Конспект по теме "Анализ алгоритмов"

Вычислительная сложность

Время работы алгоритма не измеряют в секундах, оно определяется количеством выполняемых алгоритмом элементарных операций: сложений, умножений и сравнений. Когда говорят о времени работы на определённом компьютере, обычно его называют **реальным временем работы.** На время работы алгоритма также влияют его аргументы.

Время работы сложных алгоритмов вычислить нельзя. Поэтому рассчитывают их **вычислительную сложность**, или **асимптотическое время работы** — от слова **асимптота** — прямая, к которой кривая приближается, но не может её пересечь.

Обозначим длину входных данных n. Время работы — это функция от n, то есть $T(n)$. Асимптотическое время работы алгоритма показывает, как растёт $T(n)$ при увеличении n.

Когда $T(n)$ — это многочлен, то асимптотическое время работы равно одночлену наибольшей степени без коэффициента (например, n^2 вместо $5n^2$). При больших значениях n остальные одночлены не важны.

- Если $T(n) = 4n + 3$, асимптотическое время работы $T(n) \sim n$. У алгоритма **линейная сложность**.
- Если $T(n) = 5n^2 + 3n - 1$, асимптотическое время работы $T(n) \sim n^2$. У алгоритма **квадратичная сложность**.
- Если $T(n) = 10n^3 - 2n^2 + 5$, то $T(n) \sim n^3$. У алгоритма **кубическая сложность**.
- Если $T(n) = 10$, то $T(n) \sim 1$. У алгоритма **константная сложность**, то есть не зависит от n.

Время обучения линейной регрессии

Задача обучения линейной регрессии такая:

$$w = \arg\min_{w} MSE(Xw, y)$$

Веса вычисляются по формуле:

$$w = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Найдём вычислительную сложность расчёта весов, но прежде:

- Обозначим количество объектов в обучающей выборке как n, а количество признаков — p;
- Размер матрицы X будет n x p, размер вектора y — n;
- Обозначим вычислительную сложность как $T(n, p)$, поскольку она зависит от двух параметров: n и p.

Тогда вычислительная сложность обучения линейной регрессии будет $T(n, p) \sim np^2 + p^3 + np^2 + np$

Признаков обычно меньше, чем объектов, то есть $p < n$. Умножим обе части на p^2, получим $p^3 < np^2$. Оставим только одночлен наибольшей степени и получим: $T(n, p) \sim np^2$. Если признаков много, модель будет обучаться долго.

Итеративные методы

Задача решается **прямым методом**, когда модель линейной регрессии обучается по такой формуле:

$$w = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Прямые методы помогают найти точное решение по заданной формуле или алгоритму. Их вычислительная сложность не зависит от данных.

Другой подход к обучению модели линейной регрессии — **итеративный метод**, или **итеративный алгоритм**. Он не даёт точного решения, только приближённое. Алгоритм многократно выполняет похожие итерации, на каждом шаге решение становится всё точнее. Если слишком большая точность не нужна, хватит и небольшого числа итераций.

Вычислительная сложность итеративных методов зависит от числа шагов, на которое может влиять и содержание данных.

Метод бисекции

Итеративным методом найдём решение уравнения *f(x) = 0*. Пусть *f(x)* — **непрерывная функция**, то есть график такой функции можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

Решить уравнение поможет **метод бисекции**. На вход он принимает непрерывную функцию и отрезок [*a, b*]. У значений *f(a)* и *f(b)* разные знаки.

Когда эти два условия выполняются:

1. функция непрерывна,

2. у значений на концах отрезка знаки разные,

то корень уравнения где-то на отрезке.

На каждой итерации метод бисекции:

- Проверяет, равно ли нулю любое значение *f(a)* или *f(b)*. Если равно, то решение найдено;
- Находит середину отрезка *c = (a + b) / 2;*
- Сравнивает знак *f(c)* со знаками *f(a)* и *f(b)*:
    - Если у *f(c)* и *f(a)* разные знаки, то корень обязательно есть на отрезке *[a, c]*. К этому отрезку и переходит алгоритм на следующей итерации;
    - Если у f*(c)* и *f(b)* разные знаки, то корень обязательно есть на отрезке *[b, c]*. К нему переходит алгоритм на следующей итерации;

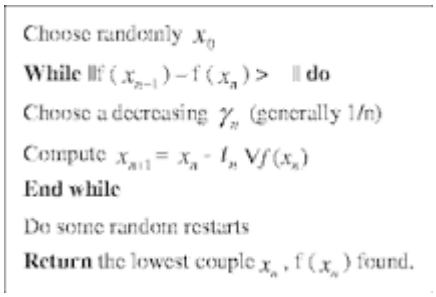
- Знаки *f(a)* и *f(b)* разные, поэтому других вариантов быть не может.

Обычно заранее выбирают точность решения, например, e = *0.000001*. На каждой итерации отрезок с корнем уменьшается в два раза. Если получаем длину отрезка меньше *e*, работу алгоритма можно остановить. Такое условие называется **условием остановки**.

Сравнение методов

Бóльшая часть этого курса посвящена ключевому для машинного обучения итеративному методу — **градиентному спуску** (англ. *gradient descent*). На нём построено много алгоритмов обучения.

Обозначим его преимущества перед прямыми методами:



- Для линейной регрессии с функцией потерь *MSE* он работает быстрее на больших наборах данных.
- Градиентный спуск годится для линейной регрессии и с другими функциями потерь (не для всех есть формулы).
- Он применим в обучении нейронных сетей, для которых тоже нет прямой формулы.