小波分析基础

傅里叶级数

Xin Li (李新)

Email: lixustc@ustc.edu.cn

Phone: 0551-63607202

1 Fourier 级数

如果 f 是任意以 2π 为周期的函数, 是否能将其展开成如下三角函数和式的形式

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\ ?$$

来源:

例 **2.1** 求解下面的偏微分方程:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), t>0, 0\le x\le \pi \\ u(x,0) &= f(x), 0\le x\le \pi \\ u(0,t) &= 0, u(\pi,t)=0 \end{aligned}$$

该偏微分方程的解$u(x,t)$表示在长为π的圆棍上，点x处在时刻t时对应的温度，其初始温度（即$t=0$时）由函数$f(x)$给出，而在端点处（即$x=0$和$x=\pi$）的温度保持0。

求解：

假设在区间$-\pi \le x \le \pi$上，$u(x,t)$具有如下的表示形式：

$$u(x,t) = A_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} A_k(t)\cos kx + B_k(t)\sin kx.$$

由于$u(x,0) = u(x,\pi) = 0$，所以$A_k = 0, k = 0, \dots, +\infty$。再代入到方程中，有

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_k'(t)\sin kx \\ u_{xx}(x,t) &= -\sum_{i=1}^{\infty} k^2 B_k(t)\sin kx \qquad (2.1) \end{aligned}$$

从而，得到

$$B_k(t)k^2 + B_k'(t) = 0.$$

所以，

$$B_k(t) = C_k e^{-k^2 t}.$$

进而得到，

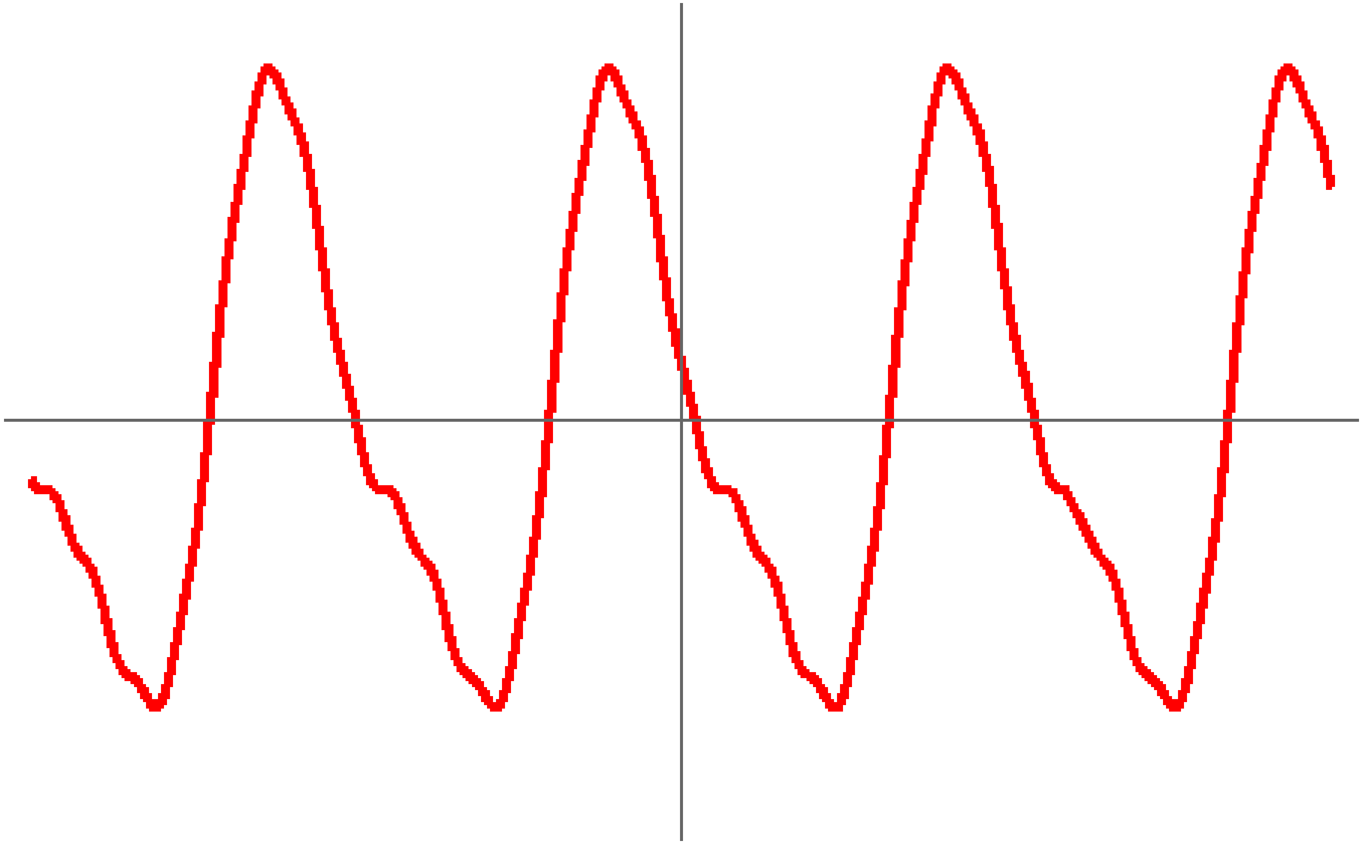
$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

