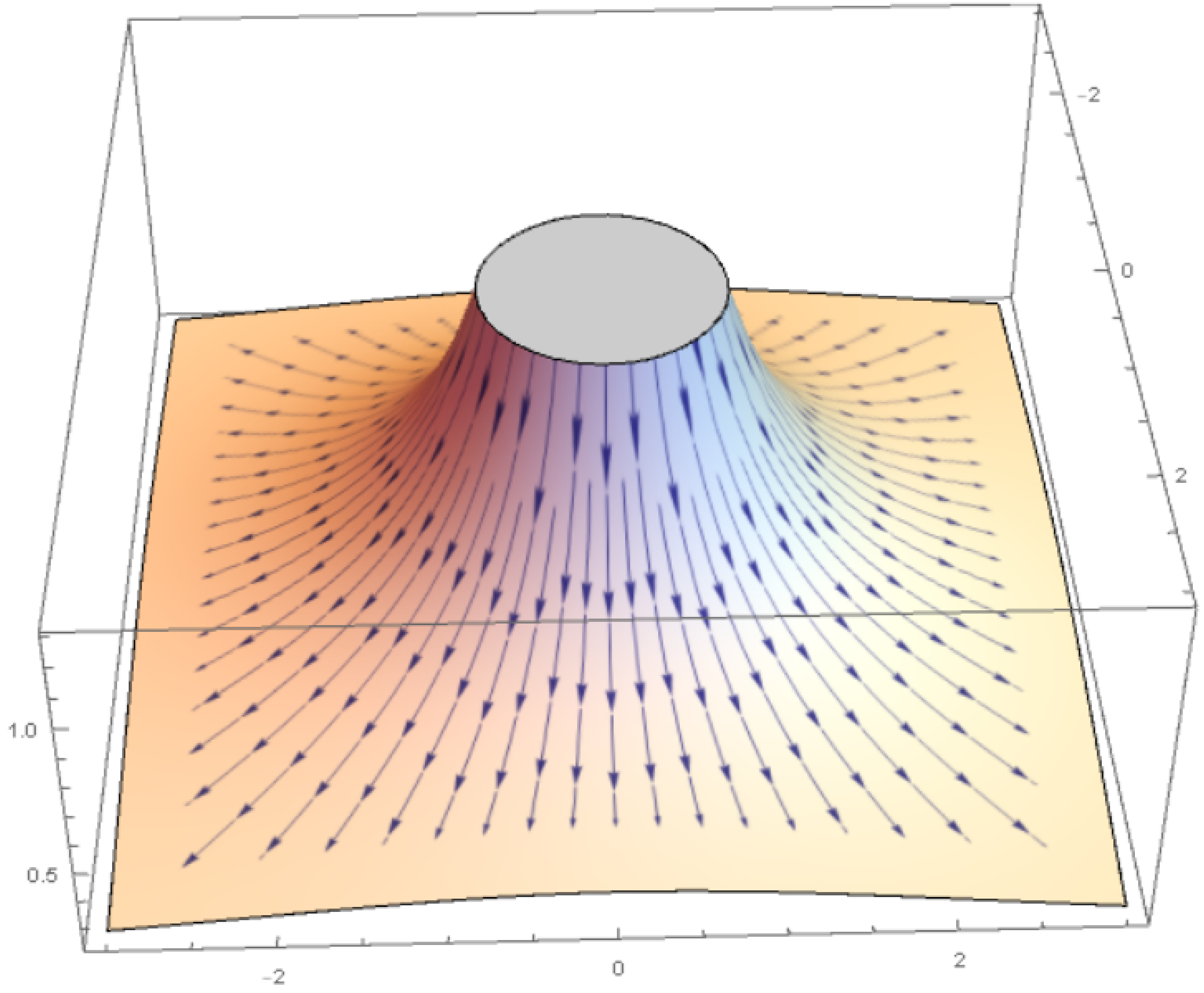
电磁场中带电质点运动轨迹的模拟

- 目录
  - 基本电场，电势场的模拟
  - 环形电流，通电直导线产生的磁场模拟
  - 单个质点在简单电磁场中的运动轨迹
  - 两个带电质点在静电力作用下的轨迹
  - 电磁学课本习题4.28质点运动的模拟与探究
  - 静电透镜的模拟与探究

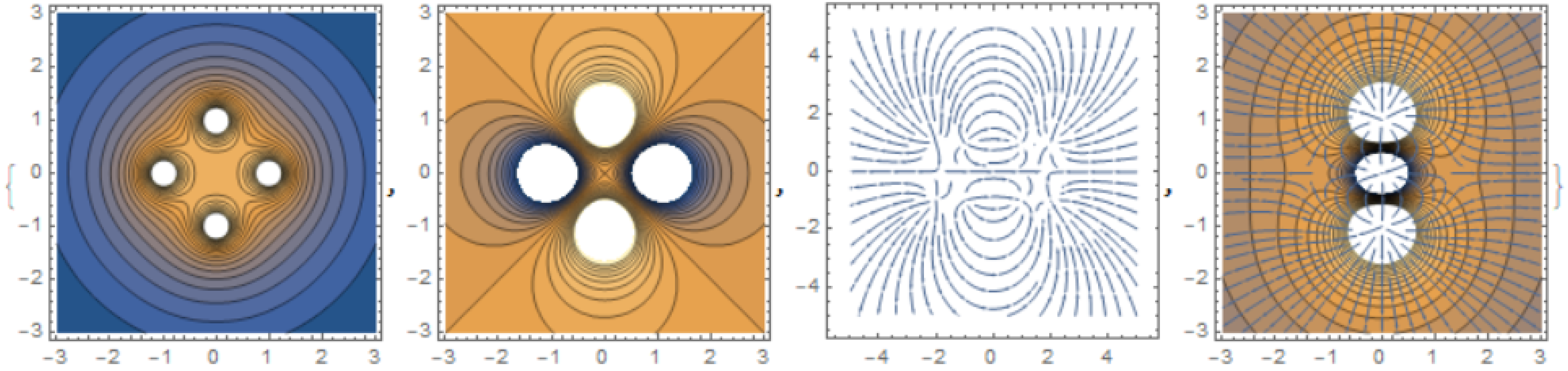
通过Mathematica软件的帮助，可以把不易直接想象的问题通过图像动画的形式呈现，利于加深对电磁学规律的认识。本文就是基于Mathematica强大的解微分方程组的能力，直接求出带电质点在电场中的运动轨迹，在直观轨迹图的帮助下，进行两个问题的探究：1，关于习题4.28的质心轨迹探究，2，关于静电透镜的模拟与焦距规律的探究。

