

Peter Borovanský, KAI, I-18, borovan(a)ii.fmph.uniba.sk

- lineárne patterny a pattern-matching
- množinová notácia (list comprehension)
- funkcionály (funkcie vyšších rádov)
 - map, filter, foldl, foldr, ...

Cvičenie:

funkcionálny štýl (množinová notácia a map, ...)



Porovnávanie so vzorom

(pattern matching)

V hlavičke klauzule, či vo *wherel let* výraze sa môže vystytnúť vzor typu: premenné sa nesmú opakovať (lineárny pattern/term)

konštruktorový vzor, n-tica reverse [] = [] reverse (a:x) = reverse x ++ [a] n+k-vzor ack 0 n = n+1 ack (m+1) 0 = ack m 1ack (m+1) (n+1) = ack m (ack (m+1) n)

wildcards (anonymné premenné)

head
$$(x:_) = x$$

tail $(_:xs) = xs$

@-vzor (aliasing)

@-aliasing (záležitosť efektívnosti)

definujte test, či zoznam [Int] je usporiadaným zoznamom:

```
-- prvé riešenie (ďalšie alternatívy, viď cvičenie):
usporiadany :: [Int] -> Bool
usporiadany [] = True
usporiadany [_] = True
usporiadany (x:y:ys) | x < y = usporiadany (y:ys) | otherwise= False
```

• @ alias použijeme vtedy, ak chceme mať prístup (hodnotu v premennej) k celému výrazu (xs), aj k jeho častiam (y:ys), bez toho, aby sme ho najprv deštruovali a následne hneď konštruovali (čo je neefektívne):

```
-- v tomto príklade xs = (y:ys)
usporiadany''' [: [Int] -> Bool
usporiadany''' [: True
usporiadany''' (x:xs@(y:ys)) = x < y && usporiadany''' xs
```



(množinová notácia)

- pri písaní programov používame efektívnu konštrukciu, ktorá pripomína matematický množinový zápis.
- z programátorského hľadiska táto konštrukcia v sebe skrýva cyklus/rekurziu na jednej či viacerých úrovniach.

Príklad:

zoznam druhých mocnín čísel z intervalu 1..100:

```
[ n*n \mid n < -[1..100] ]  \{ n*n \mid n \in \{ 1, ..., 100 \} \}
```

zoznam druhých mocnín párnych čísel z intervalu 1..100:

```
[ n*n | n < [1..100], even n ] { n*n | n \in \{1, ..., 100\} \& 2|n\}
```

zoznam párnych čísel zoznamu:

```
selectEven xs = [x \mid x < -xs, even x]  { x \mid x \in xs \& even x }
```

Main> selectEven [1..10] [2,4,6,8,10]

```
a_list = [1, '4', 9, 'a', 0, 4]

squared_ints = [e**2 for e in a_list if type(e) == types.IntType]

print squared_ints

# [ 1, 81, 0, 16 ]
```

(množinová notácia)

Syntax

```
[ výraz | (generátor alebo test)* ]
         <generátor> ::= <pattern> <- <výraz typu zoznam (množina)>
                         ::= <booleovský výraz>
         <test>
           zoznam vlastných deliteľov čísla
                                                               Main> factors 24
                          = [ i | i <- [1..n-1], n `mod` i == 0 ]
                                                                [1,2,3,4,6,8,12,24]
         pythagorejské trojuholníky s obvodom <= n</p>
            pyth n = [(a, b, c) | a < -[1..n],
                                  b <- [1..n], -- určite aj efektívnejšie ...
                                  c <- [1..n],
                                  a + b + c <= n,
                                  a^2 + b^2 == c^2
Main> pyth 25
                                  Main>:type pyth
[(3,4,5),(4,3,5),(6,8,10),(8,6,10)]
```

pyth :: (Num a, Enum a, Ord a) => a -> [(a,a,a)]

(matice)

```
malá násobilka:
   nasobilka = [(i, j, i*j) | i < -[1..10], j < -[1..10]]
                                 [(1,1,1),(1,2,2),(1,3,3), ...] :: [(Int,Int,Int)]
   nasobilka' = [[(i,j,i*j) | j < [1..10]] | i < [1..10]]
                                 [[(1,1,1),(1,2,2),(1,3,3),...],
                                  [(2,1,2),(2,2,4),....]
                                  [(3,1,3),...],
                                 ] :: [[(Int,Int,Int)]]
type Riadok = [Int]

    type definuje typové synonymum

type Matica = [Riadok]
i-ty riadok jednotkovej matice
                                                                  [1,0,0,0]
   riadok i n
              = [ if i==j then 1 else 0 | j <- [1..n]]
                                                                  [[1,0,0,0]
                                                                  [0,1,0,0]
  jednotková matica
                                                                  [0,0,1,0]
   jednotka n = [riadok i n | i < -[1..n]]
                                                                  [0,0,0,1]]
```