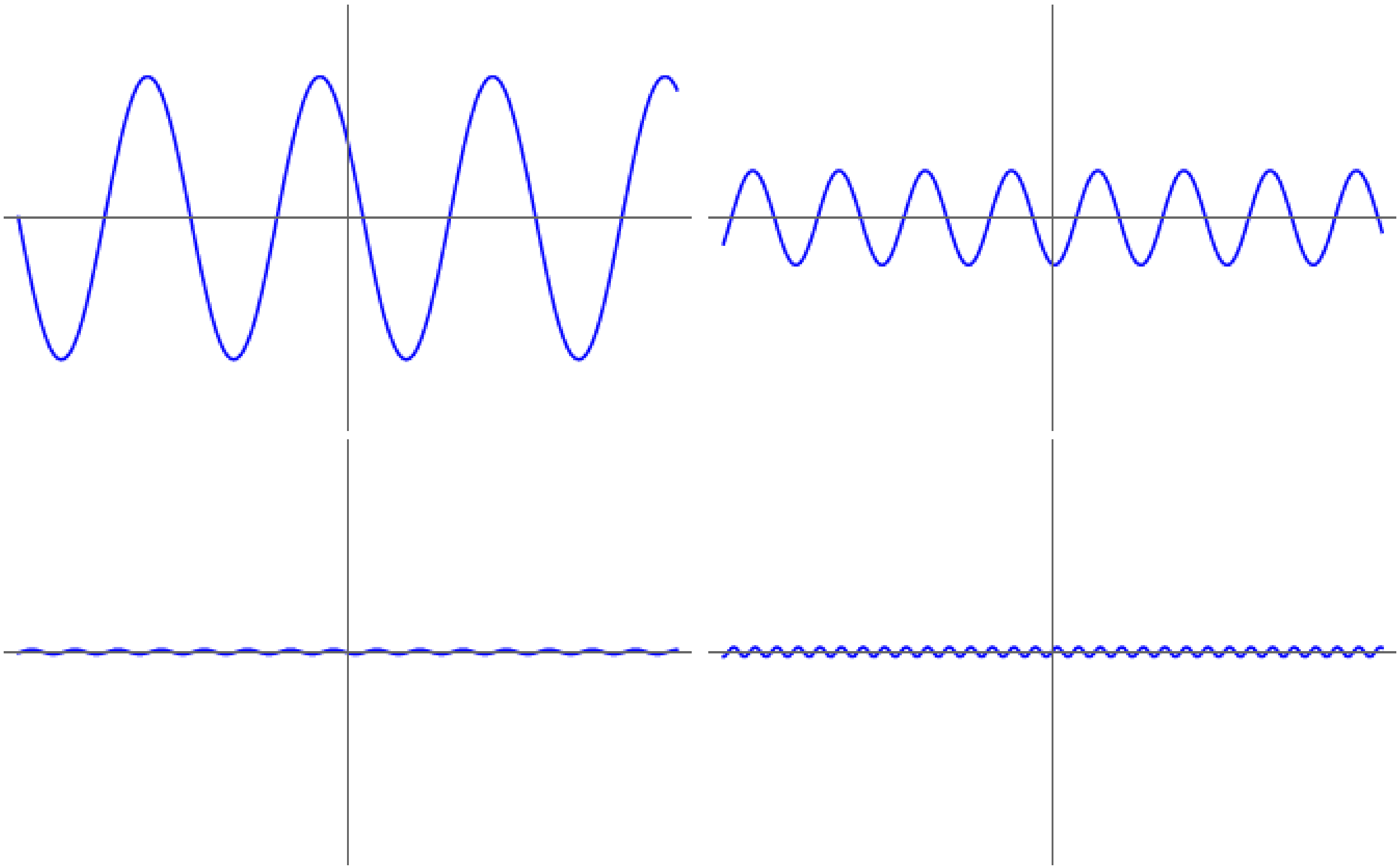
我们定义$f_o(x)$，使得在区间$-\pi \le x \le 0$，$f_o(x) = f(-x)$，在区间$0 \le x \le \pi$上，$f_o(x) = f(x)$。并设$f_o(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_k \sin kx$，将$u(x,t)$的表达式代入到初值条件，可得$C_k = f_k$，即

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

可以看出，如果我们假设函数$u(x,t)$和$f(x)$具有傅里叶级数形式的展开，则上述的热力学方程问题就可以直接求解。这也是傅里叶在文献“热的分析理论”中给出的结果。

来源2：





三角函数系的正交性

函数集

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n=1,2,\cdots\right\}$$

是 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的标准正交集.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 1, & n=k\geq 1. \\ 2, & n=k=0. \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)dx = \begin{cases} 1, & n=k\geq 1. \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)dx = 0,\ \forall n,k.$$

定理 如果 f 可展开成三角函数和式的形式, 即

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

则有

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad (1)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx. \qquad (3)$$

Fourier 级数

定义 假设 f 是以 2π 为周期的函数. 如果三角级数

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

的系数由(1), (2) 和(3) 给出, 则称该三角级数为 f 的 **Fourier 级数**, 其系数 a_k, b_k 称为 f 的 **Fourier 系数**.

一般周期函数的 Fourier 级数

定理 如果 f 可展开成如下三角函数和式的形式

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a),$$

则有

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dt,$$
$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(k\pi x/a)dt,$$
$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(k\pi x/a)dt.$$

定义 假设 f 是以 $2a$ 为周期的函数. 其 Fourier 级数定义为如下的三角级数

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a),$$

其中 Fourier 系数 a_k, b_k 由以下公式给出

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dt,$$

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(k\pi x/a)dt,$$

$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(k\pi x/a)dt.$$

余弦和正弦展开

- 如果 f 是以 $2a$ 为周期的偶函数, 则其 Fourier 级数表示为

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(k\pi x/a),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx,\ a_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(k\pi x/a)dx.$$

- 如果 f 是以 $2a$ 为周期的奇函数, 则其 Fourier 级数表示为

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(k\pi x/a)$$

其中

$$b_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(k\pi x/a)dx.$$

任意区间上函数的 Fourier 级数

- 假设 f 定义在区间 (a, b) 上. 可将其延拓成为 $\mathbb{R}$ 上以 $b-a$ 为周期的函数, 从而可得其 Fourier 级数.
- 假设 f 定义在区间 $(0, a)$ 上. 首先将其进行偶延拓

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < a, \\ f(-x), & -a < x < 0. \end{cases}$$

其次将 f_e 延拓成为 $\mathbb{R}$ 上以 $2a$ 为周期的函数, 从而可得 f 的余弦级数

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a),$$

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx,\ a_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(k\pi x/a)dx.$$

- 假设 f 定义在区间 $(0,a)$ 上. 首先将其进行奇延拓

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < a, \\ -f(-x), & -a < x < 0. \end{cases}$$

其次将 f_o 延拓成为 $\mathbb{R}$ 上以 $2a$ 为周期的函数, 从而可得 f 的正弦级数

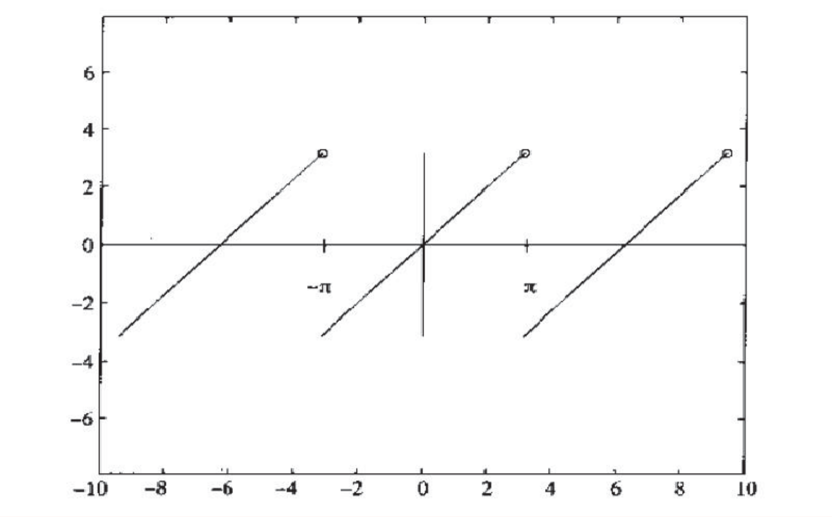
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x/a),$$