基本电场，电势场的模拟

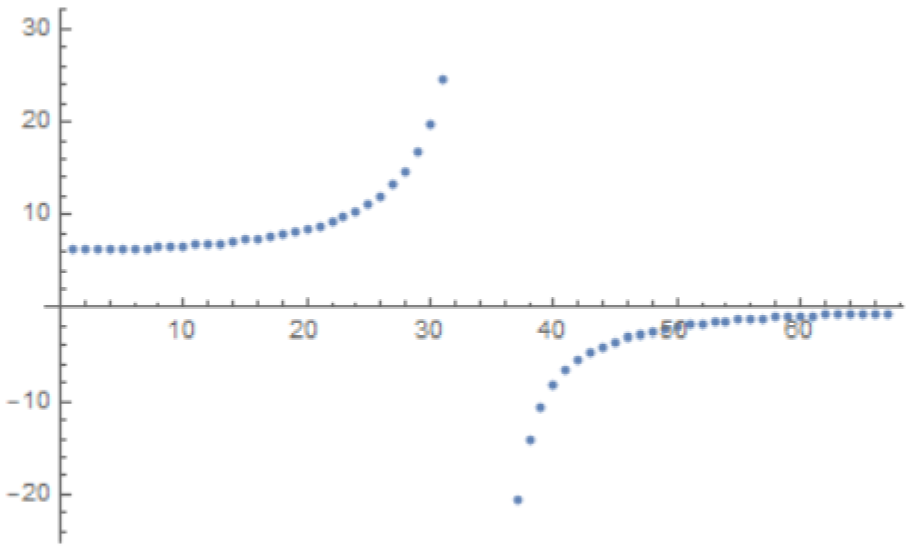
Out[ ]=

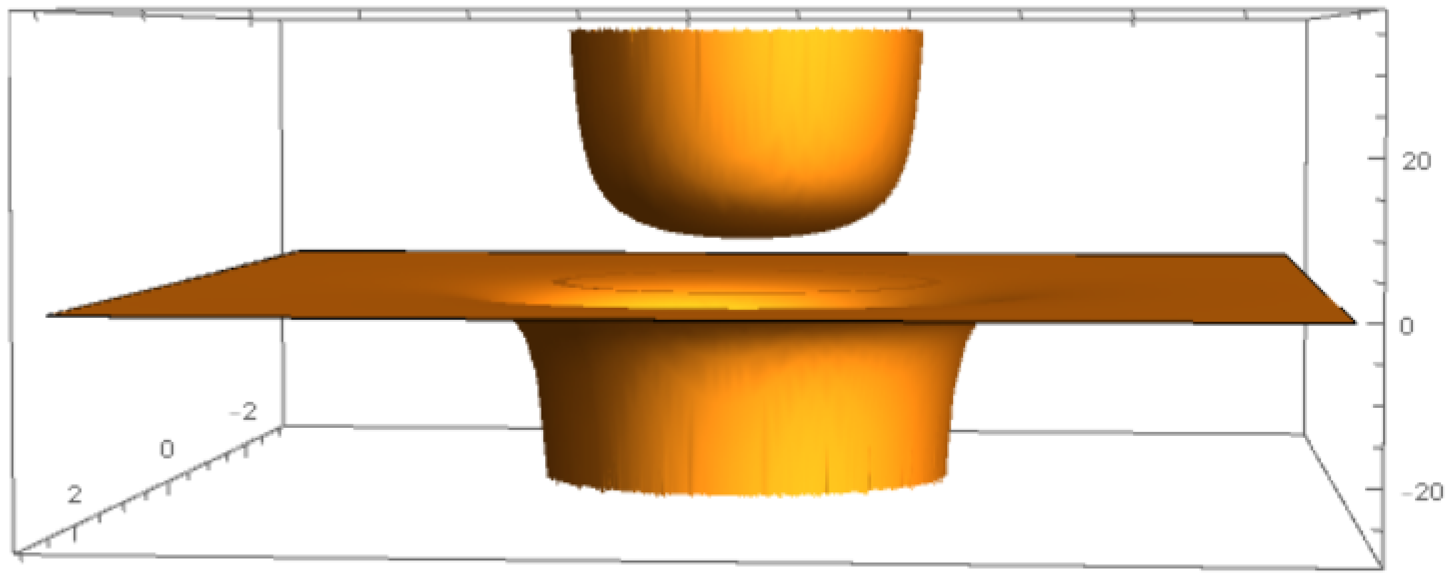


这是点电荷形成的电场，高度代表电势。通过叠加原理，可以展示出几个离散的点电荷在空间中形成的电场，当点电荷位置具有对称性，带电量相等或相反时，电场也会具有很好的对称性。

