第三次程序作业

PB18010496 杨乐园

2021 年 11 月 3 日

1 问题介绍

对如下偏微分方程基于一次有限元空间和二次有限元空间分别求解相应的数值解：

$$\begin{cases} -\epsilon u^{''} + u^{'} = x & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

其中，分别取 $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-7}$，对网格加密程度 $N = 10, 20, 40, 80$，并分别取均匀网格划分、$Shinshkin$ 网格划分进行求解，并绘制出相应的数值解与真解的对比图，计算出相应的模最大误差，以及相应的误差收敛阶，其中误差收敛阶计算公式如下：

$$Ord = \frac{ln(Error_{old}/Error_{new})}{ln(N_{new}/N_{old})}$$

2 实现方法

2.1 有限元弱解形式

等价的弱解形式：

$$Find\ u_h \in V_h, s.t. a(u_h, v) = F(v), for\ any\ v \in V_h.$$

其中 $a(u,v) = \int_0^1 (\epsilon u^{'}(x)v^{'}(x) + u^{'}(x)v(x))dx, F(v) = \int_0^1 u^{'}(x)v(x)dx.$

2.2 均匀划分下有限元变分格式

当我们假设对 $[0,1]$ 进行 N 等分时，即 $h_e = \frac{1}{N}, x_i = ih_e, i = 0,1,2,..,N$，对于 u_h 在有限元空间内进行系数展开 $u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i\phi_i(x)$，并依次取有限元空间的基函数 $v = \phi_i, i = 1,2,...,N-1$，从而得到如下方程组：

$$\langle u_n^{'}, \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^{N-1} u_j \langle \phi_j^{'}, \phi_i^{;} \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, \quad i = 1,..,N-1$$

将其写成刚度矩阵的形式：

$$K \cdot U = F$$

其中 $K = (\langle \phi_j^{'}, \phi_i^{;} \rangle)_{i,j=N-1}$，$U = (u_1,..,u_{N-1})^T$，$F = (f_1,..,f_{N-1})^T, f_i = \langle f, \phi_i \rangle$。

2.2.1 一次有限元空间

基函数

对于一次函数空间，其基函数如下定义：

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_e} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_e} & x \in (x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, .., N-1 \\ 0 & else \end{cases}$$

刚度矩阵

基于如上基函数定义，有如下刚度矩阵：

$$K = \frac{1}{h_e} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3 $Shinshikin$ 划分下有限元变分格式

定义 $\tau = 1 - 2\epsilon \ln N$，在区间 $(1, \tau)$ 与区间 $(\tau, 1)$ 两侧均采用 N 等分的均匀划分，也即 $[0, 1]$ 区间划分为 $2N$ 个非均匀小网格，进而构造一次函数空间。

基函数

可以注意到，这是一种非均匀划分的一次函数空间，记在 τ 的两侧区间划分精度分别为 $he_l = \frac{\tau}{N}, he_r = \frac{1-\tau}{N}$，从而一次基函数就是上述所叙述的基函数，而特别地，在节点 $x_N = \tau$ 处其基函数为

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{x-x_{N-1}}{he_l} & x \in [x_{N-1}, \tau] \\ \frac{x_{N+1}-x}{he_r} & x \in (tau, x_{N+1}] \\ 0 & else \end{cases}$$

从而我们类似上述求解方法构造相应的三对角的刚度矩阵。

2.4 数值积分方法

通过采用复化 3 点 $Gauss$ 积分公式计算相关数值积分：

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

其中系数为：

$$A_1 = \frac{5}{18}(b-a) \qquad A_2 = \frac{4}{9}(b-a) \qquad A_3 = \frac{5}{18}(b-a)$$

节点值为：

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\ b-a \qquad x_2 = \frac{a+b}{2} \qquad x_3 = \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\ b-a$$

本此实验将积分区间 16 等分。

2.5 方程组求解方法

本次实验考虑到精度需要以及后续实验需要，利用共轭梯度迭代方法求解方程组，其中迭代的初始向量选择为 $(1,1,....,1)$，终止计算精度为 10^{-16}。