[[1 if item_idx == row_idx else 0 for item_idx in (0, 3)] for row_idx in (0, 3)]

(matice)

sčítanie dvoch matíc – vivat Pascal ©

```
scitajMatice
                   :: Matica -> Matica -> Matica
scitajMatice m n =
         [ [(m!!i)!!j + (n!!i)!!j | j < - [0..length(m!!0)-1] ]
                               | i <- [0..length m-1] ]
```

transponuj maticu pozdĺž hlavnej diagonály

```
:: Matica -> Matica
transpose
```

transpose [] = []

transpose ([]: xss) = transpose xss

```
transpose ((x:xs): xss) = (x: [h | (h:t) <- xss]): m1 = [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] transpose (vs: [t
                                                           transpose (xs : [t | (h:t) <- xss])
m2 = [[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]
```

XS

XSS

m3 = [[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]

```
scitajMatice m2 m3 = [[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2]]
```

transpose m1 = [[1,4,7],[2,5,8],[3,6,9]]

transpose v Pythone

```
def head(xs):
                              transpose
                                                    :: [[a]] -> [[a]]
 return xs[0]
                              transpose []
                                                     = []
                              transpose ([]: xss) = transpose xss
                              transpose ((x:xs) : xss) = (x : [h | (h:t) <- xss]) :
def tail(xs):
                                                          transpose (xs : [t | (h:t) <- xss])
 return xs[1:]
def transpose(xss):
 if xss == []:
   return []
 else:
   if head(xss) == []:
      return transpose(tail(xss))
   else:
      return [([head(head(xss))] + [ head(row) for row in tail(xss)])]
          transpose([tail(head(xss))]+[ tail(row) for row in tail(xss)])
print(transpose([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]))
```



Python to Haskell

https://youtu.be/9nogAYHmnNw

```
digits = 3 for a in range(10^{(digits-1)}, 10^{(digits-1)} for a in range(10^{(digits-1)}, 10^{(digits-1)} for b in divisors(x): if 10^{(digits-1)} <= b < 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} for b in divisors(x): if 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} for b in divisors(x): if 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} for b in divisors(x): if 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} for b in divisors(x): if 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} for b in divisors(x): if 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} for b in divisors(x): if 10^{(digits-1)} <= x//b < 10^{(digits-1)} for digits: print(a, b, "|", x//b, 10^{(digits-1)} for digits + 1 - a)
```

(permutácie-kombinácie)

vytvorte zoznam všetkých 2ⁿ n-prvkových kombinácií {0,1} pre n=2, kombinácie 0 a 1 sú: [[0,0],[1,0],[1,1],[0,1]] kombinacie 0 = [[]] kombinacie n = [0:k | k <- kombinacie (n-1)] ++ [1:k | k <- kombinacie (n-1)]</p>

vytvorte permutácie prvkov zoznamu

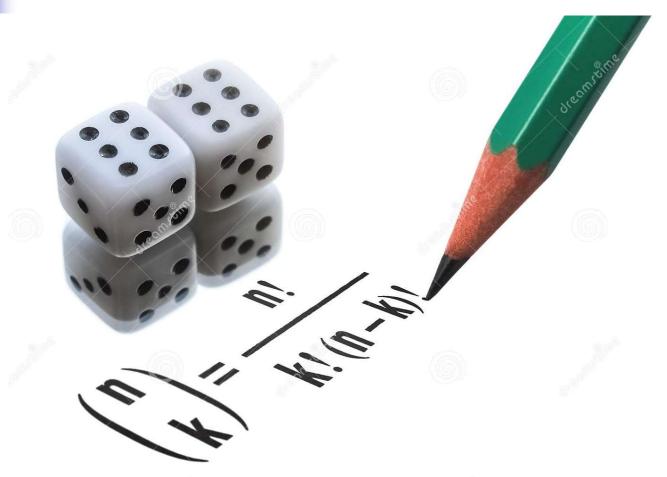
```
perms [] = [[]]
perms x = [ a:y | a <- x, y <- perms (diff x [a]) ]
-- rozdiel' zoznamov x y (tie, čo patria do x a nepatria do y), alebo x\\y
diff x y = [ z | z <- x, notElem z y]</pre>
```

```
Main> :type perms
perms :: Eq a => [a] -> [[a]]
```

Main> :type diff diff :: Eq a => [a] -> [a] -> [a] Main> perms [1,2,3] [[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]]



Zajtra bude



4

List comprehension (quicksort)

quicksort

Main> qs [4,2,3,4,6,4,5,3,2,1,2,8] [1,2,2,2,3,3,4,4,4,5,6,8]

čítajte Prelude.hs

- obsahuje veľa použiteľných definícií
- tak programujú majstri ...



