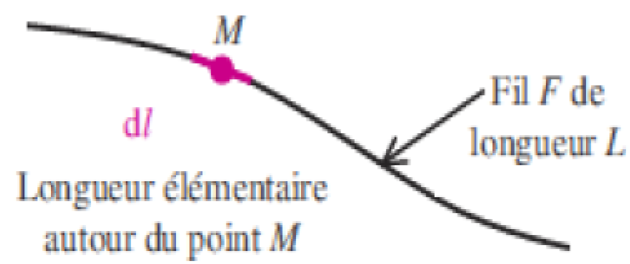
- **Distribution surfacique de charges**

Soit une surface S qui porte une charge q. dS un élément de cette surface porte la charge dq.
La densité surfacique de charge notée σ et définie par l'expression $\sigma(M)=\dfrac{dq}{dS} \Rightarrow q=\int_S \sigma dS$ représente la charge par unité de surface. La densité surfacique σ s'exprime en $C.m^{-2}$.



- **Distribution linéique de charges**

Considérons une ligne L qui porte la charge q. dl une portion de la ligne porte la charge dq.
La densité linéique ou linéaire de charge notée λ et définie par $\lambda(M)=\dfrac{dq}{dl} \Rightarrow q=\int_L \lambda dl$ représente la charge par unité de longueur.
La densité linéique λ s'exprime en $C.m^{-1}$.



Electrostatique

2) Loi de coulomb, interaction électrostatique

Soit deux charges **q_1** et **q_2** placées dans le vide respectivement aux points **A_1** et **A_2**. Pour un observateur au repos, la charge **q_1** exerce sur q_2 une force $\vec{F}_{1/2}$ appliquée au point **A_2**, portée par la droite (**$A_1 A_2$**) et inversement proportionnelle au carrée de la distance qui les sépare.

De même **q_2** exerce sur q_1 une force $\vec{F}_{2/1}$ appliquée au point **A_1**.

L'expression vectorielle de la loi de Coulomb s'écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} \quad (1.1)$$

avec $\vec{F}_{1/2}$ force exercée par la charge 1 sur la charge 2 en Newton (N)

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ S.I$: constante de Coulomb,

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ S.I$: permittivité électrique du vide

q_1, q_2 : charges électriques en Coulomb (C)

r:: distances entre les deux charges en mètre (m)

Electrostatique

$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\|}$ vecteur unitaire qui permet de donner la direction de la force d'interaction.

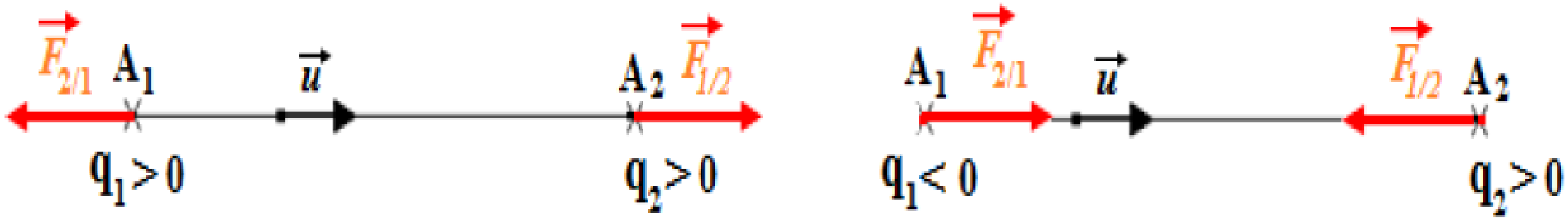


Figure 1.1 : Attraction ou répulsion des charges selon leur signe

Le principe des actions réciproques permet d'écrire: $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

Le module de la force électrique est donné par l'expression :

$$F_{1/2} = F_{2/1} = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Remarque : *la loi de coulomb est une loi empirique et c'est le principe fondamental de l'électrostatique.*

Electrostatique

II. Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

La seule présence d'une charge électrique $\mathbf{q_1}$ dans une région de l'espace suffit à rayonner un champ électrostatique dont l'intensité dépend de cette charge.

Si la charge $\mathbf{q_1}$ est située en A, elle rayonne en un point M situé à une distance r, le champ

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{AM^2}\vec{u} \quad (1.2)$$

$\vec{E}$: champ électrostatique exprimée en volt par mètre ($V.m^{-1}$)

$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|}$ vecteur unitaire qui donne la direction du champ électrostatique

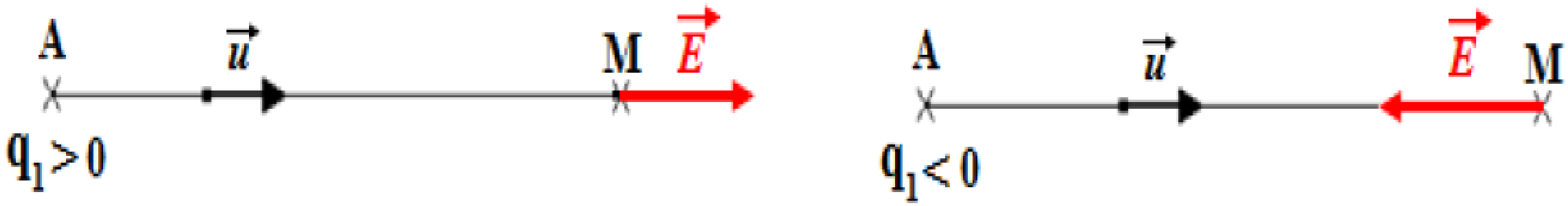


Figure 1.2 : Signe de la charge et sens du champ électrostatique

Electrostatique

Si la charge source est positive, le champ électrostatique est centrifuge.

Si la charge source est négative, le champ électrostatique est centripète.

Ainsi, si une charge **q₂** est située en M, elle subit la force électrostatique :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{AM^2}\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{1/2} = q_2\vec{E}\left(M\right) \quad (1.3)$$

<u>Remarque</u> :

Le champ et la force électrostatiques sont des grandeurs vectorielles définies par quatre caractéristiques : le point d'application ; la direction ; le sens et le module ou intensité.

Electrostatique

III. Champ électrostatique crée par un ensemble de charges ponctuelles (distribution discrète de charges)

Le **principe de superposition** dit que le champ électrostatique crée en un point M de l'espace par un ensemble de n charges ponctuelles q_i placées respectivement aux points P_i est la somme vectorielle des champs électrostatiques crées par chacune des charges au point M :

$$\vec{E}(M)=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{P_iM^2}\vec{u}_i \quad \text{avec } \vec{u}_i=\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|} \quad (1.4)$$

IV. Champ électrostatique crées par une distribution continue de charges

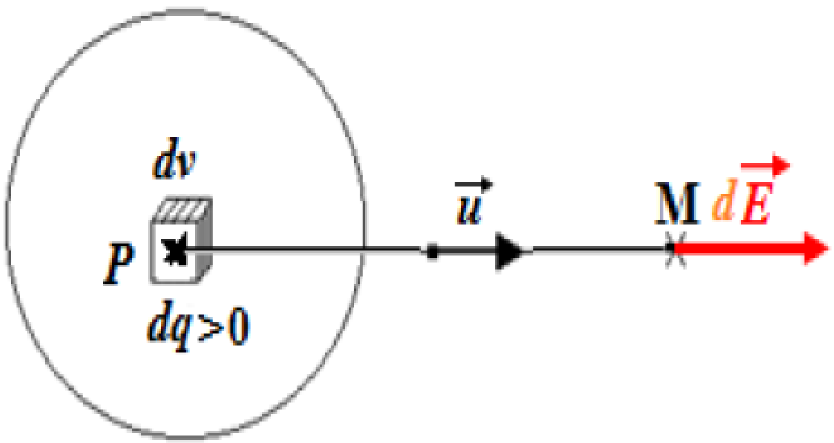
Pour une distribution continue de charges, un petit élément $(d\tau, dS, dl)$ portant la charge dq crée en un point M un champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$.

