Report del polinomio $f(x) = x^8 - 16x^7 - 58x^6 + 94x^5 - 98x^4 - 26x^3 + 21x^2 - 78x - 64$

Chiara Consorti

Giugno 2019

Sia $f(T) = T^8 - 16T^7 - 58T^6 + 94T^5 - 98T^4 - 26T^3 + 21T^2 - 78T - 64$

```
? f=T^8-16*T^7-58*T^6+94*T^5-98*T^4-26*T^3+21*T^2-78*T-64
? polisirreducible(f)
%2 = 1
```

$f \in \mathbb{Z}[T]$ è monico e irriducibile.

Gruppo di Galois

Se g(T) $\in \mathbb{Q}[T]$ è separabile, allora il suo campo di spezzamento $\mathbb{Q}_g$ è di Galois su $\mathbb{Q}$. Siano $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ le radici di g(T), gli elementi di $Gal(\mathbb{Q}_g/\mathbb{Q})$ mappano le radici di g in radici di g ed essendo automorfismi, definiscono le permutazioni di $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.
Quindi il gruppo di Galois può essere identificato con un sottoinsieme di $Sym(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}) \approx S_n$ (gruppo simmetrico su n elementi).
PARI può calcolare il gruppo di Galois di un polinomio irriducibile g di grado $d \leq 11$ su $\mathbb{Q}$. La sintassi è :

```
? polgalois(g)
%3 [n,s,k,name]
```

dove n è l'ordine del gruppo, s è $+1$ se il gruppo di Galois è un sottogruppo del gruppo alterno e -1 altrimenti, k è la numerazione del gruppo tra tutti i sottogruppi transitivi di S_d, la quale è data in "The transitive groups of degree up to eleven" di G. Butler e J. McKay e *name* è il nome del gruppo.
Notando che k è sostituita da T_k, qui è possibile trovare una tabella dei gruppi transitivi di grado d ordinati secondo k.

Con $f = T^8 - 16T^7 - 58T^6 + 94T^5 - 98T^4 - 26T^3 + 21T^2 - 78T - 64$:

```
? polgalois(f)
%4 = [40320, -1, 50, "S8"]
```

Il gruppo di Galois ha ordine 40320, ha segno -1, quindi non è contenuto nel gruppo alterno A_8, ed è isomorfo a S_8.

Discriminante del polinomio

```
? D_f=poldisc(f)
%5 = -1007883276590371954128821080064
```

Consideriamo $g(T) = T^n + a_1T^{n-1} \cdots + a_n$ e sia $g(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - \alpha_i)$ in un campo di spezzamento.

$D_g = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ è il *discriminante di g.*

Si noti che il discriminante di g è non nullo $\Leftrightarrow$ g è separabile.

Quindi il *discriminante del polinomio* è $D_f = -1007883276590371954128821080064$

Per studiare il campo di numeri $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[T]/(f)$ con $f(\alpha) = 0$,
il comando di PARI è `nfinit(f)`.

Base intera per O_K

Una *base intera* per O_K è una $\mathbb{Z}-$base di O_K ovvero un insieme di elementi $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \in O_K$ tale che

$$O_K = \beta_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \beta_n\mathbb{Z}$$

```
? K = nfinit(f);
? w= K.zk
%7 = [1, T - 2, 1/2*T^7 - 8*T^6 - 29*T^5 + 47*T^4- 49*T^3 - 13*T^2+ 21/2*T- 34,
     T^2 - 17*T - 13, 1/4*T^7 - 17/4*T^6 - 41/4*T^5 + 135/4*T^4 - 235/4*T^3 + 241/4*T^2
     - 26*T - 25, -1/4*T^7 + 17/4*T^6 + 43/4*T^5 - 167/4*T^4 + 119/4*T^3 - 51/4*T^2- 31*T
     + 9, 1/4*T^7 - 17/4*T^6 - 41/4*T^5 + 137/4*T^4 - 267/4*T^3 + 125/4*T^2 + 39/2*T - 46,
     - 1/2*T^7 + 17/2*T^6 + 21*T^5 - 76*T^4 + 191/2*T^3 - 28*T^2 + 9/2*T + 26]
```

