第二次程序作业

PB18010496 杨乐园

2021 年 10 月 16 日

1 问题介绍

对如下偏微分方程基于一次有限元空间和二次有限元空间分别求解相应的数值解：

$$\begin{cases} -(d(x)u^{'}(x))^{''} + c(x)u(x) = f & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

其中，$d(x) = \sin x + 2, c(x) = x^2 + 1, u(x) = x(x-1)$，对网格加密程度$N = 10, 20, 40, 80$。绘制出相应的数值解与真解的对比图，计算出相应的模最大误差，以及相应的误差收敛阶，其中误差收敛阶计算公式如下：

$$Ord = \frac{ln(Error_{old}/Error_{new})}{ln(N_{new}/N_{old})}$$

2 实现方法

2.1 有限元变分格式

由等价的弱解形式：

$$Find\ u_h \in V_h, s.t. a(u_h, v) = F(v), for\ any\ v \in V_h.$$

其中，$a(u,v) = \int_0^1 (d(x)u^{'}(x)v^{'}(x) + c(x)u(x)v(x))dx, F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$.当我们假设对$[0,1]$进行$N$等分时，即$h_e = \frac{1}{N}, x_i = ih_e, i = 0,1,2,..,N$，对于$u_h$在有限元空间内进行系数展开$u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i\phi_i(x)$，并依次取有限元空间的基函数$v = \phi_i, i = 1,2,...,N-1$，从而得到如下方程组：

$$a(u_h, v) = \sum_{j=1}^{N-1} u_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1,..,N-1$$

将其写成刚度矩阵的形式：

$$K \cdot U = F$$

其中$K = (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j=N-1}$，$U = (u_1,..,u_{N-1})^T$，$F = (f_1,..,f_{N-1})^T, f_i = F(\phi_i)$。

2.2 一次有限元空间基函数

对于一次函数空间，其基函数如下定义：

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_e} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_e} & x \in (x_i, x_{i+1}], \quad i = 1,..,N-1 \\ 0 & else \end{cases}$$

2.3 二次有限元空间基函数

对于二次函数空间，我们考虑其 $Lagrange$ 基函数：

$$\varphi_j(x)=\begin{cases}\frac{(2x-x_j-x_{j-1})(x-x_{j-1})}{h_e^2} & , \quad x\in(x_{j-1},x_j)\\ \frac{(2x-x_j-x_{j+1})(x-x_{j+1})}{h_e^2} & , \quad x\in[x_j,x_{j+1}) \\ 0 & , \quad else\end{cases} \quad , \quad j=1,..,N-1$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\frac{4(x-x_i)(x_{i+1}-x)}{h_e^2} & , \quad x\in(x_i,x_{i+1})\\ 0 & , \quad else\end{cases} \quad , \quad i=0,1,..,N-1$$

基于如上基函数定义，我们按照如下顺序对二次基函数排序：

$$\{\varphi_1,\varphi_2,..,\varphi_{N-1},\psi_{\frac{1}{2}},\psi_{1+\frac{1}{2}},...,\psi_{N-1+\frac{1}{2}}\}$$

2.4 数值积分方法

通过采用复化3点 $Gauss$ 积分公式计算相关数值积分：

$$\int_a^b f(x)dx=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+A_3f(x_3)$$

其中系数为：

$$A_1=\frac{5}{18}(b-a) \qquad A_2=\frac{4}{9}(b-a) \qquad A_3=\frac{5}{18}(b-a)$$

节点值为：

$$x_1=\frac{a+b}{2}-\frac{\sqrt{15}}{10}(b-a) \qquad x_2=\frac{a+b}{2} \qquad x_3=\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{15}}{10}(b-a)$$

本此实验将积分区间16等分。

2.5 方程组求解方法

本次实验考虑到精度需要以及后续实验需要，利用共轭梯度迭代方法求解方程组，其中迭代的初始向量选择为$(1,1,....,1)$，终止计算精度为10^{-16}。

2.6 误差范数

对于数值解与真解，我们通过计算其无穷范数以及L^1范数来比较误差。

对于无穷范数来说，对其进行数值求解。将区间$[0,1]$进行100等分，记$\Delta x=\frac{1}{100}$，分别计算数值解与真解在划分节点$x_i=i\cdot\Delta x, i=0,1,...,100$处差值的绝对值，并且取最大值作为误差值，即：

$$error=\max_i\{|u(x_i)-u_h(x_i)|\}=\max_i\{|u(x_i)-\sum_{j=1}^{N-1}u_j\phi_j(x_i)|\}$$

对于L^1范数来说，同样采取数值求解。利用复化3点$Gauss$公式，将$[0,1]$积分区间64等分，对函数$|u(x)-u_h(x)|$求其在$[0,1]$上的数值积分，以作为L^1范数的数值估计。

