

# Estudio del péndulo doble con un algoritmo Runge-Kutta.

Pablo Fuentes Chemes

4 de Julio de 2023

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Péndulo doble . . . . .	2
1.2. Algoritmo de Runge-kutta de cuarto orden . . . . .	3
<b>2. Resultados y discusión</b>	<b>4</b>
2.1. Mapas de Poincaré . . . . .	4
2.2. Estabilidad de las soluciones . . . . .	6
2.2.1. Coeficientes de Lyapunov . . . . .	6
<b>3. Conclusiones</b>	<b>9</b>

# 1. Introducción

## 1.1. Péndulo doble

En esta práctica se ha usado el algoritmo de Runge-Kutta para simular un péndulo doble compuesto por dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por dos alambres de longitud  $l_1$  y  $l_2$ , como se ve en la siguiente figura:

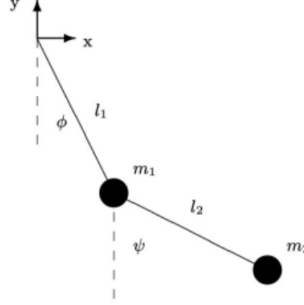


Figura 1: Péndulo estudiado

El Hamiltoniano del sistema será:

$$H = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\psi}^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\psi-\phi) + (m_1+m_2)gl_1(1-\cos\phi) + m_2gl_2(1-\cos\psi)$$

Por simplicidad se ha considerado  $l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 1$ . Esto reduce el Hamiltoniano a:

$$H = \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\psi - \phi) + 2g(1 - \cos\phi) + g(1 - \cos\psi) \quad (1)$$

Del cual se han resuelto sus ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -2g\sin(\phi) + \frac{p_\phi p_\psi \sin(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} - \left( \frac{p_\phi^2 + 2p_\psi^2 - 2p_\phi p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} \right) \sin(\psi - \phi)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)}$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -g\sin(\psi) - \frac{p_\phi p_\psi \sin(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} + \left( \frac{p_\phi^2 + 2p_\psi^2 - 2p_\phi p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} \right) \sin(\psi - \phi)$$

Y, obteniendo también las expresiones resultantes para sus momentos las cuales usaremos con las condiciones iniciales:

$$p_\psi = \frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\phi} \cos(\psi - \phi) + \dot{\psi} \quad (2)$$

$$p_\phi = \frac{\partial H}{\partial \dot{\phi}} = 2\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\psi - \phi) \quad (3)$$

Como inicialmente en 1 hay 4 parámetros libres, los reduciremos a 2 de la siguiente manera: fijaremos una velocidad angular inicial a 0 y estudiaremos varios casos con energías iguales a  $E = 1, 3, 5, 10, 15$  y 25 en algunos casos, al hacer esto y fijar los ángulos iniciales, ya podemos obtener la velocidad angular restante

$$\begin{cases} \dot{\phi}_0 = 0 \rightarrow \dot{\psi}_0 = \sqrt{2(E - 2g(1 - \cos(\phi_0)) - g(1 - \cos(\psi_0))} \\ \dot{\psi}_0 = 0 \rightarrow \dot{\phi}_0 = \sqrt{E - 2g(1 - \cos(\phi_0)) - g(1 - \cos(\psi_0))} \end{cases}$$

y, junto con los momentos obtenidos de 2 y 3, comenzar con el algoritmo.

## 1.2. Algoritmo de Runge-kutta de cuarto orden

Para resolver numéricamente las cuatro ecuaciones diferenciales anteriores utilizaremos este método que consiste en:

Sea la ecuación diferencial a resolver,  $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ , donde  $y(t)$  es un vector de  $N$  dimensiones.

