

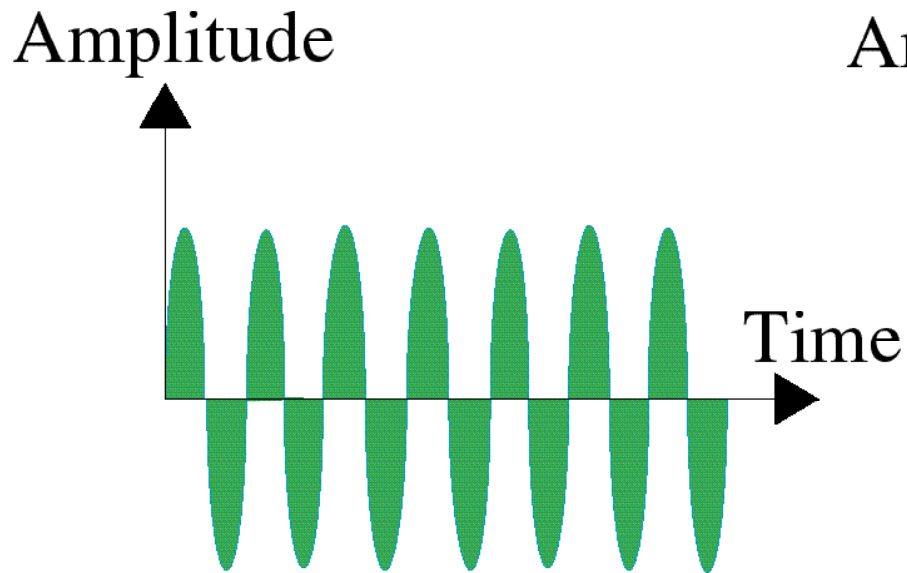
小波的产生

Fourier变换:

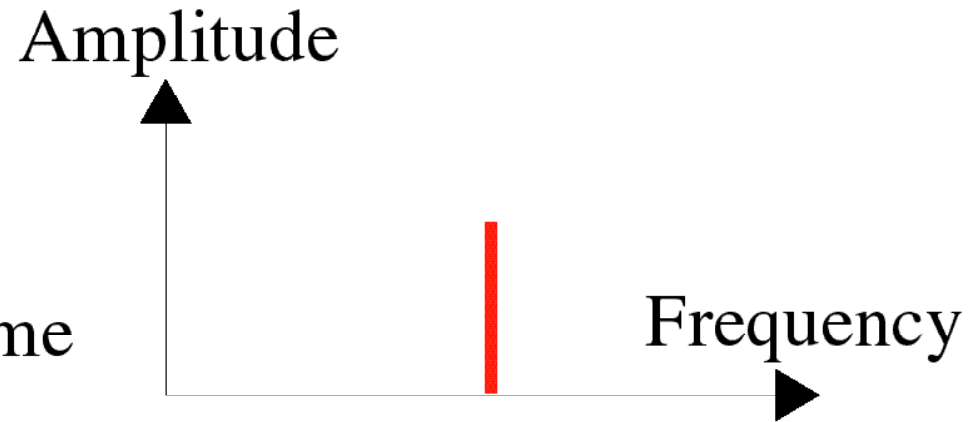
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f(x), e^{i\lambda x} \rangle.\end{aligned}$$

f(x)和不同频率的三角函数做内积，就能求出不同频率处的相关值，值越大的地方，相关性越大，就说明原信号中有该频率的信号

时域和频域

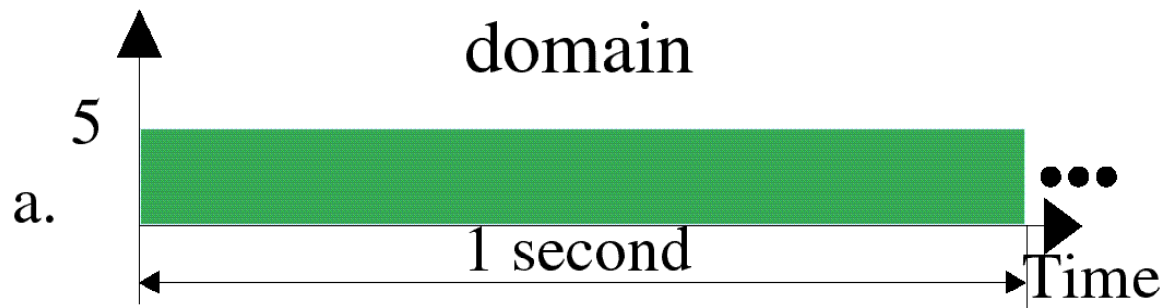


a. Time domain

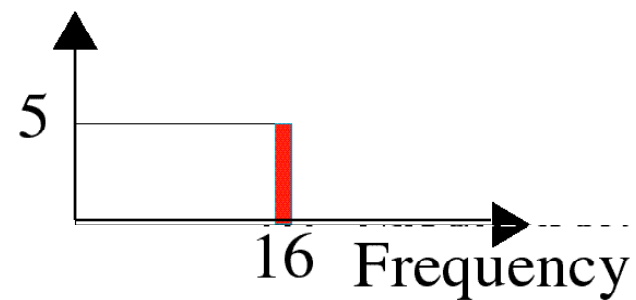
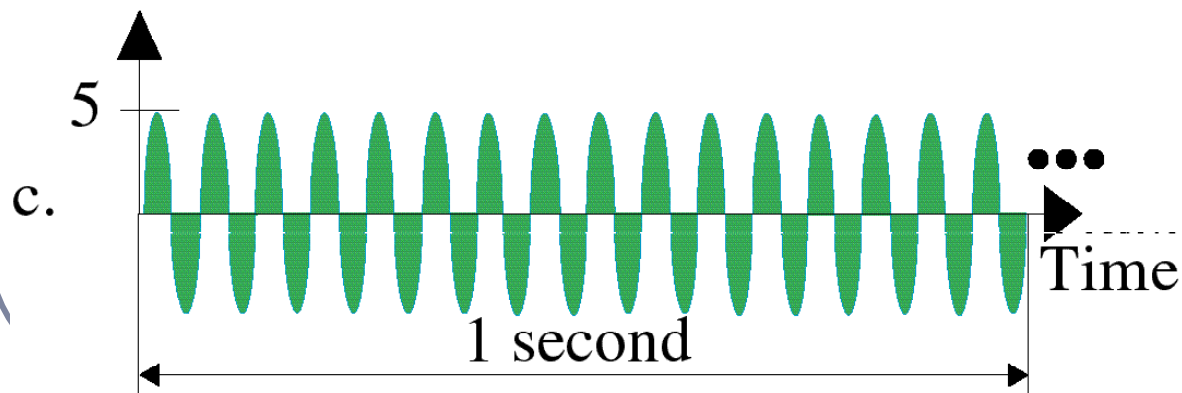
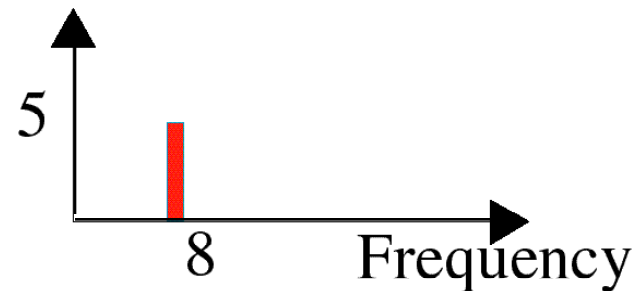
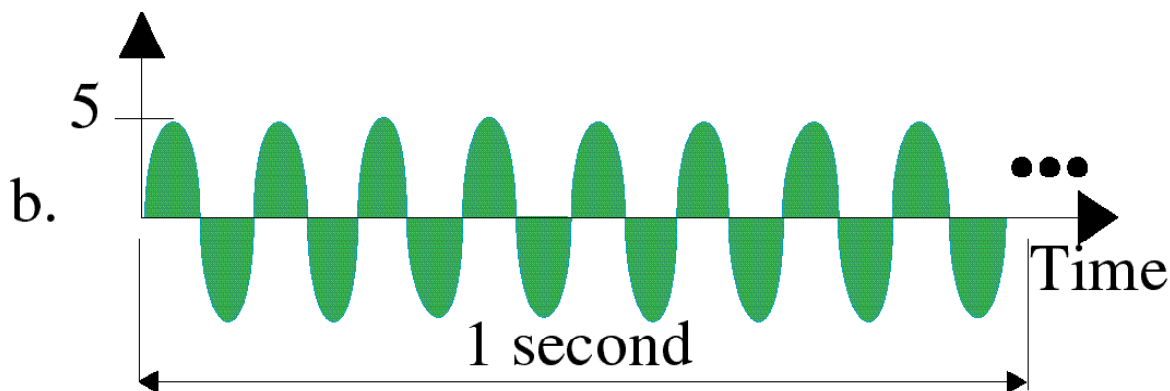
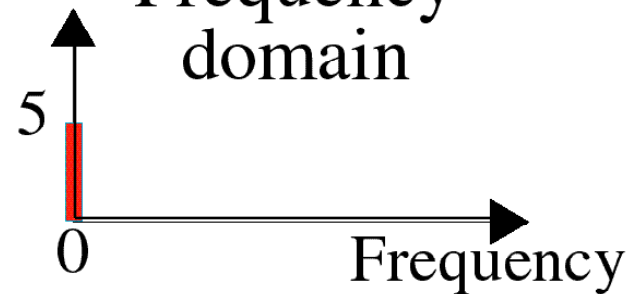


b. Frequency domain

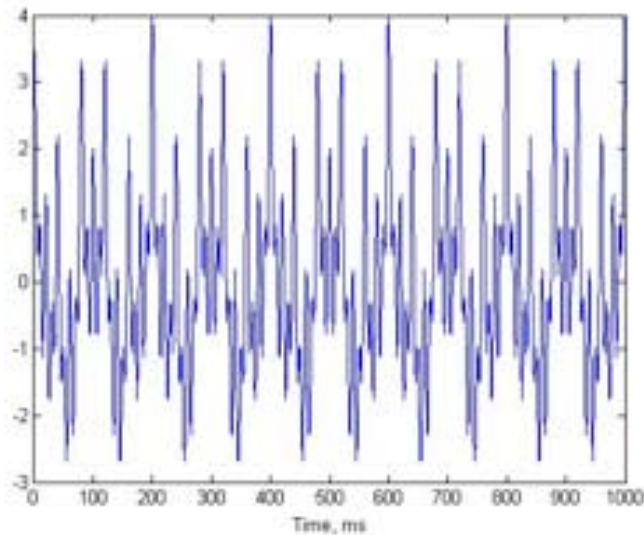
Time
domain



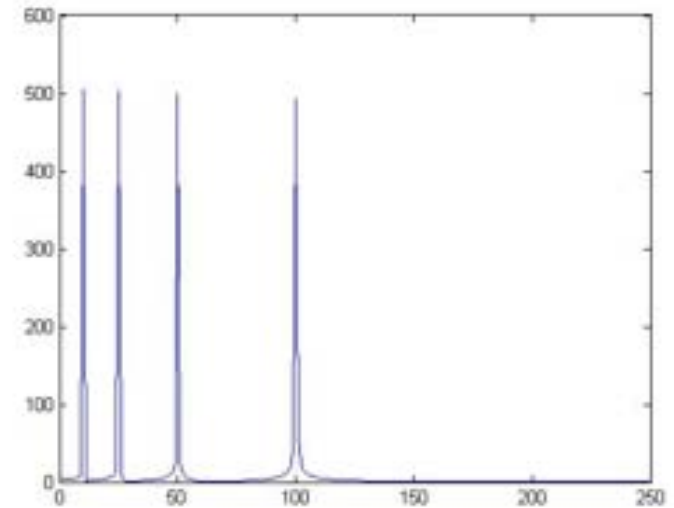
Frequency
domain



平稳信号



FFT



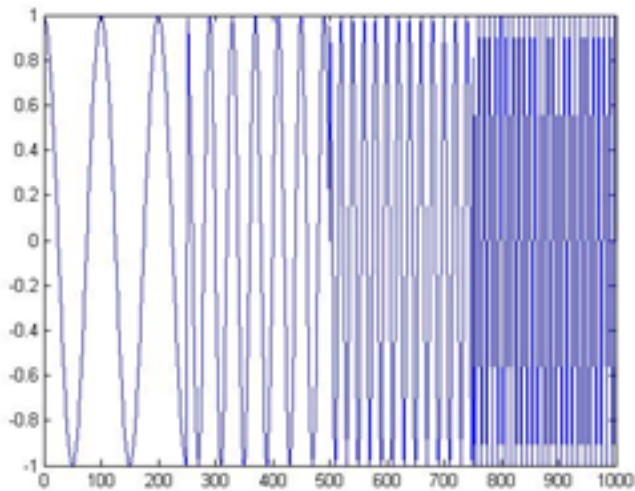
$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10t) + \cos(2\pi \cdot 25t) \\ + \cos(2\pi \cdot 50t) + \cos(2\pi \cdot 100t)$$