2.7 代码结构

由于本次编程实验较为简单，代码结构上也相对易懂一些。

1.首先将基函数编写为相应的函数，为后续计算复化积分提供需要；

2.再通过3点 $Gauss$ 积分对刚度矩阵K进行装配构造；

3.进而利用复化3点 $Gauss$ 积分公式计算出右侧向量F；

4.接下来利用共轭梯度迭代法求解展开系数向量U；

5.最后求解无穷范数以及L^1范数误差以及相应收敛阶即可。

3 实验结果

3.1 真解图像

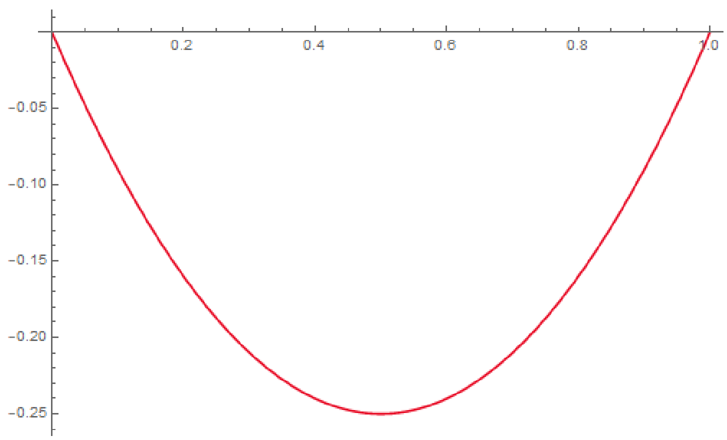

图 1: 插值函数误差以及收敛阶

3.2 一次有限元空间

3.2.1 误差与收敛阶

基于一次有限元空间数值求解误差以及收敛阶如下：

表 1: 一次有限元空间数值求解误差与收敛阶

n	L^∞ error	order	L^1 error	order
10	0.00248819	–	0.00162207	–
20	0.000598746	2.05508	0.000405578	1.99979
40	0.000149839	1.99854	0.000101537	1.99797
80	3.74190e-05	2.00157	2.55325e-05	1.99161
160	9.36474e-06	1.99846	6.53158e-06	1.96683