$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(k\pi x/a)dx.$$

例1 考虑函数

$$f(x) = x, \ -\pi \leq x < \pi.$$

将其周期延拓为以 2π 为周期的函数. (如图)



该函数是奇函数, 因此 Fourier 系数 $a_k = 0$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx \\ &= -\frac{1}{\pi k}x\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

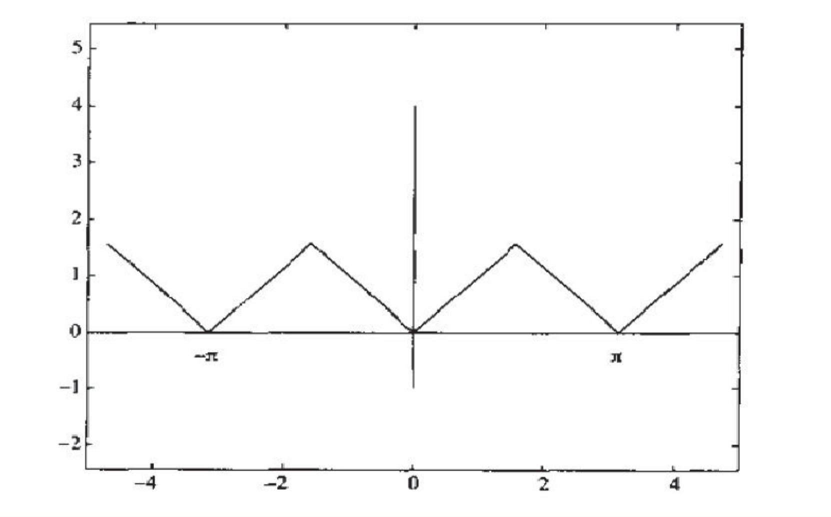
于是其 Fourier 级数为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

例2 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

将其周期延拓为以 2π 为周期的偶函数. (如图)



计算其 Fourier 系数

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \tfrac{\pi}{4}.\\
a_j &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(jx)dx\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(jx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x)\cos(jx)dx\\
&= \frac{4\cos(j\pi/2) - 2\cos(j\pi) - 2}{\pi j^2}.
\end{aligned}$$

因为在 Fourier 系数中只有 a_{4k+2} 非零, 所以 Fourier 系数简化为

$$a_{4k+2} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}.$$

于是 Fourier 级数表示为

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((4k+2)x).$$

复型 Fourier 级数

函数系

$$\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}},\ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\right\}$$

在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中是标准正交的.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}dt = \begin{cases} 2\pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

定理 如果 f 可展开成复型三角级数的形式, 即

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{int},$$

则有

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt. \qquad (*)$$

定义 假设 f 是以 2π 为周期的函数. 如果复型三角级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{int}$$

的系数由$(*)$式给出, 则该级数称为 f 的 **复型 Fourier 级数**, 系数 α_n 称为 f 的 **复型 Fourier 系数**.

实型 Fourier 级数与复型 Fourier 级数的关系

Fourier 系数

$$\alpha_0 = a_0$$

$$\begin{cases} \alpha_n & = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ n \geq 1 \\ \alpha_{-n} & = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),\ n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n & = \alpha_n + \alpha_{-n},\ n \geq 1 \\ b_n & = i(\alpha_n - \alpha_{-n}),\ n \geq 1 \end{cases}$$

Fourier 级数

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{int} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \\
= &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)(\cos nx - i \sin nx) + a_0 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)(\cos nx + i \sin nx) \\
= &\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)
\end{aligned}
$$

左极限和右极限

- f 在 x 点的左极限:

$$f(x-0) = \lim_{h\to 0^+} f(x-h)$$

- f 在 x 点的右极限:

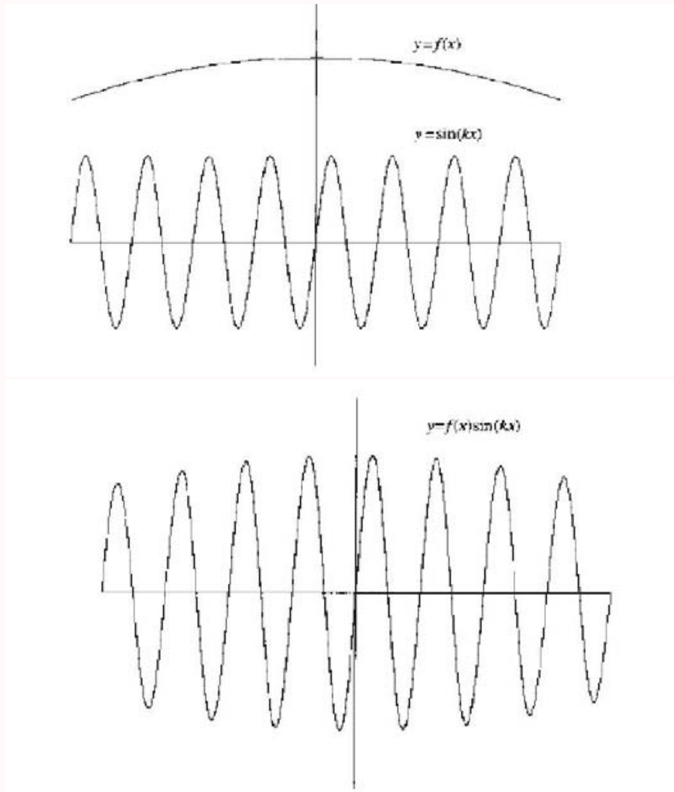
$$f(x+0) = \lim_{h\to 0^+} f(x+h)$$

- 分段连续函数: 称 f 在 $[a,b]$ 上分段连续, 如果其在 $[a,b]$ 上只有有限个间断点, 并且在有限个间断点上左右极限存在且有限.