Out[ ]= 

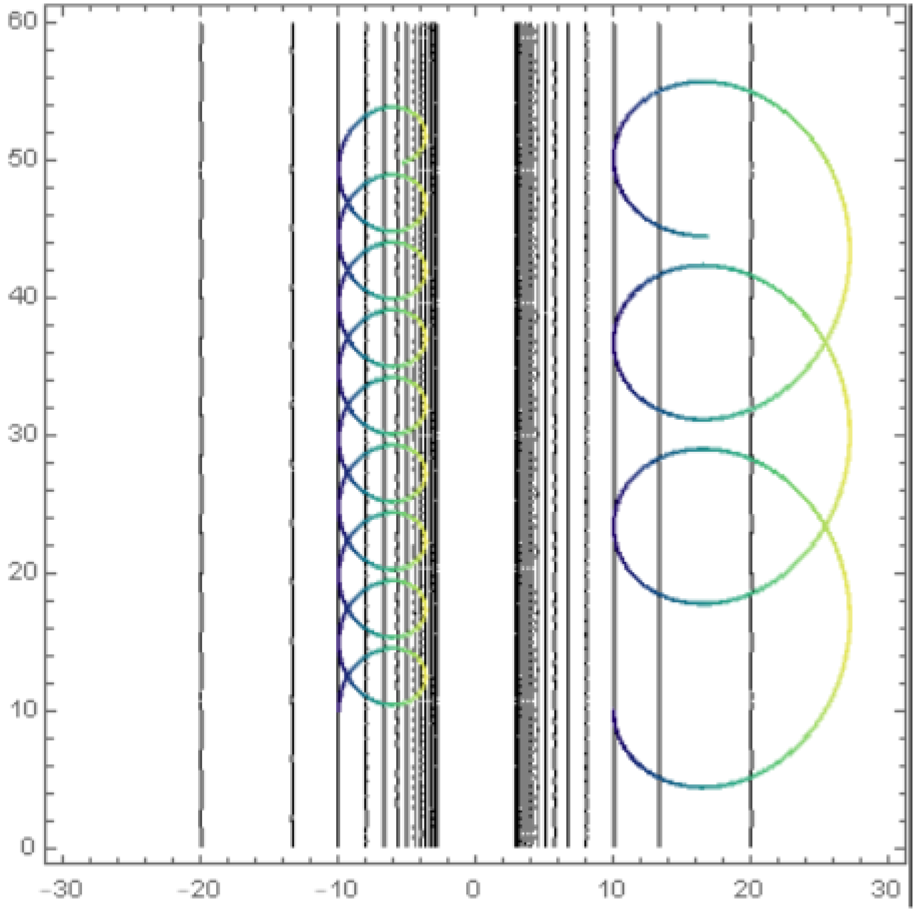
■ 环形电流，通电直导线产生的磁场模拟





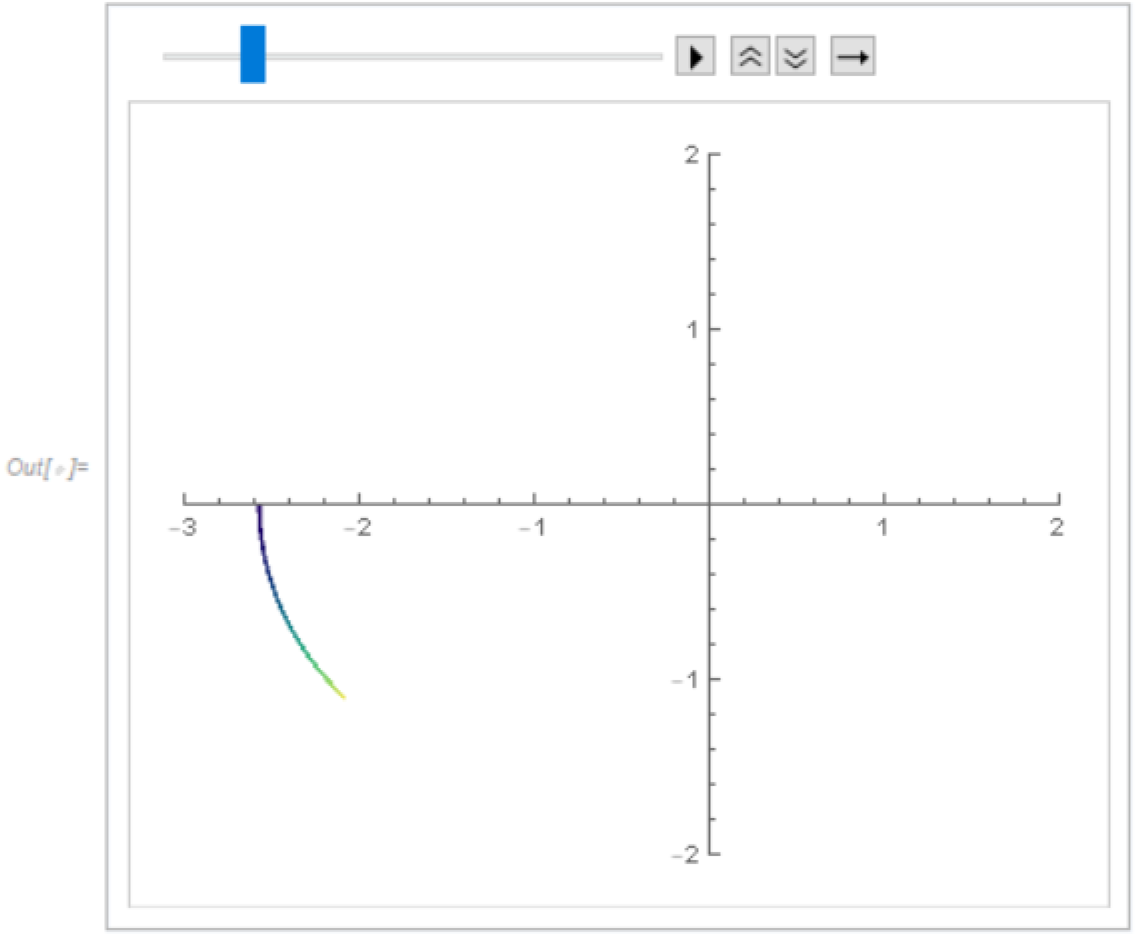
只对环形电流所在平面的磁感应强度进行模拟，B都垂直于纸面，所以可以用高度代表磁感应强度的大小和方向。图一是随着与圆心距离的变大，磁感应强度的变化，图二则对整个平面的磁感应强度进行了直观的模拟，从两个图可以看出，环形电流在其围住的内部平面上的磁感应强度B是近似相等的，而且远大于外侧。据此也可以得到，通电的直螺线管，在其内部产生的磁场可以近似认为是均匀的，而且远大于在外部形成的磁场。

