第一次习题课 2021年10月30日

1.课程背景

预备课程：数值代数、数值分析、泛函分析、微分方程2。

课程内容：偏微分方程（PDE）的数值求解方法 之 **（经典）有限元方法** 。

教材《有限元方法的数学理论》默认读者具备泛函、微分II的理论基础。补课推荐Evans第五章，但不需要全部掌握。以下仅摘取对本门课有用的内容。

1.1 经典解的局限性

在本科课程微分方程I中，我们主要研究了常微分方程（ODE）和一些简单的PDE的经典解。然而在实际情况中，PDE往往不存在经典解。例如，对Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & U \\ u = 0, & \partial U \end{cases}$$

当区域U的边界不够光滑时，可能出现$f \in C^0(U)$但不存在$u \in C^2(U)$使得上式成立的情况。这意味着我们需要扩充解函数的空间，换言之，我们需要降低对解函数正则性的要求。

1.2 变分引理

有限元方法是一种基于 PDE变分形式的数值方法。课程微分方程II中介绍了PDE的变分形式。变分的基本思想是利用分部积分（Newton-Leibnitz）公式，将对解函数的正则性要求转移到测试函数上去。

在学习实分析（实变函数）时，我们曾证明过 **变分引理** （见周民强3rd版P164例1）：

$$f \in L(\mathbb{R}^n)\text{ 满足 }\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = 0,\ \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = 0\ \ a.e\ \in \mathbb{R}^n.$$

利用卷积，我们可证明$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，$f,\varphi$内积为零时，$f$几乎处处等于零。基于变分引理，我们可以对PDE进行变分。以一维椭圆方程$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$为例：

$$-\Delta u - f = 0 \Leftrightarrow \forall v \in C_0^\infty(0,1),\ \int_0^1 (-u'' - f)v\,dx = 0,$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in C_0^\infty(0,1),\ \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx.$$

注意到，此时解函数只需存在一阶导数。一个很自然的问题：**上哪个空间去找满足上式的u?**

（1）. $C_0^{\infty}(0,1)\Rightarrow $空间太小，很可能不存在。

（2）. $L^2(0,1) \Rightarrow$ 空间太大，缺乏对函数正则性的要求。

（3）. $C_0^1(0,1) \Rightarrow$ 在L^2范数下不是完备的。

我们需要构造一个恰当的函数空间，使得它既对函数正则性有一定要求，自身也能是个完备的内积空间（Hilbert空间）。为此，我们需要引入弱导数的概念。

1.3 弱导数与Sobolev空间

经典意义下导数（极限定义）的存在条件十分苛刻，我们希望能放宽可导的条件。

1.3.1 弱导数

设$u,v\in L^1_{\text{loc}}(U)$，$U$为区域，$\alpha$为多重指标。称$v$为$u$的$\alpha$阶弱导数，记为$D^\alpha u=v$，若

$$\int_U uD^\alpha\varphi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_U v\varphi\,dx,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(U).$$

这里的φ称为测试函数。利用变分引理，我们容易验证弱导数定义的良定性，即若$v,\tilde v$都是u的α阶弱导数，那么$v=\tilde v,\ a.e.$。

在本科实分析、泛函分析课程中，我们学习了L^p函数空间的一些基本性质。例如，L^p空间是Banach空间（完备赋范空间），且L^2空间是Hilbert空间（完备内积空间）。我们希望对L^p函数添加一些正则性的限制，使得所得到的函数空间能满足我们的需求。

1.3.2 Sobolev空间

$1\le p\le\infty$，$k\in\mathbb{N}$。定义Sobolev空间

$$W^{k,p}(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:D^\alpha u\in L^p(U),\ \forall|\alpha|\le k\}$$

我们记$H^k(U)=W^{k,2}(U)$，$W^{0,p}(U)=L^p(U)$。定义Sobolev范数如下:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)}=(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U|D^\alpha u|^p\,dx)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<\infty;$$
$$\|u\|_{W^{k,\infty}(U)}=\sum_{|\alpha|\le k}\operatorname*{esssup}_U|D^\alpha u|.$$

Sobolev空间是完备的。记$W_0^{k,p}(U)$为$C_0^\infty(U)$在范数$\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$下的闭包，$H_0^k=W_0^{k,2}$。

