Colles de Physique

Exercices et Solutions

Pierre-Antoine Comby

Table des matières

Chapitre 1

Oscillateur harmonique

Exercise 1.1: Cube flottant

Un cube de côté a, de masse volumique ρ_c , flotte en équilibre dans un liquide de masse volumique ρ_L ($\rho_L > \rho_c$). Les conditions sont telles que le cube ne bascule pas, gardant toujours sa face inférieure horizontale. On ne prend pas en compte la pression de l'air, ni les frottements visqueux avec le fluide. On choisit un repère dont l'origine se situe au niveau de la base du cube lorsqu'il est à l'équilibre dans le fluide. A l'instant $t = 0$ on enfonce le cube dans le fluide (hauteur de cube immergée h_0) et on le lâche sans vitesse initiale.

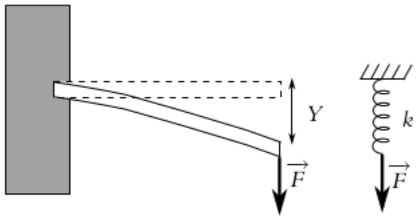
1. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas où $h_0 < a$.
2. En déduire l'équation du mouvement du cube en fonction du temps. Préciser la période des oscillations
3. Quelle doit être la valeur de h_0 pour que le cube puisse bondir hors du liquide ?

Solution Ex. 1.1

1. Référentiel : terrestre supposé galiléen.
   Système : le cube de masse constante $m = \rho c a^3$
   Repère : R(O,$\vec{k}$) avec O à la base du cube à l'équilibre et $\vec{k}$ dirigé vers le bas.
   Mouvement : mouvement rectiligne vertical.
   Système de coordonnées cartésiennes, position de la base du cube $z = zbase$.
   Cinématique : $\vec{OM} = z\vec{k}; \vec{v} = \dot{z}\vec{k}; \vec{a} = \ddot{z}\vec{k}$
   Forces extérieures :
   Forces à distance : poids du cube $\vec{P} = m_{cube}g\vec{k} = \rho c a^3 g\vec{k}$
   Forces de contact : poussée d'Archimède $\vec{F} = -m_l g\vec{k} - \rho_l a^2(h_{eq} + z)g\vec{k}$ oùh_{eq} est la hauteur immergée à l'équilibre.
   PFD Oz :$\rho c a^3 g - \rho_L(h_{eq} + z)g = \rho_c a\ddot{z}$ La situation d'équilibre telle que $\ddot{z} = 0$ et $z = 0$ donne la hauteur immergée à l'équilibre $h_{eq} = \frac{\rho_c}{\rho_l}a$ L'équation différentielle du mouvement est donc :$\ddot{z} + \frac{g\rho_L}{a\rho_c}z = 0$
2. *attention aux CI* $z = (h_0 - h_{eq})cos(\omega t)$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{a\rho_c}{g\rho_L}}$
3. Le cube bondit hors de l'eau si la base du cube atteint la surface de l'eau, c'est à dire si la valeur minimale de z vaut $-h_{eq}$ ce qui s'écrit $-(h_0 - h_{eq}) = -h_{eq}$, d'où la condition $h_0 > 2h_{eq}$ pour bondir hors de l'eau. Avec la condition$h_0 < a$, ce résultat implique que $h_{eq} < a/2$, c'est à dire $\rho_c < \rho_L/2$. La masse volumique du cube doit donc être inférieure à la moitié de celle du liquide pour que cette situation soit possible.

Exercise 1.2: (∗) Fibre de verre

La fibre de verre de longueur l et de diamètre d et de masse volumique ρ =2500 kg · m^{-3} est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche.



La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) :$Y = \frac{7l^3F}{Ed^4}$ où E est appelé module d'YOUNG du verre. Pour les applications numériques on prendra pour le module d'YOUNG $E = 7.10^{10} S.I.$

1. Quelle est l'unité S.I. du module d'YOUNG E ?
2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et l
3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $l = 7\,\text{mm}$ et de diamètre $d = 10\,\mu\text{m}$
4. Démontrer l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de longueur à vide nulle, de constante de raideur k, lorsque sa longueur est l. En reprenant l'analogie du ressort, quelle est alors l'énergie potentielle élastique de la fibre de verre lorsque la flèche vaut Y ?
5. On a tous fait l'expérience suivante : faire vibrer une règle ou une tige lorsque une de ses extrémités est bloquée. On cherche ici à trouver les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. L'extrémité de la tige vaut Y (t) à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression : $E_c = \rho l d^2 \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)^2$
6. Écrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.
7. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre.
8. Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'YOUNG E, de longueur l et de diamètre d.
9. Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur $l = 7\,\text{mm}$ et de diamètre $d = 10\,\mu\text{m}$

Solution Ex. 1.2

1. E est en Pascal (Pression)
2. On considère l'extrémité de la fibre comme un point matériel. Les deux forces s'exerçant sur ce point sont F et la tension T du ressort équivalent cherché qui est vers le haut. L'équilibre de l'extrémité donne la relation entre les forces : $T = -F = -\underbrace{\frac{Ed^4}{7l^3}}_{k} Y$
3. k = $2,9.10^{-4}$ N/m
4. on a $dE_p = -\delta W = -Tdl = -kldl \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kl^2 + \underbrace{C}_{=0}$ d'ou : $E_p = \frac{1}{2}\frac{Ed^4}{7l^3}Y^2$
5. $E_m = \frac{Ed^4}{14l^3}Y^2 + \rho l d^2 \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)^2$
6. Force conservatives seule présente. $\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \dot{Y}\left(\frac{Ed^4}{7l^3}Y + 2\rho l d^2 \ddot{Y}\right) = 0$ $\ddot{Y} + \frac{Ed^4}{14\rho l^4}Y = 0$
7. $\omega_0 = \sqrt{\frac{Ed^2}{14\rho l^4}}$
8. $f_0 = 45,9 Hz$

Exercise 1.3: Suite de ressort

Un solide S, de masse m, est accroché au plafond par l'intermédiaire d'un ressort R_1 de masse négligeable de raideur k et de longueur à vide l_0. Un second ressort R_2, identique au premier, pend sous le solide . À partir de l'instant $t = 0$ on tire sur le ressort R_2 avec une force . On constate que, si l'on accroît très lentement F , l'un des ressorts finit par se briser et que, si l'on accroît très rapidement F, c'est l'autre ressort qui se brise.

1. Expliquer quel est, dans chacun de ces deux cas, le ressort qui se brise.

2. La force appliquée à l'extrémité libre de R2 varie avec l'instant t positif selon la loi $F = m\alpha t$ où α est une constante positive. La tension T de chaque ressort suit la loi de HOOKE, jusqu'à une tension de rupture T_r où x est l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide. On pose $\omega : \sqrt{\frac{k}{m}}$ et on appelle x l'allongement de R_1. A l'instant 0 le système est encore à l'équilibre. Exprimer $x(t)$
3. Exprimer $T_2 - T_1$ en fonction de t
4. Discuter selon la valeur de α le ressort qui casse en premier.

Solution Ex. 1.3

1. lent : R_1 rapide R_2
2. - on isole $\{R_2\}$: $\vec{T_2} = -\vec{F}$ (ressort sans masse)
   - on isole $\{m\}$:

   $$m\ddot{x} = mg \underbrace{-kx}_{T_1} + m\alpha t$$

   Après résolution (solution générale et particulière et détermination constantes) :

   $$x = \frac{mg}{k}(1 - \cos(\omega t) + \frac{m\alpha}{k}\left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)$$

3. $T_2 - T_1 = \frac{m\alpha}{\omega}\sin(\omega t) - mg$
4. si $\alpha < g\omega$ c'est R_1 qui casse si $\alpha > g\omega$l'un ou l'autre. $\alpha \gg g\omega$ c'estR_2

Exercise 1.4: Suspension de voiture

Une automobile de masse m = 8 50kg est schématisée par une carrosserie de masse m_1 = 700 kg reposant par l'intermédiaire de quatre ressorts de raideur k = 6950 $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ sur quatre roues, chacune de masse m_2= 37.5 kg

1. Calculer la hauteur dont il faut soulever l carrosserie pour que les roues décollent du sol.
2. Calculer la période des oscillations verticales de la carrosserie.
3. Pourquoi cela n'arrive pas en réalité ?

Solution Ex. 1.4

1. En charge la suspension est raccourci de $x_0 = \frac{m_1 g}{4k}$. Quand la carrosserie est soulevée et que les roue décolle du sol la suspension est étirée de$x' = \frac{m_2 g}{k}$ il faut donc soulever la carrosserie de $x = x_0 + x' = 0.30m$
2.
   $$m_1\ddot{x} = -m_1 g - 4kx \Rightarrow \omega^2 = \frac{4k}{m_1} \text{ et } T = \pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 1,0s$$

3. présence d'amortisseur

Exercise 1.5: Vibration d'une molécule

La fréquence de vribation de la molécule de HCl est $f = 8.5 \times 10^{13}$ Hz . on donne les masse atomiques molaire M_H =1 $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et M_{Cl}=35.5 $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ ainsi que le nombre d'avogadro : $\mathcal{N}_A = 6.02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.
On modélise la molécule par un atome d'hydrogène relié à un atome de chlore fixe par un ressort de raideur k .

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.
2. Calculer k.
3. On admets que l'énergie mécanique de la molécule est $E_m = \frac{1}{2}hf$ où h =6.63 × 10^{-34} $\mathrm{J \cdot s}$ est la constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.
4. Calculer sa vitesse maximale.

Solution Ex. 1.5

1. inertie du chlore.

2. Sous l'hypothèse d'un mouvement suivant un axe fixe (Ox) :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad \& \quad E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

   Conservation de l'énergie mécanique donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow kx + m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

   On retrouve l'équation d'un OH . et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{f}$,donc :

$$k = 4\pi^2 f^2 \frac{M_H}{\mathcal{N}_A} = 4,7.10^2 N/m$$

3. $x = A$ si $E_c = 0$ (position extrême). On a donc : $E_p = E_m \Rightarrow kA^2 = hf$

$$A = \sqrt{\frac{h\mathcal{N}_A}{4\pi^2 f M_H}} = 1,1.10^{-11}m$$

4. $\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$ donc $v_{max} = 2\pi f A = 5,8.10^3\mathrm{m/s}$

Exercise 1.6: pendule simple

On considère une masse ponctuelle m fixée au bout d'une tige rigide, de longueur l, pouvant tourner librement dans un plan vertical autour de l'autre extrémité O.

1. Définir une coordonnée représentant de manière commode la position de la masse m.
2. Écrire son énergie cinétique E_c et son énergie potentielle E_p en fonction de cette coordonnée et en donner une représentation graphique.
3. Discuter qualitativement le mouvement de la masse m, selon la valeur de son énergie mécanique totale.
4. On suppose que la masse m reste au voisinage de sa position d'équilibre. Écrire une expression du développement limité de E_p autour de cette position d'équilibre. En déduire l'équation du mouvement. À quel autre système connu est-on ramené ?
   On donne les développement limité de cos pour de petite valeurs de x : $cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$

Solution Ex. 1.6

1. La tige étant rigide et de longueur l constante, le mouvement de la masse m sera circulaire de centre O. La description en coordonnées polaire est donc la plus adaptée. La coordonnée θ permet alors de définir complètement le mouvement.
2. Les forces s'appliquant à la masse sont son poids (vertical) et la réaction de la tige (portée par la tige) qui ne travaille pas puisque perpendiculaire à la trajectoire. L'énergie mécanique est donc conservée et l'énergie potentielle ne dérive que du poids ($E_p = mgh$ où h est l'élévation de la masse). En prenant comme origine d'énergie potentielle le point bas de la trajectoire on a :

$$E_p = mgl(1 - \cos(\theta) \text{ et } E_c + E_p = E_m = C^{ste} \Rightarrow E_c = E_{m0} + mgl(\cos(\theta) - 1)$$

3. Si $E_{m0} > 2mgl$, le pendule tourne. Si $E_{m0} = 2mgl$, le pendule arrive à $\theta = \pi$ avec une vitesse nulle. Si $E_{m0} < 2mgl$, le pendule oscille entre$\pm\theta_{max}$ avec $mgl(1 - \cos(\theta_{max}) = E_{m0}$.
4. Avec les DL il vient :

$$E_p = mgl\frac{\theta^2}{2} \text{ et } E_c = ml^2\frac{\dot{\theta}}{2}$$

   On dérive la conservation de l'énergie mécanique :

$$mgl\frac{\theta^2}{2} + ml^2\frac{\dot{\theta}}{2} = C^{ste} \Rightarrow mgl\theta\dot{\theta} + ml^2\theta\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Chapitre 2

Propagation d'un signal

Exercise 2.1: Effet Doppler

Une onde sinusoidale de fréquence f se propage dans la direction de (Ox) dans le sens positif à une célérité c. Un observateur se déplace avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{u_x}$ parallèle à (Ox).

1. Écrire le signal $s(x,t)$ de l'onde en définissant les notations nécessaire.
2. Pour l'observateur en mouvement Le point d'abscisse x est repéré par une abscisse le long d'un axe (Ox') qui lui est lié telle que $x' = x - vt$. Exprimer $s(x',t)$.
3. En déduire la fréquence f' perçue par l'observateur en mouvement. Comparer f' et f suivant le signe de v
4. Dans la rue un camion de pompier vous dépasse , sirène en marche . Qu'entendez vous ?

Solution Ex. 2.1

1. $s(x,t) = A\cos(2\pi f(t - \frac{x}{c}) + \phi)$
2. $s(x,t) = A\cos(2\pi f(1 - \frac{v}{c}) - 2\pi f\frac{x'}{c} + \phi)$
3. On a donc : $f' = f(1 - \frac{v}{c})$
4. son grave puis aigue .

Exercise 2.2: Fréquence propre d'un tuyau

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (flûte , clarinette...) ou dans un tuyau d'orgue vibre selon des modes propres conditionsorrespondant à des conditions aux limites données. Dans une modélisation très simple on envisage deux type de conditions :

- Si l'extrémité du tuyau est ouverte, la surpression accoustique est nulle à cette extrémité.
- Si l'extrémité du tuyau est fermé, la surpression est maximale à cette extrémité.

1. On considère un tuyau de longueur L dans lequel la célérité des ondes sonores est c.
   a) Déterminer les fréquences des modes propres du tuyau lorsque ses deux extrémités sont ouvertes. Représenter schématiquement la surpression dans le tuyau pour le troisième mode (classé par fréquence croissante).
   b) Idem pour une extrémité fermé
2. Les grandes orgues peuvent produire des notes très graves. Calculer la longueur d'onde d'un son de fréquence 34 Hz correspondant au Do^0 en prenant la vitesse du son à 0 ^{o}C dans l'air : $c = 331\ m/s$. Calculer la longueur minimale d'un tuyau produisant cette note.
3. On peux modéliser très grossièrement une clarinette par un tube fermé au niveau de l'embouchure.
   a) Expliquer pourquoi le son produit par une clarinette ne comporte que des harmoniques impaires.
   b) l'instrument , muni d'une "clé de douzième" qui ouvre le trou situé à une distance $\frac{L}{3}$ de l'embouchure.Lorsque ce trou est ouvert la surpression est nulle en ce point. Quelles sont dans ce cas les longueurs d'ondes des modes propres du tuyau ? quelle est l'effet sur la fréquence du son émis par l'instrument ?

Solution Ex. 2.2

1. a) si les deux extrémités sont ouverte, on a des nœuds de surpression acoutisque. Or la distance entre deux nœud est un multiple de la demi-longueur d'onde. On a donc nécessairement :

$$L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{c}{2f} \text{ soit } f = f_n = n\frac{c}{2L}$$

b) Il y a un nœud de surpression acoustique à l'extrémité ouverte du tuyau et un ventre de surpression acoustique à l'extremité fermée.

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{n\lambda}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f} \text{ soit } f = f'_n = (2n+1)\frac{c}{4L}$$

2. $\lambda = \frac{c}{f_{Do^0}} = 10,3m$ avec un extrémité fermé on a $L = \frac{\lambda}{4} = 2,6m$
3. a) les modes propres sont des multiples impaire du fondamentale car une extrémité est fermée.
   b) On a un nœud a $\frac{L}{3}$ et un ventre à l'embouchure :

$$\frac{L}{3} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \text{ soit } f = f''_n = (2n+1)\frac{3c}{4L}$$

La fondamentale est multiplié par 3 (saut d'un octave + quinte = douzième)

Exercise 2.3: Guitare

Les frettes placées le long du manche d'une guitare permettent au musicien de modifier la hauteur du son produit par la corde. En pressant la corde contre une frette, il diminue sa longueur, provoquant une augmentation de la fréquence fondamentale de vibration de la corde.

1. Retrouver rapidement la fréquence de vibration fondamentale d'une corde de longueur L le long de laquelle les ondes se propagent à la célérité v.
2. La note monte d'un demi-ton lorsque la fréquence est multipliée par $2^{1/12}$. Pour cela, comment doit-on modifier la longueur de la corde ?
3. En plaçant le doigt sur les frettes successives on monte à chaque fois la note d'un demi-ton. Combien de frettes peut-il y avoir au maximum, sachant que la distance d entre la dernière frette et le point d'accrochage de la corde (voir figure ci-dessus) doit être supérieure à 0,25L ?

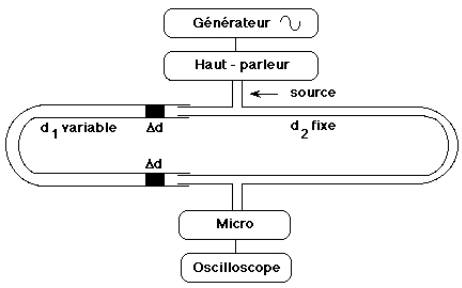
Solution Ex. 2.3

1. Dans le mode fondamental , on a seulement deux nœud de vibration aux extrémités : $L = \frac{\lambda}{2}$ donc $f_1 = \frac{c}{2L}$
2. il faut multiplier sa longueur par $2^{-1/12}$
3. En appuyant sur la p^{eme} frette la note est montée de p demi-tons. d'ou :

$$L_p = 2^{-p/12}L \geq \frac{L}{4} \quad \text{soit} \quad 2^{-p/12} \geq \frac{1}{4} \quad \text{soit} \quad p \leq 24$$

Exercise 2.4: Mesure de la vitesse du son

Le trombone de Koenig est un dispositif de laboratoire permettant de faire interférer deux ondes sonores ayant suivi des chemins différents. Le haut-parleur alimenté par un GBF émet un son de fréquence $f = 1500$Hz. On mesure le signal à la sortie avec un microphone branché sur un oscilloscope. En déplacant la partie mobile T_1 on fait varier l'amplitude du sinal observé. Elle passe deux fois de suite par une valeur minimale lorsqu'on déplace T_1 de $d = 11,5cm \pm 2mm$.



1. Que se passe-t-il dans le tube ?
2. Déterminer la vitesse du son –avec incertitude – dans l'air à 20 °C température de l'expérience.

Solution Ex. 2.4

Le micro reçoit deux ondes sonores qui sont passé par les tubes T_1 et T_2 Ces deux ondes de même fréquence interfèrent. Lorsqu'on déplace me tube mobile on fait varier la longueur du trajet de l'onde qui passe par ce tube, modifiant donc le déphasage entre les ondes reçue par le micro. Plus précisément lorsqu'on déplace T_2 de la distance d vers la gauche on allonge ce trajet de $2d$. Le retard temporel par rapport à l'onde passé par T_1 augmente de $\frac{2d}{c}$; son retard de phase de $2\pi f\frac{d}{c}$. D'autre part l'amplitude détectée par le micro est minimale lorsque les ondes sont en opposition de phase, c'est à dire un retard de phase de $2m\pi + \pi$ où $m \in \mathbb{N}$. Entre deux position où l'onde est minimale on a un déphasage de 2π.

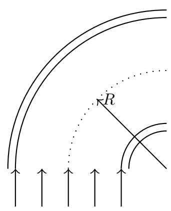
$$2\pi f\frac{d}{c} = 2\pi \Rightarrow c = 2fd = (345 \pm 6)m/s$$

Chapitre 3

Optique

Exercise 3.1: Courbure de fibre optique

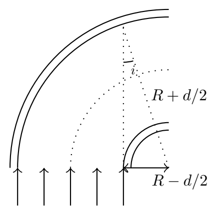
Une fibre optique est constitué d'une âme en verre d'indice n_1=1,66 et de diamètre $d = 0.05$ mm entourée d'une gaine en verre d'indice n_2=1,52. on courbe la fibre éclairée sous incidence normale.



1. Quel est le rayon de courbure R minimal pour lequel toute la lumière incidente traverse la fibre ?

Solution Ex. 3.1

en partant de $\sin(i) = \frac{n_2}{n_1}$ (condition reflexion totale) il faut $R > \frac{d}{2}\frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}$



Exercise 3.2: Flotteur

Un disque en liège de rayon r flotte sur l'eau d'indice n ; il soutient une tige immergé placée perpendiculairement en son centre. Quelle est la longueur h de la partie de la tige non visible pour un observateur dans l'air ? Citer les phénomènes mis en jeu.

Solution Ex. 3.2

$h = r\sqrt{n^2 - 1}$

Exercise 3.3: Formule des opticiens

On accole deux lentilles de vergences V_1 etV_2 de centre O_1 etO_2. l'ensemble est suffisamment mince pour pouvoir assimiler l'association à un système optique centré et mince de centre optique $O \simeq O_1 \simeq O_2$.
Montrer que l'association est équivalente à une lentille L_{eq} dont on précisera la position du centre optique O_{eq},ainsi que la vergence V_{eq} et le grandissement γ_{eq}.

Solution Ex. 3.3

Pour un objet AB transverse avec A sur l'axe optique on à le système :
$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$:

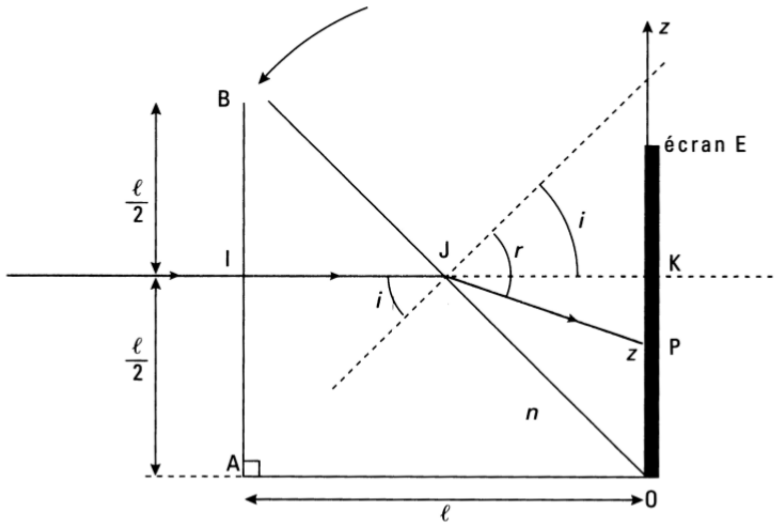
$$\begin{cases} \frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = V_1 \\ \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = V_1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = V_1 + V_2 = V_{eq}$$

et pour le grandissement : $\gamma_{eq} = \frac{\overline{A'B'}}{AB}\frac{\overline{A'B'}}{A_1B_1}\frac{A_1B_1}{AB} = \gamma_1 \times \gamma_2$

Exercise 3.4: Indice d'un liquide

Une cuve en verre a la forme d'un prisme de section droite rectangle isocèle. Elle est posée horizontalement sur une des arêtes de longueur l du triangle isocèle, et le sommet opposé à ce côté est ouvert pour permettre de remplir la cuve d'un liquide transparent d'indice n. Un pinceau de lumière est envoyé horizontale- ment sur la face verticale de la cuve, dans un plan de section droite, à la hauteur $l/2$. Ce rayon émerge au-delà de l'hypothénus et rencontre en un point P un écran E placé verticalement à la distance l de la face d'entrée du dispositif. On néglige l'effet dû aux parois en verre sur la propagation du pinceau de lumière.

1. Quelle limite supérieur peux on donner à la valeur de l'indice ?
2. Quel l'indice n du liquide contenu dans la cuve e, fonction de l et z
3. Calculer n avec $l = 30cm$ et$z = 6.7cm$



Solution Ex. 3.4

1. $n \leq 1.414$
2. $n = \sqrt{2}\sin\left(i + \arctan\left(\frac{l-2z}{l}\right)\right)$
3. n=1.36 , ethanol ?

Exercise 3.5: Indice de Brewster

Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air d'un milieu d'indice n. Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté. On souhaite obtenir que ces deux rayons soient perpendiculaires. Déterminer la valeur des différents angles. Application numérique : $n = 1,33$.