10, 25, 50, 100Hz

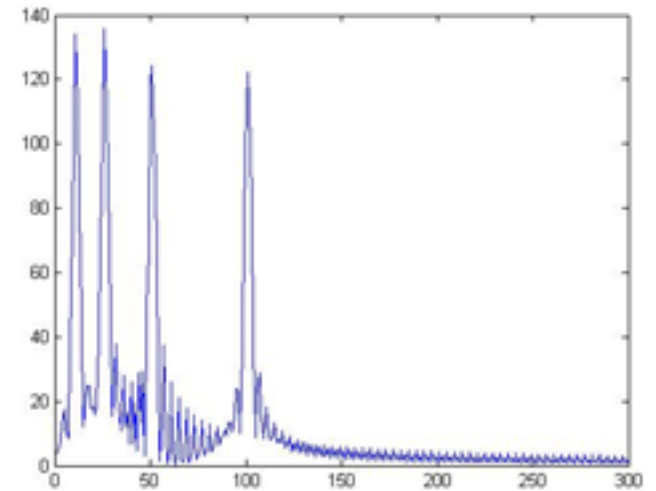
傅里叶变换

- 给出一个信号**总体上**包含哪些频率的成分；
- 不能给出各成分出现的时刻；
- 适合平稳信号的分析
 - 分布参数和分布律不随时间变化
 - 大多是人为制造的
 - 自然界的大量信号几乎都是非平稳的

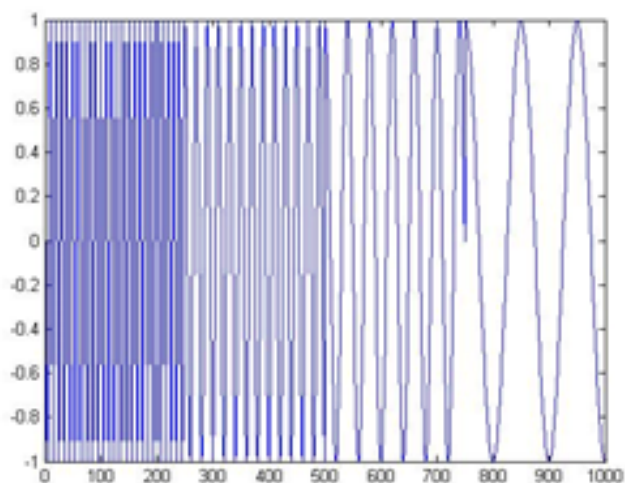
非平稳信号



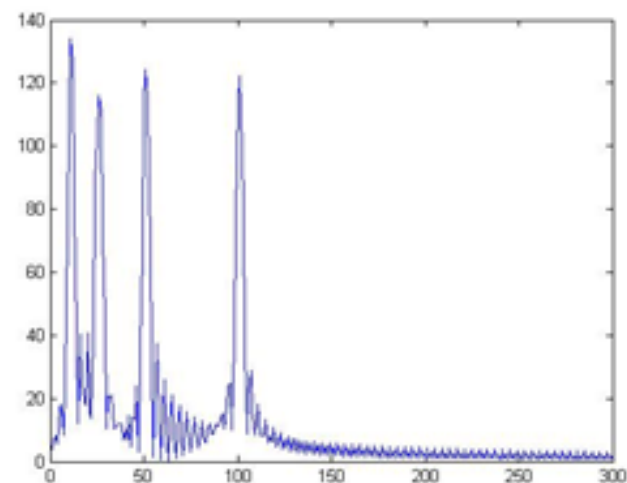
FFT

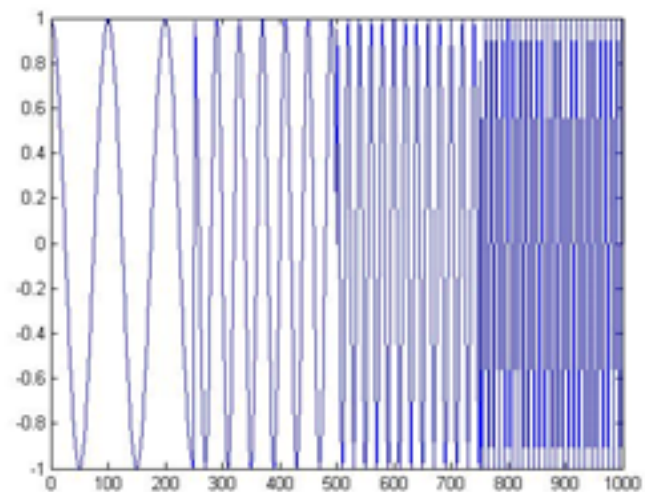


非平稳信号

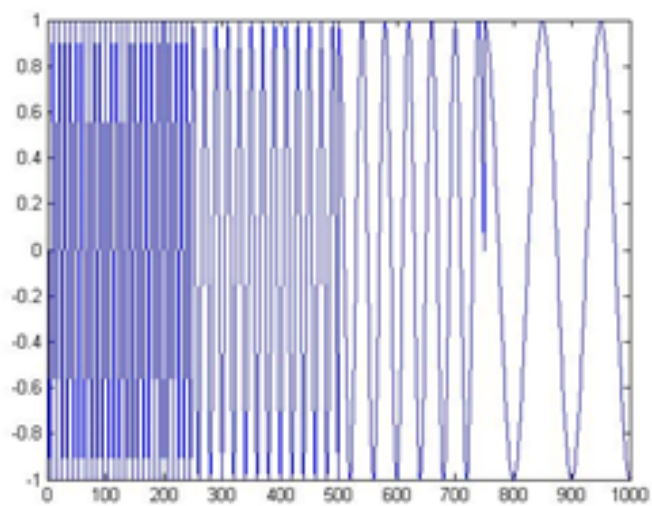
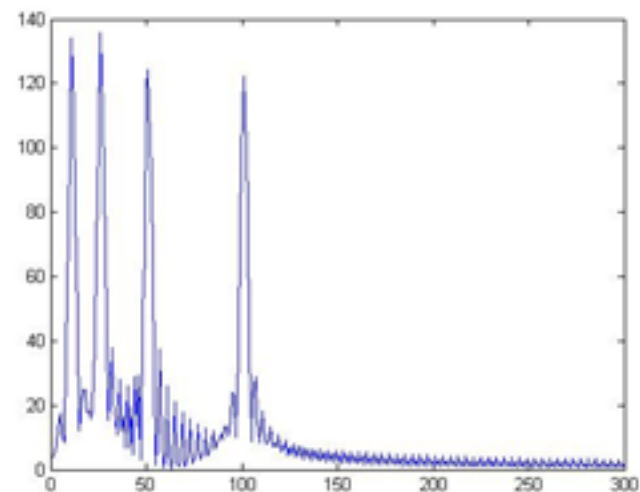


