

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

Дискретные сигналы

Отчет по лабораторной работе 6

по дисциплине «**Обработка сигналов**»

студента 3 курса группы ИВТ-б-о-222

Гоголева Виктора Григорьевича

Направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Симферополь, 2025

Лабораторная работа №6

Тема: Дискретные сигналы

Теоретические сведения

Дискретный сигнал – функция, определённая только на дискретном множестве точек времени.

Дискретный сигнал $x_d(t)$ представляет собой последовательность $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, отсчетных значений сигнала $x(t)$ в точках $(\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots)$ соответственно. Отсчеты дискретных сигналов берутся, как правило, через равный промежуток времени (интервал (шаг) дискретизации):

$$\Delta = t_m - t_{m-1} = t_{m-1} - t_{m-2} = \dots$$

Если сигнал задан на отрезке $[0, T]$ (T является периодом для периодического сигнала), то полное число отсчетов

$$N = T / \Delta$$

Сопоставив исходному сигналу $x(t)$ дискретную модель с учетом комплексного ряда Фурье, имеем:

$$x(t) = \Delta \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \delta(t - k \cdot \Delta) = \Delta \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2\pi n t / T}$$

Для определения коэффициентов C_n используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$C_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi n \cdot k / N}$$

Свойства ДПФ:

1. Число коэффициентов C_n равно количеству отсчетов N
2. Коэффициент C_0 является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

3. Если N – четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot (-1)^k$$

4. Если отсчетные значения x_k – вещественные числа, то коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi (N-n) \cdot k / N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{j2\pi n \cdot k / N} = C_n^*$$

Для восстановления сигнала $x(t)$ с ограниченным спектром по заданным отсчетным значениям ($x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$) необходимо найти коэффициенты ДПФ ($C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N/2}$) и использовать следующий ряд Фурье:

$$x(t) = C_0 + 2 \cdot |C_1| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t / T + \varphi_1) + 2 \cdot |C_2| \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t / T + \varphi_2) + \dots + |C_{N/2}| \cdot \cos(N \cdot \pi \cdot t / T + \varphi_{N/2})$$

Для определения отсчетных значений по известным значениям коэффициентов C_n используется обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ):

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \cdot e^{j2\pi n \cdot k / N}$$

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Дискретный сигнал задан в виде набора из 8 равноотстоящих отсчетов на интервале своей периодичности (значения отсчетов приведены в таблице 6.1).
3. Разработать программное обеспечение для исследования дискретных сигналов.
4. Определить коэффициенты дискретного преобразования Фурье.
5. Восстановить сигнал по полученным коэффициентам.
6. Построить график восстановленного сигнала, на котором отметить в виде точек значения заданных отсчетов.
7. Сделать выводы по работе.

Вариант № 17

```
# импортируем библиотеки
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.array([1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 2])
t = np.arange(0, len(x))
```

Рисунок 1 – импорт библиотек и инициализация переменных согласно варианту задания (Вариант № 17)

Расчёт ряда Фурье

Ряд Фурье – позволяет представить периодическую функцию как сумму гармонических функций с разными частотами и амплитудой.

```
# рассчитываем ряд Фурье
a0 = np.mean(x)
a = np.zeros(4)
b = np.zeros(4)

# расчёт коэффициентов
for k in range(1, 5):
    a[k - 1] = (2.0 / len(x)) * np.sum(
        [x[n] * np.cos(2 * np.pi * k * n / len(x)) for n in range(len(x))]
    )
    b[k - 1] = (2.0 / len(x)) * np.sum(
        [x[n] * np.sin(2 * np.pi * k * n / len(x)) for n in range(len(x))]
    )

x_reconstructed = np.zeros(len(x))
x_reconstructed += a0

# вычисление приближенного исходного сигнала
for k in range(1, 5):
    x_reconstructed += a[k - 1] * np.cos(2 * np.pi * k * t / len(x)) + b[
        k - 1
    ] * np.sin(2 * np.pi * k * t / len(x))
```

Рисунок – программный код вычисления ряда Фурье

Коэффициент ДПФ

ДПФ – это дискретное преобразование Фурье, которое является дискретной версией преобразования Фурье. Оно позволяет анализировать периодические сигналы в частотной области

```
# Коэффициенты ДПФ (DFT)
DFT_coef = np.fft.fft(x)
```

Рисунок – вычисление коэффициентов для ДПФ

Обратное дискретное преобразование и вывод графика

ОДПФ – преобразует частотный спектр дискретного сигнала из его частотного представления во временное представление при помощи интерполяции частотных составляющих.

```
# Обратное преобразование Фурье (IDFT)
x_restored = np.real(np.fft.ifft(DFT_coef))

plt.bar(t, x, width=0.4)
plt.stem(x)
plt.plot(x_reconstructed, "r")
plt.title("Дискретный сигнал")
plt.xlabel("Время, с")
plt.ylabel("Амплитуда")
plt.show()
```

