$Experiment4$：对比多种方法求解结果

杨乐园 PB18010496

问题描述

1. 针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, & -\infty < x < +\infty \\ \text{Periodic boundary condition}, & T = 1 \end{cases}$$

该方程的精确解为$u(x,t) = sin(2\pi(x+t))$，对时空区域均匀剖分，其中$x_j = j \cdot \Delta x, j = 0,1,2,\ldots,J$，空间步长$\Delta x = \frac{1}{J}$，令$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$。

问 **1.1**：取$\lambda = 0.5, J = 80$，分别取终止时间$T = 0.1, 0.4, 0.8, 1.0$。分别用$FTCS$、$Lax-Friedrich$和$Lax-Wendroff$方法计算其数值解，绘制出最大误差随时间变化图，并给出相应评论。

问 **1.2**：取$\lambda = 0.5, T = 1.0$，分别取终止时间$J = 10, 20, 40, 80, 160$。用$Lax-Wendroff$方法计算其数值解，并与精确解画在同一张图上进行比较，并给出相应评论。

2. 针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, & -\infty < x < +\infty \\ \text{Periodic boundary condition}, & T = 1 \end{cases}$$

该方程的精确解为$u(x,t) = sin(2\pi(x+t))$，对时空区域均匀剖分，其中$x_j = j \cdot \Delta x, j = 0,1,2,\ldots,J$，空间步长$\Delta x = \frac{1}{J}$，令$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$。

问 **2.1**：取$T = 1.0, J = 80$，分别取$\lambda = 0.5, 1.5$。用$CTCS$格式（v_j^1用$FTFS$格式）计算其数值解，并与精确解画在同一张图上进行比较，并给出相应评论。

问 **2.2**：取$\lambda = 0.5, T = 1.0$，分别取。用 CTCS格式（v_{j}^{1}用 FTFS$格式）计算其数值解，并与精确解画在同一张图上进行比较，并给出相应评论。

问 **2.3**：取$\lambda = 0.5, J = 80$，分别取$T = 0.2, 0.5$。用$FTBS$格式计算其数值解，并与精确解画在同一张图上进行比较，并给出相应评论。

数值方法

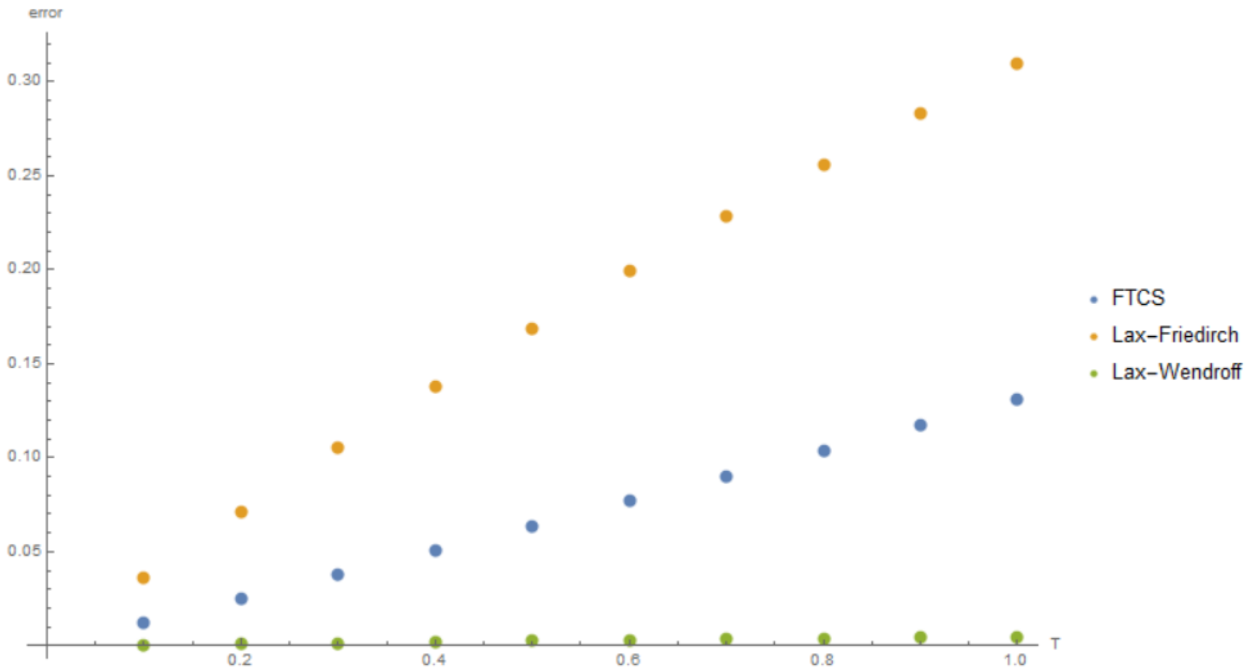
记$v_j^n \approx u(x_j, t_n)$，根据不同格式的导数近似以及偏微分方程得到相应的格式：

