МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В.И.ВЕРНАДСКОГО»
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

ТАРАН ЕВГЕНИЙ ПАВЛОВИЧ

Практикум

по курсу «Обработка сигналов»

для обучающихся направления подготовки:
09.03.01 Информатика и вычислительная техника
очной формы обучения

Симферополь 2020

Рекомендовано к печати заседанием кафедры компьютерной инженерии и моделирования

протокол № 5 от 15.01.2020

Рекомендовано к печати:

Учебно-методическим советом Физико-технического института (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И.Вернадского»

протокол № 5 от 24.01.2020

Составитель (автор): Таран Евгений Павлович, к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной инженерии и моделирования

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий практикум, включает в себя описания практических занятий по дисциплине «Обработка сигналов» для студентов направления подготовки 09.03.01 - Информатика и вычислительная техника. В практикум включены работы, в которых необходимо разработать программное обеспечение, позволяющее обрабатывать сигналы с применением необходимого математического аппарата.

Целью практикума является получение практических навыков обработки аналоговых и цифровых сигналов.

Требования к студентам по подготовке, выполнению и отчету по практическим занятиям:

1. Студент приходит на практическое занятие, ознакомившись с теоретическим материалом по данной теме, необходимым для выполнения практического задания.

2. В начале занятия преподаватель проверяет подготовку к практическому занятию и оценивает ее. Студенты, не знающие теорию вопроса, к выполнению работы не допускаются.

3. Отчет по практическому занятию должен содержать: доскональное и развренутое решение практического задания.

4. Порядок сдачи практического задания: практические задания сдаются лично каждым студентом, при этом студент должен четко и точно ответить на вопросы преподавателя о ходе выполнения практического задания, а так же на теоретические вопросы.

Для самоконтроля и подготовки студентов к практическим занятиям описание каждой из них содержит теоретический материал. Некоторые вопросы требуют более глубокой проработки теоретического материала и умения применять его в нестандартных условиях. Для подготовки к практическим занятиям, как правило, достаточно воспользоваться каким-либо одним из рекомендованных учебников или пособий, данными методическими указаниями, а также конспектом лекций, по соответствующим разделам дисциплины «Обработка сигналов».

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефедов В.И., Сигов А.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 266 с. https://biblio-online.ru/viewer/radiotehnicheskie-cepi-i-signaly-433792#page/1
2. Вадутов О.С. Электроника. Математические основы обработки сигналов: учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 307 с. https://biblio-online.ru/viewer/elektronika-matematicheskie-osnovy-obrabotki-signalov-433991#page/1
3. Плаксиенко, В.С. Основы приема и обработки сигналов : учебное пособие / В.С. Плаксиенко, Н.Е. Плаксиенко ; Министерство образования и науки РФ, Южный федеральный университет. - Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2016. - Ч. 1. - 73 с. : схем., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9275-1926-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=493268.
4. Современные информационные каналы и системы связи : учебник / В.А. Майстренко, А.А. Соловьев, М.Ю. Пляскин, А.И. Тихонов ; Минобрнауки России, Омский государственный технический университет, Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ), Академия военных наук Российской Федерации. - Омск : Издательство ОмГТУ, 2017. - 452 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-8149-2458-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=493441.
5. 2. Душин, В.К. Теоретические основы информационных процессов и систем : учебник / В.К. Душин. - 5-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. - 348 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-01748-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453880.

Практическое занятие № 1

Тема: Представление сигналов в ортонормированном базисе.

Время необходимое для выполнения практического задания – 4 часа.

Необходимое оборудование: Компьютерный класс, отвечающий требованиям техники безопасности.

Необходимое программное обеспечение: Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio.

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Задан произвольный сигнал (рисунок 1.1). Параметры сигнала заданы в таблице 1.1.
3. Разработать программное обеспечение, которое будет аппроксимировать данный импульс системой ортонормированных функций Уолша.
4. Определить норму импульса и энергию сигнала.
5. Определить энергию импульса через систему ортонормированных функций Уолша.
6. Провести цикл вычислительных экспериментов, в котором определить количество коэффициентов при разложении по функциям Уолша исходя из потери относительной энергии сигнала (10 %, 5 %, 2 %, 1 %, 0,1 %).
7. Графически изобразить исходный и аппроксимированный импульсы для различного количества коэффициентов при разложении по функциям Уолша.
8. Сделать вывод по полученным результатам.