Solution Ex. 3.5

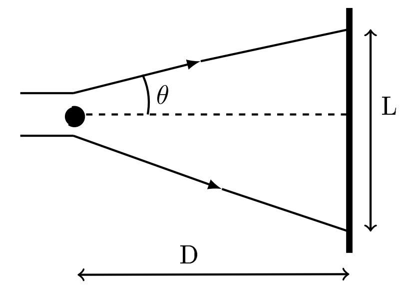
brewster On note i l'angle d'incidence, i_1 l'angle de réflexion et $i2$ l'angle de réfraction. Les lois de Descartes s'écrivent $i = -i_1$ et $n \sin i = n' \sin i_2$ et on cherche $i_2 - i_1 = \frac{\pi}{2}$. En combinant les relations, on obtient $n \sin(-i_1) = n' \sin i2$ avec $-i_1 = \frac{\pi}{2} - i_2$ soit $n \cos i_2 = n' \sin i_2$. On a donc $\tan i_2 = \frac{n}{n'}$. Application numérique : $n = 1,00$ et $n' = 1,33$ soit $i_2 = 36^o56'$.

Exercise 3.6: Mesure du diamètre d'un cheveux

Vous disposez d'un laser de longueur d'onde $\lambda = 633\,\text{nm}$, d'un écran ,d'une règle de 20 cm et d'un mètre ruban de 2 m, comment faites vous pour mesurer le diamètre d'un cheveu ? quelle précision pouvez vous atteindre sachant que la règle et le mètre sont graduées en millimètre ?

Solution Ex. 3.6

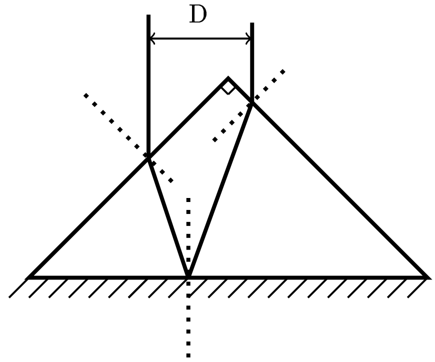
On utilise le phénomène de diffraction :



on a $\sin(\theta) = \frac{\lambda}{D} \simeq 10^{-3}$et $\tan(\theta) = \frac{L}{2D}$ on en déduit : $d \simeq \frac{2\lambda D}{L}$ Incertitude de $\Delta L \simeq 0.3$mm (modulo les conditions d'obscurités) avec $\theta \sim 10^{-3}$ et $D \sim 1,5m$ donc $L \sim 2cm$ donc l'incertitude relative sur L est $\frac{\Delta L}{L} \simeq 1,5\%$ et $\frac{\Delta D}{D} \simeq 1\%$ alors on a $\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta D}{D} \simeq 3\%$
$\Rightarrow$ Augmentation de la précision en $\sqrt{n}$ du nombre d'expérience.

Exercise 3.7: Prisme

Soit un prisme rectangle isocèle dont on a argenté l'hypothénuse. Des rayons arrivent perpendiculairement à cette face. Montrer que la distance D est indépendante du rayon incident considéré.



Solution Ex. 3.7

L'hypothénuse étant argentée se comporte comme un miroir plan ; le système est donc équivalent à une lame à faces parallèles en remplaçant le triangle rectangle isocèle par un carré. La loi de Descartes s'écrit $n \sin r = \sin i$ avec $i = 45^0$. la distance b parcourue dans le prisme vérifie $\cos r = a/b$ en notant a le coté du carré. Le calcule de $x + y$ s'obtient à partir de l'angle α entre la direction incidente et le parcours de la lumière dans le prisme. On a $i + \frac{\pi}{2} + r + \alpha = \pi$ donc $\alpha = \frac{\pi}{2} - i - r$ et $\sin \alpha = \frac{x+y}{b}$ d'où

$$x + y = \frac{a}{\cos r} \sin(\frac{\pi}{2} - r) = \frac{a}{\sqrt{2}(1 - tan(r))}$$

Exercise 3.8: Taille d'un miroir

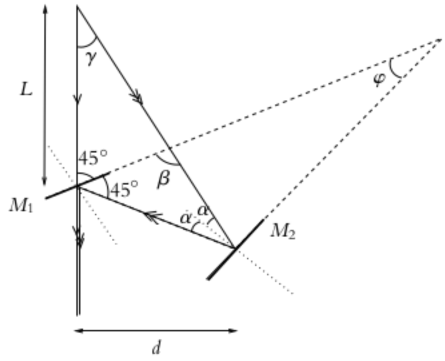
Quelle taille minimum doit avoir un miroir plan pour qu'un homme de 1,80m puisse s'y voir entièrement et où le miroir doit-il se trouver ?

Solution Ex. 3.8

Miroir de 90cm placé à 85cm du sol.

Exercise 3.9: (*) Télémètre

Un télémètre est un appareil permettant de mesurer une distance à l'aide d'une approche optique.



On considère un dispositif constitué de deux miroirs, l'un totalement réfléchissant et l'autre semi-réfléchissant. Le premier M_2 est un miroir classique tandis que le second M_1 permet au rayon d'être réfracté lorsqu'il arrive sur la surface non réfléchissante. Les deux miroirs sont inclinés d'un angle ϕ l'un par rapport à l'autre. On place une source ponctuelle S du côté de la face non réfléchissante du miroir M_1 à une distance L du centre O_1 de M_1. Un rayon incident arrive sur M_1 en O_1 avec une incidence de 45°et traverse M_1. Un autre rayon arrive sur M_2 avec une incidence a au centre O_2 de M_2 , il est réfléchi sur M_2 puis sur la surface réfléchissante de M_1 . On tourne M_2 jusqu'à superposer les deux images. On note d la distance de O_2 aux rayons émergeant du système.

1. En assimilant M_1 à une lame à faces parallèles lorsqu'il est traversé par les rayons, montrer qu'alors le rayon émergent est parallèle au rayon incident.
2. On note β l'angle entre la direction du rayon SO_2 et celle du miroir semi-réfléchissant M_1 . Établir la relation entre β et ϕ.
3. En déduire la relation entre ϕ et γ l'angle entre SO_1 et $SO2$.
4. Montrer que ce dispositif permet de déterminer L si on connaît d et la valeur de ϕ pour que les deux images se superposent.

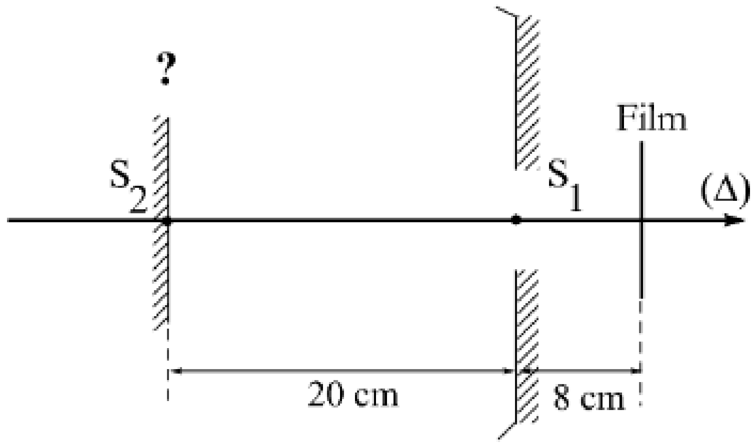
Solution Ex. 3.9

1. L'application des relations de Descartes donne $\sin i = n \sin r = \sin i'$ soit $i = i'$: les rayons incident et émergent sont parallèles.
2. La somme des angles d'un triangle est égale à π soit en appliquant cette relation aux triangles O_1AO_2 d'une part $\frac{\pi}{4} + \beta + 2\alpha = \pi$ et d'autre part AO_1B $\pi - \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha + \phi = \pi$ Alors en éliminant α entre les deux relations, on en déduit $\beta = \frac{\pi}{4} + 2\phi$.
3. La somme des angles d'un triangle est égale à π soit pour SO_1A : $\frac{\pi}{4} + \gamma + \pi - \beta = \pi$ En tenant compte du résultat de la question précédente, on en déduit $\gamma = 2\phi$
4. L'expression de la tangente dans le triangle rectangle donne $\tan 2\phi = \frac{d}{L}$ont on déduit $L = \frac{d}{tan2\phi}$.

Exercise 3.10: Téleobjectif à deux miroirs

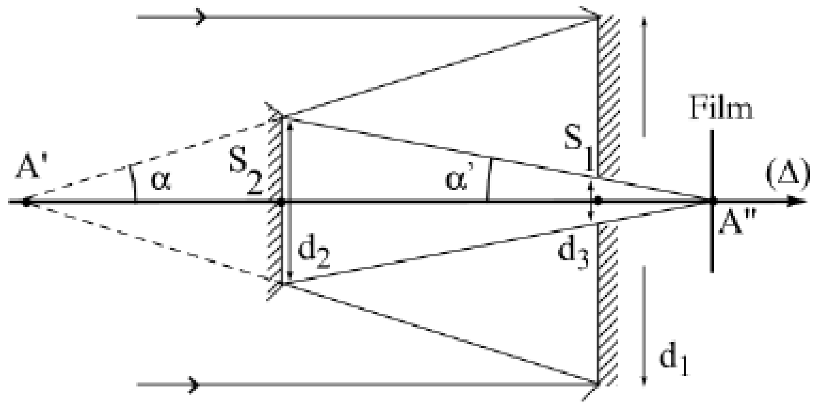
Un téléobjectifs est constitué de deux miroirs un miroir concave $\mathcal{M}_1$ de focale 30cm percé d'un trou en son sommet S_1 et d'un miroir $\mathcal{M}_2$

1. Quel est doit être le rayon de courbure de $\mathcal{M}_\in$ pour que l'image d'un objet placé à l'infini sur l'axe se forme sur le plan du film ?
2. Quel doit être le diamètre d_2 de $\mathcal{M}_2$ pour que tous les rayons réfléchis par $\mathcal{M}_1$ de diamètre d_1=10 cm soient collectés par $\mathcal{M}_1$
3. Quelle doit être le diamètre $d_3$du trou pour que les rayons atteignent le film ?
   Addenda : Un miroir concave/convexe de rayon de courbure R est équivalent à une lentille convergente/divergente de distance focale $f' = 2R$ accolé à un miroir en considérant un seul passage dans la lentille.



Solution Ex. 3.10

1. Le systeme optique considéré est : $A_\infty \underset{\mathcal{M}_1}{\longrightarrow} F_1' = A' \underset{\mathcal{M}_2}{\longrightarrow} A''_{\in \mathrm{Film}}$ L'objet A_∞ est à l'infini, son image intermédiaire est au foyer de $\mathcal{M}_1$,soit : $\overline{S_1A'} = \overline{S_1F_1} = -30cm$ d'où : $\overline{S_2A'} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A'} = -10cm$ De plus comme on veux A'' sur le film : $\overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''} = 28cm$ Avec la relation de conjugaison pour $\mathcal{M}_2$
$$\frac{1}{\overline{S_2A''}} + \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{1}{f_2} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}}$$
On obtient : $S_2C_2 = R_2 = -31.1cm$ *Remarque* le miroir $\mathcal{M}_2$, pour la lumière incidente est un miroir concave (comme M_1), mais c'est en tant que miroir convexe qu'il est utilisé puisqu'il agit sur les rayons réfléchis par M_1
2. Pour que tous les rayons réfléchis par M_1 soient collectés il faut qu'ils frappent tous M_2 pour ensuite revenir sur M_1 pour cela on doit avoir : $\tan\alpha = \frac{d_2}{2S_2A'} = \frac{d_1}{2S_1A'}$
$d_2 = d_1 \frac{S_2A'}{S_1A'} = 3.33cm$
3. Pour que tous les rayons atteignent le film il faut : $\tan\alpha' = \frac{d_2}{2S_2A''} = \frac{d_3}{2S_1A''}$
$d_3 = d_2 \frac{S_1A''}{S_2A''} = 0.95cm$

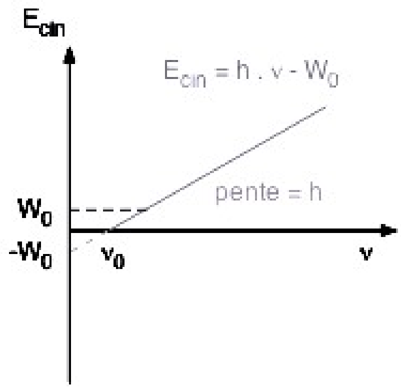


Chapitre 4

Introduction au monde Quantique

Exercise 4.1: Effet photoélectrique

On envoie sur une photocathode en potassium deux radiation lumineuses ; pour une radiation ultraviolette λ_1 =253.7 nm, l'énergie des photoélectrons est $E_1 = 3.14eV$ et pour une radiation $\lambda_2 = 589nm$ elle vaut E_2 =0.36 eV



1. Déterminer la constante de Planck h
2. Déterminer l'énergie d'extraction W des électrons pour le potassium.
3. Calculer la longueur d'onde maximale du rayonnement produisant un effet photoélectrique sur le potassium.

Solution Ex. 4.1

1. $E_i = \frac{hc}{\lambda_i} + W$ donc :

$$h = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\frac{E_2 - E_1}{c}$$

2. directement avec la formule
3. directement avec la formule

Exercise 4.2: Longueur d'onde de Broglie

1. Calculer la longueur d'onde associée au mouvement :
   a) de la Terre autour du Soleil (masse 6×10^{24} kg , vitesse $3 \times 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
   b) d'un homme marchant dans la rue (70 kg ,5 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$)
   c) d'un grain de poussière (1×10^{-15} kg, 1 $\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$)
2. Diffraction par des neutrons. On envoie un faisceau de neutrons (masse $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) , d'énergie E sur une chaîne de noyau monoatomique. Le jet est perpendiculaire à la chaîne et on note a la distance entre deux atomes. ce jet de neutrons va diffracter comme un faisceau lumineux selon des angles donnés par la relation : $\sin \theta_n = n\lambda_{dB}/a$.
   a) Déterminer l'expression de la longueur d'onde de de Broglie associée au mouvement des neutrons.

b) On détecte les neutrons dans une direction θ par aux neutrons incidents. Quelle est l'allure du flux de neutrons détecté lorsqu'on fait varier E ?

c) Le flux présente un maximum pour $E = E_1$ et n'a pas d'autre résonances à énergie inférieur à E_1 En déduire a avec $\theta = 30\,°\mathrm{C}$ et $E_1 = 1.3 \times 10^{-20}$ J

3. Optique atomique :

   a) La lithographie est la technique actuellement utilisé pour fabriquer les composants semi conducteurs tels que les puces électroniques. Le détail le plus petit est alors de l'ordre de grandeurs de la longueur d'onde utilisé pour la gravure. Plusieurs équipe de recherche dans le monde cherchent à remplacer la lumière par des atomes, notamment l'atome d'hélium (m=6.7 × 10^{-27} kg).
   Calculer la vitesse moyenne d'un gaz d'hélium à température ambiante. En déduire la longueur d'onde de de Broglie ? Conclure.
   On donne l'énergie thermique d'une particule monoatomique $E = \frac{3}{2}k_B.T$ *avec* $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$ *la constante de Bolztmann*

   b) Les techniques de refroidissement d'atome par laser (prix Nobel de physique 1997) permettent aujourd'hui d'atteindre des températures de l'ordre de 100 nK. Calculer la longueur de de Broglie ainsi obtenue.

Solution Ex. 4.2

1. $\lambda = \frac{h}{p}$
   a) 3.3×10^{-63} m
   b) 6×10^{-36} m
   c) 6×10^{-16} m
2. a) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ donc $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Em}}$
   b) courbe périodique flux= f(E) , maximum locaux sur les E_i.
   c) $a = \frac{2h}{\sqrt{2Em}} \simeq 10^{-10}$m
3. a) $v = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$
   b) $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_BT}} \simeq 10^{-10}$m

Exercise 4.3: Microscopie électronique.

1. Un microscope optique ne peut révéler des détails plus petits que l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière visible. Expliquer pourquoi et donner une valeur numérique typique.
2. La longueur d'onde de de Broglie pour des électrons accélérés sous une tension de 100 V, donc ayant acquis une énergie cinétique de 100 eV, est beaucoup plus courte. Quelle est sa valeur ?
   $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg e=1.6 × 10^{-19} C $h = 6.62 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
3. Dans certains appareils, l'énergie cinétique atteint t 100 keV et la longueur d'onde obtenue est alors de l'ordre de 1 pm = 10−12 m. Pour évaluer cette longueur d'onde, montrer que l'on doit avoir recours aux formules de mécanique relativiste. L'énergie cinétique répond alors à l'expression (non exigible) : $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ avec $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ mettant en jeu le rapport v/c de la vitesse de la particule à celle de la lumière. Calculer la longueur d'onde des électrons, sachant que la quantité de mouvement s'écrit $p = \gamma mv$ pour le cas relativiste

Solution Ex. 4.3

1. diffraction λ 400 à 800 nm
2. $\lambda = 0.1$ nm
3. par la méca classique v=0.6c $>$ 0.1c non valide : γ =1.2 ,v $= 1.66 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\lambda = 3.7pm$

Chapitre 5

Circuit électrique dans l'ARQS

Exercise 5.1: Adaptation de puissance

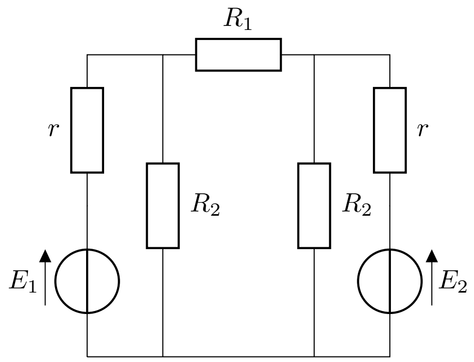
Soit un générateur réel de f.é.m e et de résistance interne r. On branche à ses bornes une résistance variable R. Déterminer l'intensité du courant qui circule dans le circuit, puis la puissance dissipée dans la résistance variable en fonction de e, r et R. Tracer la courbe $P = f(R)$et montrer qu'elle passe par un maximum P_{max} pour une valeur de R à déterminer.

Solution Ex. 5.1

$P(R) = \frac{(Re^2}{(R+r)^2}$ maximale pour $R = r$

Exercise 5.2: Courant équivalent

Calculer le courant circulant dans R_1 :

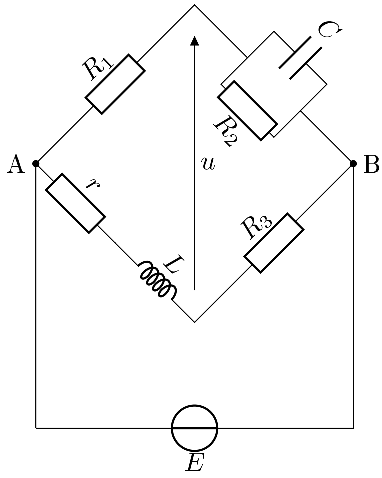


Solution Ex. 5.2

Solution Théorème de superposition : on traite d'abord un générateur puis l'autre. Attention aux signes : E1 donne une intensité dans un sens, E2 dans l'autre. En faisant thevenin - norton, on trouve que E1 crée $i_1 = \frac{R_2}{2rR_2+R_1(R_2+r)}E_1$ donc l'intensité totale est $i == \frac{R_2}{2rR_2+R_1(R_2+r)}(E_1 - E2)$

Exercise 5.3: Pont de Maxwell

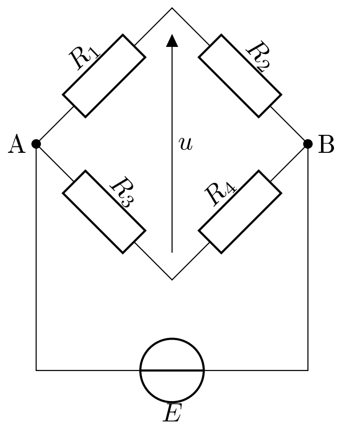
On considère à présent le montage suivant, dans lequel la valeur d'impédance de la bobine et la résistance sont inconnues. On peut faire librement varier R_1, tandis que les autres valeurs sont connues. Lorsque le pont est équilibré, on a $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ R_2 =42 $\mathrm{k\Omega}$ R_3 =100 Ω et $C = 5nF$. Déterminer r et L.



Solution Ex. 5.3
$u = \left[\frac{r+jL\omega}{r+R_3+jL\omega} - \frac{R_1(1+jR_2C\omega)}{R_2+R_1(1+jR_2C\omega)}\right] E$ alors $r = \frac{R_1R_3}{R_2}$

Exercise 5.4: Pont de Wheatstone

Un pont de Wheatstone est un montage électrique permettant de déterminer une résistance inconnue.La résistance à déterminer estR_1. R_3 et R_4 sont fixe et connue. R_2 est une résistance variable dont on connait la valeur. Le pont est dit équilibré si $u = 0$.



1. Déterminer u en fonction de E et des résistances.
2. À quelle condition le pont est il équilibré ? Déterminer alors R_1.
   Donnée : R_3=100 Ω ; R_4=5 kΩ ; R_2=1827 Ω ; E= 6 V
3. Le votmètre indique la tension $u = 0$ si on a $|u| < 1\,\text{mV}$. Dans le cadre de l'application numérique de 2) , donner la précision de la mesure de R_1.

Solution Ex. 5.4

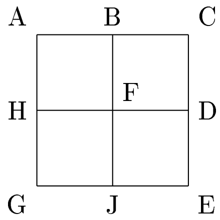
1. $u = \frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_2}$
2. R_1 =$(36.5 \pm 0.3)\,\Omega$

Exercise 5.5: Résistances équivalentes

Part I

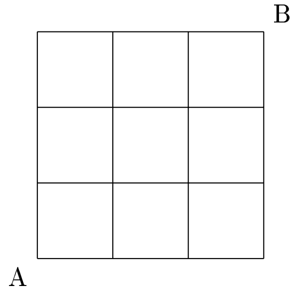
Calculer la résistance équivalent de ce réseau (chaque coté possède une résistance R) entre :

1. A et C, A et E , A et F
2. B et D, A et B , B et F

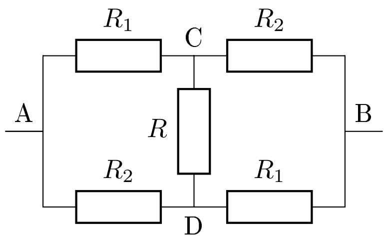


Part II

Calculer la résistance équivalent de ce réseau à maille carré entre A et B



Part III



1. Calculer la résistance équivalente entre A et B.
2. On applique entre A et B $U = 11V$ calculer i_{CD} avec :$R_1 = 2R$, $R_2 = 4R$, $R = 1\Omega$.

Solution Ex. 5.5

Part I

$R_{eq} = \frac{13}{7}R$

Part II

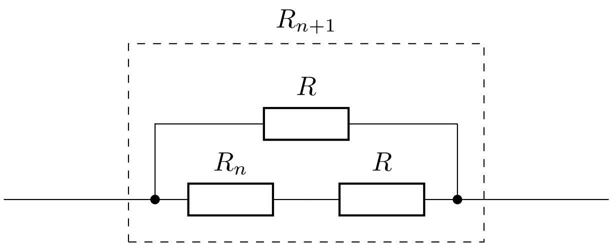
1. $5R/4$, $3R/2$ $7R/8$
2. $5R/6$, R, $7R/12$

Part III

1. $R_{eq} = \frac{2R_1R_2+RR_1+RR_2}{2R+R_1+R_2}$
2. $I = 1A$

Exercise 5.6: Suite de Résistance

On considère la suite de résistance suivante avec $R_0 = R$:

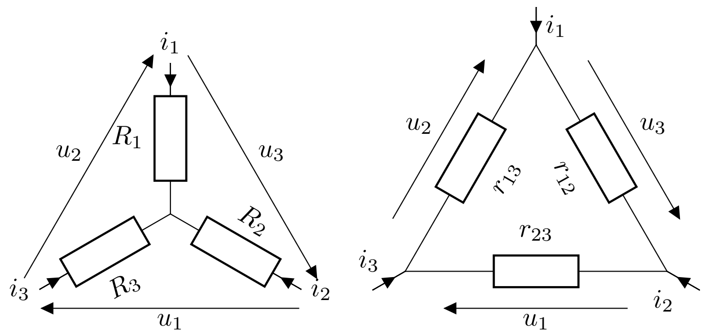


1. Calculer R_1 ,R_2 ,R_3
2. Déterminer R_{n+1} en fonction de R_n.
3. Montrer que la suite converge.
4. Quelle est sa limite ?

