1. $Ax=\lambda x \quad \lambda\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|_2=1$

$y^TA=\lambda y^T \Rightarrow Ay=\lambda y$ 取 $y=x$ 即可 $\Rightarrow cond(\lambda)=\|y\|_2=1$

2. $A=A^T \Rightarrow \exists P$ 正交 $A=PJP^T \quad J=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

固定 $k\in\{1,\cdots,n\}$

$\beta=(A-a_{kk}I)v=P(J-a_{kk}I)P^Tv \qquad \|v\|_2=1$

① $\exists\lambda_i=a_{kk}$ 已证毕

② $a_{kk}\notin\{\lambda_i\}_{i=1}^n \Rightarrow J-a_{kk}I$ 可逆 $\Rightarrow v=(A-a_{kk}I)^{-1}\beta$

$1=\|v\|_2=\|(A-a_{kk}I)^{-1}\beta\|_2=\|P(J-a_{kk}I)^{-1}P^T\beta\|\leq\|(J-a_{kk}I)^{-1}\|_2\cdot\|\beta\|_2$

$\Rightarrow \|\beta\|_2\geq\frac{1}{\max_i|\lambda_i-a_{kk}|^{-1}}=\min_i|\lambda_i-a_{kk}|$

取 $v=e_k \Rightarrow \beta=(A-a_{kk}I)e_k=[a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{k,k-1},0,a_{k,k+1},\cdots,a_{kn}]$

$\Rightarrow\left(\sum_{\substack{j\neq k\\ j=1}}^n|a_{jk}|^2\right)^{1/2}\geq\min_i|\lambda_i-a_{kk}|$

3. $A=PJP^T$ P正交 $J=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \quad \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n>0$

$\|A^{-1}\|_2=\lambda_n^{-1} \Rightarrow \|E\|_2<\lambda_n \qquad F:=P^TEP\Rightarrow\|F\|_2<\lambda_n$

recall : $\|B\|_2=\max\{|x^TBx|: x\in\mathbb{R}^n,\|x\|_2=1\}$ if $B=B^T$

x≠0时不取等

$\Rightarrow |x^TFx|\leq\|F\|_2\cdot x^Tx<\lambda_nx^Tx\leq x^TJx$

$\Rightarrow x^T(J+F)x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$

令 $y=Px \Rightarrow y^T(A+E)y>0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$

4. $A=P\Sigma Q$ $\quad AA^T = P(\Sigma\Sigma^T)P^T \sim \Sigma\Sigma^T$

$\quad A^TA = Q^T(\Sigma^T\Sigma)Q \sim \Sigma^T\Sigma$

$$\Sigma\Sigma^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad \Sigma^T\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}$$

5. $A=PJP^T$ $\quad J=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad P$ 正交

令 $Q=\mathrm{diag}(\mathrm{sgn}(\lambda_1),\cdots,\mathrm{sgn}(\lambda_n))$

$$\Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} |\lambda_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n| \end{pmatrix}(QP^T) \qquad \text{SVD分解}$$

6. 定理2.1.4 & 题4.

7. 由 $\|\cdot\|_2$ 正交不变性，不妨 $A=\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & 0 & \end{pmatrix}_{m\times n}$

令 $U=\mathrm{Span}\{e_j\}_{j=i}^n$ $\quad \dim U = n-i+1$ $\quad \dim \mathcal{X} = i$ $\Rightarrow$ $\dim(\mathcal{X}\cap U)\geq 1$

$$\Rightarrow \exists u\neq 0 \quad u\in \mathcal{X}\cap U \quad \Rightarrow \quad u=\sum_{j=i}^n C_j e_j \quad \Rightarrow \quad \|Au\|_2/\|u\|_2 = \left(\frac{\sum_{j=i}^n C_j^2\sigma_j^2}{\sum_{j=i}^n C_j^2}\right)^{1/2} \leq \sigma_i$$

$$\Rightarrow \min_{\substack{u\in\mathcal{X}\\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \leq \sigma_i \qquad \forall \mathcal{X}\in \mathcal{G}_i^n$$