Electrostatique

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

L'intégrale doit être étendue à tout l'espace occupé par la charge.

a. Distribution volumique de charges

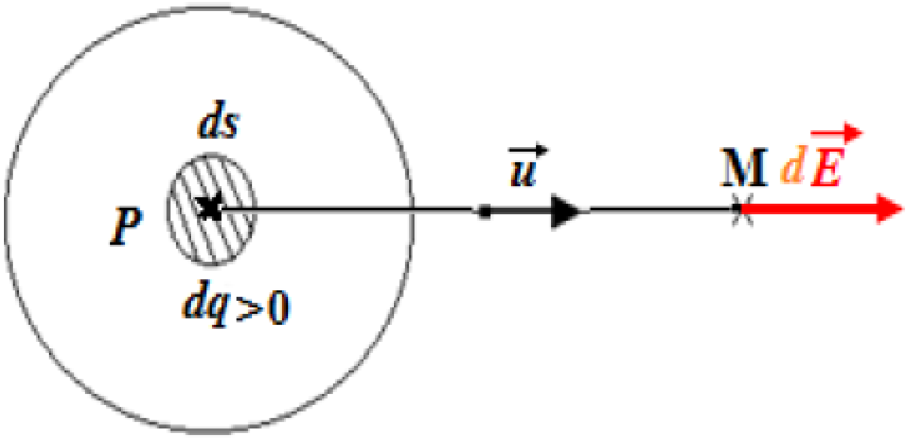


$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{PM^2}.\vec{u} \quad (1.5)$$

Figure 1.3 : Distribution volumique de charges

Electrostatique

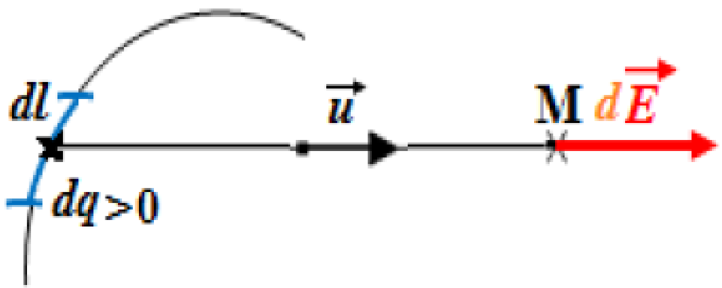
b. Distribution surfacique de charges



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{PM^2} . \vec{u} \quad (1.6)$$

Figure 1.4 : Distribution surfacique de charges

c. Distribution linéique de charges



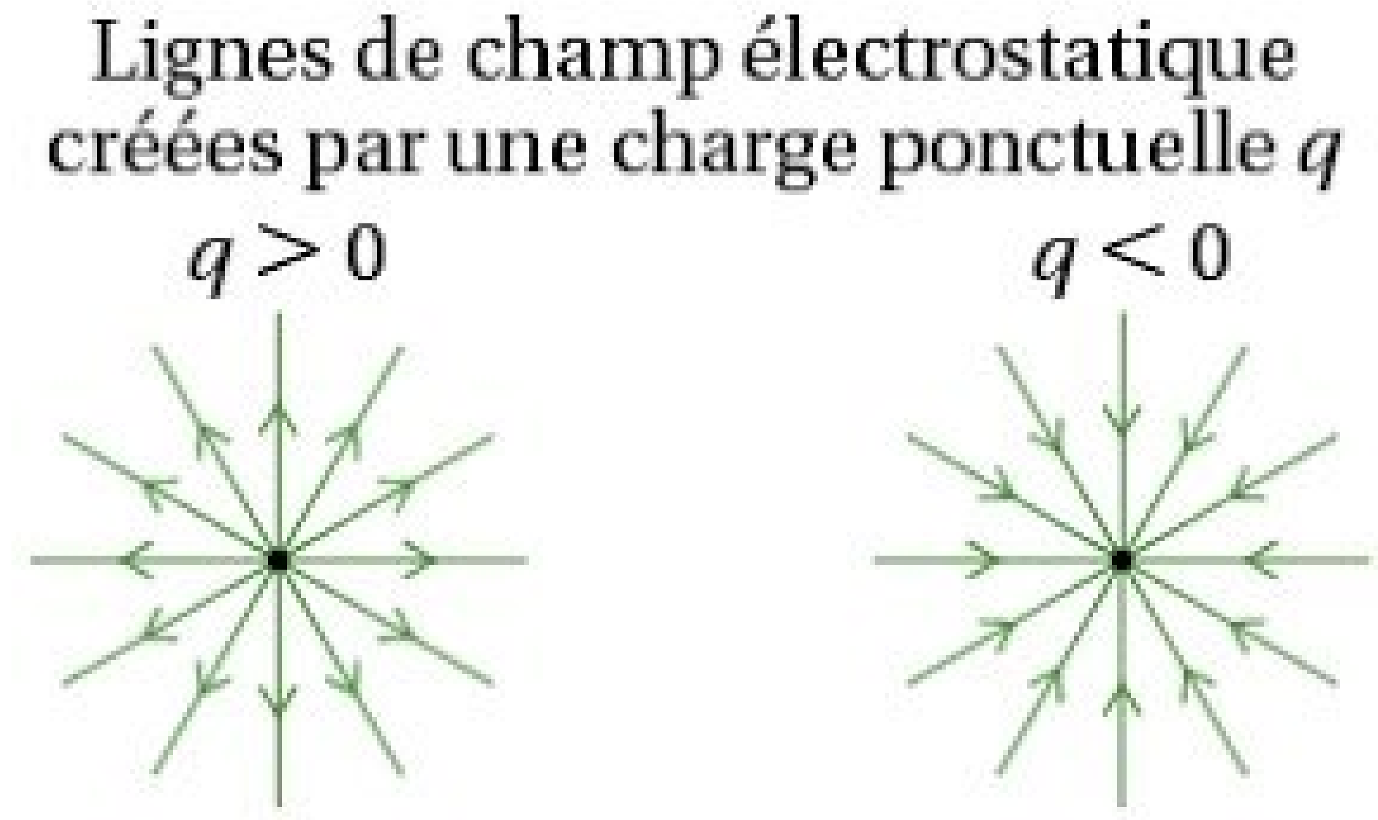
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{PM^2} . \vec{u} \quad (1.7)$$

Figure 1.5 : Distribution linéique de charges

Electrostatique

La valeur du champ électrostatique peut varier le long d'une ligne de champ, les lignes de champ ne permettent donc que de connaitre la direction du champ.

Cependant, dans une région vide de charge, plus les lignes de champ sont serrées, plus le champ électrostatique est intense.



Electrostatique

On observe que le champ est radial et centrifuge si la charge est positive. Evidemment, si l'on inverse le signe de la charge, les lignes de champ sont radiales et orientées vers la charge.

Le système formé par les deux charges ponctuelles de signe opposé, q et –q, s'appelle un doublet électrostatique. La cartographie du champ montre que les lignes de champ partent de la charge positive pour converger vers la charge négative sans jamais se refermer.

VI. Symétries et invariances

La connaissance des symétries et invariances que présentent les sources permet de déduire certaines caractéristiques du champ résultant.

Le calcul analytique des champs électrostatiques créés par des distributions de charges n'est pas toujours aisé et le recours à des considérations de symétrie peut s'avérer incontournable. En effet la cartographie des lignes de champ reflète la géométrie de la distribution de charges au sein du système. Au préalable à toute détermination de grandeurs électriques il convient de procéder à une analyse de la symétrie du système de charges. Cette approche permet de prévoir la symétrie des champs électrostatiques créés par le système c'est-à-dire de prévoir que $\vec{E}$ ne dépend pas explicitement de certaines coordonnées du point M et qu'une ou deux composantes de $\vec{E}$ dans une base appropriée sont nulles.

Electrostatique

Comme le paragraphe précédent le montre, il ne semble pas évident de calculer des champs électrostatiques. En effet, selon la distribution continue de charges qui est à l'origine du champ, apparait dans le calcul du champ électrostatique des intégrales doubles ou triples.

De plus le champ électrostatique en un point de l'espace possède plusieurs composantes et dépend de plusieurs paramètres :

- En coordonnées cartésiennes : $\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{e}_x + E_y(x,y,z)\vec{e}_y + E_z(x,y,z)\vec{e}_z$

- En coordonnées cylindriques : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$

- En coordonnées sphériques : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\phi)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,\phi)\vec{e}_\theta + E_\phi(r,\theta,\phi)\vec{e}_\phi$

La considération des symétries et invariances d'une distribution va permettre de simplifier cette expression de $\vec{E}(M)$ et donc de simplifier le calcul d'intégrales.