Solution Ex. 5.6

$R_{lim} = R\phi$

Exercise 5.7: Théorème de Kemrely



1. Étude du montage en étoile
   a) Exprimez la loi des noeuds pour obtenir une relation entre i_1 , i_2 et i_3 .
   b) En déduire une expression de u_1 et u_2 en fonction de i_1 et i_2 .
2. Étude du montage en triangle
   a) Exprimez la loi des mailles pour obtenir une relation entre u_1 , u_2 et u_3 .
   b) En déduire une expression de i_1 et i_2 en fonction de u_1 et u_2 .
3. Équivalence entre les deux montages
   On suppose que r_{12} , r_{23} et r_{13} sont tels que les deux montages soient équivalents. En déduire quatre relations vérifiées par r_{12} , r_{23} et r_{13} . En déduire les expressions de r_1 , r_2 et r_3 en fonction de ces résistances.

Solution Ex. 5.7

1. Etoile :$i_1 + i_2 + i_3 = 0$et $u_1 = -r_2 i_2 + r_3 i_3 = -r_3 i_1 - (r_2 + r_3) i_2$ et$u_2 = r_1 i_1 - r_3 i_3 = i_1(r_1 + r_3) + i_2 r_3$.
2. Triangle :$u_1 + u_2 + u_3 = 0$ et$i_1 = \frac{u_2}{r_{13}} - \frac{u_3}{r_{12}} = \frac{u_1}{r_{12}} + \left(\frac{1}{r_1 2} + \frac{1}{r_{13}}\right) u_2$ et $i_2 = \frac{u_3}{r_{12}} - \frac{u_1}{r_{23}} = -\frac{u_1}{r_{12}} - \left(\frac{1}{r_1 2} + \frac{1}{r_{13}}\right) u_1$
3. Équivalent : à i_3 et u_3 fixés, mêmes intensité et tension dans les deux circuits, on remplace les intensités obtenus dans triangle dans les tension de étoile, il vient : $r_1 = \frac{r_{12} r_{13}}{r_1 2 + r_1 3 + r_2 3}$ etc .

Chapitre 6

Oscillateurs amortis

Exercise 6.1: Adaptation d'impédance

On utilise un générateur de tension réel, de force électromotrice $E(t) = E_0 \sin \omega t$ et de résistance interne R_0.On branche à ses bornes un dipôle d'impédance $Z = R + iL\omega$; on notera $U(t)$ la tension à ses bornes.Dans l'ensemble de l'exercice, on se placera dans le cadre de l'ARQS.

1. Exprimer la forme générale de l'intensité I(t) qui parcourt le circuit, puis exprimez l'amplitude, la valeur effcace et le déphasage de l'intensité.
2. Exprimez la puissance $\mathcal{P}$ moyenne reçue par l'impédance Z .
3. On suppose dans cette question que le dipôle est une résistance pure. Montrez que, pour une certaine valeur R_m de la résistance, la puissance reçue par l'impédance présente un maximum. Application numérique $E_{eff} = 220$ V , $R_0 = 10\,\Omega, \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz
4. On suppose à présent que l'inductance a une valeur fixée L = 0.1H . Montrez que la puissance dissipée par l'impédance totale est toujours inférieure à celle dissipée en l'absence d'inductance. Déterminez la nouvelle résistance R'_m qui maximise la puissance dissipée.

Solution Ex. 6.1

1. $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (loi des mailles) $\underline{E}(t) = \underline{I}(t)Z + \underline{I}(t)R \Leftrightarrow E_0 \ell i(\omega t + \pi/2) = I_0 \mathrm{e}^{i(\omega t+\pi/2+\varphi_I)}(R_0 + R + iL\omega)$
   donc $I_0 \ell i \phi_I = \frac{E_0}{R+R_0+iL\omega}$
   d'où : $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}}$
2. Par définition : $\mathcal{P} =< I(t)U(t) >= \frac{I_0 U_0}{2} cos(\varphi_U - \varphi_I)$
   d'où $U_0 = I_0\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$
   on trouve : $\cos(\varphi_U - \varphi_I) = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} et \sin(\varphi_U - \varphi_I) = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$. donc : $\mathcal{P} = RI_0^2/2 = \frac{RE^2_{eff}}{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}$
3. Pour L=0, il faut $R = R_0$ et alors $\mathcal{P} = 1,2$ MW.
4. il faut $R = \sqrt{L^2\omega^2 + R_0^2} = 33\,\Omega$

Exercise 6.2: Étude d'un circuit RLC

On considère un circuit composé d'un condensateur C d'une bobine L et d'une résistance R en série. Le condensateur et la bobine sont initialement déchargés. Le circuit est alimenté par un générateur de tension parfait de f.é.m $E(t)$.

1. Dans cette question, la tension $E(t)$ est un échelon de valeur E_0 pour $t > 0$
   a) Exprimer l'équation différentielle vérifiée par la tension U_c au bornes du condensateur.
   b) Donnez la forme générale des solutions
   c) Proposez un solution particulière.
   d) Tracez qualitativement sur un même graphique $U_c$et E au cours du temps.
2. Dans cette question $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ pour $t > 0$
   a) Exprimez l'équation différentielle vérifiée par la tension U_c aux bornes du condensateur. Quelle difficulté supplémentaire apparaît par rapport au cas précédent ?
   b) Justifez l'approximation suivante : si on se place à un temps suffisamment grand, on peut négliger les solutions de l'équation homogène associée.

c) On cherche une solution particulière sous la forme $U_c(t) = U_c^0 \cos(\omega t + \varphi_c)$. Justifiez cette forme et réecrivez l'équation différentielle en introduisant une notation complexe.
d) Montrer que pour une certaine valeur de ω l'amplitude U_c^0 est maximale.

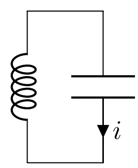
Solution Ex. 6.2

1. a) $u_c + RC\dot{u}_c + LC\ddot{u}_c = E_0$
   b) $u_c = A\mathrm{e}^{t/r_1} + B\mathrm{e}^{t/r_2}$ (r_1 , r_2 racine du polynôme caractéristique)
   c) $u_p = E_0$
2. a) $u_c + RC\dot{u}_c + LC\ddot{u}_c = E_0$
   b) la solution homogène tend vers 0. (ARQS)
   c) solution de la meme forme que le second membre. l'équation devient : $\underline{U_c} + jRC\omega\underline{U_c} + LC(j\omega)^2\underline{U_c} = E_0$ avec $\underline{U_c} = U_c e^{j\phi}$ $U_c = \left|\frac{E_0}{1+RCj\omega-LC\omega^2}\right|$ maximal si le dénominateur s'annule.

Exercise 6.3: Oscillateur Parfait

Déterminer i(t) :

1. A partir des lois de comportements des dipôles
2. Avec un raisonnement énergétique. *A l'instant initial le condensateur est complétement chargé avec la charge Q*

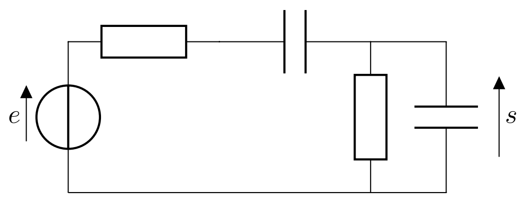


Solution Ex. 6.3

1. on a $u = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ donc $i = -LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$
2. $E = E_C + E_L = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ on dérive et tout va bien.

Exercise 6.4: Pont de Wien

Déterminer l'expression de la tension s pour une entrée e indicielle, on supposera les condensateurs initialement déchargé.



Solution Ex. 6.4

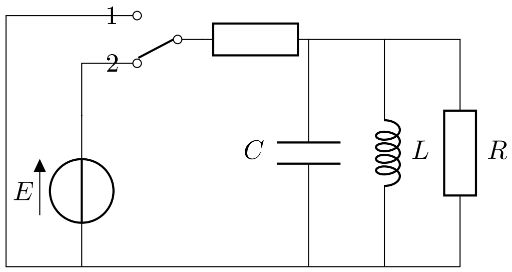
$H(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega+(jRC\omega)^2}$

Réponse à un échelon : A l'instant initial s continue donc i continue tension au borne des condo nulles : $i(0^+) = E/R$. Avec la LdM dérivée : $Ri'(0^+) + i(0^+)/C + i_2(0^+)/C = 0$ or $i = i_2$ donc $i'(0^+) = \frac{-2E}{R^2C}$

Exercise 6.5: Régime libre d'un RLC parallèle

Pour $t < 0$ l'interrupteur est en position 2 , on le bascule en position 1à $t = 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i.
2. On donne : L= 50 mH, C=1 µF R=1 kΩ et E=5 V , donner l'expression numérique de i.



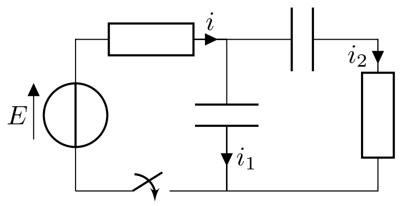
Solution Ex. 6.5

1. $i + \frac{2L}{R}\dot{i} + LC\ddot{i} = 0$
2. Conditions initiales : $i(0) = E/R \ \ et \ \ \dot{i}(0) = 0$

Exercise 6.6: (*) Régime transitoire apériodique

A t= 0^- les condensateurs sont déchargés On ferme alors l'interrupteur.

1. Exprimer $i(t)$.

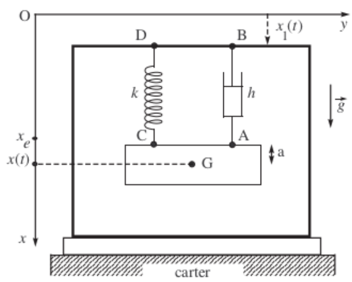


Solution Ex. 6.6

$0 = i + RCi' + (RC)^2 i''$ et $i(0) = i'(0) = 0$

Exercise 6.7: Sismographe

On considère un capteur d'amplitude constitué d'un support et une masse m reliés par un ressort et un amortisseur en parallèle. L'amortisseur exerce en A : $\vec{F_A} = -h(\vec{v_A} - \vec{v_B})$
On suppose que le support est solidaire du carter d'une machine anime d'un mouvement sinusoïdal vertical $x_1 = b \sin \omega t$ par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(Oxy)$



1. Déterminer l'équation que vérifie x_e position de la masse à l'équilibre.
2. Déterminer l'équation du mouvement de m dans R, mettre cette dernière sous forme canonique et la résoudre.

Solution Ex. 6.7

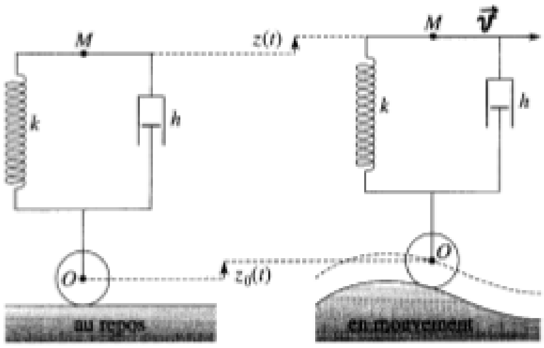
1. $mx'' = -k(x - x_1 - l_0) - h(x' - x_1') - mg$
2. On a à l'équilibre : $x'' = x' = 0$ et $x_1 = x_1' = 0$ donc $x_e = l_0 - \frac{mg}{k}$

Exercise 6.8: Suspension de voiture

Une automobile est sommairement modélisée par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O, par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h. En toutes circonstances, l'axe OM reste vertical.On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v sur une route dont le profil impose au centre O de la roue une élongation :

$$z_0(x) = a \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

par rapport à son niveau d'équilibre. On repère le mouvement de la masse par son élongation$z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand le véhicule est au repos.



1. Établir l'équation différentielle en $z(t)$ du mouvement de la masse , lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante v
2. Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.
3. À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

Solution Ex. 6.8

1. $mz'' = -mg - k(z - z_0) - h(z' - z_0')$
2. On fais l'hypothèse d'une solution de meme forme que le second membre, à la pulsation $w = \frac{2\pi v}{\lambda}$ On réintroduit et on a pour une amplitude maximale : $A = \frac{g}{\omega^2+\omega_0^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
3. On ne veux pas v tel que $\omega = \omega_0$!

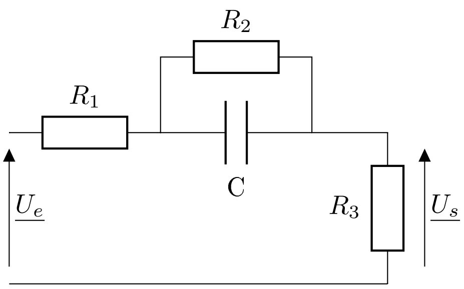
Chapitre 7

Filtrage linéaire

Exercise 7.1:

On considère le filtre suivant avec : $R_1 = R_3 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 18\,\mathrm{k}\Omega$, $C = 100nF$

1. Prévoir le comportement asymptotique de ce filtre
2. Calculer sa fonction de transfert, et la mettre sous forme canonique, en explicitant les temps caractéristique et gain statique.
3. Établir le diagramme de Bode en précisant les gains en décibels pour les pulsations associée au temps caractéristiques.

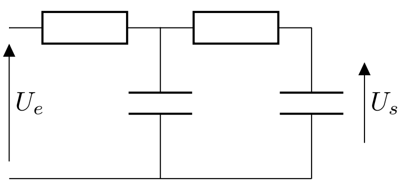


Solution Ex. 7.1

1. BF ok , HF ok : Donc Passe tout
2. $H(j\omega) = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \frac{jR_2C\omega+1}{1+j\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}C\omega}$
3. horizontale ; -20db ($\omega_0/10 \;\rightarrow\; \omega_0$) ; horizontale . phase : $0 \rightarrow -\pi/2 \rightarrow 0$

Exercise 7.2:

Étudier le filtre suivant(comportement asymptotique, fonction de transfert, diagramme de bode...)

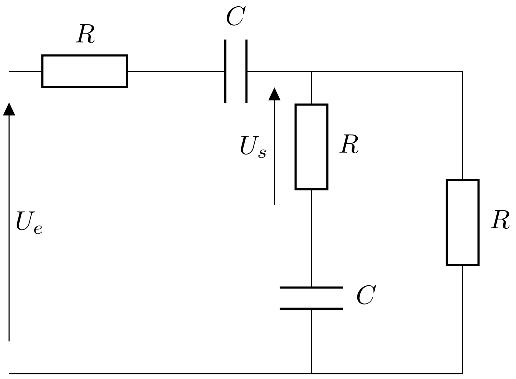


Solution Ex. 7.2

$u_e = u_s + 3RC\dot{u}_s + (RC)^2\ddot{u}_s$ donc $H(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega+(jRC\omega)^2}$

Exercise 7.3:

On cherche à étudier le montage ci-dessus :



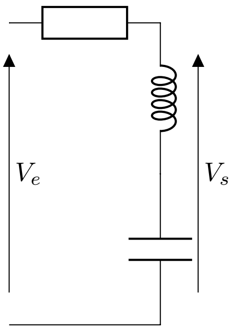
1. En considérant que la tension u_e est de la forme $u_e = U_0 \cos(\omega t)$, exprimez la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$
2. Tracer qualitativement le diagramme de Bode en amplitude du filtre.
3. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par u_s.
4. Comment déterminer la réponse du filtre à une tension en dent de scie de période T ?

Solution Ex. 7.3

1.

Exercise 7.4:

Étudier le filtre suivant :

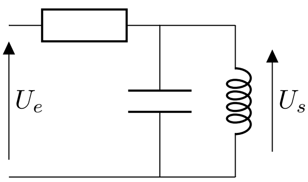


Solution Ex. 7.4

Filtre coupe bande : $\frac{(jLC\omega)^2}{1+jRC\omega+(jLC\omega)^2}$

Exercise 7.5:

Étudier le filtre suivant

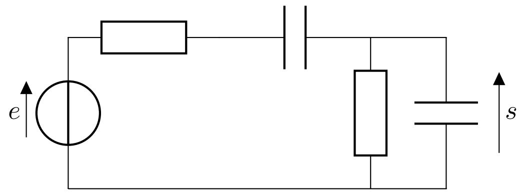


Solution Ex. 7.5

1. $H(j\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1+j\frac{L}{R}\omega+j^2LC\omega^2}$

Exercise 7.6:

Étudier le filtre suivant :

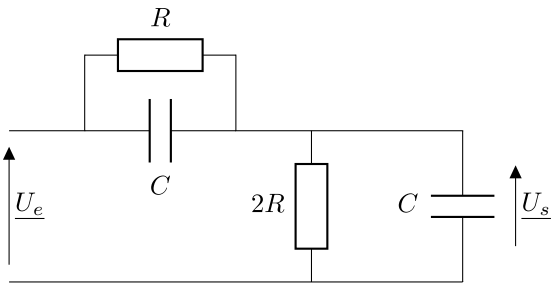


Solution Ex. 7.6

$H(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega+(jRC\omega)^2}$

Exercise 7.7:

Étudier le filtre suivant

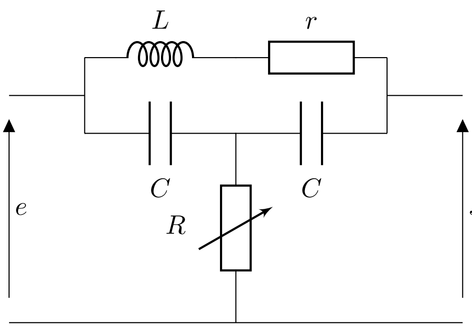


Solution Ex. 7.7

$H(j\omega) = \frac{2}{3}\frac{1+j\omega/\omega_2}{1+j\omega/\omega_1}$ avec $\omega_1 = \frac{3}{4RC}$ et $\omega_2 = \frac{1}{RC}$

Exercise 7.8:

Soit le montage :



1. Déterminer la fonction de transfert à vide de ce filtre.
2. On souhaite obtenir un réjecteur de fréquence à la fréquence f_0. Exprimer cette fréquence en fonction des valeurs des paramètres. En déduire la valeur R_0 de la résistance variable R permettant l'obtention d'un tel filtre.
3. On pose $x = \frac{f}{f_0}$ et $Q = \frac{2\pi f_0 L}{r}$.Écrire la fonction de transfert sous la forme $\frac{1}{1+jA}$ en exprimant A en fonction de x et Q.
4. Tracer le diagramme de Bode du filtre.
5. Déterminer la bande passante à -3dB.

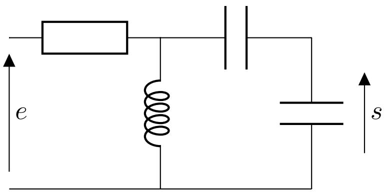
Solution Ex. 7.8

1. l'hypothèse de fonctionnement à vide impose l'absence de courant en sortie du filtre, on peux y appliquer le théorème de Millman, on l'applique également entre les deux capacités (v_A) : $v_A = \frac{jRC\omega(e+s)}{1+2jRC\omega}$ et $s = \frac{e+jC\omega(r+jL\omega)v_A}{1+jrC\omega-LC\omega^2}$ d'ou : $H = \frac{1-rRC^2\omega^2+jRC\omega(2-LC\omega^2)}{1-(L+RrC)C\omega^2+jC\omega(r+2R-RLC\omega^2)}$
2. Pour obtenir un réjecteur de fréquence il faut $H = 0$ en $\omega = 2\pi f_0$ il faut les partie imaginaire et réelle du numérateur nulle : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ et $R_0 = \frac{L}{2rC}$

3. on a $A = \frac{2x}{Q(1-x^2)}$
4. gain $\searrow (x=1) \nearrow$ phase décroissante et discontinue ! de 0 à -pi/2 et de pi/2 à 0.
5. on veux $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc on a une bande : $\frac{\pm r+\sqrt{r^2+2L/C}}{L}$

Exercise 7.9:

Étudier le filtre de suivant :



Solution Ex. 7.9

filtre de colpitt passe bande

Chapitre 8

Cinématique du point

Exercise 8.1: La pluie

Marius et Olive remonte la Canebière lorsqu'il se met à pleuvoir. Olive commence à courir vers le café le plus proche. Marius lui crie : Pas la peine de courir fada! chaque mètre du trajet reçois autant de gouttes d'eau et sera aussi mouillé. D'ailleurs, en courant tu vas au-devant de la pluie et plus tu cours vite, plus elle est oblique par rapport à toi ; au lieu de te mouiller seulement la tête, tu mouille tous tes habits.
Marius à t'il raison ?

Solution Ex. 8.1

Non, avec ce raisonnement olive, à l'arret ne serais pas mouillé(chaque metre recois une quantité d'eau par seconde). La suite est vraie, en courant on augmente la surface de contacte, mais avec une vitesse infinie on n'est pas mouillé.

Exercise 8.2: La pomme

On se place juste à la surface d'une planète de rayon R et de champ gravitationnel g .Isaac jette une pomme avec une vitesse v_0 purement horizontale on négligera les frottements de l'air.

1. En supposant la planète localement plane, déterminez la hauteur dz dont est tombée la pomme après avoir parcouru une longueur dx .
2. Après une distance horizontale dx, de combien le sol de la planète est il descendu ? On pourra utiliser les formules pour les petits angles $\tan\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1-\theta^2$.
3. En déduire qu'il existe une certaine vitesse v_0 pour laquelle la pomme va revenir à son point de départ.

Solution Ex. 8.2

1. chute libre autour de 0
2. $dh = (1-\cos d\theta)R = \frac{dx^2}{2R}$
3. $v_0 = \sqrt{gR}$

Exercise 8.3: Le lièvre et le camion

Un lièvre essaie de traverser une route, de largeur L sur laquelle roule un camion. Initialement, le lapin est à une distance d_0 du camion. Il court à la vitesse v_l en formant un angle θ avec l'horizontal, tandis que le camion roule à la vitesse v_c,

1. Déterminez le temps nécessaire au lapin pour traverser la route.
2. Exprimez la distance entre le camion et le lapin au cours du temps. A quelle condition sur cette distance le lapin reste-t-il entier ?
3. Déterminez la valeur minimale de la vitesse pour laquelle le lapin peut traverser la route sain et sauf.
4. (*) Comment s'appelle la femelle du lièvre ?

Solution Ex. 8.3

1. Pas de frottement , problème plan

2. Résolution en cartésien ! $\begin{cases} x = v_0 \sin \alpha t \\ y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 \cos \alpha t + h_0 \end{cases}$
3. $x^2 + \left(y - \left(h_0 - \frac{gt^2}{2}\right)\right)^2 = v_0^2 t^2$ équation de cercle , par symétrie on a une sphère.

Exercise 8.4: Nuages

Du haut d'une colline vous observez un nuage isolé qui se déplace dans le ciel vous voyez aussi son ombre dans la plaine et pouvez estimer la taille de cette ombre et sa vitesse. Des observations que vous faites (du seul point où vous vous trouvez) pouvez vous déduire :

1. La taille du nuage ?
2. Sa vitesse ?
3. Son altitude

Solution Ex. 8.4

1. Oui meme que l'ombre
2. idem
3. oui, en connaissant son diamètre apparent

Exercise 8.5: Paris-Brest

Vous joignez Paris à Brest en voiture par l'autoroute soit 600km , en 6h (compte tenus des péages, pauses ,etc...)

1. Y'a-t-il nécéssairement au cours du voyage au moins un instant ou votre compteur de vitesse indique 100km/h ?
2. Y'a-t-il nécéssairement au moins un intervalle d'une heure pendant lequel vous couvrez exactement 100km ?

Solution Ex. 8.5

1.
2. La balle chute en même temps que l'oiseau, il va mourir. En pratique c'est compliqué(frottement...).

Exercise 8.6: Rotation de la Terre

1. On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est suivi avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante. Déterminez sa vitesse angulaire de rotation
2. L'étude dynamique montre que la quantité $r^2\theta$ est constante au cours du mouvement de la Terre, où r est la distance de la Terre au Soleil (loi des aires). En déduire que l'orbite de la Terre est circulaire et déterminez sa vitesse.
3. Exprimez la position, la vitesse et l'accélération de la Terre au cours du temps en coordonnées polaire et cartésienne.

Solution Ex. 8.6

Distance Terre Soleil : 150×10^6 km

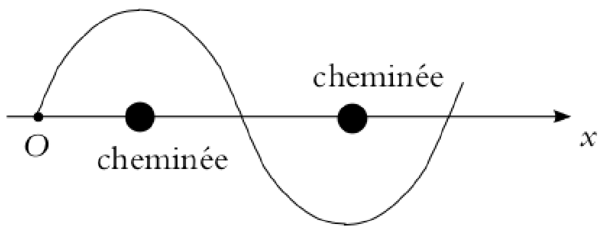
Exercise 8.7: Satellite Géostationnaire

1. Déterminer l'altitude des satellites géostationnaires.
   Donnée : $R_T = 6400km$ $M_T = 5.972 \times 10^{24}$ kg $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

Solution Ex. 8.7

PFD sur le satellite dans un mouvement circulaire uniforme ($a = -V^2/R$)

Exercise 8.8: Slalom entre des cheminées :Star Wars



Dans cet épisode de la Guerre des Étoiles, on peut assister à une course poursuite de « speeder » entre des cheminées d'usine. On suppose que le véhicule suit une trajectoire sinusoïdale de slalom entre les cheminées alignées selon l'axe Ox. Elles sont espacées d'une distance L = 200 m.

