COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
....										

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. Quale è polinomio minimo di $\zeta_{16} \in \mathbf{Q}[\zeta_{16}]$ su $\mathbf{Q}[\sqrt{-1}]$?.

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{F}_5$–base del campo di spezzamento del polinomio $X^{25} - X \in \mathbf{F}_5[X]$.

   ....

   c. E' vero che se E/F è un estensione di Galois e il gruppo di Galois ha 101 elementi, allora necessariamente l'estensione è abeliana?

   ....

   d. Produrre un esempio di un polinomio di grado 3 il cui gruppo di Galois ha tre elementi giustificando la risposta.

   ....

2. Sia Ω/F un estensione di campi. Dimostrare che linsieme degli elementi di Ω che sono algebrici su F è un campo.

3. Determinare il gruppo di Galois su $\mathbf{Q}$ di $x^4 - 7x^2 + 3x + 1$ e di $x^4 + 5x + 5$.

4. Calcolare il numero di polinomi quadratici irriducibili su $\mathbf{F}_5$ e dopo averne scelti due distinti, si scriva un isomorfismo tra i rispettivi campi a gambo.

5. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del polinomio $(x^5 - 2) \in \mathbf{Q}[x]$ determinando almeno 10 sottocampi del campo di spezzamento (in effetti ce ne sono 14).

6. Si enunci e si dimostri nella completa generalità il Lemma di Artin spiegando che ruolo gioca nella corrispondenza di Galois.

7. Dopo aver definito il discriminante D_f di un polinomio irriducibile $f \in \mathbf{Q}[X]$, si determini il valore del discriminante di $(x^{101} - 1)/(x - 1)$.

8. Determinare esplicitamente un polinomio irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$ il cui gruppo di Galois è isomorfo a $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$.

9.
   a. Dimostrare che il gruppo di Galois di un campo finito è sempre ciclico.
   b. Determinare la struttura del gruppo di Galois del polinomio $(x^3 - x + 1)(x^5 - x - 1) \in \mathbf{F}_2[x]$.