Electrostatique

1) Invariances

Les invariances permettent **d'éliminer des coordonnées dont dépend le champ électrostatique** en un point M.

Il y a invariance lorsque la vue de la distribution est identique en un point M et un point M' (M'obtenu par translation ou rotation depuis M), ou bien si le champ électrostatique calculé en M et en M'est identique.

Exemples :

1.1 Invariance par translation selon un axe

Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci (on voit depuis un point M et depuis un point M', image par translation de M, la même distribution), alors le champ électrostatique ne doit pas non plus subir de changement.

Si cet axe est Oz (système de cordonnées cartésiennes ou polaires), alors les composantes du champ électrostatique ne dépendront pas de la cordonnée z :

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y)\vec{e}_x + E_y(x,y)\vec{e}_y + E_z(x,y)\vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{E}(M) = E_r(r,\theta)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta)\vec{e}_z$$

Electrostatique

1.2 Invariance par rotation autour d'un axe

Si la distribution admet un axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci, alors le champ électrostatique ne doit pas non plus subir de changement.

Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, les composantes du champ électrostatique ne dépendront pas de la coordonnées θ (système de coordonnées cylindriques ou sphériques)

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,z)\vec{e}_z \text{ ou } \vec{E}(M) = E_r(r,\phi)\vec{e}_r + E_\theta(r,\phi)\vec{e}_\theta + E_\phi(r,\phi)\vec{e}_\phi$$

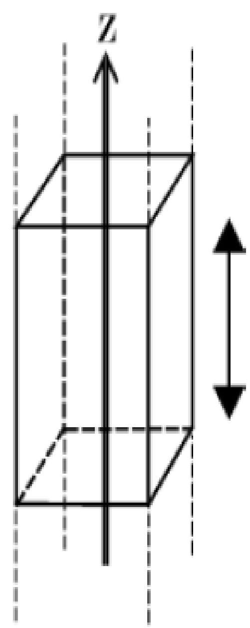


Figure 1.8 : Invariance par translation

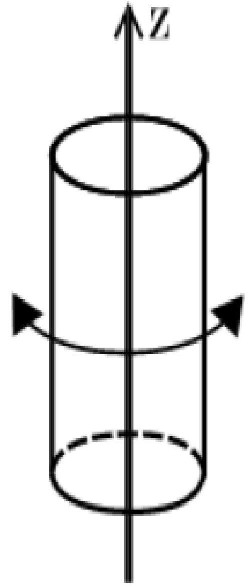


Figure 1.9 : Invariance par rotation

Electrostatique

Cas de la sphère

Dans une distribution sphérique, il y a invariance par rotations autour du point O, centre de la sphère, on s'affranchit des coordonnées θ et ϕ.

Mais cette distribution n'est pas invariante par translation suivant r, car on ne voit pas la même distribution en se déplaçant suivant un rayon : si on prend un point M à l'intérieur de la sphère, il est entouré de charges alors qu'un point M' situé sur le même rayon mais en périphérie de la sphère ne voit que des charges en dessous de lui.

En dehors de la sphère, le champ électrostatique dépendant de la distance aux charges, celui-ci ne serait pas le même à proximité de la sphère et très loin d'elle.

2) Symétries et antisymétries

Les symétries et antisymétries permettent **d'éliminer des composantes du champ électrostatique**.

En effet, un principe appelé **principe de Curie** dit que les symétries des causes *(que sont les charges, sources de l'électrostatique)* doivent se retrouver dans les effets *(que sont le champ et le potentiel électrostatiques)*: la symétrie de la distribution de charge se retrouvera dans l'expression du champ électrostatique.

Electrostatique

2.1 Plan de symétrie

Cas général

Si la distribution admet un plan de symétrie π alors le champ appartient nécessairement à ce plan.

En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq créé en M le champ $d\vec{E}_p$ et son symétrique par rapport à π, situé en P' qui porte aussi la charge dq créé en M le champ $d\vec{E}_{p'}$.

La somme de $d\vec{E}_p$ et $d\vec{E}_{p'}$ donne le vecteur $d\vec{E}$ contenu dans π.

Exemple du fil infini

Le plan π_1 est un plan de symétrie pour la distribution (le fil), le champ $d\vec{E}$ doit être contenu dans ce plan : il ne peut donc pas avoir de composante selon $\vec{e}_z$

Le plan π_2 est lui aussi un plan de symétrie pour la distribution, le champ $d\vec{E}$ doit être contenu dans ce plan : il ne peut donc pas avoir de composantes selon $\vec{e}_\theta$.

Electrostatique

Donc le champ $d\vec{E}$ n'a qu'une seule composante suivant $\vec{e}_r$ et s'écrit : $d\vec{E}(M) = dE_r(M)\vec{e}_r$

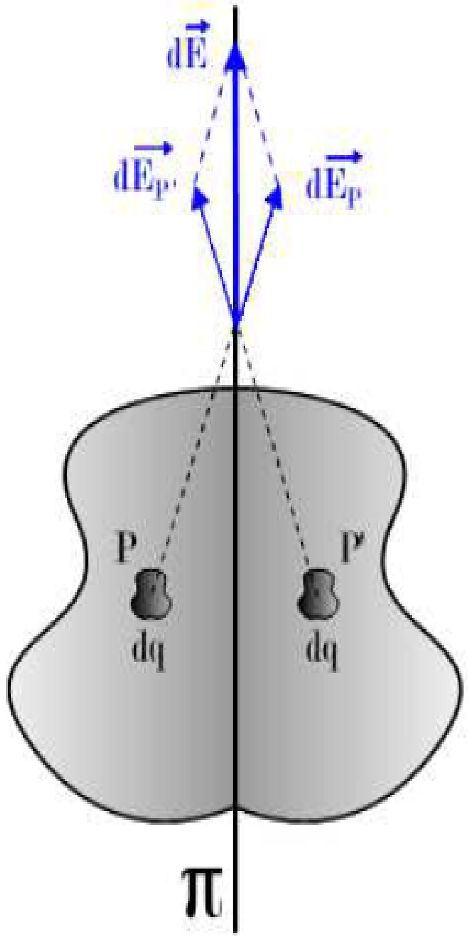


Figure 1.10 : Plan de symétrie et champ

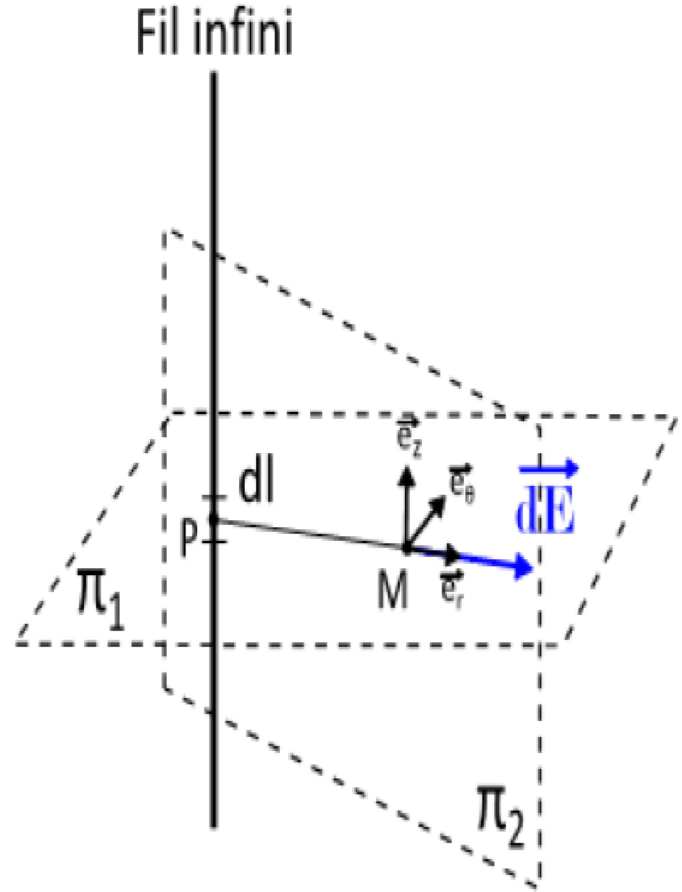


Figure 1.12 : ¨Plan de symétrie du fil infini

Electrostatique

2.2 Plan d'antisymétrie

Cas général

Si la distribution admet un plan de symétrie π alors le champ est nécessairement orthogonal à ce plan.