1. Le véhicule conserve une vitesse v 0 constante selon Ox. Il met un temps t t = 12 s pour revenir sur l'axe après la sixième cheminée. En déduire la vitesse v_0 . Effectuer l'application numérique.
2. Déterminer l'amplitude de la sinusoïde pour que l'accélération reste inférieure à 10g en valeur absolue, avec$g$ =9.8 $\mathrm{m/s^2}$. Que penser des valeurs obtenues ?
3. (*) Dans quel épisode à lieu cette course poursuite

Solution Ex. 8.8

1. $y = a\cos(2\pi v_0 t/L)$ avec $v_0 = 6L/t_1 = 100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
2. on veux $a\left(\frac{2\pi v_0}{L}\right)^2 \leq 10g$ alors $a = 9.9$ m ,il faut être un Jedi pour réussir une telle manœuvre
3. Star Wars 2, l'attaque des clones

Chapitre 9

Principe de la dynamique newtonienne

Exercise 9.1: Bond sur la Lune

Dans l'album de Tintin "On a marché sur la lune " le Capitaine Haddock est étonné de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur terre. On assimile le mouvement du Capitaine Haddock à celui de son centre de gravité M de masse m Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30\,\text{deg}$. On note g_l l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune. En l'absence d'atmosphère on peux considérer qu'il n'y a aucune force de frottement.

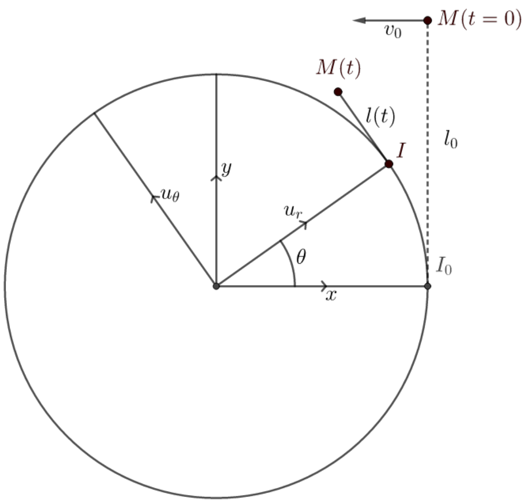
1. Déterminer l'équation du mouvement.
2. Déterminer l'expression de la distance horizontale parcourue au cours du saut.
3. Sur la Lune la pesanteur est environ 6 fois moins importante que sur Terre. Quelle sera la distance horizontale parcourue par le sauteur sur la Lune si elle est de $d = 1.5\,\text{m}$ sur Terre ?

Solution Ex. 9.1

1. Chute libre classique : $z = \frac{-1}{2} g_l \frac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2} + x \tan\alpha$
2. $d = \frac{v_0^2}{g_l} \sin 2\alpha$
3. 6 fois plus importante. et meme plus car v_0 plus grand.

Exercise 9.2: (*)Enroulement d'un fil sur un cylindre

Un cylindre de révolution, d'axe vertical, de rayon R, repose sur un plan horizontal et fixe par rapport à un référentiel$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.On attache une extrémité d'un fil parfaitement souple, infiniment mince et de masse négligeable à la base du cylindre, et on l'enroule plusieurs fois dans le sens trigonométrique autour de cette base. L'autre extrémité du fil est fixée à une particule M de masse m,astreinte à glisser sans frottement sur le plan horizontal.La partie non enroulée du fil est tendue. *Donnée :* $R = 0.2\,\text{m}$; $m = 0.04\,\text{kg}$; $l_0 = I_0M = 0.5\,\text{m}$; $v_0 = 0.1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$



1. À l'instant t = 0 , on communique à la particule M une vitesse$\vec{v_0}$ horizontale perpendiculaire à I_0M et orientée comme l'indiquent la figure ci dessus.
2. Exprimer les composantes de $\vec{OM}$ dans le repère $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ en fonction de l_0, R, θ.
3. En déduire les composantes de la vitesse $\vec{v}$ de la particule M suivant les vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$
4. Montrer que la norme v de la vitesse reste constante au cours du mouvement.

5. Déduire des question précédente une équatio différentielle vérifiée par θ
6. Résoudre cette équation différentielle.
7. Déterminer t_f instant ou le fil est entièrement enroulé.Application numérique.
8. a) Déterminer la tension T du fils en fonction de t, m, l_0, R, v_0
   b) En réalité il y a rupture du fil dès que sa tension dépasse la valeur T_{rup} $=5 \times 10^{-3}$ N. Déterminer l'instant t_r et l'angle θ_r lorsque intervient la rupture du fil. Effectuer l'application numérique.

Solution Ex. 9.2

1. $l = l_0 - R\theta$
2. $\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM} = R\vec{u_r} + (l_0 - R\theta)\vec{u_\theta}$
3. $\vec{v} = -\dot{\theta}(l_0 - R\theta)\vec{u_r}$
4. On a le poids/réaction (verticale ,pas pris en compte) et la tension $\vec{T} = -T\vec{u_\theta}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ d'ou : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -T\vec{u_\theta}$ puis : $\vec{v}.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $v = cst$
5. $v_0 = \dot{\theta}(l_0 - R\theta)$
6. on integre par séparation des variables : $l_0\theta - R\theta^2 = v_0 t$ donc $\boxed{\theta(t) = \frac{l_0}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}}\right)}$ (car on veux $\theta(t)$ croissant
7. t_f =6.25 s
8. a) PFD sur $\vec{u_\theta}$ alors :$T = mv_0\dot{\theta}$ donc : $\boxed{T = \frac{mv_0^2}{l_0}\left(1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}\right)^{-1/2}}$
   b) $t_r = 6.09$ s ; θ_r =120 deg.

Exercise 9.3: Looping

On considère une gouttière Γ circulaire, de centre O et de rayon R. On appelle (Oy) l'axe vertical ascendant. La position d'un point P sur Γ est repérée par l'angle $\theta = \widehat{\Omega OP}$ ou Ω est le point le plus bas du cercle. Une petite perle P de masse m est enfilée sur la gouttière (liaison bilatérale) qui joue donc le rôle de glissière. À l'instant $t = 0$, on lance P depuis le point Ω avec une vitesse v_0 . La perle glisse sans frottements le long de Γ.

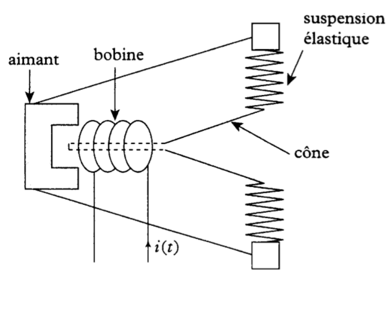
1. Exprimer la vitesse de P en un point d'altitude y en fonction de v_0, g, Ret y.
2. Étudier alors les différents mouvements possibles de P suivant les valeurs de v_0 .
3. Déterminer la réaction $\vec{N}$ de la gouttière sur la perle. Étudier ses variations en fonction de y. Commenter.
4. On choisit ici $v_0 = 2\sqrt{gR}$. Déterminer la loi horaire de θ Quelle est la valeur maximale de θ ? pour quelle valeur de t est elle atteinte ?
   Donnée : $\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

Solution Ex. 9.3

1. TEC : $\frac{1}{2}mv^2 = -mg(y + R) + \frac{mv_0^2}{2}$
2. Tour complet si $v^2 > 0$ donc si $v_0 > 2\sqrt{gR}$. sinon oscillation autour de $y_0 =$
3. PFD pour trouver $\vec{N} = N\vec{e_r}$

Exercise 9.4: Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \vec{e_x})$. Cette masse, assimilée à un point matériel M, est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f . Elle est soumise à une force $\vec{F(t)}$, imposée par le courant i(t) entrant dans le haut-parleur. On a : $F(t) = Ki(t)\vec{e_x}$, avec K une constante. On suppose que le courant $i(t)$ est sinusoïdal : $i(t) = I_m cos(\omega t)$. *Données :* $m = 10g$, $k = 15kN.m^{-1}$, $K = 200N.A^{-1}et\ I_m = 1A$



1. Proposer un modèle mécanique équivalent.
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse m.
3. La normaliser. On veux $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pourquoi ? Calculer alors la valeur du coefficient f
4. Déterminer l'expression de la réponse forcée $x(t)$ et la mettre sous la forme $X_m \cos\omega t + \phi$.*On donne* ω =6280 rad/s.
5. Tracer le diagramme de Bode correspondant, Déterminer la bande passante.

Solution Ex. 9.4

1. Ressort + amortisseur en parallèle.
2. $\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{K}{m}I_m \cos(\omega t)$
3. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$ AN : $f \simeq 17.3kg/s$
4. $\omega_0 = 1225rad/s$, $X_m = 0.5mm$ et $\phi = -2.86rad$
5. $X_m(\omega_c) = \frac{KI_m}{m\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_c^4}{\omega_0^4}}} = \frac{X_m(max)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_c = \omega_0$

Exercise 9.5: Palet sur un plan incliné

Un palet de masse m repose sur un plan incliné d'un angle alpha avec l'horizontale. On augmente progressivement α et on constate que le palet se déplace à partir d'un angle α_m.
À l'aide des lois de coulomb, Déterminer le coefficient de frottement entre le palet et le plan, puis l'équation du mouvement pour $\alpha > \alpha_m$.

Solution Ex. 9.5

1. $f = tan(\alpha_m)$
2. pour $\alpha > \alpha_m$ on a une force de frottement sec.

Exercise 9.6: Parachutiste

Un commando saute en parachute en territoire ennemi. Son saut se déroule en deux phases. Il commence par sauter de l'avion à l'altitude de croisière h et tombe en chute libre ; puis il ouvre son parachute.

1. Proposez un modèle pour décrire le saut. On adopte le modèle suivant : tant que son parachute n'est pas ouvert, les frottements peuvent s'exprimer sous la forme $\vec{f_1} = -\alpha_1\vec{v}$. On suppose que le parachute s'ouvre instantanément et transforme l'expression des frottements en $\vec{f_2} = \alpha_2 v\vec{v}$. Le parachutiste et son paquetage sont assimilés à un point M de masse m .
2. Exprimez la vitesse du parachutiste au cours du temps lors de la première phase. Au bout de combien de temps a-t-il atteint 95% de sa vitesse limite ? A quelle altitude le parachutiste se trouve-t-il à ce moment ?
3. Dès qu'il a atteint la vitesse v_lim , le parachutiste ouvre son parachute. Exprimez la vitesse du parachutiste en fonction de la distance parcourue depuis l'ouverture du parachute. Quelle vitesse finale atteint-il ?
   Données numériques : $\alpha_1 = 15\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, α_2 =57 $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$ m =100 kg

Solution Ex. 9.6

On pourra poser $u = \dot{z}^2$ et étudier $\frac{du}{dz}$

Exercise 9.7: Pourquoi le ciel est-il bleu ?

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) (il est soumis à une force de rappel passant par le centre de l'atome. Nous supposerons que ce électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnelle à sa vitesse v et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique $\vec{E}(t) = E_0 cos(\omega t)$, de pulsation ω (provenant du Soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère, représenté à l'aide du modèle de Thomson. $k = 100N.m$ $h = 10^{-20}kg/s$

1. Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de l'électron, puis la normaliser.
2. Déterminer le régime forcé.
3. Simplifier l'expression précédente en ne considérant que le rayonnement visible provenant du Soleil.

4. Sachant que l'électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

Solution Ex. 9.7

1. $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m}E(t)$
2. $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ Avec $X_m = \frac{eE_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ et $\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})$
3. Comparer les valeurs de ω_b et ω_r avec ω_0 => $X_m \simeq \frac{eE_0}{m\omega_0^2}$ et $\phi \simeq \pi$
4. On a $\ddot{x} \simeq \frac{e\omega^2}{m\omega_0^2}E_0\cos(\omega t)$ on en déduit que le rapport entre bleu et rouge est de $16.(2^4)$

Exercise 9.8: Une balle sur un mur...

Du haut d'un mur vous lancez trois balles, identiques, avec la même vitesse initiale. Vers le haut, le bas (lancés non forcément perpendiculaire au sol) et la troisième à l'horizontale.

1. Comparez leur temps d'arrivée au sol
2. Comparez leurs vitesses d'arrivée au sol.
3. (*) Comparez leurs hauteurs de rebondissement (on suppose le chox sur le sol élastique)
4. (*) Comparez la hauteur maximale (à partir du sol) atteinte par la balle lancée vers le haut, à la portée de la balle lancée à l'horizontale (distance entre le pied du mur et le point d'impact sur le sol)

Solution Ex. 9.8

1. B,Horiz,Haut (seule la vitesse verticale compte)
2. égales
3. Horiz : hauteur du mur . les autres hauteur max
4. À la limite où la hauteur du mur tend vers 0, la distance atteinte par la balle lancée horizontalement fait de même. À l'inverse, la porté croit comme la racine carré de la hauteur du mur, qui fait l'essentielle de la hauteur atteinte par la balle lancée vers le haut. Dans les deux cas, cette hauteur est donc supérieur à la portée de la balle lancée à l'horizontale.

Chapitre 10

Aspects énergétique de la dynamique du point

Exercise 10.1:

Une cuve de hauteur h et de section S contient $N \ggg 1$ billes de masse m d'énergie identique. Elles rebondissent verticalement et maintienne en équilibre un piston de masse M.
On enlève le piston à quelle hauteur monte les billes ?

Solution Ex. 10.1

1ddl => Énergie.
pendant dt le piston reçoit et cède $dp = 2mvdN$. On fait l'hypothèse d'une répartition isotrope des particules dans la cuve (théorie cinétique des gaz) $n^* = \frac{N}{hS}$ donc $dN = \frac{n^* v dt S}{2} = \frac{N v dt}{2h}$ on a donc :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{Nmv^2}{h} = Mg$$

Or $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ on a donc :

$$E = \frac{hg}{2}(M - 2m)$$

On enlève le piston et on prend une bille en $z = 0$ qui monte en h_{max} où sa vitesse est nulle $h_{max} = \frac{E}{gm} = h\frac{(M-2m)}{2m}$

Exercise 10.2:

On considère une chaîne de longueur L et de masse linéique λ uniforme sur une table. Initialement un quart de sa longueur pend à l'extrémité de la table. Sans frottement pour la retenir, elle se met à glisser.

1. Déterminer la trajectoire de l'extrémité pendante de la chaîne.
2. En considérant les frottements, quelle longueur maximale peut on faire pendre ?

Solution Ex. 10.2

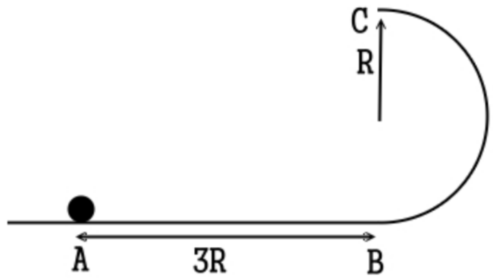
1. $E_p(z) = -\int_0^z \lambda z g dz = -\frac{-\lambda g z^2}{2} + E_p(0)$ Alors en dérivant le TEM :

$$\ddot{z} - \omega z = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \implies z = \frac{L}{4}\cosh(\omega t)$$

2. Modèle de coulomb : $\mu = \frac{\|T\|}{\|N\|} = \frac{x}{L-x} \implies x = \frac{\mu}{1+\mu}\lambda$

Exercise 10.3:

On s'interesse à un jeu de fete forraine :



1. On lance un balle M de masse m avec une vitesse $\vec{v_0}$ à une distance $3R$ d'une gouttière cylindrique. La balle doit arriver en haut du pipe en C et retomber à son point de départ en A . La balle se déplace sans frottements.
2. Calculez la vitesse v_0 nécessaire à la balle pour atteindre le point C . Quelle est alors sa vitesse ?
3. En supposant que la balle atteint le point C , à quelle distance retombe-t-elle au sol ?
4. Déterminer la vitesse pour gagner le jeu.

Solution Ex. 10.3

1. $v_B = v_A$
2. $v = \sqrt{2gh}$ avec une vitesse nulle en C (toute l'énergie cinétique a été transformée)
3. chute libre $y = \frac{-gx^2}{2v_c^2} + 2R$ la balle arrive en $x_0 = \sqrt{4Rv_c^2/g}$
4. pour gagner le jeu il faut donc $v_c = \sqrt{\frac{9gR}{4}}$ on a donc $v_0 = sqrt(v_c^2 + 2gh)$

Exercise 10.4: Cycliste au tour de France

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit un e puissance mécanique constante P les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste. On néglige les forces de frottement du sol.

1. Déterminer une équation différentielle sur la vitesse et la mettre sous la forme

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k(v_l^3 - v^3)$$

Où k est la coefficient de frottement fluide et v_l une constante homogène à une vitesse à déterminer.

2. on pose $f = k(v_l^3 - v^3)$.
   a) Déduire de la question précédente l'équation différentielle vérifiée par f.
   b) Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x, s'il aborde une ligne droite avec une vitesse v_0.
   c) Application numérique : Déterminer k et la distance nécessaire pou atteindre v_l. On donne la puissance du cycliste $P = 2\,\mathrm{kW}$ $v_l = 20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $m = 85\,\mathrm{kg}$.

Solution Ex. 10.4

1. TEC :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\vec{F_f}) + \mathcal{P}(\vec{R}) + P$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = P - kv^3$$

Alors avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$ on a :

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k(v_l^3 - v^3)$$

avec $v_l = \left(\frac{P}{k}\right)^{1/3}$ vitesse limite ou la puissance du cycliste compense les pertes.

2. a) on mets l'équation précédente sous la forme :

$$f(x) - \frac{m}{3k}f'(x) = 0$$

b) Alors on pose : $L = m/3k$ et on a : $f(x) = A\exp(-x/L)$ puis

$$v(x) = v_l \left(1 - \left(1 - \left(\frac{v_0}{v_l}\right)^3\right)\exp\left(-\frac{x}{L}\right)\right)^{1/3}$$

L est la distance caractéristique pour atteindre la vitesse limite.

c) Avec $P = 2kW$ et $v_l = 20m/s$ on a $k = 0.25\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$et $L = 113\,\mathrm{m}$.

Exercise 10.5: Interaction de particules chargée

On considère deux particules A (fixe) et B mobile de même masse m de charges respective q_A et q_B. on considère la force de coulomb entre ces deux particules comme étant la seule force en jeu du problème.

1. Rappeler son expression.
2. Donner l'énergie dont dérive cette force.
3. On suppose $q_a = q_b = q$ On lance B vers A avec la vitesse v_0 distante itialement de A À quelle distance minimale B s'approche-t-elle de A ? On pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.
4. On suppose $q_a = -q_b = q$ Quelle vitesse minimale faut-il donner à A pour qu'elle puisse s'échapper à l'infini ?On pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.

Solution Ex. 10.5

1. $\vec{f} = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr\vec{u_r}$
2. $\delta W = -\mathrm{d}E_p = \vec{f}.\vec{\mathrm{d}r} = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \implies E_p = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r} + \cancel{C}$
3. $E_m = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ on a $E_m(v_B = 0, d_{min}) = E_m(v_0, a) \implies d_{min} = \left(\frac{1}{a} + \frac{2\pi\varepsilon_0 m v_0}{q^2}\right)^{-1}$
4. Pour des charges opposées : force attractive la vitesse de libération est donnée par : $\frac{1}{2}mv_0 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = E_m(r_\infty) = 0 \implies v_0 = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 am}}$

Exercise 10.6: Le marsupilami

Le marsupilami est un animal de bande dessinée crée par Franquin aux capacité physique remarquable, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.
On note $l_0 = 2\,\mathrm{m}$:la longueur à vide du ressort équivalent. et $l_m = 50\,\mathrm{cm}$ la longueur à compression maximale. la masse de l'animal est $m = 50\,\mathrm{kg}$.Il quitte le sol quand la longueur de la queue vaut l_0.

1. Quelle est la constante de raideur de la queue si un saut amène le marsupilami à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$ Quelle est sa vitesse lorsque la queue quitte le sol ?

Solution Ex. 10.6

BDF : Poids , tension ressort réaction du support. En l'air on ne prend en compte que le poids.

1. TEM avec $E_m = E_c + E_p + \underbrace{E_e}_{=0\text{en l'air}}$ $k = \frac{2mg(h-l_m)}{(l_m-l_0)^2}$ =4.1 N/m. et $v_D = \sqrt{2g(h-l_0)}$

Exercise 10.7: Brisure de symétrie

Une masse M(m) est attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. La masse glisse sans frottement le long de l'axe horizontal et le ressort est attaché à une distance R verticale de cet axe.

1. En prenant comme référence $E_p(x = 0) = 0$ montrez que l'énergie potentielle à pour expression $E_p = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{R^2 + x^2} - l_0\right)^2 - (R - l_0)^2\right)$
2. Comment déterminer l'existence de positions d'équilibre dans le cas d'un système à un degré de liberté ? En séparant les cas $R > l_0$ et $R < l_0$, étudiez l'existence de positions d'équilibre x_{eq} .
3. Comment déterminer la stabilité des positions d'équilibre dans le cas d'un système à un degré de liberté ? Caractérisez chacune des positions trouvées précédemment.
4. Tracez une courbe $x_{eq} = f(R)$. Pourquoi dit-on d'un tel système qu'il présente une bifurcation ?

Solution Ex. 10.7

1. la force exercé sur la masse m est $\vec{f} = -k(RM - l_0)\vec{RM}$ ainsi l'énergie potentielle associée est : (en intégrant entre 0 et x) $E_p = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{R^2+x^2} - l_0\right)^2 - (R-l_0)^2\right)$
2. on étudie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_p}x = \cdots = kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$ les solutions sont : $\begin{cases} x = 0 \text{ instable} \\ x = \pm\sqrt{l_0^2 - R^2} \text{ si } R < l_0 \text{ stable} \end{cases}$
3. Un changement du paramètre R conduit à un systeme résolument différent (nombre et stabilité des positions d'équilibre)

Exercise 10.8: Chocs

On étudie un choc entre deux particules,M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2, posée sur l'axe horizontal, et de vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ suivant l'axe x On suppose le choc élastique : es particules ne peuvent pas se déformer. Après le choc, elles conservent leur masse, leur forme et leur vitesse deviennent $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$

1. Faite une analyse qualitative du problème (symétrie, cas limites ($m_1 \gg m_2$))
2. Écrire les équations de conservation au cours du processus.
3. Déterminer $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$. Comparer avec l'analyse faites en 1.
4. Application une balle de ping-pong est posée sur une balle de tennis à une hauteur h. on lache les deux balles. A quelle altitude remonte la balle de ping-pong ?

Solution Ex. 10.8

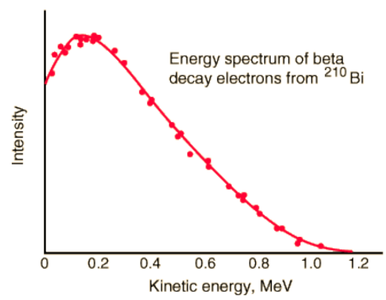
1. pour $m_1 \gg m_2$ la balle M_1 s'arrete et transmet toutes sa vitesse à la balle M_2 et s'arrete.
2. Conservation quantité mouvement et énergie cinétique $\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \end{cases}$
3. on a donc : $\begin{cases} v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 \end{cases}$
4. La balle du dessous touche le sol avant celle du dessus et, dans le cas idéal, elle rebondit sans pertes dues aux frottements. Il y a alors choc élastique entre deux balles qui ont des vitesses opposées.

$$v_2' = \frac{3 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}}v$$

Exercise 10.9: Neutrino

On se place dans le cadre relativiste et on utilisera la formule de l'énergie : $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ Une particule de masse m_0 initialement au repos dans le référentiel du laboratoire se désintègre en donnant naissance à deux particules de masse m_1 et m_2 , d'impulsion $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ de norme identique.

