Exercise 1:

Une cuve de hauteur h et de section S contient $N \ggg 1$ billes de masse m d'énergie identique. Elles rebondissent verticalement et maintienne en équilibre un piston de masse M.
On enlève le piston à quelle hauteur monte les billes ?

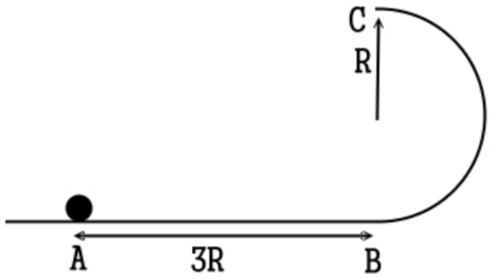
Exercise 2:

On considère une chaîne de longueur L et de masse linéique λ uniforme sur une table. Initialement un quart de sa longueur pend à l'extrémité de la table. Sans frottement pour la retenir, elle se met à glisser.

1. Déterminer la trajectoire de l'extrémité pendante de la chaîne.
2. En considérant les frottements, quelle longueur maximale peut on faire pendre ?

Exercise 3:

On s'interesse à un jeu de fete forraine :



1. On lance un balle M de masse m avec une vitesse $\vec{v_0}$ à une distance $3R$ d'une gouttière cylindrique. La balle doit arriver en haut du pipe en C et retomber à son point de départ en A . La balle se déplace sans frottements.
2. Calculez la vitesse v_0 nécessaire à la balle pour atteindre le point C . Quelle est alors sa vitesse ?
3. En supposant que la balle atteint le point C , à quelle distance retombe-t-elle au sol ?
4. Déterminer la vitesse pour gagner le jeu.

Exercise 4: Cycliste au tour de France

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit un e puissance mécanique constante P les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste. On néglige les forces de frottement du sol.

1. Déterminer une équation différentielle sur la vitesse et la mettre sous la forme

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k(v_l^3 - v^3)$$

   Où k est la coefficient de frottement fluide et v_l une constante homogène à une vitesse à déterminer.

2. on pose $f = k(v_l^3 - v^3)$.
   a) Déduire de la question précédente l'équation différentielle vérifiée par f.
   b) Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x, s'il aborde une ligne droite avec une vitesse v_0.
   c) Application numérique : Déterminer k et la distance nécessaire pou atteindre v_l. On donne la puissance du cycliste $P = 2\,\mathrm{kW}$ $v_l = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $m = 85\,\mathrm{kg}$.

Exercise 5: Interaction de particules chargée

On considère deux particules A (fixe) et B mobile de même masse m de charges respective q_A et q_B. on considère la force de coulomb entre ces deux particules comme étant la seule force en jeu du problème.

1. Rappeler son expression.
2. Donner l'énergie dont dérive cette force.
3. On suppose $q_a = q_b = q$ On lance B vers A avec la vitesse v_0 distante itialement de A À quelle distance minimale B s'approche-t-elle de A ? On pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.
4. On suppose $q_a = -q_b = q$ Quelle vitesse minimale faut-il donner à A pour qu'elle puisse s'échapper à l'infini ?On pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.

Exercise 6: Le marsupilami

Le marsupilami est un animal de bande dessinée crée par Franquin aux capacité physique remarquable, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.
On note $l_0 = 2\,\mathrm{m}$:la longueur à vide du ressort équivalent. et $l_m = 50\,\mathrm{cm}$ la longueur à compression maximale. la masse de l'animal est $m = 50\,\mathrm{kg}$.Il quitte le sol quand la longueur de la queue vaut l_0.

1. Quelle est la constante de raideur de la queue si un saut amène le marsupilami à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$ Quelle est sa vitesse lorsque la queue quitte le sol ?

Exercise 7: Brisure de symétrie

Une masse M(m) est attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. La masse glisse sans frottement le long de l'axe horizontal et le ressort est attaché à une distance R verticale de cet axe.

1. En prenant comme référence $E_p(x=0)=0$ montrez que l'énergie potentielle à pour expression $E_p = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{R^2+x^2}-l_0\right)^2-(R-l_0)^2\right)$
2. Comment déterminer l'existence de positions d'équilibre dans le cas d'un système à un degré de liberté ? En séparant les cas $R > l_0$ et $R < l_0$, étudiez l'existence de positions d'équilibre x_{eq} .
3. Comment déterminer la stabilité des positions d'équilibre dans le cas d'un système à un degré de liberté ? Caractérisez chacune des positions trouvées précédemment.
4. Tracez une courbe $x_{eq} = f(R)$. Pourquoi dit-on d'un tel système qu'il présente une bifurcation ?