2.6 误差范数

对于数值解与真解，我们通过计算其无穷范数来比较误差，将区间 $[0,1]$ 进行 1000 等分，记 $\Delta x=\frac{1}{100}$，分别计算数值解与真解在划分节点 $x_i=i\cdot\Delta x, i=0,1,...,100$ 处差值的绝对值，并且取最大值作为误差值，即：

$$error=\max_i\{|u(x_i)-u_h(x_i)|\}=\max_i\{|u(x_i)-\sum_{j=1}^{N-1}u_j\phi_j(x_i)|\}$$

2.7 代码结构

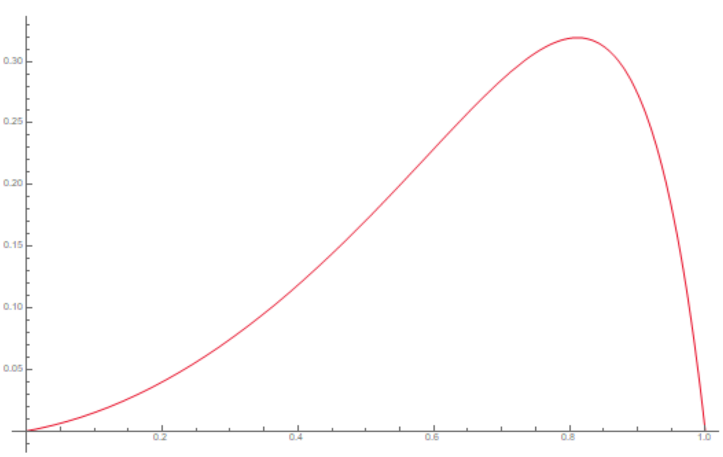
由于本次编程实验较为简单，代码结构上也相对易懂一些。

1. 首先将基函数编写为相应的函数，为后续计算复化积分提供需要；
2. 再通过指针函数以及单位区间的标准基函数对刚度矩阵 K 进行构造；
3. 进而利用复化 3 点 $Gauss$ 积分公式计算出右侧向量 F；
4. 接下来利用共轭梯度迭代法求解展开系数向量 U；
5. 最后求解无穷范数误差以及相应收敛阶即可。