1. $FTCS$：$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$
2. $Lax-Friedrich$：$v_j^{n+1} = (\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \frac{1}{2})v_{j+1}^n + (-\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \frac{1}{2})v_{j-1}^n$
3. $Lax-Wendroff$：$v_j^{n+1} = (\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2})v_{j+1}^n + (1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2})v_j^n + (-\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2})v_{j-1}^n$
4. $CTCS$：$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$
5. $FTBS$：$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_j^n - v_{j-1}^n)$

其中定解条件为：初始条件：$v_j^0 = sin 2\pi x_j$，边界条件：$v_j^n = v_{j+J}^n$。

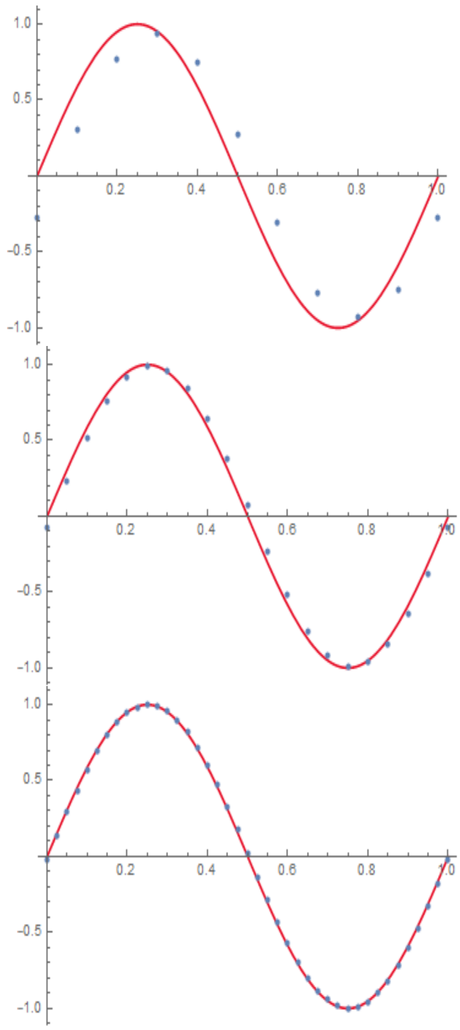
数值结果

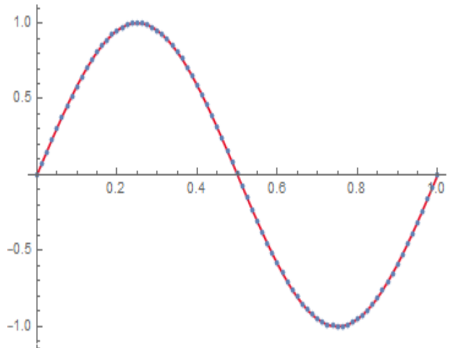
1. 问 **1.1**：$\lambda = 0.5, J = 80$，并且$T = 0.1, 0.4, 0.8, 1.0$。