而 $\mathcal{X}=\mathrm{Span}\{e_j\}_{j=1}^i$ 时 $\dfrac{\|Au\|}{\|u\|} = \left(\dfrac{\sum_{j=1}^i C_j^2\sigma_j^2}{\sum_{j=1}^i C_j^2}\right)^{1/2} \geq \sigma_i$, $\forall u\in\mathcal{X}$

$$\Rightarrow \max_{\mathcal{X}\in\mathcal{G}_i^n} \min_{\substack{u\in\mathcal{X}\\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} = \sigma_i \qquad \text{另一个同理}$$

8. 代入即可

9. $Q=[q_1 \cdots q_n]$ $\quad AQ=[Aq_1 \cdots Aq_n]$

$$T=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \quad QT=[\alpha_1 q_1+\beta_1 q_2,\ \beta_1 q_1+\alpha_2 q_2+\beta_2 q_3,\ \cdots,\ \beta_{n-1} q_{n-1}+\alpha_n q_n]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 q_1+\beta_1 q_2=Aq_1 \\ \beta_i q_i+\alpha_{i+1} q_{i+1}+\beta_{i+1} q_{i+2}=Aq_{i+1} \\ \beta_{n-1} q_{n-1}+\alpha_n q_n=Aq_n \end{cases}$$

取适当的 q_1 (单位长度) $\quad q_{k+1}$ 为 Aq_k 在 $\{q_1,\cdots,q_k\}$ 的垂直空间的投影

故对 $\{q_1,\cdots,q_k,Aq_k\}$ 最后一位做正交化即可

$$q_{k+1}=Aq_k-\sum_{i=1}^{k}\langle Aq_k,q_i\rangle q_i$$

适当的 q_1 可以通过一步 Householder 变换得到

10. $$A \xrightarrow{\text{左}U_1} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{右}V_1} \begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & * & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

即 $U_k=\begin{pmatrix} I_{k-1} & \\ & * \end{pmatrix}$ 将第k列的 $k+1\sim m$ 行打至 (k,k) 处

$V_k=\begin{pmatrix} I_k & \\ & * \end{pmatrix}$ 将第k行的 $k+2\sim n$ 列打至 $(k,k+1)$ 处

$$U=U_1\cdots U_{n-1} \qquad V=V_{n-2}\cdots V_1$$

11. $$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \alpha_2 \end{pmatrix}-\alpha_2 I=\begin{pmatrix} \alpha_1-\alpha_2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

找 $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{G:=}\begin{pmatrix} \alpha_1-\alpha_2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \sin\theta=-\varepsilon/\sqrt{\varepsilon^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2} \\ \cos\theta=(\alpha_1-\alpha_2)/\sqrt{\varepsilon^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2} \end{cases}$

则 $$GAG^T(2,1)=\frac{-\varepsilon^3}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+\varepsilon^2}=O(\varepsilon^3)$$

取 Wilkinson 位移时 $\det(A-\mu I)=0$ （μ为位移）

$$GAG^T(2,1)=\varepsilon\cos 2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta(a_1-a_2)$$

而 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1-\mu\\ \varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow GAG^T(2,1)=0$

12. $$\alpha_{qq}^{(k+1)}=\alpha_{qq}^{(k)}-c^2(-2t\alpha_{pq}^{(k)}+t^2(\alpha_{qq}^{(k)}-\alpha_{pp}^{(k)}))$$
$$=\alpha_{qq}^{(k)}-c^2(-2t\alpha_{pq}^{(k)}+t(1-t^2)\alpha_{pq}^{(k)})$$
$$=\alpha_{qq}^{(k)}-\frac{1}{1+t^2}(-2t\alpha_{pq}^{(k)}+t(1-t^2)\alpha_{pq}^{(k)})$$
$$=\alpha_{qq}^{(k)}+t\alpha_{pq}^{(k)}$$