En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq créé en M le champ $d\vec{E}_p$, son symétrique par rapport à π , situé en P' porte lui, la charge –dq, il créé en M le champ $d\vec{E}_{p'}$.

La somme de $d\vec{E}_p$ et $d\vec{E}_{p'}$, donne un vecteur $d\vec{E}$ orthogonal au plan π.

Exemple du condensateur

Le plan π est un plan d'antisymétrie pour le condensateur car les charges portées par ses deux plaques sont opposées. Ainsi, l'addition des champs élémentaires créés par une portion de surface de chaque plaque, donne un champ perpendiculaire à π.

Si on utilise des coordonnées cartésiennes, on élimine avec cette antisymétrie les composantes suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$. Le champ s'écrit : $d\vec{E}(M) = dE_x(M)\vec{e}_x$

Electrostatique

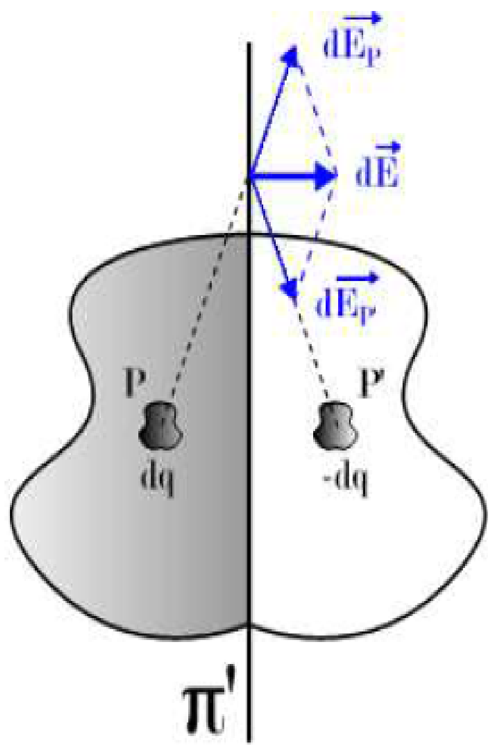


Figure 1.12 : Plan d'antisymétrie et champ

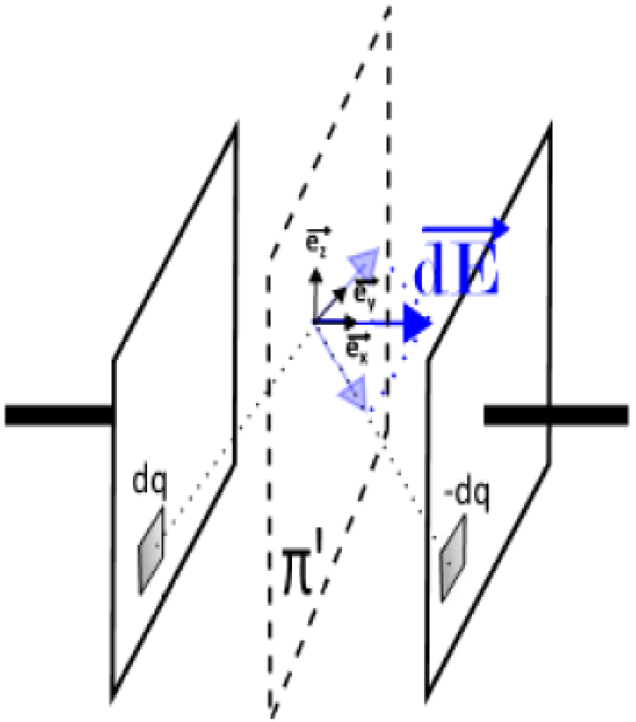


Figure 1.13 : ¨Antisymétrie et condensateur

Electrostatique

VII. Calcul du champ électrostatique par la méthode intégrale : exemple du fil infini

Nous utilisons la première méthode qui permet de calculer le champ électrostatique créé par une distribution continue de charge. Ce n'est pas la plus simple, mais nous pouvons mener le calcul à son terme grâce à la détermination préalable des symétries et invariances.

1. Symétries et invariances : le fil infini est la distribution continue la plus simple que l'on peut rencontrer. On se place dans un repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

- Pour ce qui est des invariances, le fil étant infini, la distribution est invariante si l'on se translate le long du fil. Le fil étant dirigé suivant Oz, la coordonnée z est éliminée.

Aussi, la distribution est inchangée par rotation autour du fil, la coordonnée θ est éliminée.

Ainsi : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r + E_\theta(r)\vec{e}_\theta + E_z(r)\vec{e}_z$

Electrostatique

- Pour ce qui est des symétries (confère **VI.2.1**), le fil admet deux plans de symétrie, ce qui élimine les composantes suivant $\vec{e}_\theta$ et suivant $\vec{e}_z$.

Ainsi : $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e}_r$

Nous venons de simplifier considérablement l'expression de notre champ électrostatique.

2. Champ élémentaire : nous découpons à présent le fil en de multiples segments élémentaires portant chacun la charge $dq = \lambda dl$, et cherchons le champ élémentaire créé par chaque portion :

Le fil étant toujours dirigé suivant Oz, on a $dl = dz$ et $dq = \lambda dz$. La portion dz créé le champ :

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u} \text{ or R=PM et } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} \text{ donc } d\vec{E}(M)\cdot\vec{e}_r = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\overrightarrow{PM}\cdot\vec{e}_r \, (*)$$

Electrostatique

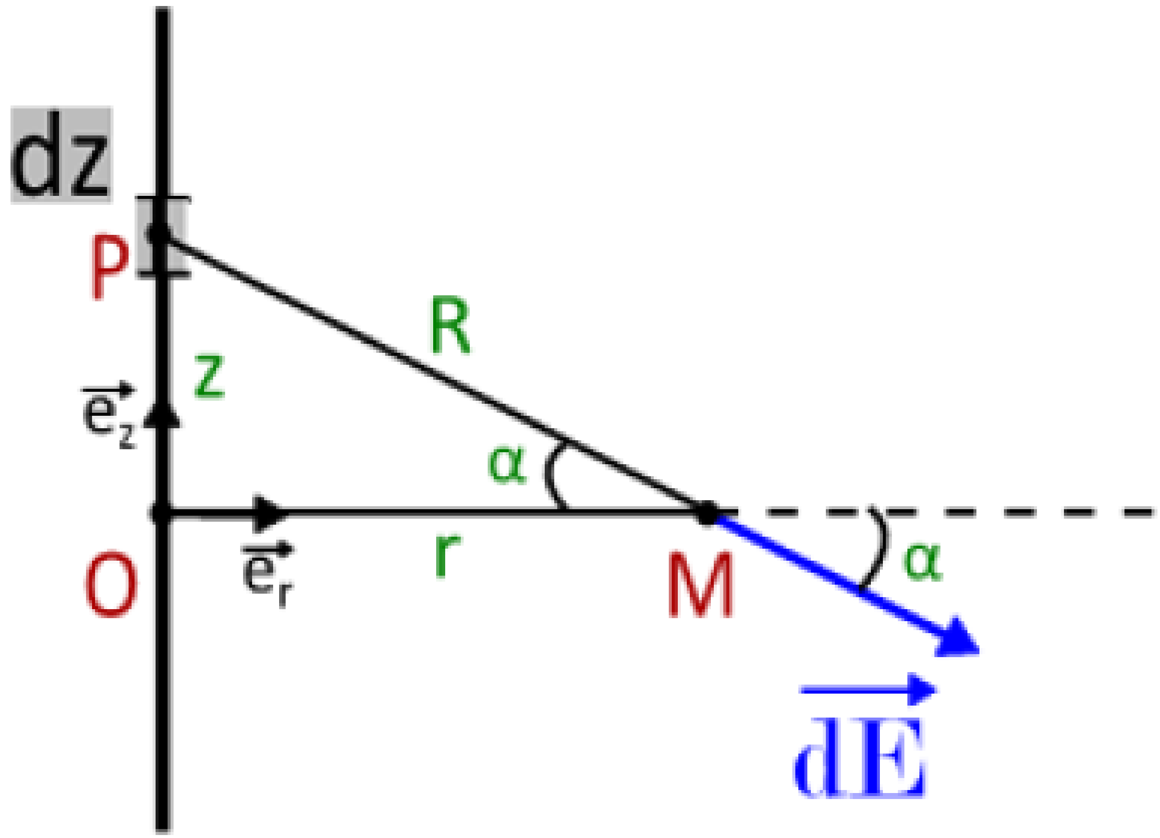


Figure 1.14 : Paramétrage du fil

Electrostatique

Dans la configuration de la **figure 1.14**, trois paramètres (R, z, α) jouent le même rôle, celui de situer le point P par rapport à l'origine du repère : nous allons en garder un seul, l'angle α.