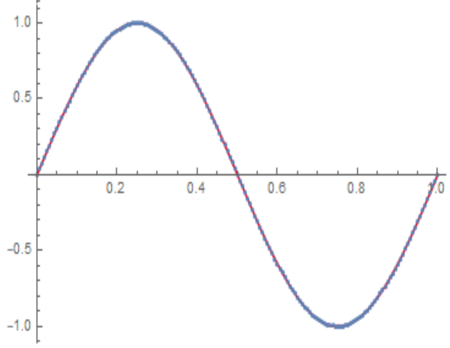


通过观察误差随终止时间的增长，我们可以看到，误差逐渐增大；三种方法中，$Lax - Wendroff$的误差结果最小，其逼近效果更好一些。

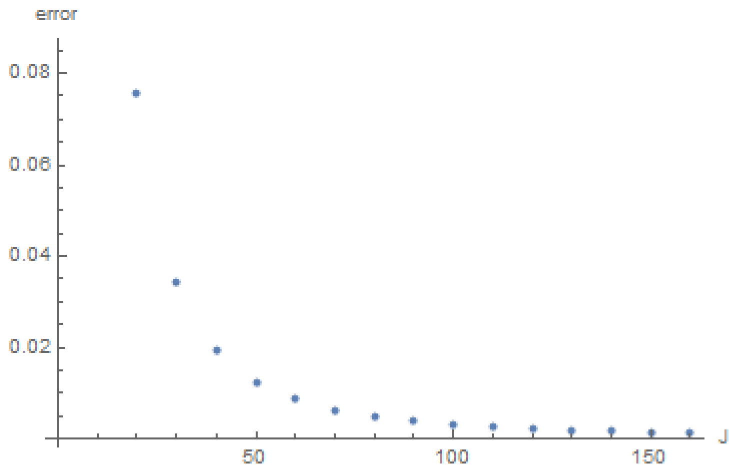
2. 问 **1.2**：$\lambda = 0.5, T = 1.0$，并且$J = 10, 20, 40, 80, 160$，格式为$Lax - Wendroff$。







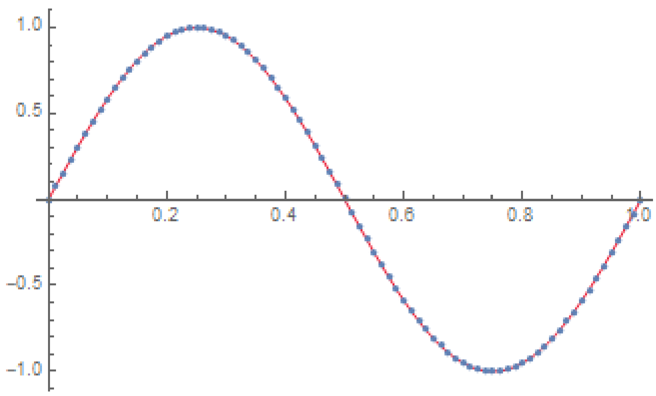
注:从上到下、从左到右分别为$J=10,20,40,80,160$的数值解与真解对比，红色为真解。



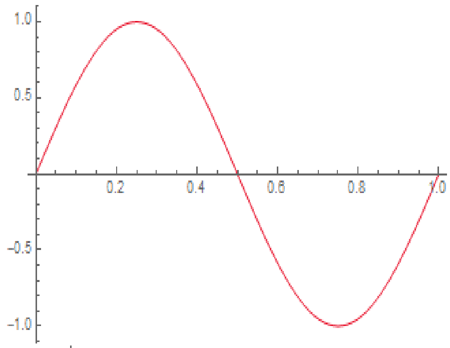
通过观察不同J时数值解与真解对比图，以及相应模最大误差随J变化图像，明显可以看出，模最大误差随空间离散程度J的增大而猪价减小。

