**Geometria Superiore (I modulo) — GE7**
**Esame di fine semestre, Giovedì 22 Dicembre 2000**
**Polinomi Simmetrici e caratteri di $S_n$**

1. Si scriva una base per lo spazio vettoriale dei polinomi simmetrici omogenei di grado 7 in 3 variabili $x_1, x_2, x_3$.
   Sia $F(x_1, x_2, x_3)$ il polinomio della base trovata che ha come uno dei suoi monomi $x_1 x_2^2 x_3^4$. Si esprima $F(x_1, x_2, x_3)$ come polinomio nelle funzioni simmetriche elementari.

2. Si dimostri la seguente identità:
   $$\sum \left( \frac{\prod_{i<j}(l_i - l_j)}{l_1! l_2! \cdots l_n!} \right)^2 = \frac{1}{n!}$$
   dove la somma è estesa a tutte le $n$-uple di interi
   $$2n > l_1 \geq l_2 \geq \cdots l_n > 0$$
   tali che $\sum_{i=1}^n l_i = \frac{n^2+n}{2}$.

3. Si determini la dimensione del carattere di $S_{16}$ associato alla partizione $\underline{\lambda} = (5, 4, 3, 3, 1)$. Quale è il sottogruppo di Young associato a $\underline{\lambda}$? Si dica quale è il massimo ordine di un elemento in tale sottogruppo.

4. Sia $n \in \mathbf{N}$ e consideriamo la partizione $\underline{\lambda} = (n-2, 2)$. Dimostrare che
   $$\chi_{\underline{\lambda}}(C_\mu) = \frac{1}{2}(i_1 - 1)(i_2 - 1) + i_2 - 1$$
   dove $C_\mu$ è una classe di coniugazione di permutazioni di $S_n$ e se $\sigma \in C_\mu$, $i_1$ e $i_2$ sono rispettivamente il numero di 1–cicli e di 2–cicli nella decomposizione in cicli di $\sigma$.

**Regole.** Ogni esercizio vale 7.5 punti. Tempo concesso 120 minuti. È vietato consultare libri e appunti. È vietato comunicare con altri studenti. Ogni esercizio deve essere svolto su una e una sola facciata di un foglio.