Riemann-Lebesgue 引理

假设 f 是区间 $[a,b]$ 上的分段连续函数, 则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(kx)dx=\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)dx=0.$$



y = f(x)
y = sin(kx)
y=f(x)sin(kx)

证明 我们通过下面三步来证明这个引理。

（一）：假设$f(x)$是一个阶梯函数，即

$$f(x)=T(x)=\begin{cases} c_i, & x_{i-1}\leq x<x_i, i=1,2,\dots,n \\ c_n, & x=x_n. \end{cases} \tag{2.16}$$

这里c_i是常数，且$a=x_0<x_1<\dots,<x_n=b$。对于这样的$f(x)$，

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\cos(kx)dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} c_i\cos(kx)dx\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{k}(\sin(kx_i)-\sin(kx_{i-1}))\right| \\ &\leq \frac{2}{k}\sum_{i=1}^n |c_i|. \end{aligned}$$

从而对于阶梯函数，引理成立。

（二）设$f(x)$是$[a,b]$上的有界可积函数，我们首先证明对任意的$\epsilon>0$，存在阶梯函数$T(x)$，使得

$$\int_a^b |f(x)-T(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

事实上，由于$f(x)$可积，所以存在$[a,b]$的一个分割$a=x_0<x_1<\ldots,<x_n=b$，使得

$$\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2},$$

其中，M_i, m_i是$f(x)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上的上下确界。定义下面的阶梯函数

$$T(x)=\begin{cases} f(x_{i-1}), & x_{i-1}\le x<x_i;, i=1,2,\ldots,n \\ f(x_{n-1}), & x=x_n. \end{cases} \tag{2.17}$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-T(x)|dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f(x_{i-1})|\,dx \\ &\le \sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

所以，

$$\left|\int_a^b (f(x)-T(x))\cos(kx)dx\right| \le \int_a^b |f(x)-T(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.18}$$

又

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(kx)dx\right| \le \left|\int_a^b (f(x)-T(x))\cos(kx)dx\right| + \int_a^b |T(x)|\cos(kx)dx \to 0.$$

（三）设$f(x)$是$[a,b]$上的无界但是绝对可积，不妨设b是瑕点，则对任意的$\epsilon > 0$，存在$\eta > 0$，使得

$$\int_{b-\eta}^{b} |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{2},$$

从而

$$\int_{a}^{b} f(x)\cos kxdx = \int_{a}^{b-\eta} f(x)\cos kxdx + \int_{b-\eta}^{b} f(x)\cos kxdx.$$

对于第一部分积分$\int_{a}^{b-\eta} f(x)\cos kxdx$，由于它没有瑕点，由（二）的证明可知它随着$k$趋向0而趋向0。对于第二部分积分$\int_{b-\eta}^{b} f(x)\cos kxdx$，由刚才的定义知

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} f(x)\cos kxdx\right| < \frac{\epsilon}{2}\left|\int_{b-\eta}^{b} \cos kxdx\right|_{k\to\infty} \to 0 \tag{2.19}$$

这样也可以同样证明该引理。 #

Fourier 级数的收敛性

定义 称 f 的 Fourier 级数在 x 点处收敛到 f, 如果

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x),$$

其中

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

连续点处的收敛性

定理 假设 f 是以 2π 为周期的连续函数. 如果 f 在 x 点可导, 则 f 的 Fourier 级数在 x 点处收敛到 f.

注: 实际上, 对于连续函数, 其 Fourier 级数是几乎处处收敛到其自身的.

证明

第1步: 改写 Fourier 级数的部分和 S_N.

将 Fourier 系数公式带入部分和, 可得

$$
\begin{aligned}
S_N(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)dt\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\Big)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos(k(t-x))\Big)dt.
\end{aligned}
$$

引入 Dirichlet 核

$$P_N(u) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos(ku)\right),$$

则 Fourier 级数的部分和可表示为

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_N(t-x)dt \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)P_N(u)du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)P_N(u)du. \end{aligned}$$

第2步: 计算 Dirichlet 核

$$
\begin{aligned}
P_N(u) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}+1+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}+\ \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N} e^{iku}\right\}\right)\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{2}+\ \mathrm{Re}\left\{\dfrac{1-e^{i(N+1)u}}{1-e^{iu}}\right\}\right), & u \neq 2j\pi \\ \dfrac{1}{\pi}\left(N+\dfrac{1}{2}\right), & u = 2j\pi \end{cases}\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin((N+1/2)u)}{\sin(u/2)}, & u \neq 2j\pi \\ \dfrac{1}{2\pi}(2N+1), & u = 2j\pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

第3步: 对 Dirichlet 核积分

根据

$$P_N(u) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos(u) + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu)\right),$$

可得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} P_N(u)du &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \\ &\quad +\cos(2u) + \cdots + \cos(Nu)du \\ &= 1.\end{aligned}$$

第4步: 定理的证明

$$
\begin{aligned}
& S_N(x) - f(x) \\
= & \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)P_N(u)du - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_N(u)du \\
= & \int_{-\pi}^{\pi} (f(u+x) - f(x))P_N(u)du \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(u+x)-f(x)}{\sin(u/2)}\right) \sin((N+1/2)u)du.
\end{aligned}
$$

引入函数

$$
g(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u+x)-f(x)}{\sin(u/2)}, & u \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ 2f'(x), & u = 0. \end{cases}
$$

则有

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin((N+1/2)u)du.$$

因为 f 在 x 点可导, 即 $f'(x) = \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{u}$ 存在, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} g(u) &= \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{\sin(u/2)}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{u}\frac{u/2}{\sin(u/2)}\cdot 2\\ &= f'(x)\cdot 1\cdot 2\\ &= 2f'(x).\end{aligned}$$

于是可知 g 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续. 利用 Riemann-Lebesgue 引理即得

$$S_N(x)\to f(x),\ N\to\infty.$$

左导数和右导数

- 如果 f 在 x 点处的左极限 $f(x-0)$ 存在, 则 f 在 x 点处的左导数定义为

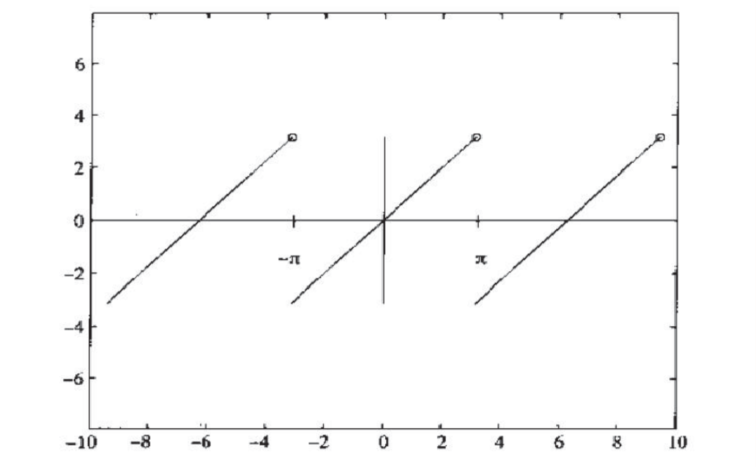
$$f'(x-0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x-0)}{h}.$$