3 实验结果

3.1 $\epsilon=0.1$ 时均匀网格五阶情况

3.1.1 真解图像



3.1.2 误差与收敛阶

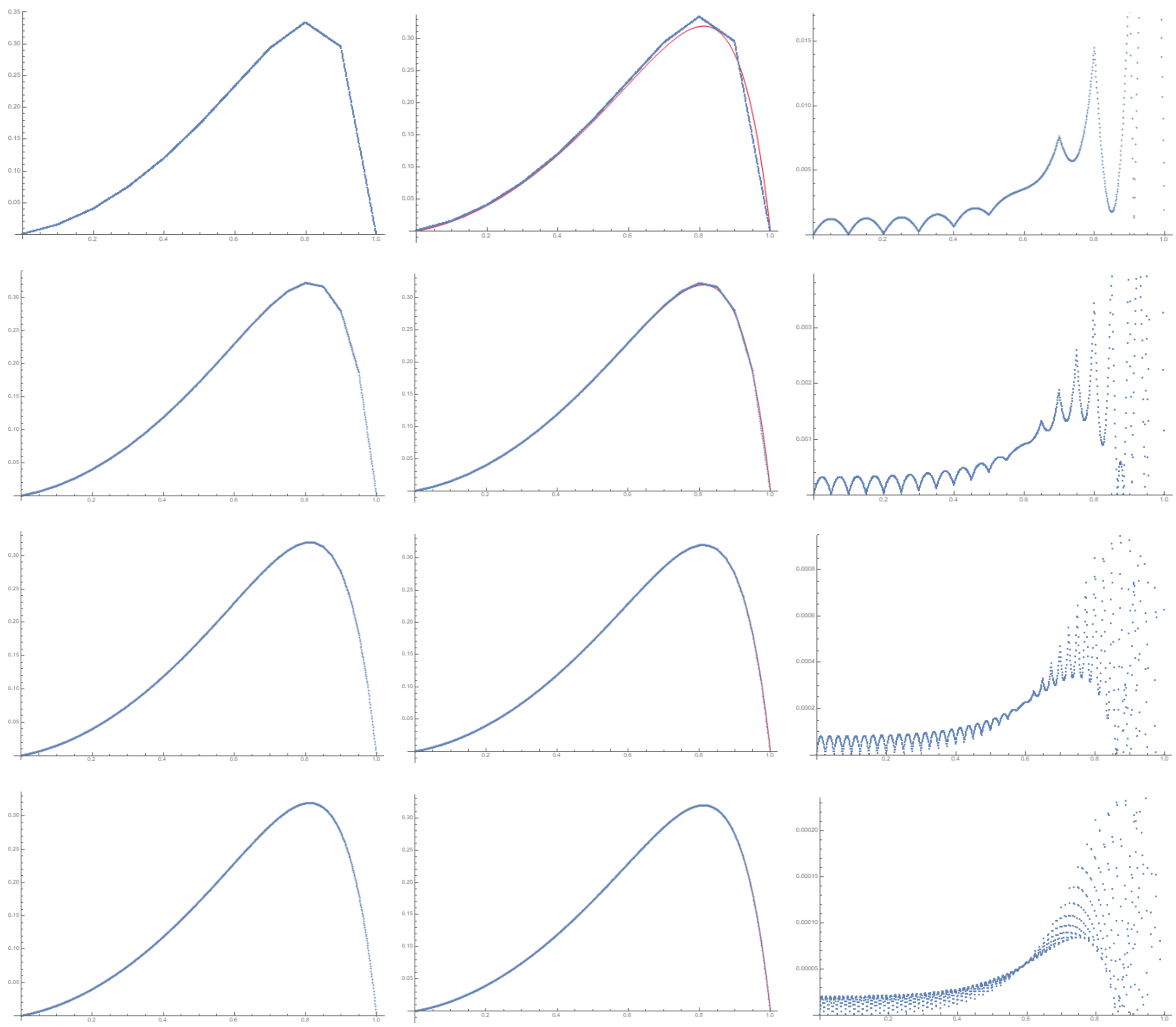
基于均匀划分的一次有限元空间数值求解误差以及收敛阶如下：

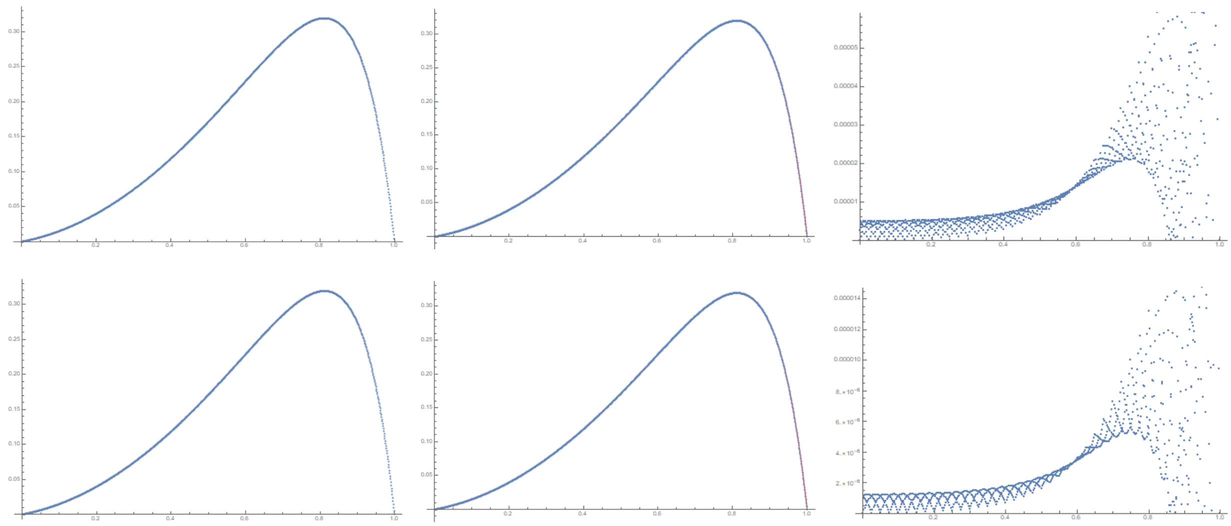
表 1: 一次有限元空间数值求解误差与收敛阶

n	L^∞ error	order	L^1 error	order
10	0.036614200	–	0.005055620	–
20	0.012582200	1.54102	0.001195790	2.07993
40	0.003770060	1.73873	0.000295484	2.01681