FFT

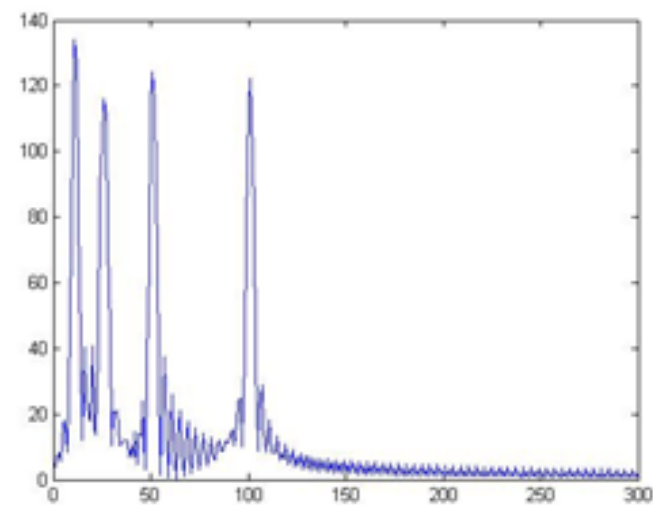




FFT



FFT



傅里叶变换

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

- 任何一个频谱都是和所有的时间相关
- 只能给出包含的频谱成分
- 不能给出频谱出现的的时间
- 将信号分成若干段，每一段分别做傅里叶变换

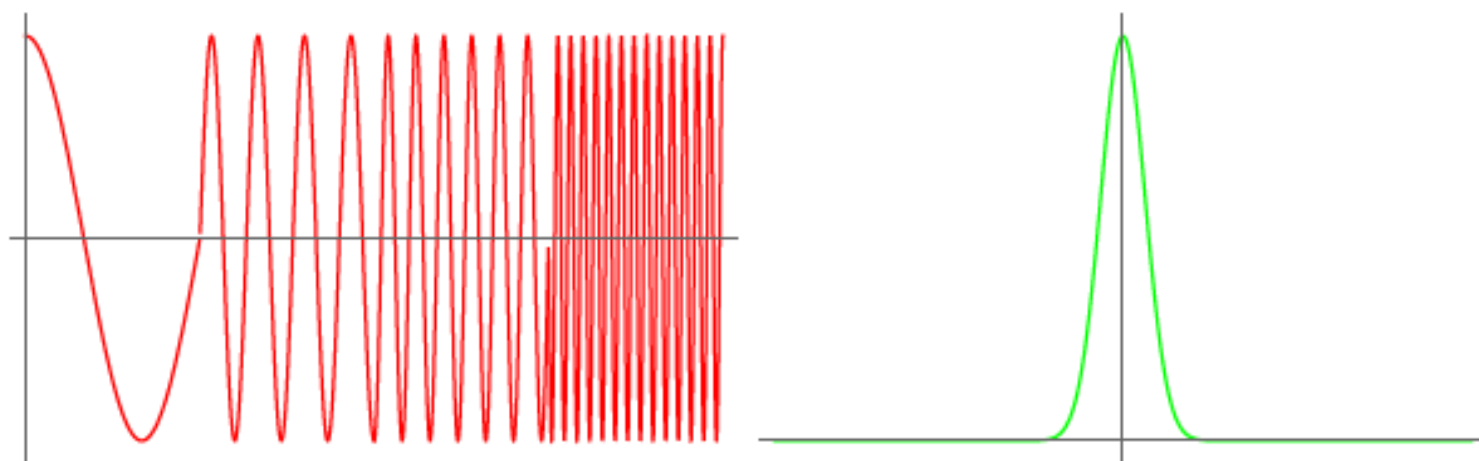


图 4.4 函数 $f(x)$ 和窗函数的图像。

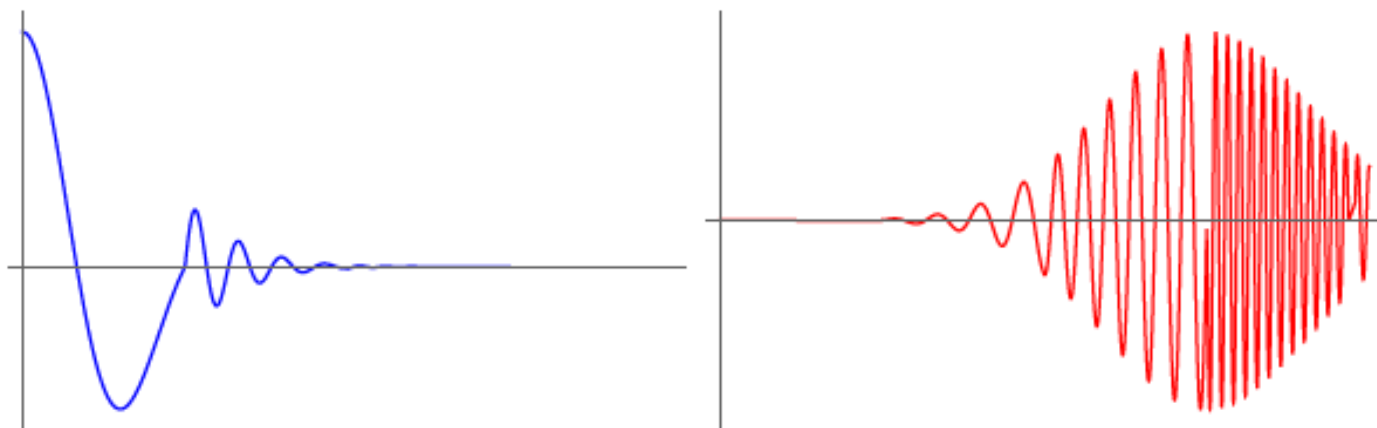


图 4.5 函数 $f(x) \times g_{0.05}(x)$ 和 $f(x) \times g_{0.05}(x - 1.5)$ 的图像。



1.2. 窗函数

定义: 非平凡函数 $w \in L^2(\mathbb{R})$ 称为窗函数, 如果满足 $tw \in L^2(\mathbb{R})$.

中心和半径 对任意窗函数 w , 其中心 t^* 和半径 Δ_w 分别定义为

$$t^* = \frac{1}{\|w\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}} t |w(t)|^2 dt,$$

$$\Delta_w = \frac{1}{\|w\|_{L^2}} \left(\int_{\mathbb{R}} (t - t^*)^2 |w(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

例: 高斯型函数 $g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ 是窗函数, 其中心和半径分别为 $t^* = 0$, $\Delta_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha}$.

窗函数性质

- $w(at)$ 的中心和半径分别为 t^*/a 和 $\Delta_w/|a|$;
- $aw(t)$ 的中心和半径分别为 t^* 和 Δ_w ;
- $w(t - t_0)$ 的中心和半径分别为 $t^* + t_0$ 和 Δ_w ;
- $w(t)e^{i\omega t}$ 的中心和半径分别为 t^* 和 Δ_w ;

窗口傅里叶变换

定义 4.3 设 g 是实的窗函数, 且 $g(t) = g(-t)$, $\|g\| = 1$, 则 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 的窗口傅里叶变换定义为

$$\mathcal{S}[f](\lambda, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-b)} e^{-i\lambda t} dt$$

特别的, 如果窗函数取做高斯型函数

$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

时, 相应的窗口傅里叶变换称作 *Gabor* 变换。

时间窗

由于 g 和 \hat{g} 都是窗函数，假设它们的中心和半径分别是 t^* , Δ_g 和 λ^* , $\Delta_{\hat{g}}$ ，记 $W_{\lambda,b}(t) = g(t - b)e^{i\lambda t}$ ，则由窗口傅里叶变换的定义可得

$$\mathcal{S}[f](\lambda, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{W_{\lambda,b}(t)} dt.$$

注意到 $W_{\lambda,b}(t)$ 也是一个窗函数，利用窗函数的性质，可以算出 $W_{\lambda,b}(t)$ 的中心和半径分别是 $t^* + b$, Δ_g 。从而，窗口傅里叶变换 $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$ 可以看成函数 $f(t)$ 和 $W_{\lambda,b}(t)$ 的内积，就是说对于固定的 b ，窗口傅里叶变换主要和函数 $f(t)$ 在区间 $[t^* + b - \Delta_g, t^* + b + \Delta_g]$ 中的值相关，即窗口傅里叶变换给出了 $f(t)$ 在时间窗

$$[t^* + b - \Delta_g, t^* + b + \Delta_g]$$

里面的局部化的信息。

频率窗

另一方面，令

$$V_{\lambda,b}(\omega) = \mathfrak{F}[W_{\lambda,b}](\omega) = e^{i\lambda b} e^{-i\omega b} \hat{g}(\omega - \lambda)$$

可以看出 $V_{\lambda,b}(\omega)$ 也是一个窗函数，而且利用窗函数的性质，可以计算出 $V_{\lambda,b}(\omega)$ 的中心和半径分别是 $\lambda^* + \lambda$, $\Delta_{\hat{g}}$ 。利用傅里叶变换的能量守恒定理，

$$\mathcal{S}[f](\lambda, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, W_{\lambda,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \hat{f}, V_{\lambda,b}(\omega) \rangle$$

即窗口傅里叶变换也可以看成 $f(t)$ 的傅里叶变换和 $V_{\lambda,b}(\omega)$ 的内积，就是说对于固定的频率 λ ，窗口傅里叶变换主要和函数 $\hat{f}(\omega)$ 在区间 $[\lambda^* + \lambda - \Delta_{\hat{g}}, \lambda^* + \lambda + \Delta_{\hat{g}}]$ 中的值相关。即 $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$ 还给出了频率窗

$$[\lambda^* + \lambda - \Delta_{\hat{g}}, \lambda^* + \lambda + \Delta_{\hat{g}}]$$

里面的局部化的信息。

时频窗

综上所述，窗口傅里叶变换 $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$ 给出了时频窗

$$[t^* + b - \Delta_g, t^* + b + \Delta_g] \times [\lambda^* + \lambda - \Delta_{\hat{g}}, \lambda^* + \lambda + \Delta_{\hat{g}}]$$

里面的局部化的信息。随着分析时间和频率 (b, λ) 的平移，得到一系列时频窗口。这些窗口的边长只和窗函数相关，和 (b, λ) 无关，并且具有固定的面积。

当时频指标 (b, λ) 在 R^2 中变化时，窗函数的时频窗覆盖了整个时频平面。可以预见， f 可以由它的窗口傅里叶变换 $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$ 来恢复。下面的定理给出这个结果并证明能量是守恒的。

当时频指标 (b, λ) 在 R^2 中变化时, 窗函数的时频窗覆盖了整个时频平面。可以预见, f 可以由它的窗口傅里叶变换 $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$ 来恢复。下面的定理给出这个结果并证明能量是守恒的。

定理 4.1 如果 $f \in L^2(R)$, 则

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}[f](\lambda, b) g(t-b) e^{i\lambda t} d\lambda db$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{S}[f](\lambda, b)|^2 d\lambda db$$

证明 我们首先证明重构公式，基本的想法是对它的积分公式中的积分变量 b 应用Parseval等式。首先，对于窗口傅里叶变换，记

$$\begin{aligned} g_\lambda(t) &= \overline{g(t)}e^{i\lambda t}, \\ f_\lambda(b) &= \mathcal{S}[f](\lambda, b). \end{aligned}$$

$g_\lambda(t)$ 关于 t 的傅里叶变换为

$$\widehat{g}_\lambda(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)}e^{i\lambda t}e^{-i\omega t}dt \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)}e^{-i(\omega-\lambda)t}dt \quad (4.2)$$

$$= \widehat{\overline{g}}(\omega - \lambda) \quad (4.3)$$

由于 $g(t) = \overline{g(-t)}$ ，所以

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[f](\lambda, b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda b} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t-b)}e^{i\lambda(b-t)}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda b} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_\lambda(b-t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda b} f * g_\lambda(b). \end{aligned}$$

因此， $f_\lambda(b)$ 关于 b 的傅里叶变换是

$$\widehat{f}_\lambda(\omega) = \widehat{f}(\omega + \lambda)\widehat{g}_\lambda(\omega + \lambda) = \widehat{f}(\omega + \lambda)\widehat{\overline{g}}(\omega)$$

下面计算 $g(t-b)$ 关于 b 的傅里叶变换,

$$\mathfrak{F}[g(t-b)](\omega) = \widehat{g}(\omega)e^{-it\omega}.$$

因此,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}[f](\lambda, b) g(t-b) e^{i\lambda t} d\lambda db = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + \lambda) |\widehat{g}(\omega)|^2 e^{it(\lambda + \omega)} d\omega \right) d\lambda.$$

如果 $\widehat{f} \in L^1(R)$, 我们可以利用Fubini定理改变积分顺序, 并利用逆傅里叶变换

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + \lambda) e^{it(\lambda + \omega)} d\lambda = f(t),$$

可得上式等于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + \lambda) e^{it(\lambda + \omega)} d\lambda \right) |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

再利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega = 1,$$

就可以得到重构公式。如果 $\widehat{f} \notin L^1(R)$, 可以利用稠密性来证明。

现在我们证明能量守恒公式。因为 $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$ 关于 b 的傅里叶变换是 $\widehat{f}(\omega + \lambda)\overline{\widehat{g}(\omega)}$ ，将Plancherel公式应用到能量守恒公式的右边，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{S}[f](\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega + \lambda)\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega d\lambda$$

另一方面，利用Fubini定理可证

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega + \lambda)|^2 d\lambda = \|f\|^2$$

