偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

· 边界条件 BC. 第一类 BC (Dirchlet BC). $u|_{\partial\Omega}$.
第二类 BC (Neumann BC). $a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y,t)$. $(x,y)\in\partial\Omega$.

· 对流方程：$u_t + a(x,t)u_x = f(x,t)$. (双曲型). 非线性：如

非线性：如 Berzas：$u_t + uu_x = 0$.

· 扩散方程：$u_t = C(x,t)u_{xx}$. (抛物型)

· 波动方程：$u_{tt} = C^2(x,t)u_{xx}$. (双曲型)

区分：L^2 内积、 $\langle u, v\rangle = \int \bar{u}v$

标量、 $\langle u, v\rangle = \sum \bar{u}(i)\, v(i)$

离散的标量、 $\langle u, v\rangle_h = h\sum u_i v_i$.

矢量、 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle_h = \sum_j \langle u_j, v_j\rangle_h \cdot h$.

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2019-09

1 Fourier级数和三角插值

函数的傅里叶级数展开对于分析和构造偏微分方程的数值方法特别有用。本章，我们介绍作为本书第一部分大部分分析基础的这一理论的主要结果。

1.1 Fourier级数理论的一些主要结果

首先，我们考虑用傅立叶级数表示连续复值函数。本章我们假设函数均定义在所有实数上，周期为2π（除特别说明之外）。若一个函数定义在一个有界区域，我们可以通过改变尺度和周期性延拓，使其转为2π周期的周期函数。此外，扩展函数的导数的数量将对结果产生重要影响。

一、 Fourier级数的收敛性

Theorem 1.1 假设$f \in C^1_{(-\infty,\infty)}$是$2\pi$周期的周期函数，则$f(x)$可由如下*Fourier*级数表示：$f(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$。
其中，*Fourier*系数$\hat{f}(\omega)$为：$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\omega x} dx$。
且该*Fourier*级数一致收敛性于$f(x)$

$C^n_{(a,b)}$：表示在(a,b)上的n次连续可导的函数集合。

Theorem 1.2 假设C^1中的函数f是分片的、2π周期的。若在$a < x < b$上$f \in C^1_{(a,b)}$，则在(a,b)上的任意子区间$a < \alpha \leq x \leq \beta < b$上，其*Fourier* 级数一致收敛性于$f(x)$。在间断点$x$处，*Fourier*级数收敛性于$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$

大作业2:

函数：$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$，$f_N(x) = \sum_{\omega=1}^{N} \frac{sin(\omega x)}{\omega}$，$x \in \Omega = (0, 2\pi]$。

将Ω均匀剖分$x_j = j * \Delta x, j = 1, \cdots, m$，$\Delta x = \frac{2\pi}{m}$，对于$m = 20$，和$m = 160$ 分别绘出$f(x)$、$f_N(x)$ 和$f(x) - f_N(x)$的图形。这儿N分别取10和100.

对于修正的$\tilde{f}_N = \sum_{\omega=1}^{N} \frac{sin\frac{\omega\pi}{N}}{\frac{\omega\pi}{N}} \frac{sin\omega x}{\omega}$重复上面的工作。

二、 标量内积与L_2模

令$\bar{f}$为f的复共轭，则L_2标量内积与L_2模分别定义为：

- 函数f与g的内积：$(f, g) = \int_0^{2\pi} \bar{f}(x)g(x)dx$，

- 函数f的L_2模：$\|f\|_2 = (f, f)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} \bar{f}(x)f(x)dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

- 序列$\{f_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$在平均意义下（$L_2$模意义下）收敛于$f$，即：$\lim_{\mu\to\infty} \|f_\mu - f\| = 0$

标量内积是双线性的，即：

$(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (f + g, h) = (f, h) + (g, h)$

$(\lambda f, g) = \bar{\lambda}(f, g), \quad (f, \lambda g) = \lambda(f, g), \quad \lambda\, is\, costant\, scalar$

L_2模满足：$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$，$|(f, g)| \le \|f\| \cdot \|g\|$ ，