- 如果 f 在 x 点处的右极限 $f(x+0)$ 存在, 则 f 在 x 点处的右导数定义为

$$f'(x+0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}.$$

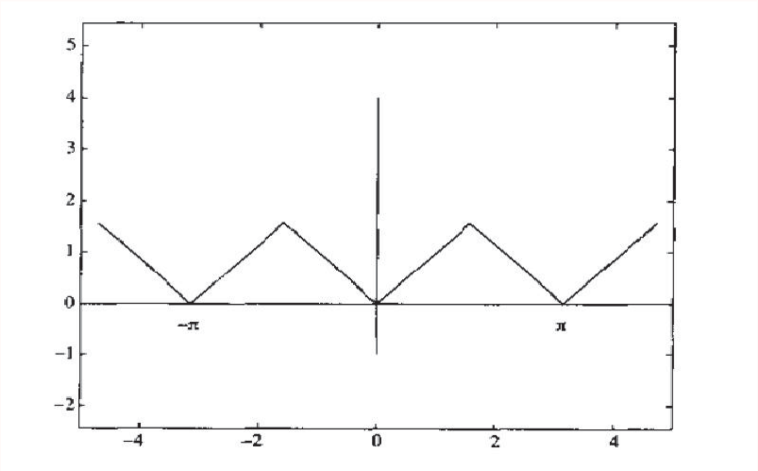
例1 令 f 是 $y=x,\ -\pi \le x < \pi$的周期延拓(如图). f 在 $x=\pi$ 处不连续, 左右极限存在, $f(\pi-0)=\pi, f(\pi+0)=-\pi$. 左右导数存在,

$$
\begin{aligned}
f'(\pi-0) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{(\pi+h)-\pi}{h}=1\\
f'(\pi+0) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{(\pi+h-2\pi)-(-\pi)}{h}=1.
\end{aligned}
$$



例2 令 f 是锯齿波函数(如图). 则 f 在 $x=\pi/2$ 处连续但不可导, 其左右导数为

$$f'(\pi/2-0)=1, \quad f'(\pi/2+0)=-1.$$



间断点处的收敛性

定理 假设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的分段连续函数. 如果 f 在 x 点处左右可导, 则 f 的 Fourier 级数在 x 点收敛到

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

证明: 由前面的讨论可知 Fourier 级数的部分和可表示为

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) P_N(u) du,$$

其中 Dirichlet 核

$$P_N(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\sin((N+1/2)u)}{\sin(u/2)}, & u \neq 2j\pi \\ \dfrac{1}{2\pi}(2N+1), & u = 2j\pi \end{cases}$$

满足

$$\int_0^{\pi} P_N(u) du = \int_{-\pi}^{0} P_N(u) du = \frac{1}{2}.$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&S_N(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} f(u+x)P_N(u)du - \frac{f(x+0)}{2} \\
&\quad + \int_{-\pi}^{0} f(u+x)P_N(u)du - \frac{f(x-0)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} (f(u+x) - f(x+0))P_N(u)du \\
&\quad + \int_{-\pi}^{0} (f(u+x) - f(x-0))P_N(u)du
\end{aligned}
$$

引入函数

$$g_1(u) = \frac{f(u+x) - f(x+0)}{\sin(u/2)},\ u \in (0, \pi].$$

于是第一项可表示为

$$\int_0^{\pi} (f(u+x) - f(x+0)) P_N(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_1(u) \sin((N+1/2)u) du.$$

因为 f 在 x 点处右可导, 即 $f'(x+0) = \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u+x) - f(x+0)}{u}$ 存在, 所以我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to 0^+} g_1(u) &= \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u+x) - f(x+0)}{\sin(u/2)} \\
&= \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u+x) - f(x+0)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)} \cdot 2 \\
&= f'(x+0) \cdot 1 \cdot 2 \\
&= 2f'(x+0).
\end{aligned}$$

上式说明 g_1 在 $[0, \pi]$ 上分段连续. 利用 Riemann-Lebesgue 引理即得第一项收敛于 0.

类似地, 为了估计第二项, 引入函数

$$g_2(u) = \frac{f(u+x) - f(x-0)}{\sin(u/2)}, u \in [-\pi, 0).$$

根据 f 在 x 点处左可导, 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0^-} g_2(u) &= \lim_{u\to 0^-} \frac{f(u+x) - f(x-0)}{\sin(u/2)} \\
&= \lim_{u\to 0^-} \frac{f(u+x) - f(x-0)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)} \cdot 2 \\
&= f'(x-0) \cdot 1 \cdot 2 \\
&= 2f'(x-0).
\end{aligned}$$

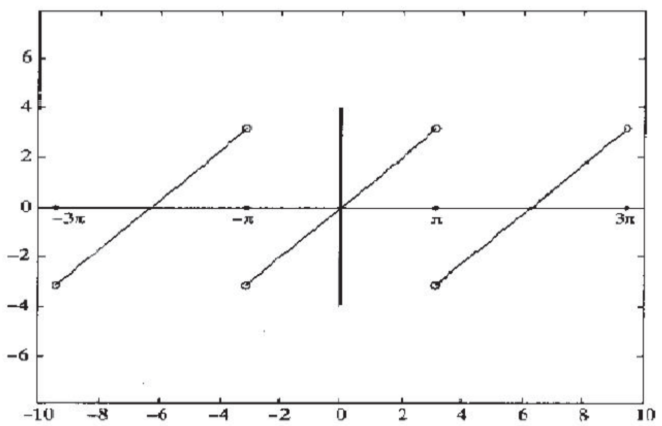
此即说明 g_2 在 $[-\pi, 0]$ 上分段连续. 再次利用 Riemann-Lebesgue 引理, 可得当$N \to +\infty$时

$$\int_{-\pi}^{0} (f(u+x) - f(x-0)) P_N(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} g_2(u) \sin((N+1/2)u) du \to 0.$$

例 令 f 是 $y=x,\ -\pi\le x<\pi$的周期延拓(如图). f 在 $x=\pi$ 处不连续但左右可导, 于是其 Fourier 级数

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

在 $x=\pi$ 点收敛于左右极限的平均值. 由于 $f(\pi-0)=\pi$, $f(\pi+0)=-\pi$, 我们有 $F(\pi)=0$. 这与由 Fourier 级数公式计算的值一致.



