1. $A^TA=\begin{pmatrix}35&44\\44&56\end{pmatrix}$ $\quad A^Tb=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$ $\quad x=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}3\\0\\0\\2\end{pmatrix}\frac{1}{5}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot a+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot b \qquad a,b\in\mathbb{R}$

3. $w=\frac{x-y}{\|x-y\|}=\frac{1}{5\sqrt{10}}(0,5,0,0,-3,-4)^T$

$$\Rightarrow H=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&0&&&15&20\\&&1&&&\\&&&1&&\\&15&&&16&-12\\&20&&&-12&9\end{pmatrix}\frac{1}{25}$$

4. $\alpha=13/\sqrt{2}$ or $-13/\sqrt{2}$

$\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\7\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{26}$ or $\begin{pmatrix}-17\\-7\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{26}$

5. $\Leftrightarrow\begin{cases}-\bar{s}x_1+cx_2=0\\c^2+|s|^2=1\end{cases}$ $\qquad$ 不妨 $\|x\|_2\neq0$

只要一个解，故让 $c\in\mathbb{R}$

$x_1\neq0$ 时 $\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{|x_1|}{\|x\|_2}\\ s=\frac{x_2}{\|x\|_2}\cdot\operatorname{sgn}x_1\end{cases}$ $\qquad$ $x_1=0$ 时 $\Rightarrow\begin{cases}c=0\\s=1\end{cases}$

6. 仅需考虑如何把 e_1 变成 x （则可将 $x\to e_1\to y$）

1) 找 $G_1\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 使 $G_1\begin{pmatrix}x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}x_{n-1}^{(1)}\\0\end{pmatrix}$

k) 找 $G_k\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 使 $G_k\begin{pmatrix}x_{n-k}^{(k-1)}\\x_{n-k+1}^{(k-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}x_{n-k}^{(k)}\\0\end{pmatrix}$

实际的 $\tilde{G}_k=\begin{pmatrix}I_{n-k-1}&&\\&G_k&\\&&I_{k-1}\end{pmatrix}$

7. 取 $\alpha=\frac{\|x\|_2}{\|y\|_2}$

$\Rightarrow (I-ww^T)\frac{x}{\|x\|_2}=\frac{y}{\|y\|_2}$

$\Rightarrow w=\dfrac{\frac{x}{\|x\|_2}-\frac{y}{\|y\|_2}}{\left\|\frac{x}{\|x\|_2}-\frac{y}{\|y\|_2}\right\|_2}$

8. $L^{(0)}=L=(l_{ij}^{(0)})_{m\times n}$ $\qquad$ $i<j$ 时 $l_{ij}^{(0)}=0$

1) 找 H_1 使 $H_1\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\l_{nn}^{(0)}\\\vdots\\l_{mn}^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{array}{l}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\*\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}n-1\\\\m-n\end{array}\end{array}$ $\qquad$ 注意 $H_1=\begin{pmatrix}I_{n-1}&\\&*\end{pmatrix}$ 不影响前 $n-1$ 行

记 $H_1L^{(0)}=L^{(1)}$ 仍下三角

k) 找 H_k 使 $H_k\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\l_{n-k+1,n-k+1}^{(k-1)}\\\vdots\\l_{m,n-k+1}^{(k-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\l_{n-k+1,n-k+1}^{(k)}\\l_{n-k+2,n-k+1}^{(k-1)}\\\vdots\\l_{n,n-k+1}^{(k-1)}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}n-k\\\\\\\\m-n\end{array}$ $\qquad$ 注：H_k 仅影响第 $n-k+1$ 行与 $n+1\sim m$ 行

把 $n-k+1$ 列的 $n+1\sim m$ 行
送给 $n-k+1$ 行的对角元

记 $H_kL^{(k-1)}=L^{(k)}$ 仍下三角
且不影响第 $n-k+2\sim n$ 列
因为这些列 H_k 影响的全为 0

9. $U\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\qquad$ $m\geq n$ 时由 8. 有可找到 $H\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 正交使 $HL=\begin{pmatrix}L_1\\0\end{pmatrix}_{m-n}$ $\qquad$ L_1 下三角可逆

$\Rightarrow \|Lz-Pb\|_2^2=\left\|\begin{pmatrix}L_1\\0\end{pmatrix}z-HPb\right\|_2^2=\|L_1z-s\|_2^2+\|t\|_2^2\geq\|t\|_2^2$

其中 $HPb=\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\begin{array}{l}n\\m-n\end{array}$

其中 $z=L_1^{-1}s$ 取等

$\|Ax-b\|_2=\|LUx-Pb\|_2=\|Lz-Pb\|_2$ 同上

10. $A=P\Sigma Q$ (SVD) $\qquad$ $\Sigma=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_k,0,\cdots,0)_{m\times n}$ $\qquad$ $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_k>0$

$\|Ax-b\|=\|\Sigma(Qx)-P^Tb\|_2$ $\qquad$ $Y:=QXP$ $\qquad$ $z:=Qx$ $\qquad$ $c:=P^Tb$

$AXA=P\Sigma(QXP)\Sigma Q$ $\qquad$ $AXA=A\Leftrightarrow\Sigma Y\Sigma=\Sigma$

$(AX)^T=AX\Leftrightarrow\Sigma Y=(\Sigma Y)^T$

$\|Ax-b\|=\|\Sigma z-c\|$

$x=Xb\Leftrightarrow z=Yc$

故不妨 $A=\begin{pmatrix}\sigma_1&&&\\&\ddots&&\\&&\sigma_k&\\&&&0\end{pmatrix}_{m\times n}:=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}A_1&\\&0\end{pmatrix}&\begin{array}{l}k\\m-k\end{array}\\\begin{array}{cc}k&n-k\end{array}&\end{array}$ $\qquad$ $\det A_1\neq0$

