*COGNOME* ..... *NOME* ..... *MATRICOLA* .....

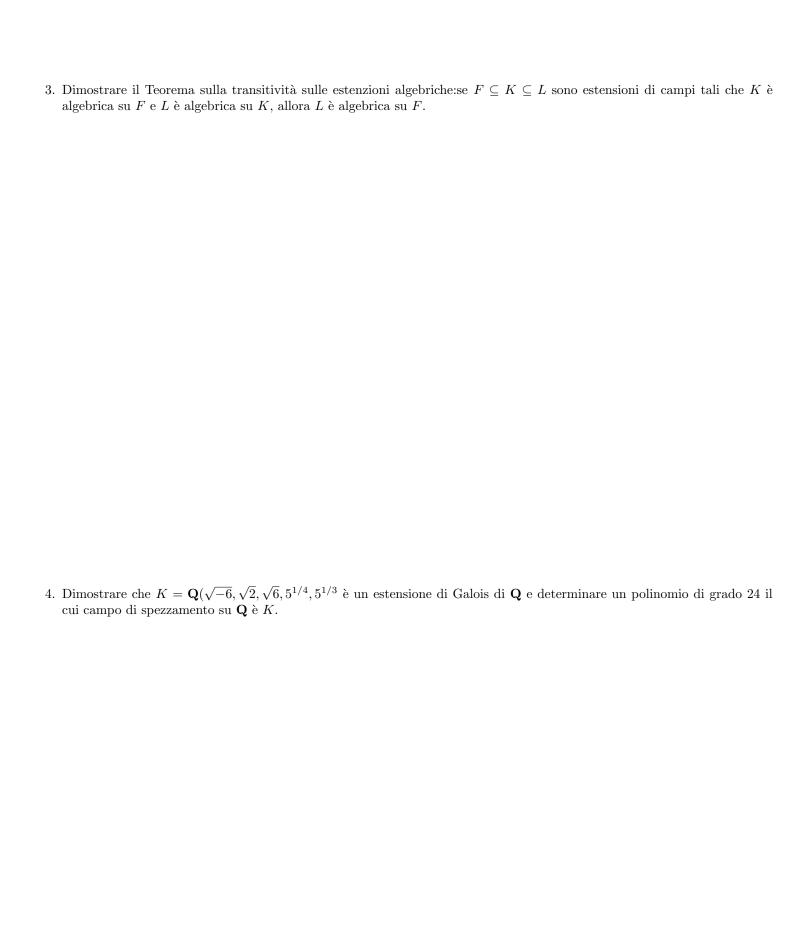
Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima paqina. 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.

(a) Determinare il polinomio minimo di  $2 \cdot 3^{1/3} + 3 \cdot 3^{-1/3}$  su  $\mathbf{Q}$ , dimostrando che si tratta del polinomio minimo.

(b) Dimostrare che  $\mathbf{Q}(2 \cdot 3^{1/3} + 3 \cdot 3^{-1/3}) = \mathbf{Q}(3^{1/3})$  e che  $\mathbf{Q}(3^{1/3}) \neq \mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 

2. Sia R un dominio (i.e. anello commutativo senza divisori dello zero) e supporre che F è un campo contenuto in R (come sottoanello). Dimostrare che dim $_F R$  è finita, allora R è un campo. Mostrare che la condizione dim $_F R < \infty$  è necessaria.



5. Determinare il polinomio minimo di	$\cos 2\pi/15$ .		
6. Enunciare i completa generalità il Te	eorema di corrispondenza di Ga	lois e spiegarne a grandi linee l	a dimostrazione.

7. Dato un campo finito $\mathbf{F}_q$ $(q=p^n)$ , si consideri	$\gamma \in \mathbf{F}_q^*$ e sia $f_{\gamma}(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ il polinomio minimo di $\gamma$ su $\mathbf{F}_p$ .
---	---

a) Mostrare che se  $m = \deg f_{\gamma}$ , allora  $\gamma, \gamma^p, \gamma^{p^2}, \ldots, \gamma^{p^{m-1}}$  sono tutte e sole le radici di  $f_{\gamma}(X)$ .

b) Mostrare che se  $\gamma$  è un generatore del gruppo moltiplicativo  $\mathbf{F}_q^*$ , allora tutte le radici di  $f_\gamma$  sono anche generatori.

8. a) Mostrare che per ogni numero razionale q, il numero reale  $\cos(q\pi)$  è algebrico. Suggerimento: considerare  $e^{i\pi q}$ .

b) Determinare il polinomio minimo di  $3\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5)$ .