从而能量守恒定理得证。

#

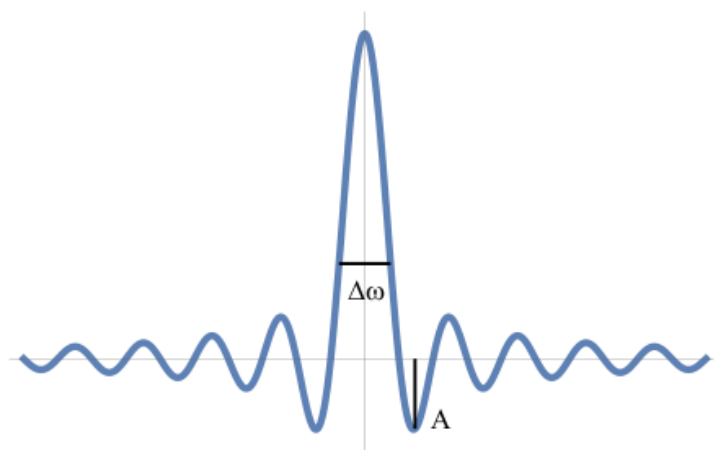


图 4.7 \hat{g} 的能量跨度由它的频宽以及第一个旁瓣的最大幅度来度量。

1. 均方频宽 Δ , 其定义为

$$\frac{|\hat{g}(\Delta/2)|^2}{|\hat{g}(0)|^2} = \frac{1}{2}$$

2. 位于 $\lambda = \pm\lambda_0$ 处的第一个旁瓣的最大幅度 A ,

$$A = 10 \log_{10} \frac{|\hat{g}(\lambda_0)|^0}{|\hat{g}(0)|^0}$$

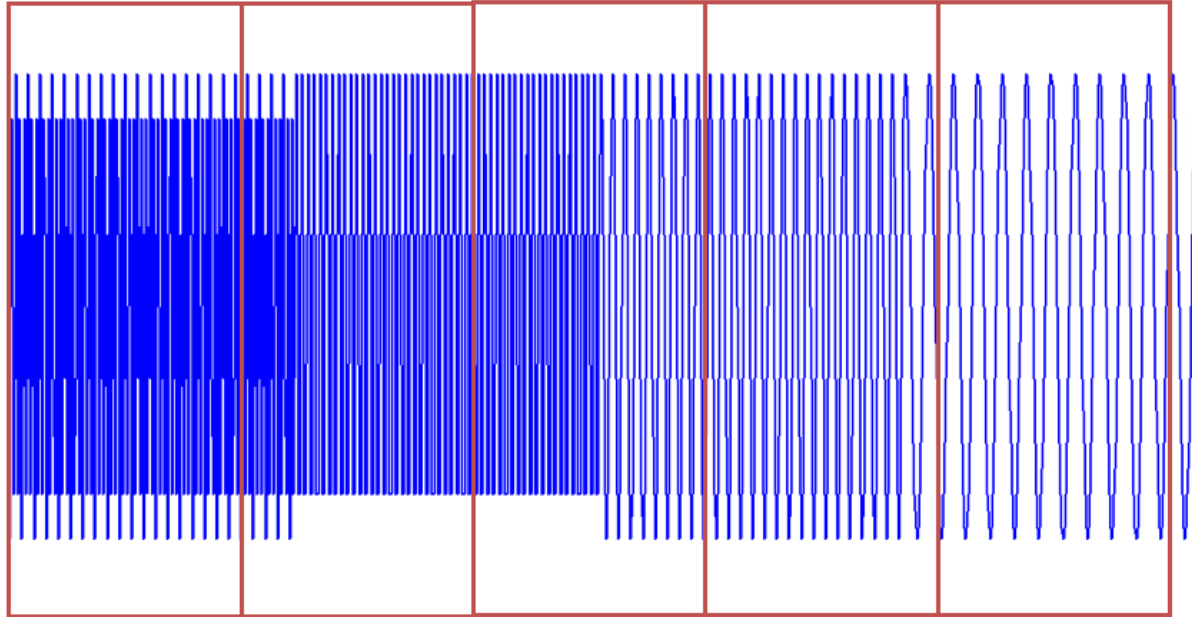
3. 多项式指数 p , 当频率较大时, 它给出了 \hat{g} 的渐进衰减性

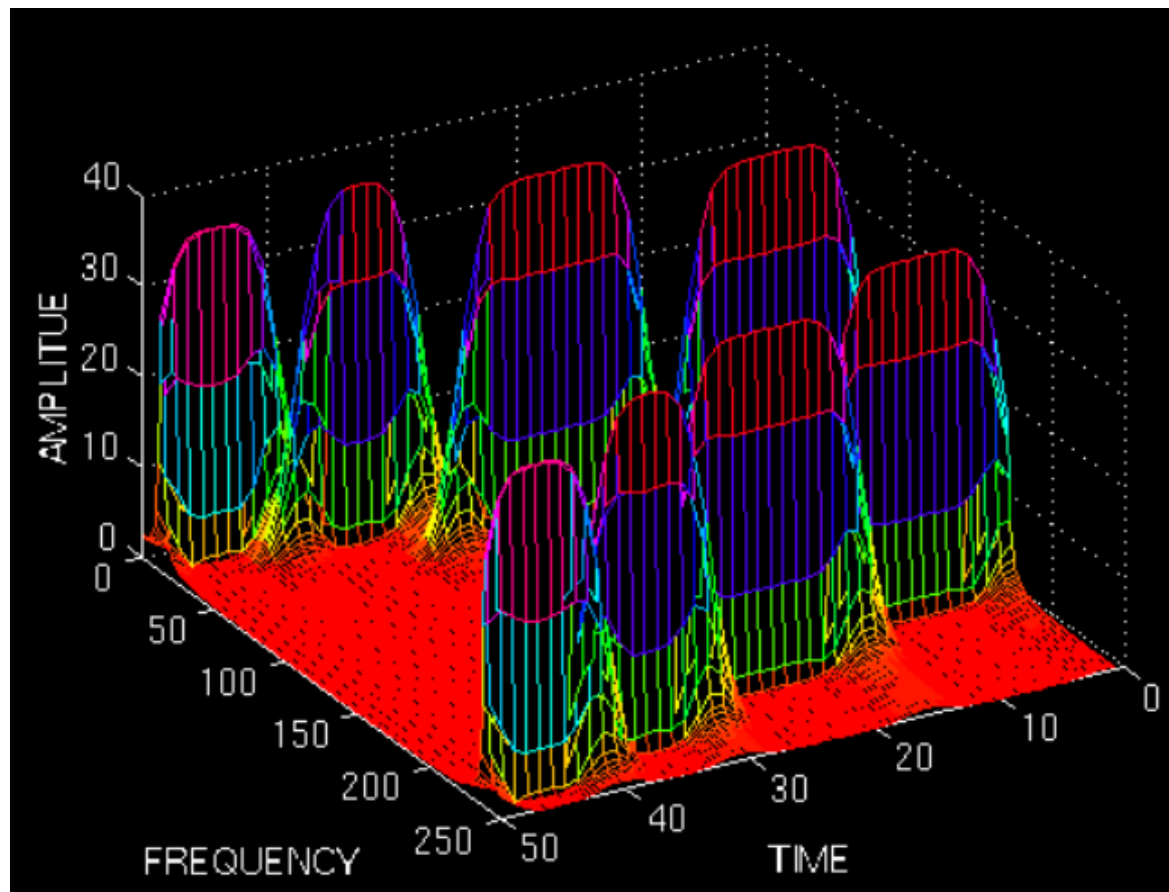
$$|\hat{g}(\lambda)| = O(\lambda^{-p-1})$$

窗函数时，应使窗函数频谱的主瓣宽度应尽量窄，以获得高的频率分辨能力；旁瓣衰减应尽量大，以减少频谱拖尾，但通常都不能同时满足这两个要求。各种窗的差别主要在于集中于主瓣的能量和分散在所有旁瓣的能量之比。

函数名称	函数表达式	Δ	A	p
Rectangle	1	0.89	-13db	0
Hamming	$0.54 + 0.46 \cos 2\pi t$	1.36	-43db	0
Gaussian	e^{-18t^2}	1.55	-55db	0
Hanning	$\cos^2 \pi t$	1.44	-32db	2
Blackman	$0.42 + 0.5 \cos 2\pi t + 0.08 \cos 4\pi t$	1.68	-58db	2

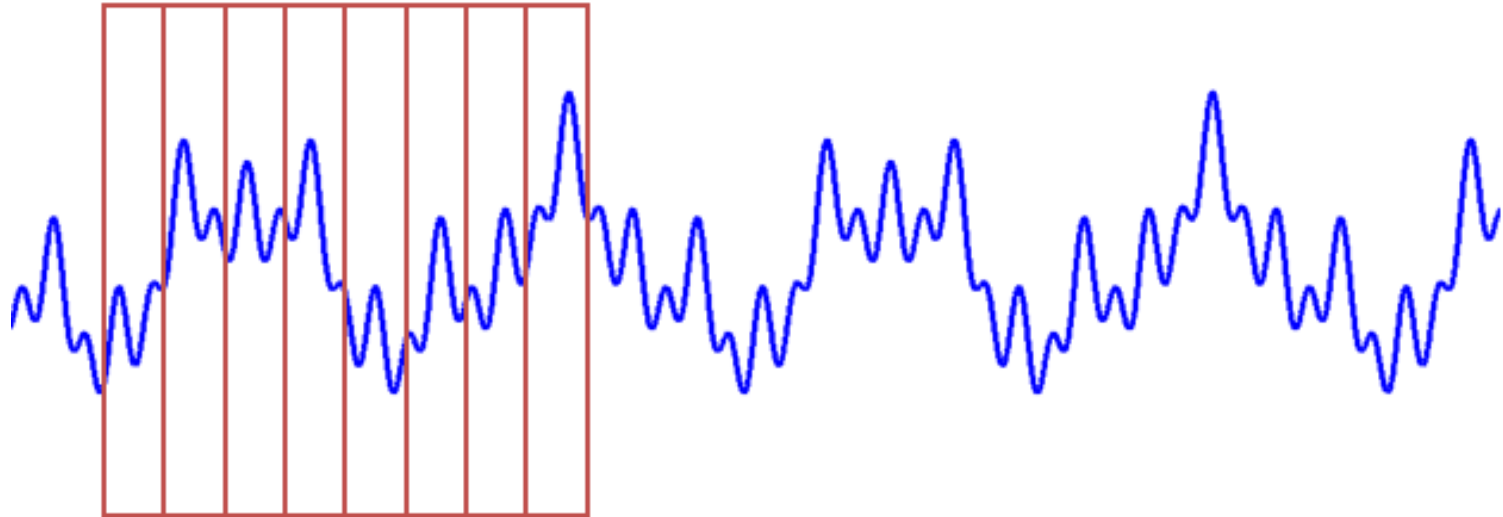
加窗傅里叶变换



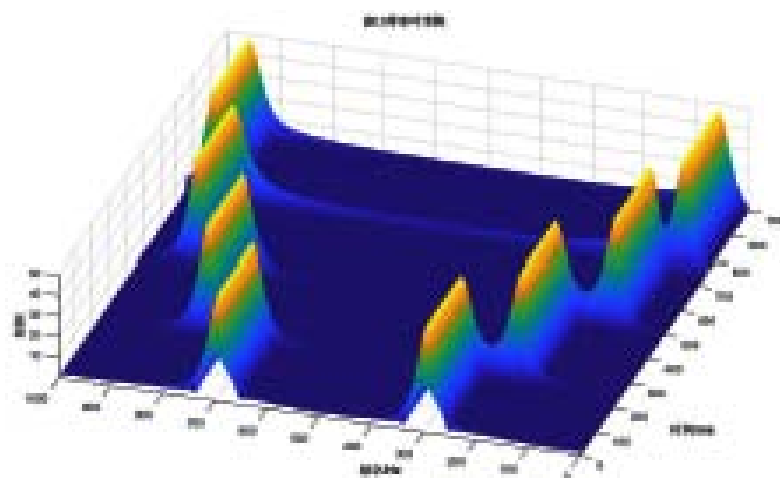
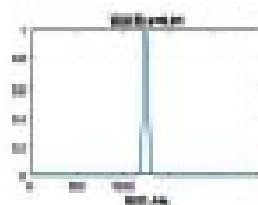
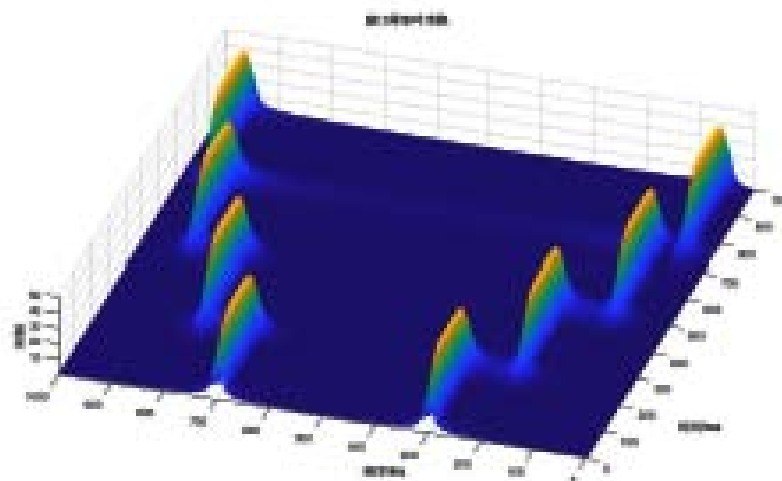
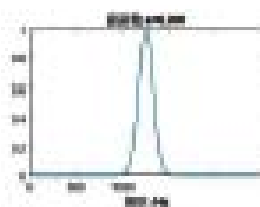