$A^TAXb=A^Tb\Rightarrow\begin{pmatrix}\sigma_1^2&&&\\&\ddots&&\\&&\sigma_k^2&\\&&&0\end{pmatrix}_{n\times n}Xb=\begin{pmatrix}\sigma_1&&&\\&\ddots&&\\&&\sigma_k&\\&&&0\end{pmatrix}_{n\times n}b$

设 $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\begin{array}{l}k\\n-k\end{array}$

$X=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}&\begin{array}{l}k\\n-k\end{array}\\\begin{array}{cc}k&n-k\end{array}&\end{array}$ $\qquad\Rightarrow A_1(X_1b_1+X_2b_2)=b_1$

b_1,b_2 任意 $\Rightarrow\begin{cases}A_1X_2=0\\A_1X_1=I_k\end{cases}$

$AXA=\begin{pmatrix}A_1X_1A_1&\\&0\end{pmatrix}$ $\qquad$ 即证 $A_1X_1A_1=A_1\Leftrightarrow A_1X_1=I_k$ 已证

$(AX)^T=\begin{pmatrix}X_1^TA_1^T&0\\X_2^TA_1^T&0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $AX=\begin{pmatrix}A_1X_1&A_1X_2\\&\end{pmatrix}$

由 $A_1X_2=0$，$A_1X_1=I_k=(A_1X_1)^T$ 可得

不考虑上三角部分形状

11. ① 将 A 变为 $\begin{pmatrix}*&&*\\ *&\ddots&\\&\ddots&\ddots\\&&*\quad *\end{pmatrix}$

第一步：找 $\tilde{G}_1\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 使

$\tilde{G}_1\begin{pmatrix}\beta_{n-1}\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\beta_n^2+\beta_{n-1}^2}\\0\end{pmatrix}$

令 $G_1=\begin{pmatrix}I_{n-2}&\\&\tilde{G}_1\end{pmatrix}$

则 $A^{(1)}=G_1A=\begin{pmatrix}\alpha_1&&&&*\\\beta_2&\ddots&&&\\\vdots&&\alpha_{n-2}&&\\\beta_{n-2}&&&&\\ *&&&*&\\0&&&*&*\end{pmatrix}$

会在下三角的 $(n,n-1)$ 引入非 0

$A^{(1)}(n-1,1)=\sqrt{\beta_{n-1}^2+\beta_n^2}$

但消去了 $(n,1)$ 元

第 k 步：找 $\tilde{G}_k\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 使

$\tilde{G}_k\begin{pmatrix}\beta_{n-k}\\\sqrt{\beta_n^2+\cdots+\beta_{n-k+1}^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\beta_n^2+\cdots+\beta_{n-k}^2}\\0\end{pmatrix}$

令 $G_k=\begin{pmatrix}I_{n-k-1}&&\\&\tilde{G}_k&\\&&I_{k-1}\end{pmatrix}$

则 $A^{(k)}=G_kA^{(k-1)}$ 如下，在 $A(s+1,s)$ 引入非 0 但消去了 $A(s+1,1)$
$(s=n-k,\cdots,n-1)$

$$\begin{array}{r}1\\n-k-2\\\\1\\k\\\\\end{array}\begin{pmatrix}\alpha_1&&&&\\\beta_2&\alpha_2&&&*\\\vdots&&\ddots&&\\\beta_{n-k-1}&&&\alpha_{n-k-1}&\\ *&&&*&\\0&&&*&\ddots\\\vdots&&&&\ddots\\0&&&&*\quad *\end{pmatrix}$$

② 经过①后 A 化为 $A^{(n-1)}=\begin{pmatrix}*&&*\\ *&\ddots&\\&\ddots&\ddots\\&&*\quad *\end{pmatrix}$ 记为 $B^{(0)}:=(b_{ij}^{(0)})_{n\times n}$

再由上而下消去次对角线

k 步：找 $\tilde{H}_k\in\mathbb{R}^{2\times2}$ $\qquad$ $\tilde{H}_k\begin{pmatrix}b_{kk}^{(k-1)}\\b_{k+1,k}^{(k-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{kk}^{(k)}\\0\end{pmatrix}$

记 $H_k:=\begin{pmatrix}I_{k-1}&&\\&\tilde{H}_k&\\&&I_{n-k-1}\end{pmatrix}$ $\qquad$ 则 $H_kA^{(k-1)}=A^{(k)}=\begin{pmatrix}*&&&\\&\ddots&&*\\&&*&\\&&*&\ddots\\&&&*\quad *\end{pmatrix}$ k 行

k 列

n-1 步后化为 $\begin{pmatrix}*&&*\\&\ddots&\\&&*\end{pmatrix}$ 上三角 R

$Q^T=(H_{n-1}\cdots H_1)(G_{n-1}\cdots G_1)$

$Q^TA=R\Rightarrow A=QR$

12. $x\in\mathcal{X}_{LS}\Rightarrow\frac{d}{d\alpha}\|A(x+\alpha w)-b\|_2^2\Big|_{\alpha=0}=0$

$\Rightarrow 2w^TA^T(Ax-b)=0\qquad\forall w\in\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A^T(Ax-b)=0\qquad\square$