偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2019-09

1 偏微分方程的初边值问题

本章介绍偏微分方程的初边值问题的有限差分方法的构造（包括边界条件的处理），及其基本概念和理论，以及边界条件的近似

1.1 边界条件的处理

考虑常系数的扩散方程的适定的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2}, & x \in [0,1] \\ u_x(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

$\Rrightarrow$：在 $x = 0$ 处，给出的是第二类边界条件（Neumann B.C.）；在 $x = 1$ 处，给出的是第一类边界条件（Dirichlet B.C.）。

剖分：空间采用等距剖分，即：

$$\Delta x = \frac{1}{n_x};\ x_j = j\Delta x,\ j = 0, \cdots, n_x;\ x_0 = 0, x_{n_x} = 1$$

时间剖分：$\Delta t = c_{fl}\Delta x^2$

PDE逼近采用FTCS方法（计算区域内部），得：

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(v_{j+1} - 2v_j^n + v_{j-1}^n); & j = 1, \cdots, n_x - 1 \\ v_j^0 = \cos\frac{\pi x_j}{2}, & j = 0, \cdots, n_x \\ v_{n_x}^n = 0, & n = 0, \cdots \end{cases} \qquad (*)$$

下面主要讨论 $x = 0$ 处第二类边界条件 $u_x(0,t) = 0$ 的数值近似。

一、 基于微分形式第二类边界条件的近似

二、 基于积分形式第二类边界条件的近似

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t), & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2}, & x \in [0,1] \\ u_x(0,t) = g(t),\ u(1,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

1.2 人工边界

考虑常系数的对流方程的适定的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0\text{（入流边界条件）} \end{cases} \tag{$*$}$$

或

$$\begin{cases} u_t - u_x = 0, & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,1] \\ u(1,t) = 0, & t \geq 0\text{（入流边界条件）} \end{cases} \tag{$**$}$$

以 $(**)$ 为例，常见的“人工边界条件”是：

- 利用计算区域内部点的值构造多项式，进行相应的外插逼近；如：在 $x = 0$ 处，$v_0^n = v_1^n$ 或线性外插：$v_0^n = 2v_1^n - v_2^n$
- 利用过出流边界点的特征线是指向计算区域外部的特点，进行局部迎风设置：$v_0^{n+1} = v_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_1^n - v_0^n)$

作业（第二本参考书）：P18: 1.5.9, 1.5.10

1.3 初边值问题的有限差分方法的基本概念和理论

本节的内容适用于相应的高维问题

1. 收敛性：

   初值问题与初边值问题的差分格式收敛的最大区别：

   在考虑的初值问题的有该差分格式的按模收敛性质时，当我们确定较小的 Δx 或 Δt 时，对于 $-\infty < j < \infty$，我们工作的空间仍然是一个序列空间（无限维空间）。

   若我们考虑初边值问题在 $[0,1]$ 区间上的差分格式，对于每种空间剖分，都分别是一个有限维问题。空间步长 Δx 越小，矢量就越大，空间的维数就越大。这并不是说我们不能衡量两者之间的差异。问题在于没有“一个好的空间”（如：固定维数的空间），在那儿，可以显示差分格式的收敛性。

   有几种方法可以解决这个问题。最常用的是：选取 Δx 以一种有序的方式逼近0，并在合适的空间定义模收敛。将给定的有界区域（如：$[0,1]$）分别用空间步长 Δx^k 做一系列均匀（这儿“均匀”不是必须的；只是用“均匀网格”证明已经足够困难了！）剖分（$k=1,2,\cdots$），且当 $k\to\infty$ 时，$\Delta x^k\to 0$。令 X^k 表示包含用空间步长 Δx^k 做均匀剖分涉及的解的有限维线性模空间，则其维数为 n_x^k（有时是 $n_x^k\pm 1$ 维，取决于边界条件），且 $\Delta x^k=\frac{1}{n_x^k}$，数值解为 $V^{n,k}=\{v_0^{n,k},\cdots,v_{n_x^k}^{n,k}\}\in X^k$。可以在 X^k 空间上定义差分格式的收敛性，$||\cdot||_k$ 表示该空间的一个模。

   Definition 1.1 若 $\forall k\to\infty$ 时，$\Delta x^k\to 0$ 的均匀剖分序列 $\{\Delta x^k\}_{k=1}^{\infty}$，当 $\forall k\to\infty$ 时，$\Delta t\to 0$，$n\Delta t\to t$，有：

$$||U^{n+1,k} - V^{n+1,k}||_k \to 0$$

则称差分方法 $V^{n+1,k} = Q \cdot V^{n,k} + \Delta t \cdot G^{n,k}$ 是（无条件）收敛的。其中 $U^{n,k} = \{u_1^{n,k}, \cdots, u_{n_x^k}^{n,k}\} \in X^k$ 是源*PDE* 准确解在格点值的矢量。

若 $||U^{n+1,k} - V^{n+1,k}||_k = O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$，则称该差分方法关于模 $||\cdot||_k$ 是 (p,q) 阶收敛的。

Example 1.1

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow:$

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x^k)^2}(v_{j+1} - 2v_j^n + v_{j-1}^n); & j = 1, \cdots, n_x^k - 1 \\ v_j^0 = f(x_j), & j = 0, \cdots, n_x^k \\ v_0^{n+1} = v_{n_x^k}^{n+1} = 0, & n = 0, \cdots \end{cases}$$

试证：当 $0 \leq \sigma = \frac{\Delta t}{(\Delta x^k)^2} \leq \frac{1}{2}$ 时，该方法是收敛的

大作业（第二本参考书）：P48: HW2.2.2