$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_r$ représente la projection de $\overrightarrow{PM}$ sur l'axe dirigé par $\vec{e}_r$, donc : $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_r = r$

On a aussi : $\cos(\alpha) = \dfrac{r}{R} \Leftrightarrow R = \dfrac{r}{\cos(\alpha)}$ et : $z = r\tan(\alpha)$ soit $dz = r.d\left[\tan(\alpha)\right]$, $dz = .\left[1 + \tan^2(\alpha)\right] d\alpha$ et

finalement $dz = \dfrac{r}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$ et l'équation (*) devient : $d\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r = \dfrac{\lambda \dfrac{r}{\cos^2(\alpha)} d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \dfrac{r^3}{\cos^3(\alpha)}} r = \dfrac{\lambda \cos(\alpha) d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}$

3. Intégration : il suffit à présent de sommer de façon continue tous les champs élémentaires créés par les éléments infinitésimaux dl du fil infini. Les bornes d'intégration concerneront α puisque c'est le paramètre que nous avons choisi de garder.

Electrostatique

Afin de considérer un fil infini, nous devons intégrer α de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Mais comme la situation est symétrique de part et d'autre du point O, nous pouvons intégrer entre 0 et $\pi/2$ et multiplier le champ par 2. Ce qui donne :

$$E_r(r) = \int_{fil} \frac{\lambda\cos(\alpha)d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda\cos(\alpha)d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda\cos(\alpha)d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ soit } E_r(r) = 2\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin(\alpha)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ et } E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Le champ électrostatique créé par un fil infini s'écrit : $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

Electrostatique

VIII. Applications

1. a. Enoncer la loi de Coulomb.

b. Application : deux charges positives ponctuelles $q_1 = 10^{-8}\ C$ et $q_2 = 2.10^{-8}\ C$ sont fixes et maintenues à une distance d = 1 m. A quelle distance x de q_1 faut-il placer une charge négative q_3 pour qu'elle soit en équilibre sous l'action des forces exercées par q_1 et q_2 ?

2. a. Donner les caractéristiques du champ électrostatique créé en un M distant de O d'une charge ponctuelle Q ($Q<0$) placée en O.

b. application : Soient quatre charges q_A, q_B , q_C et q_D placées aux sommets d'un rectangle de longueur $2a$ et de largeur a (a = 50 cm). Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution au point O (O est le point de concours des diagonales) dans les cas suivant :

Cas 1 : $q_A = q_B = q_C = q_D = 10^{-9}$ C

Cas 2 : $q_A = q_C = 2.\ 10^{-9}$ C et $q_B = q_D = -10^{-9}$ C.

Electrostatique

Potentiel électrostatique

Nous allons définir dans ce chapitre une grandeur scalaire intimement lié au champ électrostatique: le potentiel électrostatique. Cette grandeur permet de caractériser le champ électrostatique et est parfois plus simple à exploiter. De plus, ce potentiel sera relié, par l'intermédiaire du travail de la force de Coulomb, à l'énergie potentielle électrostatique ce qui lui donnera toute sa signification physique.

I. Circulation du champ électrostatique

1) Définition

On appelle circulation du champ électrostatique $\vec{E}$ entre A et B la grandeur :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} \quad (2.1)$$

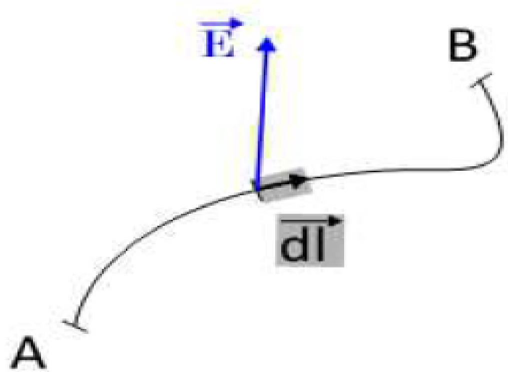


Figure 2.1 : Circulation du champ électrostatique le long d'un chemin

Electrostatique

2) Conservation de la circulation du champ électrostatique

La grandeur définie précédemment ne dépend que des positions des points A et B, la circulation du champ $\vec{E}$ est donc **indépendante du chemin suivi**: **on dit que la circulation du champ** $\vec{E}$ **est conservative**.

C'est un principe et comme tout principe, il ne se démontre pas.

Ceci implique que :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.2)$$

La circulation du champ $\vec{E}$ le long d'une courbe fermée est nulle.

Electrostatique

II. Potentiel électrostatique

1) Définition

Vue que la circulation du champ $\vec{E}$ ne dépend pas du chemin suivi, on peut définir une grandeur scalaire V telle que :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B) \quad (2.3)$$

Cette grandeur V est appelée potentiel électrostatique et s'exprime en Volt.

2) Propriétés

- L'équation (2.3) de définition du potentiel électrostatique faisant intervenir une intégrale, le potentiel électrique est définie à une constante près (constante d'intégration).

On fixera arbitrairement l'origine des potentiels (cela ne modifiera en rien le champ électrostatique).

- Puisque le champ électrostatique vérifie le principe de superposition, le potentiel électrostatique est additif : le potentiel créé par la réunion de deux systèmes de charges est la somme des potentiels créés par chaque système.

Electrostatique

3) Remarques

- La différence de potentiel n'est autre que la tension que l'on connaît en électricité.
- Pour fixer les idées sur la circulation du champ électrique qui donne naissance au potentiel, on peut faire une analogie avec la mécanique :

Si on considère que le champ électrique est analogue à une force conservative comme le poids $\vec{P}$, la circulation de $\vec{E}$ est analogue au travail de la force $\vec{P}$. Le travail du poids est égal à la différence d'énergie potentielle comme la circulation de $\vec{E}$ est égale à la différence de potentiel électrostatique.

Electrostatique

III. Exemples de potentiel électrostatique

1) Calcul du potentiel créé par une charge ponctuelle à partir du champ électrostatique

On montre que le potentiel électrostatique crée par une charge q en un point M de l'espace est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cste \quad (2.4)$$

où la constante est choisie en fonction de l'origine des potentiels .

Si on considère que le potentiel est nul à l'infini, la constante est nulle et on a:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Electrostatique

2) Généralisation aux distributions de charges classiques

A partir de l'expression précédente (équation 2.4), on peut donner les expressions des potentiels électrostatiques créés en M par d'autres distributions classiques:

-Pour une distribution de N charges ponctuelles placées en P_i (**Principe de superposition**)

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{P_i M}$$

- Pour une distribution linéique de charges : $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{PM} + Cste$

- Pour une distribution surfacique de charges : $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{PM} + Cste$

- Pour une distribution volumique de charges : $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\rho d\tau}{PM} + Cste$

Electrostatique

IV. Relation entre le champ et le potentiel électrostatiques

On montre que le champ électrostatique est un champ de gradient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\left(V\right) \quad (2.5)$$

Cette relation est appelé relation locale entre le champ et le potentiel.
Elle est vérifiée en chaque point de l'espace ou le champ et le potentiel électrostatiques peuvent être définis. Elle permet également de déterminer le potentiel lorsque le champ électrostatique est connu et réciproquement.

En coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Electrostatique

Remarque :

1. le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique

2. le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants

3. le champ électrostatique s'exprime également en V/m : $E = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{U}{d}$

4. La seule présence d'une charge ponctuelle **q** en un point A permet de définir deux propriétés en un point M de l'espace environnant:

- une propriété vectorielle, le champ électrostatique.
- une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante près).
- et une relation entre les deux propriétés.

Electrostatique

Applications

1. Déduire le potentiel électrostatique crée par un fil infini portant une densité linéique de charges $\lambda>0$ en un point M situé à la distance h du fil

2. Soient quatre charges identiques q placées aux sommets d'un carré (ABCD), de centre O et de côté **2a**.

a. Calculer le potentiel électrostatique crée par le système des quatre charges au point O (O est le point de concours des diagonales).

Consignes de travail

1. Utiliser la relation locale entre le champ et le potentiel
2. a. Utiliser le principe de superposition

10. Dans un plan Oxy muni d'un repère orthonormé, on place quatre charges en quatre points A, B, C et D :

A($-a$, a) : charge $q = 10^{-7}$ C

B($-a$, $-a$) : charge $-q = -10^{-7}$ C

C(a, $-a$) : charge $q = 10^{-7}$ C

D(a, a) : charge $q = 10^{-7}$ C

avec $a > 0$.

Quelle charge Q faut-il placer au point M de coordonnées ($2a$, $2a$) pour que le champ électrique soit nul au point O ?

Exercice

On considère un anneau circulaire de centre O et de rayon R. Cet anneau est uniformément chargé avec la densité linéique de charge uniforme $\lambda > 0$.

1. Déterminer, par des considérations de symétrie, la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ crée par cet anneau en un point M de son axe (Oz).
2. Déterminer le champ électrostatique total créé par l'anneau chargé en un point M de son axe.
3. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par l'anneau chargé en un point M de son axe.

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

OS1 : Définir un condensateur

OS2 : Calculer la capacité de condensateurs (plan, sphérique et cylindrique)

Introduction

Dans ce chapitre nous définirons la notion de conducteurs à l'équilibre électrostatique et d'influence électrostatique. Ce qui nous permettra de parler des condensateurs qui sont des composants électriques importants.

I. Conducteur

Un conducteur est un corps qui possède des particules chargées pouvant se déplacer librement et ainsi conduire le courant électrique :

– Les métaux sont conducteurs car ils possèdent des électrons libres.

– Les électrolytes sont conducteurs car ils possèdent des ions.

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

II. Propriétés des conducteurs isolés ou en équilibre électrostatique

1) Conducteur isolé ou en équilibre électrostatique

Un conducteur est en équilibre électrostatique si les charges libres de ce conducteur sont en moyenne au repos. Cela aura pour conséquence qu'en tout point intérieur au conducteur, **le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul** soit $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

En effet, le conducteur étant en équilibre, on : $\vec{F}_{int} = \vec{0}$,

$$\text{or} \quad \vec{F}_{int} = q\vec{E}_{int} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{int} = \vec{0} \text{ car } q \neq 0.$$

2) Conducteur et potentiel électrostatique

Quand le conducteur est à l'équilibre (plus de mouvement de charges), le champ à l'intérieur de celui-ci est nul.

Et d'après ce que l'on a vu en électrostatique précédemment : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ donc V = cste.

Le potentiel est uniforme au sein du conducteur, on dit aussi que **le conducteur est un volume équipotentiel**.

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

3) Répartition des charges

Si le champ à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre est nul, on peut montrer que la densité volumique de charge dans le conducteur est nul : $\rho_{int} = 0$ .car $div\left(\vec{E}_{int}\right) = \dfrac{\rho_{int}}{\varepsilon_0} = 0$

$\rho_{int} = 0 \;\; \Rightarrow$: Il y a autant de charges positives que de charges négatives à l'intérieur du conducteur.

Conclusion : Il ne peut y avoir de charges libres à l'intérieur d'un conducteur en équilibre et le champ électrique à l'intérieur y est toujours nul.

Si le conducteur a été préalablement chargé alors **les charges n'ont pu se répartir qu'à la surface du conducteur**. On définit donc une densité surfacique de charge σ.

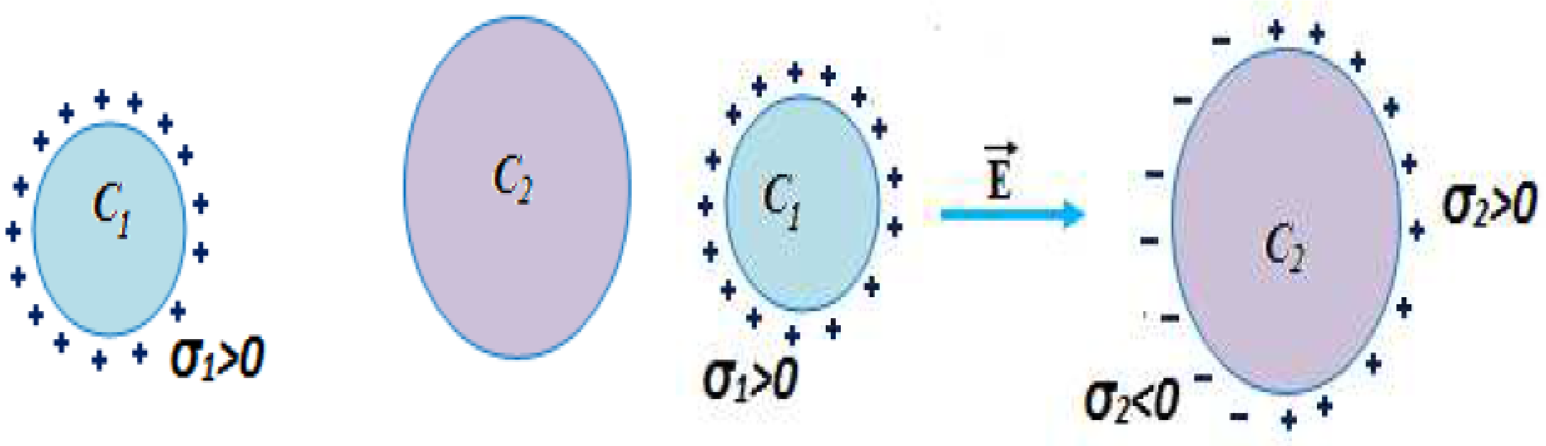
4) Phénomène d'influence de deux conducteurs chargés

4.1 Influence partielle

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

Soit un conducteur C_2 isolé, initialement neutre et un conducteur C_1 isolé et chargé positivement avec une densité surfacique $\sigma_1 > 0$. Le conducteur C_2 se trouve placé dans le champ électrostatique crée par le conducteur C_1.



Les charges électriques vont se mouvoir dans le conducteur C_2: les charges négatives (électrons libres) sont attirées par le champ tandis que les charges positives (ions positifs) sont repoussées.

Il apparaît sur la surface de C_2:

- une densité de charge $\sigma_2 < 0$ sur la partie faisant face à C_1
- une densité $\sigma_2 > 0$ sur la partie opposée.

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

Les densités sont de signes contraires pour assurer la neutralité de C_2.

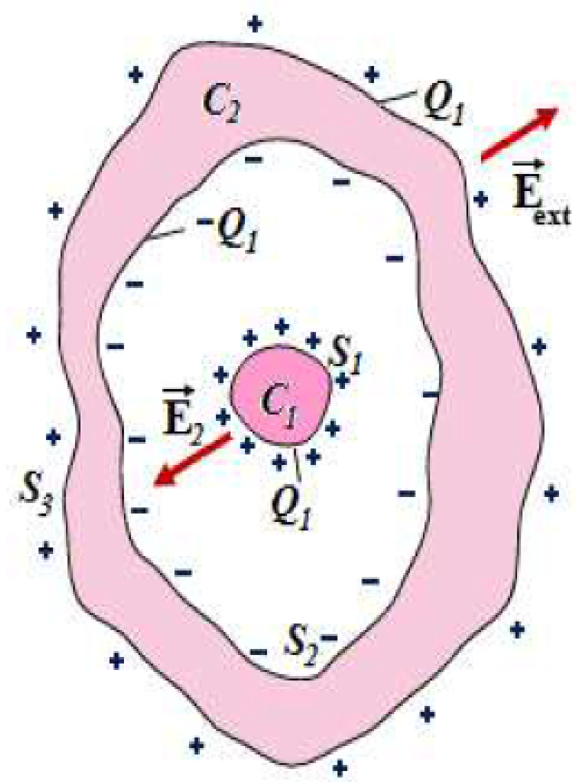
L'action de C_1 sur C_2 s'appelle influence électrostatique et elle conduit à une modification de la répartition des charges sur la surface de C_2.

