

基于幅角原理对多值函数单值分支的探索

数学科学学院

PB18010496 杨乐园

序言

作为最后一个实验，出于对上学期所学的再一次理解，我选择了大二下学的十分不好的复分析来探索。

在复分析中有一个难点，复变函数的多值性，这也是其与实函数的本质区别之一，我们知道造成多值性的原因则来自于幅角的多值性。而掌握幅角以及幅角原理是学习复分析这门课的重中之重

在符号计算软件课程中，我们学到了函数 $\text{Arg}[z]$ ，但这只是给出了辐角主值 $\arg[z] \in (-\pi, \pi]$ ，远远不能揭示其一般性。下面利用一些计算来生成一般意义下幅角，并探讨幅角原理以及相关演示。

实验内容

首先，我们给出一个理解并应用幅角的例子——Machin 恒等式，这也是我之所以选这个实验的原因之一：

由于

$$(5-i)^4(1+i) = (24-10i)^2(1+i) = 956-4i,$$

两边取幅角，得

$$\arg(5-i)^4 + \arg(1+i) = \arg(956-4i)$$

从而有

$$-4 \arctan \frac{1}{5} + \frac{\pi}{4} = -\arctan \frac{4}{956} = -\arctan \frac{1}{239}$$

整理即得 Machin 恒等式：

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

这个恒等式在一次数学竞赛时让给出推导，如果想不到幅角及其应用很难有什么思路。

Machin 曾用该等式计算 π ，可以通过简单的计算便能快速获得 π 的很高精度的估计，这是由于有如下 Talyor 展开式：

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

当 $x = \frac{1}{5}$ 和 $x = \frac{1}{239}$ 时级数的收敛速度非常之快。实际上，只需利用级数的前 70 项便可得到 π 的精确到小数点后 100 位的近似值。

（特注：如果想看具体近似值可以参看我的第二篇 π 相关近似计算的小论文）

（再注：由这里，不知道老师是否还记得当初问的用 $x + \sin x$ 给出 π 的加速估计，我们可以类似上面的展开推导过程给出证明，并且利用 Mathematica 给出了实验证明，这里就不再展示了。）

接下来，我们来看复数乘法的运算过程：设 $z_k = r_k e^{i\theta_k} (k = 1, 2)$ ，其中 $\theta_k (1, 2)$ 为辐角主值。由运算

$$\bar{z}_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1))$$

得到 $\text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ ，几何意义为以 z_1 、 z_2 为邻边的平行四边形的面积， $\arg[\bar{z}_1 z_2] = \theta_2 - \theta_1$ ，其几何意义为 z_1 、 z_2 的夹角。因此只要 $\theta_2 - \theta_1$ 不超过辐角主值范围，便可以通过 $\text{Arg}[\text{Conjugate}[z_1] z_2]$ 计算夹角。