Evans第五章课后习题4证明了，当U为一维区间时，$W^{1,p}(U)$中元素几乎处处等于某绝对连续函数（证明过程见书面作业答案20210927and29.pdf-1.x.21）。此外，对一维情形，若函数具有跳跃间断点，则该函数不存在弱导数（见Evans P257例2）。

1.4 必要的工具

为了建立PDE的变分形式、引入弱解的定义，我们还需要一系列分析的工具，即Evans第五章5.3-5.8节的内容。下面我们快速的浏览这部分内容。

1.4.1 边界正则性

PDE中很多估计、结论需要依赖于边界的正则性。边界正则性的严格定义见Evans附录。多数情况下我们默认区域的边界充分光滑。

有限元方法这门课对边界正则性这块的要求为：（1）默认边界充分光滑时，能熟练运用相关结论；（2）边界正则性差，能构造反例。

1.4.2 逼近

（逼近1）设U有界且$\partial U \in C^1$，$1 \le p < \infty$，$u \in W^{k,p}(U) \Rightarrow \exists u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$

$\text{s.t. } u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(U).$

（逼近2）设U有界且$\partial U \in C^1$，$1 \le p < \infty$，$u \in W^{k,p}(U) \Rightarrow \exists u_m \in C^\infty(\overline{U})$

$\text{s.t. } u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(U).$

1.4.3 迹定理

（迹定理）设U有界且$\partial U \in C^1$，$1 \le p < \infty$。存在算子$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ s.t.

(1). $Tu = u|_{\partial U}$，$u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$;

(2). $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \le C_{p,U}\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

（迹零定理）设U有界且$\partial U \in C^1$，$1 \le p < \infty$。设$u \in W^{1,p}(U)$，则$u \in W_0^{1,p}(U)$

当且仅当 $Tu = 0 \ \text{ on } \partial U$.

1.4.4 一些估计

（$W_0^{1,p}$估计）设U有界区域，$1 \le p \le \infty$，$u \in W_0^{1,p}(U) \Rightarrow \|u\|_{L^p(U)} \le C\|Du\|_{L^p(U)}$.

（Poincare不等式）设U有界区域，$\partial U \in C^1$，$1 \le p \le \infty$。定义$\overline{u} := \frac{1}{|U|}\int_U u(x)\,dx$

为积分平均，那么$\|u - \overline{u}\|_{L^p(U)} \le C_{p,U}\|Du\|_{L^p(U)}$，$\quad \forall u \in W^{1,p}(U)$.

（球上的Poincare不等式）设$U = B(x,r)$，其余条件同上，那么

$\|u - \overline{u}\|_{L^p(U)} \le C_p r\|Du\|_{L^p(U)}$，$\quad \forall u \in W^{k,p}(U)$.

1.4.5 Lax-Milgram定理

泛函分析中的Lax-Milgram定理为PDE变分问题的适定性提供了理论保证。张恭庆书上的Lax-Milgram和Evans上的有些不同，但其实二者等价。我们有限元教材上用的是Evans的版本。

（Lax-Milgram）设V为Hilbert空间，双线性型$a(\cdot,\cdot)$有界且满足强制性，$F \in V'$，那么

$\exists!\ u \in V \text{ s.t. } a(u,v) = F(v),\ \ \forall v \in V.$

1.5 PDE的变分形式与离散

仍考虑一维Dirichlet问题

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}, \quad f \in L^2(0,1).$$

取测试函数空间$V = H_0^1(0,1)$。定义

$$a(u,v)=\int_0^1 u'v'\,dx,\quad \forall u,v\in V,$$
$$F(v)=\int_0^1 fv\,dx,\ \ v\in V.$$

一维Dirichlet问题等价于求解下面的变分问题：

$$(V)\qquad \text{Find } u\in V\ \ \text{ s.t. }\ a(u,v)=F(v),\quad \forall v\in V.$$

由Poincare不等式易证$a(\cdot,\cdot)$的强制性，而$a(\cdot,\cdot),F(\cdot)$均平凡满足连续性。所以由Lax-Milgram定理，变分问题的解存在唯一。