80	0.001039490	1.85871	7.32378e-05	2.01242
160	0.000273275	1.92746	1.80704e-05	2.01896
320	6.42898e-05	2.08769	4.4762e-06	2.01328

3.1.3 数值求解图像与真解对比

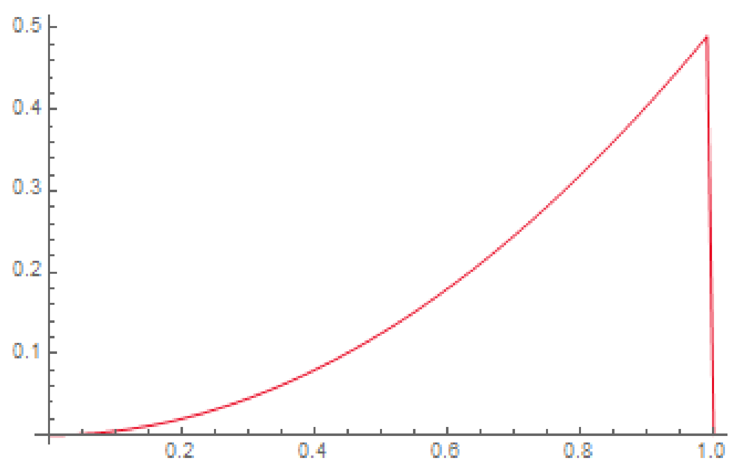
基于一次有限元空间数值求解图像如下，从上到下分别为 $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320$，从左到右分别为数值求解图、与真解对比图（其中红色实线为真解）、数值解与真解差的绝对值图：





