《数值分析》之

常微分方程数值方法

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

- 一阶微分方程组的标准形式为

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \qquad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

- 在这个方程组中，要确定n个未知函数$y_1, y_2, \ldots, y_n$. 它们是单变量x的函数，记号y_i'表示dy_i/dx

- $$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 - e^x \\ y_2' = y_1 + y_2 + 2e^x \end{cases}$$
- 通解为

$$y_1(t) = 2ae^{3x} - 2be^{-x} - 2e^x$$
$$y_2(t) = ae^{3x} + be^{-x} + \frac{1}{4}e^x$$

其中a, b为任意常数。

- 在估计可能具有唯一解的明确定义的物理问题中，微分方程组会伴有确定通解中任意常数的辅助条件。
- 前例中的初始条件可以是

$$y_1(0) = 4, \qquad y_2(0) = \frac{5}{4}$$

则解为

$$y_1(t) = 4e^{3x} + 2e^{-x} - 2e^{x}$$
$$y_2(t) = 2e^{3x} - e^{-x} + \frac{1}{4}e^{x}$$

- 一般的方程组的初值问题是由n个微分方程连同给定的在$x = x_0$的初值所组成。

向量记号

- 可以采用向量记号来改写方程组。设Y表示分量为$y_1, y_2, \ldots, y_n$的列向量，因此Y是$\mathbb{R}$或其中一个区间到$\mathbb{R}^n$的一个映射。
- 类似地，设F表示具有分量$f_1, f_2, \ldots, f_n$的列向量，每个分量是$\mathbb{R}^{n+1}$或它的一个子集上的一个函数
- 方程组可以写为

$$Y' = F(x, Y)$$

方程组的初值问题还包括向量$Y(X_0)$的数值。

中国科学技术大学

- 高阶微分方程可以转换为一阶微分方程组。假设给定下列形式的单个微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

它可以转化为

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \quad\vdots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

- 这种转换后就可以在某些软件上采用求解常微分方程组的过程求解高阶微分方程
- 高阶方程组也可以类似转换为一阶微分方程组

Taylor级数方法

- 完全类似于标量方程讨论的Taylor级数方法。
- 对每个函数写出如下的截断Taylor级数

$$y_i(x+h) \approx y_i(x) + hy_i'(x) + \frac{h^2}{2!}y_i''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y_i^{(n)}(x)$$

向量记号为

$$Y(x+h) \approx Y(x) + hY'(x) + \frac{h^2}{2!}Y''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}Y^{(n)}(x)$$

其中出现的导数可以从微分方程组中得到。

- 通常当这些导数用于计算机编程时，需要采用特定的次序进行计算。

中国科学技术大学

例

对下列初值问题采用三阶Taylor级数方法，$h=-0.1$, 在区间$[-2,1]$上计算

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2^2 - x^3 & y_1(1) = 3 \\ y_2' = y_2 + y_1^3 + \cos x & y_2(1) = 1 \end{cases}$$

- 需要的高阶导数是

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1' + 2y_2y_2' - 3x^2 \\ y_2'' &= y_2' + 3y_1^2y_1' - \sin x \\ y_1''' &= y_1'' + 2y_2y_2'' + 2(y_2')^2 - 6x \\ y_2''' &= y_2'' + 6y_1(y_1')^2 + 3y_1^2y_1'' - \cos x \end{aligned}$$

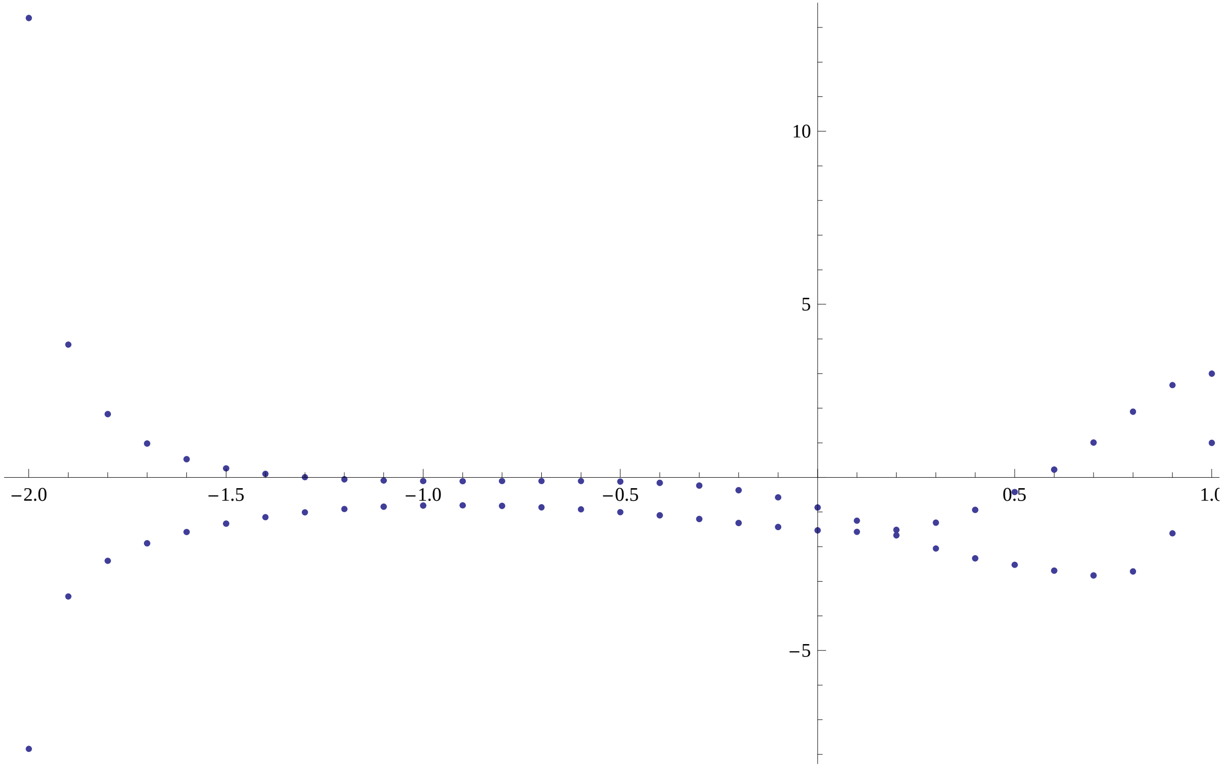
- 执行Mathematica程序“odes_taylor_3.nb”查看结果

```
In[1]:= M = 30; k = 0; h = -3.0 / M; t = 1.0; x = 3.0; y = 1.0; solx = Table[{t, x}, {n, 0, M}];
  soly = Table[{t, y}, {n, 0, M}]; Print[k, "\t", t, "\t", x, "\t", y];
  For[k = 1, k <= M, k++, x1 = x + y^2 - t^3; y1 = y + x^3 + Cos[t];
   x2 = x1 + 2 * y * y1 - 3 * t^2; y2 = y1 + 3 * x^2 * x1 - Sin[t];
   x3 = x2 + 2 * y * y2 + 2 * (y1)^2 - 6 t; y3 = y2 + 6 * x * x1^2 + 3 * x^2 * x2 - Cos[t];
   x = x + h * (x1 + 0.5 * h * (x2 + 1.0 / 3 * h * x3)); y = y + h * (y1 + 0.5 * h * (y2 + 1.0 / 3 * h * y3));
   t = t + h; Print[k, "\t", t, "\t", x, "\t", y]; solx[[k]] = {t, x}; soly[[k]] = {t, y}]
```