Fourier 级数的一致收敛

定义 称 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f, 如果部分和序列

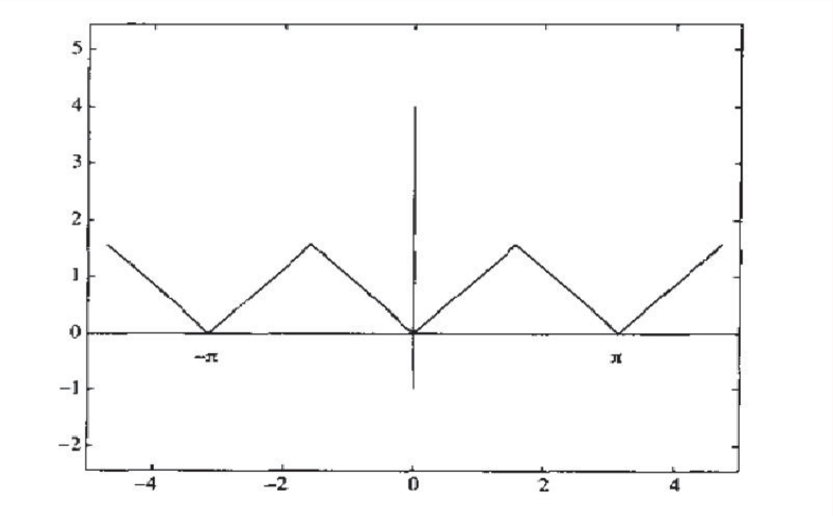
$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

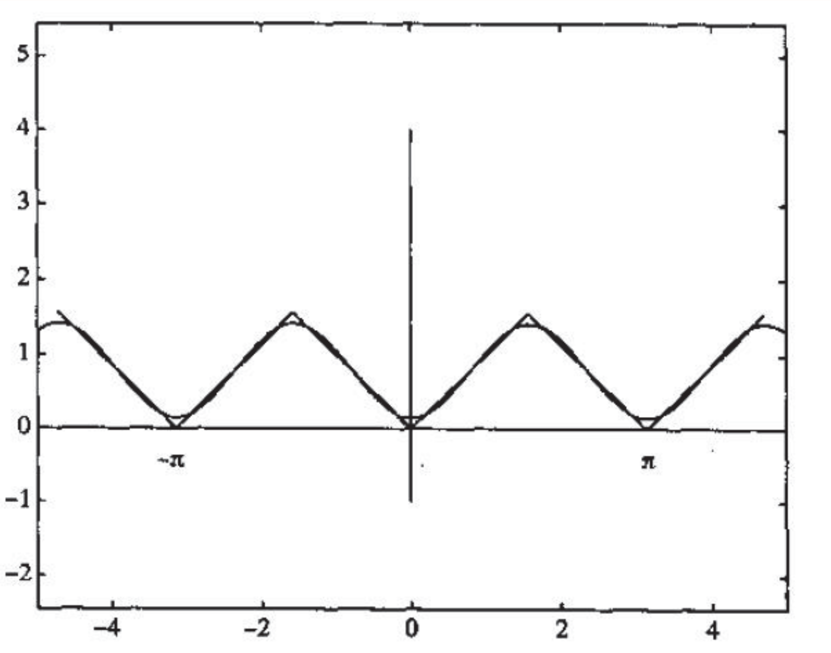
一致收敛于 f.

定理 假设 f 是以 2π 为周期的分段光滑函数. 则其 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 f.

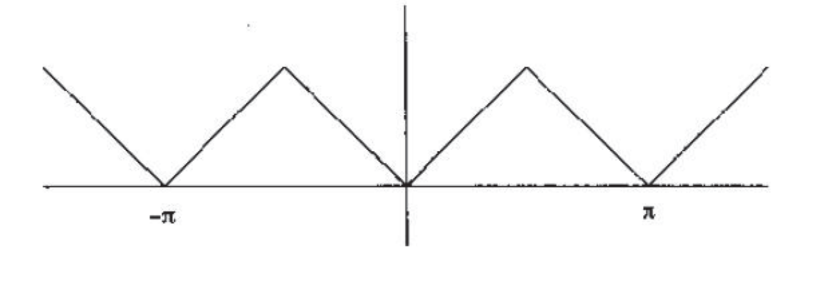
分段光滑函数 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在有限个点外可导且 f' 分段连续, 则称 f 在 $[a, b]$ 上分段光滑.

例1 考虑锯齿波函数(如图) Fourier 级数的一致收敛性.