Parametrický polymorfizmus znamená, že jedným predpisom definujeme typ (funkcie, dát) pre nekonečne veľa inštancií typového parametra.

zreťazenie dvoch zoznamov

$$(++)$$
 :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ ys = ys
 $(x:xs)$ ++ ys = x : $(xs++ys)$

vyber prvých n prvkov zo zoznamu

QuickSort

Niekedy však potrebujeme vymedziť vlastnosti typového parametra tak, aby spĺňal isté predpoklady, napr. aby dosadený typ a bolo možné:

- porovnávať na rovnosť (==),
- nerovnosť (<, >),
- či mal definované isté funkcie (napr. show)...

```
Príklad:
quickSort :: (Ord a) => [a] -> [a]

quickSort [] = []
quickSort (b:bs) = quickSort [x | x <- bs, x <= b]
++
[b]
++
quickSort [x | x <- bs, x > b]
```

 spĺňal isté predpoklady sa chápe tak, aby patril do istej triedy implementujúcej požadované funkcie (napr. ==, /=, ...)



Enumerovany dátový typ

(jednoduchá verzia union-type/record-case)

Enum typ zodpovedá lineárnemu usporiadaniu, Int(eger), Bool, Char, Float

data Color = Red | Green | Blue

data Bool = True | False

data Znamka = A | B | C | D | E | Fx deriving (Eq, Show, Ord)

deriving(...) zamená, že požadované funkcie vymenovaných tried sú definované implicitne, syntakticky

Pozná funkcie succ, pred, succ E == Fx, a pred Fx == E Triedy:

- Eq umožní porovnávať na == (/=) hodnoty tohoto typu
- Show umožní vypísať hodnotu tohoto typu
- Ord umožní porovnávať <, > hodnoty tohoto typu

4

Typová trieda Eq

class Eq a where

(==) :: a->a->Bool

(/=) :: a->a->Bool

-- trieda (Eq a) definuje

-- rovnosť pre a,

-- nerovnosť pre a

-- interface

instance Eq Znamka where

A == A = True

B == B = True

-- štandardná implementácia

-- ak použijem

-- **data** Znamka =...deriving (Eq)

C == C = True

. . .

Fx == Fx = True

_ == _ = False

-- implementation

Typová trieda Ord

Ord (je podtrieda Eq):

class Eq a => Ord a where

(<) :: a->a->Bool

(>) :: a->a->Bool

(<=) :: a->a->Bool

(>=) :: a->a->Bool

min :: a->a->Bool

max :: a->a->Bool

-- triedy majú svoju hierarchiu

-- ak chceme niečo porovnávať na

-- <, <=, ... musíme vedieť ==

-- Ord a pozná == a /=

-- a okrem toho aj <, >, ...

instance Ord Znamka where

A < B

= True

B < C

= True

-- defaultná implementácia

-- **data** Znamka =...deriving (Ord)

. . .

Binárny strom -

(trieda Show)

Konštruktory vždy s veľkým začiatočným písmenom

```
data TreeInt = Vrchol TreeInt TreeInt | List Int
-- strom s hodnotami typu Int v listoch
konštanta Vrchol (List 5) (Vrchol (List 6) (List 9)) :: TreeInt

class Show a where -- analógia __str__ z pythonu
show :: a->String -- analógia toString() z javy

instance Show TreeInt where -- vlastná implementácia show pre TreeInt
show (List i) = show i
show (Vrchol left right) = "(" ++ show left ++ "," ++ show right ++ ")"

Main> Vrchol (List 5) (Vrchol (List 6) (List 9))
```

(5,(6,9))Príklad: maximálna hodnota v listoch binárneho stromu typu TreeInt

maxTree :: TreeInt -> Int maxTree (**List** x) = x maxTree (**Vrchol** | r) = max (maxTree |) (maxTree r)