Exercise 8: Chocs

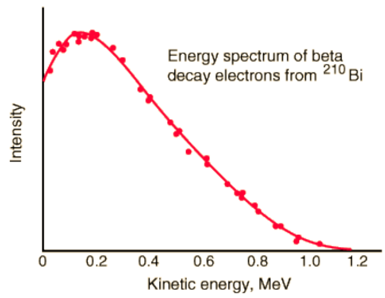
On étudie un choc entre deux particules,M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2, posée sur l'axe horizontal, et de vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ suivant l'axe x On suppose le choc élastique : es particules ne peuvent pas se déformer. Après le choc, elles conservent leur masse, leur forme et leur vitesse deviennent $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$

1. Faite une analyse qualitative du problème (symétrie, cas limites ($m_1 \gg m_2$))
2. Écrire les équations de conservation au cours du processus.
3. Déterminer $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$. Comparer avec l'analyse faites en 1.
4. Application une balle de ping-pong est posée sur une balle de tennis à une hauteur h. on lache les deux balles. A quelle altitude remonte la balle de ping-pong ?

Exercise 9: Neutrino

On se place dans le cadre relativiste et on utilisera la formule de l'énergie : $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ Une particule de masse m_0 initialement au repos dans le référentiel du laboratoire se désintègre en donnant naissance à deux particules de masse m_1 et m_2 , d'impulsion $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ de norme identique.

1. Ecrire les équations traduisant la conservation de l'impulsion et de l'énergie au cours du processus.
2. En déduire une équation vérifiée par la norme de l'impulsion p_1
3. En déduire si $m_0 > m_1 + m_2$, la valeur de p_1 et p_2 sont fixée de manière unique
4. En déduire que l'énergie des particules issues de la désintégration est fixée de manière unique.
5. Commentez le spectre d'énergie ci dessous, obtenu pour la désintégration du bismuth ${}^{210}_{85}Bi \rightarrow^{210}_{84} Po + e^+$



Exercise 10: Rayon de Schwarzschild

1. Rappelez l'expression de la force d'attraction gravitationelle et déduisez en l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
2. Une fusée de masse m est posée à la surface d'une planète de masse M et de rayon R . Elle décole avec une vitesse v_0 Quelle est la valeur minimale de v_0 qui permet à la fusée d'échapper à l'attraction gravitationelle de la planète ?
3. On imagine à présent que la fusée peut décoller à la vitesse de la lumière c . Exprimez, en fonction de la masse M de la planète, le rayon minimal au-deça duquel la fusée ne peut plus échapper à l'attraction gravitationelle.
   Données $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ et $M_{Terre} = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$

Solution Ex. 1

1ddl => Énergie.

pendant dt le piston reçoit et cède $dp = 2mvdN$. On fait l'hypothèse d'une répartition isotrope des particules dans la cuve (théorie cinétique des gaz) $n^* = \frac{N}{hS}$ donc $dN = \frac{n^* vdtS}{2} = \frac{Nvdt}{2h}$ on a donc :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{Nmv^2}{h} = Mg$$

Or $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ on a donc :

$$E = \frac{hg}{2}(M - 2m)$$

On enlève le piston et on prend une bille en $z = 0$ qui monte en h_{max} où sa vitesse est nulle $h_{max} = \frac{E}{gm} = h\frac{(M-2m)}{2m}$

Solution Ex. 2

1. $E_p(z) = -\int_0^z \lambda zgdz = -\frac{-\lambda gz^2}{2} + E_p(0)$ Alors en dérivant le TEM :

$$\ddot{z} - \omega z = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \implies z = \frac{L}{4}\cosh(\omega t)$$

2. Modèle de coulomb : $\mu = \frac{\|T\|}{\|N\|} = \frac{x}{L-x} \implies x = \frac{\mu}{1+\mu}\lambda$

Solution Ex. 3

1. $v_B = v_A$
2. $v = \sqrt{2gh}$ avec une vitesse nulle en C (toute l'énergie cinétique a été transformée)
3. chute libre $y = \frac{-gx^2}{2v_c^2} + 2R$ la balle arrive en $x_0 = \sqrt{4Rv_c^2/g}$
4. pour gagner le jeu il faut donc $v_c = \sqrt{\frac{9gR}{4}}$ on a donc $v_0 = sqrt(v_c^2 + 2gh)$

Solution Ex. 4

1. TEC :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\vec{F_f}) + \mathcal{P}(\vec{R}) + P$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = P - kv^3$$

Alors avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$ on a :

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k(v_l^3 - v^3)$$

avec $v_l = \left(\frac{P}{k}\right)^{1/3}$ vitesse limite ou la puissance du cycliste compense les pertes.

