*COGNOME* .......................... *NOME* .......................... *MATRICOLA* ..........................

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

| FIRMA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ........ | | | | | | | | | |

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. È vero che esistono gruppi che non sono gruppi di Galois di estensioni di campi finiti?

   ....................................................................................................

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo di spezzamento del polinomio $(X^3 - 3)(X^3 - 2) \in \mathbf{Q}[X]$.

   ....................................................................................................

   c. È vero che ogni estensione di un campo di caratteristica 0 ammette un elemento primitivo?

   ....................................................................................................

   d. È vero che se l'$n$–agono regolare è costruibile allora anche l'$8n$–agono lo è?

   ....................................................................................................

2. Dopo aver enunciato la definizione di campo di spezzamento, dimostrare che ogni polinomio a coefficienti in qualsiasi campo ammette un campo di spezzamento.

3. Sia $r \in \mathbf{N}$. Fornire un esempio di polinomio in $\mathbf{Q}[X]$ il cui gruppo di Galois è isomorfo a $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$.

4. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $X^3 + 2X + 2 \in \mathbf{F}_3[X]$.

5. Fornire la definizione di sottogruppo transitivo di $S_n$ e spiegare l'utilità di tale nozione in Teoria di Galois.

6. Si enunci e si dimostri il Lemma di Artin.

7. Costruire un campo finito con 16 elementi e determinare l'ordine di ciascuno dei suoi elementi non nulli.

8. Descrivere in dettagli is reticolo dei sottocampi del campo di spezzamento di $X^{25} - 1 \in \mathbf{Q}[X]$ indicando per ciascun sottocampo il polinomio minimo di un generatore.