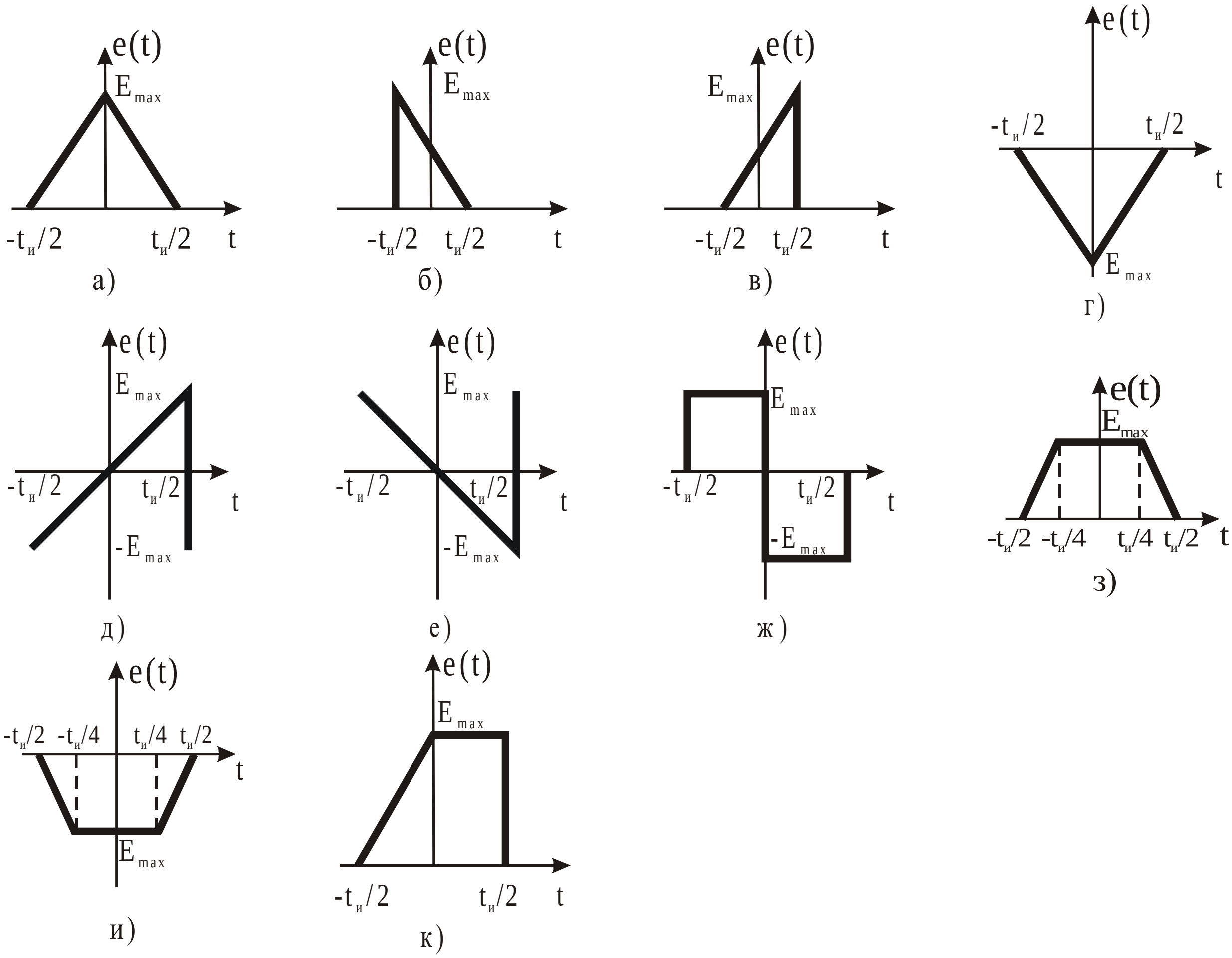


Рисунок 1.1 – Вид импульса.

Таблица 1.1. Параметры сигнала

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
E_{max}, В	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
$t_и$, мкс	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Сигнал	к	и	з	ж	е	д	г	в	б	а
E_{max}, В	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5
$t_и$, мкс	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Сигнал	е	д	г	ж	з	в	б	и	к	а
E_{max}, В	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$t_и$, мкс	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Методические указания к выполнению практического задания

Произвольный сигнал s(t) может быть представлен в виде обобщенного ряда Фурье в ортонормированном базисе:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot u_i(t) \qquad (1.1),$$

где c_i – коэффициенты обобщенного ряда Фурье; $u_i(t)$ – система ортонормированных функций:

$$\left(u_i, u_j\right) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (1.2).$$

Коэффициенты обобщенного ряда Фурье получаются путем скалярного произведения произвольного сигнала на соответствующую базисную функцию:

$$c_i = \left(s, u_i\right) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) \cdot u_i(t) \cdot dt \quad (1.3),$$

где $[t_1, t_2]$ – область определения сигнала.

Норма и энергия сигнала определяются следующими выражениями:

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt}\ ;\ E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt \quad (1.4).$$

Одной из систем ортонормированных функций является система функций Уолша, которая на отрезке своего существования [-T/2, T/2] принимает значения ±1. Система функций Уолша обычно строится в безразмерном базисе (ϑ=t/T, $\vartheta \in$[-1/2;1/2]) и обозначается wal(k, ϑ), где k определяет номер функции Уолша.

