

Experiment7: 初-边值近似问题

杨乐园 PB18010496

问题描述

HW 1.5.9 and 1.5.10

针对下述初边值问题:

$$\begin{cases} v_t = \nu v_{xx} + F(x, t) & x \in (0, 1), t > 0 \\ v(x, 0) = f(x) & x \in [0, 1] \\ v_x(0, t) = a(t) & t \geq 0 \\ v(1, t) = b(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

分别使用一阶与二阶的Neumann边界近似方法, 求解上述初-边值问题。其中

$$\nu = 0.1, \quad f(x) = x(1-x), \quad a(t) = 10 \sin t, \quad b(t) = 4 \sin 6t, \quad F(x, t) = \sin 2\pi x \sin 4\pi t$$

并且分别在数值差分条件 $M = 10, \Delta t = 0.05$ 、 $M = 20, \Delta t = 0.01$ 、 $M = 40, \Delta t = 0.002$ 下, 求取时间 $T = 0.1, 0.9, 2.0$ 处数值解。

HW 2.2.2

针对下述初边值问题:

$$\begin{cases} v_t = \nu v_{xx} & x \in (0, 1), t > 0 \\ v(x, 0) = \sin 4\pi x & x \in [0, 1] \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

利用 FTCS 格式, 其中 $\nu = 0.1$, 分别在条件 (i) $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.05$ 、(ii) $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0125$ 、(iii) $\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.0005$, 求取时间 $T = 0.05, 0.1$ 处的数值解。

数值方法

HW 1.5.9 and 1.5.10

一阶近似格式如下:

$$\begin{cases} u_k^{n+1} = u_k^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) + \Delta t F_k^n & k = 1, \dots, M-1 \\ u_k^0 = f_k & k = 0, 1, \dots, M \\ u_0^n = u_1^n - \Delta x a^n & n = 0, 1, \dots, T/\Delta t \\ u_M^n = b_M & n = 0, 1, \dots, T/\Delta t \end{cases}$$

二阶近似格式如下:

$$\begin{cases} u_k^{n+1} = u_k^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) + \Delta t F_k^n & k = 1, \dots, M-1 \\ u_k^0 = f_k & k = 0, 1, \dots, M \\ u_0^{n+1} = u_0^n - 2\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_1^n - u_0^n) + -2\nu \frac{\Delta t}{\Delta x} a^n & n = 0, 1, \dots, T/\Delta t \\ u_M^n = b_M & n = 0, 1, \dots, T/\Delta t \end{cases}$$