Discriminante del campo

Sia K campo di numeri di grado n.
Il *discriminante di K* è il discriminante $\Delta(\omega_1, \cdots, \omega_n) = det(Tr(\omega_i\omega_j)_{1\leq i,j\leq n})$ di una base intera $\omega_1, \cdots, \omega_n$ di O_K.
Per calcolare il discriminante di $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ con $f(\alpha) = 0$, la sintassi è:

```
? Delta_K=K.disc
%8 = -9842610122952851114539268 36
```

Quindi $\Delta_K = -984261012295285111453926836$
Sapendo quanto valgono D_f e Δ_K si può calcolare l'indice di O_K su $\mathbb{Z}[\alpha]$.
Infatti:

$$D_f = [O_K : \mathbb{Z}[\alpha]]^2 \cdot \Delta_K$$

Quindi:

```
? (D_f/Delta_K)^(1/2)
%9 = 32
```

$[O_K : \mathbb{Z}[\alpha]] = 32$

Decomposizione in ideali primi

Sia $p \in \mathbb{Z}$, vogliamo fattorizzare $(p) \subseteq O_K$, cioè scrivere $(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_g^{e_g}$ con

- $\mathfrak{p}_i$ ideale primo;
- e_i indice di ramificazione;
- f_i indice di inerzia, cioè $N(\mathfrak{p}_i) = p^{f_i}$

tali che vale $n = \sum_{i=1}^{g} e_i f_i$ con n il grado dell'estensione $K/\mathbb{Q}$.

- p è inerte se g=f=1, in altre parole se $pO_K = \mathfrak{p}$ e quindi f=n;
- p si spezza completamente se g=n e quindi $f_i = g_i = 1$ e $pO_K = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$;
- p è ramificato se pO_K non è privo di quadrati cioè se $\exists j$ tale che $e_j \geq 2$;
- p è totalmente ramificato se e=n, g=1 e f=1 cioè se $pO_K = \mathfrak{p}^n$.

Decomposizione in ideali primi di tutti i primi ramificati

Vale il seguente teorema:

$$\text{p è ramificato} \Leftrightarrow \text{p} \mid \Delta_K$$

Quindi per trovare i primi ramificati dobbiamo fattorizzare Δ_K usando il comando `factor(x)`, dove x è l'intero che vogliamo scomporre in primi:

```
? factor(Delta_K)
%10 =
[               -1 1]

[                2 2]

[      80545460711 1]

[3054985978126219 1]
```

$\Delta_F = -2^2 \cdot 80545460711 \cdot 3054985978126219$
e i primi ramificati sono : 2, 80545460711, 3054985978126219.
C'è solo un numero finito di primi ramificati poiché Δ_K ha un numero finito di divisori.

```
? K.zk
%11 [w_1, ... , w_8]
? Pi.gen = [p,[a_1,...,a_8]~]
per i=1,...,g
```

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{i} = (p, \sum_{i=1}^{8} a_i w_i)$$

- p=2

```
? dec=idealprimedec(K,2);
? #dec
%13 = 4
? [P1,P2,P3,P4]=dec;
? [P1.e,P1.f]
%15 = [2,1]
? [P2.e,P2.f]
%16 = [1,1]
? [P3.e,P3.f]
%17 = [1,1]
? [P4.e,P4.f]
%18 = [1,4]
```

$\Rightarrow (2) = \mathfrak{p}_1^2 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4$

```
? a=P1.gen
%19 = [2, [0, -1, 1, -1, 0, 0, -1, 1]~]
? A=0;
? for (i=1,8,A=a[2][i]*w[i]+A;)
? A
%22 = -1/4*T^7 + 19/4*T^6 + 9/4*T^5 - 253/4*T^4 + 453/4*T^3 - 293/4*T^2 + 23/2*T + 53
```

$\Rightarrow \mathfrak{p}_1 = (2, -\frac{1}{4}\alpha^7 + \frac{19}{4}\alpha^6 + \frac{9}{4}\alpha^5 - \frac{253}{4}\alpha^4 + \frac{453}{4}\alpha^3 - \frac{293}{4}\alpha^2 + \frac{23}{2}\alpha + 53)^2$

```
? a=P2.gen
%24 = [2, [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]~]
? A=0;
? for (i=1,8,A=a[2][i]*w[i]+A;)
? A
%27 = 1/2*T^7 - 8*T^6 - 29*T^5 + 47*T^4 - 49*T^3 - 13*T^2 + 21/2*T - 34
```