4.2 Influence totale

Il y a influence totale lorsque le conducteur C_2 entoure complètement le conducteur C_1.

- *Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées :* $Q_{S_1} = -Q_{S_2}$
- *Condition de neutralité électrique de* C_2 : $Q_{S_2} = -Q_{S_3}$

Soit que : $Q_{S_1} = -Q_{S_2} = Q_{S_3}$



Electrostatique

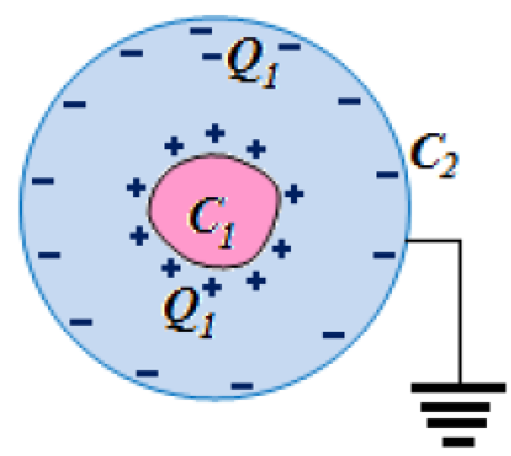
Conducteurs électriques et condensateurs

En résumé on peut dire que :

- *Dans la partie massive de* C_1: $\vec{E}_1 = \vec{0}$
- *La surface* S_1 *de* C_1 *porte la charge* $Q_1 > 0$ *et crée un champ* $\vec{E}_2$
- *La surface interne* S_2 *de* C_2 *porte la charge* $-Q_1$
- *Dans la partie massive de* C_2: $\vec{E}_1 = \vec{0}$
- *Apparition de la charge* $+Q_1$ *sur la surface externe* S_3 *pour assurer la neutralité de* C_2.
- *A l'extérieur de* C_2, *le champ* $\vec{E}_{ext}$ *est celui créé par la seule charge* Q_1 *portée par la surface externe de* C_2.

Remarque :

Si on relie la surface extérieure du conducteur C_2 à la Terre par un fil conducteur, toutes les charges positives qui s'y trouvent s'écoulent vers la Terre.



Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

III. Condensateurs

1) Définition

On appelle condensateur l'ensemble de deux conducteurs placés dans des conditions d'influence totale. Les deux conducteurs C_1 et C_2 constituent les armatures du condensateur. C_1 est l'armature interne et C_2 l'armature externe.

2) Capacité d'un condensateur

La charge Q d'un condensateur est celle portée par l'armature interne. Si V_1 est le potentiel de l'armature interne et V_2 celui de l'armature externe, la capacité du condensateur est donnée par la relation suivante:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (4.1)$$

La capacité d'un condensateur dépend de la géométrie des armatures.

La capacité se mesure en *farads (F)* mais cette unité est beaucoup trop grande pour les emplois usuels; on utilise surtout des sous - multiples:

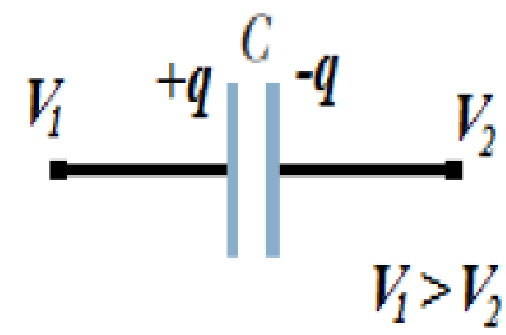
le microfarad (μF): $1\ \mu F = 10^{-6}\ F$, *le nanofarad (nF)*: $1 nF = 10^{-9}\ F$ et le *picofarad (pF)*: $1 pF = 10^{-12}\ F$.

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

On symbolise le condensateur de la façon suivante :

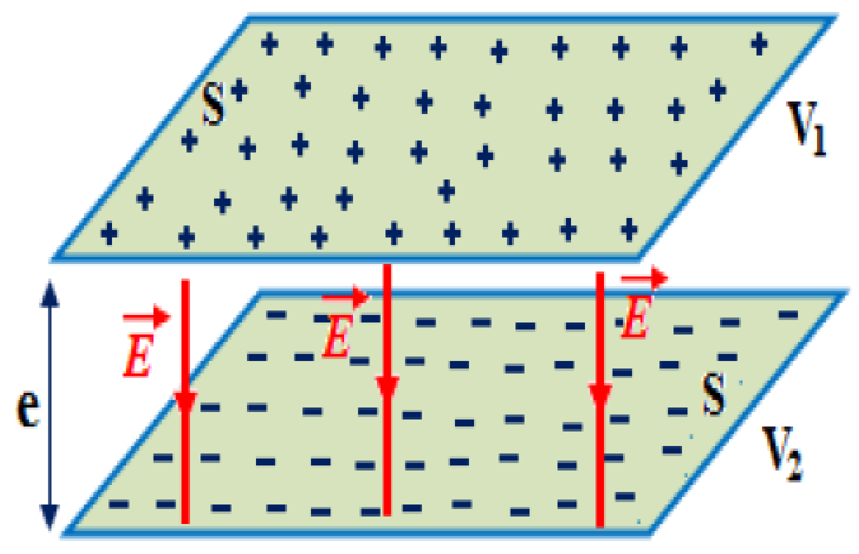
La capacité d'un condensateur caractérise l'aptitude du condensateur à accumuler des charges électriques sur les armatures lorsqu'il est soumis à une tension (V_1-V_2).



3) Capacité d'un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux conducteurs plans parallèles de même surface ***S*** et séparés par une distance (***e***).

On a montré que le champ électrostatique crée par un plan a pour module $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

- ***Expression de Q***

- Première plaque : Densité σ ; $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$

- Deuxième plaque : Densité $-\sigma$; $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$

Le principe de superposition permet d'écrire : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$

Le champ électrostatique entre les armatures est uniforme et à pour module $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ avec $\sigma = \frac{Q}{S}$.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ et } \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \varepsilon_0 \cdot S \cdot E$$

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

- *Expression de $V_1 - V_2$*

D'après la relation local entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, on a :

$$E = -\frac{dV}{dx} \text{ (une dimension) soit donc : } \int_{V_1}^{V_2} dV = -E \int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow V_1 - V_2 = e \cdot E \quad (\boldsymbol{x_2 - x_1 = e})$$

La capacité du condensateur plan est donc :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 SE}{eE} = \varepsilon_0 \frac{S}{e} \qquad C = \varepsilon_0 \frac{S}{e} \quad (4.2)$$

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

Remarque:

Lorsqu'on introduit entre les armatures, par substitution du vide, un diélectrique (mica, céramique, verre,…) de constante diélectrique ε_r on multiplie la capacité à vide du condensateur par un facteur ε_r.

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_r > 1$ on a: $C = \varepsilon \dfrac{S}{e} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{S}{e} = \varepsilon_r C_0$

ε_0 est la permittivité électrique du vide et ε_r est la permittivité relative du diélectrique.