3.2 $\epsilon = 0.0000001$ 时两种划分方法求解结果对比

3.2.1 真解图像



3.2.2 均匀划分下的求解

基于均匀划分的一次有限元空间数值求解误差以及收敛阶如下：

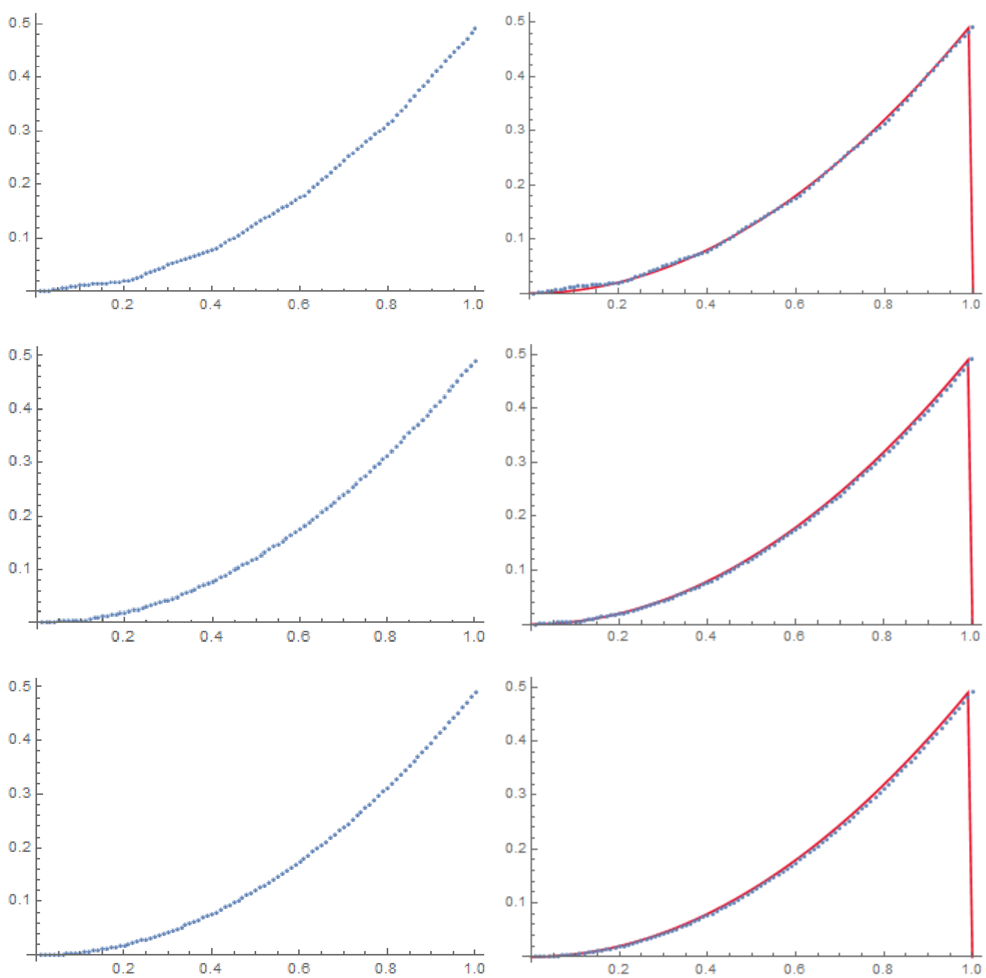
n	无穷范数误差	Order	L1范数误差	Order
10	24999.9550023900	-	9027.59807320872	0
20	6249.97626139496	2.00000288290576	2256.76232649360	2.00008770082862
40	1249.89534101884	2.32204341311770	564.053556200987	2.00035043106671
80	312.395239296385	2.00036292402529	140.878863716453	2.00137697325675
160	78.0206761262807	2.00144406198996	35.0847955445089	2.00553731772431
320	19.4314340898817	2.00546412133306	16.5930221315904	1.08026928303845
640	4.78696695677027	2.02120862681876	0.470311773842321	5.14081541266279