Sea  $y(t_0) = y_0$  dado. Entonces,  $y(t_0 + h)$  se puede aproximar por

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \frac{1}{6}[k^{(1)} + 2k^{(2)} + 2k^{(3)} + k^{(4)}] + O(h^5)$$

donde

$$k^{(1)} = hf(y_0, t_0)$$

$$k^{(2)} = hf\left(y_0 + \frac{k^{(1)}}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k^{(3)} = hf\left(y_0 + \frac{k^{(2)}}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k^{(4)} = hf(y_0 + k^{(3)}, t_0 + h)$$

## 2. Resultados y discusión

### 2.1. Mapas de Poincaré

Los Mapas de Poincaré son las intersecciones de la trayectoria en el espacio de fases del péndulo doble con una superficie transversal, llamada superficie de Poincaré.

Como los Mapas de Poincaré dependen de la superficie escogida, hemos utilizado como superficie de Poincaré cuando  $\dot{\psi} = 0$ , en esos instantes se ha registrado  $\psi$ ,  $\phi$  y  $\psi$ ,  $\dot{\phi}$ , tras un tiempo, la representación de estos puntos van a representar los Mapas de Poincaré.

También se ha utilizado como superficie de Poincaré  $\dot{\phi} = 0$ , y en ese instante se ha registrado  $\psi$ ,  $\dot{\psi}$ , la discusión de los resultados será la misma para los 3 Mapas de Poincaré ya que la información que nos aporta del sistema es muy parecida, el uso de otra superficie para este caso ha sido porque si utilizáramos la anterior, el Mapa de Poincaré no nos diría nada útil ya que registraríamos  $\dot{\psi}$  cuando  $\dot{\psi} = 0$ , por lo que el mapa resultante sería una sucesión de puntos formando una línea vertical en  $\dot{\psi} = 0$ . El motivo por el cual no hemos utilizado  $\dot{\phi} = 0$  como superficie en la anterior es el análogo al explicado ahora mismo.

Previamente a los resultados conviene definir el concepto de «atractor», un atractor se refiere a una región o conjunto de puntos en el espacio de fases o en los Mapas de Poincaré donde las trayectorias convergen o se acumulan a medida que evolucionan en el tiempo. Estos puntos representan estados de equilibrio, ciclos u otros comportamientos estables del sistema. Los atractores pueden ser puntos aislados, curvas, superficies o incluso conjuntos fractales más complejos.

En un péndulo doble, el tipo de atractores que pueden surgir depende de las condiciones iniciales y de los parámetros del sistema, incluyendo atractores estables, periódicos o no y atractores caóticos.

A continuación se muestran estos mapas sobre su trayectoria de fase, ya que los resultados obtenidos pueden ser discutidos mucho mejor si los visualizamos juntos, todos ellos realizados con un paso  $h = 0,002$  y hasta un tiempo final  $t_f = 50$ . Ya que hay muchos resultados cuya discusión sería la misma, se van a mostrar solo los que sean de interés, no obstante, se pueden consultar todos en [5]:

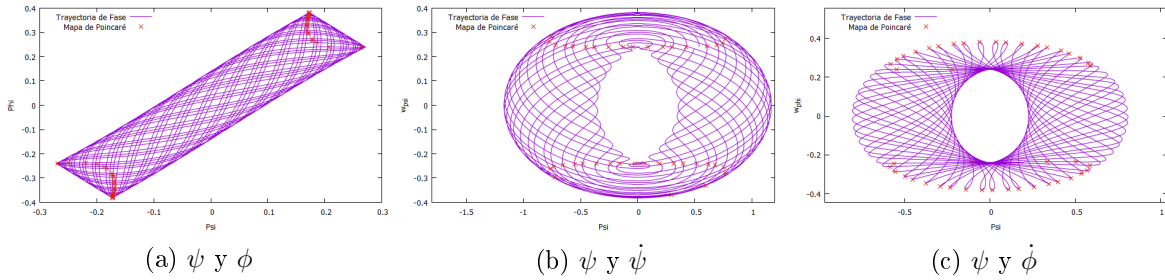


Figura 2: Representación de la trayectoria en el espacio de fase y, sobre este, los Mapas de Poincaré de con  $E = 1$ ,  $\psi_0 = \phi_0 = \pi/13$  y  $\dot{\phi}_0 = 0$

En este caso, se puede observar que la trayectoria en el espacio de fases tiene una forma cíclica cuasi-periódica en las 3 figuras y los Mapas de Poincaré asociados tienen una distribución alrededor de dos puntos de equilibrio, lo cual se puede asociar a un atractor estable, que indica un comportamiento predecible y regular del sistema. Este resultado tiene sentido ya que cuando el péndulo doble se encuentra en un estado de baja energía y las condiciones iniciales se encuentran cerca de una posición de equilibrio, lo más probable es que si se perturba ligeramente el sistema desde una condición inicial cercana al atractor, las trayectorias seguirán acercándose al atractor en lugar de alejarse de él.