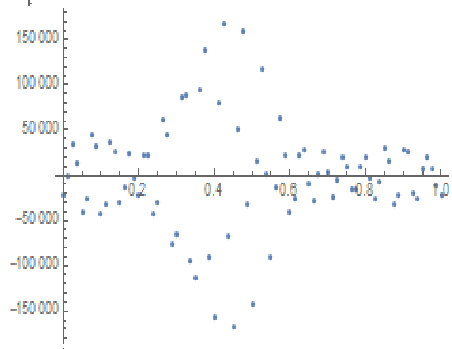
3. 问 **2.1**：

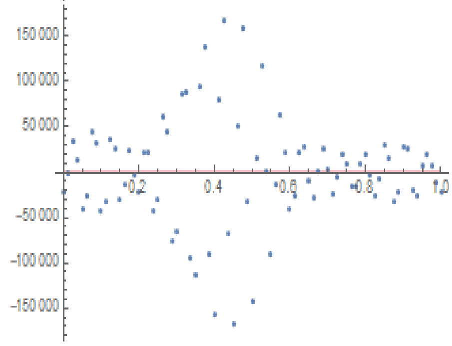
$T=1.0, J=80, \lambda=0.5$，格式为$CTCS$。



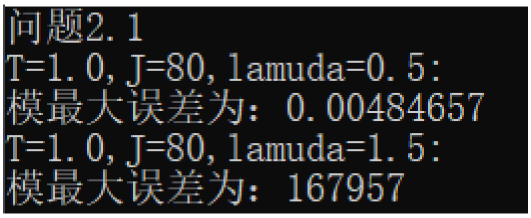
$T=1.0, J=80, \lambda=1.5$，格式为$CTCS$。





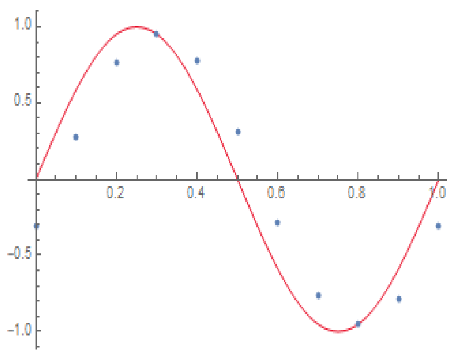


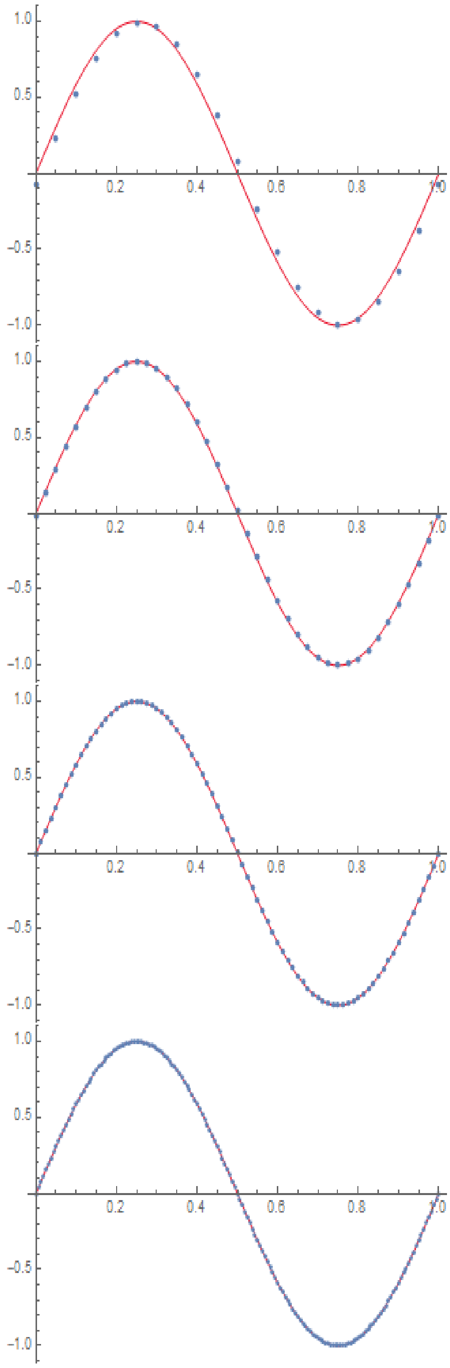
输出如下：



通过对比不同λ值时数值解与真解图像以及相应误差输出，可以看到，$\lambda = 0.5$时数值逼近结果仍可以接受，误差较小；但$\lambda = 1.5$时则直接不稳定，误差爆炸！