First Part: 考察连续变化中的点的幅角的变化。

基于螺旋线，给出沿曲线连续变化的点的动态幅角增量。

程序代码如下：

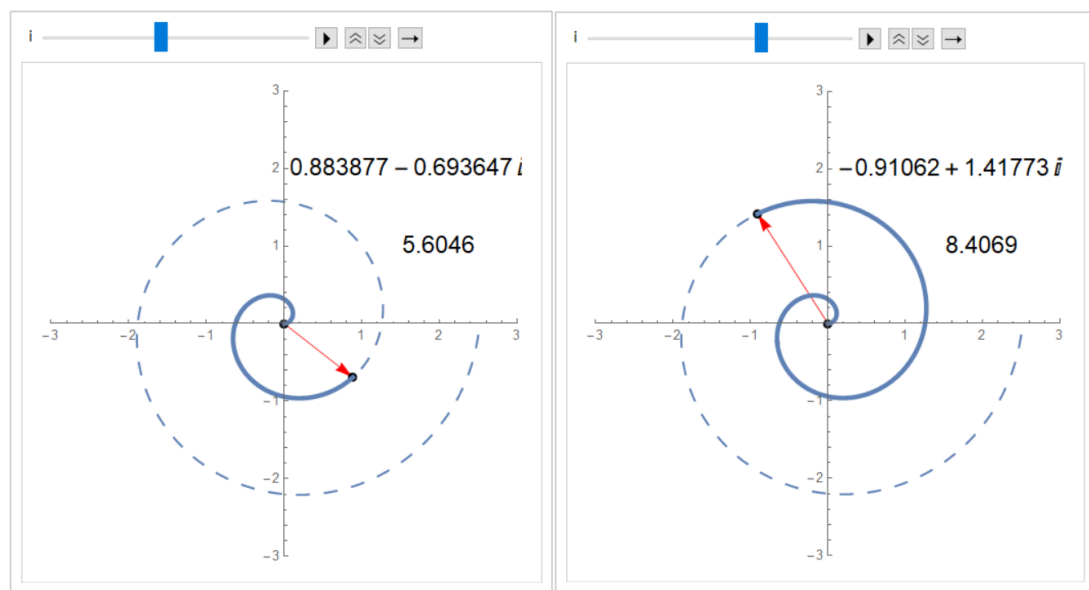
```
a=0;  
b=4 Pi;  
n=1000;  
f[t_]:=1/5 t E^(I t);
```

```

Animate[Show[Graphics[{Red, Arrow[{0, 0}, {Re[f[a+(i+1) (b-
a)/n]], Im[f[a+(i+1) (b-
a)/n]]}], Graphics[{PointSize[0.02], Point[{Re[f[a+(i+1) (b-
a)/n]], Im[f[a+(i+1) (b-
a)/n]], FontSize->18, Text[f[a+(i+1) (b-
a)/n], {1.6, 2}]], Graphics[{PointSize[0.02], Point[{0, 0}], FontSize->18,
Text[For[j=0; s=0, j<=i, j++, s=s+Arg[f[a+(j+1) (b-a)/n] Conjugate[f[a+j
(b-
a)/n]]]/N]; s, {2, 1}]], ParametricPlot[{Re[f[t]], Im[f[t]]}, {t, a, a+(i+
1) (b-
a)/n}, PlotStyle->{Thickness[0.01]}], ParametricPlot[{Re[f[t]], Im[f[t]]
}, {t, a, b}, PlotStyle->{Dashing[0.03]}], Axes->True, PlotRange->{{-
3, 3}, {-3, 3}}, AspectRatio->Automatic], {i, 0, n-1}]

```

程序运行截图：（由于这是动态演示，只截取两个图片）



可以看到，当复数从原点出发沿曲线连续变化到 $z_1 = 0.883877 - 0.693647i$ 时幅角增量为 $\theta_1 = 5.6046$ ，再连续变化至 $z_2 = -0.91062 + 1.41773i$ 时幅角增量为 $\theta_2 = 8.4069$

Second Part: 多值函数的单值分支的确定。

幅角函数 $\omega = \text{Arg } z$ 在给定割缝区域上单值分支的选取。

为了探讨多值函数的单值分解，选取单值区域为除去正实轴的割缝平面

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z | 0 \leq \text{Re } z < +\infty, \text{Im } z = 0\}$$

接下来，我试着验证，只要取定D内一点（如 $4+3i$ ）的幅角，D内其他点的幅角均可由该点出发沿D内的曲线连续变化得到，并且，重要的是，这与路径的选取无关。

程序代码如下：

```

q = 4 + 3 I;
a = 0;
b = 2 Pi;
n = 1000;