Вычисление функций Уолша может производить с использованием рекуррентного уравнения:

$$wal(2 \cdot n + p, \vartheta) = (-1)^{[n/2]+p} \cdot \left\{wal\left(n, 2 \cdot \vartheta + \tfrac{1}{2}\right) + (-1)^{n+p} \cdot wal\left(n, 2 \cdot \vartheta - \tfrac{1}{2}\right)\right\},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots (1.5),$$

где [n/2] – наибольшее целое число, меньшее или равное n/2; p – принимает значение 0 или 1 в зависимости от того какая функция Уолша вычисляется (для четной функции Уолша p=0, для нечетной – p=1). Функция Уолша нулевого порядка (wal(0, ϑ)) постоянна на отрезке $-1/2 \le \vartheta \le 1/2$:

$$wal(0, \vartheta) = \begin{cases} 0, \vartheta < -1/2 \\ 1, -1/2 \le \vartheta \le 1/2 \\ 0, \vartheta > 1/2 \end{cases} \quad (1.6).$$

Разложение произвольного сигнала с конечной энергией, заданного на временном интервале [-T/2, T/2], в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша имеет вид:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot wal\left(k, t/T\right) \quad (1.7).$$

Коэффициенты в разложении по функциям Уолша определяются следующим выражением:

$$c_k = \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta) \cdot wal(k, \vartheta) \cdot d\vartheta \quad (1.8).$$

Энергия произвольного сигнала, аппроксимированного ортонормированной системой функций Уолша, определяется следующим выражением:

$$E_w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \quad (1.9).$$

Количество коэффициентов в разложении по функциям Уолша определяется из следующего выражения:

$$\frac{\left|E_s - E_w\right|}{E_s} \cdot 100\% \le \delta \quad (1.10),$$

где δ - потеря относительной энергии сигнала.

Практическое занятие № 2

Тема: Спектральный анализ периодических сигналов.

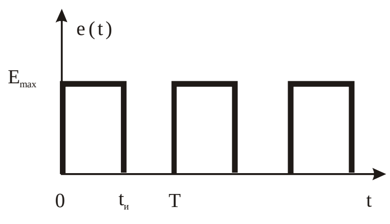
Время необходимое для выполнения практического задания – 4 часа

Необходимое оборудование: Компьютерный класс, отвечающий требованиям техники безопасности.

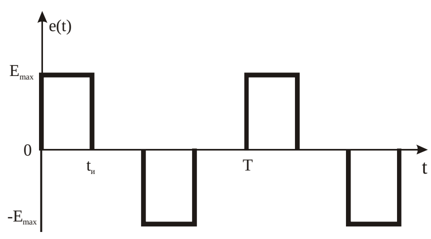
Необходимое программное обеспечение: Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio.

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Сигнал представляет собой периодическую последовательность импульсов длительностью $\tau_и$ и периодом T (рисунок 2.1). Параметры периодической последовательности импульсов заданы в таблице 2.1.
3. Разработать программное обеспечение, осуществляющее спектральный анализ периодической последовательности импульсов.
4. Получить аналитические выражения для коэффициентов разложения.
5. Найти амплитуду и фазу гармоник и построить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы.
6. Провести цикл вычислительных экспериментов, в котором определить количество гармоник исходя из потери относительной мощности сигнала (10 %, 5 %, 2 %, 1 %, 0,1 %).
7. Графически изобразить исходный и аппроксимированный периодические сигналы для различного количества гармоник при разложении в спектр.
8. Сделать вывод по полученным результатам.



а)



б)