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

IV. Association de condensateurs

1) Association en série

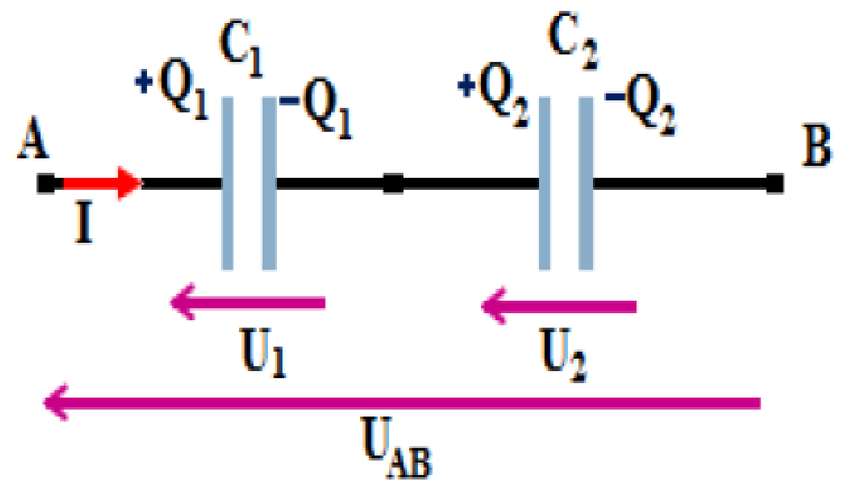
- **Charge Q des armatures**

Considérons le montage ci-contre constitué de deux condensateurs C_1 et C_2 montés en série.

On a : $I = I_1 = I_2$ et $U_{AB} = U_1 + U_2$

La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire :

$It = I_1 t = I_2 t$ ou encore $Q = Q_1 = Q_2$

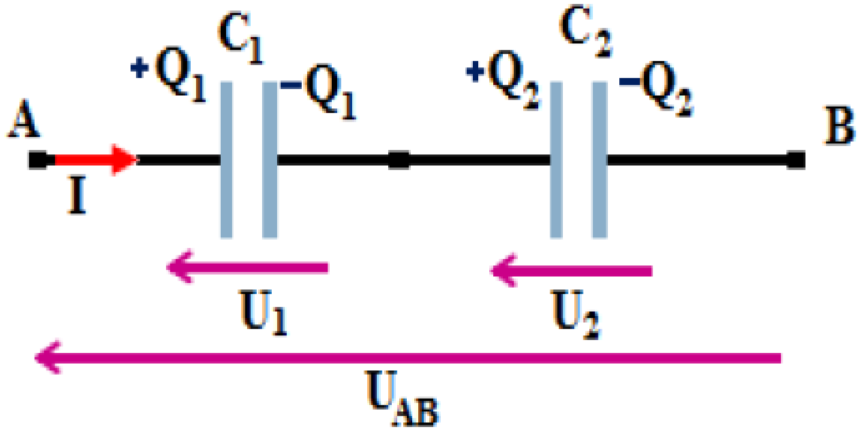


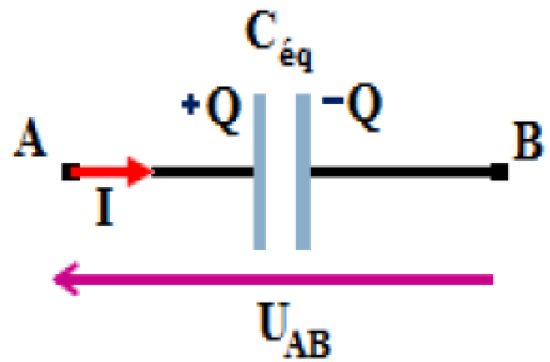
Toutes les charges des armatures sont identiques en valeur absolue.

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

- Capacité équivalente





$$U_{AB} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (1)$$

$$Q = C_{éq} U_{AB} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q}{C_{éq}} \quad (2)$$

$$U_{AB} = U_{AB} \text{ (Équation (1) = (2))} \Leftrightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{éq}} \Rightarrow \frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

Généralisation :

Pour n condensateurs en série on a : $$\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \quad (4.3)$$

2) Association en parallèle

- **Charge du condensateur**

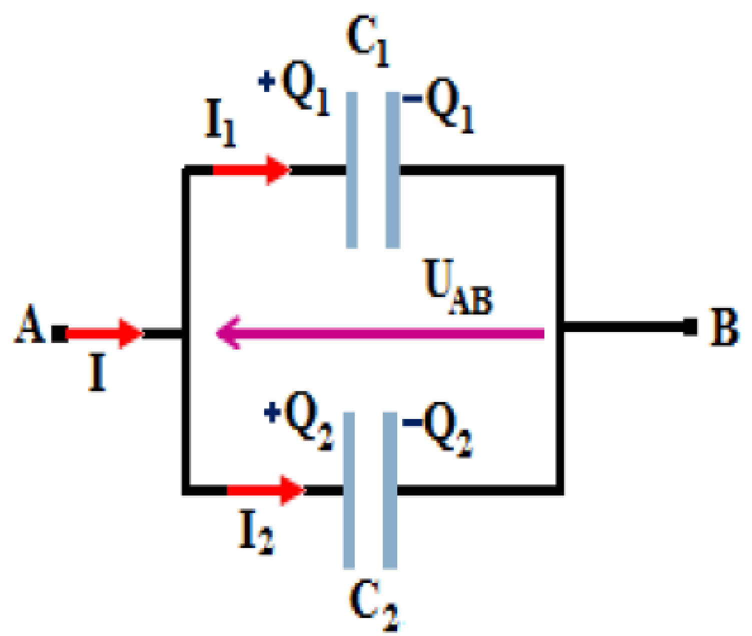
Pour le montage ci-contre les deux condensateurs C_1 et C_2 montés en parallèles.

On a : $U_{AB} = U_1 = U_2$ et $I = I_1 + I_2$

La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire :

$$I = I_1 + I_2 \;\Leftrightarrow\; It = I_1 t + I_2 t \;\Leftrightarrow$$

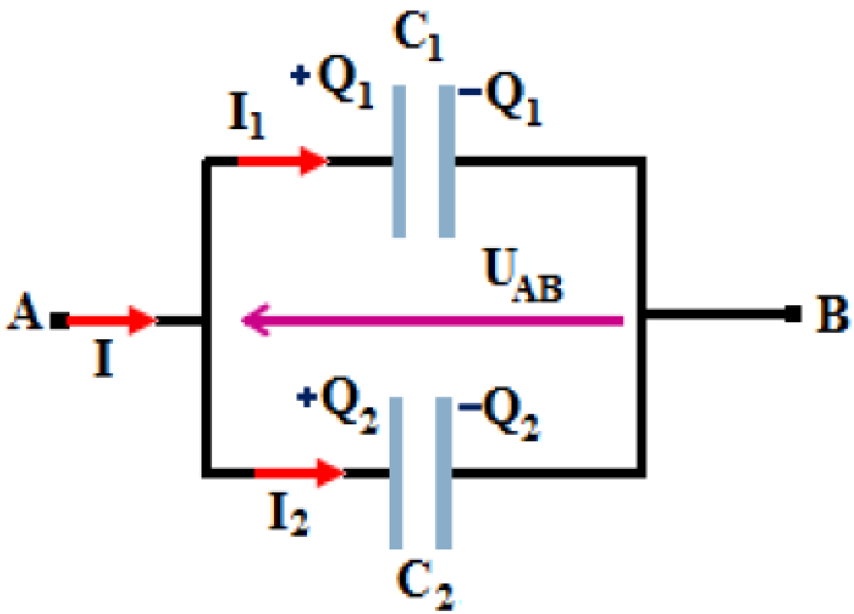
$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (1)$$



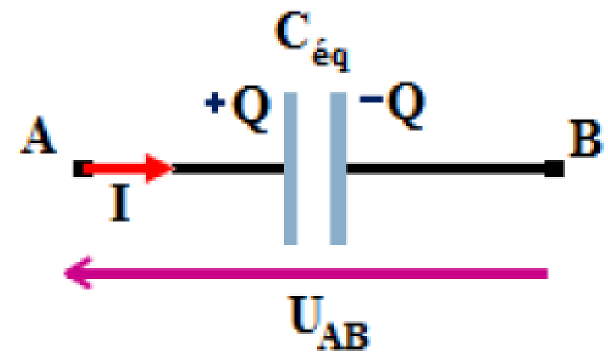
Electrostatique

Conducteurs électriques et condensateurs

- **Capacité équivalente**



$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U_{AB} + C_2 \cdot U_{AB} \quad (1)$$



$$Q = C_{éq} \cdot U_{AB} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) étant identiques on a : $C_{éq} = C_1 + C_2$

Généralisation :

Pour n condensateurs en parallèle on a : $C_{éq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad (4.4)$