```

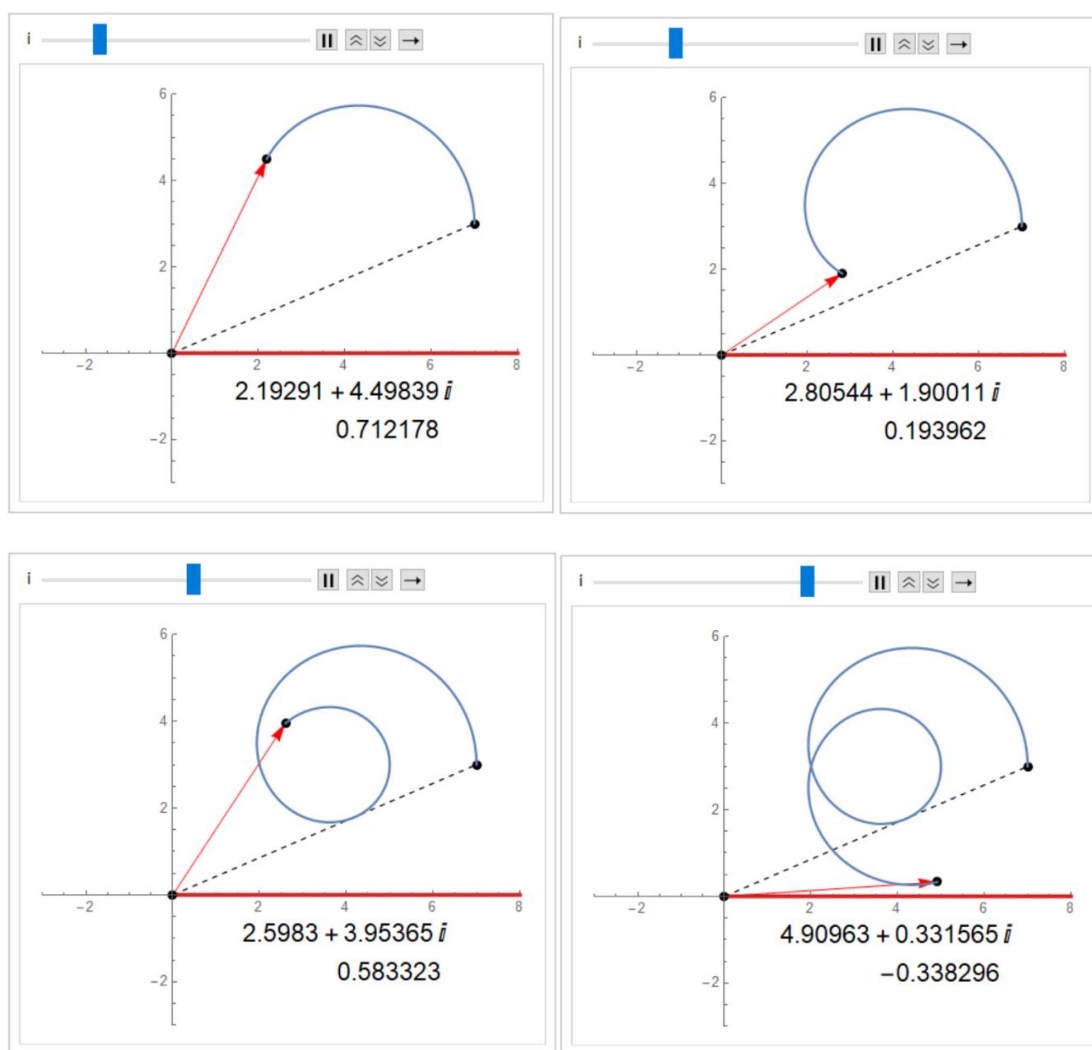
$f[t_] := 2 (E^{(I t)})^2 + E^{(I t)} + q;$

```

Animate[Show[Graphics[{Dashed, Line[{0, 0}, {Re[f[0]], Im[f[0]]}]}], Graphics[{Thickness[0.008], Red, Line[{0, 0}, {8, 0}]}], Graphics[{
Red, Arrow[{0, 0}, {Re[f[a + (b - a)/n (i + 1)], Im[f[a + (b - a)/n (i + 1)]]}]}], Graphics[{PointSize[0.02], Point[{Re[0], Im[0]}, Point[{Re[f[0]],
Im[f[0]]}], Point[{Re[f[a + (b - a)/n (i + 1)], Im[f[a + (b - a)/n (i + 1)]]}], {FontSize -> 18, Text[f[a + (b - a)/n (i + 1)], {Re[q], -
0.3 Im[q]}], Text[For[j = 0; s = 0, j <= i, j++, s = s + Arg[f[a + (b - a)/n (j +
1)] Conjugate[f[a + (b - a)/n j]]] // N;], s, {Re[q] + 1, -
0.6 Im[q]}]}], ParametricPlot[{Re[f[t]], Im[f[t]]}, {t, a, a + (b - a)/n (
i + 1)}, PlotStyle -> {Thickness[0.005]}], Axes -> True, PlotRange -> {{-
3, 8}, {-3, 6}}, AspectRatio -> Automatic], {i, 0, n - 1}]