Polymorfický binárny strom

```
konštruktory
```

```
data BTree a = Branch (BTree a) (BTree a) | Leaf a deriving (Show)

konštanta -- strom s hodnotami typu a v listoch stromu

Main> Branch (Leaf 5) (Branch (Leaf 6) (Leaf 9)) -- defaultný show

Branch (Leaf 5) (Branch (Leaf 6) (Leaf 9)) :: BTree Int
```

ak nepoužijeme deriving(show) ani neinštancujeme Show pre BTree, dostaneme:

```
Main> Branch (Leaf 5) (Branch (Leaf 6) (Leaf 9)) 
ERROR - Cannot find "show" function for:
```

 Príklad rekurzívnej funkcie prechádzajúcej BTree a: spoštenie stromu do zoznamu hodnôt v listoch(rekurzia na strome):

```
flat :: BTree a -> [a]
flat (Leaf x) = [x]
flat (Branch left right) = (flat left) ++ (flat right)
```

Binárny vyhľadávací strom

```
-- binárny strom s hodnotami typu t vo vnútorných vrcholoch
                 = Nod (BVS t) t (BVS t) | Nil -- konštruktory Nod, Nil
data BVS t
                   deriving (Show)
konštanta:
                Nod (Nod Nil 1 Nil) 3 (Nod Nil 5 Nil) :: BVS Int
--spĺňa x::BVS t podmienku na binárny vyhľadávací strom?
jeBVS
                         :: BVS Int -> Bool
ieBVS Nil
                         = True -- neefektívne ale priamočiare...
jeBVS (Nod left value right)=(maxBVS left)<=value && value<=(minBVS right)&&
                         jeBVS left && jeBVS right
--zisti maximálnu/minimálnu hodnotu v nejakom strome
maxBVS :: BVS Int -> Int
maxBVS Nil
                            = minBound::Int   -- -\infty = 2147483648
maxBVS (Nod left value right) = max (maxBVS left) (max value (maxBVS right))
```

•

BVS – find a insert

```
--vyhľadávanie v binárnom vyhľadávacom strome:
findBVS :: (Ord t) => t \rightarrow BVS t \rightarrow Bool
findBVS Nil
                                                    = False
findBVS x (Nod left value right) | x == value = True
                                   x < value = findBVS x left
                                    otherwise = findBVS \times right
--vsunutie prvku do binárneho vyhľadávacieho stromu:
insertBVS :: (Ord t) => t -> BVS t -> BVS t
insertBVS \times Nil = Nod Nil \times Nil
insertBVS x bvs@(Nod left value right)
                  x == value = bvs
                  x < value = Nod (insertBVS x left) value right
                  otherwise
                                  = Nod left value (insertBVS x right)
```

--odstránenie bude na domácu úlohu...

Funkcia (predikát) argumentom

učíme sa z Prelude.hs:

zober zo zoznamu tie prvky, ktoré spĺňajú bool-podmienku (test)
 Booleovská podmienka príde ako argument funkcie a má typ (a -> Bool):

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a] > filter even [1..10] filter p xs = [x \mid x <- xs, px] [2,4,6,8,10]
```

ako by to napísal lenivý haskellista: tripivot (x:xs) = (filter (<x) xs, filter (==x) xs, filter (>x) xs)

Funkcia (predikát) argumentom

učíme sa z Prelude.hs:

ber zo zoznamu prvky, kým platí podmienka (test):

```
takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
takeWhile p[] = []
takeWhile p(x:xs) \mid p(x) = x : takeWhile p(xs) = []
| otherwise = []
| takeWhile (>0) [1,2,-1,3,4] = [1,2]
```

vyhoď tie počiatočné prvky zoznamu, pre ktoré platí podmienka:

```
dropWhile :: (a \rightarrow Bool) \rightarrow [a] \rightarrow [a]

dropWhile p [] = []

dropWhile p xs@(x:xs') | p x = dropWhile p xs'

| otherwise = xs \rightarrow dropWhile (>0) [1,2,-1,3,4]

[-1,3,4]
```

Príklad (porozdeľuj)

```
porozdeluj :: (a -> Bool) -> [a] -> [[a]] rozdeli zoznam na
   podzoznamy, v ktorých súvisle platí podmienka daná 1.
   argumentom
porozdeluj(>0)[1,2,0,3,4,5,-1,6,7] = [[1,2],[3,4,5],[6,7]]
porozdeluj(|x->x \mod 3>0)[1..10] =
        [[1,2],[4,5],[7,8],[10]].
   porozdeluj p [] = []
   porozdeluj p xs =
                                  Main> porozdeluj (>0) [1,2,0,0,3,4,-1,5]
        takeWhile p xs:
                                  [[1,2],[3,4],[5]]
           porozdeluj p
              (dropWhile (\x -> (not (p x)))
                (dropWhile p xs))
```

map

funktor, ktorý aplikuje funkciu (1.argument) na všetky prvy zoznamu