1. Ecrire les équations traduisant la conservation de l'impulsion et de l'énergie au cours du processus.
2. En déduire une équation vérifiée par la norme de l'impulsion p_1
3. En déduire si $m_0 > m_1 + m_2$, la valeur de p_1 et p_2 sont fixée de manière unique
4. En déduire que l'énergie des particules issues de la désintégration est fixée de manière unique.
5. Commentez le spectre d'énergie ci dessous, obtenu pour la désintégration du bismuth $^{210}_{85}Bi \rightarrow^{210}_{84} Po + e^+$



Solution Ex. 10.9

1. $\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0$ et $E_0 = m_0c^2 = E_1 + E_2$
2. $m_0c^2 = \sqrt{m_1^2c^4 + p_1^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + p_1^2c^2}$ car $p_1 = p_2$
3. La fonction $f(p_1) = \sqrt{m_1^2c^4 + p_1^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + p_1^2c^2 - m_0c^2}$ est une fonction continue et strictement croissante. De plus $f(0) < 0$ si $m_1 + m_2 < 0$ et $\lim_{p_1 \to +\infty} f(p_1) = +\infty$. d'apres le TVI il existe une unique valeur de p_1 telle ue $f(p_1) = 0$
4. Lors de la desintégration, l'électrons emporte la majeur partie de l'énergie, et ce de manière fixe. les électrons éjectés possèdent différentes énergies. Le reste de l'énergie est transmise à une autre particule, le neutrino, sans charge électrique et de masse 100 fois plus petite que celle de l'électron.

Exercise 10.10: Rayon de Schwarzschild

1. Rappelez l'expression de la force d'attraction gravitationelle et déduisez en l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
2. Une fusée de masse m est posée à la surface d'une planète de masse M et de rayon R . Elle décole avec une vitesse v_0 Quelle est la valeur minimale de v_0 qui permet à la fusée d'échapper à l'attraction gravitationelle de la planète ?
3. On imagine à présent que la fusée peut décoller à la vitesse de la lumière c . Exprimez, en fonction de la masse M de la planète, le rayon minimal au-deça duquel la fusée ne peut plus échapper à l'attraction gravitationelle.
   Données $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ et $M_{Terre} = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$

Solution Ex. 10.10

1. $v_L = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
2. $R_s = \frac{2GM}{c^2}$

Chapitre 11

Mouvement de particule chargées

Exercise 11.1:

Montrer que le mouvement d'une particule chargé soumise à un champ $\vec{B}$ constant, uniforme et orthogonal à la vitesse de la particule est circulaire.

Solution Ex. 11.1

On a $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ soit :
$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \end{cases}$ Alors on pose $\omega = \frac{qB}{m}$ et $u = x + iy$ donc $\ddot{u} = -i\omega\dot{u}$ donc

$$u = \frac{iA}{\omega}\exp(-i\omega t) = -\frac{A}{\omega}\sin(\omega t) + i\frac{A}{\omega}\cos(\omega t)$$

on identifie les parties réelles et imaginaires et on obtient

$$\begin{cases} x = -\frac{A}{\omega}\sin(\omega t) \\ y = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t) x^2 + y^2 = \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 \end{cases}$$

On a bien un mouvement circulaire. $A = v_{0x}$

Exercise 11.2: Action d'un champ magnétique sur une proton et un électron

Un électron et un proton de même énergie cinétique décrivent des trajectoires circulaires uniformes dans un champ magnétique uniforme. Comparer :

1. Leurs vitesses
2. Le rayon de leur trajectoires,
3. Leurs périodes.

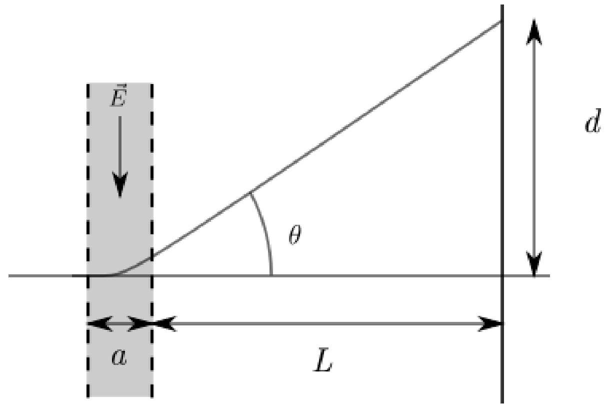
Solution Ex. 11.2

1. $v_e > v_p$ car $m_e < m_p$
2. $R = \frac{mv}{|q|B} donc\ \frac{R_e}{R_p} = \frac{v_p}{v_e}$ alors $R_e < R_p$
3. $T_e < T_p$

Exercise 11.3: Déviation d'un électron par un champ électrique

Le but de cet exercice est de déterminer la déviation d'une particule chargée par un champ électrique uniforme, tel qu'elle apparaît dans l'expérience de Thomson.
On s'intéresse à un électron arrivant dans une zone où il existe un champ éléctrique $\vec{E}$ avec une vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{E}$. On note que le champ déflecteur n'est présent que dans une zone limitée de l'espace de largeur a.

1. Calculer les vecteurs positions et vitesse à la sortie de la zone où s'applique le champ $\vec{E}$
2. En déduire l'angle de déflexion θ dû à l'action du champ électrique sur l'électron.
3. calculer la déflexion d



Solution Ex. 11.3

1. $$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{-eE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = \frac{-eE}{m}t \\ \dot{y} = v_0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{-eE}{2m}t^2 + \\ y = v_0 t \end{cases}$$

   La particule quitte la zone ou règne le champ en $y_1 = a$ à l'instant $t_1 = a/v_0$ au point d'abscisse $x_1 = \frac{-eEa^2}{2mv_0^2}$. on a en ce point $\dot{x} = \frac{-eEa}{mv_0}$
2. Dans la zone suivante , plus de champ, trajectoire rectiligne uniforme et on a $\tan\theta = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{eEa}{mv_0^2}$
3. Alors à une distance $L >> a$ on a : $d = \frac{eEa}{mv_0^2}(a/2 + L) \simeq \frac{eEaL}{mv_0^2}$

Exercise 11.4: Dissociation moléculaire

On s'intéresse à la rupture d'une molécule diatomique sous l'effet d'un champ électrique. On modélise la molécule par un couple de masses m reliées par un ressort de constante de raideur k et on note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ On considère que l'atome 1 reste immobile et que seul l'atome 2 se déplace. On note $\vec{r} = M_1M_2$. On considère que la molécule est rompue si $r > R$. Pour modéliser la polarisation de la liaison, on supposera que l'atome 2 porte une charge électrique q . On se placera dans la suite du problème en régime forcé stationnaire établi.

1. La molécule est soumise à champ électrique $\vec{E} = E_0 \cos\omega_0 t\vec{e_x}$
   a) Montrez en quoi une solution de la forme particulière de la forme $\vec{r} = \vec{r_0}\cos(\omega_0 t + \phi)$ ne peux pas convenir
   b) On cherche la solution sous la forme $\vec{r} = (A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))t\vec{e_x}$ Déterminer A et B
   c) Quelle valeur minimale doit avoir le champ $\vec{E}$ pour rompre la molécule ?
2. On modifie à présent le modèle de la molécule pour faire apparraitre un facteur de qualité Q.
   a) Déterminez l'espression de $\vec{r}$
   b) Quelle valeur minimale doit avoir le champ $\vec{E}$ pour rompre la molécule ?

Solution Ex. 11.4

En régime stationnaire, on suppose que la composante issue de l'équation homogène a disparu et on ne considère plus que la contribution de la solution particulière. Par conséquent, on ne tiendra aucun compte des conditions initiales, disparues avec le régime transitoire

1. Cas parfait : (par analyse synthèse)
   a) le PFD donne : $\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{qE_0}{m}\cos(\omega_0 t)\vec{e_x}$ On injecte la solution proposée , elle n'est valable que pour $E_0 = 0$
   b) on a cette fois :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r_p}}{\mathrm{d}t} = (A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) - A\omega_0 t\sin(\omega_0 t) + B\omega_0 t\cos(\omega_0 t))\vec{e_x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r_p}}{\mathrm{d}t^2} = (-2A\omega_0\sin(\omega_0 t) + 2B\omega\cos(\omega_0 t) - A\omega_0^2 t\cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2 t\sin(\omega_0 t))\vec{e_x}$$

Soit

$$(-2A\omega_0\sin(\omega_0 t) + 2B\omega\cos(\omega_0 t) - A\omega_0^2 t\cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2 t\sin(\omega_0 t))$$
$$+ \omega_0^2(At\cos(\omega_0 t) + Bt\sin(\omega_0 t))$$
$$= \frac{qE_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} 2B\omega_0\cos(\omega_0 t) = \frac{qE_0}{m}\cos(\omega_0 t) \\ -2A\omega_0\sin(\omega_0 t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = \frac{qE_0}{2m\omega_0} \\ A = 0 \end{cases}$$

c) la solution n'est pas bornéee si $E_0 \neq 0$

2. a) $\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{w_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{qE_0}{m}\cos(\omega_0 t)\vec{e_x}$
Passage en complexe

$$i\frac{\omega_0^2}{Q}\vec{r_0}e^{i\phi} = fracqmE_0\vec{e_x}$$

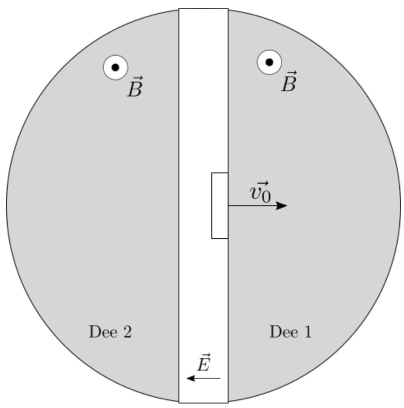
$$\begin{cases} \vec{r_0} = \frac{q}{m\omega_0}E_0\vec{e_x} \\ \phi = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

b) Le mouvement est d'amplitude constante pour rompre la lisaion on doit donc avoir :

$$r_0 \geq R$$
$$E_0 \geq \frac{m\omega_0^2 R}{Qq}$$

Exercise 11.5: (*) Étude d'un cyclotron

Un cyclotron est une instrument qui sert à accélérer des particules chargées, permettant ensuite de réaliser des expériences de physique nucléaire. Dans ce problème les particules chargée sont des protons de masse $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg et de charge électrique $q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Le cyclotron est formé de deux demis-cylindres conducteurs creux appelé "dees" et séparée par un intervalle étroit. Un champ magnétique uniforme B règne à l'intérieur de chaque "dee" sa direction est parallèle à l'axe de ces demis cylindre et $B = 1.0$ T. un champ électrique $\vec{E}$ variable dans le temps, peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les "dees". Il permet d'accélérer les protons chaque fois qu'il pénètre dans cet intervalle. Ce champ électrique variable est obtenu e, appliquant une tension créneau oscillant entre $-U_M$ et U_M et de fréquence f entre deux dees : $U_M = 2.0 \times 10^3$ V. On donne le schéma simplifié d'un cyclotron sur la figure ci-contre.



1. Le proton entre dans le dee 1 avec une vitesse initiale d'injection $\vec{v_0}$ perpendiculaire à l'axe des demi-cylindres.
   a) Faire un bilan des forces et les représenter sur un schéma.
   b) En admettant que le mouvement est plan, montrer que la norme de la vitesse est constante.
   c) En admettant que le mouvement est circulaire, déterminer son rayon.
   d) Exprimer la longueur et calculer le temps nécessaire au proton pour effectuer un demi-tours du cyclotron. Commentaire.
2. Le proton après un demi tour dans le dee , entre dans l'intervalle étroit où il est accéléré par le champs électrique considérer comme constant, maximum et colinéaire au vecteur vitesse du proton durant son passage.
   a) Exprimer littéralement puis calculer la variation d'énergie cinétique du proton à chaque passage dans l'intervalle.
   b) Préciser si le rayon de la trajectoire augmente ou diminue à chaque fois qu'il traverse l'intervalle .
3. La vitesse d'injection du proton étant considérée pratiquement nulle , on désire que sa vitesse atteigne $= 2 \times 10^4\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$

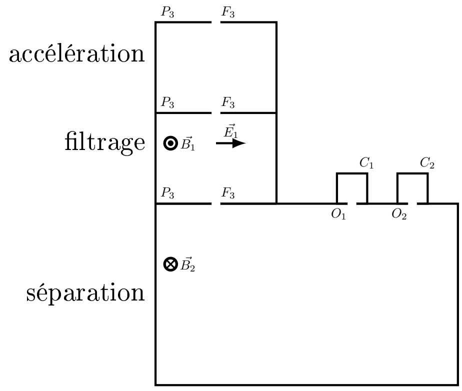
a) Calculer le nombre de tour nécessaire pour atteindre cette vitesse.
b) Calculer la valeur du rayon à partir duquel les protons ayant acquis la vitesse désirée son extrait, en considérant qu'il sont injectée à proximité du centre du cycloctron.

Solution Ex. 11.5

1. a) $f = q_p\vec{V_0} \wedge \vec{B}$
   b) $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = (q\vec{v}, \vec{B}, \vec{v}) = 0$
   c) PFD dans un MCU : $m\frac{v^2}{R_0} = q_P v_0 B$ puis $R_0 = \frac{m_p v_0}{q_p B}$
   d) ce temps est indépendant de la vitesse d'entree dans le dee. $\Delta \; = 3.28 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$.
2. a) on veux $f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{q_P B}{2\pi m_p} \; = 15.2\,\mathrm{MHz}$.
   b) $\Delta E_c \; = 3.2 \times 10^{-16}\,\mathrm{J} = 2 \times 10^3\,\mathrm{eV}$ à chaque passage dans l'entrefer.
3. a) il faut $N = \frac{E_c}{\Delta E_c}$ passage dans l'entrefer soit $n \simeq 500tr$
   b) $R = \frac{m_p v_f}{q_p B} \; = 0.209\,\mathrm{m}$ passage à une distance $D = 2R$ du centre, à 41,8cm

Exercise 11.6: (*) Spectromètre de masse

Un spectromètre de masse permet de mesurer la masse des particules avec une telle précision qu'il peut servir à déterminer des compositions isotopique d'élément chimique. On s'intéresse ici au cas du Mercure. Une source émet des ions mercures ${}^{200}_{80}Hg^{2+}$ ${}^{202}_{80}Hg^{2+}$. ces ions passent dans le spectromètre de masse où ils ont accélérés puis séparer afins de mesurer leur rapport isotopique.



Données numériques :
$d = 1$ m ; $U = 1,00.10^4$ V ; unité de masse atomique $1u = 1,67.10^{27}$kg (masse d'un nucléon) ; $E_1 = 5,30.10^4$V/m ; $B_1 = 0,383$T ; $B_2 = 0,2$T ; $F_3O_1 = 1.44$m F_3O_2 =1.45m

1. Accélération des ions
   a) Préciser la plaque de potentiel le plus élevé, calculer numériquement la valeur de champ E_0.
   b) Établir l'expression littérale de la vitesse v_0 des ions sur la plaque P_2.
   c) Calculer numériquement $v_0 1$ et $v_0 2$. les vitesses respectives des deux isotopes du mercure à lerur arrivé en F_2. *Étant donnée que l'hypothèse de vitesse nulle en F_1 est difficile à réalisé en pratique, il est nécessaire de filtrer en vitesse pour améliore les performances de l'appareil.*
2. Filtre en vitesse.
   Les ions traverse la plaque P_2 par la fente F_2avec un vitesse perpendiculaire à P_2 Ils entrent dans l'espace séparent P_2 et P_3 où règne : – un champ $\vec{E_1}$ parallèle à P_2 et dans le plan du schéma.
   – un champ $\vec{B_1}$ uniforme et perpendiculaire au plan du schéma.
   a) Sous quelles conditions les ions peuvent-ils avoir une trajectoire rectiligne les amenant jusqu'en F_3 ?
   b) Calculer numériquement cette vitesse et en déduire quel isotope du mercure arrive en F_3 avec ces réglages.
3. Séparation des ions Après F_3 les ions pénètrent dans une région où ne règne qu'un champ magnétique $\vec{B_2}$ normal au plan du schéma. ils sont déviés vers les collecteurs C_1 et C_2.
   a) Montrer que le mouvement des ions dans cette région est uniforme.
   b) Sachant que la trajectoire des ions est circulaire, déterminer les rayons des demis cercles décris par les deux isotopes.
   c) Associer chaque collecteur à l'isotope correspondant.
   d) La distance δ qui sépare les points O_1 et O_2 parait-elle suffisante pour pouvoir installer des détecteurs de particules ?
   e) les quantités d'électricité reçu en une minute par les collecteurs sont $Q_1 = 1,20.10^{-7}$C et $Q_2 = 3,5.10^{-8}$C. Déterminer la composition isotopique du mercure. en déduire sa masse atomique.

Solution Ex. 11.6

1. a) les ions sont positifs ,pour accélérer on veux $\vec{E}$ dans le sens de l'accélération, le champs descend les potentiels donc les charges sont en P_1. $\vec{E_0} = \frac{U}{d}\vec{u_x}$ et $E_0 \; = 1 \times 10^4\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$

b) TEC : $v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

c) $v_{01} = 1.384 \times 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $v_{02} = 1.377 \times 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

2. on veut $\vec{f_B}$ opposée à $\vec{f_E}$ donc $v_0 = E_1/B_1 = 1.384 \times 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. c'est l'isotope 200 qui parvient en F_3 l'isotope 202 est lui *dévié vers la droite*
3. TEC : $m\frac{v_0^2}{R} = qv_0B_2$ donc $R = \frac{mv_0}{qB_2}$ on a $R_1 = 0.722\,\mathrm{m}$ $R_2 = 0.726\,\mathrm{m}$.C_1 reçoit les isotopes 200, C_2 les isotopes 202.

Chapitre 12

Loi du moment cinétique

Exercise 12.1: Catamaran

SCHEMA On considère le modèle d'un catamaran représenter sur la figure suivante : Cet exercice s'intéresse au condition d'équilibre du catamaran sur l'eau.

1. Exprimer la variation de la poussée d'archimède quand un réservoir s'enfonce d'un niveau ε.
2. on considère la situation suivante :
   a) Décrire qualitativement l'évolution du système
   b) À quelle condition sur la position du centre de gravité le catamaran retrouve-t-il l'équilibre ?

Solution Ex. 12.1

1. On a $\vec{\Pi} = -\rho_{eau} V_{im} \vec{g}$. En s'enfonçant de ε on a une variation de volume $\Delta V = 2RL\varepsilon$ donc $\Delta\vec{\Pi} = -\rho_{eau} 2RL\varepsilon\vec{g}$.
2. $\vec{P}i = -\frac{m}{2}g - \rho_{eau}2RL\varepsilon\vec{g}$ On a $\varepsilon_1 = \xi + a\theta$ et $\varepsilon_2 = \xi - a\theta$. Dans une situation de quasi équilibre on a :
$$\vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{P} = \vec{0} \implies \xi = 0$$
On applique le TMC en G : $\vec{\mathcal{M}}(\vec{\Pi}_{A1}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{\Pi}_{A1}) = J\ddot{\theta}\vec{z}$ on a $\mathcal{M}_G(\vec{\Pi}_1) = (h\theta - a)\left(\frac{mg}{2} + 2\rho gRLa\theta\right)$ Ainsi
$$\theta(\frac{mgh}{2} - 4\rho_{eau}RLga^2) = J\vec{\theta}$$
Stable si $h \leq \frac{4\rho RLa^2}{m}$

Exercise 12.2: Chute d'échelle

O_x est un sol horizontale et Oy un mur vertical. Une échelle verticale AB de masse m, de longueur $L = 2l$ et de moment d'inertie par rapport à l'axe Oz : $J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$ évolue dans le plan de la figure Initialement elle est verticale et cet équilibre instable est détruit de façon infinitésimale, ce qui signifie que sa vitesse initiale est quasi nulle. L'extrémité A peut tourner librement en O sans frottement.

1. Déterminer les expressions de $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ en fonction de g, l, α.
2. Calculer tant que A est en O, les composantes R_x et R_y de la force de contact s'exerçant sur la tige ; commentaires.

Solution Ex. 12.2

1. on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}m(2l)^2\dot{\alpha}\right) = -mgl\cos\alpha \implies \boxed{\ddot{\alpha} = \frac{-3g}{4l}\cos\alpha}$ On intègre apres mulitplication de la dérivée : $\dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2l}(1 - \sin\alpha)$ On peux aussi faire par l'énergie mécanique.
2. TRD en G $\begin{cases} m\ddot{x} = R_x \\ m\ddot{y} = R_y - mg \end{cases}$ de plus $\begin{cases} \ddot{x} = -l(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) \\ \ddot{y} = l(\ddot{\alpha}\cos\alpha + \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{cases}$
donc :
$$\boxed{R_x = \frac{9}{4}mg\cos\alpha\left(\sin\alpha - \frac{2}{3}\right)} \quad \boxed{R_y = \frac{1}{4}mg\,(3\sin\alpha - 1)^2}$$

Exercise 12.3: (*) Mouvement amplifié sur une balançoire

un enfant debout sur une balançoire est schématisé par un pendule oscillant sans frottement autour d'un axe de rotation horizontal. Quand la balançoire passe par un maximum d'élongation, l'enfant fléchit brusquement ses genoux (la distance de son centre de masse à l'axe est alors a_1 et son moment d'inertie par àl'axe J_1, position 1). Quand la balançoire passe par le point le plus bas, l'enfant se redresse brusquement parallèlement à la corde tendue (la distance de son centre de masse à l'axe est alors a_2 et son moment d'inertie par àl'axe J_2, position 2)

1. Faire un dessin ; comparer a_1 et a_2 d'une part et J_1 et J_2 d'autre part et en déduire la valeur du coefficient $K = J_2 A_2 / J_1 a_1$ par rapport à 1. Au passage par le point le plus bas ($\theta = 0$) le moment des forces extérieur par rapport à l'axe (réaction d'axe et surtout poid de l'enfant) est nul. Le moment cinétique pendant ce court intervalle de temps est conservé.
2. Quelle relation cela entraine t-il ? Comparer au passage des positions 1 et 2 les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 ainsi que les énergies cinétiques $E_c 1$ et $E_c 2$ d'où vient l'énergie ?
3. Initialement la balançoire est écarté de la direction verticale d'un angle θ_0 et la vitesse angulaire est nulle. Au bout de combien de passage par la verticale peut elle espérer atteindre la direction horizontale ? se servir de K.

Solution Ex. 12.3

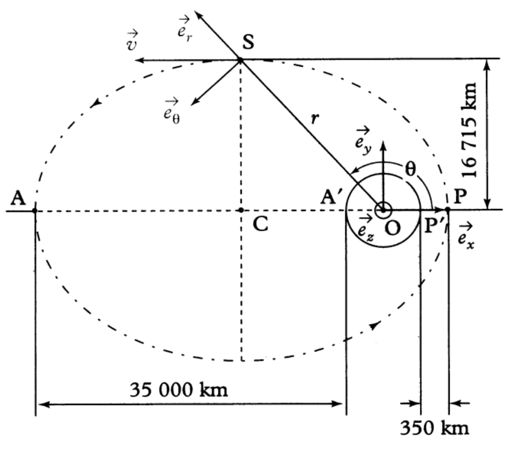
SCHEMA

1. On a $a_1 > a_2$ et $J_1 > J_2$ donc $K < 1$ On passe deux fois debout au milieux pour une oscillation !
2. La conservation du moment cinétique aub passage par le point le plus bas s'écrit : $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$ soit $\omega_2 > omega_1$ et donc $Ec_2 > Ec_1$ car le système est déformable (l'enfant fourni de l'énergie).
3. TEC $\theta_0 \to \theta = 0$: $\frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 - 0) = mg(1 - \cos\theta_0) a_1$
   TEC $\theta = 0 \to \theta_1$ $\frac{1}{2} J_1 (0 - \omega_2^2) = mg(1 - \cos\theta_1) a_2$
   et avec $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$, il vient au bout d'une demi-oscillation :
   $$(1 - \cos\theta_0) = K(1 - \cos\theta_1)$$
   Partant de la même énergie au début de la deuxième demi-oscillation, on a de même $(1 - \cos\theta_1) = K(1 - \cos\theta_2)$ et par récurrence de passage par la position d'équilibre :
   $$(1 - \cos\theta_0) = K(1 - \cos\theta_1) = K^2(1 - \cos\theta_2) = K^n(1 - \cos\theta_n)$$

Exercise 12.4: Moment cinétique d'un satellite

Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse $m = 1$ tonne, décrit une trajectoire elliptique autour de la terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ dirigée vers le centre de force0, centre d'inertie de la Terre. Le référentiel géocentrique$\mathcal{R}_\}(Oxyz)$ est supposé galiléen. À l'instant représenté, la vitesse du satellite dans ce référentiel est : $v = 14\,650\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

Données : Rayon de la terre : $R_T = 6400\,\mathrm{km}$



1. Calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans $\mathcal{R}_\}$ à l'instant considéré.
2. Donner la valeur de la vitesse du satellite :
   a) à son apogée A

b) à son périgée P

Solution Ex. 12.4

1. $L_0 = 6.8 \times 10^{13}\,\mathrm{kgm^2/s}$
2. a) $v_A = \frac{L_0}{m(AA' + R_T)} = 5.9 \times 10^3\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

   b) $V_B = \frac{L_0}{m(PP' + R_T)} = 3.6 \times 10^4\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

Chapitre 13

Forces centrales

Exercise 13.1: (*) Diffusion de Rutherford

L'expérience consiste à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α (noyau d'hélium He^{2+}). Une particule α de masse $m \simeq 4m_p$ arrive avec une vitesse v_0 dont le support est distant de b du noyau d'or $^{197}_{79}Au$.