4. 问 **2.2**：$T = 1.0, \lambda = 0.5$，分别取$J = 10, 20, 40, 80, 160$，格式为$CTCS$。





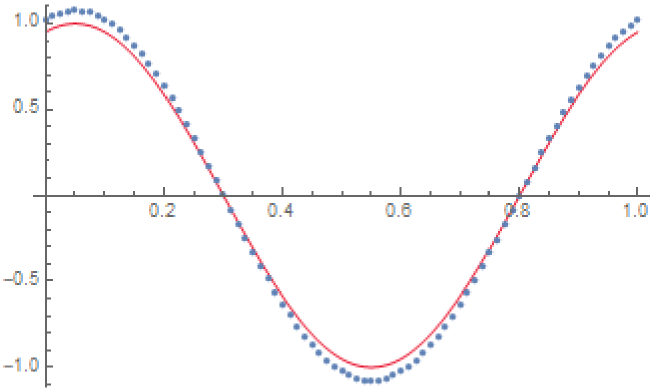
误差输出结果：

```
问题2.2
T=1.0,J=80,lamuda=0.5:
J=10,模最大误差为：0.310785
J=20,模最大误差为：0.0778901
J=40,模最大误差为：0.0194072
J=80,模最大误差为：0.00484657
J=160,模最大误差为：0.0012113
```

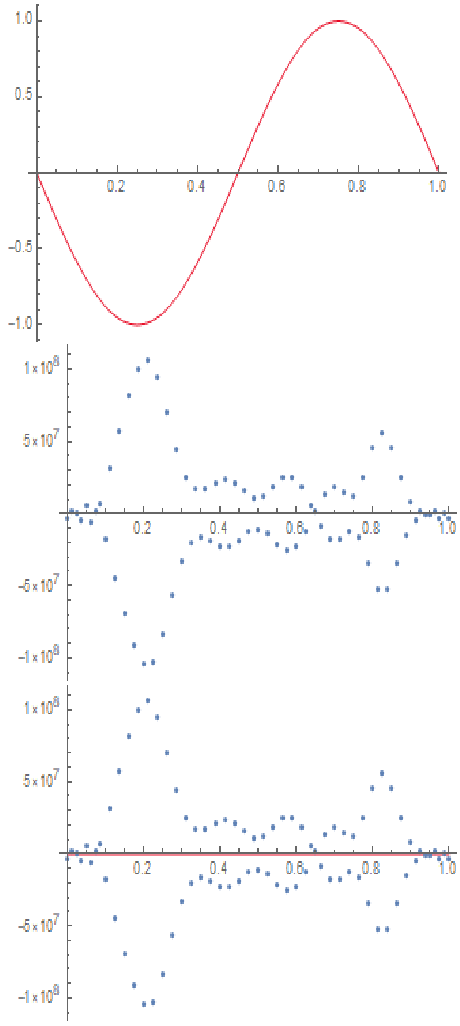
通过观察不同J时数值解与真解对比图，以及相应模最大误差随J变化图像，明显可以看出，模最大误差随空间离散程度J的增大而猪价减小。

5. 问 **2.3**:

$\lambda = 0.5, J = 80, T = 0.2$，格式为$FTBS$。



$\lambda=0.5, J=80, T=0.5$，格式为$FTBS$。



误差输出结果如下：

```
问题2.3
lamuda=0.5,J=80,T=0.2,FTBS结果:
模最大误差为: 0.0766887
lamuda=0.5,J=80,T=0.5,FTBS结果:
模最大误差为: 1.0564e+08
```

通过对比不同T值时数值解与真解图像以及相应误差输出，可以看到，$T=0.2$时数值逼近结果仍可以接受，误差较小；但$T=0.5$时则直接不稳定，误差爆炸！可见$FTBS$格式对于该方程不稳定，其不满足CFL条件。

代码

其中数值求解代码与绘图代码参见附件！