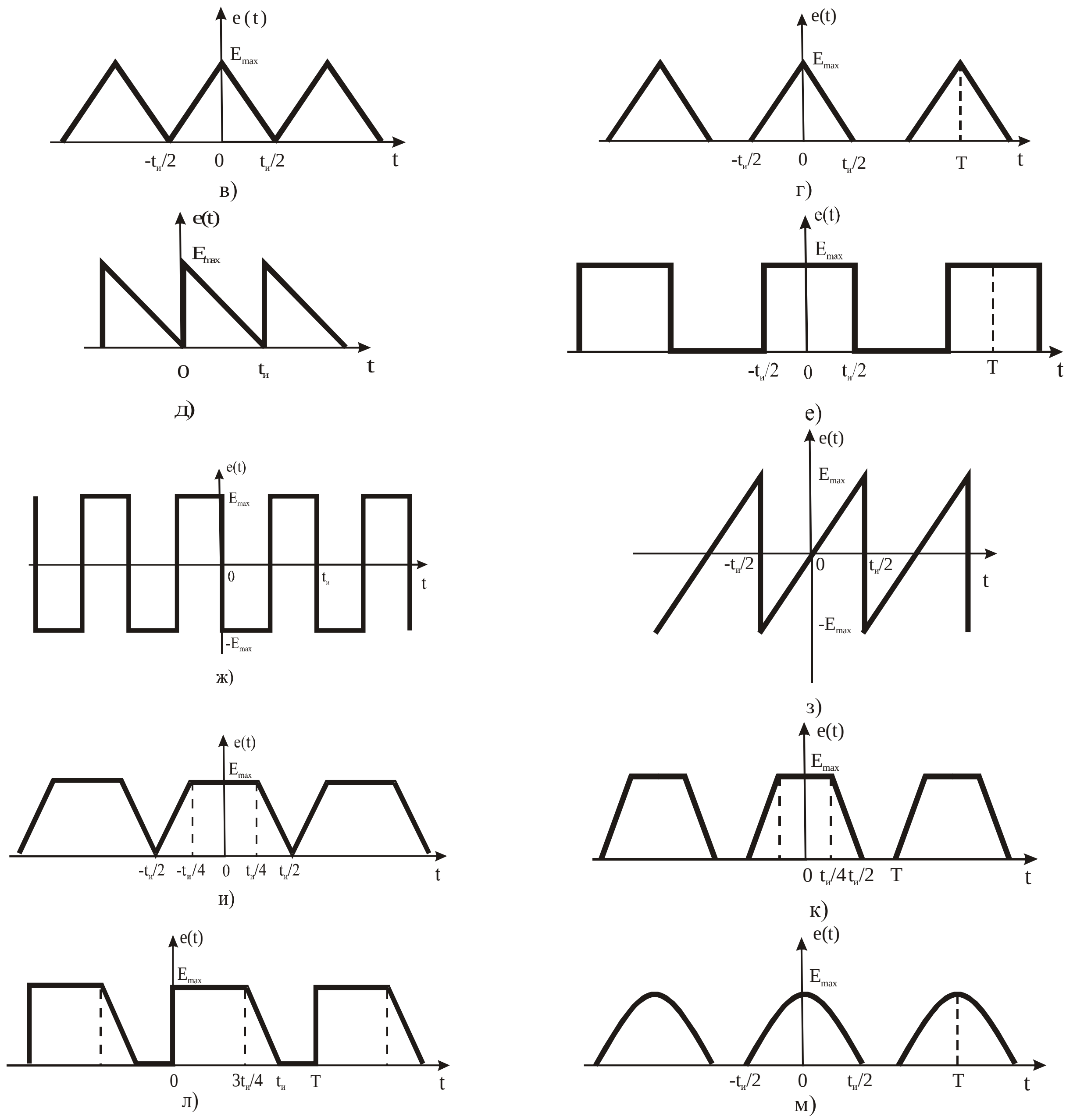


Рисунок 2.1 – Вид периодической последовательности импульсов.

Таблица 2.1. Параметры периодической последовательности импульсов

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
E_{max}, В	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$t_и$, мкс	116	112	108	104	100	96	92	88	84	80
T, мкс	232	448	-	208	-	384	-	-	-	160

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Сигнал	л	м	а	б	в	г	д	е	ж	з
E_{max}, В	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
$t_и$, мкс	76	72	68	64	60	56	52	48	44	40
T, мкс	152	108	100	384	-	84	-	72	-	-

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Сигнал	и	к	л	м	а	б	в	г	д	е
E_{max}, В	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
$t_и$, мкс	36	32	28	24	20	16	12	8	4	2
T, мкс	-	48	32	48	80	128	-	32	-	4

Методические указания к выполнению практического задания

Периодическая последовательность импульсов может быть записана в виде ряда Фурье для периодического сигнала:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) \qquad (2.1),$$

где $\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f$ – основная частота последовательности; a_0, a_n, b_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Коэффициенты разложения рассчитываются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot dt;\ a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t)dt;\ b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t)dt \qquad (2.2),$$

где $T = 1/f$ – период последовательности импульсов.

Таким образом, периодический сигнал содержит постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний (гармоник) с частотами, кратными основной частоте последовательности ($\omega_n = n \cdot \omega_1$, n=1, 2, 3, …).

Эквивалентная форма ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t - \varphi_n) \qquad (2.3),$$

где A_n – амплитуда, φ_n – начальная фаза n-ой гармоники. Амплитуда и начальная фаза гармоник определяются через коэффициенты ряда Фурье:

$$A_0 = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};\ tg\varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \qquad (2.4).$$

Зависимость амплитуды гармоник от частоты представляет собой амплитудную спектральную диаграмму, а зависимость начальной фазы гармоник от частоты – фазовую спектральную диаграмму для конкретного сигнала.

Средняя мощность для периодической последовательности импульсов определяется следующим выражением:

$$P_c = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) \cdot dt \qquad (2.5).$$

Мощность, заключенная в сложном периодическом сигнале, может быть рассчитана через коэффициенты ряда Фурье:

$$P_k = \left({a_0}/{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^2 \qquad (2.6).$$

При учете конечного числа гармоник теряется часть мощности. Выбор максимальной гармоники (определение практической ширины спектра) зависит от отношения P_c/P_k:

$$\frac{P_k}{P_c} \geq \delta .$$

где δ - потеря относительной мощности сигнала.

Практическое занятие № 3

Тема: Спектральный анализ непериодических сигналов.

Время необходимое для выполнения практического задания– 6 часов.

Необходимое оборудование: Компьютерный класс, отвечающий требованиям техники безопасности.

Необходимое программное обеспечение: Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio.