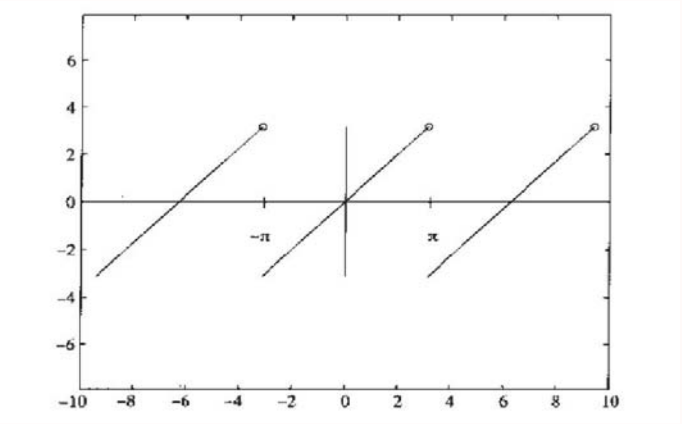


s_2

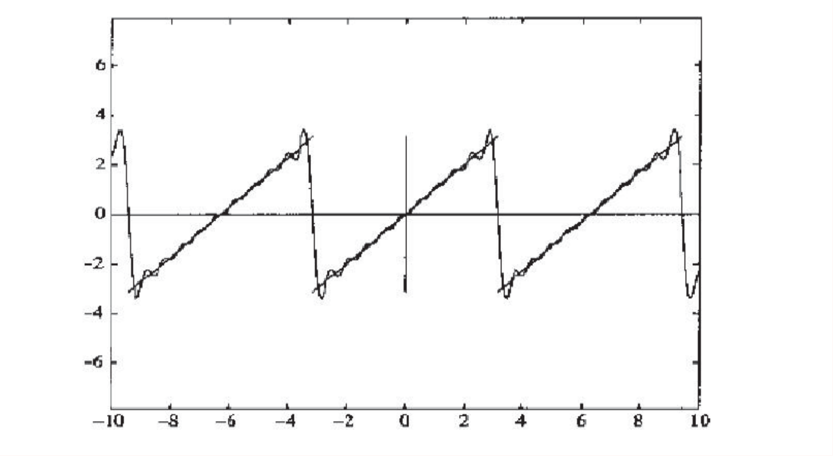


s_{10}

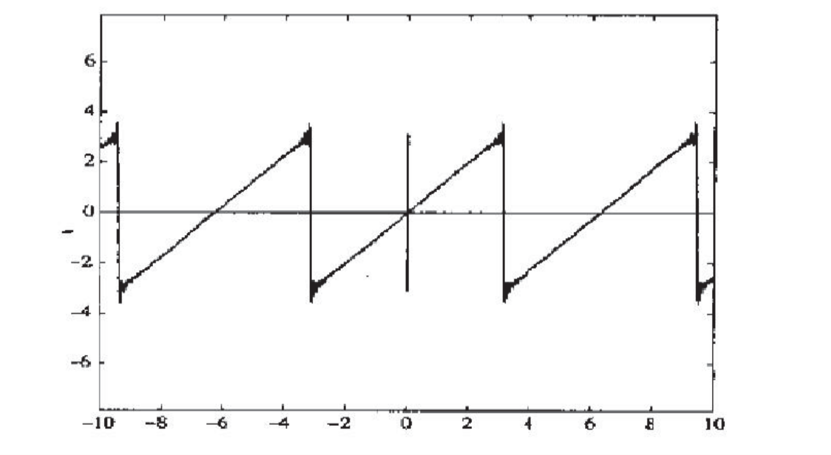
例2 考虑 $y = x,\ -\pi \le x < \pi$的周期延拓(如图).



Gibbs 现象



s_{10}



s_{50}

例3 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0,\ \pm\pi\\ -1, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

计算 Fourier 系数

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\end{aligned}$$

其 Fourier 级数

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

逐点收敛到 f. 因为 $S_{2n}(x) = S_{2n-1}(x)$, 我们只需考虑部分和

$$S_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

在间断点 $x = 0$ 附近的性质.

逐项微商得

$$
\begin{aligned}
S'_{2n-1}(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx - \sin 2(k-1)x}{2\sin x} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}, \quad x \neq 0.
\end{aligned}
$$

由此可知, S_{2n-1} 在 $x=0$ 的右边的第一个极大值点是 $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

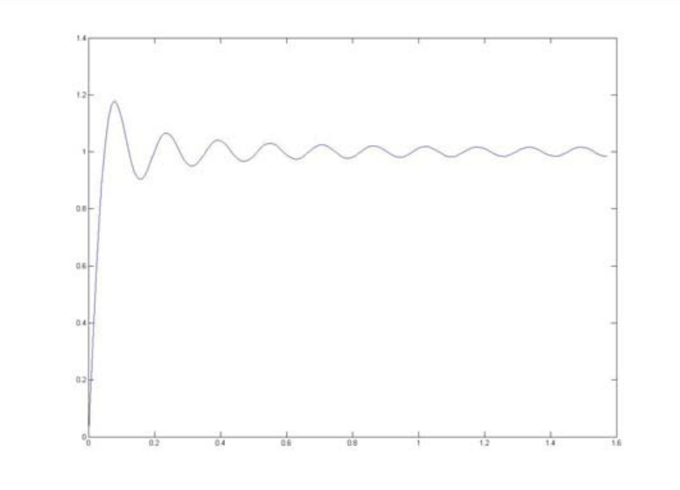
其极大值为

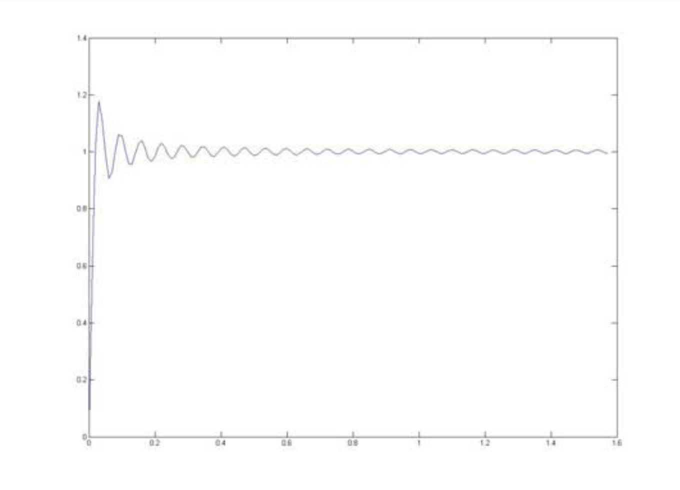
$$\begin{aligned} S_{2n-1}(x_n) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{x_n}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\frac{\frac{t}{2n}}{\sin\frac{t}{2n}}dt. \end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}(x_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt = 1.17898\cdots.$$

此式说明, 不论 n 多大, 都有一个点 $x_n = \frac{\pi}{2n}$, 使 $S_{2n-1}(x)$ 在这点达到一个峰值, 其值比 $f(x_n) = 1$ 的值大约超出 0.17898. 当 $n \to \infty$ 时, 达到峰值的点趋近于 0.





Home Page

Title Page

Page 50 of 143

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Fourier 级数依范数收敛

定理 如果 $f \in L^2([-\pi,\pi])$, 则其 Fourier 级数在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中依范数收敛于 f, 即其 Fourier 级数的部分和

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

满足

$$\|f - S_N\|_{L^2} \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

定理 如果 $f \in L^2([-\pi,\pi])$, 则其复型 Fourier 级数在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中依范数收敛于 f, 即其 Fourier 级数的部分和

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikt}$$

满足

$$\|f - S_N\|_{L^2} \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

证明

第一步: 部分和 S_N 的几何解释.

令 $V = L^2([-\pi,\pi])$, V_N 是由 $\{1, \cos(kx), \sin(kx),\ 1 \le k \le N\}$ 张成的空间. 则 V_N 是 V 的 $2N+1$ 维子空间, 并且

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}},\ 1 \le k \le N\right\}$$

是 V_N 的标准正交基.