0	1.	3.	1.
1	0.9	2.66914	-1.61243
2	0.8	1.8984	-2.71796
3	0.7	1.01022	-2.83284
4	0.6	0.228192	-2.69152
5	0.5	-0.421055	-2.5246
6	0.4	-0.936983	-2.33486
7	0.3	-1.30656	-2.05487
8	0.2	-1.5124	-1.67074
9	0.1	-1.57001	-1.24917
10	1.38778×10^{-16}	-1.52671	-0.870031
11	-0.1	-1.43109	-0.574746
12	-0.2	-1.31659	-0.367893
13	-0.3	-1.20163	-0.235461
14	-0.4	-1.0952	-0.158531
15	-0.5	-1.00163	-0.11965
16	-0.6	-0.923521	-0.104704
17	-0.7	-0.86303	-0.102873
18	-0.8	-0.822388	-0.105995
19	-0.9	-0.80403	-0.107803
20	-1.	-0.810611	-0.103131
21	-1.1	-0.845015	-0.0870364
22	-1.2	-0.9104	-0.0536945
23	-1.3	-1.01035	0.00520962
24	-1.4	-1.14933	0.103085
25	-1.5	-1.33388	0.263076
26	-1.6	-1.57631	0.527468
27	-1.7	-1.90587	0.981312
28	-1.8	-2.40965	1.83308
29	-1.9	-3.43972	3.83869
30	-2.	-7.84047	13.2755

In[3]:= `fig1 = ListPlot[solx]; fig2 = ListPlot[soly]; Show[fig1, fig2, PlotRange → All]`

Out[3]=



- 可以通过引入新变量，使得方程组中不出现变量x。具体做法是令$(y_1)_0 = x$，然后再加入一个新方程$(y_1)_0' = 1$就可以实现这种转化。从而方程组可以写为

$$Y' = F(Y)$$

这种方程组称为自控的(autonomous)

- 当方程组具有形式$Y' = F(x, Y)$时，可以采用Runge-Kutta方法求解。
- 经典的向量形式的四阶Runge-Kutta公式是

$$Y(x+h) = Y(x) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

其中

$$\begin{aligned}
F_1 &= hF(x, Y) \\
F_2 &= hF(x + h/2, Y + F_1/2) \\
F_3 &= hF(x + h/2, Y + F_2/2) \\
F_4 &= hF(x + h, Y + F_3)
\end{aligned}$$

- 类似地，也可以给出Runge-Kutta-Fehlberg公式。

- 多步法也可以推广到方程组
- 例如，Adams-Bashforth-Moulton预估–校正方法的向量形式为

$$
\begin{aligned}
Y^*(x+h) = Y(x) + \frac{h}{720}\Big[& 1901F(Y(x)) - 2774F(Y(x-h)) \\
& + 2616F(Y(x-2h)) - 1274F(Y(x-3h)) \\
& + 251F(Y(x-4h))\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(x+h) = Y(x) + \frac{h}{720}\Big[& 251F(Y^*(x+h)) + 646F(Y(x)) \\
& - 264F(Y(x-h)) + 106F(Y(x-2h)) \\
& - 19F(Y(x-3h))\Big]
\end{aligned}
$$

这时需要提供用一个单步过程(如五阶Runge-Kutta方法)提供起始值：$Y(x_0+h)$, $Y(x_0+2h)$, $Y(x_0+3h)$, $Y(x_0+4h)$