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Задан одиночный импульс амплитудой E_{max} и длительностью $t_и$. (Из периодической последовательности импульсов (рисунок 2.1) выбирается один импульс, параметры которого приведены в таблице 2.1).
3. Разработать программное обеспечение, которое позволяет получить спектральную плотность одиночного импульса.
4. Построить амплитудный и фазовый спектр заданного импульса.
5. Провести цикл вычислительных экспериментов, в котором определить практическую ширину спектра исходя из потери относительной энергии сигнала (10 %, 5 %, 2 %, 1 %, 0,1 %).
6. Построить графики амплитудного и фазового спектров заданного импульса в зависимости от практической ширины спектра.
7. Графически изобразить исходный и аппроксимированный периодические сигналы для различной практической ширины спектра.
8. Сделать вывод по полученным результатам.

Методические указания к выполнению практического задания

Одиночный импульс может быть представлен как во временной области, так и в частотной. Переход из временной в частотную область осуществляется с помощью прямого преобразования Фурье:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} \cdot dt \qquad (3.1),$$

где s(t) – заданный сигнал; S(ω)·– спектральная плотность сигнала s(t).

Переход из частотной области во временную осуществляется с помощью обратного преобразования Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} \cdot d\omega \qquad (3.2),$$

Спектральная плотность сигнала представляет собой комплексную величину. Спектральную плотность можно выразить через модуль (амплитудный спектр $|S(j\omega)|$) и аргумент (фазовый спектр $\psi(t)$):

$$|S(j\omega)| = \sqrt{[Re(S(j\omega))]^2 + [Im(S(j\omega))]^2}\ ;\ tg\psi(t) = \frac{Im(S(j\omega))}{Re(S(j\omega))} \qquad (3.3),$$

где $Re(S(j\omega))$, $Im(S(j\omega))$ – вещественная и мнимая части спектральной плотности $S(j\omega)$.

При переходе из временной области в частотную сигнал должен быть абсолютно интегрируемым:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| \cdot dt < \infty \qquad (3.4).$$

Полная энергия одиночного импульса определяется следующим выражением:

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt \qquad (3.5).$$

Энергия, сосредоточенная в полосе частот $[0 \div \omega_k]$, определяется, согласно теоремы Парсеваля, следующим соотношением:

$$E_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_k} (S(\omega))^2 \cdot dt \qquad (3.6).$$

Определение практической ширины спектра (значения ω_k) зависит от отношения $E_{\Delta\omega}/E_c$:

$$\frac{E_{\Delta\omega}}{E_c} \geq \delta \qquad (3.7).$$

где δ - потеря относительной энергии сигнала.

Практическое занятие № 4

Тема: Корреляционный анализ сигналов.

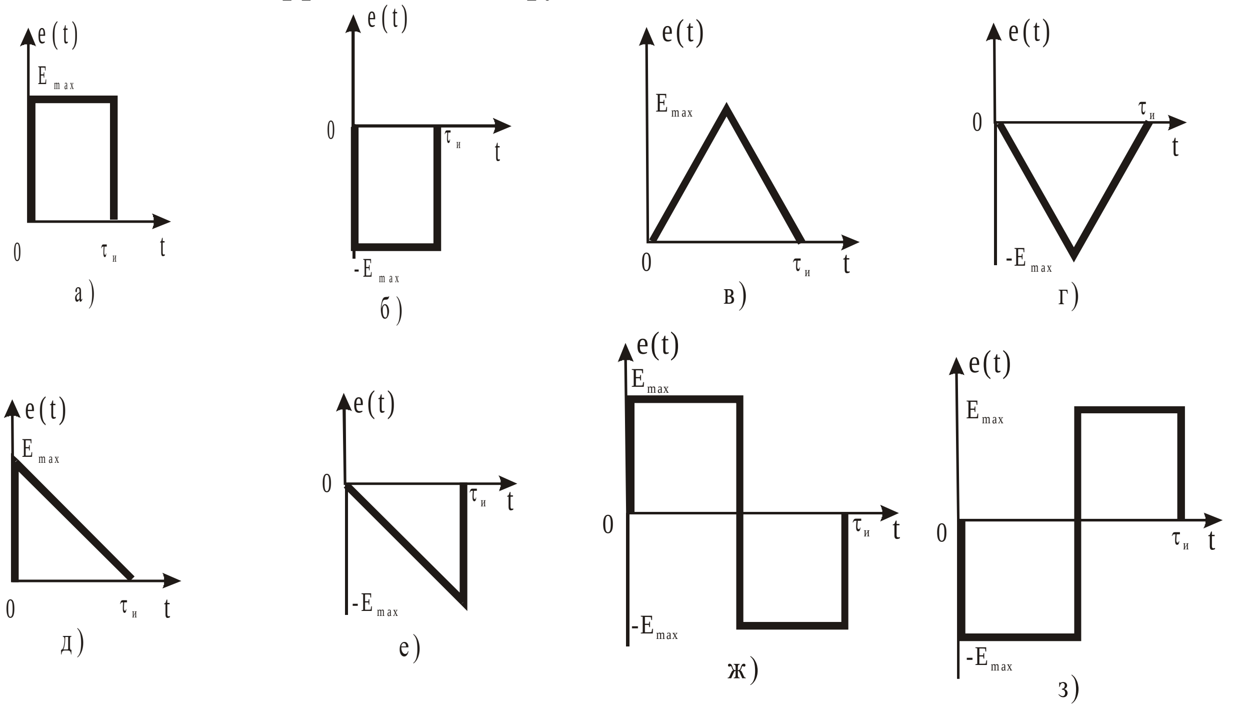
Время необходимое для выполнения практического задания – 4 часа.