13. $$\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}c\alpha_{11}+s\alpha_{21} & c\alpha_{12}+s\alpha_{22}\\ -s\alpha_{11}+c\alpha_{21} & -s\alpha_{12}+c\alpha_{22}\end{pmatrix}=:\tilde{C}$$

对称 $\Leftrightarrow$ $c(\alpha_{21}-\alpha_{12})=s(\alpha_{11}+\alpha_{22})$

$c=\dfrac{\alpha_{11}+\alpha_{22}}{\sqrt{\cdots}}$ $s=\dfrac{\alpha_{21}-\alpha_{12}}{\sqrt{\cdots}}$ 即可

算法：用 Jacobi $\tilde{C}=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}P^T$ 若 $\lambda_1<\lambda_2$ 则令 $P\leftarrow P\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow C=\underbrace{\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}\operatorname{sgn}\lambda_1 & \\ & \operatorname{sgn}\lambda_2\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}|\lambda_1| & \\ & |\lambda_2|\end{pmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{P^T}_{V^T}$$

注：$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ （为了U可逆）

14. ①按13对子阵操作即可

② 即证 $\beta_{pp}^2+\beta_{qq}^2=\alpha_{pp}^2+\alpha_{qq}^2+\alpha_{pq}^2+\alpha_{qp}^2$

由 $\left\|U\begin{pmatrix}\alpha_{pp} & \alpha_{pq}\\ \alpha_{qp} & \alpha_{qq}\end{pmatrix}V^T\right\|_F^2=\left\|\begin{pmatrix}\alpha_{pp} & \alpha_{pq}\\ \alpha_{qp} & \alpha_{qq}\end{pmatrix}\right\|_F^2$ 即得

(U与V正交阵)

15. 不妨 $m>n$

① 用 Householder 变换把 A 变成 $\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\tilde{A}\\ 0\end{pmatrix}\\ n\end{array}\begin{array}{l}n\\ m-n\end{array}$

② 对 $\tilde{A}$ 找最大的 $\alpha_{pq}^2+\alpha_{qp}^2$ 用14.方法(至收敛)

16. $\Leftrightarrow$ $cs\,x^Tx+(c^2-s^2)x^Ty-sc\,y^Ty=0$

① $x^Ty=0$ 则取 $c=1$ $s=0$ 即可

② $x^Ty\neq 0$ 令 $t=\tan\theta$ $\quad(1-t^2)x^Ty+t(x^Tx-y^Ty)=0 \quad (*)$

$$\Delta=(x^Tx-y^Ty)^2+4(x^Ty)^2\geqslant 0$$

取 t 为 $(*)$ 的根即可

17. 若 $AV=[P_1\cdots P_n]$ 列之间正交 令 $q_k=P_k/\|P_k\|_2$

$$\Sigma:=\begin{pmatrix}\|P_1\|_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|P_n\|_2\end{pmatrix} \qquad Q:=[q_1\cdots q_n]$$

$\Rightarrow AV=Q\Sigma$

算法: 循环遍历2个列向量 调用16.的方法 直至达到精度

定义: $E([P_1\cdots P_n])=\sum_{i<j}(P_i^HP_j)^2$ $\quad(=0 \Leftrightarrow \{P_i\}$ 两两正交$)$

对 s与t列用16.题算法时 能量下降了

$$E-\tilde{E}=(P_s^HP_t)^2+\sum_{i\neq s,t}\left[(P_i^HP_s)^2-(P_i^H\tilde{P}_s)^2+(P_i^HP_t)^2-(P_i^H\tilde{P}_t)^2\right] \quad (*)$$

其中 $[\tilde{P}_s\ \ \tilde{P}_t]=[P_s\ \ P_t]\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}$ 代入发现 $(*)=(P_s^HP_t)^2$

故若每次选 s,t 使 $(P_s^H P_t)^2 = \max(P_i^H P_j)^2$ 则 （以下推导同 Jacobi）

$$E(P^{(k)}) = E(P^{(k-1)}) - \max_{i<j}\left(P_i^{(k-1)H} P_j^{(k-1)}\right)^2$$