窗口大小？

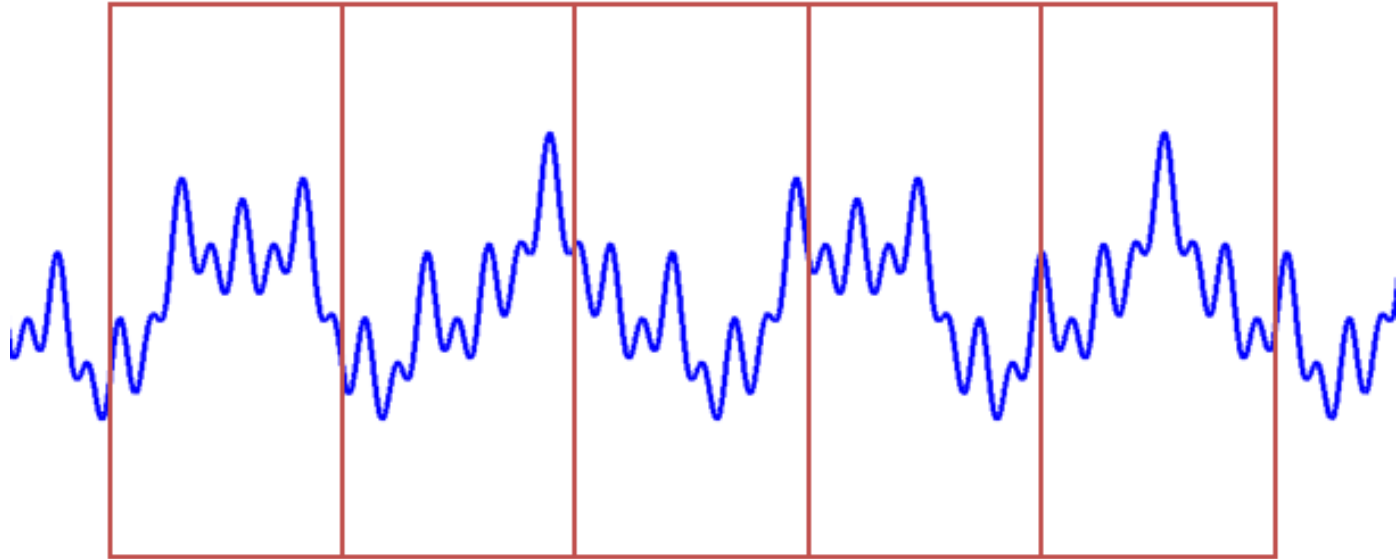
- 窗太窄，窗内的信号太短，会导致频率分析不够精准，频率分辨率差。



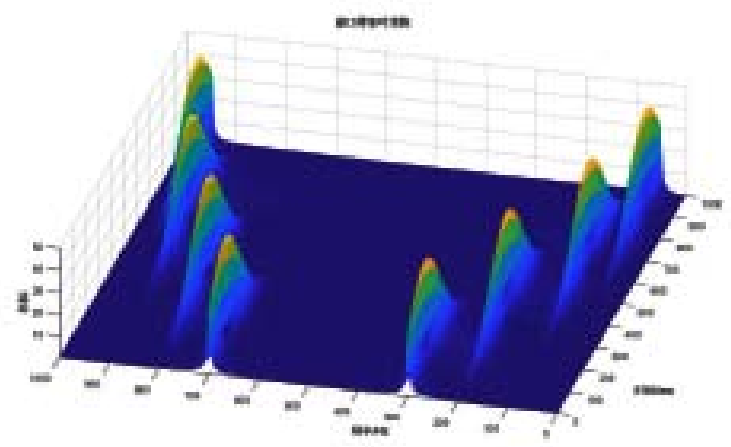
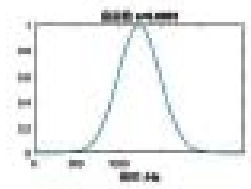
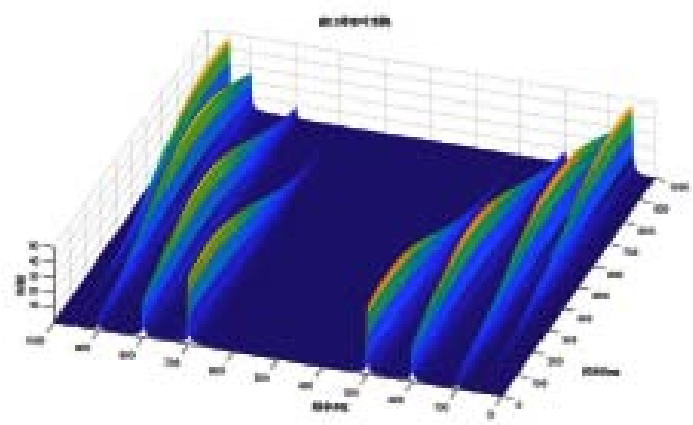
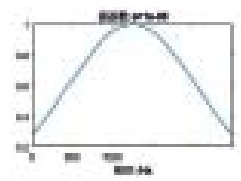
框太窄 → 频率分辨率差



- 窗太宽，时域上又不够精细，时间分辨率低。



框太宽 → 时间分辨率差



- 窄窗口时间分辨率高、频率分辨率低，
- 宽窗口时间分辨率低、频率分辨率高
- 高频适合小窗口，低频适合大窗口
 - 窗口傅里叶变换的窗口是固定的
 - 让窗口大小变起来，多做几次STFT
 - STFT做不到正交化，效率很低

测不准原理

设 $f \in L^2(\mathbb{R})$. 对 $a, \alpha \in \mathbb{R}$ 引入

$$\Delta_a f = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - a)^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}.$$

$$\Delta_a \hat{f} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \alpha)^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 104 of 143](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 (测不准原理)

假设 $f \in L^2(\mathbb{R})$. 则对任意的 $a, \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$\Delta_a f \cdot \Delta_\alpha \hat{f} \geq \frac{1}{4}.$$

证明 首先下面的等式成立

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{d}{dt} - i\alpha \right) (t - a) \right\} f - \left\{ (t - a) \left(\frac{d}{dt} - i\alpha \right) \right\} f \\ &= f + (t - a)f' - i\alpha(t - a)f - (t - a)(f' - i\alpha f) \\ &= f. \end{aligned}$$

上式两端取内积得

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \langle \{(\frac{d}{dt} - i\alpha)(t - a)\}f(t), f(t) \rangle \\ &\quad - \langle \{(t - a)(\frac{d}{dt} - i\alpha)\}f(t), f(t) \rangle \\ &= \langle (t - a)f(t), (-\frac{d}{dt} + i\alpha)f(t) \rangle \\ &\quad - \langle (\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t), (t - a)f(t) \rangle \\ &= -2 \operatorname{Re} \langle (t - a)f(t), (\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t) \rangle.\end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式, 可得

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2\|(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t)\|_{L^2}\|(t - a)f(t)\|_{L^2}.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 106 of 143

Go Back

Full Screen

Close

Quit

利用 Parseval 等式及 Fourier 变换

$$\mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dt} - i\alpha\right)f\right](\lambda) = i(\lambda - \alpha)\hat{f}(\lambda)$$

可知

$$\left\|\left(\frac{d}{dt} - i\alpha\right)f(t)\right\|_{L^2} = \|(\lambda - \alpha)\hat{f}(\lambda)\|_{L^2}.$$

于是, 我们有

$$\|(\lambda - \alpha)\hat{f}(\lambda)\|_{L^2} \|(t - a)f(t)\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2.$$

此即表明

$$\Delta_a \hat{f} \Delta_a f \geq \frac{1}{4}.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 107 of 143

Go Back

Full Screen

Close

Quit

小波变换

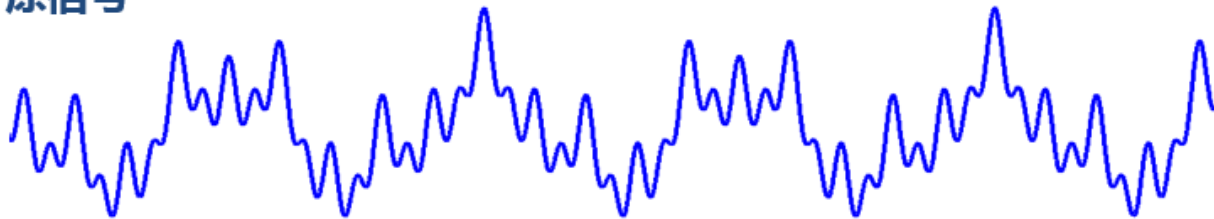
- STFT是给信号加窗，分段做FFT
- 无限长的三角函数基换成了有限长的会衰减的小波基
- 获取频率
- 定位到时间

傅里叶变换

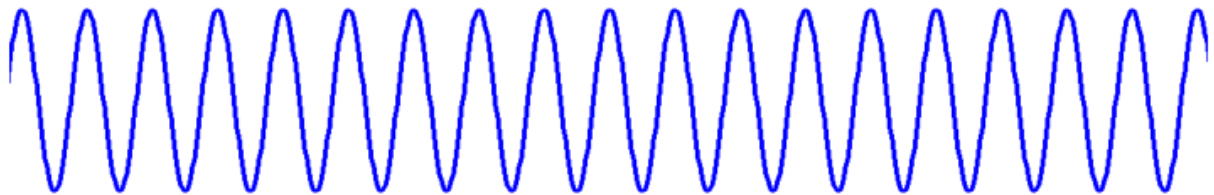
傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-i\omega t} dt$$