Resultados muy parecidos se han encontrado para las  $E = 1, 3, 5$  y para  $\dot{\phi}_0 = 0$  y  $\dot{\psi}_0 = 0$  con  $\psi_0 = \phi_0 = \pi/13$  y se encuentran en [5].

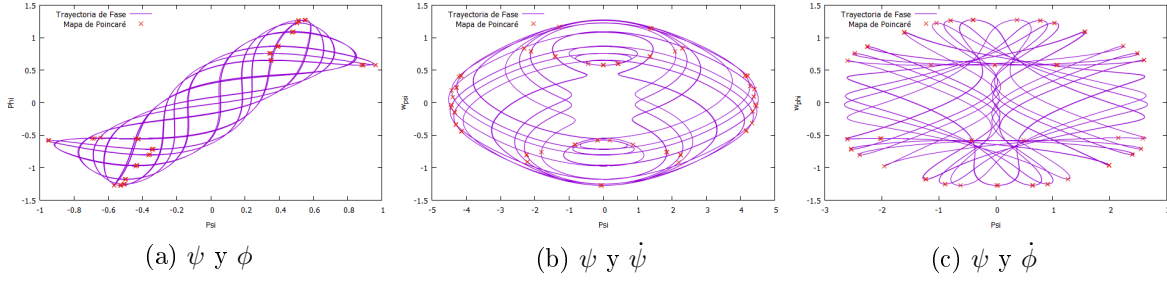


Figura 3: Representación de la trayectoria en el espacio de fase y, sobre este, los Mapas de Poincaré de con  $E = 10$ ,  $\psi_0 = \phi_0 = \pi/13$  y  $\dot{\phi}_0 = 0$

Dentro de los atractores estables se pueden encontrar atractores periódicos, que son aquellos en los que la órbita es cerrada y se repite en intervalos regulares, en este caso hemos encontrado uno y se ha comprobado para  $t_f = 500s$  y las representaciones eran las mismas, por lo que nos parecía de interés mostrarlo.

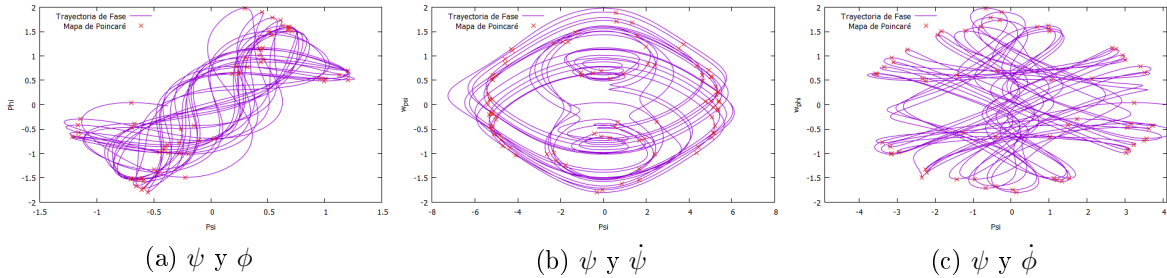


Figura 4: Representación de la trayectoria en el espacio de fase y, sobre este, los Mapas de Poincaré de con  $E = 15$ ,  $\psi_0 = \phi_0 = \pi/13$  y  $\dot{\phi}_0 = 0$

