有限元方法 2021 秋（9 月 18 日作业）

金晨浩 SA21001033

教材题目

0.x.1 **验证：选取分段线性元对应的刚度矩阵由 (0.5.1) 给出：**

$$K_{ii} = h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1},\ K_{i+1,i} = K_{i,i+1} = -h_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, \cdots, N-1)$$

$$K_N = h_N^{-1},\ \text{矩阵其他分量均为 } 0.$$

此外，设 f 分片线性，即 $f = f_I = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\phi_i$。求解质量矩阵 M 满足 $KU = MF$。

证明. 刚度矩阵 K 的分量 $K_{ij} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx$。当 $|i-j| > 1$ 时 $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$ 或单点，$\Rightarrow K_{ij} = K_{ji} = 0$。当 $1 \le i \le N-1$ 时 $K_{i,i+1} = K_{i+1,i} = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} h_{i+1}^{-2} \, dx = -h_{i+1}^{-1}$，
$K_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} h_i^{-2} \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} h_{i+1}^{-2} \, dx = h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1}$；$K_{NN} = \int_{x_{N-1}}^{x_N} h_N^{-2} \, dx = h_N^{-1}$。//刚度矩阵 K

$F_i = \int_0^1 f\phi_i \, dx = \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \int_0^1 \phi_j \phi_i \, dx \Rightarrow M = (M_{ij}),\ M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j \, dx$。$M_{ij} = 0,\ |i-j| > 1$。
当 $1 \le i \le N-1$ 时 $M_{i,i+1} = M_{i+1,i} = \frac{1}{6} h_{i+1}$，$M_{ii} = \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1})$。$M_{NN} = \frac{1}{3} h_{NN}$。//质量矩阵 M □

> Remark：(1). 注意题目条件，本题边界仅限制了 $v(0) = 0$，且网格不一定等距。
> (2). 有同学没看懂题意，这道题就是让你们把矩阵 K, M 的每个分量算出来。

0.x.6 **在定理 0.4.5 条件下证明 $\|u - u_I\| \le Ch^2 \|u''\|$。事实上，对满足 $w(0) = 0$ 的充分光滑函数 w，我们可证 $\int_0^1 w(x)^2 \, dx \le \tilde{c} \int_0^1 w'(x)^2 \, dx$。估计界定常数 $\tilde{c}$ 最小取值。如果 $w(0) = w(1) = 0$ 呢？**

证明. (i). 设 w 充分光滑且 $w(0) = 0$，由分部积分，$|w(y)| = |\int_0^y w'(x) \, dx| \le (\int_0^y 1 \, dx)^{\frac{1}{2}} (\int_0^y w'(x)^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$
$\le \sqrt{y} \|w'\|,\ \forall y \in (0,1) \Rightarrow \|w\|^2 \le \int_0^1 y \, dy \|w'\|^2 = \frac{1}{2} \|w'\|$，界定常数可取为 $\frac{1}{2}$。

(ii). 设 w 充分光滑且 $w(0) = w(1) = 0$，则 $\forall y \in (0, \frac{1}{2})$，$|w(y)| \le \sqrt{y} (\int_0^y w'(x)^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$
$\Rightarrow \|w\|_{L^2(0,\frac{1}{2})}^2 \le \int_0^{\frac{1}{2}} y \, dy \|w'\|_{L^2(0,\frac{1}{2})}^2 = \frac{1}{8} \|w'\|_{L^2(0,\frac{1}{2})}^2$；同理 $\|w\|_{L^2(\frac{1}{2},1)}^2 \le \frac{1}{8} \|w'\|_{L^2(\frac{1}{2})}^2$，因此
$\|w\|^2 \le \frac{1}{8} \|w'\|^2$，界定常数可取为 $\frac{1}{8}$。

(iii). 记 $w = u - u_I$。注意到在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，$w(x_i) = w(x_{i+1}) = 0$，同理上述论述，$\|w\|^2_{L^2(x_i,x_{i+1})} \le \frac{1}{8}h^2_{i+\frac{1}{2}}\|w'\|^2_{L^2(x_i,x_{i+1})} \Rightarrow \|w\|^2 \le \frac{1}{8}h^2\|w'\|^2 \Rightarrow \|u - u_I\| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}h\|u' - u_I'\| \le \frac{1}{4}h^2\|u''\|$。其中定理 0.4.5 中使得 $\|w'\|^2 \le \tilde{c}\|w''\|^2$ 成立的界定常数为 $\frac{1}{2}$。因此题中可取为 $C = \frac{1}{4}$。 □

Remark：(1). 注意看题目要求，Hint 里面要求算界定常数，很多人都没算。

(2).(i),(ii) 中给出的界定常数均不是严格的。

0.x.9 **定义** $V = \{v \in L^2(0,1):\ a(v,v) < \infty,\ v(0) = 0\}$, $a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx$。**证明以下强制性结论**：$\|v\|^2 + \|v'\|^2 \le Ca(v,v),\ \forall v \in V$，**并给出界定常数** C **的值。**

证明. 因为 $V \cap C^1(0,1)$ 在 V 中稠密，故只需证结论对 $\forall v \in V \cap C^1(0,1)$ 成立。$\forall y \in (0,1)$, $|v(y)| \le \int_0^y |v'(x)|\,dy \le \sqrt{y}\|v'\| \Rightarrow \|v\|^2 \le \frac{1}{2}\|v\|^2 \Rightarrow$ 界定常数 C 可取 $\frac{3}{2}$。 □

0.x.10 $V, a(\cdot,\cdot)$ **定义同上，证明** $\|v\|^2_{\max} \le Ca(v,v)$ **并给出** C **的大小。**

证明. 只需研究 $v \in V \cap C^1(0,1)$ 情形。同理上述，$|v(y)| \le \sqrt{y}\|v'\|,\ \forall y \in (0,1) \Rightarrow$ 对两边取 max 即有 $\|v\|^2_{\max} \le Ca(v,v)$，常数 $C = 1$。 □

Remark：0.x.9、0.x.10 两题所用的 Density argument 是分析学中的常用技巧，在这门课后续内容中也将频繁使用。

0.x.5、0.x.7 略。

补充题

1. **设** $\Omega = (-1,1)$, $g = -\mathrm{sgn}$，sgn **为符号函数，**g **是否存在弱导数？**

证明. g 不存在弱导数。假设 g 存在一阶弱导数 h，则 $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_{-1}^1 h\phi\,dx = -\int_{-1}^1 g\phi'\,dx$ $= \int_0^1 \phi'(x)\,dx - \int_{-1}^0 \phi'(x)\,dx = -2\phi(0)$。取 $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ s.t. $\phi_m(0) = 1,\ \forall x \ne 0,\ \phi_m(x) \to 0$，于是 $1 = \lim_{m\to\infty}\phi(0) = \lim_{m\to\infty} -\frac{1}{2}\int_{-1}^1 h\phi_m\,dx = 0$，矛盾。 □

Remark：(1).Heaviside 函数（0 到 $+\infty$ 上的示性函数）的弱导数为 0 点的 Dirac 测度 δ，是一个分布。这门课不考虑分布。

(2). Evans 习题 5-4 结论：$u \in W^{1,p}(0,1) \Rightarrow u$ 几乎处处等于某绝对连续函数（$1 \le p < \infty$）。