2. a) on mets l'équation précédente sous la forme :

$$f(x) - \frac{m}{3k}f'(x) = 0$$

b) Alors on pose : $L = m/3k$ et on a : $f(x) = A\exp(-x/L)$ puis

$$v(x) = v_l\left(1 - \left(1 - \left(\frac{v_0}{v_l}\right)^3\right)\exp\left(-\frac{x}{L}\right)\right)^{1/3}$$

L est la distance caractéristique pour atteindre la vitesse limite.

c) Avec $P = 2kW$ et $v_l = 20m/s$ on a $k = 0.25\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$et $L = 113\,\mathrm{m}$.

Solution Ex. 5

1. $\vec{f} = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr\vec{u_r}$
2. $\delta W = -\mathrm{d}E_p = \vec{f}.\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr \implies E_p = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r} + \cancel{C}$

3. $E_m = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ on a $E_m(v_B = 0, d_{min}) = E_m(v_0, a) \implies d_{min} = \left(\frac{1}{a} + \frac{2\pi\varepsilon_0 m v_0}{q^2}\right)^{-1}$
4. Pour des charges opposées : force attractive la vitesse de libération est donnée par : $\frac{1}{2}mv_0 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = E_m(r_\infty) = 0 \implies v_0 = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a m}}$

Solution Ex. 6

BDF : Poids , tension ressort réaction du support. En l'air on ne prend en compte que le poids.

1. TEM avec $E_m = E_c + E_p + \underbrace{E_e}_{=0\text{en l'air}}$ $k = \frac{2mg(h-l_m)}{(l_m-l_0)^2}$ =4.1 N/m. et $v_D = \sqrt{2g(h-l_0)}$

Solution Ex. 7

1. la force exercé sur la masse m est $\vec{f} = -k(RM - l_0)\vec{RM}$ ainsi l'énergie potentielle associée est : (en intégrant entre 0 et x) $E_p = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{R^2+x^2} - l_0\right)^2 - (R - l_0)^2\right)$
2. on étudie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_p}x = \cdots = kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$ les solutions sont : $\begin{cases} x = 0 \text{ instable} \\ x = \pm\sqrt{l_0^2 - R^2} \text{ si } R < l_0 \text{ stable} \end{cases}$
3. Un changement du paramètre R conduit à un systeme résolument différent (nombre et stabilité des positions d'équilibre)

Solution Ex. 8

1. pour $m_1 \gg m_2$ la balle M_1 s'arrete et transmet toutes sa vitesse à la balle M_2 et s'arrete.
2. Conservation quantité mouvement et énergie cinétique $\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases}$
3. on a donc : $\begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2} v_2 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2} v_2 \end{cases}$
4. La balle du dessous touche le sol avant celle du dessus et, dans le cas idéal, elle rebondit sans pertes dues aux frottements. Il y a alors choc élastique entre deux balles qui ont des vitesses opposées.

$$v_2' = \frac{3 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} v$$

Solution Ex. 9

1. $\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0$ et $E_0 = m_0 c^2 = E_1 + E_2$
2. $m_0 c^2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_1^2 c^2}$ car $p_1 = p_2$
3. La fonction $f(p_1) = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_1^2 c^2 - m_0 c^2}$ est une fonction continue et strictement croissante. De plus $f(0) < 0$ si $m_1 + m_2 < 0$ et $\lim_{p_1 \to +\infty} f(p_1) = +\infty$. d'apres le TVI il existe une unique valeur de p_1 telle ue $f(p_1) = 0$
4. Lors de la desintégration, l'électrons emporte la majeur partie de l'énergie, et ce de manière fixe. les électrons éjectés possèdent différentes énergies. Le reste de l'énergie est transmise à une autre particule, le neutrino, sans charge électrique et de masse 100 fois plus petite que celle de l'électron.

Solution Ex. 10

1. $v_L = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
2. $R_s = \frac{2GM}{c^2}$