Università degli Studi Roma Tre

Dipartimento di Matematica e Fisica

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Capitolo 0 - Tesi di Laurea Magistrale

Le Frazioni Egizie

Candidato:
Francesca Bernieri

Relatore:
Prof. Francesco Pappalardi

Anno Accademico 2017-2018
Marzo 2019

Indice

0.1 Introduzione

L'argomento che andremo ad approfondire in questa tesi riguarda le Frazioni Egizie. Queste, nonostante la loro antichissima origine, continuano ad essere oggetto di studio nella matematica ricreativa, nella moderna Teoria dei Numeri e negli studi storici sulla matematica antica. Sebbene le Frazioni Egizie non siano più utilizzate nella maggior parte delle applicazioni pratiche della matematica, chi si occupa di Teoria dei Numeri ha continuato a studiare diversi problemi ad esse correlati. Oltre allo studio dei metodi che gli Egiziani usavano nel calcolo con le Frazioni Egizie, si studiano problemi come: delimitare la lunghezza o il massimo denominatore nelle rappresentazioni di queste, trovare espansioni di certe forme speciali o in cui i denominatori sono tutti di un certo tipo, o la terminazione di vari metodi per l'espansione della Frazione Egizia.

0.2 Le Frazioni Egizie

Una Frazione Egizia è una somma finita di frazioni unitarie, quindi frazioni il cui numeratore è uguale ad uno ed il denominatore è un intero positivo, ed inoltre i denominatori differisco tutti l'uno dall'altro. Il valore di una tale espressione è un numero razionale positivo a/b. Viceversa, ogni numero razionale positivo può essere rappresentato da una Frazione Egizia. Quindi diamo la seguente definizione

Definizione 1. *Dato $a/b \in \mathbb{Q}^{>}$, un'espansione in Frazione Egizia di a/b di lunghezza k è l'espressione*

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k}$$

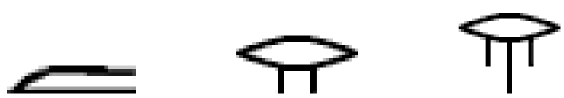
con $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k \in \mathbb{N}$, distinti.

Quindi tutti i numeri razionali venivano espressi solo come somme di frazioni unitarie, fatta eccezione di 2/3 e 3/4.

Il geroglifico usato per indicare una frazione era

che significava anche "parte". Le frazioni venivano dunque scritte con questo segno, che indicava anche il numeratore 1, e il denominatore positivo sotto. Quindi, ad esempio 1/3 si scriveva:

C'erano dei simboli speciali per indicare 1/2 e due frazioni non unitarie, 2/3 , 3/4 che venivano usati più o meno frequentemente:



Gli storici moderni della matematica hanno studiato il Papiro di Rhind e altre fonti antiche nel tentativo di scoprire i metodi che gli Egiziani usavano nel calcolo delle Frazioni Egizie. In particolare, lo studio in quest'area si è concentrato sulla comprensione delle tabelle di espansione per i numeri della forma $2/n$ nel Papiro di Rhind.

Al di là del loro uso storico, le Frazioni Egizie hanno alcuni vantaggi pratici rispetto ad altre rappresentazioni di numeri razionali. Queste possono aiutare a dividere un numero di oggetti in parti uguali. Ad esempio, se si vuole dividere 5 pizze uguali tra 8 commensali, la Frazione Egizia

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

ci dice che ognuno mangerà metà di una pizza più un ottavo di un'altra.

0.3 Metodi per calcolarle

Sebbene le espansioni presenti nel Papiro di Rhind possano generalmente essere descritte come identità algebriche, i metodi usati dagli Egiziani potrebbero non corrispondere direttamente a queste identità. Infatti identità diverse corrispondono ad espansioni con denominatori primi ma anche ad espansioni con denominatori non primi, oppure più di un'identità si adatta ai numeri di ciascun tipo. Vediamo alcuni di questi metodi.

- Per frazioni con denominatori dispari p piccoli, viene utilizzata l'espansione

$$\frac{2}{p} = \frac{2}{p+1} + \frac{2}{p(p+1)}$$

- Per frazioni con denominatori primi p grandi, è stata usata un'espansione della forma

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{A} + \frac{(2A-p)}{Ap},$$

  dove A è un numero con molti divisori (come un numero pratico) tra $p/2$ e p. Il termine rimanente $(2A-p)/Ap$ viene rappresentato come somma dei divisori di A fratto Ap. Potrebbero esserci molte espansioni di questo tipo per un dato p; tuttavia, si osserva che l'espansione scelta dagli Egiziani era spesso quella che faceva sì che il più grande denominatore fosse il più piccolo possibile tra tutte le espansioni che si adattavano a questo schema.

