

Homework-Numerical integration

PB18010496 杨乐园

2021 年 4 月 30 日

1 Introduction

分别编写用复化3点的Gauss积分公式与复化梯形积分公式计算积分的通用程序，并用如上程序计算积分值

$$I_1(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad I_2(f) = \int_0^4 \frac{1}{1+x^2} dx \quad I_3(f) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx$$

取节点

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad N = 2^k, \quad k = 1, \dots, 7$$

并计算相应的误差收敛阶。

2 Method

通过Mathematica编程，首先构造相应结点列 x_i ，之后直接利用相应的数值积分公式直接计算即可，其中为了输出与运行方便，将程序写成对任意函数与任意 k 通用的程序，实现Module块化。

复化梯形积分公式为：

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)]$$

积分区间为 $[a, b]$ 的复化3点的积分公式推导如下：由正交多项式定理，内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

从而计算出3次正交多项式为：

$$q(x) = (x - \frac{a+b}{2})^3 - \frac{3}{20}(b-a)^2(x - \frac{a+b}{2})$$

故计算 $q(x)$ 其根为：

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} \frac{b-a}{2} \quad x_2 = \frac{a+b}{2} \quad x_3 = \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} \frac{b-a}{2}$$

进一步利用待定系数法或者直接积分得出相应系数为：

$$A_1 = \frac{5}{18}(b-a) \quad A_2 = \frac{4}{9}(b-a) \quad A_3 = \frac{5}{18}(b-a)$$

从而3点Gauss积分公式为:

$$\int_a^b f(x)dx = A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + A_3f(x_3)$$

故只需对每个小区间分别利用如上公式即可。

收敛阶计算公式为:

$$Ord = \frac{\ln(Error_{old}/Error_{new})}{\ln(N_{new}/N_{old})}$$

3 Results

输出结果如下:

图 1: 复化梯形积分公式误差与收敛阶

n	积分I1误差	Order	积分I2误差	Order	积分I3误差	Order
2	0.0154538809838640	-	0.133005865743732	-	0.561191476317955	-
4	0.00384003501204582	2.00877782228399	0.00359410103784989	5.20971509510854	0.0375927007196564	3.89996862695299
8	0.000958517966731819	2.00224208543295	0.000564261170954359	2.67119598610245	0.000192788176920777	7.60729217596359
16	0.000239536024205476	2.00056283293969	0.000144081935118689	1.96947361257350	5.12257677844805 $\times 10^{-9}$	15.19978734999909
32	0.000098781601328116	2.00014084377375	0.0000360379861498107	1.99929916405042	3.61682682928922 $\times 10^{-18}$	30.39949803226649
64	0.0000149691745990878	2.00003521927993	9.01059198390982 $\times 10^{-6}$	1.99982459629193	1.8030434582533 $\times 10^{-36}$	60.7989960624957
128	3.74227080914211 $\times 10^{-6}$	2.0000880533893	2.25271649501967 $\times 10^{-6}$	1.99995613086190	0. $\times 10^{-50}$	∞

图 2: 复化3点Gauss积分公式误差与收敛阶

n	积分I1误差	Order	积分I2误差	Order	积分I3误差	Order
2	3.61105588453694 $\times 10^{-8}$	-	0.000126759943722762	-	0.00611655512131353	-
4	4.02152449876063 $\times 10^{-10}$	6.48853442848194	0.000125930785952955	0.00946790645964	0.000738327573338012	3.05038640452974
8	5.74227026642664 $\times 10^{-12}$	6.12997746439743	2.45798953473697 $\times 10^{-7}$	9.00093652929549	4.32607467789073 $\times 10^{-6}$	7.41505865799778
16	8.76856547022374 $\times 10^{-14}$	6.03313658568156	2.07064277238533 $\times 10^{-12}$	16.85704056661598	1.15023363920413 $\times 10^{-10}$	15.19884401341018
32	1.36220306381126 $\times 10^{-15}$	6.00832715104946	4.59259605986225 $\times 10^{-14}$	5.49462497341191	8.12129546987244 $\times 10^{-20}$	30.39949800720642
64	2.12536916189951 $\times 10^{-17}$	6.00208452276871	7.18250397302354 $\times 10^{-16}$	5.99867920140011	4.04858992720 $\times 10^{-38}$	60.79899606250
128	3.31968956450686 $\times 10^{-19}$	6.00052130237801	1.12252328704006 $\times 10^{-17}$	5.99966960631250	0. $\times 10^{-50}$	∞

4 Discussion

通过对数据的观察我们发现:

两种数值积分计算公式都较好的给出了积分的数值积分值, 随着 N 的增大, 两种积分计算公式的误差均显著下降。其中复化3点Gauss积分公式计算的积分值误差均远小于复化梯形积分误差, 且收敛速度更快, 可以看到其符合复化3点Gauss积分的6阶收敛阶, 而复化梯形积分误差则是成2阶收敛。而对于第三个积分结果, 由于计算的结果误差非常低, 造成收敛速度较快, 以至于后续计算收敛阶出现分母为零计算不出的结果。

5 Computer Code

代码部分请参见附件!(Homework8.0427.nb)。