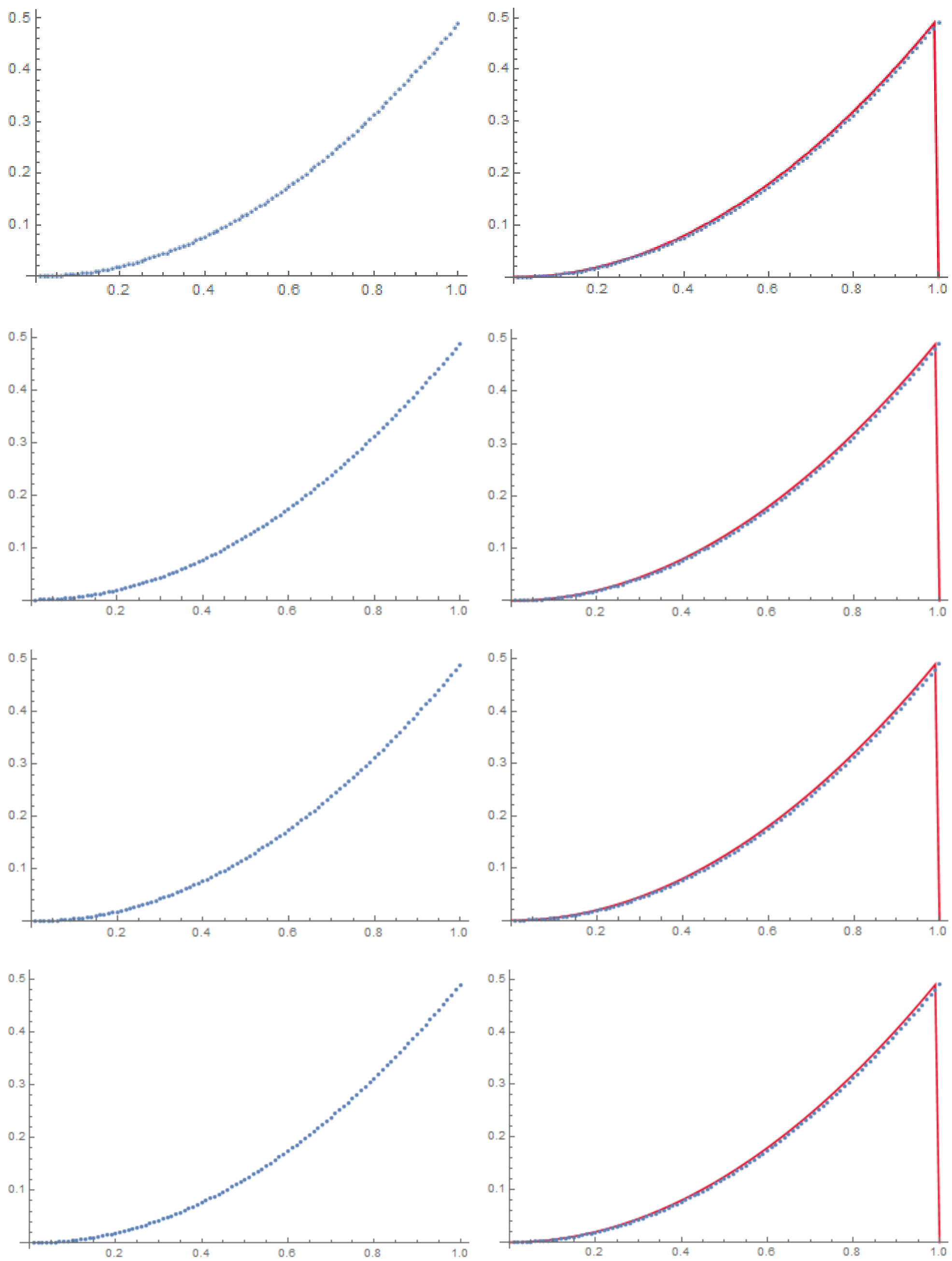
3.2.3 *Shinshkin* 划分下求解情况

基于 *Shinshkin* 划分的一次有限元空间数值求解误差以及收敛阶如下：

n	L无穷误差	Order	L1误差	Order
10	0.00761205	0	0.00463937	0
20	0.00197787	1.94434	0.0011973	1.95415
40	0.000508034	1.96095	0.000306148	1.96748
80	0.000128696	1.98096	0.0000774368	1.98314
160	0.0000321524	2.00097	0.0000194711	1.99168
320	7.93629×10^{-6}	2.01839	4.90752×10^{-6}	1.98827
640	1.87313×10^{-6}	2.08302	1.28345×10^{-6}	1.93497

相应的数值求解与真解对比图如下，其中从上到下分别为 $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320$：





4 讨论

通过对数据以及图像的观察我们发现：对于 $\epsilon = 0.1$ 时，采用均匀划分的一次有限元空间求解结果还较好，并且随着离散程度 N 或者说有限元空间维数的增大，数值求解的结果更逼近于真解的结果，并从误差收敛阶可以看出，一次有限元空间无穷范数范数与 L^1 误差范数收敛阶为 2，并且通过观察真解与数值解差的绝对值图发现，误差较大发生在更靠近 $x = 1$ 处。

而对于 $\epsilon = 0.0000001$ 时可以明显的看到，均匀划分的空间的误差数量级十分的大，但仍呈下降趋势；相比较而言，*Shinshkin* 划分就比较好，误差十分小，并且成 2 阶收敛误差。

5 Computer Code

代码部分请参见附件。