3.2.2 数值求解图像与真解对比

基于一次有限元空间数值求解图像如下，其中红色实线为真解，蓝色点图为数值解：

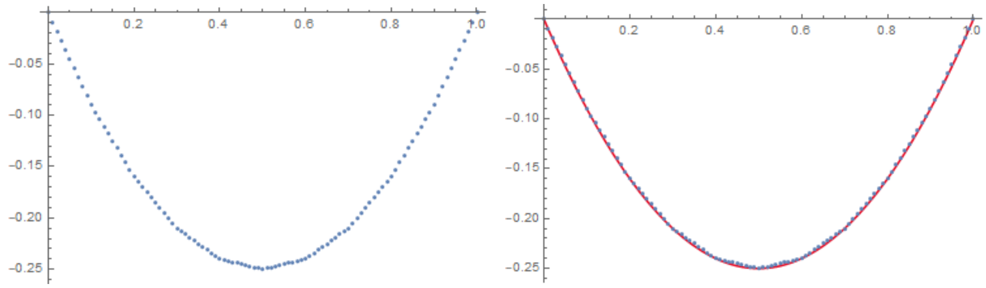

图 2: $N = 10$数值求解图与真解对比图

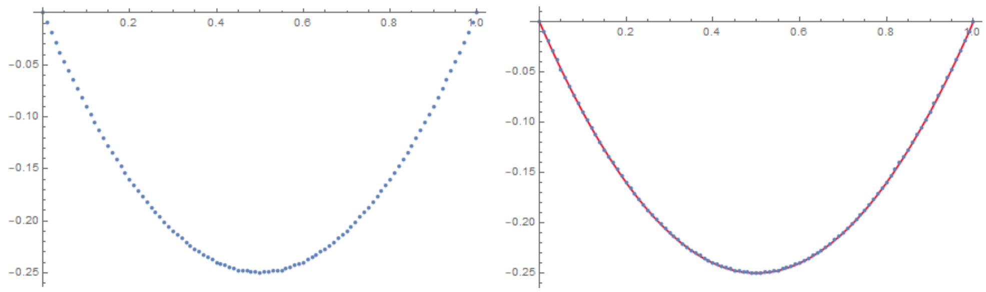

图 3: $N = 20$数值求解图与真解对比图

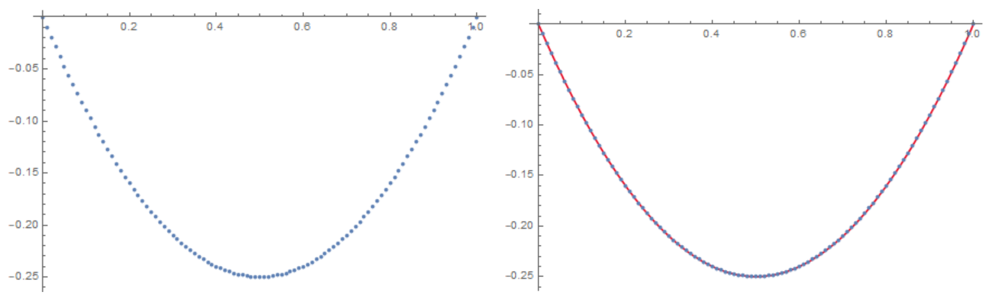

图 4: $N = 40$数值求解图与真解对比图

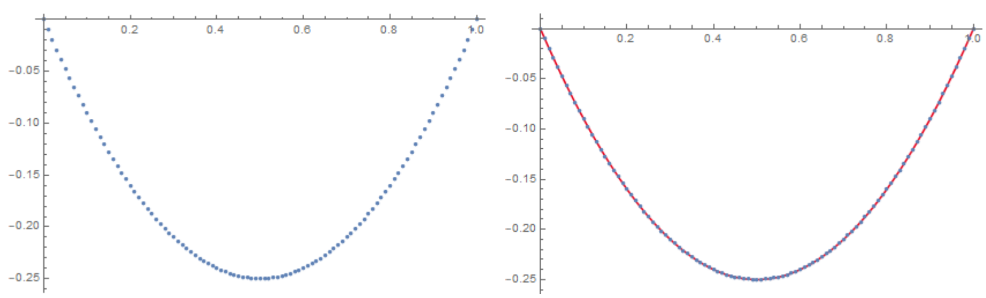

图 5: $N = 80$数值求解图与真解对比图

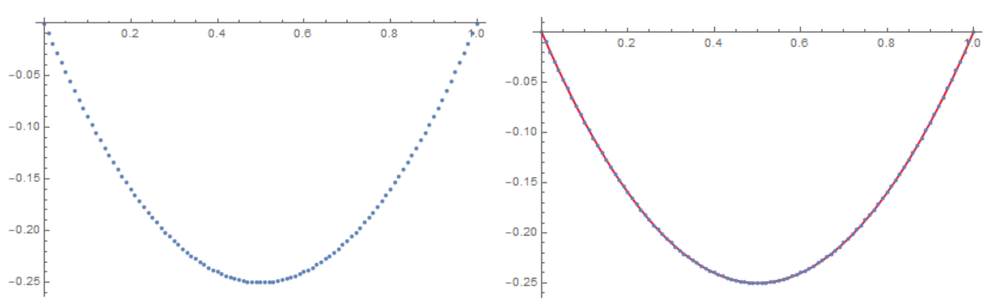

图 6: $N = 160$数值求解图与真解对比图

3.3 二次有限元空间

3.3.1 误差与收敛阶

注：由于最初所选择的真解函数$u(x) = x(x-1)$造成误差极小，无法看出收敛阶，所以更改以下真解函数为$u(x) = (x-1)\sin x$。故有如下结果：

基于二次有限元空间数值求解误差以及收敛阶如下：

表 2: 二次有限元空间数值求解误差与收敛阶

n	L^∞ error	order	L^1 error	order
10	1.88853e-05	–	6.03994e-06	–
20	2.41071e-06	2.96973	7.60397e-07	2.98971
40	3.04644e-07	2.98426	9.62945e-08	2.98123
80	3.83222e-08	2.99087	1.25542e-08	2.93928
160	4.80519e-09	2.99552	1.79988e-09	2.80220