三角不等式：$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$，$|\|f\| - \|g\|| \le \|f - g\|$

Lemma 1.1 指数函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$关于$L_2$标量内积是标准正交的，即：

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}) = \begin{cases} 0 & \text{当} m \neq n; \\ 1 & \text{当} m = n \end{cases}$$

Theorem 1.3 （*Bessel*不等式）

对所有的N，有：$\sum_{\omega=-N}^{N}|\hat{f}(\omega)|^2 \leq \|f\|^2$。

此外，当且仅当*Parseval*关系成立（即：$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2 = \|f\|^2$）时，有：$\lim_{N\to\infty}\|f - S_N\|^2 = \lim_{N\to\infty}(\|f\|^2 - \sum_{\omega=-N}^{N}|\hat{f}(\omega)|^2) = 0$；

其中$S_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-N}^{N}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-i\omega x}f(x)dx$。

Theorem 1.4 任意分片连续地函数f都能展开成在L_2模意义下收敛于f的*Fourier*级数，即：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-i\omega x}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-i\omega x}, f(x))$；且*Parseval*关系成立。

Theorem 1.5 若$f, g \in L_2$, 则$(f, g) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\bar{\hat{f}}\hat{g}$，其中：
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)e^{i\omega x}$

作业1：P17, 1.1.1、1.1.2；

补充作业：试证：任意分片连续地函数f都能展开成在L_2模意义下收敛于f的Fourier级数，即：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-i\omega x}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-i\omega x}, f(x))$；且Parseval关系成立。

1.2 周期性格点函数与差分算子

一、　周期性格点函数

将 x 轴用一系列点分割，则这些点称为格点 $x_0, x_{\pm1}, x_{\pm2}, \ldots, x_{\pm n} \ldots$；如均匀剖分：$x_j = j \cdot h, j = 0, \pm1, \ldots$；其中 $h = \frac{2\pi}{N+1}$ 是空间步长。函数 $u(x)$ 在格点 x_j 处的值称为格点函数值 $u_j = u(x_j)$。周期性格点函数 $u_j = u(x_j) = u(x_j + 2\pi) = u_{j+N+1}$.

二、　差分算子

前差算子：$D_+ = \frac{E^1 - E^0}{h}$.　　$|(D_\pm - \frac{\partial}{\partial x}) e^{iwx_j}| = O(w^2 h)$

后差算子：$D_- = \frac{E^0 - E^{-1}}{h}$.

中心差：$D_0 = \frac{E^1 - E^{-1}}{2h}$.　　$|(D_0 - \frac{\partial}{\partial x}) e^{iwx_j}| = O(w^3 h^2)$

三、　导数的近似

$D_+ D_- = \frac{E^1 - 2E^0 + E^{-1}}{h^2}$.　　$|(D_+ D_- - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) e^{iwx_j}| = O(w^4 h^2)$

四、　有限维矢量空间的模以及性质

考虑 m 维矢量空间 V_m，$\forall u = (u^{(1)}, \cdots, u^{(m)}) \in V_m$，$u^{(j)}, j = 1, \cdots, m$ 是复数，u^* 是 u 的共轭转置，即：$u^* = \bar{u}^T$。

标量内积：$< u, v >= u * v = \sum_{j=1}^{m} \bar{u}^{(j)} v^{(j)}$；模：$|u| =< u, u >^{\frac{1}{2}}$

标量内积满足下列双线性关系：

$< u, v >= \overline{< v, u >}$，$< u + w, v >=< u, v > + < w, v >$

$< \lambda u, v >= \bar{\lambda} < u, v >$，$< u, \lambda v >= \lambda < u, v >$，$\lambda$ 是复常数

$| < u, v > | \leq |u| \cdot |v|$，$|u + v| \leq |u| + |v|$

$< u, v >\leq |u| \cdot |v| \leq \delta |u|^2 + \frac{1}{4\delta} |v|^2$，常数 $\delta > 0$

五、　矩阵的模

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times m)}$，$A$ 的转置为：$A^T = (a_{ji})_{m\times m}$；