Рисунок – расчет обратного преобразования Фурье и вывод графика

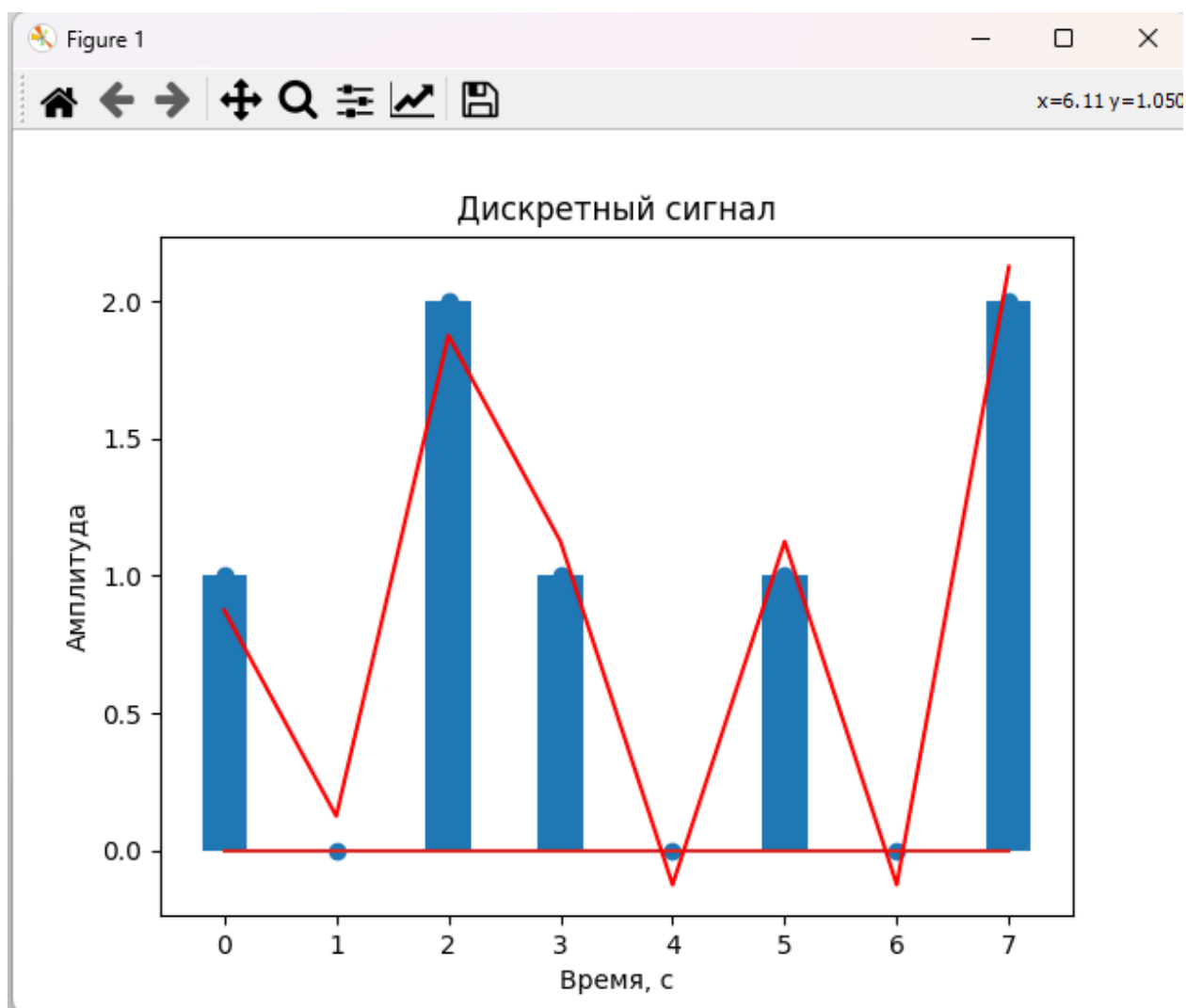


Рисунок - восстановленный график сигнала с отмеченными отсчетами

ВЫВОД

В ходе данной лабораторной работе я рассчитал ряд Фурье для данного сигнала, а именно рассчитал коэффициент и вычислил восстановленный сигнал, также рассчитал коэффициент дискретного преобразования Фурье и при его помощи произвёл обратное преобразование Фурье. Результат вывел на график.