$\Rightarrow \mathfrak{p}_2 = (2, \frac{1}{2}\alpha^7 - 8\alpha^6 - 29\alpha^5 + 47\alpha^4 - 49\alpha^3 - 13\alpha^2 + \frac{21}{2}\alpha - 34)$

```
? a=P3.gen
%28 = [2, [0, 1, 1, 0, 0, 1, -1, 1]~]
? A=0;
? for (i=1,8,A=a[2][i]*w[i]+A;)
? A
%31 = -1/2*T^7 + 9*T^6 + 13*T^5 - 105*T^4 + 143*T^3 - 85*T^2 - 69/2*T + 45
```

$\Rightarrow \mathfrak{p}_3 = (2, -\frac{1}{2}\alpha^7 + 9\alpha^6 + 13\alpha^5 - 105\alpha^4 + 143\alpha^3 - 85\alpha^2 - \frac{69}{2}\alpha + 45)$

```
? a=P4.gen
%32 = [2, [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]~]
? A=0;
? for (i=1,8,A=a[2][i]*w[i]+A;)
? A
%35 = T^2 - 17*T - 13
```

$\Rightarrow \mathfrak{p}_4 = (2, \alpha^2 - 17\alpha - 13)$

- p=80545460711

$$(80545460711) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2^2 \cdot \mathfrak{p}_3 = (80545460711, \alpha - 1234723979)\cdot$$
$$(80545460711, \alpha - 255579175)^2 \cdot (80545460711, \alpha^5 + 1745882313\alpha^4 - 7009434168\alpha^3$$
$$+26711850066\alpha^2 + 21381927265\alpha + 23496381516)$$

- p=3054985978126219

$$(3054985978126219) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2^2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4 = (3054985978126219, \alpha - 1378325505497088)\cdot$$
$$(3054985978126219, \alpha - 1332998871004291)^2 \cdot (3054985978126219, \alpha^2 + 83485772839291\alpha +$$
$$968107418090128)\cdot(3054985978126219, \alpha^3 + 905851496540144\alpha^2 - 13527171069667\alpha$$
$$+981163635146285)$$

Decomposizione in ideali primi di $p \leq 100$

- p=3
  $(3) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (3, \alpha^3 - \alpha^2 + 1) \cdot (3, \alpha^5 - \alpha^3 - \alpha^2 - 1)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p^3$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^5$

- p=5
  $(5) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (5, \alpha + 7) \cdot (5, \alpha^7 + 2\alpha^6 - 2\alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha - 2)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^7$

- p=7
  $(7) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 = (7, \alpha - 1) \cdot (7, \alpha + 2) \cdot (7, \alpha^6 - 3\alpha^5 + 3\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha - 3)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p$ e $N(\mathfrak{p}_3) = p^6$

- p=11
  $(11) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4 \cdot \mathfrak{p}_5 = (11, \alpha - 5) \cdot (11, \alpha + 3) \cdot (11, \alpha^2 - 2\alpha - 5) \cdot (11, \alpha^2 - 2\alpha - 1) \cdot (11, \alpha^2 + \alpha + 1)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p, N(\mathfrak{p}_3) = p^2, N(\mathfrak{p}_4) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_5) = p^2$

- p=13
  $(13) = \mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) = p^8$ e quindi 13 rimane primo.

- p=17
  $(17) = \mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) = p^8$ e quindi 17 rimane primo.

- p=19
  $(19) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4 = (19, \alpha - 6) \cdot (19, \alpha - 3) \cdot (19, \alpha - 2) \cdot (19, \alpha^5 - 5\alpha^4 + 3\alpha^3 + \alpha^2 + 5\alpha + 6)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p, N(\mathfrak{p}_3) = p$ e $N(\mathfrak{p}_4) = p^5$

- p=23
  $(23) = \mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) = p^8$ e quindi 23 rimane primo.