假设 $f \in L^2([-\pi, \pi])$. 其 Fourier 级数部分和表示为

$$
\begin{aligned}
S_N(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)dt \right) \cos(kx) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)dt \right) \sin(kx)
\end{aligned}
$$

$$= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{N} \left\langle f, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \left\langle f, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}},$$

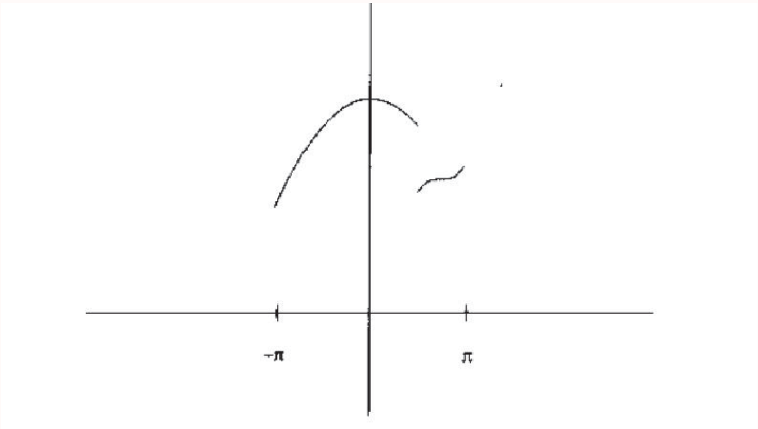
此式表明 S_N 是 f 到 V_N 的正交投影, 即 S_N 是 f 到 V_N 的最佳逼近.

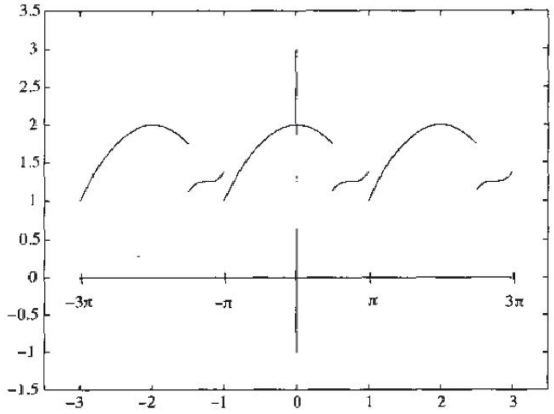
$$\|f - S_N\|_{L^2} = \min_{g \in V_N} \|f - g\|_{L^2}.$$

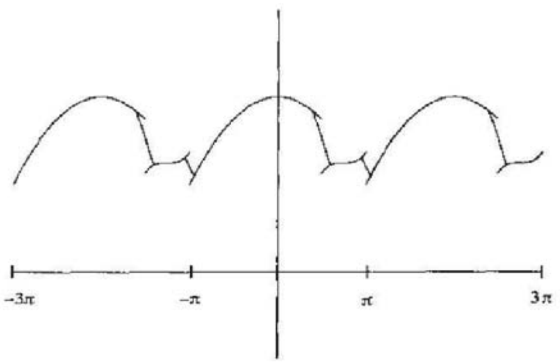
第二步: 对 $f \in L^2([-\pi,\pi])$ 逼近.

$L^2([-\pi,\pi])$ 中的函数可由以 2π 为周期的光滑函数任意逼近, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在以 2π 为周期的光滑函数 g, 满足

$$\|f-g\|_{L^2} \le \epsilon/2.$$




3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3π
−π
π
3π
−3
−2
−1
0
1
2
3


−3π
−π
π
3π

第三步: 定理的证明

令

$$g_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)$$

为 g 的 Fourier 级数部分和. 由于 g 是以 2π 为周期的光滑函数, 因此 g_N 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 g, 从而依范数收敛于 g. 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N_0 > 0$, 使得当 $N > N_0$ 时, 有

$$\|g - g_N\|_{L^2} \leq \epsilon/2.$$

由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|f-g_N\|_{L^2} &= \|f-g+g-g_N\|_{L^2} \\ &\leq \|f-g\|_{L^2}+\|g-g_N\|_{L^2} \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

因为 $g_N \in V_N$, 并且 S_N 是 f 到 V_N 的最佳逼近, 所以我们有

$$\|f-S_N\|_{L^2} \leq \|f-g_N\|_{L^2} \leq \epsilon.$$

Parseval 等式

定理-实型 Parseval 等式 假设 $f \in L^2([-\pi,\pi])$, 其 Fourier 系数为 a_k, b_k. 则下述等式成立

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2.$$

进一步, 设 $g \in L^2([-\pi,\pi])$, 其 Fourier 系数为 c_k, d_k, 则有

$$\frac{1}{\pi}\langle f, g\rangle = 2a_0\overline{c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{c_k} + b_k\overline{d_k}.$$

定理-复型 Parseval 等式 假设 $f \in L^2([-\pi, \pi])$, 其复型 Fourier 系数为 α_k. 则下述等式成立

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

进一步, 设 $g \in L^2([-\pi, \pi])$, 其复型 Fourier 系数为 β_k, 则有

$$\frac{1}{2\pi}\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\overline{\beta_k}.$$

证明 令

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikx}$$

$$g_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \beta_k e^{ikx}$$

分别是 f 和 g 的 Fourier 级数部分和. 则有 $f_N \to f, g_N \to g$, $N \to \infty$.

计算内积可得

$$\begin{aligned}\langle f_N, g_N\rangle &= \left\langle \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikx}, \sum_{n=-N}^{N} \beta_n e^{inx} \right\rangle \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_k \overline{\beta_n} \langle e^{ikx}, e^{inx}\rangle \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \overline{\beta_k} \langle e^{ikx}, e^{ikx}\rangle \\ &= 2\pi \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \overline{\beta_k}.\end{aligned}$$

下面证明

$$\langle f_N, g_N\rangle \to \langle f, g\rangle, \quad N\to\infty.$$

利用 Schwarz 不等式和三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&|\langle f, g\rangle - \langle f_N, g_N\rangle| \\
&= |(\langle f, g\rangle - \langle f, g_N\rangle) + (\langle f, g_N\rangle - \langle f_N, g_N\rangle)| \\
&\le |\langle f, g-g_N\rangle| + |\langle f-f_N, g_N\rangle| \\
&\le \|f\|_{L^2}\|g-g_N\|_{L^2} + \|f-f_N\|_{L^2}\|g_N\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

由

$$\|g_N\|_{L^2} = \|g_N - g + g\|_{L^2} \le \|g_N - g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2},$$

可知 $\|g_N\|_{L^2}\to\|g\|_{L^2}$. 结合 $\|f_N - f\|_{L^2}\to 0$ 及 $\|g-g_N\|_{L^2}\to 0$, 即可得

$$\langle f_N, g_N\rangle \to \langle f, g\rangle,\ N\to\infty.$$

例1 设 $f(x)=x,\ -\pi\le x<\pi$. 其 Fourier 级数为

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

利用 Parseval 等式可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}.$$

再由

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

得等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例2 设 f 为锯齿波函数. 其 Fourier 级数为

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((4k+2)x).$$

由于 f 在 $x=0$ 连续且左右可导, $F(0)$ 收敛于 $f(0)$, 从而得等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

利用 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$

及

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{\pi^2}{6},$$

可得等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$