1. Quelle la force qui s'exerce sur la particule ? pourquoi peut on considérer le noyau d'or immobile pendant l'interaction ?
2. Pourquoi l'énergie et le moment cinétique de la particule α sont il constant, les calculer. ?
3. Dans un premier temps $b = 0$ et le mouvement de la particule est rectiligne. Quelle est la distance r_m minimale d'approche de la particule au noyau d'or ? *Donnée :* $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$,$e = 1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ si on veux r_m de l'ordre de la dimension du noyau (10^{-15}) quelle doit etre la vitesse initiale ?
4. Dans le cas $b \neq 0$ montrer que l'énergie s'écrit $E = \frac{1}{2}m\dot{r} + V_{eff}(r)$. Étudier et tracer $V_{eff}(r)$. Quand $r = r_m$ que vaut $\dot{r}$? Exprimer r_m en fonction des données du problème. Étudier et interpréter les variations de r_m avec E et b.

Solution Ex. 13.1

Exercise 13.2: La comète de Halley

La comète de HALLEY décrit une ellipse dont un des foyers est le centre du Soleil que l'on suppose immobile (on travaille dans le référentiel héliocentrique). L'aphélie A (point le plus éloigné du Soleil) se trouve à une distance $r_A = 5.30 \times 10^9\,\text{km}$ et la vitesse de la comète vaut alors $v_A = 0.9\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ *Données :* $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{USI}$, *masse du soleil* $M_S = 2 \times 10^{30}\,\text{kg}$

1. On cherche à calculer les caractéristiquesr_P et v_P de la trajectoire au périhélie P (point le plus proche du Soleil)
   a) Trouver deux relations liant r_A, v_A, r_P etv_P.
   b) En déduire les valeur numérique de r_P et V_P
2. Calculer la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse parcourue par la comète de HALLEY
3. Déterminer la période de la comète de HALLEY.

Solution Ex. 13.2

1. a) $v_A r_A = v_P r_p$ et $\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_A} = \frac{1}{2}v_P^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_P}$
   b) $v_P = 55\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et $r_P = 8.7 \times 10^7\,\text{km}$
2. $a = 2.7 \times 10^9\,\text{km}$
3. $T_c = T_T \left(\frac{a}{r_T}\right)^{3/2} = 76\ ans$

Exercise 13.3: (*) Limite de Roche

On cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle une comète s'approchant de Jupiter se sépare en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marées du à jupiter. Pour cela on fait les hypothèse suivantes :

- Le réferentiel Jupitérocentrique est galiléen et Jupiter est un astre sphérique homogène.

- La comète de masse volumique μ_c est en orbite circulaire de rayon d autour de jupiter.
- La comète est constituée de deux sphères identique de masse m et de rayon$r$ homogènes elles sont liées entre elle par leur attraction gravitationnelle mutuelle.

1. Établir que le mouvement du centre d'inertie de la comète est uniforme puis déterminer l'expression de ω^2 carré de la vitesse angulaire du mouvement.
2. On note R la réaction de la sphère de la comète la plus proche de jupiter sur la sphère la plus éloignée. À quelle condition le contact entre les deux sphères est-il rompu , à quelle distance d_lim cela arrive t-il ?
3. faire l'application numérique de $\frac{d_lim}{R_J}$. *Données :* $M_j = 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$; $R_j = 7.1 \times 10^4\,\mathrm{km}$; $\mu_c = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

Solution Ex. 13.3
De l'art de bien faire un DL.

Exercise 13.4: Détermination de la masse de la Terre

Sachant que la distance Terre-Lune est en moyenne de $383600km$ déterminer la masse de la Terre.

Solution Ex. 13.4
$M_T = 6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ ($T_L = 27.33\,\mathrm{j}$)

1. Loi de kepler $\frac{T_L^2}{d_{TL}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$
2. $\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{d_{TL}^2} = -d_{TL}\omega_L^2$

Exercise 13.5: Modèle Atomique de Thomson

En 1904, le physicien anglais Joseph John THOMSON proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre 0 , de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse m ponctuelle et de charge $-e$. En l'absence de toute action extérieur l'électron M est soumis à la seule force électrostatique. *Donnée :*$m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ USI, *vitesse de la lumière dans le vide* $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Équation d'une ellipse en coordonnées cartésienne avec origine en O , d'axe de symétrie Ox et Oy : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en$O$ de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0 , v_0 et m .En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy).
2. Exprimer ma pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ε_0, e, m, R calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de Lyman de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121.8\,\mathrm{nm}$)
3. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de Hooke) , dont vous préciserez les caractéristiques.
4. À quelle condition cette trajectoire est circulaire ? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?
5. L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux : $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h , coefficient de freinage, est positif.
   a) Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps ?
   b) Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.
   c) Commenter quant à la stabilité de l'atome.

Solution Ex. 13.5

1. TMC en O : force central ,moment cinétique conservé. en $t = 0$ on a $\vec{L}_O(M) = mr_0v_0\vec{e_z}$. $\forall t \vec{L} \perp \vec{OM}$ donc la trajectoire est dans le plan de normal $\vec{e_z}$.
2. PFD : $m\frac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\vec{OM} \implies \frac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\vec{OM} = \vec{0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mR^3}}$ On a donc

$$R = \left(\frac{\lambda_0^2}{16\pi^3\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^{1/3} \underset{A.N.}{=} 100pm$$

3. $\vec{OM} = r_0\cos(\omega_0 t)\vec{e_x} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\vec{e_y}$ on a une ellipse de centre O de demi-grand axe a selon Ox et de demi-petit axe b selon Oy.
4. circulaire si $v_0 = r_0\omega_0$ si la vitesse initiale de l'electron est nulle $b = \frac{v_0}{\omega_0} = 0$. L'ellipse s'assimile a un segment $2a$ (OH a une dimension)
5. force de freinage avec un moment en O, le TMC devient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{M/O}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) + < \mathcal{M}(\vec{f}) = \vec{0} - \frac{h}{m}\vec{L}_{M/O}$$

Alors $\vec{L}_{M/O}t = \vec{L}_{M/O}t(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{m}{h}$. Le moment cinétique tend à s'annuler. l'équation du mouvement devient

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}\omega_0^2\vec{OM} = \vec{0}$$

Avec $Q = \frac{m\omega_0}{h}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercise 13.6: (*) Vecteur de Runge-Lentz

On considère une particule ponctuelle M de masse m dont la position est repérée par ses coordonnées cylindrique (r, θ, z) dans un referéntiel $\mathcal{R}$ galilléen de repère $(Oxyz)$. Sa vitesse dans
$mathcalR$ est notée$\vec{v}$. La particule est plongé dans un champs de force dérivant du potentiel $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (avec $\alpha > 0$)

1. Montrer que moment cinétique reste constant. Exprimer sa projection sur l'axe z en fonction de $m, r, \dot{\theta}$. Cette relation est un intégrale première du mouvement.
2. Montrer que l'énergie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\rfloor + V(r)$ est une intégrale première du mouvement. exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de $r, \dot{r}, \dot{\theta}, m$ et α
3. a) Montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L_{O/\mathcal{R}}} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ est une intégrale première. Comment sont disposé l'un par rapport à l'autre les vecteurs $\vec{A}$ et$\vec{L_{O/\mathcal{R}}}$? Quelles sont les coordonées polaire de $\vec{A}$ on note $\vec{e_x}$ la direction de $\vec{A}$ (soit $A_x = A$) montrer que dans ces conditions $r, \dot{\theta}$ et $\dot{r}$ peuvent être exprimer comme des fonctions de la seule variable θ et des constantes du problème. donner ces expression.
   b) Mettre l'expression de r sous la forme $(r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)})$ À quelle courbe correspond cette fonction ? Exprimer p et e en fonction des paramètres L_z, A, m et α
   c) Calculer $\mathcal{E}$ et $a = \frac{p}{1-e^2}$ en fonction des mêmes paramètres. Quelle valeur maximale A_{max}peux prendre A pour que le mouvement reste de dimension finie ? Pour une valeur de A inférieur à A_{max} tracer l'allure de la courbe indiquant la position du vecteur $\vec{A}$

Solution Ex. 13.6

1. $L_z = mr^2\dot{\theta}$
2. $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} = Cste$
3. a) $\vec{A} \perp \vec{L_O}$;$A_r = mr^3\dot{\theta}^2 - \alpha$ et $A_\theta = -mr^2\dot{r}\dot{\theta}$ avec la constante des aires $C = r^2\dot{\theta} = \frac{L_z}{m}$ on a pour $\vec{A} = A\cos(\theta)\vec{e_r} - A\sin(\theta)\vec{e_\theta}$, $r = \frac{L_z^2}{\alpha m}\frac{1}{1+\frac{A}{\alpha}\cos\theta}$ et $\dot{\theta} = \frac{L_z}{mr^2} = \frac{m}{L_z^3}(A\cos\theta + \alpha)^2$; $\dot{r} = \frac{A\sin\theta}{L_z}$
   b) $p = \frac{L_z^2}{\alpha m}$ et $e = \frac{A}{\alpha}$
   c) $\mathcal{E} = \frac{m}{2L_z^2}(A^2 - \alpha^2)$ et $a = \frac{\alpha L_z}{m(\alpha^2 - A^2)}$

Chapitre 14

Description d'un système physico-chimique et équilibre chimique

Exercise 14.1: Évolution et équilibre

Part I — Réaction acide-base

On considère un système évoluant selon la réaction d'équation bilan : $CH_3COOH_{(aq)} + F^-_{(aq)} = CH_3COO^- + HF_{(aq)}$ de constante d'équilibre $K = 10^{-1,6}$ à $298K$ Pour chacun des mélanges initiaux suivant déterminer le sens de l'évolution spontanée et l'état d'équilibre. Indiquer à chaque fois si la réaction est totale ou équilibrée :

1. $[CH_3COOH]_0 = [F^-]_0 = 0,10\ mol/L$ et $[HF]_0 = [CH_3COO^-]_0 = 0\ mol/L$
2. $[CH_3COOH]_0 = [F^-]_0 = [HF]_0 = [CH_3COO^-]_0 = 0,10\ mol/L$

Part II — Réaction d'oxydo-réduction

Les ions cuivres (II) $Cu^{2+}_{(aq)}$ peuvent réagir en solution aqueuse avec du cuivre solide $Cu_(s)$ pour donner des ions cuivre (I) $Cu^{2+}_{(aq)}$.

1. Écrire l'équation de réaction en utilisant les plus petits coefficients stœchiométriques entiers possibles. La constante d'équilibre de cette réaction vaut $K = 91$ à la température de travail.
2. Déterminer le sens d'évolution d'un systeme obtenue en mélangeant du cuivre solide en excès avec 40,0mL d'une solution de nitrate de cuivre(I) à C_1 =1,0. 10^{-3} mol/L et 10,0 mL d'une solution de sulfate de cuivre (II) à C_2 =2,0.10^{-3} mol/L
3. Déterminer la composition du système à l'état final. La réaction est-elle totale ?

Solution Ex. 14.1

Part I — Réaction Acide-base

1. Q_0= 0 <K . la réaction est dans le sens direct.

	$CH_3COOH +$	$F^- =$	$CH3COO^- +$	HF
EI	0,10	0,10	0	0
EF	0,10-x	0,10-x	x	x

D'apres la LAM on a $Q_{eq} = K = \frac{x^2}{(0,1-x)^2} = 10^{-1,6}$ on résoud et on a : $x = 1,4.10^{-2}$ mol/L d'où les concentrations à l'équilibre :
$[CH_3COOH] = [F^-] = 8,6.10^-2$ mol/L et $[CH_3COO^-] = [HF] = 1,4.10^-2$

2. Q_0= 1 >K . la réaction est dans le sens indirect.

	$CH_3COOH +$	F^-	$= CH3COO^- +$	HF
EI	0,10	0,10	0,10	0,10
EF	0,10-x	0,10-x	0,10+x	0,10+x

D'apres la LAM on a $Q_{eq} = K = \frac{(0,1+x)^2}{(0,1-x)^2} = 10^{-1,6}$ on résoud et on a : $x = -7,3.10^{-2}$ mol/L d'où les concentrations à l'équilibre : ($x \neq x_max$) $[CH_3COOH] = [F^-] = 1,7.10^-1$ mol/L et $[CH_3COO^-] = [HF] = 2,7.10^-2$ K *« 1 il a tjr plus de réactif que de produits*

Part II — Réaction oxydo-réduction

1. $Cu^{2+} + Cu = 2Cu^+$
2. calculons les concentrations initiales dans le mélange : $[Cu^{2+}]_0 = 4,0.10^{-4}$mol/L ; $[Cu^+]_0 = 8,0.10^{-4}$mol/L ; $Q = 1,6.10^{-3} < K$ sens direct.
3.

	Cu^{2+}	+ Cu =	$2Cu^+$
EI	$4,0.10^{-4}$	excès	$8,0.10^{-4}$
EF	$4,0.10^{-4} - x$	excès	$8,0.10^{-4} + 2x$

On a d'après la LAM :

$$Q_e = K = \frac{(8,0.10^{-4} + 2x)^2}{4,0.10^{-4} - x} = 91$$

=> $x_{eq} = 4,0.10^{-4}$. alors $[Cu^+]_{eq} = 1,6.10^{-3}$mol/L et $[Cu^{2+}] = \varepsilon = 2,8.10^{-8}$ *espèce dissoute elle ne disparait pas totalement, ε se trouve avec la LAM* Réaction totale.

Exercise 14.2: Réaction en phase gazeuse

On considère la réaction suivante en phase gazeuse dans un réacteur fermé à T et V constants :

$$2N_2O_5 = 4NO_2 + O_2$$

On introduit le réactif seul. Les gaz sont assimilés à des gaz parfaits.

1. Exprimer la pression totale P à un instant t en fonction de la pression initiale P_0 et du taux de décomposion α de N_2O_5 définie comme le nombre de mole de N_2O_5 ayant réagi sur le nombre de moles initial.
2. À l'équilibre, la pression totale est égale à $2P_0$. La réaction est elle totale ? Déterminer les fractions molaires des différentes composés à l'équilibre.
3. Sachant que $P_0 = 2$ bar, calculer la valeur de la constante d'équilibre K à la température de travail.

Solution Ex. 14.2

1.

	$2N_2O_5$ =	$4NO_2$ +	O_2	n_{gaz}	pression
t=0	n_0	0	0	n_0	P_0
t	$n_0 - 2\xi$	4ξ	ξ	$n_0 + 3\xi$	$P_0 + n_0RT/V$
	$n_0(1-\alpha$	$2n_0\alpha$	$n_0\alpha/2$	$n_0(1+3\alpha/2)$	$(1+3\alpha/2)P_0$

avec $\alpha = 2\xi/n_0$

2. À l'équilibre $2P_0 = (1 + 3\alpha/2)P_0$ donc $\alpha = 2/3 < 1$. La réaction n'est pas totale. $n = 2n_0$ donc : $x(N_2O_4) = 1/6$; $x(O_2) = 1/6$ $x(NO2) = 2/3$
3.

$$K = \frac{P(O_2)P(NO_2)^4}{P(N_2O_5)^2 P_0^3} = \cdots = 76$$

Exercise 14.3: Taux d'avancement

1. Écrire l'équation de la réaction entre le monoxyde d'azote NO et le dioxygène conduisant à N_2O_4, en prenant comme coefficient stoechiométrique les plus petits entiers possibles.
2. À l'instant initial, on introduit dans un réacteur fermé : 0,50 mol de NO, 0,70 mol de O_2 et 0,20 mol de N_2O_4 . quel est le réactif limitant ?
3. Au bout d'un temps t il reste 0,30 mol de NO.
   a) Quel est alors l'avancement chimique de la réaction ?
   b) Quel est le taux d'avancement ?
   c) Déterminer la quantité de matière de chacun des constituants du système.
4. A quel valeur d'avancement correspond le taux d'avancement de 90%
5. Pour 0,50 mol de NO introduite, combien faut-il introduire de O_2 pour être dans les proportions stœchiométriques ?

Solution Ex. 14.3

TD PCSI chimie T1

1. $2NO + O_2 = N_2O_4$

2.

	$2NO +$	$O_2 =$	N_2O_4
t=0	0,50	0,70	0,20
t	0,50-ξ	0,70-ξ	ξ

   Si NO est limitant : $0,5 - 2\xi_{max} = 0$ et $\xi_{max} = 0,25$ mol
   Si O_2 est limitant : $0,7 - 2\xi_{max} = 0$ et $\xi_{max} = 0,7 > 0,25$ mol
   Donc NO est le réactif limitant.

3. Au bout d'un temps t : $0,50 - 2\xi = 0,30$ donc $\xi = 0,10$ mol . et le taux d'avancement $\tau = \xi/\xi_{max} = 0,10/0,25 = 40\%$ On a l'EF : n(O_2) = 0,60 mol et n(N_2O_4) = 0,30 mol .

4. $\xi = \tau * \xi_{max} = 0,23$ mol

5. Il faut introduire n$(O_2)_0$= n$(NO)_0/2$ = 0,25 mol .

Chapitre 15

Évolution temporelle d'un système chimique

Exercise 15.1: Décomposition de N_2O_5

L'expérience montre que la réaction suivante en phase gazeuse : $N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + 0.5O_2$ réalisé aux environs de 160 °C se comporte comme une réaction totale du premier ordre par rapport au pentaoxyde de diazote N_2O_5. Soit k_1 la constante de vitesse pour une température donnée. On négligera dans le domaine de température envisagé la dissociation et la dimérisation du dioxyde d'azote.

1. Établir la relation donnant $[N_2O_5]$ en fonction du temps et de la concentration initiale $[N_2O_5]_0$.
2. Cette expérience est réalisée à 160 °C dans un récipient de volume constant ; au bout de trois seconde 2/3 de N_2O_5 ont été décomposé. Déterminer k_1 à cette température.
3. Calculer le temps de demi réaction à cette température. Que serait-il si la concentration initiale est doublée ?

4. La constante jk_1 suit la loi d'Arrhénius d'énergie d'activation E_a=103 kJ/mol.
   a) Calculer k_1' constante de vitesse à la température θ à laquelle il faut effectuer la réaction précédente pour que 95,00% du pentaoxyde d'azote soit décomposé en trois seconde.
   b) Déterminer θ et calculer le nouveau temps de réaction

Solution Ex. 15.1

1. $v = -\frac{\mathrm{d}[N_2O_5}{\mathrm{d}t} = k_1.[N_2O_5]$ d'où $[N_2O_5] = [N_2O_5]_0 \exp(-k_1 t)$
2.

	$N_2O_5 =$	$2NO_2 +$	$0.5O_2$
t=0	n	0	0
t=3s	n/3	4n/3	n/3

   Pour $t = t_1 = 3s$,$[N_2O_5]_{t_1} = [N_2O_5]_0/3 = [N_2O_5]_0 \exp(-k_1 t)$ d'ou $k_1 = \ln(3)/t_1$ =0.370 s^{-1}.
3. $t_{1/2} = ln(2)/k_1 = 1.89$ s identique quelquesoit la quantité initiale
4. Pour $T = \theta$;$[N_2O_5]_{t_1} = [N_2O_5]_0 * 0.05$ D'où $k_1' = -ln(0.05)/t_1$. Or k_1 suit la loi d'Arréhnius : $k_1(T) = A\exp(\frac{-E_a}{RT})$ donc $k_1'(\theta) = k_1(T)\exp\left(\frac{-E_a}{RT}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{T}\right)\right)$ D'où $\theta = \left(\frac{1}{T} - \frac{R}{E_a}\ln\frac{k_1'}{k_1}\right)^{-1}$ 449 K=176 °C
   $t_{1/2} = 0.69$s

Exercise 15.2: Dimérisation du butadiène

On étudie à 330 °C la dimérisation supposé totale du butadiène (B) en vinylcyclohexène (V) en milieu gazeux . La réaction à lieu à volume constant, on mesure la pression totale au cours du temps, le butadiène étant le seul présent à l'état initial.

t(min)	0	10	20	30	40	50	60
P(bar)	1	0.887	0.816	0.767	0.731	0.703	0.682

1. Montrer que la réaction est d'ordre 2
2. Calculer la constante de vitesse k à 330 °C

3. En déduire le temps de demi-réaction. Retrouver sa valeur avec le tableau

Solution Ex. 15.2

1. On fait l'hypothèse d'une réaction d'ordre 2 : $v = \frac{-1}{2}\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t} = k.[B]^2$ on intègre entre 0 et t :

$$\frac{1}{B} - \frac{1}{B_0} = 2kt \quad (1)$$

	$2B = V$		n_{gaz}
t=0	$(n_B)_0$	0	$n_T = (n_B)_0$
t	$(n_B)_0 - 2x$	x	$(n_B)_0 - x$

D'après le tableau d'avancement : $n_B = n_{B_0} - 2x$ et $x = \frac{n_{B_0} - n_B}{2}$ d'où $n_T = \frac{n_{B_0} + n_B}{2}$.
Avec la loi des gaz parfaits : $P = n_T\frac{RT}{V} = ([B]_0 + [B])\frac{RT}{2}$
$[B]_0 = \frac{1}{RT}(2P - P_0)$; avec (1) on a $\frac{RT}{2P-P_0} - \frac{RT}{P_0} = 2kt$ soit :

$$\frac{1}{2P - P_0} = \frac{2kt}{RT} + \frac{1}{P_0}$$

si la réaction est d'ordre deux , on doit avoir une fonction affine , ok : a$= 2.92 \times 10^{-7}$ /Pa/ min ; r= 0.99999

2. $k = a\frac{RT}{2} = 7.32 \times 10^{-1}\,\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot min^{-1}}$
3. La réaction est totale à $t_{1/2}$ on a $P = 3P_0/4$

$$2kt_{1/2} = \frac{RT}{2\frac{3P_0}{4} - P_0} - \frac{RT}{P_0} \quad t_{1/2} = \frac{RT}{2kP_0} = 34 \text{ min}$$

On retrouve ces valeurs avec le tableau.

Exercise 15.3: Loi d'Arrhénius

La constante de vitesse k de la réaction $2N_2O_5 \rightarrow 4N0_2 + O_2$ d'ordre 1 a été mesuré pour différente températures :

T(°C)	25	35	55	65
1×10^5 k($\mathrm{s^{-1}}$)	1.72	6.65	75.0	240

1. Calculer l'énergie d'activation et le facteur de fréquence de cette réaction.
2. Calculer la valeur de la constante de vitesse à 30 °C

Solution Ex. 15.3

1. D'après la loi d'Arrhénius, $k = A\mathrm{e}^{\frac{-E_a}{RT}}$; $\ln k = \ln a - \frac{E_a}{RT}$ on effectue une régression inéaire entre ln(k) et $\frac{1}{T}$.On obtient : $|r| = 0.99996$; pente : a$=-1.239 \times 10^4$. ordonnée à l'origine b=30.62. D'où : $E_a = -aR=$ $103\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ et le facteur de fréquence $A = 2 \times 10^{13}\,\mathrm{s^{-1}}$
2. À 30 °C $k= 3.4 \times 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$

Chapitre 16

Classification périodique des éléments et électronégativité

Exercise 16.1: Énergie d'ionisation

Éléments	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn
$(EI)_d$ $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	454	538	610	694	765	837	909	969	1 029	-
$(EI)_s$ $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	550	586	610	534	658	682	706	730	741	906

Le tableau ci-dessus rassemble les énergies d'ionisation des orbitales atomiques 3d et 4s des atomes gazeux de la première série de transition correspondant aux deux processus ci-dessous :

$$3d^x4s^y \rightarrow 3d^(x-1)4s^y + 1e^- \quad (EI)_d$$

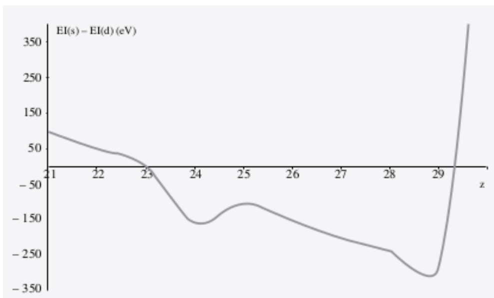
$$3d^x4s^y \rightarrow 3dx4s^(y-1) + 1e^-$$

(EI : Énergie d'ionisation))

1. . Montrer que la variation relative des énergies $(EI)_d$ et $(EI)_s$ dans la séquence cobalt-nickel-cuivre traduit un caractère particulier pour ce dernier.
2. Représenter $\Delta E = [(EI)_s - (EI)_d]$ en fonction de Z. Donner la signification physique de ΔE.
3. Montrer que ces données expliquent le non-respect de la règle de Klechkowsky pour les configurations électro- niques du chrome et du cuivre.