- Per le frazioni i cui denominatori sono della forma $p \times q$, si può espandere $2/pq$ usando l'identità

$$\frac{2}{pq} = \frac{1}{aq} + \frac{1}{apq},$$

  dove $a = (p+1)/2$. Alcuni autori hanno preferito scrivere questa espansione come $2/A \times A/pq$, dove $A = p+1$. Sostituendo il secondo termine di questo prodotto con $p/pq + 1/pq$ e semplificandolo, porta a un'espressione equivalente alla prima. Questo metodo sembra essere stato usato per molti dei numeri non primi nel Papiro di Rhind, ma ci sono delle eccezioni.

- Si può anche espandere 2 / pq come
$$\frac{2}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr},$$
dove $r = (p + q)/2$.
- Gli scribi successivi usavano una forma più generale di questa espansione,
$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr},$$
dove $r = (p + q)/n$, che funziona quando $p + q$ è un multiplo di n.
- L'espansione finale nel Papiro Rhind, 2/101, non si adatta a nessuna di queste forme, ma utilizza invece l'espansione
$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{6p}$$
che potrebbe essere applicata indipendentemente dal valore di p.

0.4 Liber Abaci

Un importante testo di matematica medievale, il *Liber Abaci* (1202) di Leonardo da Pisa, più comunemente noto come Fibonacci, fornisce alcune informazioni sugli usi delle Frazioni Egizie nel Medioevo e introduce argomenti che continuano ad essere importanti nella matematica moderna. Una sezione di questo libro fornisce un elenco di metodi per la conversione di frazioni volgari in Frazioni Egizie. Ad esempio: Se il numero non è già una frazione unitaria, il primo metodo in questa lista è quello che tenta di dividere il numeratore in una somma di divisori del denominatore. Questo è possibile ogni volta che il denominatore è un *numero pratico*.

I metodi successivi coinvolgono identità algebriche come ad esempio
$$\frac{a}{ab-1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b(ab-1)}.$$

Fibonacci descrive metodi simili a questo per frazioni il cui denominatore è un intero che è più piccolo di due o tre numeri, di un numeratore con tanti fattori.

Nel raro caso in cui questi metodi falliscano, Fibonacci suggerisce un algoritmo *Greedy* per calcolare le Frazioni Egizie, in cui si sceglie ripetutamente la frazione unitaria con il denominatore più piccolo e che non sia più grande della frazione rimanente da espandere. Detto meglio, la frazione a/b viene sostituita con l'espansione
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\lceil b/a \rceil} + \frac{(-b) \bmod a}{b \lceil b/a \rceil}$$

e visto che $(-b) \bmod a < a$, questo metodo produce un'espansione finita.

Fibonacci suggerisce di passare ad un altro metodo dopo la prima espansione di questo tipo, ma fornisce anche esempi in cui questo algoritmo viene ripetuto fino a quando non è stata ricavata un'espansione completa della Frazione Egizia.

Rispetto alle antiche espansioni Egizie o ai metodi più moderni, questo metodo può produrre espansioni anche molto lunghe, con grandi denominatori. Ad esempio, tramite questo algoritmo abbiamo che:

$$\begin{aligned}\frac{5}{121} &= \frac{1}{25} + \frac{4}{3025} = \\ &= \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{3}{2289925} = \\ &= \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{2}{1747920361825} = \\ &= \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225},\end{aligned}$$

mentre altri metodi portano all'espansione migliore

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

Dopo la descrizione di questo algoritmo, Fibonacci suggerisce un altro metodo, in cui per espandere una frazione a/b si cerca un numero c con molti divisori, tale che $b/2 < c < b$, si sostituisce a/b con ac/bc e si espande ac come somma di divisori di bc. Questo metodo è simile a quello proposto da Hultsch e Bruins per spiegare alcune delle espansioni del Papiro di Rhind.

