Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercizi CR510

Dario Giannini

3 Marzo 2014

1. **BASE INDUZIONE:**
   Se $x = 0$ l'identitá é verificata in quanto $0 = 0$.
   Se $x = 1$ l'identitá é verificata in quanto $1 = \frac{1(2)(3)}{6}$.
   PASSO INDUTTIVO:
   Supponiamo che l'identitá valga per $x-1$ e la verifichiamo per x:
   $1+4+9+\cdots+(x-1)^2+x^2 = [1+4+9+\cdots+(x-1)^2]+x^2 =$
   $= \frac{(x-1)x[2(x-1)+1]}{6} + x^2 = \frac{x[(x-1)(2x-1)+6x]}{6} =$
   $= \frac{x(2x^2+3x+1)}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$
   ossia l'uguaglianza che volevo dimostrare.

2. (a) Basta mostrare un controesempio. Come suggerito dal libro di testo, se si pone $x = \frac{25}{4}$, affinché il punto appartenga alla curva ellittica $E : y^2 = x^3 - 25x$ si deve avere che $y = \frac{75}{8}$ (per trovare questo valore di y basta sostituire x all'interno dell'equazione di E).
   Ricapitolando la coppia $(\frac{25}{4}, \frac{75}{8})$ verifica l'equazione di E, tuttavia:
   $\frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$ non é un quadrato perfetto;
   $\frac{25}{4} + 5 = \frac{45}{4}$ non é un quadrato perfetto.

   (b) Sia $(a, b) \in E : y^2 = x^3 - n^2x$ (i.e. $b^2 = a^3 - n^2a$), con $a \neq 0, \pm n$. Voglio trovare la retta tangente passante per (a, b). Per prima cosa trovo il suo coefficiente angolare:

   $$2yy' = 3x^2 - n^2 \quad \Rightarrow \quad m = y'|_{(a,b)} = \frac{3a^2 - n^2}{2b}$$

   La retta tangente avrá quindi la seguente equazione:

   $$t: \; y = \frac{3a^2 - n^2}{2b}(x - a) + b$$

   A questo punto metto a sistema t ed E per trovare l'altro punto di intersezione (so giá che la retta tangente intersecherá il punto (a, b) 'due volte').

   $$\begin{cases} y = m(x-a) + b \\ y^2 = x^3 - n^2x \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} y = m(x-a) + b \\ (m(x-a)+b)^2 = x^3 - n^2x \end{cases}$$

A me interessa sapere solo quale sia il coefficiente di x^2 che corrisponde all'opposto della somma delle tre radici del polinomio, se questo é monico positivo (ossia il coefficiente di x^3 é $+1$). In questo caso:
$a + a + x_1 = m^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = m^2 - 2a$ e $y_1 = m(m^2 - 3a) + b$
Ora voglio dimostrare che x_1,$x_1 - n$ e $x_1 + n$ sono quadrati perfetti:

$$x_1 = \left(\frac{3a^2 - n^2}{2b}\right)^2 - 2a = \frac{9a^4 + n^4 - 6a^2n^2 - 8b^2a}{4b^2}$$

da cui sfruttando il fatto che $b^2 = a^3 - n^2a$ ricavo:

$$x_1 = \frac{a^4 + 2a^2n^2 + n^4}{4b^2} = \left(\frac{a^2 + n^2}{2b}\right)^2$$

N.B.: Tutto ció é valido se e solo se $b \neq 0$. Tuttavia questa condizione é verificata per $a \neq 0, \pm n$ come da ipotesi!
Mi rimane da mostrare che $x_1 + n$ e $x_1 - n$ sono quadrati perfetti:

$$x_1 + n = \frac{a^4 + 4na^3 + 2a^2n^2 - 4an^3 + n^4}{4b^2} = \left(\frac{a^2 + 2an - n^2}{2b}\right)^2$$

$$x_1 - n = \frac{a^4 - 4na^3 + 2a^2n^2 + 4an^3 + n^4}{4b^2} = \left(\frac{n^2 + 2an - a^2}{2b}\right)^2$$

3. (a) $x = -4 + t$ e $y = 6 + mt$
$(6 + mt)^2 = (-4 + t)^3 - 25(-4 + t) \quad \Rightarrow$
$36 + m^2t^2 + 12mt = -64 + t^3 + 48t - 12t^2 + 100 - 25t \quad \Rightarrow$
$t^3 - (m^2 + 12)t^2 + (23 - 12m)t = 0 \quad \Rightarrow$
$t[t^2 - (m^2 + 12)t + 23 - 12m] = 0$ Da cui ricavo subito che $t = 0$ é una radice.

(b) Sia $m = \dfrac{23}{12} \quad \Rightarrow$
Sostituisco tale valore di m all'interno dell'equazione precedente ottenendo
$t^2(t - \dfrac{2257}{144})$
Da cui ricavo subito che $t = 0$ é una radice doppia.

(c) La radice non nulla del polinomio in t sará dunque $t_0 = \dfrac{2257}{144}$.
Per trovare i valori di x e y richiesti mi basta sostituire t_0 alle espressioni di x e y date in precedenza:

$$x = -4 + t_0 = \frac{1681}{144}$$

$$y = 6 + mt_0 = \frac{62279}{1728}$$

4. Sia $(x_1, y_1) = \left(\dfrac{1681}{144}, \dfrac{62279}{1728}\right)$, sfrutto le formule trovate nell'esercizio 2.b per trovare l'altro punto di intersezione fra $E: \ y^2 = x^3 - 25x$ e la tangente

ad E nel punto (x_1, y_1):

$$\begin{cases} x_2 = \left(\frac{x_1^2+n^2}{2y_1}\right)^2 \\ y_2 = m(m^2 - 3x_1) + y_1 \end{cases}$$

dove in questo caso $n = 5$ e $m = \dfrac{3x_1^2 - 25}{2y_1} = \dfrac{2652961}{498232}$.
Sostituendo si trova che:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{4337681065688610652056 1}{5135673858195456} \\ \\ y_2 = \dfrac{1791076534232245919}{3339324446657665536} \end{cases}$$

Ora bisogna trovare i cateti a,b e l'ipotenusa c che corrispondono al punto di E trovato; si ha che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_2 = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 \\ y_2 = \dfrac{(a^2 - b^2)c}{8} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{c^2}{2} + \dfrac{4y_1y_2}{x_1^2 + 25}} = \dfrac{4920}{1519} \\ \\ b = \sqrt{\dfrac{c^2}{2} - \dfrac{4y_1y_2}{x_1^2 + 25}} = \dfrac{1519}{492} \\ \\ c = \dfrac{x_1^2 + 25}{y_1} = \dfrac{3344161}{747348} \end{cases}$$

5. Attuando il seguente cambio di variabili $\begin{cases} x_1 = 12x + 6 \\ y_1 = 72y \end{cases}$ all'equazione $y_1^2 = x_1^3 - 36x_1$ si ottiene:

$$5184y^2 = 1728x^3 + 2592x^2 + 1296x + 216 - 432x - 216 \quad \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(2x^2 + 3x + 1)}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$