又 $$E(P^{(k-1)}) \leq n(n-1)\max_{i<j}\left(P_i^{(k-1)H} P_j^{(k-1)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad E(P^{(k)}) \leq \left(1-\frac{1}{N}\right) E(P^{(k-1)}) \qquad N = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} E(P^{(k)}) = 0$$

18. $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$

$D^{-1}AD$ 上次对角为 $\beta_1 \cdot \frac{d_2}{d_1}, \cdots, \beta_{n-1}\frac{d_n}{d_{n-1}}$

下次对角为 $\gamma_1 \frac{d_1}{d_2}, \cdots, \gamma_{n-1}\frac{d_{n-1}}{d_n}$

$$\left(\frac{d_{k+1}}{d_k}\right)^2 = \frac{\gamma_k}{\beta_k} > 0$$

再取 $d_1 = 1$ 即得 $d_{k+1} = \left(\prod_{i\leq k}\frac{\gamma_i}{\beta_i}\right)^{1/2}$

19. (1) (*) $\beta_i \xi_{i-1} + \alpha_i \xi_i + \beta_{i+1}\xi_{i+1} = \lambda \xi_i \quad (i=1,\cdots,n)$ 令 $\beta_1 = \beta_{n+1} = 0$

若 $\xi_1 = 0$ 则 取 $i=1 \Rightarrow \xi_2 = 0$ （用到 $\beta_2 \neq 0$）

$i=2 \Rightarrow \xi_3 = 0 \quad (\beta_3 \neq 0) \quad \cdots\cdots \Rightarrow x = 0$ 矛盾

$\xi_n = 0$ 同理

(2) (归纳) 1° $i=2$ 即 $\beta_2\xi_2 = -P_1(\lambda) = \lambda - \alpha_1$ 即 (*)中 $i=1$ 时

2° 假设 $i<k$ 成立 $i=k$ 时 $P_{k-1}(\lambda) = (\alpha_{k-1}-\lambda)P_{k-2}(\lambda) - \beta_{k-1}^2 P_{k-3}(\lambda)$

$$= (\alpha_{k-1}-\lambda)(-1)^{k-2}\prod_{i=2}^{k-1}\beta_i\,\xi_{k-1} + \beta_{k-1}^2(-1)^{k-2}\prod_{i=2}^{k-2}\beta_i\,\xi_{k-2}$$

$$= (-1)^k\prod_{i=2}^{k-1}\beta_i\left[(\alpha_{k-1}-\lambda)\xi_{k-1} + \beta_{k-1}\xi_{k-2}\right] = (-1)^{k-1}\prod_{i=2}^{k}\beta_i \cdot \xi_k$$

20.

记 $T=\mathrm{diag}(T_1,\cdots,T_m)$ 　　T_i 均不可约对称三对角

由课本讨论，T_i 无重特征值 $\Rightarrow m\geq k$

而 T_i 与 T_{i+1} 之间即次对角元 $=0$ $\Rightarrow$ 次对角元至少 $k-1$ 个 0

21. (1) $x^TTx=-\sum x_i^2-(x_1-x_2)^2-(x_2-x_3)^2-(x_3-x_4)^2\leq 0$ 且取等 $\Leftrightarrow x=0$

(2) 特征值为 $2(\cos\frac{j\pi}{5}-1)$ 　$j=1,2,3,4$

2个

22. $\begin{cases}(T-\tilde{\lambda}I)y_k=z_{k-1}\\ z_k=y_k/\mu_k\end{cases}$ 　μ_k 为 y_k 的绝对值最大分量

23. 对 $B\cdot B^T$（三对角对称）用二分法

27. $(A+Bi)(u+vi)=\lambda(u+vi)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda u=Au-Bv\\ \lambda v=Av+Bu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}$

特征值相同（M 重数是 C 的两倍）

C 有 特征向量 $u+vi$ $\Leftrightarrow$ M 有 $\sim\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}$

注：$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-cv\\v=cu\end{cases}\Rightarrow$ 矛盾