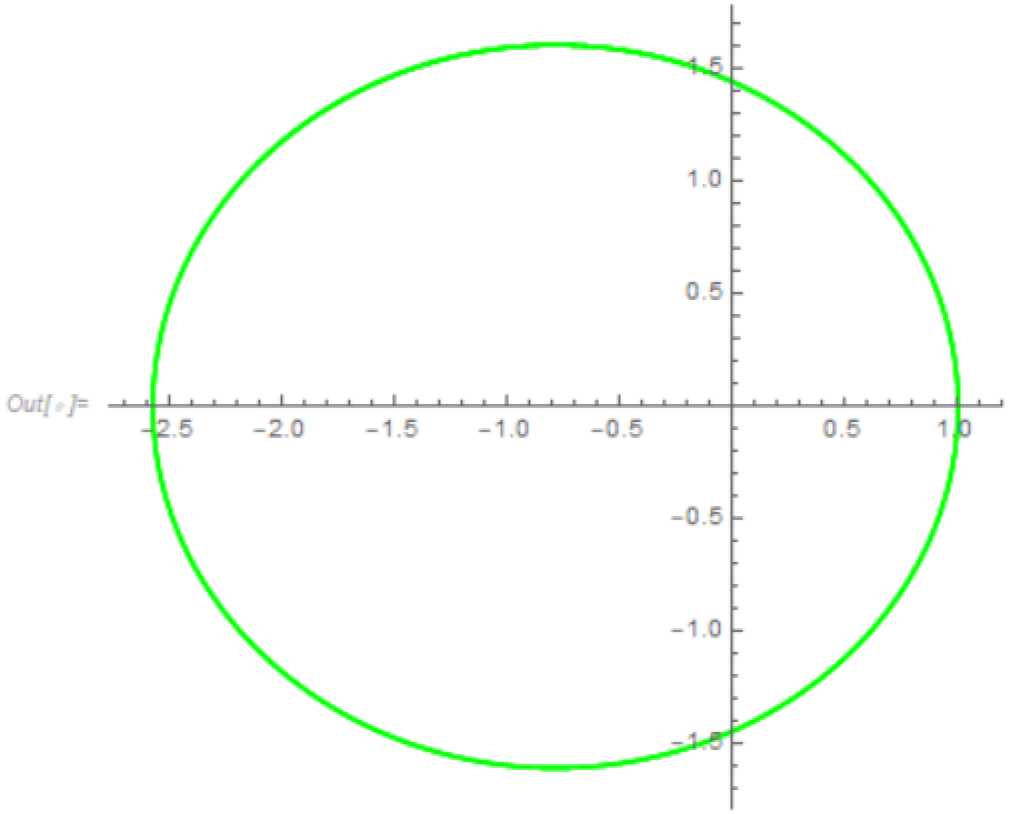
Out[ ]=



这是通电直导线在同平面上磁感应强度的分布图，还演示了两个带电粒子仅具有平面初速度时，轨迹呈螺旋型。

■ 单个粒子在简单电磁场中的运动轨迹

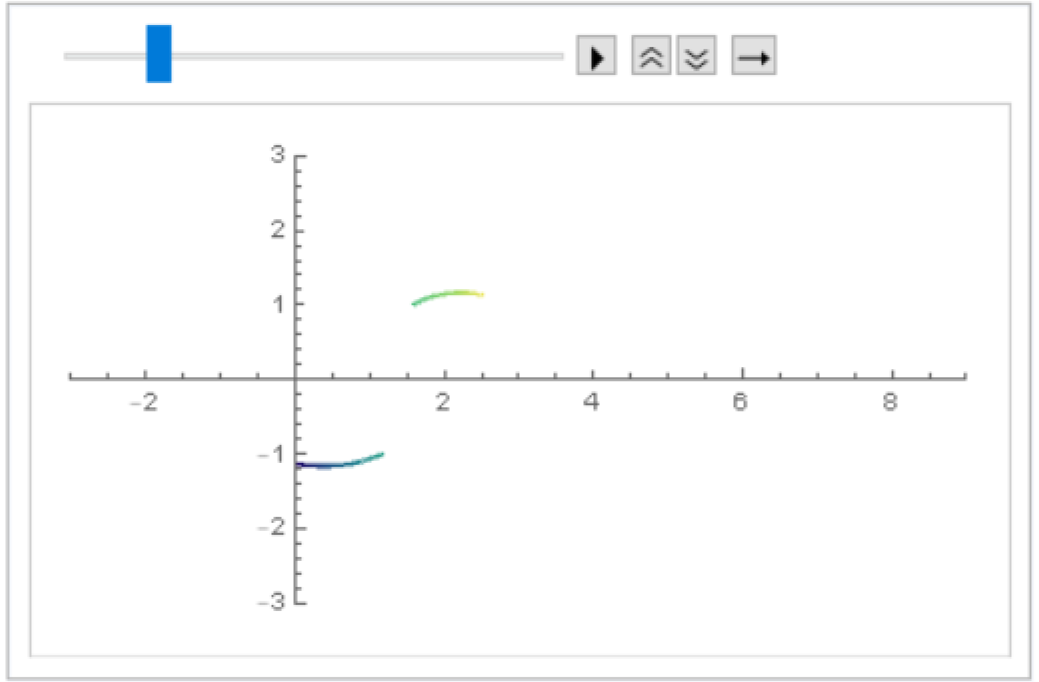




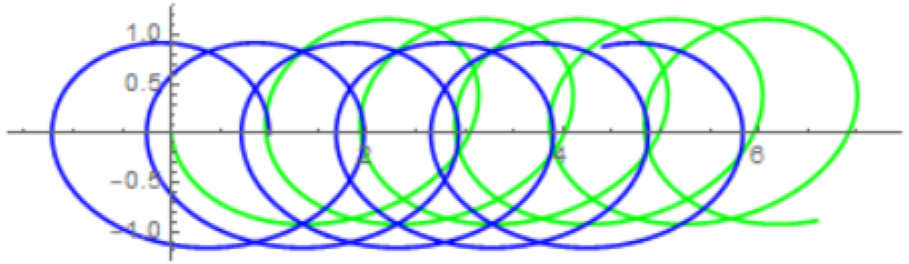
上图模拟的是，固定点电荷形成的电场中，试探电荷绕其运动的动画和轨迹，轨迹为椭圆，类似地也可以得到双曲线，抛物线。

