COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima paqina. 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

- 1. Fornire un esempio esplicito di un polinomio il cuo gruppo di Galois su \mathbf{Q} è isomorfo a A_3 .
- 2. Enunciare e dimostrare il Teorema dell'elemento primitivo.
- 3. Determinare tutti i sottocampi K di $\mathbf{Q}(\zeta_{24})$ tali che $[\mathbf{Q}(\zeta_{24}):K]=2$.
- 4. Fornire un esempio di un polinomio irriducibile di grado sei il cui gruppo di Galois è isomorfo al gruppo S₃.
- 5. Calcolare il gruppo di Galois si **Q** del polinomio $x^4 + 2x^2 + 2$.
- 6. Mostrare the se $f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x \alpha_i) \in F[x]$, allors il discriminante D(f) soddisfa: $D(f) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{i=1}^{m} f'(\alpha_i)$.
- 7. Sia $E = \mathbf{Q}[\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{77}]$. Determinare un elemento primitivo $\gamma \in E$ su \mathbf{Q} e scriverne il polinomio minimo su \mathbf{Q} . Descrivere tutti i sottocampi di E.
- 8. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.
- 9. Si calcoli il numero di elementi nel campo di spezzamento del polinomio $(x^{81} 3x^4 x)(x^3 + x^2 + 2)(x^9 + x^3 + 1)$ su \mathbf{F}_3 .
- 10. Dimostrare che $\Phi_{p^2}(x)$ il p^2 -esimo polinomio ciclotomico $(p \ge 3 \text{ primo}))$ è $(x^{p^2} 1)/(x^p 1)$ e usare questa identità per verificare che il suo discriminante è pari a $\pm p^{p(2p-3)}$. Suggerimento: mostrare che se $\zeta_{p^k}=e^{2\pi i/p^k}$, allora $\Phi'_{p^2}(\zeta_{p^2})=p^2/(\zeta_{p^2}(\zeta_p-1))$. Quindi usare una formula nota.
- 11. Determinare un numero algebrico il cui polinomio minimo sui razionali ha un gruppo di Galois isomorfo a $C_2 \times C_{51}$. 12. Definire la nozione di numero costruibile e mostrare che l'insieme dei numeri costruibili è un campo.

NOME E COGNOME	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	TOT.