Para la máxima energía que nos propone el informe tampoco se han encontrado atractores totalmente caóticos, en este caso se puede observar cómo esos comportamientos cíclicos cada vez son menos periódicos y cómo los Mapas de Poincaré parecen estar

distribuidos de manera más aleatoria, aunque todavía se observan agrupaciones de estos alrededor de lo que podrían considerarse puntos de equilibrio. Con esto se puede intuir que poco a poco a medida que la energía sube nos vamos acercando a un comportamiento más caótico y que en este caso concreto parece que estamos transicionando de una versión más estable a una más caótica. Por ello se ha optado por realizar una última simulación para  $E = 25$ ,  $\psi_0 = \pi/3$ ,  $\phi_0 = -\pi/3$  y  $\dot{\psi}_0 = 0$ , ya que los atractores caóticos aparecen en regiones de alta energía y con determinadas condiciones iniciales, obteniendo por fin:

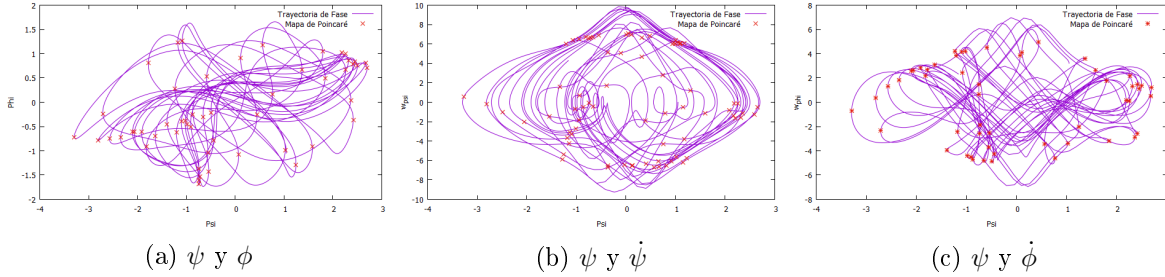


Figura 5: Representación de la trayectoria en el espacio de fase y, sobre este, los Mapas de Poincaré de con  $E = 25$ ,  $\psi_0 = \pi/3$ ,  $\phi_0 = -\pi/3$  y  $\dot{\psi}_0 = 0$

Se puede ver que el atractor es caótico ya que tanto la trayectoria de fase como los Mapas de Poincaré no parecen tener ningún tipo de distribución a diferencia de los estables, parece como si fueran aleatorios, los atractores caóticos muestran una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, por lo que el sistema evolucionará de manera muy diferente si se varía, aunque sea un poco, cualquiera de las utilizadas para esta simulación, aunque eso se comprobará en los siguientes apartados.

## 2.2. Estabilidad de las soluciones

### 2.2.1. Coeficientes de Lyapunov

Las trayectorias en el espacio fase de un sistema caótico divergen exponencialmente con el paso del tiempo de acuerdo a la expresión [2]:

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda t} \quad (4)$$

Donde el exponente  $\lambda$  es conocido como coeficiente de Lyapunov,  $\Delta x_0$  es la separación inicial de las trayectorias en el espacio fase y  $\Delta x(t)$  es la separación de estas después de un tiempo ( $t$ ). De la ecuación 4 Se puede obtener:

$$\ln \left( \frac{\Delta x(t)}{\Delta x_0} \right) = \ln(e^{\lambda t}) = \lambda t \quad (5)$$

La expresión 5 es de la forma  $y = ax$  entonces se puede hacer un ajuste de recta para conocer el valor de  $\lambda$ .

Se ha realizado este ajuste para el sistema caótico  $E = 25$ , el más estable  $E = 1$  y para  $E = 15$  ya que este era el menos periódico de los sistemas estables estudiados, todos ellos con  $\psi_0 = 0$ ,  $h = 0,02$ ,  $\phi_0 = \psi_0 = 0,2 \text{ rad}$  y  $\Delta\phi = \Delta\psi = 0,01 \text{ rad}$ :