Необходимое оборудование: Компьютерный класс, отвечающий требованиям техники безопасности.

Необходимое программное обеспечение: Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio.

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Заданы два сигнала (рисунок 4.1, таблица 4.1).
3. Разработать программное обеспечение по корреляционной обработке сигналов.
4. Определить автокорреляционные функции аналитическим методом.
5. Рассчитать взаимокорреляционную функцию двух сигналов и определить интервал корреляции, как сдвиг во времени, при котором величина взаимокорреляционной функции $B_{uv}(\tau)$ становится меньше $B_{uv\,max}$.
6. Построить графики автокорреляционных функций и взаимокорреляционной функции.



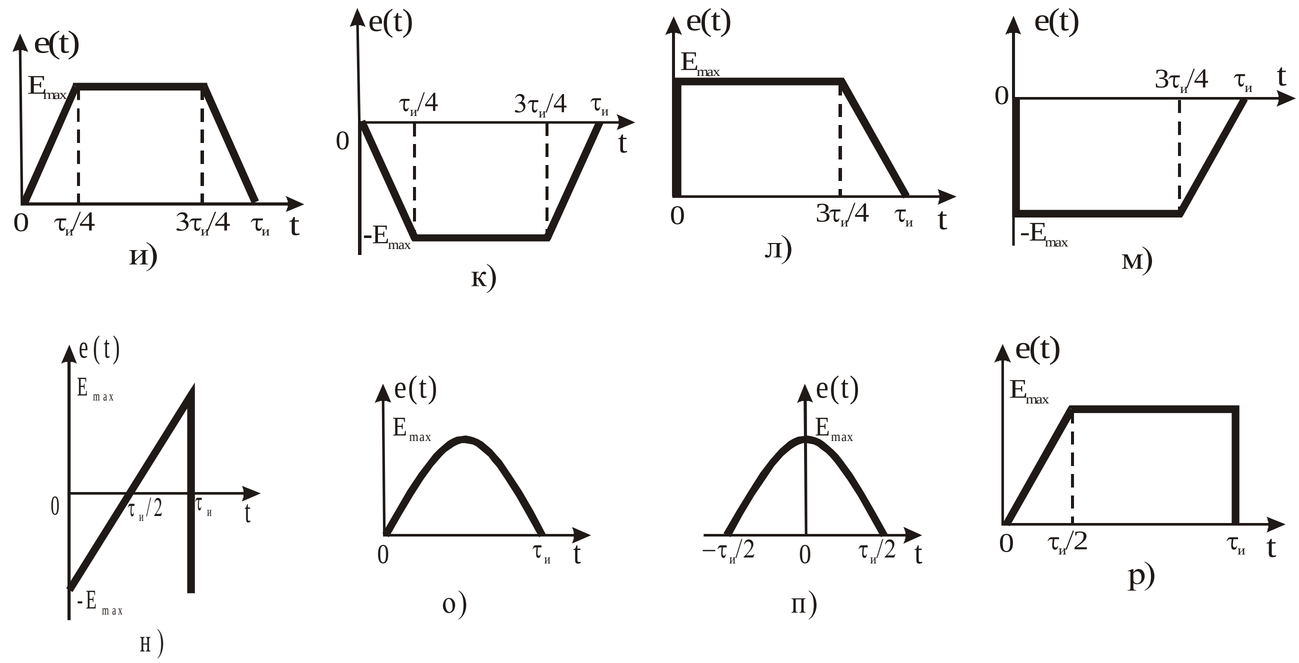


Рисунок 4.1 – Вид сигналов.

Таблица 4.1. Параметры сигналов.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигналы	а, в	б, г	д, е	ж, и	з, к	л, м	н, р	о, п	а, р	б, п
E_{max}, В	5, 10	2, 2	1, 1	4, 4	5, 5	2, 4	2, 2	2, 4	6, 8	1, 1
$t_и$, мкс	2, 2	4, 2	4, 2	2, 2	10, 10	4, 8	4, 4	8, 8	20, 20	4, 4

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Сигналы	в, о	г, н	д, м	е, л	ж, к	з, и	а, д	б, е	в, ж	г, з
E_{max}, В	4, 2	2, 2	2, 4	2, 1	10, 10	1, 1	4, 4	1, 2	10, 10	2, 2
$t_и$, мкс	4, 4	6, 6	8, 8	10, 10	12, 12	16, 16	20, 20	24, 24	12, 24	16, 32