Solution Ex. 16.1

1. On constate, pour la ligne des (EI) d une augmentation continue de l'énergie d'ionisation avec Z : les OA s'abaissent lorsque Z augmente. Pour la ligne des (EI) s , on constate grossièrement le même phénomène sauf pour le chrome et pour le cuivre : l'extraction d'un électron de la couche 4s est donc plus aisée pour ces deux atomes traduisant la configuration électronique $[Ar]4s^13d^5$ et $[Ar]4s^13d^10$ pour le chrome et le cuivre respectivement.
2. ΔE représente l'aptitude à extraire l'électron d'une OA plutôt que d'une autre. En l'occurrence, l'aptitude à extraire un électron s devant un électron d :

   On constate qu'à partir de Z = 23 (vanadium) il est plus facile d'extraire un électron s qu'un électron d. Il y a deux cas remarquables : le chrome et le cuivre pour lesquels il est particulièrement facile d'arracher le seul électron s.

3. En effet, l'exception de remplissage est expérimentalement mise en évidence, les deux valeurs exceptionnellement basses pour Cr et Cu traduit le supplément de stabilité d'une couche d à moitié ou totalement remplie.

Exercise 16.2: Le soufre et le cinabre

Part I — Le soufre

Le soufre est connu depuis l'antiquité, car on peut le trouver à l'état natif au voisinage des zones volcaniques. C'est vers la fin des années 1770 qu'Antoine Lavoisier attribue au soufre le statut d'élément chimique. Le corps simple se présente sous de nombreuses formes selon son mode d'obtention : cristaux ou aiguilles jaune pâle, poudre jaune mat (fleur de soufre)...
Le numéro atomique du soufre est $Z = 16$

1. Déterminer la position du soufre dans le tableau périodique (ligne, colonne).
2. Combien un atome de soufre admet- il d'électrons célibataires ? d'électrons de valence ?
3. Quel est le numéro atomique de l'élément situé juste au-dessus du soufre dans la classification ? Quel est cet élément ? Comparer son électronégativité à celle du soufre.
4. Parmi les éléments soufre, chlore et argon, l'un d'eux n'a pas de valeur d'électronégativité de Pauling connue, lequel ?Pour les autres on relève les valeurs 2,58 et 3,16. Attribuer à chaque élément son électronégativité.

Part II — le cinabre

Le cinabre est un minéral d'origine volcanique de formule HgS, se présentant sous la forme de cristaux rouge vif. Il s'agit du minerai de mercure le plus important. On rappelle que le mercure (Hg) fait partie du bloc d de la classification périodique des éléments.

1. Si on admet la liaison chimique comme ionique, quels sont les ions constituant le cinabre HgS Pour répondre à cette question, on indique que l'ion du soufre possède une configuration électronique identique à celle du gaz noble de plus proche numéro atomique, mais ce n'est pas le cas pour le mercure.
2. Combien le bloc d comporte-t-il de colonne ? Justifier ce nombre de colonnes en introduisant les nombres quantiques appropriés.
3. Sachant que l'ion du mercure identifié à la question précédente ne comporte aucun électron célibataire dans sa configuration électronique, en déduire dans quelle colonne du tableau périodique se situe le mercure.
4. Sachant que le mercure est situé dans la 6[e] période de la classification, déterminer le numéro atomique du mercure.

Solution Ex. 16.2

Part I — Le soufre

1. $S(Z = 16)$: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$,n_{max} = 3donc S est dans la 3ème période de la classification. période 3, colonne 16 (2+10+4)
2. Les orbitales pleines ne contiennent que des électrons appariés. Les électrons célibataires se trouvent donc dans les orbitales incomplètes, à savoir ici 3p. On applique la règle de Hund qui stipule que les électrons tendent à se placer à spins parallèles dans des OA dégénérées, ce qui donne la répartition suivante : ↑↓ ↑ ↑ donc on a 2 électrons célibataire. Le soufre possède six électrons de valence. et dix électrons de cœur.
3. c'est l'Oxygène (Z=8) plus électronégatif (augmente de bas en haut et de gauche à droite)
4. , Ar est un gaz noble , pas d'électronégativé définie. $\chi(S) = 2.58$ et $\chi(Cl) = 3.16$.

Part II — le cinabre

1. Le soufre a des propriétés similaires à l'oxygène. Il a une électronégativité assez élevée et tend à adopter la configuration électronique du gaz noble qui le suit (l'argon), en capturant deux électrons, soit l'ion S^{2-} et donc on a pour le mercure Hg^{2+}
2. 10 colonnes dans le bloc d (pour $l = 2$ $-l \leq m_l \leq l$)
3. colonne 12 (10[e] colonne du bloc d)
4. Hg : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^{10}$ donc Z=80

Exercise 16.3: Or et Mercure

Le numéro atomique de l'or (Au) est 79, celui du mercure (Hg) est 80.

1. Donner l'état physique de ces éléments à température ambiante et sous une pression de 1 bar.
2. Quel élément de l'or ou du mercure possède la plus forte énergie de première ionisation ?
3. Même question concernant la deuxième énergie d'ionisation.
4. La molécule de chlorure mercurique a pour formule $HgCl_2$. Justifier cette association. Quelle est la structure électronique de l'ion Hg 2+ ?
5. . Quelle est la structure électronique de l'ion Hg + ? Quel atome simple possède la même structure électronique ? Déduire de cette analogie une justification de la dimérisation de l'ion mercureux en Hg_2^{2+}

Solution Ex. 16.3

1. L'or est solide bien entendu et le mercure est un liquide dans les conditions imposées par l'énoncé.
2. Établissons les structures électroniques :$Au(Z = 79)$: $[Xe]6s^14f^145d^10$ $Hg(Z = 80)$: $[Xe]6s^24f^145d^10$ La structure en 6s 1 est plus facile à ioniser que celle en 6s 2 (sous couche saturée) donc, nous aurons : $EI(Au) < EI(Hg)$
3. Pour la deuxième ionisation, le problème est inversé : on compare $6s^1$ du mercure au $5d^10$ (sous couche pleine) de l'or, donc $EI(Au^+) > EI(Hg^+)$
4. $Hg^{2+}(Z = 80)$: $[Xe]4f^145d^10$. Le mercure est réducteur et le chlore oxydant, la neutralité électrique impose la formule $HgCl_2$.
5. $Hg + (Z = 80)$: $[Xe]6s14f145d10$. Structure de valence identique à l'hydrogène. La forme stable de l'hydrogène est le di hydrogène H_2 , $Hg+$ conduit donc à l'espèce Hg_2^{2+} stable.

Exercise 16.4: Quelques questions autour du tableau périodique

1. Sachant que le polonium (Po) appartient à la colonne 16 et à la sixième période, quel est son numéro atomique ?
2. Le palladium (Pd) est situé sous le nickel (Ni, Z=28) dans le tableau périodique. En déduire son numéro atomique.
3. Quel est l'ion le plus courant issu du rubidium (Rb,Z=37) ?
4. Quel est le numéro atomique de l'élément alcalino-terreux succédant au baryum (Ba, Z=56) ?
5. Quel serait le numéro atomique du premier élément d'un éventuel bloc g ? Combien de colonnes comporterait ce bloc ? Où faudrait-il le situer dans le tableau périodique ? Pourquoi ne figure-t-il sur aucune classification périodique ?

Solution Ex. 16.4

1. Les renseignements fournis conduisent à trouver que la configuration électronique se termine par p^4(la colonne 16 est la 4ème du bloc p) et que le nombre quantique principal le plus élevé que la configuration possède est $n_{max} = 6$(période 6) : la configuration contient donc $6s^2$ et ne contient pas $7s^2$ En utilisant la règle de Klechkowski, on rempli les OA jusqu'au premier p^4 qui suit $6s^2$ ce qui donne :
$$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^24f^{14}5d^{10}6p^4$$
soit $Z = 84$
2. $Ni(Z = 28)$: $1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^8$. le palladium est situé sous le nickel, donc sa configuration finit par $4d^8$ ie :
$$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^8$$
Z=46 (en réalité, c'est une exception : fini en $4p^64d^{10}$)
3. $Rb(Z = 37)$: $1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^1$ il y a un unique électron de valence (alcalin) on a donc souvent l'ion Rb^+
4. $Ba(Z = 56)$:$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^2$ Alors l'atome suivant dans la colonne à la configuration : $1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^24f^{14}5d^{10}6p^67s^2$ soit z$Z = 88$ (radium)
5. On applique la règle de Klechkowski jusqu'a rencontrer la première orbitale g (à savoir $5g$ car g correspond à $l = 4et0 \leq l \leq n - 1$) on obtient la configuration :
$$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^24f^{14}5d^{10}6p^67s^25f^{14}6d^{10}7p^68s^25g^1$$
soit $Z = 121$. On aurait $-4 \leq m_l \leq +4$ soit 9 OA de type g possible , qui accueille donc 18 électrons (18 colonne) il serait entre les bloc s et f.Les noyaux atomique de ce tableau serait très instable (max en labo Z=118)

Chapitre 17

Réaction Acide-Base

Exercise 17.1:

On considère les couples acido-basique suivants dont on donne les pKa

	$HCOOH/HCCOO^-$	$HClO/ClO^-$	HSO_4^-/SO_4^{2-}	HBO_2/BO_2^-
pKa	3,7	7,5	1,9	9,2

1. Tracer un diagramme de prédominance de ces différentes espèces.
2. Déterminer la réaction ayant la constante thermodynamique la plus grande dans le cas des mélanges suivants obtenus dans 1 Litre de solution aqueuse et déterminer sa constante :
   a) 1 mole de méthanoate de sodium, 2 moles d'acide hypochloreux ($HClO$), 1mole de sulfate de sodium.
   b) 1 mole de borate de sodium, 2 moles d'hypochlorite de sodium ($NaClO$), 1mole de méthanoate de sodium.
   c) 1 mole d'hydrogénosulfate de sodium, 2 moles de borate de sodium, 1mole de soude.

Solution Ex. 17.1

1.

H_3O^+	H_2O				
	HSO_4^-	SO_4^{2-}			
		HCO_2H	HCO_2^-		
			$HClO$	ClO^-	
				HBO_2	BO_2^-
	0	1,9	3,7	7,5	9,2

2. Les trois espèces appartienne à des domaines communs, àl'équilibre elles constituent les espèces majoritaires. Pour le premier mélange la RP est : $HClO + HCOO^- = ClO^- + HCOOH$ de constante $K^o = 10^{-3.8}$.
3. Les trois espèces appartienne à des domaines communs, àl'équilibre elles constituent les espèces majoritaires. Pour le second mélange la RP est : $BO_2^- + H_2O = HBO_2 + HO^-$ de constante $K^o = 10^{-4.8}$.
4. pour le dernier mélange l'acide le plus fort est HSO_4^- et la base la plus forte HO^- d'où la RQ : $HSO_4^- + HO^- = SO_4^{2-} + H_2O$ de constante $K^o = 10^{12.1}$.

Exercise 17.2:

Déterminer les concentrations à l'équilibre pour une solution d'hydrogénocarbonate de sodium $NaHCO_3$ (couples AH_2/AH^- , $pKa_1 = 6,4$ et AH^-/A^{2-}, $pKa_2 = 10,4$) de concentration $C = 0.1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. En déduire le pH.

Solution Ex. 17.2

La RP est la réaction d'amphotérisation de constante $K^o = K_{A2}/K_{A1} = 10^{-4} < 1$

	$2HA^-$	$\rightleftharpoons$	A^{2-}	$+$	H_2A
EI	C		0		0
EF	$C - 2x$		x		x

Il vient pour une RP peu avancée : $x \simeq C\sqrt{K} = 10^{-3} \ll C$. le pH peux se calculer à partir des deux couples acido-basique :

$$pH = pK_{A1} + \log \frac{[HA^-]}{[H_2A]} \simeq 8,4$$

Valide car $h, \omega \ll x$ (AN!) .

Exercise 17.3: Eau de Javel

Louis Berthollet (1748-1822),chimiste français, médecin de formation mis au point l'eau de Javel pour les lavandières des bords de Seine à Javel, petit village aux portes de Paris à l'époque.

1. L'eau de Javel est obtenue par dissolution du dichlore gazeux dans une solution de soude. Écrire le bilan de cette réaction, et calculer sa constante
2. Pourquoi ne faut-il jamais mélanger de l'eau de Javel avec un détartrant lorsqu'on fait le ménage ? Indiquer la réaction ayant lieu ainsi que sa constante.
   Lors de la première guerre mondiale, le chimiste Henry Dakin mit au point un antiseptique (dont la substance active est l'eau de Javel) pour les plaies ouvertes ou infectée, dans le cadre des travaux de ce dernier sur le traitement des plaies de guerre. La solution est à base d'eau de Javel additionnée de permanganate de potassium pour la stabiliser.
3. Une mesure de l'absorbance de la solution de Dakin (attribuée uniquement à $KMnO_4$)indique à 525 nm : $A = 0,15$ (pour une cuve de largeur $1cm$). En déduire le pourcentage massique de $KMnO_4$ dans la solution.

4. Le degré chlorométrique D d'une eau de Javel est le volume de dichlore maximal libéré lors de la réaction d'acidification d'un litre de la solution (à 0 °C) sous 1 atm) Sachant que l'eau de Dakin indique $0,500g$ d'hypochlorite de sodium pour 100 mL, déterminer son degré chlorométrique.
   Données :
   - $M(K) = 39.1\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ $M(Mn) = 54.9\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, $M(Cl) = 35.5\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ $M(Na) = 23.0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
   - $E^o(Cl_{2(g)}/Cl^-) = 1,36\mathrm{V}$; $E^o(HCl0_{aq}/Cl_{2(g)}) = 1,63\mathrm{V}$; $pKa(HClO/ClO^-) = 7,2$ Coefficient d'absorption molaire de $KMnO4$ à 525 nm $\varepsilon_{525nm} = 2300\,\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot cm}$

Solution Ex. 17.3

1. dismutation du dichlore en milieu basique : $Cl_{2(g)} + 2HO^- \rightleftharpoons Cl^- + ClO^- + H_2O$ $K = 10^{16,3}$
2. les détartrant sont acides , on favorise la médiamutation et on a un dégagement de Cl_2 , très toxique. $Cl^- + HClO + H^+ \rightarrow Cl_{2(g)} + H_2O$ $K = 10^{+4,5}$.
3. $[MnO_4^-] = A/\varepsilon l = = 65.2\,\mathrm{\mu mol \cdot L^{-1}}$ donc pour 1L on a $m_{KMnO_4} = 10.3\,\mathrm{mg}$
4. $n_{Cl_2} = n_{ClONa}$ donc on a un degrée chlorométrique de $= 1.5°$

Exercise 17.4: Étude du couple méthanoique

Données :

- Densité de l'acide acétique $d = 1,05$
- Masse molaire de l'acide acétique c_m =$60\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
- $pKaCH_3COOH/CH_3COO^-$ = 4,8

1. Tracer le diagramme de prédominance de l'acide acétique et de l'ion acétate en solution aqueuse.
2. Tracer également l'allure du diagramme de répartition en solution aqueuse.
3. On constitue une solution aquese de la manière suivante : dans une fiole jaugée de $V_0 = 500mL$ est introduit un volume $V_1 = 10mL$ d'acide acétique pur. On complète au trait de jauge avec de l'eau distillée. Une analyse rapid0 du pH le situe entre 2 et 3.
   a) Déterminer la concentration apportée en acide acétique dans la solution.
   b) Écrire l'équation chimique de mise en solution aqueuse de l'acide acétique.
   c) En observant le diagramme de répartition que peut on déduire du résultat fourni par le papier pH ?
   d) En déduire par le calcul le plus simple possible, la concentration de toutes les espèces en solutions et donner la valeur du pH avec assez de chiffre significatif.
4. À la solution précédente est ajouté un volume V_b = 100mL d'une solution de soude de concentration $C_b = 1,00$ mol $\cdot$ L^{-1}.

a) Quelle est la nouvelle concentration apportée d'acide acétique dans la solution ?
b) Quelle est la nouvelle concentration apportée d'hydroxyde de sodium ?
c) Écrire l'équation chimique de la réaction acido-basique entre la soude et l'acide acétique. Calculer sa constante d'équilibre ; conclure. Faire un bilan de concentration en ne considérant que cette réaction.
d) Quelles sont les espèces majoritaires et minoritaires dans cette solution ? Justifier la réponse qualitativement, puis numériquement.
e) Quelles sont les propriétés de la solution obtenue à l'équilibre ?

Solution Ex. 17.4

1. $CH_3COOH \ |_{4,8} \ CH_3COO^-$
2. Courbe qui monte et descende, intersection au pKa.
3. a) $[CH_3COOH] = \frac{n}{V} = \frac{\rho V_1}{M} = 0.35\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$
   b) $CH_3COOH + H_2O = CH_3COO^- + H_3O^+$ faire le tableau d'avancement
   c) On en déduit $h << C_0$
   d) $K_a = \frac{h^2}{C_0 - h} \simeq \frac{h^2}{C_0}$ Alors $pH = 2,6$
4. a)
   b) $C'_{AH} = 0.29\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. et C_{OH} =$0.17\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$
   c) $CH_3COOH + H_O^- = CH_3COO^- + H_2O$ faire le tableau d'avancement.
   d) $pH = pKA + \log(\frac{A^-}{AH}) \simeq 4,9$.
   e) les ions hydrique sont minoritaires.
   f) Solution tampons.

Chapitre 18

Description macroscopique d'un système à l'équilibre

Exercise 18.1: Cartouche pour vélo

On considère une cartouche contenant $16g$ de CO_2.
Dimension :
Diamètre : 2,2 cm
Diamètre au goulot : 92 mm en haut du filetage
Longueur de la cartouche : 8,84 cm

Lorsque qu'on décharge la capsule , sa surface gèle.

1. Quel est la composition de la cartouche de gaz
2. Peut on gonfler une roue de vélo avec une telle cartouche, proposez des valeurs numérique ?

Solution Ex. 18.1

On a Le volume de la cartouche $V_c = 33,6.10^{-6}$ et $rho_l \ = 1032\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.Sur le diagramme d'état on relève $P_{sat} = 5$MPa à 298K. Si le CO_2 est seulement gazeux, on a :

$$P_{CO_2} = \frac{mRT}{\mathcal{M}_{CO_2}V_c} \geq P_{sat}$$

Une partie du gaz est sous forme liquide (comme dans les bombone de gaz classique). *vous pouvez donner la composition du mélange ?*

$$\begin{cases} P_{sat}V_g & = n_gRT \\ V_l & = \frac{n_l\mathcal{M}}{\rho_l} \\ (3) \quad V_l + V_g & = V_c \\ n_l + n_g & = n \end{cases}$$

On prend une chambre à air avec un rayon de 60cm et une section de rayon 2cm, on la veux gonfler entre 2 et 4 bars. Avec la loi des gaz parfait on a

$$P_{roue} = \frac{mRT}{\mathcal{M}_{CO_2}V_roue} \sim 3bar$$

Normal on les vends à Décathlon .

Exercise 18.2: Densité particulaire et volume molaire

1. calculer le nombre de molécule par cm^3 dans un gaz parfait à 27 °C sous une pression de 10^{-6} atmosphère.
2. Calculer le volume occupé par une mole d'un gaz parfait à la température de 0 °C sous la pression atmosphérique normale. En déduire l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre molécule.

Solution Ex. 18.2

1. D'après l'équation d'état du gaz parfait le nombre de molécules par unité de volume est $n^* = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} \simeq 2.5 \times 10^{19}\,/\mathrm{m}^3$
2. le volume molaire cherché est $V_m = \frac{RT}{V} = 22.4\,\mathrm{L}$

Exercise 18.3: Deux récipients

Un récipient (A) de volume $V_A = 1L$ contient de l'air à $t_A = 15\,°\mathrm{C}$ sous une pression $P_A = 72cmHg$.
Un autre récipient (B) de volume $V_B = 1L$ contient également de l'air à $t_B = 20\,°\mathrm{C}$ sous une pression $P_B = 45atm$
On réunit (A) et (B) par un tuyau de volume négligeable et on laisse l'équilibre se réaliser à $t = 15\,°\mathrm{C}$
On modélise l'air par un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$. *Donnée : le centimètre de mercure est défini par ma relation* $1atm = 76cmHg$

1. Quelle est la pression finale de l'air dans les récipients ?
2. Quelle est la masse d'air qui a été transféré d'un récipient à un autre ?

Solution Ex. 18.3

Indication : Exprimer initialement les quantités de matières totale. L'état final étant un état d'équilibre thermodynamique, les variables intensives sont uniformes, dont la densité moléculaire et la pression . En déduire les quantités de matières finales.

1. $m_{B \to A} = 26.1g$
2. $P = 22.5bar$

Exercise 18.4: Grandeur intensive et extensive

Soit une mole d'un gaz occupant une volume V_m sous la pression P et à la température T.

1. On suppose que ces grandeurs sont liées par l'équation $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V_m - b) = RT$ où a, b, R sont des constantes. utiliser les propriétés d'intensivité ou d'extensitivé des grandeurs pour établir l'équation correspondante relative à n moles.
2. Même question pour l'équation : $P(V_m - b)\exp\left(\frac{a}{RTV_m}\right)$

Solution Ex. 18.4

1. Comme $V_m = \frac{V}{n}$ on a,

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \equiv \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \equiv \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{-}bn\right) = nRT$$

   $B = nb$ est extensive car additive et $A = n^2 a$ aussi (dépend de la quantité)
2. $P(V - nb)\exp\left(\frac{na}{RTV}\right) = nRT$

Exercise 18.5: Pompe

On considère deux réservoirs R et R' de même volume V tout deux initialement à la pression P_0. Ils sont relié par un sas de volume v, et deux valves permettent d'ouvrir le sas sur chacun des deux réservoirs. Périodiquement on rempli le sas en aspirant de l'air depuis R' , on attend l'équilibre et on vide alors le sas dans R.

1. Décrire l'évolution de chacun des réservoirs qualitativement puis faire les calculs.
2. Combien a raison d'un cycle par seconde, combien de temps faut il pour gonfler une roue de vélo ? Quelles hypothèses remettent en cause votre calcul ?

Solution Ex. 18.5

1. On assimile l'air à un Gaz Parfait. Dans R' on a $P_1' = \frac{n_0 T_0 R}{V} = \frac{P_0 V}{V+v}$
   Puis par récurrence $P_n' = P_0\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$ De plus par conservation de la matière : $2n_0 = n_k' + n_k \implies 2P_0 = P_k' + P_k$ Donc $P_n = 2P_0 - P_0\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$

Exercise 18.6: Baril écrasé

Pour effectuer une démonstration de physique, un groupe d'étudiants porte de l'eau à ébullition, à pression ambiante, dans un ancien baril de pétrole (contenance 208 L, hauteur 88 cm).

Le baril est retiré de la source de chaleur et fermé de façon hermétique. Le but de l'opération est de pouvoir observer le baril se faire écraser par l'atmosphère suite au changement d'état de l'eau qu'il

1. Quelle dépression peut-on générer à l'intérieur du baril en le laissant se refroidir ?
2. Quelle serait alors la force verticale s'appliquant sur la paroi supérieure du baril ?
3. Il reste 5 L de liquide au fond du baril à la fermeture du bouchon. Quel est le titre de la vapeur ?
4. Quelle masse de vapeur s'est condensée pendant le refroidissement ?
5. Combien a-t-il fallu retirer de chaleur pour atteindre la dépression finale ?

Solution Ex. 18.6

1. Si on atteint $T_B = 30\,°C$ à volume constant, alors $p_{\text{intérieur min.}} = p_{\text{sat.30 °C}} = 0.004\,247\,\text{MPa}$. Alors $\Delta p_{\max} = -9.575 \times 10^4\,\text{Pa}$;
2. $F_{\max} = \Delta p_{\max} S_{\text{couvercle}} = 22.6\,\text{kN}$ (le baril sera bien sûr écrasé avant)
3. $x_A = 0.024\,08$, $x_B = 7.328 \times 10^{-4}$;
4. $m_{\text{condensée}} = 4.9138\,\text{kg}$;
5. $Q_A \to B = -1.878\,\text{MJ}$.

