

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

| FIRMA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| | | | | | | | | | | |

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

a. È vero che i gruppi non abeliani non sono gruppi di Galois di estensioni finite di campi finiti?

.....

b. Scrivere una \mathbf{Q} -base del campo di spezzamento del polinomio $(X^3 - 1)(X^3 - 2)(X^3 - 3) \in \mathbf{Q}[X]$.

.....

c. Scrivere un elemento primitivo dell'estensione $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, 2^{1/4}, 2^{1/5})$?

.....

d. Quanti elementi ha il gruppo di Galois di $X^9 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$?

.....

2. Dopo aver fornito la definizione di estensione *normale* e di estensione *separabile*, si fornisca l'esempio di un'estensione normale e non separabile e una separabile e non normale.

3. Sia $r \in \mathbf{N}$. Fornire un esempio di polinomio in $\mathbf{Q}[X]$ il cui gruppo di Galois è isomorfo a $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$.

4. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $X^4 + 2X^2 + 2X \in \mathbf{F}_5[X]$.

5. Fornire la definizione di sottogruppo transitivo di S_n e descrivere tutti i sottogruppi transitivi di S_3 e S_4 .

6. Dopo aver enunciato il Teorema di Gauss per la costruibilità dei poligoni regolari, si scrivano tutti gli interi $2 \leq m \leq 150$ per i quali l' m -agono regolare risulta costruibile con riga e compasso.
7. Costruire un campo finito con 27 elementi e determinare l'ordine di ciascuno dei suoi elementi non nulli.
8. Descrivere in dettagli il reticolo dei sottocampi del campo di spezzamento di $X^{30} - 1 \in \mathbf{Q}[X]$ indicando per ciascun sottocampo il polinomio minimo di un generatore.