HW 2.2.2

FTCS格式如下：

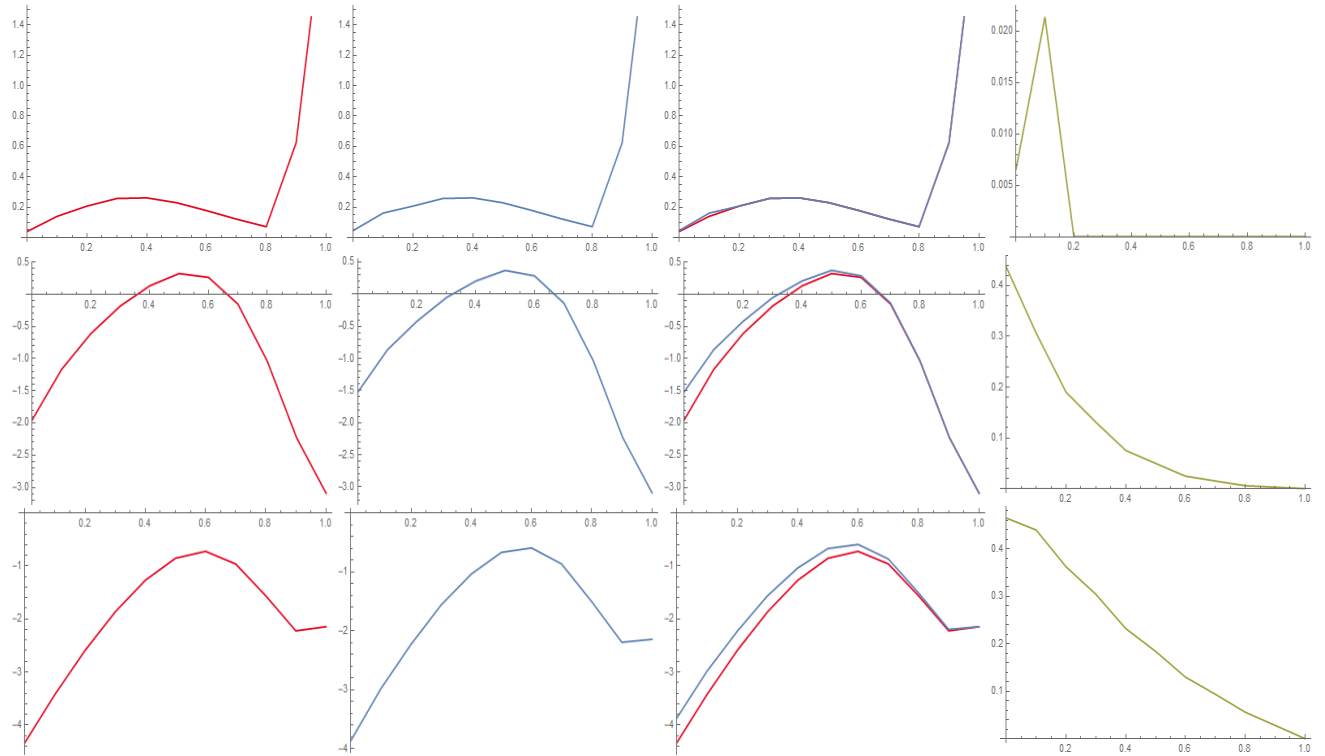
$$\begin{cases} u_k^{n+1} = u_k^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) & k = 1, \dots, M-1, \quad n = 1, \dots, T/\Delta t \\ u_k^0 = \sin 4\pi k \Delta x & k = 1, \dots, M \\ u_0^n = u_M^n = 0 & n = 1, \dots, T/\Delta t \end{cases}$$