原信号



基函数

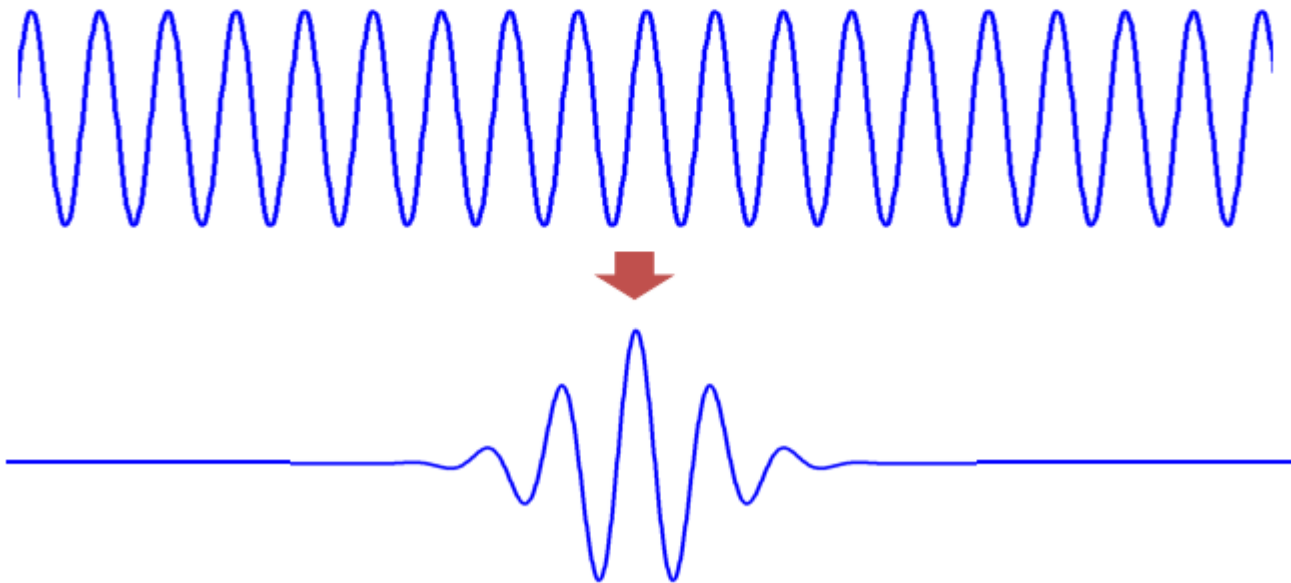


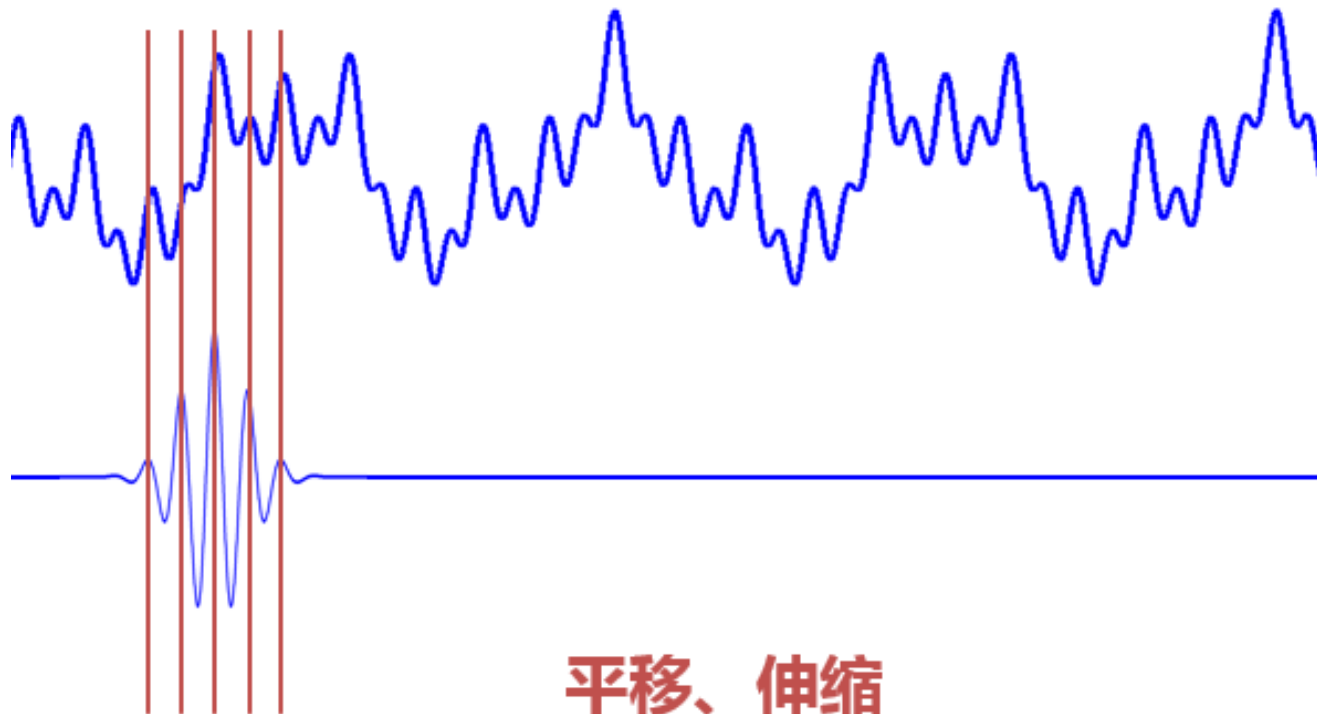
铺满了整个时域

小波变换

小波变换

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-iwt} dt \quad \rightarrow \quad WT(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$





总结

(1) 克服第一个不足：小波系数不仅像傅立叶系数那样，是随频率不同而变化的，而且对于同一个频率指标 j ，在不同时刻 k ，小波系数也是不同的。

(2) 克服第二个不足：由于小波函数具有紧支撑的性质即某一区间外为零。这样在求各频率水平不同时刻的小波系数时，只用到该时刻附近的局部信息。从而克服了上面所述的第二个不足。

(3) 克服第三个不足：通过与加窗傅立叶变换的“时间—频率窗”的相似分析，可得到小波变换的“时间—频率窗”的笛卡儿积。小波变换的“时间—频率窗”的宽度，检测高频信号时变窄，检测低频信号时变宽。这正是时间—频率分析所希望的。根据小波变换的“时间—频率窗”的宽度可变的特点，为了克服上面所述的第三个不足，只要不同时检测高频与低频信息，问题就迎刃而解了。如，选择从高频到低频的检测次序，首先选择最窄的时间窗，检测到最高频率信息，并将其分离。然后，适当放宽时间窗，再检测剩余信息中的次高频信息。再分离，再放宽时间窗，再检测次次高频信息，依次类推。为了检测到不同频率水平信息，即求出不同频率水平下不同时刻的小波系数，重点是首先要选好小波函数。

小波历史

- 1910, Haar小波
 - $L^2(\mathbb{R})$ 的第一个标准正交基
 - 具有最优的时域分辨率
 - 基函数不是连续的, 从而频域分辨率非常差
- 1936, Littlewood和Paley对傅里叶级数建立了二进制频率分量分组理论, 这是多尺度分析的最早起源;
- 1952-1962, Calderon等人将LP理论推广到高维, 建立的奇异积分算子理论

- 1965, Calderon发现了著名的再生公式, 给出了抛物型空间上 H^1 的原子分解
- 1974, Coifman实现了一维和高维空间的原子分解
- 1976, Peetre在用LP理论对Besov空间进行统一描述的同时, 给出了Besov空间的一组基

- 1981, Stromberg引入了Sobolev空间 H_p 的正交基, 对Haar正交基进行了改造, 证明了小波函数的存在性
- 1981, 法国地球物理学家Morlet提出了小波的正式概念
- 1985, 法国数学家Meyer提出了连续小波的容许性条件以及重构公式

- 1986, Meyer在证明不可能存在同时在时频域都具有一定正则性的正交小波基时, 意外发现具有一定衰减性的光滑函数以构造 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基 (Meyer基), 从而证明了正交小波系的存在
- 1984-1988, Meyer、Battle和Lemarie分别给出了具有快速衰减性的小波基函数, Meyer小波, Battle-Lemarie样条小波

- 1987, Mallat将计算机视觉领域中的多尺度分析思想引入到小波分析中, 提出了多分辨率分析的概念, 统一了之前的所有正交小波的构造, 给出了构造正交小波的一般方法, 提出了小波变换, 标志着第一代小波的开始
 - 优点: Mallat算法在小波分析中的地位相当于FFT在傅里叶变换中的作用, 它使得小波从理论走向实用
 - 缺点: 以傅里叶变换为基础, 直接在时域设计滤波器比较困难

- 1988, Daubechies基于多项式方式构造出具有有限支集的光滑正交小波基
 - 同年, 在美国NSF举办的小波专题研讨会上做了十次演讲, 将小波理论发展和实际应用推向一个高潮
- Chui基于样条函数构造了单正交小波函数, 并提出了具有最优局部化性能的尺度函数和小波函数的一般性构造方法。

- 1992, Daubechies基于之前的小波专题研讨会上的演讲, 给出了《小波十讲》
- 1992年, Kovacevic和Vetterli提出了双正交小波的概念, Cohen、Daubechies等构造了具有对称性、紧支撑、消失矩、正则性的双正交小波
- 1992年, Coifman等提出了小波包的分析和的概念。

- 1995年，Sweldens提出了一个新的小波构造的方法：提升方案，标志着第二代小波的产生。
 - 但是对于边缘，纹理等高奇异性的几何特征时，小波不是表示的最优基；
- 连续脊波变换(Ridgelet)，连续曲波变换(Curvelet)等。
- 小波和稀疏性（压缩感知）的结合

小波变换

基小波定义

定义 4.5 如果一个函数 $\psi \in L^2(R)$ 满足容许性条件

$$C_\psi = 2\pi \int_R \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < \infty,$$

则称 ψ 为基小波。

如果 $\psi(t) \in L^1(R)$, 则 $\hat{\psi}$ 是一个连续有界函数, 所以由容许性条件可得 $\hat{\psi}(0) = 0$, 即 $\int_R \psi(t) dt = 0$ 。由此可见 ψ 具有波动性。又因为 $\psi \in L^2(R)$, 一般来说具有衰减性。因此, 基小波一定是振荡型的, 并且在有限区间外等于零或者很快趋向零, 这就是小波这一名词的由来。

- Haar小波:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (4.4)$$



则 $\psi(t)$ 的傅里叶变换就是对应例子3.12中 $C_1 = \frac{1}{4}$, $W_1 = \frac{1}{4}$, $H_1 = 1$ 和 $C_2 = \frac{3}{4}$, $W_2 = \frac{1}{4}$, $H_2 = -1$, 从而它的傅里叶变换为

$$\hat{\psi}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda/4) \left(e^{-i\lambda/2} - e^{-3i\lambda/4} \right).$$