A的共轭转置为：$A^* = (\bar{a}_{ji})_{m\times m}$；其中$a_{ij}$ 是复数。

若u是m维矢量空间的矢量，则A的模为：$|A| \equiv max_{|u|=1}|Au|$。

矩阵模的性质：$|Au| \leq |A| \cdot |u|$，$|A+B| \leq |A| + |B|$，$|AB| \leq |A| \cdot |B|$

若λ, u分别是A的特征值和相应的特征向量，则有：$A{\cdot}u = \lambda{\cdot}u$。

A的谱半径为$\rho(A) \equiv max_j|\lambda_j(A)|$，且有：$\rho(A) \leq |A|$，其中$\lambda_j$是$A$的第$j$个特征值。

六、 周期性格点函数的标量内积和模

将$[a,b]$区间用$N+1$个节点均分，空间步长为h。对于固定的h和N，这些节点处的函数值构成了一个矢量空间

由于我们主要是对$h \to 0$或$N(h) \to \infty$时的函数值感兴趣，而上面定义的内积，在这种极限情况下并不一定是有限的，所以需要另外定义离散的标量内积。

离散的标量内积和模：$(u,v)_h \equiv \sum_{j=0}^{N} \bar{u}_j v_j h$，及$\|u\|_h^2 \equiv (u,u)_h$。

离散的标量的内积是双线性的；即：

$(u,v)_h = \overline{(v,u)}_h$，$(u+w,v)_h = (u,v)_h + (w,v)_h$

$(\lambda u,v)_h = \bar{\lambda}(u,v)_h$，$(u,\lambda v)_h = \lambda(u,v)_h$，$\lambda$是复常数

$|(u,v)_h| \leq \|u\|_h \cdot \|v\|_h$，$|(u,bv)_h| \leq \|b\|_\infty \cdot \|u\|_h \cdot \|v\|_h$，$\|b\|_\infty = max_j|b_j|$

$\|u+v\|_h \leq \|u\|_h + \|v\|_h$，$|\ \|u\|_h - \|v\|_h\ | \leq \|u-v\|_h$

若u，v是连续函数在格点的投影，则有：

$\lim_{h\to 0}(u,v)_h = (u,v)$，$\lim_{h\to 0}\|u\|_h^2 = \|u\|^2$

这个结论对 C^1 函数也是有效的

七、 算子模

$\|Q\|_h = \sup_{\|u\|_h=1} \|Qu\|_h$

八、 矢量格点函数的标量内积和模

对于矢量 $u = (u^{(1)}, \cdots, u^{(m)})^T$ 的格点函数，定义其内积和模：
$(u, v)_h \equiv \sum_{j=0}^{N} < u_j, v_j > h$，及 $\|u\|_h^2 \equiv (u, u)_h$。

如此定义的内积的性质；

$(u, v)_h = \overline{(v, u)}_h$，$(u + w, v)_h = (u, v)_h + (w, v)_h$

$(\lambda u, v)_h = \bar{\lambda}(u, v)_h$，$(u, \lambda v)_h = \lambda(u, v)_h$，$\lambda$ 是复常数

$|(u, v)_h| \leq \|u\|_h \cdot \|v\|_h$，$\|u + v\|_h \leq \|u\|_h + \|v\|_h$，$|\ \|u\|_h - \|v\|_h\ | \leq \|u - v\|_h$

若 A 是常系数矩阵，则有：$|(Au, v)_h| \leq |A| \cdot \|u\|_h \cdot \|v\|_h$

若 $A = A_j$ 是一个节点函数矩阵，则有：，$|(Au, v)_h| \leq \cdot max_j |A_j| \cdot \|u\|_h \cdot \|v\|_h$

作业2：P24, 1.2.1、1.2.2；

1.3 三角插值

一、 三角插值

令 $u \in P_h$ 是一个 2π 周期的格点函数

问题：将 $[0, 2\pi]$ 均分为 $N+1$ 个小区域，节点为 $x_0, \ldots, x_{N+1}$， $x_j = j \cdot h$， $j = 0, 1, \cdots, N$， $h = \frac{2\pi}{N+1}$， $u_j = u(x_j)$ ， $u_j = u_{j+1+N}$。