数值结果

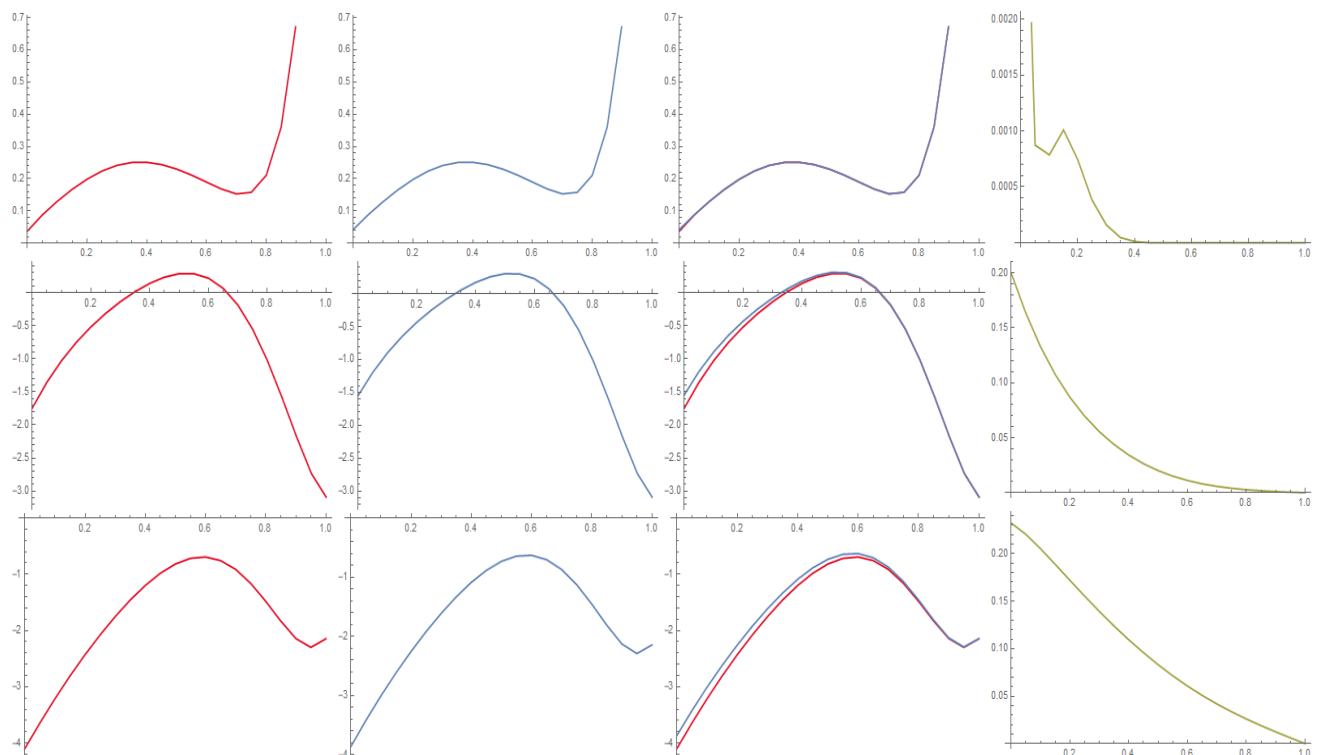
HW 1.5.9 and 1.5.10

从上到下依次为 $T = 0.1, 0.9, 2.0$ 。

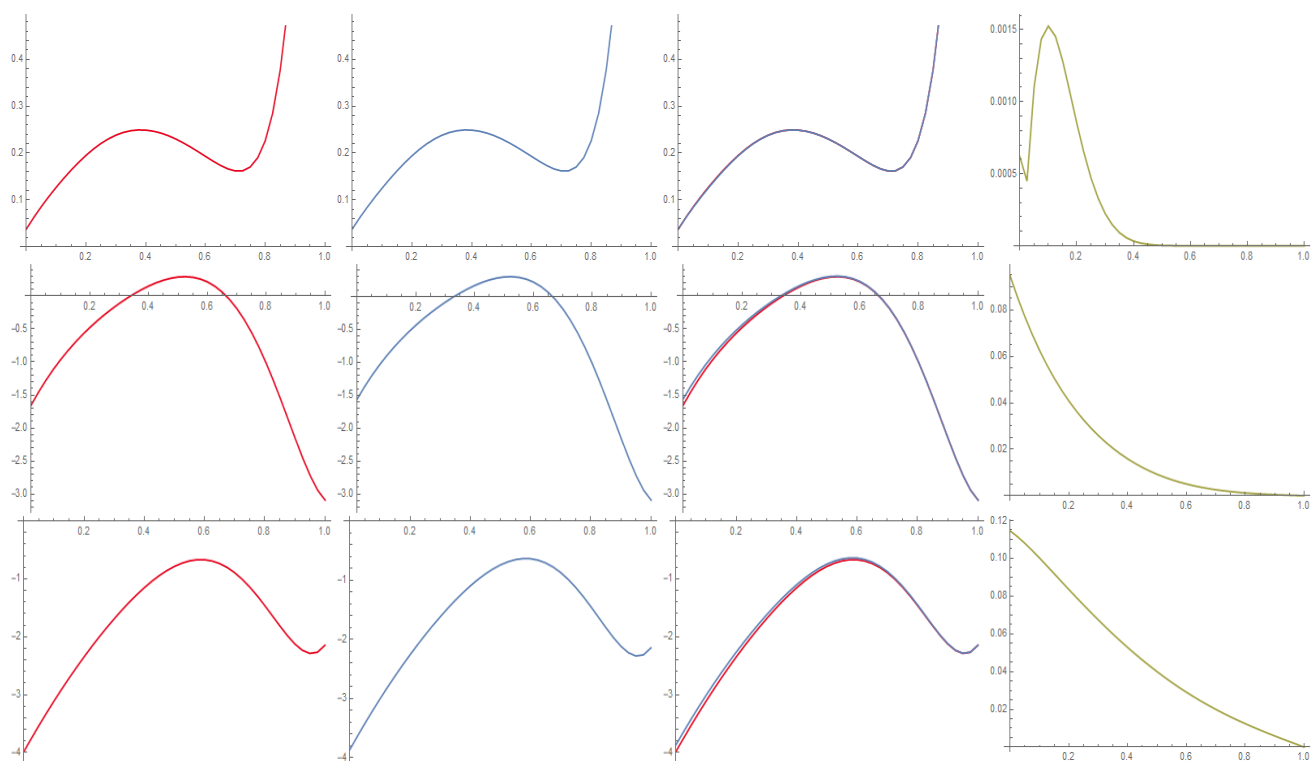
• $M = 10, \Delta t = 0.05$ 。从左到右依次为一阶近似、二阶近似、对比、差的绝对值。