两个带电粒子在静电力作用下的轨迹

Out[∘]=

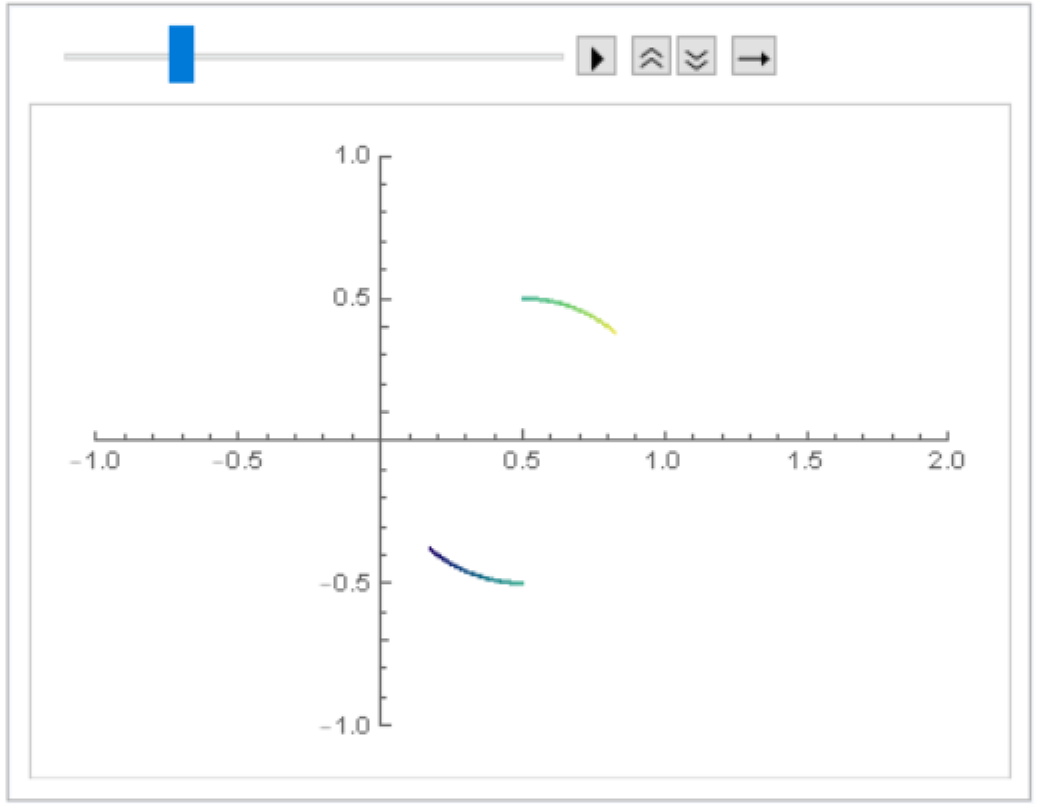


Out[∘]=

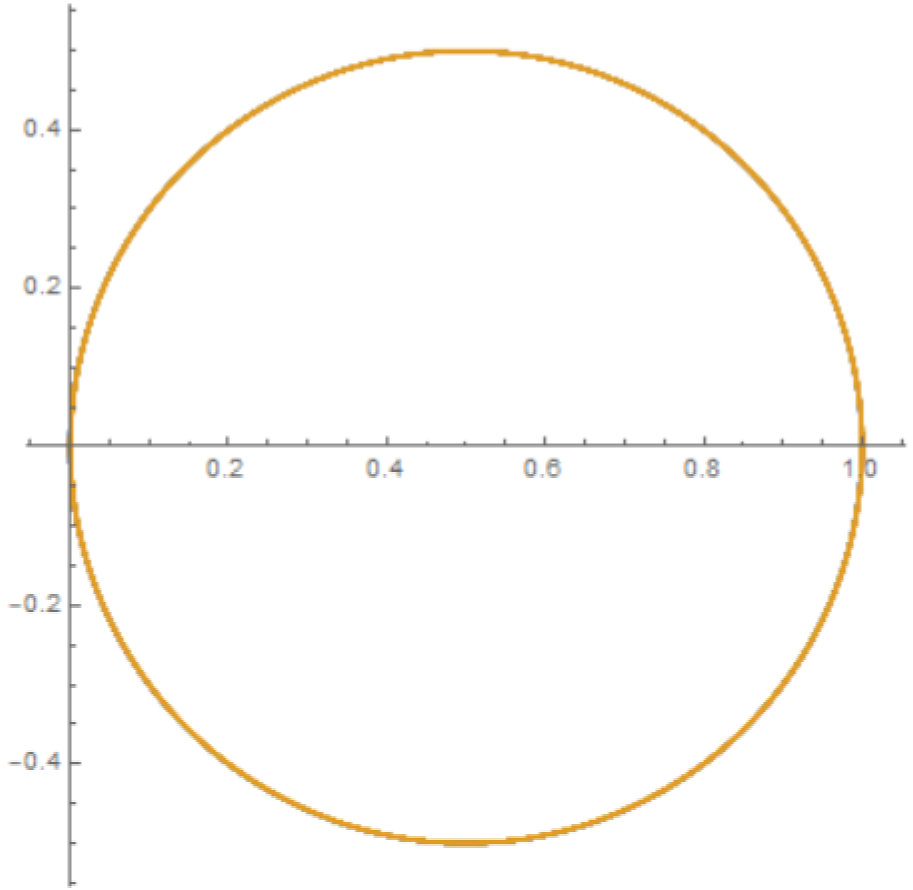


这是无电磁场时，在特定的初速度下，两个等量异号粒子受到相互作用力的运动轨迹，呈螺旋形。
可以适当地调整它们的位置和初速度，可以使它们的质心位置不变，也就是做匀速圆周运动。

Out[ ]=

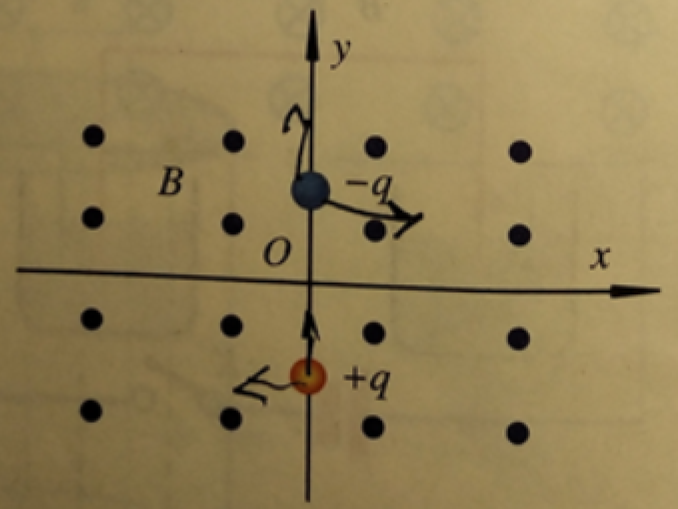


Out[ ]=



电磁学课本习题4.28的模拟与探究

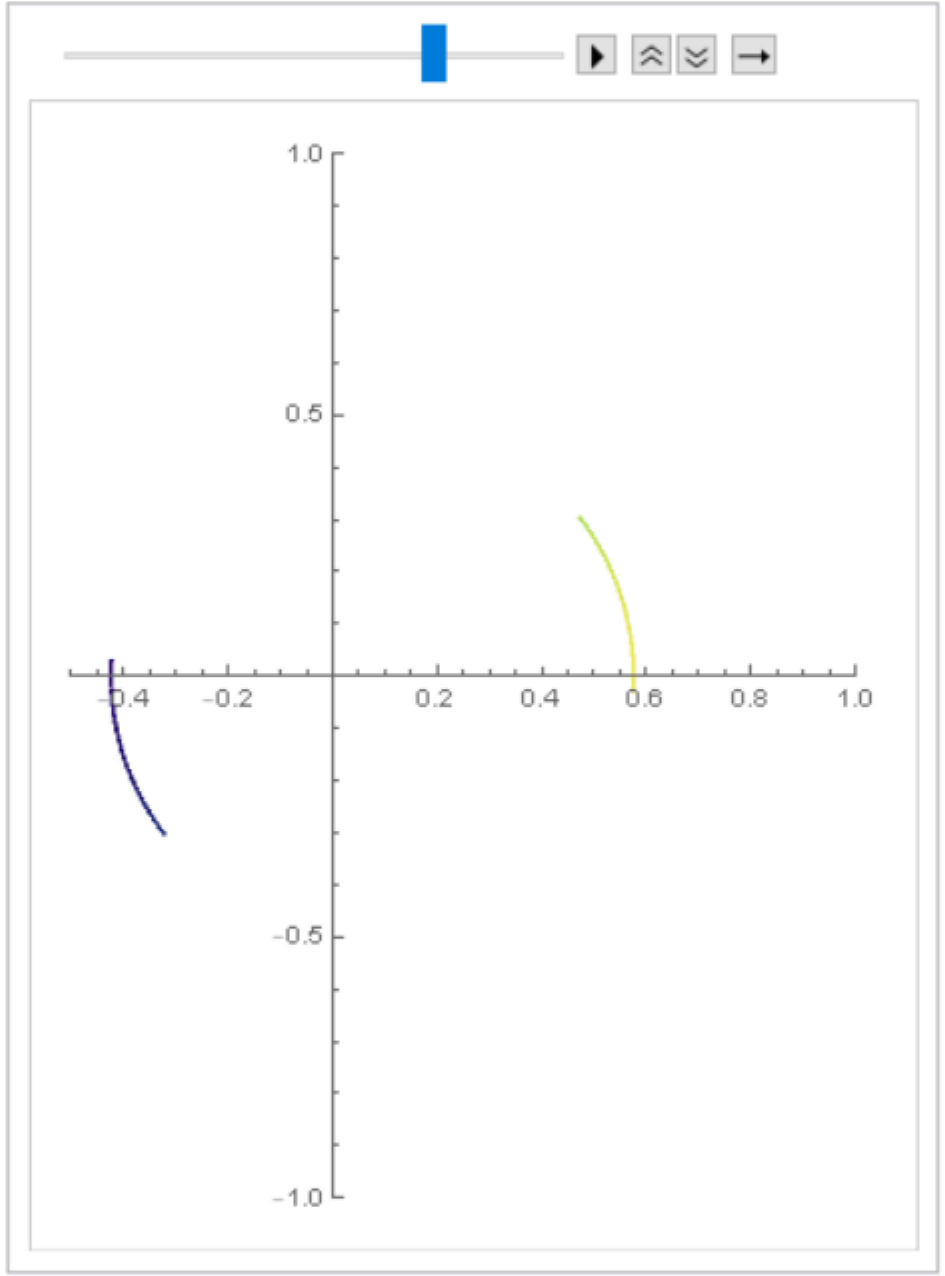
4.28 如图所示，质量均为 m，电量为 $-q$ 和 $+q$ 的两个带电质点相距 $2R$。开始时，系统的质心静止地位于坐标原点 O 处，且两带电质点在 xOy 平面上绕质心 C 沿顺时针方向做圆周运动。设当系统处于图示位置时，规定为 $t=0$ 时刻，从该时刻起在所讨论的空间加上沿 z 轴方向的弱匀强磁场 B。试求：质心 C 的速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 的变化关系及运动轨迹方程，定性画出质心 C 的运动轨迹。设两带电质点绕质心的圆周运动保持不变。