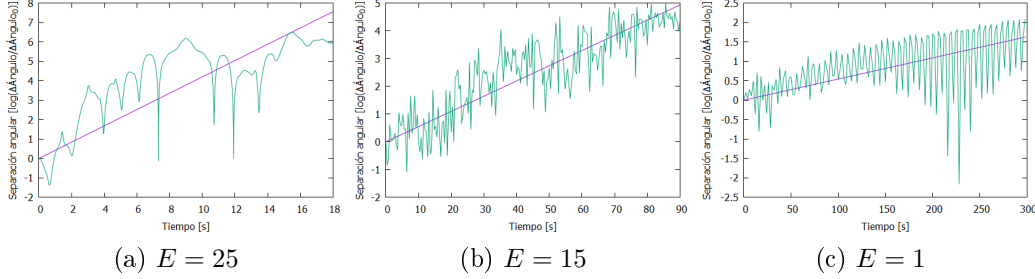


Figura 6: Representación del logaritmo natural de la separación angular en el espacio de fase entre la separación angular inicial y, sobre este, los ajustes correspondientes.

Se obtiene respectivamente  $\lambda_{25} = 0,433 \pm 0,005$ ,  $\lambda_{15} = 0,0548 \pm 0,0009$  y  $\lambda_1 = 0,0054 \pm 0,0003$  los cuales serían los Coeficientes de Lyapunov en cada caso, como se esperaba  $\lambda_{25} \gg \lambda_{15} \gg \lambda_1$  ya que este coeficiente indica la velocidad con la que el sistema separa la trayectorias en el espacio de fases de  $\psi$  y  $\phi$  con pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales. Cabe destacar que aunque la pendiente de los 3 ajustes puede parecer parecida en los gráficos, hay que fijarse en el eje x, ya que el promedio temporal no ha sido el mismo en todos, esto es debido a que la separación de la trayectoria en el espacio de fase alcanza un límite en el que se hace constante ya que las trayectorias no pueden separarse más en promedio debido a que  $\psi, \phi \in [0; 360 * 2\pi]$  rad, en el caso de  $E = 25$  este punto se ha alcanzado aproximadamente a los 18s como se muestra a continuación:

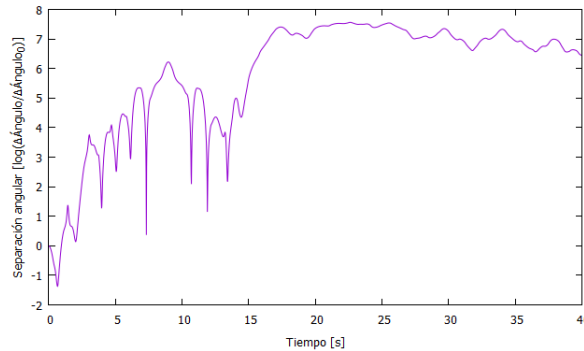


Figura 7:  $E = 25$

Figura 8: Representación del logaritmo natural de la separación angular en el espacio de fase entre la separación angular inicial.

en el caso de  $E = 15$  alrededor de los 90s, lo cual indica también lo que llevamos

observando desde los Mapas de Poincaré, que con esa energía se encuentra en una especie de 'pseudo-punto estable' no periódico y, que para tiempos grandes, estas trayectorias de fase se acaban separando hasta el máximo posible en promedio, es importante notar que que sea la máxima separación en promedio no quiere decir que se empiecen a separar en ese instante ni que el sistema sea caótico a partir de ese momento, el sistema es caótico independientemente del instante temporal y las trayectorias en el espacio de fase empezarán a separarse pasados unos instantes iniciales, pero eso se puede notar con mejor precisión en los videos de las simulaciones [5].

En el caso de  $E = 1$  no se ha observado que las trayectorias de fase se separen para un tiempo  $t \leq 300$  por lo que se ha promediado sobre ese valor pero no se ha visto representado el comportamiento caótico, como era de esperar por la baja energía de este.

Los videos correspondientes a estos tres casos se pueden observar en [5], donde se puede visualizar cómo el comportamiento caótico aumenta con la energía.