- p=29

  $(29) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3) = (29, \alpha - 5) \cdot (29, \alpha - 2) \cdot (29, \alpha^6 - 9\alpha^5 + 14\alpha^4 - 8\alpha^3 - 4\alpha^2 - 3\alpha + 11)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p$ e $N(\mathfrak{p}_3) = p^6$

- p=31

  $(31) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (31, \alpha^3 - 14\alpha^2 - 15\alpha + 4) \cdot (31, \alpha^5 - 2\alpha^4 - 9\alpha^3 - 4\alpha^2 - 2\alpha + 15)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p^3$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^5$

- p=37

  $(37) = \mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) = p^8$ e quindi 37 rimane primo.

- p=41

  $(41) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4 \cdot \mathfrak{p}_5 = (41, \alpha - 19) \cdot (41, \alpha - 15) \cdot (41, \alpha + 6) \cdot (41, \alpha^2 - 12\alpha - 20) \cdot (41, \alpha^3 - 17\alpha^2 + 13\alpha - 3)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p, N(\mathfrak{p}_3) = p, N(\mathfrak{p}_4) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_5) = p^3$

- p=43

  $(43) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4 \cdot \mathfrak{p}_5 \cdot \mathfrak{p}_6 = (43, \alpha - 12) \cdot (43, \alpha - 5) \cdot (43, \alpha + 1) \cdot (43, \alpha + 7) \cdot (43, \alpha^2 - 13\alpha + 8) \cdot (43, \alpha^2 + 6\alpha + 18)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p, N(\mathfrak{p}_3) = p, N(\mathfrak{p}_4) = p, N(\mathfrak{p}_5) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_6) = p^2$

- p=47

  $(47) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 = (47, \alpha + 15) \cdot (47, \alpha^2 - 7\alpha + 9) \cdot (47, \alpha^5 + 23\alpha^4 - 5\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha - 5)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_3) = p^5$

- p=53

  $(53) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (53, \alpha - 25) \cdot (53, \alpha^7 + 9\alpha^6 + 8\alpha^5 - 24\alpha^4 - 9\alpha^3 + 14\alpha^2 - 25)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^7$

- p=59

  $(59) = \mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) = p^8$ e quindi 59 rimane primo.

- p=61

  $(61) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (61, \alpha - 14) \cdot (61, \alpha^7 - 2\alpha^6 - 25\alpha^5 - 12\alpha^4 - 22\alpha^3 - 29\alpha^2 - 19\alpha + 22)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^7$

- p=67

  $(67) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (67, \alpha - 11) \cdot (67, \alpha^7 - 5\alpha^6 + 21\alpha^5 - 10\alpha^4 - 7\alpha^3 + 31\alpha^2 + 27\alpha + 18)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^7$

- p=71

  $(71) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (71, \alpha^2 - 23\alpha + 11) \cdot (71, \alpha^6 + 7\alpha^5 + 21\alpha^4 + 3\alpha^3 + 24\alpha^2 - 4\alpha + 20)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^6$

- p=73

  $(73) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4 \cdot \mathfrak{p}_5 = (73, \alpha - 31) \cdot (73, \alpha + 35) \cdot (73, \alpha^2 - 33\alpha + 21) \cdot (73, \alpha^2 - 22\alpha + 4) \cdot (73, \alpha^2 + 35\alpha + 18)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p, N(\mathfrak{p}_3) = p^2, N(\mathfrak{p}_4) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_5) = p^2$

- p=79

  $(79) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = (79, \alpha^2 + 2\alpha + 32) \cdot (79, \alpha^6 - 18\alpha^5 + 25\alpha^4 - 12\alpha^3 - 5\alpha^2 - 27\alpha - 2)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_2) = p^6$

- p=83

  $(83) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 = (83, \alpha - 12) \cdot (83, \alpha^3 + 2\alpha^2 - 32\alpha + 23) \cdot (83, \alpha^4 - 6\alpha^3 + 21\alpha^2 - 24\alpha - 13)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p^3$ e $N(\mathfrak{p}_3) = p^4$

