$Experiment6$：具有间断系数的线性扩散方程

杨乐园 PB18010496

问题描述

1. 针对下述具有间断系数的线性扩散方程：

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x, \qquad a(x,t) = \begin{cases} 4.0 & x < 0 \\ 1.0 & x > 0 \end{cases}$$

考虑$Dirichlet$零边值问题，并设真解为:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-4t}\sin x & x \in [-\pi, 0] \\ e^{-4t}\sin(2x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

取网格剖分$J = 21, 41, 81, 161, 321$，网格比为$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.1$。并计算终止时刻为$T = 1.0$时算数平均格式、调和平均格式两种格式的$L^2$误差、$L^\infty$误差以及对应的精度阶，并进行分析。

数值方法

数值格式：

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \mu[a_{j+\frac{1}{2}}^n(v_{j+1}^n - v_j^n) - a_{j-\frac{1}{2}}^n(v_j^n - v_{j-1}^n)]$$

可以数值保持热量内部的局部守恒性质。针对$a_{j+\frac{1}{2}}^n$有如下i两种计算方式：

•算术平均方式：

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(a_j^n + a_{j+1}^n)$$

•调和平均方式：

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = [\frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{a_j^n} + \frac{1-\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{a_{j+1}^n}]^{-1}, \qquad where\ \theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{(x_* - x_j)}{\Delta x}, & x_* \in [x_j, x_{j+1}] \\ \frac{1}{2}, & otherelse \end{cases}$$

数值结果

我们有如下数值求解结果：

•算术平均：

N	L^2误差	收敛阶	L^∞误差	收敛阶
21	0.00910807	——	0.006348770	——

N	L^2误差	收敛阶	L^∞误差	收敛阶
41	0.00464686	1.00586	0.003450060	0.911544
81	0.00237368	0.986595	0.001813090	0.944901
161	0.00120462	0.987363	0.000934317	0.965085
321	0.000607519	0.992033	0.000474821	0.980929

●调和平均：

N	L^2误差	收敛阶	L^∞误差	收敛阶
21	0.00297699	——	0.00182199	——
41	0.000774868	2.01177	0.000484301	1.98039
81	0.000199385	1.99369	0.00012709	1.96484
161	5.02216e-05	2.00711	3.17082e-05	2.02097
321	1.24393e-05	2.02248	7.52981e-06	2.08352

我们可以明显的看到，算术平均格式收敛阶为1，而调和平均格式收敛阶为2，可见，调和平均格式给出的数值效果更佳。具体表现为：

$$2(\frac{1}{a_j^n}+\frac{1}{a_{j+1}^n})^{-1}-\frac{1}{2}(a_j^n+a_{j+1}^n)=O((\Delta x)^2)$$

代码

其中数值求解代码与绘图代码参见附件！