Por completitud y por lo ilustrativo que resulta, se ha realizado una simulación especial simultanea de 5 péndulos  $E = 25$  con una diferencia  $\Delta\phi_{ij} = \Delta\psi_{ij} = 0,001 \text{ rad}$  siendo  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $j = i + 1$ , por lo que la diferencia entre el primer péndulo y el quinto es  $\Delta\phi_{15} = \Delta\psi_{15} = 0,004 \text{ rad}$ . Esto se ha hecho para llevar aún más lejos lo que significa que un sistema sea caótico, en tan solo 14 segundos el sistema ya lleva trayectorias totalmente diferentes teniendo incluso un orden menos de separación angular respecto al resto de simulaciones estudiados en este apartado

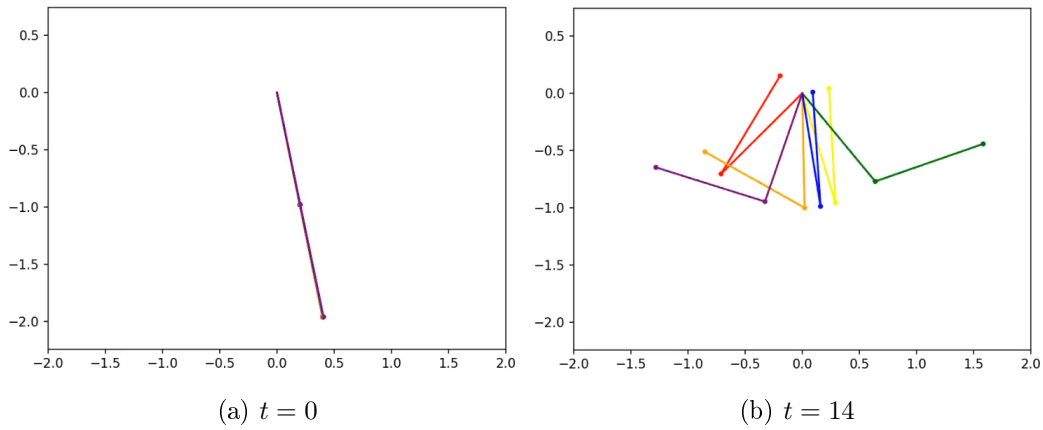


Figura 9: Fotograma en los segundos indicados de la simulación de los 5 péndulos con  $E = 25$

esta simulación se puede encontrar en [5] bajo el nombre de «25\_especial.mp4».



### 3. Conclusiones

Hemos conseguido simular el péndulo doble con el algoritmo Runge-Kutta de cuarto orden, para comprobar el comportamiento caótico de este se han estudiado sus Mapas de Poincaré junto a sus trayectorias en el espacio de fase bajo distintas condiciones iniciales, en ellos se ha visto cómo a medida que la energía del sistema se hacía mayor, la estabilidad del sistema era cada vez menor y presentaba cada vez más lo que parecía un comportamiento caótico, lo que se ajusta a los comportamientos reales del péndulo doble.

Después, y para reforzar lo anteriormente mencionado, se buscó información sobre los Coeficientes de Lyapunov, los cuales indican la velocidad con la que la trayectoria en el espacio de fases se separa bajo una perturbación en sus condiciones iniciales, junto con sus simulaciones, tanto estas como los resultados de los coeficientes refuerzan el comportamiento caótico a altas energías pero una estabilidad para energías bajas.

Estos resultados se han comparado por los realizados en el paper [2] los cuales obtienen  $\lambda = 1,02 \pm 0,02$ , con un  $\Delta\psi = 0,008 \text{ rad}$ , aunque es un poco absurdo comparar el valor de  $\lambda$  con el obtenido por nosotros en el caso caótico, ya que en nuestro caso fijamos la energía y en su paper no habla de esta, sí que podemos compararlos en cuanto a orden de magnitud, ya que como hemos visto este fluctúa mucho con la energía y eso nos da cierta seguridad de que los resultados se ajustan a la realidad, ya que para energías no mucho más altas podríamos conseguir coeficientes prácticamente iguales a ese.

### Referencias

- [1] Guía informe
- [2] Coeficiente de Lyapunov péndulo doble
- [3] Mapas de Poincaré en un péndulo doble
- [4] Coeficiente de Lyapunov
- [5] Mi GitHub