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Сигналы	и, н	м, р	а, о	б, з	в, д	к, м	г, е	г, н	и, м	а, б
E_{max}, В	1, 1	4, 4	2, 2	4, 2	1, 1	10, 5	4, 2	1, 1	5, 5	4, 4
$t_и$, мкс	8, 8	12, 12	4, 4	2, 4	4, 2	50, 50	10, 10	4, 4	4, 4	10, 10

Методические указания к выполнению практического задания

Корреляционный анализ сигналов используется для количественного определения взаимодействия сигналов друг с другом во временной области. Исследуемые сигналы должны иметь локализованный во времени импульсный характер. Автокорреляционная функция (АКФ) представляет собой степень отличия сигнала u(t) и его смещенной во времени копии u(t-τ):

$$B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t-\tau) \cdot dt \qquad (4.1).$$

При τ=0 автокорреляционная функция равна энергии сигнала.

АКФ представляет собой симметричную кривую с центральным положительным максимумом. В зависимости от вида сигнала АКФ может иметь как монотонно убывающий, так и колеблющийся характер.

Для различия сигналов u(t) и v(t) как по форме, так и по взаимному расположению на оси времени используется взаимокорреляционная функция (ВКФ):

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v(t-\tau) \cdot dt \qquad (4.2).$$

ВКФ служит мерой «устойчивости» ортогонального состояния при сдвигах сигналов во времени. ВКФ не является четной функцией и не всегда достигает максимального значения при τ=0.

Под интервалом корреляции понимается временной сдвиг сигнала относительно исходного, в пределах которого автокорреляционная или взаимокорреляционная функции отличны от нуля. В качестве интервала корреляции может использоваться временной промежуток, в пределах которого корреляционная функция, взятая по модулю, больше некоторого минимального значения.

Практическое занятие № 5

Тема: Сигналы с ограниченным спектром.

Время необходимое для выполнения практического задания – 6 часов.

Необходимое оборудование: Компьютерный класс, отвечающий требованиям техники безопасности.

Необходимое программное обеспечение: Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio.

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Задан сигнал (таблица 5.1).
3. Разработать программное обеспечение для исследования сигналов с ограниченным спектром.
4. Определить эффективную ширину спектра данного сигнала.
5. Рассчитать отсчетные значения этого сигнала, необходимые для его однозначного восстановления.
6. Восстановить сигнал по его отсчетным значениям.
7. Построить график исходного сигнала, диаграмму полученных отсчетных значений, график восстановленного сигнала.
8. Сделать выводы по работе.

Таблица 5.1. Параметры сигнала

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигналы (рисунок 3.1)	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
E_{max}, В	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
$t_и$, мкс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Сигналы (рисунок 3.1)	л	м	н	о	п	р	а	б	в	г
E_{max}, В	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
$t_и$, мкс	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Сигналы (рисунок 3.1)	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о
E_{max}, В	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$t_и$, мкс	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Методические указания к выполнению практического задания

Любой сигнал имеет бесконечный спектр. Однако, как правило, существует эффективная ширина спектра ($\omega_в$), в пределах которой передается основная мощность сигнала. Определяется эффективная ширина спектра с использованием теоремы Парсеваля (3.6). Эффективная ширина выбирается исходя из потери не более 1% энергии сигнала (3.7).

Сигнал с ограниченным спектром может быть представлен в виде набора дискретных отсчетных значений сигнала, взятых через равные промежутки времени $\Delta\tau = 1/(2 \cdot f_в) = \pi/\omega_в$.

Произвольный сигнал s(t) с ограниченным спектром может быть разложен в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot Sc_k(t;\omega_в) \qquad (5.1),$$

где c_k – коэффициенты обобщенного ряда Фурье; $Sc_k(t;\omega_в)$ – k-ая отсчетная функция, совокупность которых образует базис Котельникова. $Sc_k(t;\omega_в)$ вычисляется по следующей формуле:

$$Sc_k(t;\omega_в) = \sqrt{\frac{\omega_в}{\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega_в \cdot (t - k \cdot \pi/\omega_в))}{\omega_в \cdot (t - k \cdot \pi/\omega_в)} \qquad (5.2).$$

Коэффициенты обобщенного ряда Фурье вычисляются о следующей формуле:

$$c_k = \left(s(t), Sc_k(t;\omega_в)\right) = \sqrt{\frac{\omega_в}{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \frac{\sin(\omega_в \cdot (t - k \cdot \pi/\omega_в))}{\omega_в \cdot (t - k \cdot \pi/\omega_в)} \cdot dt \qquad (5.3).$$

Зная спектральную плотность S(ω) заданного сигнала s(t) и используя обобщенную формулу Рэлея, можно найти коэффициенты разложения через интеграл по частотному спектру:

$$c_k = \sqrt{\frac{\omega_в}{\pi}} \cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\omega_в}^{\omega_в} S(\omega) \cdot \exp\left[j \cdot k \cdot \pi \cdot \omega/\omega_в\right] \cdot d\omega \right\} \qquad (5.4).$$

Мгновенное значение сигнала s(t) в k-ой отсчетной точке $t_k = k \cdot \pi/\omega_в = k/(2 \cdot f_в)$:

$$s_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\omega_в}^{\omega_в} S(\omega) \cdot \exp\left[j \cdot k \cdot \pi \cdot \omega/\omega_в\right] \cdot d\omega \qquad (30).$$

Тогда ряд Котельникова имеет вид:

$$s(t) = \sum s_k \cdot \frac{\sin(\omega_в \cdot (t - k \cdot \pi/\omega_в))}{\omega_в \cdot (t - k \cdot \pi/\omega_в)} \qquad (31),$$

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_в}} \cdot s_k \qquad (32).$$

Практическое занятие № 6

Тема: Дискретные сигналы.