可以算出

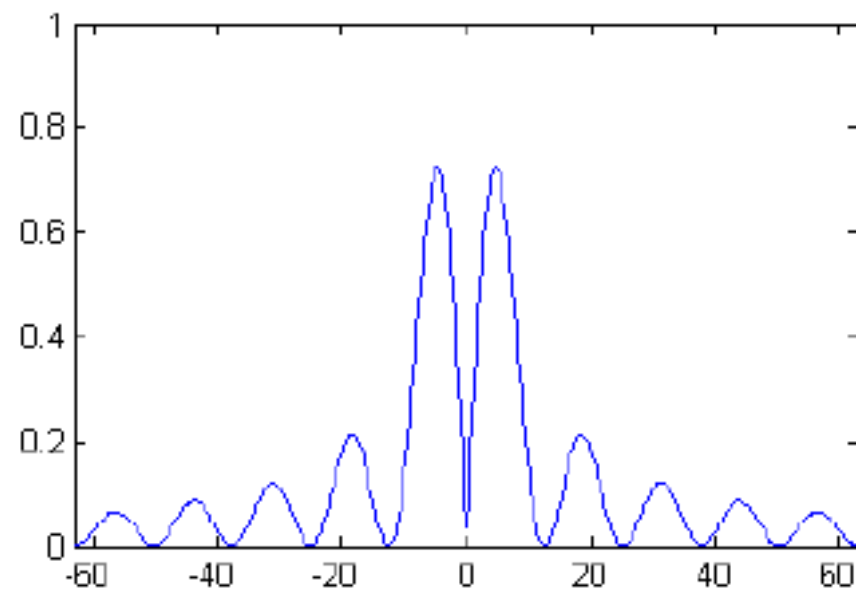
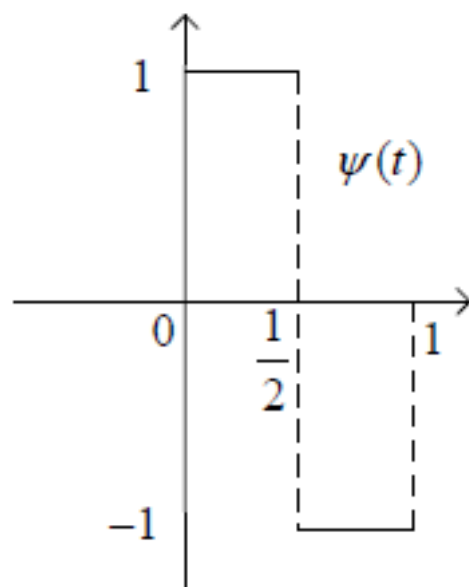
$$\hat{\psi}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\lambda} \sin(\lambda/4) \sin(\lambda/8) e^{-i\lambda/2} (\sin(\lambda/8) - i \cos(\lambda/8)).$$

故

$$C_\psi = 2\pi \int_R \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda \quad (4.5)$$

$$< 32 \int_0^\infty \frac{\sin^2(\lambda/4) \sin^2(\lambda/8)}{\lambda^3} d\lambda \quad (4.6)$$

$$= 32 \int_0^1 \frac{\sin^2(\lambda/4) \sin^2(\lambda/8)}{\lambda^3} d\lambda + C_1 < \infty. \quad (4.7)$$



- 墨西哥帽子小波:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4.8)$$

由于 $\mathfrak{F}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ 则

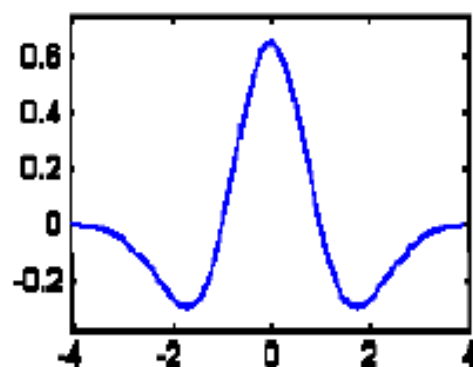
$$\hat{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-\frac{\lambda^2}{2}})'' \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \quad (4.10)$$

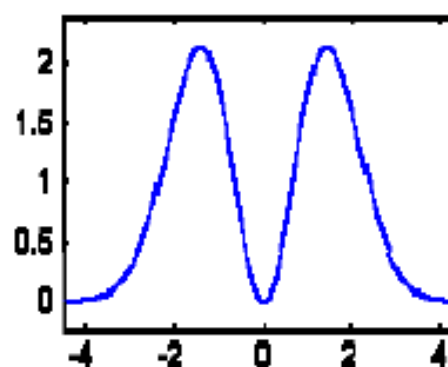
故

$$C_\psi = 2\pi \int_R \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda \quad (4.11)$$

$$= \int_R \lambda^3 e^{-\lambda^2} d\lambda < \infty. \quad (4.12)$$



$\psi(t)$



$\hat{\psi}(\omega)$

特性： 指数级衰减，非紧支撑；具有非常好的时间频率局部化；
关于0点对称。

这是高斯函数的二阶导数，在信号与图像的边缘提取中具有重要的应用。

- 线性样条小波:



$$\psi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ 1-t, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}; \\ t-2, & \frac{3}{2} \leq t < 2; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (4.13)$$

注意到

$$\psi'(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{2}, 2); \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (4.14)$$

所以

$$\mathfrak{F}[\psi'](\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \left(\sin(\lambda/4)e^{-i\lambda/4} - \sin(\lambda/2)e^{-i\lambda} + \sin(\lambda/4)e^{-i7\lambda/4} \right).$$

即

$$\mathfrak{F}[\psi](\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i\lambda^2} \left(\sin(\lambda/4)e^{-i\lambda/4} - \sin(\lambda/2)e^{-i\lambda} + \sin(\lambda/4)e^{-i7\lambda/4} \right) \quad (4.15)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{i\lambda^2} \sin^2 \frac{\lambda}{4} \sin \frac{\lambda}{2} e^{-i\lambda} \quad (4.16)$$

同Haar小波一样, 不难验证它满足基小波条件。



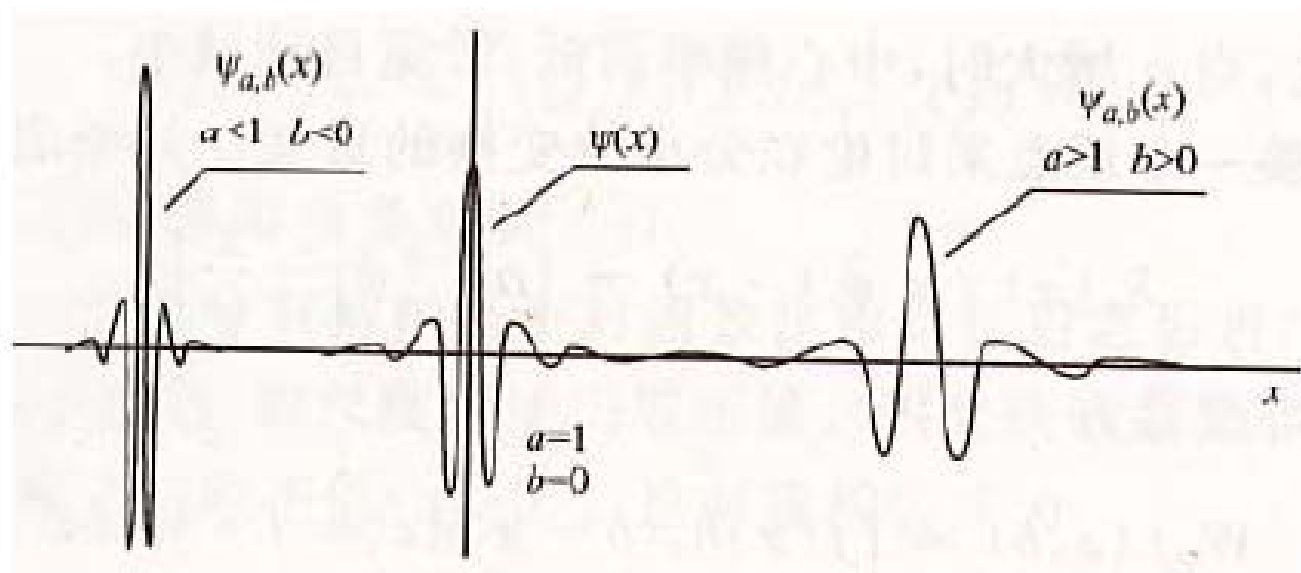
图 4.8 线性样条小波函数以及其傅里叶变换函数的图像。

定义 4.6 假设 ψ 是一个基小波, 将基小波的伸缩和平移得到的小波序列

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

其中 $a, b \in R, a \neq 0$ 。对于 $f \in L^2(R)$, 其连续小波变换定义为

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_R f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$



定理 4.4 假设 ψ, ϕ 是基小波, $f, g \in L^2(R)$, 则

- $(W_\psi(\alpha f + \beta g))(a, b) = \alpha(W_\psi(f))(a, b) + \beta(W_\psi(g))(a, b)$
- $(W_\psi(T_c f))(a, b) = (W_\psi(f))(a, b - c)$, 其中 $T_c(f) = f(t - c)$;
- $(W_\psi(D_c f))(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c}}(W_\psi(f(t)))(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$, 其中 $D_c f(t) = \frac{1}{c}f(\frac{t}{c})$, $c > 0$ 。
- $(W_{\alpha\phi + \beta\psi}(f))(a, b) = \overline{\alpha}(W_\phi(f))(a, b) + \overline{\beta}(W_\psi(f))(a, b)$
- $(W_{T_c\psi}(f))(a, b) = (W_\psi(f))(a, b + ca)$
- $(W_{D_c\psi}(f))(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c}}(W_\psi(f))(ac, b)$

能量守恒

定理 4.5 假设 $f, g \in L^2(R)$, ψ 是一基小波, 则

$$\frac{1}{C_\psi} \int_R \int_R (W_\psi(f))(a, b) \overline{(W_\psi(g))(a, b)} \frac{1}{a^2} da db = \langle f, g \rangle$$

特别的,

$$\frac{1}{C_\psi} \int_R \int_R |(W_\psi(f))(a, b)|^2 \frac{1}{a^2} da db = \|f\|_{L^2(R)}^2$$

证明 由傅里叶变换

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_{a,b}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-it\lambda} dt \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} e^{-ib\lambda} \widehat{\psi}(a\lambda)\end{aligned}$$

可得

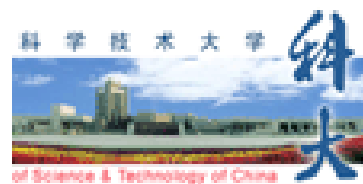
$$\begin{aligned}(W_\psi f)(a,b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{a,b} \rangle \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \int_R \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}(a\lambda)} e^{ib\lambda} d\lambda\end{aligned}$$

设 $F_a(\lambda) = \widehat{f(\lambda)}\widehat{\psi}(a\lambda)$, $G_a(\lambda) = \widehat{g(\lambda)}\widehat{\psi}(a\lambda)$, 于是

$$\begin{aligned}
 (W_\psi f)(a, b) &= |a|^{\frac{1}{2}} \int_R \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}(a\lambda)} e^{ib\lambda} d\lambda \\
 &= |a|^{\frac{1}{2}} \int_R \overline{F_a(\lambda)} e^{ib\lambda} d\lambda \\
 &= \sqrt{2\pi} |a|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \overline{F_a(\lambda)} e^{ib\lambda} d\lambda \\
 &= \sqrt{2\pi} |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{F_a}(b)}.
 \end{aligned}$$

同理可得

$$(W_\psi g)(a, b) = \sqrt{2\pi} |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{G_a}(b)}.$$



$$\begin{aligned}
 & \int_R \left(\int_R (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} db \right) \frac{1}{a^2} da \\
 &= 2\pi \int_R \left(\int_R \overline{\widehat{F}_a(b)} \widehat{G}_a(b) db \right) \frac{1}{|a|} da \\
 &= 2\pi \int_R \left(\int_R \overline{\widehat{F}_a(\lambda)} \widehat{G}_a(\lambda) d\lambda \right) \frac{1}{|a|} da \\
 &= 2\pi \int_R \left(\int_R \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}(\lambda)} |\widehat{\psi}(a\lambda)| d\lambda \right) \frac{1}{|a|} da \\
 &= 2\pi \int_R \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}(\lambda)} \left(\int_R \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{|a|} da \right) d\lambda \\
 &= C_\psi \langle f, g \rangle
 \end{aligned}$$