• $M = 20, \Delta t = 0.01$ 。从左到右依次为一阶近似、二阶近似、对比、差的绝对值。

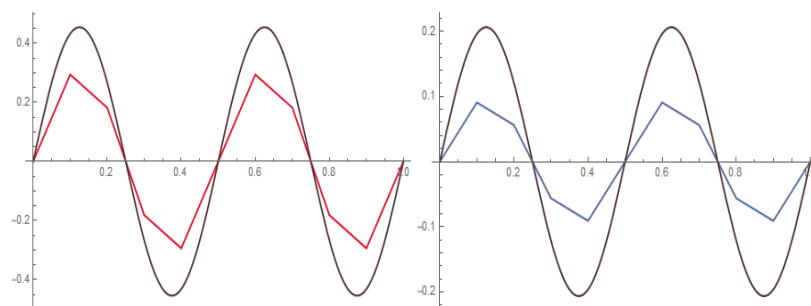


• $M = 40, \Delta t = 0.02$ 。从左到右依次为一阶近似、二阶近似、对比、差的绝对值。

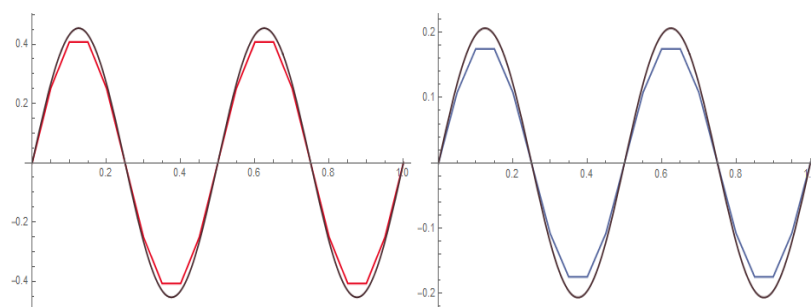


HW 2.2.2

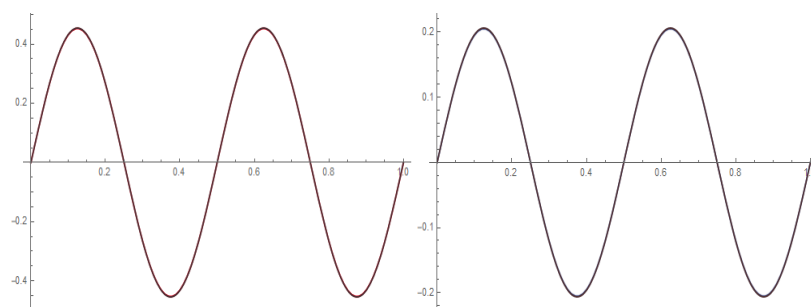
• $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.05$ 。从左到右依次 $T = 0.05, 0.1$ 。其中棕色曲线为真实解。



• $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0125$ 。从左到右依次 $T = 0.05, 0.1$ 。其中棕色曲线为真实解。



• $\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.0005$ 。从左到右依次 $T = 0.05, 0.1$ 。其中棕色曲线为真实解。



代码

其中数值求解代码与绘图代码详见附件！