基于前面无磁场时两个点电荷绕质心的圆周运动，加入垂直纸面的弱匀强磁场B，得到的情景就是习题4.28。通过以下的模拟，结果与参考答案相符地很好，也就是质心轨迹为滚轮线，粒子保持绕质心的圆周运动。

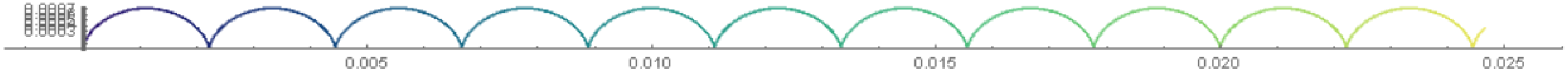
下图两个粒子的运动动画效果，由于质心的运动幅度很小，在较长时间后才可以看见两个质点运动轨迹与X轴交点的移动(从0.5到0.6)。这里设置的B的值为0.001个磁感应强度单位。

Out[•]=



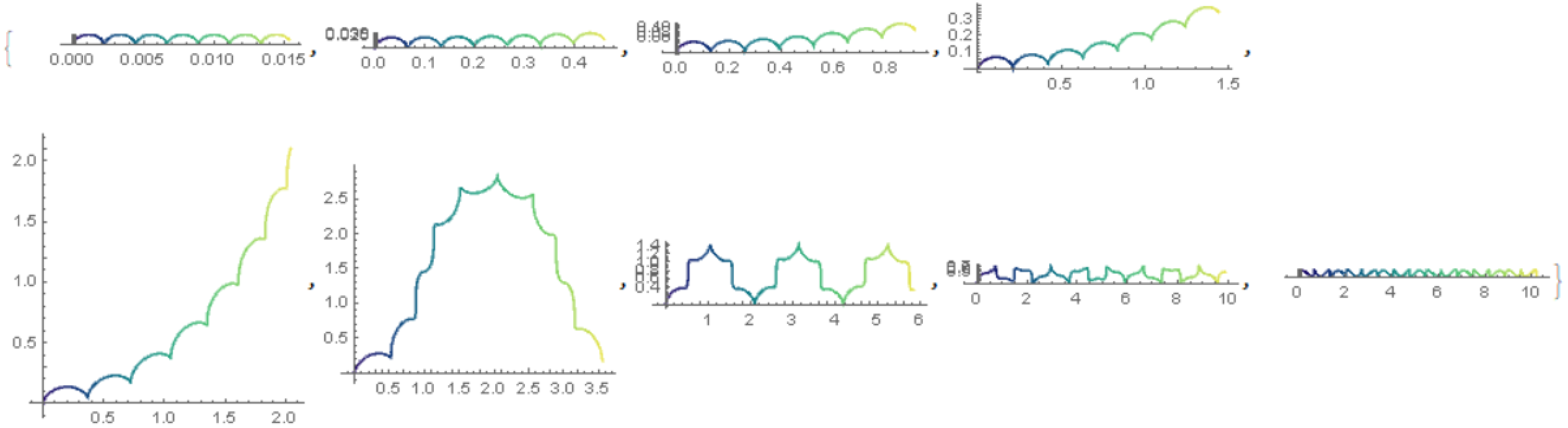
还可以得到质心的轨迹

Out[•]=



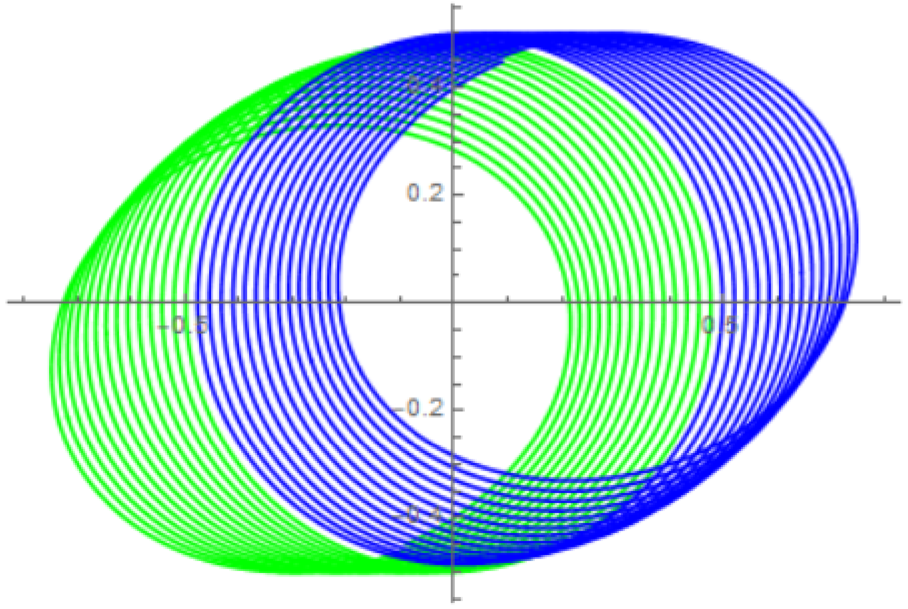
上图是质心的运动轨迹，经历50个时间单位，才沿X轴移动了0.025。上面动态图经历200个时间单位，整体向右移动了0.1。
在进行模拟时，发现了一个问题：B的大小会影响最终的结果，只有在B处于0.01个磁感应强度单位及以下的时候，才能看到质心近似成滚轮线，如果B过大，质心的轨迹就不再是滚轮线。

Out[ ]=



上面一组图片显示的是设定不同的B，经历了相同的30个时间单位后，质心的轨迹模拟。B在数组{0.001, 0.03, 0.06, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 4}中依次选取。可以发现，滚轮线只是B很小时候的近似，在B不是那么小时，轨迹从近似滚轮线逐渐变形；在粒子初速度不变时，B越大，质心沿X轴正方向的迁移速度越大。

Out[ ]=



直观地，上图给出了B=0.1时质心系中粒子的轨迹，可以看出两个粒子在相互地远离，而非保持关于质心的圆周运动。
继续探究这个问题，以上的结果都是通过数值求解常微分方程组得到的，是不是数值求解在B很大时候偏差过大？原本的解题过程是否有漏洞？