```

程序运行截图：（由于这是动态演示，只截取四个图片）



通过Mathematica运行结果可以看到，开始时幅角逐渐增加，当点到幅角从 $z_1 = 2.19291 + 4.4983i$ 时幅角增量为 $\theta_1 = 0.712178$ ，然后幅角逐渐减少，到达 $z_2 = 2.80544 + 1.90011i$ 时幅角增量为 $\theta_2 = 0.193962$ ，再依次连续变化后，到达点 $z_3 = 2.5983 + 3.95365i$ 时幅角增量为 $\theta_3 = 0.583323$ ，进一步，当点到达 $z_4 = 4.90963 + 0.331565i$ 时幅角增量为 $\theta_4 = -0.338296$ 。经过动态画面以及相

应数值显示，我们可以看到，在D内沿任意闭曲线一周再回到起始点，幅角没有变化。因此，知，D内任一点的幅角均可由给定一点的幅角确定，这样就得到多值函数 $\omega = \text{Arg } z$ 在割缝平面内D内的一个单值分支。

幅角原理：设区域D的边界C是一条可求长的简单闭曲线，若函数 $f(z)$ 在闭区域 \bar{D} 内除有限个点以外是解析的，且 $f(z)$ 在C上不等于零，则有

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

其中N表示 $f(z)$ 在C内的零点的个数，P表示 $f(z)$ 在C内极点的个数（包括重数）， $\Delta_C \arg f(z)$ 表示函数 $f(z)$ 的幅角在 z 沿C的正向绕行一周时的全部改变量，在李皓昭老师教学中，称公式的右端为 $\Gamma = f(C)$ 关于坐标原点的回转次数。

幅角原理揭示了函数在区域上零点和极点个数与函数沿区域边界幅角变化值之间的关系。

接下来通过两个例子阐释幅角原理

Third Part: 解析函数的幅角原理演示。

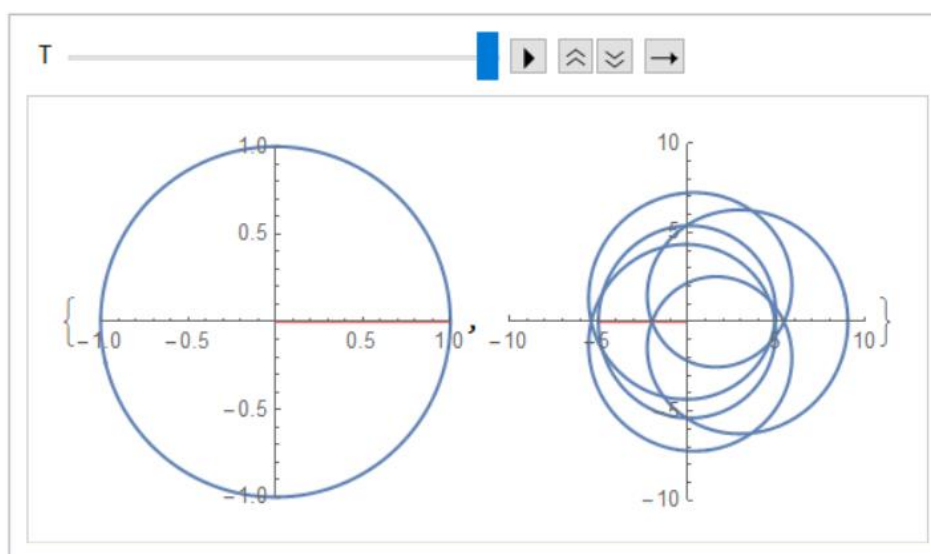
考虑函数 $f(z) = z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ ，当 z 沿单位圆 $|z| = 1$ 逆时针方向绕行一周幅角的变化。

程序代码如下：

```
f[z_]:= z^8 - 5 z^5 - 2 z + 1;
```

```
Animate[ {Show[Graphics[ {RGBColor[1, 0, 0], Line[{{0, 0}, {Cos[t], Sin[t]}]} /. t->T]]], ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, T}], PlotRange->{{-1, 1}, {-1, 1}}, AxesOrigin->{0, 0}, Axes->True], Show[Graphics[ {RGBColor[1, 0, 0], Line[{{0, 0}, {Re[f[E^(I T)]], Im[f[E^(I T)]}]} ]], ParametricPlot[{Re[f[E^(I t)]], Im[f[E^(I t)]]}, {t, 0, T}], PlotRange->{{-10, 10}, {-10, 10}}, AxesOrigin->{0, 0}, Axes->True}], {T, 0, 2 Pi}]
```