寻求唯一（存在唯一）的 $\phi(x)$ 使得 $u_j = \phi(x_j)$， $u_j = u_{j+1+N}$，且 $\phi(x)$ 是三角函数：

- N 是偶数，则在 $[0, 2\pi)$ 中有奇数个节点，则三角多项式是对称的，即从 $-\frac{N}{2}$ 到 $\frac{N}{2}$， $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$；
  其中 $\tilde{u}(\omega)$ 由 $u_j = \phi(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x_j}$， $j = 0, 1, \cdots, N$ 确定。

- N 是奇数，则三角多项式是非对称的，在 $[0, 2\pi]$ 中有偶数个节点，且 $-\frac{N+1}{2} + 1 \leq \omega \leq \frac{N+1}{2}$

为方便起见，我们假设 N 是偶数

Lemma 1.2 指数函数 $e^{i\nu x}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \frac{N}{2}$ 关于离散内积是正交的，即：

$$(e^{i\nu x}, e^{i\mu x})_h = \begin{cases} 0, & 0 < |\nu - \mu| \leq N; \\ 2\pi, & \nu = \mu \end{cases}$$

Theorem 1.6 满足 $u_j = \phi(x_j)$， $j = 0, 1, \cdots, N$，的三角插值：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$$

是唯一的。

Theorem 1.7 若$\phi(x)$、$\psi(x)$分别满足：$\phi(x_j)=u_j$，$\psi(x_j)=v_j$，$j=0,1,\cdots,N$，的三角插值；即：$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{u}(\omega)e^{i\omega x}$，$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{v}(\omega)e^{i\omega x}$；则有：

(1) $(u,v)_h=\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\bar{\tilde{u}}(\omega)\tilde{v}(\omega)=(\phi,\psi)$

(2) $\|\phi\|^2=\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}|\tilde{u}(\omega)|^2=\|u\|_h^2$

(3) $\|D_+^l u\|_h^2\le\|\frac{d^l}{dx^l}\phi\|^2\le(\frac{\pi}{2})^{2l}\|D_+^l u\|_h^2$，$l=0,1,\cdots$。

$\frac{2|x|}{\pi}\le|\sin x|$. $\forall |x|\le\frac{\pi}{2}$.

二、 $\hat{u}(\omega)$与$\tilde{u}(\omega)$ 关系

考虑2π周期的周期函数u，假设u可以用Fourier级数表示，

即：$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega)e^{i\omega x}$，

其格点函数的三角插值为：$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{u}(\omega)e^{i\omega x}$；

讨论$\hat{u}(\omega)$与$\tilde{u}(\omega)$ 关系

$\mu=\omega+l(N+1)$.
$\Rightarrow e^{i\mu x_j}=e^{i\omega x_j}$.
$u_j=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\mu}\hat{u}(\mu)e^{i\mu x_j}$.

Lemma 1.3 若$|\omega|\le\frac{N}{2}$，$\tilde{u}(\omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega+l(N+1))$。尤其是：若$|\omega|>\frac{N}{2}$，$\hat{u}(\omega)=0$；则有：三角插值$\phi(x)=u(x)$。

Theorem 1.8 假设u 是2π周期的周期函数，其*Fourier*系数满足下列关系：$|\hat{u}(\omega)|\le\frac{c}{|\omega|^m}$，$\omega\neq0$，$m>1$；则有：$\|u(\cdot)-\phi(\cdot)\|_\infty\le\frac{2c}{\sqrt{2\pi}}(\frac{N}{2})^{1-m}(\frac{1}{m-1}+\frac{2(N+1)}{N}B_m)$，其中$B_m=\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{2j-1})^m$，$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega)e^{i\omega x}$，$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{u}(\omega)e^{i\omega x}$，$\|u(\cdot)\|_\infty=sup_{0\le x\le2\pi}|u(x)|$。