```
map :: (a->b) -> [a] -> [b]
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

Príklady:

```
map (+1) [1,2,3,4,5] = [2,3,4,5,6] = [True,False,True,False,True] and (map odd [1,2,3,4,5]) = False = [1, 2, 3] = [1, 2, 3] = [0,0], [1,0], [0,1]] = [0,1],[0,2],[0,3]]
```

Transponuj maticu

(ešte raz)

Haskell – foldr

4321

Haskell – foldl

```
foldl :: (a \rightarrow b \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow [b] \rightarrow a

foldl f z [] = z

foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs

a : b : c : [] -> f (f (f z a) b) c

Main> foldl (+) 0 [1..100]

Main> foldl (\x y->10*x+y) 0 [1,2,3,4]
1234
```

foldl f z

foldr a foldl ešte raz

```
foldl (+) 0 [1,2,3,4]
foldr (+) 0 [1,2,3,4]
```

- foldr max (-999) [1,2,3,4] foldl max (-999) [1,2,3,4]
- foldr (_ -> \y ->(y+1)) 0 [3,2,1,2,4] foldl (\x -> _ ->(x+1)) 0 [3,2,1,2,4]
- rozpoj :: [(a,b)] -> ([a],[b])
 rozpoj = foldr (\(x,y) -> \(xs,ys) -> (x:xs, y:ys)) ([], [])

```
rozpoj [(1,11),(2,22),(3,33)]
([1,2,3],[11,22,33])
```

10

4

5

Vypočítajte

- foldr max (-999) [1,2,3,4] foldl max (-999) [1,2,3,4]
- foldr (_ -> \y ->(y+1)) 0 [3,2,1,2,4] foldl (\x -> _ ->(x+1)) 0 [3,2,1,2,4]
- foldr (-) 0 [1..100] =

$$(1-(2-(3-(4-...-(100-0))))) = 1-2 + 3-4 + 5-6 + ... + (99-100) = -50$$

• foldl (-) 0 [1..100] =

$$(...(((0-1)-2)-3) ... - 100) = -5050$$



Funkcia je hodnotou

[a->a] je zoznam funkcií typu a->a napríklad: [(+1),(+2),(*3)] je [\x->x+1,\x->x+2,\x->x*3]

lebo skladanie fcií je asociatívne:

```
• ((f . g) . h) x = (f . g) (h x) = f (g (h x)) = f ((g . h) x) = (f . (g . h)) x
```

```
    mapf :: [a->b] -> [a] -> [b] -- rovnako dlhé zoznamy mapf [] _ = [] mapf _ [] = [] mapf (f:fs) (x:xs) = (f x):mapf fs xs
```

mapf [(+1),(+2),(+3)] [10,20,30]

[11,22,33]

Kvíz

foldr (:) []
$$xs = xs$$

foldr (:)
$$ys xs = xs++ys$$

foldr??xs = reverse xs

Priemerný prvok

priemer' = uncurry (/) . sumCount'

Ak chceme vypočítať aritmetický priemer (a-priemer) prvkov zoznamu, matice, ... potrebujeme poznať ich súčet a počet. Ako to urobíme na jeden prechod štruktúrou pomocou foldr/foldl ? ...počítame dvojicu hodnôt, súčet a počet:

- priemerný prvok zoznamu priemer xs = sum/count where (sum, count) = sumCount xs $sumCount xs = foldr (\x -> \(sum, count) -> (sum+x, count+1)) (0, 0) xs$
- priemerný prvok matice
 je a-priemer a-priemerov riadkov matice a-priemerom hodnôt matice ?

```
sumCount' :: [[Float]] -> (Float,Float)
sumCount' xs =
foldr (\x -> \(sum, count)-> scitaj (sumCount x) (sum, count)) (0, 0) xs
where scitaj (a,b) (c,d) = (a+c, b+d)

priemer' :: [[Float]] -> Float

sumCount' :: (a->b->c) -> (a,b) -> c
uncurry f (a,b) = f a b
sumCount' xs =
foldr (\x -> \(sum, count) -> c) -> (a,b) -> c
uncurry f (a,b) = f a b
sumCount' xs =
foldr (\x -> \(sum, count) -> c) -> (a,b) -> c
uncurry f (a,b) = f a b
sumCount' xs =
foldr (\x -> \(sum, count) -> c) -> (a,b) -> c
uncurry f (a,b) = f a b
```

curry :: ((a,b) -> c) -> (a->b->c)

curry q a b = q (a,b)