- p=89

  $(89) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 = (89, \alpha - 16) \cdot (89, \alpha^3 - 40\alpha^2 - 39\alpha - 36) \cdot (89, \alpha^4 + 40\alpha^3 - 21\alpha^2 + 11\alpha - 10)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p, N(\mathfrak{p}_2) = p^3$ e $N(\mathfrak{p}_3) = p^4$

- p=97

  $(97) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4 = (97, \alpha^2 - 12\alpha - 22) \cdot (97, \alpha^2 + 18\alpha + 43) \cdot (97, \alpha^2 + 40\alpha + 2) \cdot (97, \alpha^2 + 35\alpha + 31)$
  con $N(\mathfrak{p}_1) = p^2, N(\mathfrak{p}_2) = p^2, N(\mathfrak{p}_3) = p^2$ e $N(\mathfrak{p}_4) = p^2$

Per ottenere il gruppo delle classi, il gruppo delle unità e il regolatore di un campo di numeri, abbiamo bisogno della struttura calcolata con `bnfinit`.

Gruppo delle classi e numero delle classi

O_K è un dominio di Dedekind.
$Frac(K) = \{J \subseteq K ideale frazionario\}$ è un gruppo rispetto la moltiplicazione di ideali.
$Prin(K) = \{\alpha O_K | \alpha \in K^*\} \subseteq Frac(K)$.
$Cl(K) = Cl(O_K) = \frac{Frac(K)}{Prin(K)}$
$C \in Cl(O_K)$ è chiamata *classe di ideali*,
dove $C = \{(\alpha)J | \alpha \in K^* J \subseteq K$è un ideale frazionario$\}$
La cardinalità del gruppo delle classi $Cl(O_K)$ è chiamato il *numero delle classi* di O_K, o di K: $h_K = \#Cl(O_K)$

```
? K=bnfinit(f);
? K.clgp
%37 = [1, [], []]
```

La prima componente è il numero delle classi, la seconda la decomposizione ciclica, se ciclico, la terza ci dice i suoi generatori.
Regolatore di K

```
? K.reg
%38 = 235669521193.71365225240581626301134959
```

Il *regolatore* R_K di K è definito come :

$$R_K = |det(log\|\varphi_j(\epsilon_i)\|)_{i,j}|$$

dove $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{r_1+r_2-1}$sono l'insieme delle unità fondamentali e φ_j sono nell'insieme degli omomorfismi $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_{r_1+r_2}\}$ tranne uno.
Il regolatore è ben definito, cioè non dipende dagli omomorfismi scelti.

La costante di Minkowski

```
? [r1,r2]=K.sign
%39 = [2, 3]
```

K ha *segnatura* (2, 3): ha due immersioni reali e tre coppie di immersioni complesse e coniugate.

$$M_K = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|\Delta_K|}$$

```
 M=(8!)/(8^8)*(4/Pi)^r2*abs(K.disc)^(1/2)
 %40 = 155627422480.56419761817445719627544228
```

Ogni classe di ideali di K contiene un ideale intero tale che $|N(I)| \leq M_K$

Gruppo delle unità

$O_K^* = \{\alpha \in O_K \mid \alpha\beta = 1 \ \exists\beta \in O_K\}$ forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione.
$\mu_K = \{\epsilon \in K \mid \epsilon^n = 1 \ \exists n \in \mathbb{Z}\}$ è l'insieme delle radici dell'unità e forma un gruppo ciclico
Sia $r = r_1 + r_2 - 1$, esiste un insieme di unità fondamentali $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r$ tali che
$O_K^* = \{\xi\epsilon_1^{n_1} \cdots \epsilon_r^{n_r} | \xi \in \mu_K \text{ e } n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{Z}\}$
In PARI il comando è `K.fu`, ma restituisce l'insieme delle unità fondamentali solo se non è troppo grande. Se restituisce 0, si può "forzare" il calcolo delle unità fondamentali con `K=bnfinit(,1)`e poi `lift(K.fu)`

```
? K.fu
%41 = 0
? K=bnfinit(f,1);
? lift(K.fu)
%43=[88488018322269000866824915796113134013734805276394040160818147239366608O*T^7

    -1803510459808747597836656226857777253321998786115799412387065408739609747 3*T^6

    +30136920149933391467322001941563380826918575580779590001649278521788612859/2*T^5

    +23466079414020595077613802342722196584183917743785033977729006818828973324 0*T^4

    -64322752024903436164469292561711537242043645290511618409852190923251611632 9*T^3

    +18709933307093246950057024285871059296065293594655619881770916215426857863 59/2*T^2
```