Chapitre 19

Premier principe de la thermodynamique

Exercise 19.1: Apéro

Un glaçon flotte à la surface de l'eau dans un verre. Que peut-on en conclure quant à la masse volumique de l'eau solide et celle de l'eau liquide ? Lorsque le glaçon a fondu, le niveau de l'eau dans le verre est-il monté ? descendu ? resté inchangé ?

Solution Ex. 19.1

Le glaçon flotte, $\rho_{glace} < \rho_{eau}$. Quand le glaçon à fondu. Le niveau reste identique (90% du volume du glacon est immergé, mais quand le glaçon fond il est remplacé par un volume d'eau liquide faisant 90% de son volume initial)

Exercise 19.2: Catapulte de porte-avions

Une catapulte à avions est montée sur un navire militaire (figures ?? et ??). Elle est constituée d'un réservoir de vapeur connecté à un long cylindre, dans lequel glisse un piston entraînant l'avion au décollage.

Au début du catapultage, la vapeur est à 140 bar et 700 °C. Après une brève course de 50 m, l'avion a quitté le pont et la vapeur est à 4 bar et 410 °C.

1. Quelle énergie la catapulte a-t-elle fourni à l'avion par kilo de vapeur ?
2. Quelles doivent être le diamètre du piston et la masse totale de vapeur, pour que la poussée fournie à l'avion soit toujours supérieure à 2.5 t ?

Solution Ex. 19.2

1. $\Delta u = -433.1\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ $(= w_\text{A} \to \text{B}$ si l'on suppose l'évolution adiabatique) ;
2. $D_{\text{min.}} = 32.26\,\text{cm}$ (attention à tenir compte de la pression atmosphérique) ; $m = \frac{V_{\text{max}} - V_{\text{min}}}{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}} = 5.243\,\text{kg}$. NB : faute de sources fiables, les données de cet exercice sont purement imaginaires.

Exercise 19.3: Chauffage d'un gaz à l'aide une résistance

Soit un système piston-cylindre contenant V 1 = 0, 5 m 3 d'azote à $P_1 = 400\,\text{kPa}$ et à $theta = 27\,°\text{C}$. l'élément chauffant électrique est allumé, et un courant $I = 2A$ y circule pendant $\tau = 5min$ sous la tension $E = 120V$. L'azote se détend de manière isobare. Au cours de cette transformation l'ensemble {gaz, cylindre, élément chauffant } cède à l'extérieur un transfert thermique Q ext = 2 800 J. Déterminer la température finale T_2 de l'azote. *Donnée :* $c_p = 1.039\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}$.

Solution Ex. 19.3

$T_2 = 329.7\,\text{K}$.

Exercise 19.4: Congélateur

Une machine frigorifique fonctionne réversiblement entre deux sources à 0 °C et 20 °C. La source chaude représente l'atmosphère et la source froide une salle parfaitement calorifugée dans laquelle est stockée de la glace qui est maintenue à 0 °C grâce à la machine frigorifique. Calculer le prix de revient de 1 tonne de glace sachant que l'eau est introduite dans la salle frigorifique à la température de 20 °C. *Données :* $c_p = 4.18\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}$, $L_{fus} = 330\,\text{J/kg}$ *1kWh = 0.15€ et* $1m^3$ *= 3€*

Solution Ex. 19.4

On refroidit l'eau à $T = 0°$ et on effectue le changement d'état (grandeurs massique) : $\Delta u = c_p \Delta T + L_{fus}$ On a donc pour 1 tonne une énergie totale $E = 8.23 \times 10^7$ J. Donc on a un prix de ($kWh = 3.6 \times 10^6$ J) : $p = 25.86$€

Exercise 19.5: Cycle de Stirling moteur

Dans un moteur de stirling, une masse d'air ($m = 2,9g$ suit une évolution cyclique réversible $ABCD$) constituée de deux isothermes AB et CD séparée par deux isochores BC et DA. les températures et les pressions aux points A et$C$ sont $T_A = 290\,\mathrm{K}$; $p_a = 1.00\,\mathrm{bar}$; $T_C = 1450\,\mathrm{K}$; $p_c = 40\,\mathrm{bar}$.Et on a le rapport volumétrique $\alpha_V = V_a/V_c = 8$. On assimile le gaz à un parfait diatomique de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ de coefficient calorimétrique $\gamma = 1,4$ qui suit une évolution cyclique réversible.

1. Quelle équation relie Pet V le long des courbes AB et CD. En déduire les états B et D (p, V, T).
2. Représenter le cycle $ABCD$ sur le diagramme de clapeyron.
3. Sachant que le cycle est utilisé en cycle moteur, dans quel sens est il parcouru ?.
4. Calculer le travail et le transfert thermique reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion de cycle.
5. Vérifier que les variation de l'énergie interne sont nulles.
   Les échanges thermique au cours des isochores se font à l'aide d'un régénérateur interne. Les seuls échanges thermiques avec l'extérieur ont lieu pendant les isothermes. On défini le rendement du moteur comme le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part de la source chaude (portion CD du diagramme)
6. Calculer le rendement η du moteur Stirling. *le rendement maximal pour un moteur ditherme est* $\eta_{max} = 1 - \frac{T_A}{T_C}$ $(T_A < T_C)$
7. Que pensez vous du rendement du moteur Stirling ?

Solution Ex. 19.5

1. $\begin{cases} P(V) = \frac{nRT_A}{V} \text{Sur AB} \\ P(V) = \frac{nRT_C}{V} \text{Sur CD} \end{cases}$ On a donc

	p	T	V
A	1 bar	290 K	2,4L
B	8 bar	290 K	0,30L
C	40 bar	1450 K	0,30L
D	5 bar	1450 K	2,4L

   Sur le diagramme $P - V$ on a donc :
2. Le cycle est moteur, donc parcouru dans le sens horaire.
3. On rappelle $\Delta U_{1\to 2} = C_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1}\Delta T$ on a donc $C_v = 2.08\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ on a donc :

$$\begin{cases} \Delta U_{BC} = 2,4kJ = Q_{BC} \\ \Delta U_{DA} = -2,4kJ = Q_{DA} \\ \Delta U_{AB} = \Delta U_{CD} = 0 \end{cases}$$

   Les transformation isochore sont caractérisée par un travail nul d'où $W_{BC} = W_{DA} = 0$. les transformations isothermes sont caractérisée par une variation d'énergie interne nulle. elles sont mécaniquement réversible, on peux donc calculer les travaux :

$$\begin{cases} W_{AB} = -Q_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} -P(V)dV = -nRT_A \ln(V_B/V_A) = 0,5kJ \\ W_{CD} = -Q_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} -P(V)dV = -nRT_C \ln(V_D/V_C) = -2,50kJ \end{cases}$$

4. immédiat.
5. $\eta = \eta_{max} = 0.8$. (réversibilité !)

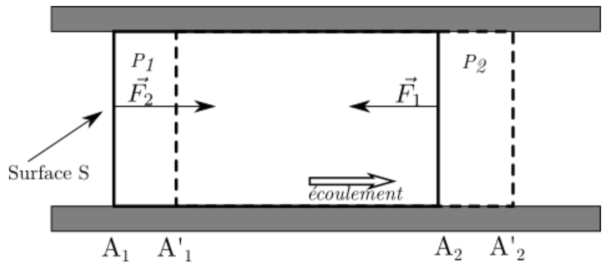
Exercise 19.6: Détente de Joule-Thomson

Un gaz à pour équation d'état $P(V - nb) = nRT$ et son énergie interne obéit à la première loi de joule $C_{vm} = 2,5R$ et $C_{p_m} = 3,5R$.

1. a) Préciser les unités de R et b.
   b) Déterminer l'expression de l'enthalpie molaire de ce gaz en fonction de R, b et T. *une mole de ce gaz subit une détente de Joule-Thomson : Cette détente consiste en la lente détente d'un gaz à travers un tube très fin et isolé thermiquement qui fait passer sa pression de P_1 à P_2 en régime permanent.*
2. a) Faire un schéma.
   b) Calculer le travail des forces de pression lors de cette transformation.
   c) Montrer que l'enthalpie du gaz est conservée.
   d) On mesure les températures correspondantes T_1 et T_2 montrer que ce dispositif permet de mesurer b.

Solution Ex. 19.6

1. a) R est en $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ et b $\mathrm{m^3/mol}$.
   b) $H_m = U_m + pV_m = C_{V_m}T + RT + pb$. le gaz ne suit pas la deuxième loi de joule.
2. a) Avec S une surface de petite taille.



   b) Avec le premier principe : $\Delta U = W = p_1V_1 - p_2V_2$. on note U_1 (respectivement U_2) l'énergie interne du fluide compris entre A_1 et A'_1 (respectivement A_2 et A'_2) et U_c l'énergie interne de la partie commune on a :

$$U_2 + U_c - (U_1 + U_c) = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 \implies H_2 = H_1$$

   .L'enthalpie du gaz est conservée.
   c) $b = \frac{(C_{v_m}+R)(T_2-T_1)}{p_1-p_2}$

Exercise 19.7: Formation de la neige artificielle

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines goutte d'eau liquide à $T_1 = 10\,°\mathrm{C}$. dans l'ai ambiant à $T_a = -15\,°\mathrm{C}$.

1. Dans un premier temps la goutte d'eau supposée sphérique (rayon $R = 0,2mm$) se refroidti en restant liquide.Elle recoit de l'air extérieur un transfert thermique $h(T_a - T(t))$ par unité de temps et de surface, où $T(t)$ est la température de la goutte.
   a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.
   b) En déduire le temps nécessaire pour que $T(t) = -5\,°\mathrm{C}$. Application numérique pour $h = 65\,\mathrm{W/m^2/K}$.

2. a) Lorsque la goutte atteint la température de $-5\,°\mathrm{C}$. la surfusion cesse. la goutte est partiellement solidifiée et la température devient égale à $0\,°\mathrm{C}$. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifiée en supposant la transformation trés rapide et adiabatique. On négligera aussi la variation de volume. l'enthalpie de fusion de la glace est $L_f = 335 \times 10^3\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.
   b) Au bout de combien de temps la goutte est-elle complètement solidifiée ?

Solution Ex. 19.7

1. a) $\mathrm{d}U \simeq \mathrm{d}H = \delta Q \implies \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{3h}{\rho Rc}T = \frac{3h}{\rho Rc}T_a$
   b) la solution de l'EDL est : $T(t) = T_a + (T_1 - T_a)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ et on a donc $t = 3.9\,\mathrm{s}$.
2. m liquide à $T_i \to m$ liquide à $T_f = 0$
   puis :
   m liquide à $T_f \to mx$ liquide + $m(1-x)$ glace à $T_f = 0\,°\mathrm{C}$. On rappelle que la variation d'une fonction d'état est indépendante du chemin suivi . On applique le premier principe sur les deux transformations :

$$\Delta H = Q = 0 \implies m_c(T_f - T_i) - m(1-x)L_f = 0 \implies x = 0,94$$

On applique le premier principe à la goutte, sachant qu'elle reste à $T = 0\,°C$ pendant la solidification. On appelle dm la masse d'eau solidifiée pendant dt et dH la variation d'enthalpie du système :

$$dH = 4\pi R^2 h(T_a - T)dt \text{ et } dH = -dmL_f \implies dm = \frac{4\pi R^2 h(T - Ta)}{L_f}dt$$

Soit en intégrant : $m(t) = \frac{4\pi R^2 h(T-Ta)}{L_f}t + m_0$ La masse de liquide qui reste à solidifier est : $m(t) - m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho x$ soit $t = \frac{xRL_f\rho}{3h(T-T_a)} = 21,5s$.

Exercise 19.8: Valeur en eau

On mélange 95g d'eau à $T_1 = 20\,°C$ et 71 g d'eau à $T_2 = 50\,°C$.

1. Quelle est la température finale à l'équilibre ?
2. Expérimentalement on obtient 31.3 °C. Expliquer.
3. en déduire la valeur en eau du calorimètre.

Solution Ex. 19.8

Le système considéré est constitué du calorimètre et des deux masses d'eau qu'on y met.

1. En négligeant la capacité thermique du calorimètre on a $\Delta H_1 + \Delta H_1 = 0$ (pas de travail ni d'échange avec l'extérieur). $t_f = \frac{m_2\theta_2 + m_1\theta_1}{m_1+m_2} = 32.8\,°C$.
2. on ne peux pas négliger la capacité du calorimètre. de plus la température mesurée est inférieur à la température théorique , on en déduit que l'on a commencé avec l'eau la plus froide dans le calorimètre.
3. en notant m_0 la valeur en eau du calorimètre :

$$(m_0 + m_1)c_0(\theta'_f - \theta_0) + m_2 c_0(\theta'_f - \theta_2) = 0 \implies m_0 = m_2\frac{\theta_2 - \theta'_f}{\theta'_f - \theta_1} = 22,5g$$

Exercise 19.9: Vitesse des « baffes » d'Obélix

Imaginez qu'Obélix vous gifle ! Vous ressentez une rougeur à la joue. La température de la région touchée a varié de 1.8 °C.En supposant que la masse de la main qui vous atteint est de 1, 2 kg et que la masse de la peau rougie est de 150 g, estimez la vitesse de la main juste avant l'impact, en prenant comme valeur de la capacité thermique massique de la peau de la joue : $c_joue = 3.8\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

Solution Ex. 19.9

$v = \sqrt{\frac{2m_j c\Delta T}{m_m}} = 4.4\,\text{m}\cdot\text{s} = 149\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

Exercise 19.10: Condensateur de centrale à vapeur

Dans une centrale électrique de grande puissance, le condenseur est en charge de récupérer l'eau à la sortie des turbines et de lui retirer de l'énergie pour qu'elle puisse retourner à l'état liquide et ainsi ré-intégrer le circuit pompes → chaudières → turbines. L'eau du circuit ($180\,\text{t}\cdot\text{h}^{-1}$) arrive à 0.5 bar avec un volume spécifique de $3.1247\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$; elle doit repartir à la même pression, à l'état de liquide saturé.

Pour extraire de la chaleur à l'eau de la centrale, les condenseurs utilisent un circuit d'eau secondaire provenant directement d'une rivière. On y prélève de l'eau à 10 °C.

Pour réduire l'impact écologique de la centrale, on souhaite rejeter l'eau secondaire dans la rivière à une température égale ou inférieure à 35 °C.

1. Quel débit d'eau secondaire doit-on prélever en rivière ?
2. Pour limiter les rejets de chaleur en rivière, où (et comment) rejette-t-on aussi, en pratique, la chaleur du condenseur ?

Solution Ex. 19.10

1. $x_A = 96.44\,\%$ & $x_B = 0$; ainsi $\dot{Q}_A \to B = -111.13\,\text{MW}$, ce pourquoi il nous faut $\dot{m}_{\text{secondaire}} \geq 1062.4\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.
2. Dans l'atmosphère, au moyen de l'eau secondaire rejetée par les larges

Chapitre 20

Second principe de la thermodynamique

Exercise 20.1:

On considère un récipient contenant un fluide fermé par un piston mobile. À l'instant initial tout le fluide est liquide et le piston est en contact avec le fluide. On soulève alors le piston d'une hauteur x. et la hauteur de liquide diminue d'une hauteur d par rapport à la position initiale du piston.

1. Sur un diagramme P-V tracer l'évolution du système.
2. On connais la masse volumique du liquide. déterminer la masse volumique du gaz présent. puis la pression de vapeur saturante du fluide à la température finale.
3. On mesure la température à l'état initial et à l'état final. Exprimer x en fonction de grandeurs caractéristique du fluide. (*Indication : On pourra effectuer un bilan entropique*).

Solution Ex. 20.1

1. /! Changement d'état, Deux isothermes , la limite L/G en cloche.
2. CdM :$\rho_l dS = \rho_g(x+d)S$ donc $\rho_g = \frac{P_{sat}(T_2)M}{RT_2} = \rho_l \frac{d}{d+x}$ donc $P_{sat}(T_2) = \rho_l \frac{RT_2}{M}\frac{d}{d+x}$.
3. $dS = \cancel{\delta Q} + \cancel{\delta W} = 0$ (adiabatique réversible) On considère $I \underset{iso-V}{\rightarrow} J \underset{iso-P,iso-T}{\rightarrow} F$ alors $dS_{IJ} = \delta Q_{rev} = mc\frac{dT}{T} \implies \Delta S_{IJ} = mc\ln(T_2/T_1)$ de même $\Delta S_{JF} = \frac{mx_g L_{vap}}{T_2}$ on a donc

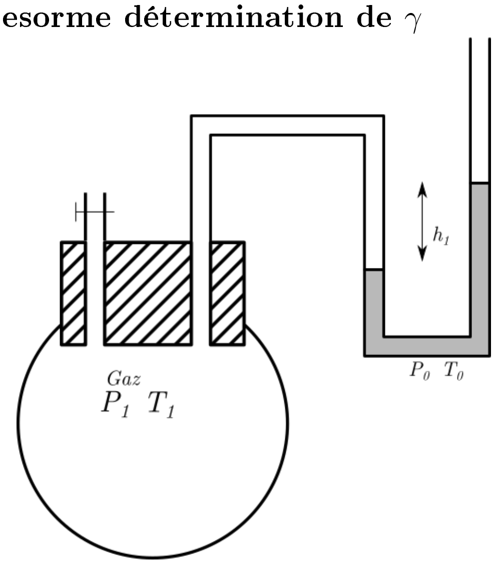
$$mc\ln(T_1/T_2) = \frac{mx_g L_{vap}}{T_2} \implies x_g = \frac{cT_2}{L_{vap}}\ln(T_2/T_1)$$

Avec l'équation des Gaz parfaits :

$$x = \frac{m}{M}\frac{cT_2^2}{L_{vap}}\frac{R}{P_{sat}}\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right)\ln(T_2/T_1)$$

Exercise 20.2: (*) Expérience de Clément-Desorme détermination de γ

On considère un ballon rempli d'un gaz parfait à un pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique P_0 : (R) le liquide manométrique dans le tube en U présente une dénivellation h_1. On ouvre le robinet pendant une durée brève, la dénivellation du liquide devenant nulle.
Le robinet fermé, on attend que s'établisse l'équilibre thermique : celui-ci correspond à une dénivellation h_2 du liquide.
Montrer que $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$



In-

dication : Raisonner sur les n moles restant dans le ballon après la fuite. Lors de la fuite, ces n moles subissent une détente rapide qui pourra être considérée comme adiabatique. De plus comme $P_1 = P_0 + \mathrm{d}P$ on pourra la considérer pratiquement quasi-statique et mécaniquement réversible.

Solution Ex. 20.2

On considère trois état intermédiaires A, B, C avec $0 \rightarrow A \xrightarrow{adiabatique} B \xrightarrow{isochore} C$ Deux méthodes :

1. PV^γ, puis DL .

$$\begin{cases} P_A V_A^\gamma &= P_B V_B^\gamma \\ P_A V_A &= P_C V_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P_0 + h_i)\, V_i^\gamma &= P_0 V_f^\gamma \\ (P_0 + h_i)\, V_i &= (P_0 + h_f)\, V_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)^\gamma &= 1 + \dfrac{h_i}{P_0} \\ \dfrac{V_f}{V_i} &= \dfrac{P_0 + h_i}{P_0 + h_f} \end{cases}$$

Et donc,

$$\Rightarrow 1 + \frac{h_i}{P_0} = \left(\frac{P_0 + h_i}{P_0 + h_f}\right)^\gamma = \left(1 + \frac{h_i}{P_0}\right)^\gamma \left(1 + \frac{h_f}{P_0}\right)^{-\gamma}$$

Comme $\frac{h_i}{P_0}$ et $\frac{h_f}{P_0} \ll 1$:

$$1 + \frac{h_i}{P_0} \approx \left(1 + \gamma \frac{h_i}{P_0}\right)\left(1 - \gamma \frac{h_f}{P_0}\right) \approx 1 + \frac{\gamma}{P_0}\,(h_i - h_f)$$

D'où l'expression de γ :

$$\gamma = \frac{h_i}{h_i - h_f}$$

2. la relation adiabatique donne $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{ste}$ soit en prenant la différentielle logarithmique :

$$(1-\gamma)\frac{\mathrm{d}P_1}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$$

Dans la transition isochore on a $PV = nRT$, ie $\frac{P}{T} = C^{ste}$ et de même $\frac{\mathrm{d}P_2}{P} = \frac{\mathrm{d}T_2}{T}$.
Or $(\mathrm{d}T = \mathrm{d}T_2)$ donc on a :

$$(1-\gamma)\frac{\mathrm{d}P_1}{P} = \gamma \frac{\mathrm{d}P_2}{P}$$

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma} = \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}P_2} \implies \gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

Car $h_i = \rho g \mathrm{d}p$

Exercise 20.3: Méthode de Rückhardt

Soit un gaz parfait occupant un volume V_0 (de l'ordre de 10 L) d'un récipient surmonté d'un tube de verre (d'une longueur de 50 cm environ) et de section faible S. Considérons une bille d'acier, de masse m, susceptible de glisser le long du tube de verre. Cette bille se trouve en équilibre mécanique en un point O.

1. Quelle est la pression P 0 du gaz à l'intérieur du récipient (en notant P_0 la pression atmosphérique et g l'intensité du champ de pesanteur) ?
2. On écarte la bille de x_0 , à partir de O, à l'instant t = 0, et on la lâche sans lui communiquer de vitesse initiale. x_0 est suffisamment faible pour avoir $x_0 S \ll V_0$.
   a) En négligeant les frottements ('fluides' comme 'solide'), établir l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$. On supposera que la transformation du gaz est adiabatique quasi-statique. Indiquer la période T des oscillations et en déduire l'expression de γ en fonction des paramètres.
   b) Indiquer la période T des oscillations et en déduire l'expression de γ en fonction des paramètres expérimentaux
   c) Exprimer x en fonction de t.

Solution Ex. 20.3

1. $P_0' = P_0 + \frac{mg}{S}$

2. $PV^\gamma = C^{ste}$ car adiabatique (méca avant thermo) et réversible. On prend la différentielle logarithmique :

$$\mathrm{d}P \simeq \frac{-\gamma P_0' S}{V_0} x(t)$$

On applique le PFD à la bille , et on se ramène à dP ce qui conduit à : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0' S^2}{m V_0}$ Donc

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{T^2 P_0' S^2}$$

Exercise 20.4: piston en rotation autour d'un axe

Un cylindre calorifugé est mis en rotation de manière pro- gressive à partir de la vitesse nulle jusqu'à la vitesse angulaire ω (qui restera constante) autour d'un axe vertical. Un piston mobile de masse m et de section S glisse sans frottement à l'intérieur du cylindre ; il emprisonne une quantité d'air initialement caractérisée par les conditions P_0, T_0, V_0. L'air sera considéré comme un gaz parfait.

1. Déterminer la pression finale P_f du gaz si l'on admet qu'il a subi une transformation quasi-statique réversible lorsque le piston s'est déplacé de sa position initiale caractérisée par r_0 jusqu'à sa position d'équilibre caractérisée par r_f .
2. En déduire la vitesse angulaire ω et la température finale T_f du gaz. *Données :* $P_0 = 1013\,\mathrm{hPa}$ $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ *;* $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ *;* $r_f = 12\,\mathrm{cm}$ *;*$m = 1\,\mathrm{kg}$ *;* $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ *et*$\gamma = 1.4$
3. Application numérique de P_f, T_f et ω

Solution Ex. 20.4

1. $P_f = P_0 \left(\frac{r_0}{r_f}\right)^\gamma$
2. $T_f = T_0 \left(\frac{r_0}{r_f}\right)^{\gamma-1}$
3. $P_f = 0.785\,\mathrm{bar}$; $T_f = 272\,\mathrm{K}$; $\omega = 13.8\,\mathrm{rad/s}$. (obtenue avec premier principe complet).

Chapitre 21

Inclassable

Exercise 21.1:

On considère une chaîne de longueur L et de masse linéique λ uniforme sur une table. Initialement un quart de sa longueur pend à l'extrémité de la table. Sans frottement pour la retenir, elle se met à glisser.

1. Déterminer la trajectoire de l'extrémité pendante de la chaîne.
2. En considérant les frottements, quelle longueur maximale peut on faire pendre ?

Solution Ex. 21.1

1. $E_p(z) = -\int_0^z \lambda z g dz = -\frac{-\lambda g z^2}{2} + E_p(0)$ Alors en dérivant le TEM :

$$\ddot{z} - \omega z = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \implies z = \frac{L}{4}\cosh(\omega t)$$

2. Modèle de coulomb : $\mu = \frac{\|T\|}{\|N\|} = \frac{x}{L-x} \implies x = \frac{\mu}{1+\mu}\lambda$
3. Bonus : Refaire les calculs avec ce modèle. (équation non homogène)