COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. Quali possono essere tutti i possibili gruppi di Galois dei polinomi di grado 4 su $\mathbf{Q}$ e su $\mathbf{F}_2$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}[i]$–base del campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 2 \in \mathbf{Q}[i][X]$.

   ....

   c. È vero che due polinomi in $\mathbf{F}_p[X]$ aventi lo stesso grado potrebbero avere campi di spezzamento non isomorfi?

   ....

   d. Elencare tutti i polinomi irriducibili (monici) di grado minore di 5 su $\mathbf{F}_2$.

   ....

2. Dato un gruppo finito G, dimostrare che esiste una estensione di campi E/F opportuna tale che $\mathrm{Gal}(E(F) \cong G$.
   Suggerimento: Usare il Teorema di Cayley, il fatto che l'enunciato è vero per $G = S_n$ e il Teorema di Corrispondenza.

3. Sia $f \in \mathbf{F}_p[X]$ un polinomio di grado 5, si dimostri che se f non ha radici in $\mathbf{F}_p$ e se f non ha fattori quadratici in $\mathbf{F}_p[X]$, allora risulta irriducibile.

4. Descrivere il gruppo di Galois del polinomio $(X+5)^6+3$ specificandone l'ordine.

5. Dopo aver definito la nozione di polinomio ciclotomico ed averne elencato alcune proprietà fondamentali, dimostrare che se p è primo, allora $(X^{p^{k+1}}-1)/(X^{p^k}-1)$ è il p^k–esimo polinomio ciclotomico.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois dimostrandone alcune parti.

7. Dopo averne determinato i fattori irriducibili, si calcoli il numero di elementi nel campo di spezzamento del polinomio $(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)(x^{15}+x^{10}+1)(x^{25}+5x^3+1)$ su $\mathbf{F}_5$

8. Dopo aver dimostrato che è un estensione di Galois di $\mathbf{Q}$, determinare tutti i sottocampi di $\mathbf{Q}(\zeta_{26})$.