从最初的常微分方程组入手，这是涉及4个单变量函数的8阶方程组，按理来说求解应该很复杂

Out[ ]//TraditionalForm=

$$\left\{x1(0)=0,\ y1(0)=-\frac{1}{2},\ x2(0)=0,\ y2(0)=\frac{1}{2},\ x1'(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y1'(0)=0,\ x2'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y2'(0)=0,\ x1''(t)=-b\,y1'(t)-\frac{x1(t)-x2(t)}{\left((x1(t)-x2(t))^2+(y1(t)-y2(t))^2\right)^{3/2}},\right.$$
$$\left.y1''(t)=b\,x1'(t)-\frac{y1(t)-y2(t)}{\left((x1(t)-x2(t))^2+(y1(t)-y2(t))^2\right)^{3/2}},\ x2''(t)=b\,y2'(t)-\frac{x2(t)-x1(t)}{\left((x1(t)-x2(t))^2+(y1(t)-y2(t))^2\right)^{3/2}},\ y2''(t)=-b\,x2'(t)-\frac{y2(t)-y1(t)}{\left((x1(t)-x2(t))^2+(y1(t)-y2(t))^2\right)^{3/2}}\right\}$$

但是题目的提示或者假设是关于质心保持与原来相同的匀速圆周运动，自然的想到了如下代换，直接考虑质心的运动，这里(A(t),B(t))是质心的位置。b是磁感应强度，w是角速度，由于洛伦兹力方向是径向，大小相等，w应为常值。

Out[ ]//TraditionalForm=

$$\left\{x1(t)\to A(t)-\frac{1}{2}\sin(t\,w),\ y1(t)\to B(t)+\frac{1}{2}\cos(t\,w),\ x2(t)\to A(t)+\frac{1}{2}\sin(t\,w),\ y2(t)\to B(t)-\frac{1}{2}\cos(t\,w)\right\}$$

经过代换，并且修改了对应的初值条件后，得到了以下的方程组，关于两个单变量函数，四个式子。

Out[ ]//TraditionalForm=

$$\left\{A(0)=0,\ B(0)=0,\ A'(0)=0,\ B'(0)=0,\ A''(t)+\frac{1}{2}w^2\sin(t\,w)=\sin(t\,w)-b\left(B'(t)-\frac{1}{2}w\sin(t\,w)\right),\right.$$
$$\left.B''(t)-\frac{1}{2}w^2\cos(t\,w)=b\left(A'(t)-\frac{1}{2}w\cos(t\,w)\right)-\cos(t\,w),\ A''(t)-\frac{1}{2}w^2\sin(t\,w)=b\left(B'(t)+\frac{1}{2}w\sin(t\,w)\right)-\sin(t\,w),\ B''(t)+\frac{1}{2}w^2\cos(t\,w)=\cos(t\,w)-b\left(A'(t)+\frac{1}{2}w\cos(t\,w)\right)\right\}$$

这里4个式子实际上太多了，我们只需要其中的两个加上初值，就可以解出(A(t),B(t))。
很自然地猜测，过多的式子会不会导致这个方程组无解？对4个式子编号一，二，三，四。

取式一加式三，式二加式四，得到两个等式

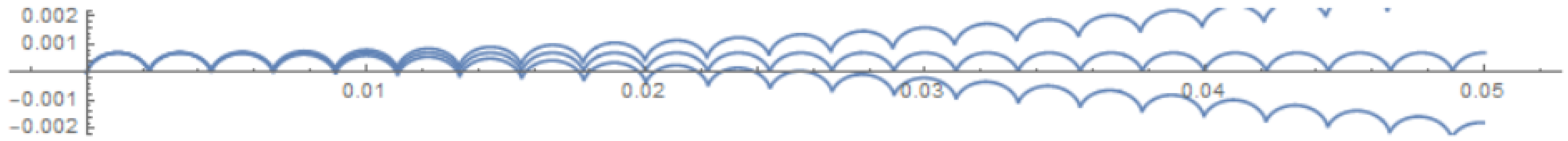
Out[ ]//TraditionalForm=

$$\{A(0)=0,\ B(0)=0,\ A'(0)=0,\ B'(0)=0,\ 2\,A''(t)=b\,w\sin(t\,w),\ 2\,B''(t)=-b\,w\cos(t\,w)\}$$

这里很容易推出滚轮线的解。

另外直接取式一，式二，也可以得到一个解，直接取式三，式四，也可以得到一个解。如果这三个解不一样，就可以直接推出代换后的方程组无解，下图是依据三个解作出的曲线。其中代入角速度二分之根号二，磁感应强度b=0.001。