0.5 Moderna Teoria dei Numeri e Problemi aperti

La congettura di Erdös-Graham nella Teoria dei Numeri afferma che, se gli interi superiori a 1 sono suddivisi in un numero finito di sottoinsiemi, allora uno di questi sottoinsiemi può essere utilizzato per formare una Frazione Egizia uguale ad uno. Cioè: se i numeri interi positivi sono suddivisi in $r > 0$ sottoinsiemi disgiunti, allora almeno uno di essi contiene un sottoinsieme S finito, tale che

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = 1.$$

La congettura fu provata nel 2003.

Il problema di Znám ed i numeri primari pseudoperfetti sono strettamente correlati all'esistenza di Frazioni Egizie della forma

$$\sum \frac{1}{x_i} + \prod \frac{1}{x_i} = 1.$$

Ad esempio, il numero primario pseudoperfetto 1806 è il prodotto dei numeri primi $2, 3, 7$ e 43 e dà origine alla Frazione Egizia

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1806}.$$

Le Frazioni Egizie sono normalmente definite con tutti i denominatori distinti, ma questo requisito può essere tolto e consentire anche denominatori uguali. Tuttavia, questa forma "rilassata" delle Frazioni Egizie non è utile a rappresentare un numero usando meno frazioni unitarie, poiché qualsiasi espansione con frazioni ripetute può essere convertita in una Frazione Egizia di lunghezza uguale o inferiore con tale sustituzione

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k(k+1)}$$

se k è dispari, o semplicemente sostituendo

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

se k è pari. Questo risultato fu provato per la prima volta da Takenouchi (1921).

Graham e Jewett hanno dimostrato che è possibile convertire espansioni con denominatori ripetuti a Frazioni Egizie, tramite la sostituzione

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$$

questo metodo chiaramente porta ad espansioni più lunghe ed inoltre potrebbero avere anche grandi denominatori. Botts (1967) aveva originariamente usato questa tecnica di sostituzione per dimostrare che ogni numero razionale ha rappresentazione in frazione egizia con denominatori minimi arbitrariamente grandi.

Graham (1964) ha caratterizzato i numeri che possono essere rappresentati dalle Frazioni Egizie in cui tutti i denominatori sono una potenza n-esima. In particolare, un numero razionale q può essere rappresentato come una Frazione Egizia con denominatori quadrati se e solo se q si trova in uno dei due intervalli

$$\left[0, \frac{\pi^2}{6} - 1\right) \cup \left[1, \frac{\pi^2}{6}\right).$$

L'espansione di Engel, a volte chiamata *Prodotto Egizio*, è una forma di espansione della Frazione Egizia in cui ogni denominatore è un multiplo del precedente

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots$$

dove la sequenza degli a_i è necessariamente decrescente. Allora abbiamo che ogni numero razionale ha un'espansione di Engel finita, mentre i numeri irrazionali hanno un'espansione infinita di Engel.

Anshel e Goldfeld (1991) studiano numeri che possono essere rappresentati da diverse Frazioni Egizie ma che abbiano lo stesso numero di termini e tali che il prodotto dei denominatori sia lo stesso. Uno degli esempi che forniscono è

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20}$$

e, a differenza degli antichi egizi, in queste espansioni è possibile trovare denominatori uguali.

Alcuni problemi importanti che riguardano le Frazioni Egizie rimangono però tutt'ora irrisolti.

La congettura di Erdös-Straus, ad esempio, che considera la più corta espansione possibile per quanto riguarda le frazioni del tipo $4/n$. Data l'espressione

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

questa esiste per ogni n? È stata verificata per tutti gli $n < 10^{14}$, ma la verità generale della congettura rimane ancora sconosciuta.

È possibile utilizzare algoritmi a forza bruta per trovare la rappresentazione della Frazione Egizia di un dato numero con il minor numero possibile di termini o minimizzando il più grande denominatore; tuttavia, tali algoritmi possono essere abbastanza inefficienti. In generale la complessità computazionale di tali problemi, rimane sconosciuta.

0.6 Conclusioni

Quindi il nostro scopo è quello di studiare i principali risultati legati alle Frazioni Egizie. Porremo una particolare attenzione agli studi di Fibonacci riportati su *Liber Abaci*, cercando di capire come funzionano alcuni algortmi per il calcolo delle espansioni delle Frazioni Egizie. Facendo questo viaggio tra i diverisi utilizzi di questa particolare forma di frazioni e dei problemi ad essa legati vorremmo poi arrivare a comprendere la Congettura di Erdös-Straus ed i risultiti già noti legati alla congettura.