3.3.2 数值求解图像与真解对比

基于二次有限元空间数值求解图像如下，其中红色实线为真解，蓝色点图为数值解：

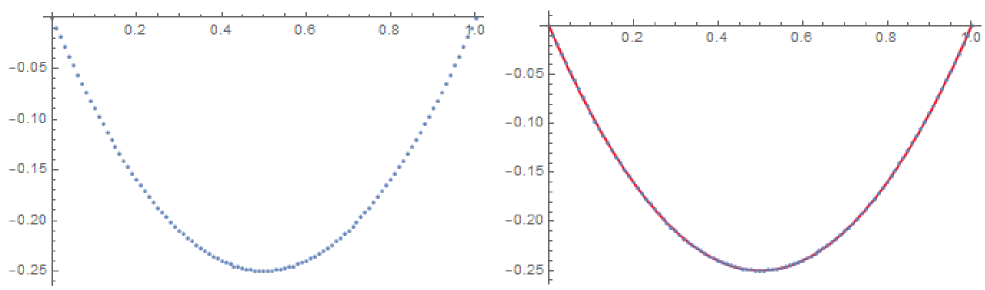

图 7: $N = 10$数值求解图与真解对比图

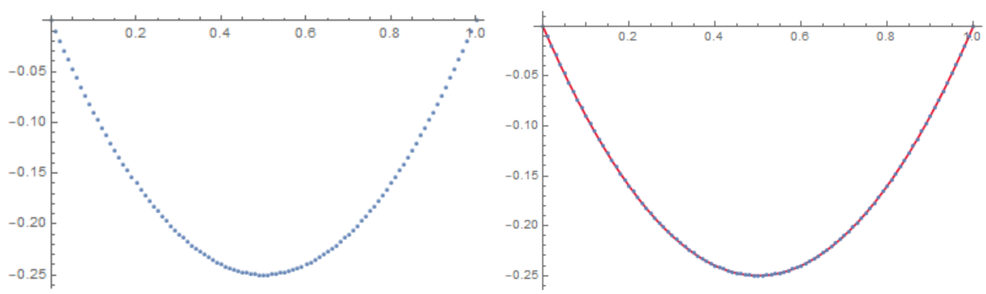

图 8: $N = 20$数值求解图与真解对比图

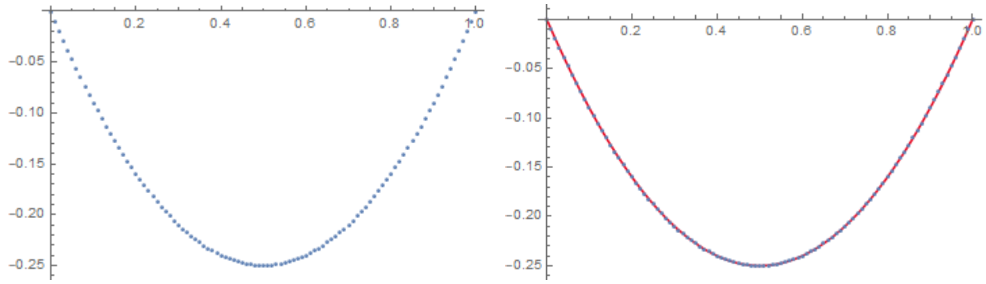

图 9: $N = 40$数值求解图与真解对比图

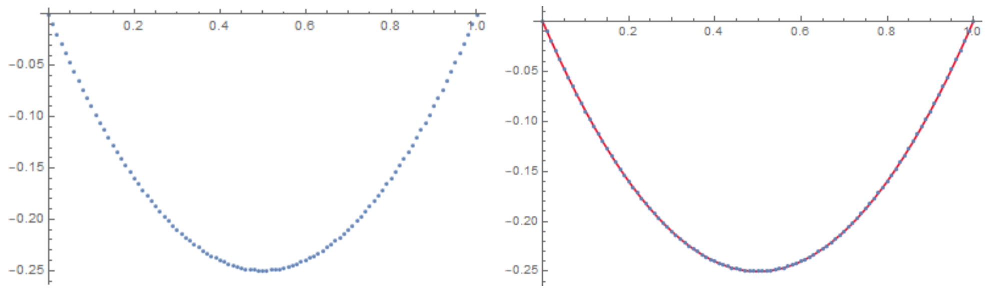

图 10: $N = 80$数值求解图与真解对比图

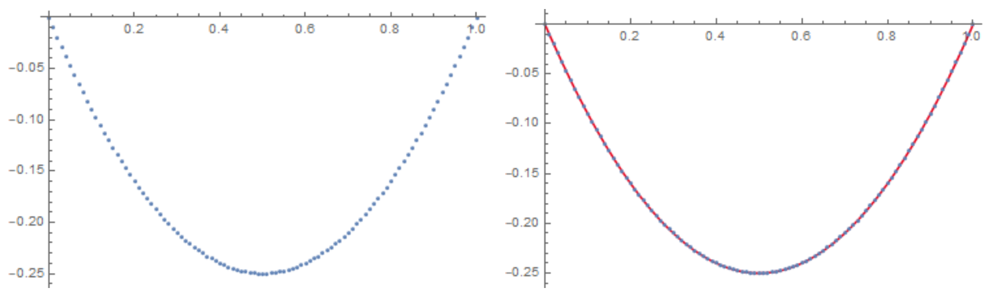

图 11: $N = 160$数值求解图与真解对比图

4 讨论

通过对数据以及图像的观察我们发现：随着离散程度N或者说有限元空间维数的增大，数值求解的结果更逼近于真解的结果，并从误差收敛阶可以看出，一次有限元空间无穷范数范数与L^1误差范数收敛阶为2，二次有限元空间无穷范数范数与L^1误差范数收敛阶为3。

5 Computer Code

代码部分请参见附件。