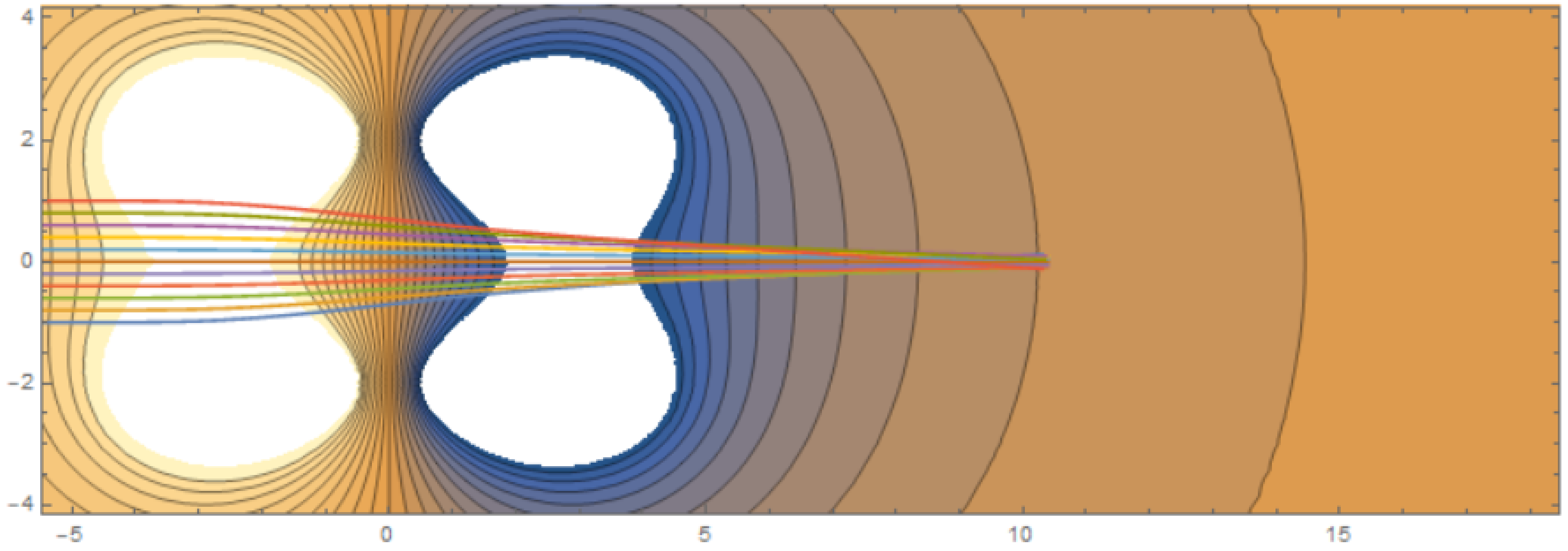
Out[ ]=



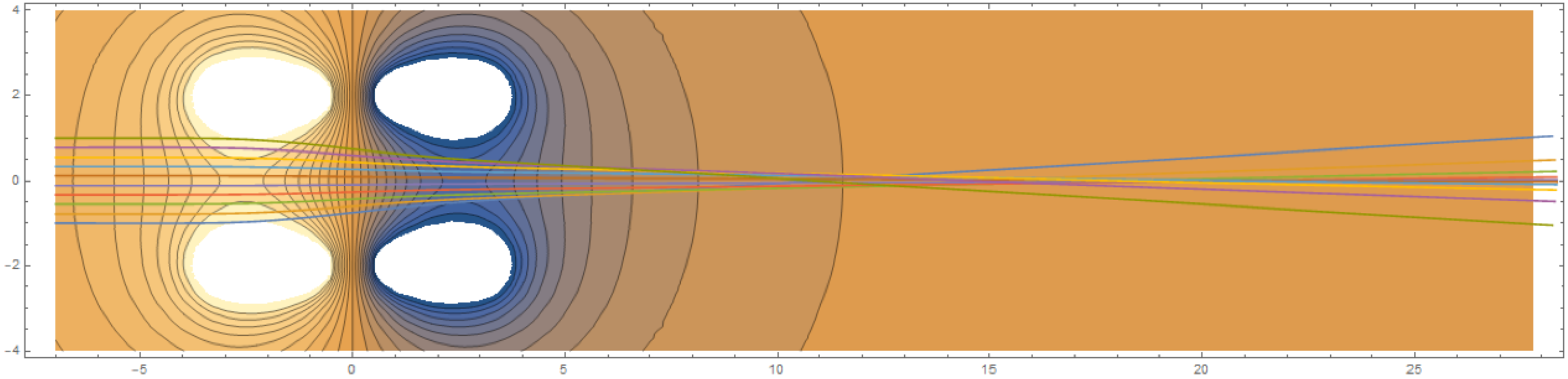
这里得到的三个解仅在最开始的时间里，三条曲线近似重合，还是在b=0.001的磁感应强度极小的情况下。
这次的求解过程中，数据全部使用了准确值，直接求解微分方程组而非数值求解。因此可以断言，代换后的方程组无解，换言之这个代换是不成立的。
而在我们做题的过程中，依据相对匀速圆周运动的假设，在任一时刻分析整体的受力，继而得到的两个微分方程，显然对应上面的第一个解，也就是滚轮线。

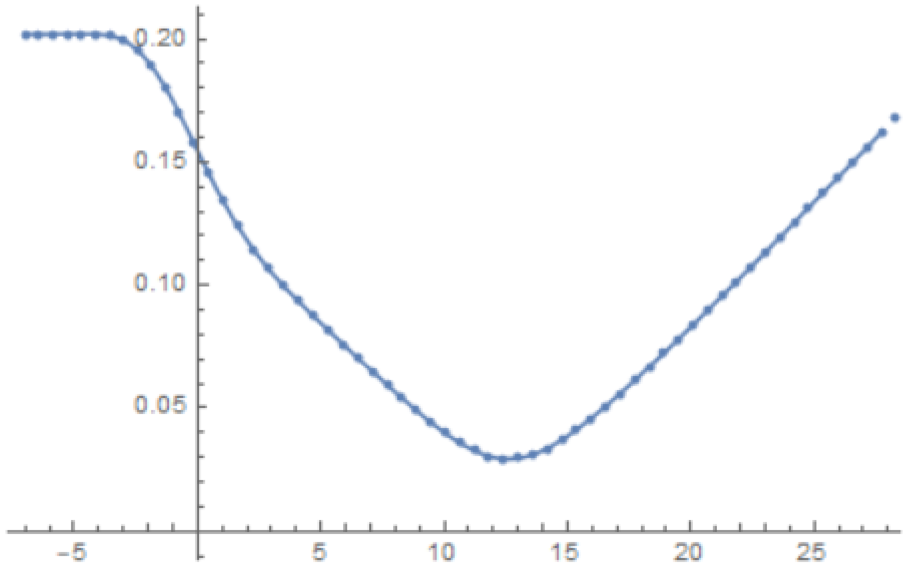
总结：
原题干中提到了“加Z轴方向的弱匀强磁场B”，原题中的最后一句话：“设两带电质点绕质心的圆周运动保持不变”。这两句话是值得细究的，一方面，保持圆周运动的情形是不成立的，这个代换直接导致了代换后的方程组无解，无论B取多小的值都是无解。另一方面，忽略粒子绕质心运动的半径，角速度的细微变化，只选取代换后方程组中的部分求解，可以得到滚轮线，这在B极小的时候与实际运动情形很相似。

静电透镜的模拟与探究



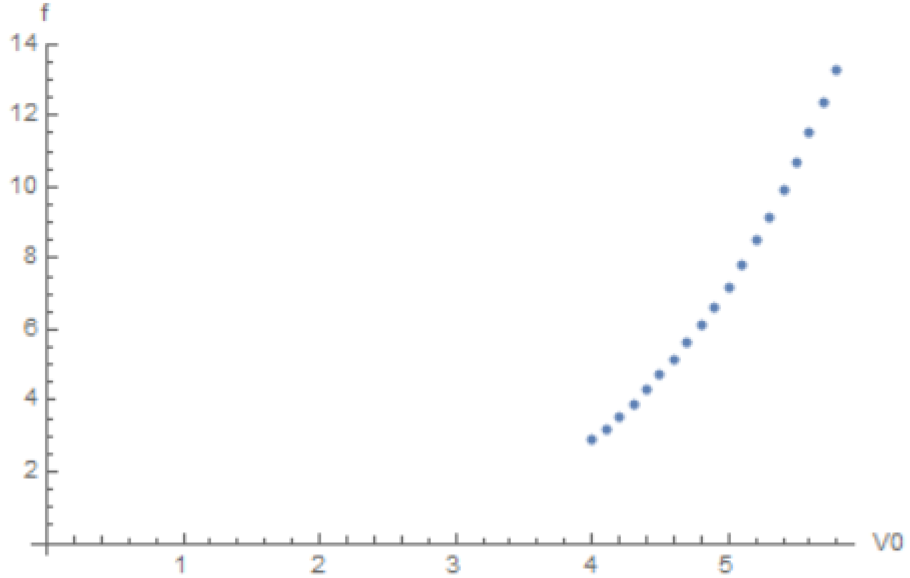
在平面上通过若干个带等量异号点电荷的对称排列，产生形似凸透镜的等势面，通过一个粒子束在电场中的轨迹，模拟静电透镜的现象。





图一模拟了一束粒子的轨迹，要求粒子具有相同的水平初速度，没有竖直分速度，忽略相互作用力。
图二是为了求出汇聚点，也就是焦距而绘制的：横轴是X轴，纵轴是粒子束经过X=X0附近时位置的方差。方差最小的位置，对应着焦距。
在进行模拟时，观察到，对于粒子不同的初速度，焦距也不一样，如下图所示：

Out[ ]=



从上图可以看出，焦距f随着v的增大而增大，而且不成简单的线性关系，用二次函数或者其他函数才可能很好地拟合。