推论：存在常数C_l，使得：

$\|\frac{d^l}{dx^l}u(x)-\frac{d^l}{dx^l}\phi(x)\|_\infty\le C_l(\frac{N}{2})^{1+l-m}$，$1+l<m$

作业3:

写出N为奇数时，定理1.7，并证明。

1.4 高维问题

下面以二维问题为例，说明高维问题。

一、 Fourier级数

$f(x)$ 的Fourier级数：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\omega_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\omega_2=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i<\omega,x>}$，

$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i<\omega,x>}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}(e^{i<\omega,x>},f(x))$

二、 标量内积与 L_2 模

假设 $f(x)=f(x_1,x_2),g(x)=g(x_1,x_2)$ 对 x_1,x_2 分别是定义在实数域上的 2π 周期函数（除特别说明之外）。

函数 f 与 g 的内积：$(f,g)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)g(x)dx_1dx_2$，

函数 f 的 L_2 模：$\|f\|_2=(f,f)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)f(x)dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}}$

序列 $\{f_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ 在平均意义下（L_2 模意义下）收敛于 f，即：$\lim_{\mu\to\infty}\|f_\mu-f\|=0$

三、 若干引理与定理

引理：三角函数 $e^{i<\omega,x>}$ 是正交的，即：

$$(e^{i<\omega,x>},e^{i<\mu,x>})=\{\begin{array}{ll}(2\pi)^2, & \omega=\mu\\ 0, & \omega\neq\mu\end{array}$$

其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2)$，$\omega_1,\omega_2$ 分别是整数；$x=(x_1,x_2)$，$<\omega,x>\equiv\omega_1x_1+\omega_2x_2$

定理：假设 $f(x)=f(x_1,x_2)$ 是定义在实数域上,分别对 x_1,x_2 是 2π 周期的光滑函数，则其Fourier级数一致收敛于 f

当且仅当Parseval关系成立时，Fourier级数在 L_2 模意义下收敛于 f

Parseval关系成立，即：$\sum_{\omega_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\omega_2=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2=\|f\|^2$

广义Parseval关系：$(f,g)=\sum_{\omega_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\omega_2=-\infty}^{\infty}\bar{\hat{f}}(\omega)\hat{g}(\omega)$

四、 二维三角插值

- 区域剖分与格点函数
- 差分算子

  平移算子 E_{x_1},E_{x_2}：$E_{x_1}v_j\equiv E_{x_1}v_{j_1,j_2}\equiv v_{(j_1+1),j_2}$.

  其它差分算子也做类似定义：D_{+x_1}、D_{+x_2}，D_{-x_1}，$\cdots$
- 格点函数离散的标量内积和模

  离散的标量内积和模：$(u,v)_h\equiv\sum_{j_1=0}^{J_1}\sum_{j_2=0}^{J_2}\bar{u}_{j_1j_2}v_{j_1j_2}h^2$，及 $\|u\|_h^2\equiv(u,u)_h$。
- 三角插值
- 定理（作业，将下述二个定理推广到二维）

Theorem 1.9 满足 $u_j=\phi(x_j)$，$j=0,1,\cdots,N$，的三角插值：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{u}(\omega)e^{i\omega x}$$

是唯一的。

$\tilde{u}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{i\omega x},e^{i\omega x})_h$

Theorem 1.10 若 $\phi(x)$、$\psi(x)$ 分别满足：$\phi(x_j)=u_j$，$\psi(x_j)=v_j$，$j=0,1,\cdots,N$，的三角插值；即：
$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{u}(\omega)e^{i\omega x}$，$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{v}(\omega)e^{i\omega x}$；
则有：

(1) $(u,v)_h=\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\bar{\tilde{u}}(\omega)\tilde{v}(\omega)=(\phi,\psi)$

(2) $\|\phi\|^2=\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}|\tilde{u}(\omega)|^2=\|u\|^2$

(3) $\|D_+^l u\|_h^2\le\|\frac{d^l}{dx^l}\phi\|^2\le(\frac{\pi}{2})^{2l}\|D_+^l u\|_h^2$，$l=0,1,\cdots$。

作业：

P37，1.5.2