Время необходимое для выполнения практического задания – 6 часов.

Необходимое оборудование: Компьютерный класс, отвечающий требованиям техники безопасности.

Необходимое программное обеспечение: Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio.

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Дискретный сигнал задан в виде набора из 8 равноотстоящих отсчетов на интервале своей периодичности (значения отсчетов приведены в таблице 6.1).
3. Разработать программное обеспечение для исследования дискретных сигналов.
4. Определить коэффициенты дискретного преобразования Фурье.
5. Восстановить сигнал по полученным коэффициентам.
6. Построить график восстановленного сигнала, на котором отметить в виде точек значения заданных отсчетов.
7. Сделать выводы по работе.

Таблица 6.1. Значения отсчетов дикретного сигнала

№ варианта / **№ отсчета**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	0	0	2	2	1	2	2	2
2	1	1	0	0	2	2	1	2	1	1
3	1	0	1	0	1	1	2	1	0	1
4	1	0	1	0	1	1	2	1	0	0
5	0	1	0	1	1	0	2	2	0	2
6	0	1	0	1	1	0	2	2	0	1
7	0	0	1	1	2	1	1	0	1	1
8	0	0	1	1	2	1	1	0	2	0

№ варианта / **№ отсчета**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	2	1	0	1	1	2	2	2
2	2	1	2	0	1	2	0	2	1	0
3	1	2	1	1	2	2	2	0	0	1
4	2	0	0	2	2	1	1	0	2	1

5	2	0	0	2	2	1	0	1	1	1
6	1	1	1	1	2	2	1	1	0	1
7	2	2	2	0	1	2	0	0	2	0
8	1	0	2	1	0	1	2	0	1	2

№ варианта / **№ отсчета**	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2	1	1	0	1	1	0	1	1	0
2	1	1	2	1	1	0	0	1	2	0
3	2	2	1	2	1	2	1	2	0	0
4	1	2	2	2	2	1	2	0	1	1
5	0	1	1	0	2	1	2	0	1	1
6	1	1	0	1	1	2	1	2	0	1
7	0	0	1	2	1	0	0	1	2	2
8	1	0	0	2	1	1	0	1	1	2

Методические указания к выполнению практического задания

Дискретный сигнал $x_д(t)$ представляет собой последовательность $(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$, отсчетных значений сигнала $x(t)$ в точках $(\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots)$ соответственно. Отсчеты дискретных сигналов берутся, как правило, через равный промежуток времени (интервал (шаг) дискретизации):

$$\Delta = t_m - t_{m-1} = t_{m-1} - t_{m-2} = \ldots \qquad (6.1).$$

Если сигнал задан на отрезке [0, T] (T является периодом для периодического сигнала), то полное число отсчетов

$$N = T/\Delta \qquad (6.2).$$

Сопоставив исходному сигналу $x(t)$ дискретную модель с учетом комплексного ряда Фурье, имеем:

$$x(t) = \Delta \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \delta(t - k \cdot \Delta) = \Delta \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot t/T} \qquad (6.3).$$

Для определения коэффициентов C_n используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$C_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot k/N} \qquad (6.4).$$

Свойства ДПФ:

1. Число коэффициентов C_n равно количеству отсчетов N.
2. Коэффициент C_0 является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \qquad (6.5).$$

3. Если N – четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot (-1)^k \qquad (6.6).$$

4. Если отсчетные значения x_k – вещественные числа, то коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно N/2, образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot (N-n)\cdot k/N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot k/N} = C_n^* \qquad (6.7).$$

Для восстановления сигнала x(t) с ограниченным спектром по заданным отсчетным значениям (x_0, x_1, x_2, …, x_{N-1}) необходимо найти коэффициенты ДПФ (C_0, C_1, C_2, …, $C_{N/2}$) и использовать следующий ряд Фурье:

$$\begin{aligned} x(t) = C_0 + 2\cdot|C_1|\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot t/T+\varphi_1) + 2\cdot|C_2|\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot t/T+\varphi_2) + \\ + \ldots + |C_{N/2}|\cdot\cos(N\cdot\pi\cdot t/T+\varphi_{N/2}) \end{aligned} \qquad (6.8),$$

где φ_i=arg C_i – фазовый угол коэффициента ДПФ.

Для определения отсчетных значений по известным значениям коэффициентов C_n используется обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ):

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot k/N} \qquad (6.9).$$