-772354177845163568839791194940083249071148327898516624773033436099419180023*T

+408092666166690657241250723110440731744264496165040004387061960627424804467,

1997026792093038770925950881456539450108463773274144443627164407072758276923 13/4*T^7

-33718192277753426455464666224564857814551683841590453846904504687210021890526 75/4*

T^6-862883452251477298693040171845222329907428789483253547705895466052646834030241 9/4*

T^5+268740826486935188687439418713889534929002654665049686560761720490255637490508 21/4

T^4-423083663773320900524421456333598291317259075647129339642035353657998762906863 93/4

T^3+281770123410537757881294548445263950515675386447700071024654321445260234898888 47/4

T^2-676755950766292603466361386192435222307760564729051953793530367905802140995378 3/2*

-2480818993789327048163634434120493930030658271612772896537645509861638475926655,

907322434022901094272022453665160784439484595878875697397363910956454768672342 09288

569123807709542214511546805362723038304654055618960225887736653142610231912425 51*T^7-

296266925102906866790845490548882338617941887374501232669721028127249155485563 471509

273039442186157798474757373452661793083595335598293335800875363512838563451113 875/2*

T^6-499683115927557209030544588337407032708051980088221060634398630293618614580978

563158403090781808676865541263017604877491807868170822757488957812073487364580 8963

36585*T^5+1320035559072599014827672438439931239437925743888898060408353869825802 73

437496834720493524222392540612585556904364859825459650153630432114363865011079 1294

487456174095*T^4+120457791207489248333117208082420516314781146761985037432697998 6073

633385007436359015608726328002614907396740862355092893324932342833492426889343 367

447920079832563699/2*T^3+9632230090266500080538221418697648037936154122437400563 691

592815983224167120990592270996515122696132697465390365628416518831246389081914344 7609

635659344666007763840 5*T^2+ 17448382228887366587535010508940230830006835180721268 78

804144211946240502352948194764343905553072271484199384801359404993702776648682314 79T+

737432864168505599975728410 8*848046995897169988026088362208792678624443425114466396 5

```
7000973527487833357338707611886360271517695265163590325698117097637769776002201084031
4910536936397816801775163, 4285271219881331451261574866019306984552373699805885014145
934013175667886073171727889971756691121523638555962931977494665801383927970757201726
65824566820532170291465358522405672256356221317766171026069901060496883901779/2*T^7 -
85794608924048408353111214487311682497747658916348905585855770616227087382310140959
962795820089383809533692176210646583420928204552989072316117212011017876260943117
06462706509726221376052595702138905148354186447979913667/2*T^6 -
151346515261771009131613378020000562023161068617444790716371564647051286832223655115
41724930600405493094782413894463081201477811942228471105426267910582904842653097449
11447907546233375544692528905573471898612367021642285/2*T^5
+201995345366001948804471110231780274809243833275959869961355141149951853226144161863
872508440510524600187106087099612612783526568345783797869524313085455391297788138006
956701961633503079232093166588554840162442487382707989/2*T^4 +
129838767082711968719046656496069433020762192918999826217442115183538785437904703448
1998672621287132881304108020376201035347212878111593683190257105319085112320041277707
13507203416079069848758537472478704317185385791139435/2*T^3 +
1812462909011848771189579257962265848040587003564630990828567754525610764521166089150
5100092556361510847667057210359984302864497969169173891306086851773406718590674448189
0343809579428105245074701693726711324485717660863501/2*T^2 +
11840156156017089641713270422300754465953226693211593256068837410091561127178658390
08916809627828532028644728767632318618024563050029890222929364184873873248077746582
06272582060621937811508700933922434504827917911712812514*T +51173763270949384007119291
9534034124984058313253329781189852500713063089752109502745901544431631902494543
466559863619491231086971517818166670291204854666926951944360798456349789250217
756045890893816542793773950540907303]
```