程序运行结果如图：（由于是动图，只截取最后结果图片）



通过动画的生动演示，可以较为清楚地看到，当左侧 z 沿单位圆逆时针方向绕行一周时， $f(z)$ 正好逆时针绕原点5周，所以 $f(z)$ 在单位圆内有5个零点。

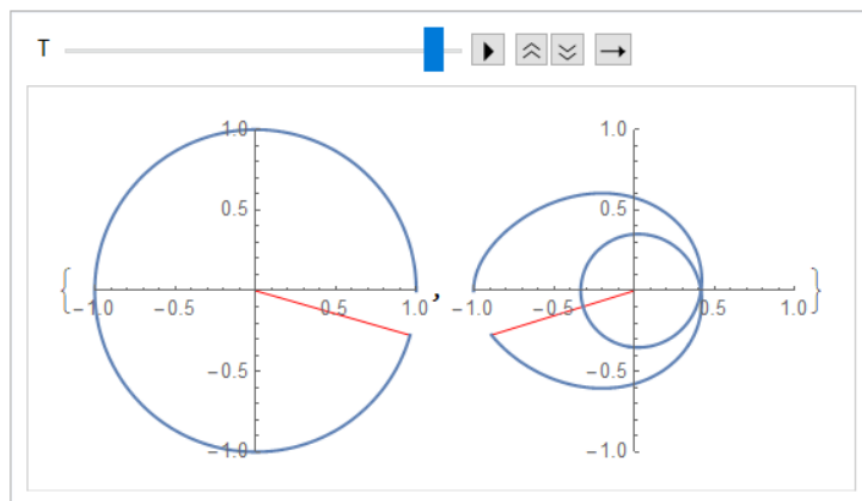
Fourth Part: 有理函数的幅角原理演示。

考虑函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$ ，当再沿单位圆 $|z| = 1$ 逆时针方向绕行一周幅角的变化。

程序代码如下所示：

```
f[z_]:=1/(z^2 (z-2));
Animate[ {Show[Graphics[ {RGBColor[1, 0, 0], Line[{0, 0}, {Cos[t], Sin[t]}] /. t->T}]], ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, T}], PlotRange->{{-1, 1}, {-1, 1}}, AxesOrigin->{0, 0}, Axes->True],
Show[Graphics[ {RGBColor[1, 0, 0], Line[{0, 0}, {Re[f[E^(It)]}, Im[f[E^(It)]]} /. t->T}]], ParametricPlot[{Re[f[E^(It)]}, Im[f[E^(It)]]}, {t, 0, T}], PlotRange->{{-1, 1}, {-1, 1}}, AxesOrigin->{0, 0}, Axes->True}], {T, 0, 2 Pi}]
```

程序运行结果如图：（由于是动图，只截取最后结果图片）



这时可以看到，当 z 沿单位圆 $|z| = 1$ 逆时针方向绕行一周时， $f(z)$ 绕原点顺时针方向绕行两周，所以此时 $\Delta_C \arg f(z) = -4\pi$ ，因此，

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot (-4\pi) = -2 = 0 - 2$$

其中0表示 $f(z)$ 在单位圆内无零点，2表示 $f(z)$ 在单位圆内有两个极点，特别的， $z=0$ 为二重极点。

实验总结

上学期的复分析学习过程中，就是对多值函数的“多值性”与幅角原理的本质与相关细节理解不到位，造成最终学习效果不好成绩不佳。而通过这次实验对幅角原理的模拟与单值分支的选取模拟，深刻认识到“幅角”的特殊之处。

作为幅角原理的一个十分重要应用，Rouche定理给出了判断函数在给定区域零点个数的方法：设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在有界区域 D 及其边界 C 上均解析，且在边界 C 上有

$$|g(z)| < |f(z)| \quad (z \in C)$$

则 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)$ 在 C 内有相同的零点。通过对上述示例的相关计算，发现实验模拟效果完全正确。