有限元方法的基本思想：取测试函数空间V的有限维子空间V_h，在V_h上对PDE进行变分。

$$(V_h)\qquad \text{Find } u_h\in V_h\ \ \text{ s.t. }\ a(u_h,v)=F(v),\quad \forall v\in V_h.$$

2. 课程内容

考试范围：前六章。

讲课范围：前六章必讲，第十到第十二章选讲，根据课程进度补充内容。（每年相差不大）

博士生资格考试（有限元方法）范围：讲课范围。

2.1 框架

（1）第零章：仅借助微积分、实分析的工具，给出一维椭圆方程的有限元离散的理论框架；

（2）第一、二章：泛函、微分II的理论工具；

（3）第三章：高维有限元空间的构造；

（4）第四章：Sobolev空间的多项式逼近论，用于高维问题有限元离散的误差估计；

（5）第五章：在第三、四章理论基础上完整的给出高维问题有限元离散理论框架；

（6）第六章：多重网格方法，一种基于有限元离散网格的高效Linear Solver。

2.2 内容拾遗

2.2.1 三个“Argument”

即 Density Argument、Duality Argument、Scaling Argument。

（1）Density：验证性质$\mathcal{P}$对$\forall x\in X$成立，而X_0在X中稠密，只需验证$\mathcal{P}$对$\forall x\in X_0$成立。

（2）Duality：误差估计的技巧，用于估计$u-u_h$的L^2范数。（首次出现在0.3节，P6）

（3）Scaling：积分换元、数值积分公式、三角有限元。

2.2.2 误差估计

基于PDE的变分形式（V）和有限元离散（V_h），

$$\begin{aligned} \text{Find } u \in V \quad \text{s.t} \quad a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V. \\ \text{Find } u_h \in V_h \quad \text{s.t} \quad a(u_h,v) = F(v), \quad \forall v \in V_h. \end{aligned}$$

两式相减可得到

$$a(u-u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h.$$

Cea不等式给出了$u-u_h$的H^1估计:

$$\begin{aligned} \alpha\|u-u_h\|_{H^1}^2 \le a(u-u_h,u-u_h) = a(u-u_h,u-v) \le C\|u-u_h\|_{H^1}\|u-v\|_{H^1} \\ \Rightarrow \|u-u_h\|_{H^1} \le \frac{C}{\alpha}\inf_{v\in V_h}\|u-v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

建立$\inf_{v\in V_h}\|u-v\|_{H^1}$的估计，即可得到$\|u-u_h\|_{H^1}$的估计。对一维Dirichlet问题，当$V_h$取$P^k$元时，

$$\|u-u_h\|_{H^1} \le Ch^k|u|_{H^{k+1}}.$$

考虑对偶问题

$$\text{Find } w \in V \quad \text{s.t.} \quad a(w,v) = \int_0^1 (u-u_h)v\,dx, \quad \forall v \in V.$$

那么

$$\begin{aligned} \|u-u_h\|_{L^2}^2 = a(w,u-u_h) &= \int_0^1 (w-v)'(u-u_h)'\,dx \\ &\le \inf_{v\in V_h}\|w'-v'\|_{L^2}\|u'-u_h'\|_{L^2} \\ &\le Ch\|w''\|_{L^2}\|u-u_h\|_{H^1} \\ &= Ch\|u-u_h\|_{L^2}\|u-u_h\|_{H^1}\ , \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\|u-u_h\|_{L^2} \le Ch^{k+1}|u|_{H^{k+1}}.$$

3. 书面作业

答案都在群里，每周三发完作业后更新。

4. 程序作业

4.1 Gauss积分公式

数值分析-->数值积分公式。最常用Gauss积分公式，本课程程序作业，3点Gauss积分公式精度足够。

区间[-1,1]上的3点Gauss积分公式如下:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}}).$$

注意，如果把Gauss积分公式取成下面这样

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 0.555555556 f(-0.774596669) + 0.888888889 f(0) + 0.555555556 f(\cdots).$$

那么数值积分公式将**没有精度**！

利用Scaling Argument，我们可以将Gauss积分公式推广到一般区间。

4.2 Linear solver

数值代数--> Ax=b求解x。LU（列主元）、Cholesky、迭代法……

当$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$为三对角矩阵时，使用Thomas算法（追赶法），时间效率为$O(N)$。

当$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$对称时，使用共轭梯度法（预处理）。