最后一个等式可以用换元得到，当 $\lambda > 0$ 时，

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{|a|} da &= \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{-a} da \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(s)|^2}{-\frac{s}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} ds = \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
 \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{|a|} da &= \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{a} da \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(s)|^2}{\frac{s}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} ds = \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da
 \end{aligned}$$

即等式成立。当 $\lambda < 0$ 时同理可证。

反演定理

定理 4.7 假设 ψ 是基小波, $f \in L^2(R)$, 则 f 在连续点有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_R \int_R |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) (W_\psi(f))(a, b) \frac{1}{a^2} da db$$

证明 记 $\psi_a(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi(\frac{t}{a})$, 并记上式的右端为 $p(t)$ 。代入有

$$(W_\psi(f))(a, b) = (f * \bar{\psi}_a(-\cdot))(b)$$

从而,

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_R ((W_\psi f)(a, \cdot) * \psi_a)(t) \frac{1}{a^2} da \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_R (f * \bar{\psi}_a(-\cdot) * \psi_a)(t) \frac{1}{a^2} da \end{aligned}$$

这里的黑点表示卷积的积分变量。我们需要证明 $p(t) = f(t)$ ，这等价于证明它们的傅里叶变换相等。事实上， $p(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\hat{p}(\lambda) &= \frac{2\pi}{C_\psi} \int_R \hat{f}(\lambda) \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\lambda) \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\lambda) \frac{1}{a^2} da \\ &= \frac{2\pi \hat{f}(\lambda)}{C_\psi} \int_R |\hat{\psi}(a\lambda)|^2 \frac{1}{|a|} da \\ &= \frac{2\pi \hat{f}(\lambda)}{C_\psi} \int_R |\hat{\psi}(\lambda)|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda \\ &= \hat{f}(\lambda)\end{aligned}$$

分频提取

$$f(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t),$$

其中，

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{supp } \hat{f}_1 = (\alpha_1, \beta_1), \\ \text{supp } \hat{f}_2 = (\alpha_2, \beta_2), \\ \dots\dots\dots \\ \text{supp } \hat{f}_N = (\alpha_N, \beta_N), \end{array} \right.$$



$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_N < \beta_N.$$

[Home Page](#)

Title Page



Page 2 of 26

[Go Back](#)

Full Screen

Close

Quit

假定

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

两边做连续小波变换得

$$(W_\psi f)(a, b) = (W_\psi f_1)(a, b) + (W_\psi f_2)(a, b).$$

由假设, 有

$$\text{supp } \hat{f}_1 = (\alpha_1, \beta_1),$$

$$\text{supp } \hat{f}_2 = (\alpha_2, \beta_2),$$

且

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

如果存在常数 A_1, B_1 , $A_1 < B_1$, 使得当 $a \in [A_1, B_1]$ 时, $(W_\psi f_2)(a, b) = 0$; 当 $a \notin [A_1, B_1]$ 时, $(W_\psi f_1)(a, b) = 0$. 则由反演公式可得

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= \frac{2}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (W_\psi f_1)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db \\
 &= \frac{2}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{A_1}^{B_1} (W_\psi f_1)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db \\
 &= \frac{2}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{A_1}^{B_1} ((W_\psi f_1)(a, b) + (W_\psi f_2)(a, b)) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db \\
 &= \frac{2}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{A_1}^{B_1} (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db.
 \end{aligned}$$

这样的 A_1, B_1 是否存在?如何确定?

- 选取小波, 使其 Fourier 变换有紧支集.

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{e^{(\omega-1)^2 - \frac{1}{p^2}}}, & |\omega - 1| < \frac{1}{p} \\ 0, & \text{others,} \end{cases}$$

其中 $p > 0$ 是待定参数. 则

$$\text{supp} \hat{\psi} = \left[1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p} \right],$$

且

$$\text{supp} \hat{\psi}_{a,b} = \left[\frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{p} \right), \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right].$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 确定 A_1, B_1 .

要使 $\langle \hat{f}_1, \hat{\psi}_{a,b} \rangle = 0$, 只需

$$\text{supp} \hat{f}_1 \cap \text{supp} \hat{\psi}_{a,b} = \emptyset,$$

即

$$(\alpha_1, \beta_1) \cap \left(\frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{p} \right), \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) = \emptyset.$$

从而只需

$$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{p} \right) < \alpha_1 \text{ 或 } \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{p} \right) > \beta_1,$$

即

$$a > \frac{1}{\alpha_1} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \text{ 或 } a < \frac{1}{\beta_1} \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

不妨取 $A_1 = \frac{1}{\beta_1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)$, $B_1 = \frac{1}{\alpha_1} \left(1 + \frac{1}{p} \right)$.

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 6 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 确定 p .

要使 $\langle \hat{f}_2, \hat{\psi}_{a,b} \rangle = 0$, 只需

$$\text{supp} \hat{f}_2 \cap \text{supp} \hat{\psi}_{a,b} = \emptyset.$$

从而只需

$$a > \frac{1}{\alpha_2} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \text{ 或 } a < \frac{1}{\beta_2} \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

由题意可知

$$[A_1, B_1] \subset \left\{ a > \frac{1}{\alpha_2} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \text{ 或 } a < \frac{1}{\beta_2} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right\}.$$

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 7 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

于是, 选取 p 满足

$$\frac{1}{\beta_1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{1}{\alpha_2} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

即

$$p > \frac{\alpha_2 + \beta_1}{\alpha_2 - \beta_1}.$$

一般地, 对于 $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_N(t)$, 只要选取

$$A_n = \frac{1}{\beta_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad B_n = \frac{1}{\alpha_n} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

以及

$$p > p_0 = \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \frac{\alpha_n + \beta_{n-1}}{\alpha_n - \beta_{n-1}} \right\},$$

就可由 f 逐层分离出 f_1, f_2, \cdots, f_N .

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 8 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 定义 $p_i = \frac{\alpha_i + \beta_{i-1}}{\alpha_i - \beta_{i-1}}$, 选取 $p > \max_{i=2}^n \{p_i\}$, 并定义基小波 $\psi(t)$, 使得

$$\hat{\psi}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{e^{(\lambda-1)^2 - \frac{1}{p^2}}}, & |\lambda - 1| < \frac{1}{p}; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

则 $\hat{\psi}(\lambda)$ 的支集为 $[1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}]$, 且 $\hat{\psi}_{a,b}(\lambda)$ 的支集为 $[\frac{1}{a}(1 - \frac{1}{p}), \frac{1}{a}(1 + \frac{1}{p})]$ 。

- 定义 $A_i = \frac{1}{\beta_i}(1 - \frac{1}{p})$, $B_i = \frac{1}{\alpha_i}(1 + \frac{1}{p})$ 。
- 则

$$f_i(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_R \int_{A_i}^{B_i} (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db.$$

$$f_i(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_R \int_R (W_\psi f_i)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db \quad (1.22)$$

$$= \frac{2}{C_\psi} \int_R \int_{A_i}^{B_i} (W_\psi f_i)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db \quad (1.23)$$

$$= \frac{2}{C_\psi} \int_R \int_{A_i}^{B_i} (W_\psi \sum_{i=1}^n f_i)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db \quad (1.24)$$

$$= \frac{2}{C_\psi} \int_R \int_R (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db. \quad (1.25)$$

在这个式子中，第一个等号是由连续小波变换的反演公式得到，第二个是由 \hat{f}_i 的支集确定，因为当 $a \in [A_i, B_i]$ 时，

$$\frac{1}{a}(1 - \frac{1}{p}) \in [\frac{1}{B_i}(1 - \frac{1}{p}), \frac{1}{A_i}(1 - \frac{1}{p})] = [\alpha_i \frac{p-1}{p+1}, \beta_i] \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{a}(1 + \frac{1}{p}) \in [\frac{1}{B_i}(1 + \frac{1}{p}), \frac{1}{A_i}(1 + \frac{1}{p})] = [\alpha_i, \beta_i \frac{p+1}{p-1}] \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

从而 $[\alpha_i, \beta_i] \subseteq \text{supp} \hat{\psi}_{a,b}(t)$ 。

最后一个等式是因为当 $a \in [A_i, B_i]$ 时, $\hat{\psi}_{a,b}(t)$ 的支集为 $[\alpha_i \frac{p-1}{p+1}, \beta_i \frac{p+1}{p-1}]$, 而当 $j < i$, \hat{f}_j 的支集是 $[\alpha_j, \beta_j]$, 由于

$$\frac{\beta_j}{\alpha_i} < \frac{\beta_j}{\alpha_{j+1}} < \frac{p+1}{p-1}$$

从而

$$\beta_j < \alpha_i \frac{p-1}{p+1}.$$

另一方面, 如果 $j > i$, 由于

$$\frac{\alpha_j}{\beta_i} > \frac{\alpha_{i+1}}{\beta_i} > \frac{p+1}{p-1}$$

从而

$$\alpha_j > \beta_i \frac{p+1}{p-1}.$$

例 4.6 下面给出连续小波变换在滤波中应用。由重构公式：

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_R \int_R (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db,$$

所以，我们可以根据需要，取 R^2 的可测集 E ，并认为

$$f_E(t) \doteq \frac{1}{C_\psi} \int_E \int_R (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db$$

是信号 $f(t)$ 过滤掉一些波所得的结果。下面就几个具体的例子来说明一下小波变换作为显微镜和望远镜的含义。

比如, 设

$$E = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2], \quad (4.29)$$

$$I_i = [b_i + a_i t^* - |a_i| \Delta_\psi, b_i + a_i t^* + |a_i| \Delta_\psi], \quad (4.30)$$

$$J_i = \left[\frac{\lambda^*}{a_i} - \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{|a_i|}, \frac{\lambda^*}{a_i} + \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{|a_i|} \right], \quad (4.31)$$

其中 $i = 1, 2$, t^* , Δ_ψ , λ^* , $\Delta_{\hat{\psi}}$ 分别是基小波在时频中的中心和半径。则 $f_E(t)$ 表示时域从 I_1 到 I_2 , 频域从 J_1 到 J_2 的波的连续叠加。可以看到, 变量 a 的范围有两个作用, 即确定时段和频段, 而变量 b 的范围只有一个作用, 就是确定时段。

其他情况可以类似考虑。比如, 如果 a 在范围 $[a_1, a_2]$ 中变化且 $|a_1|$, $|a_2|$ 都很小的时候, $b_i + a_i t^* - |a_i| \Delta_\psi$ 和 $b_i + a_i t^* + |a_i| \Delta_\psi$ 都接近 b , 故对固定的 b , 取 $\epsilon > 0$ 且充分小, 令 $E = [a_1, a_2] \times [b - \epsilon, b + \epsilon]$, 则 $f_E(t)$ 表示 $t = b$ 附近一些高窄波的叠加, 表示函数 $f(t)$ 在 $t = b$ 附近的局部特征。

又如, 对充分大的 $|a_1|, |a_2|$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, 取 $E = (-\infty, a_1] \cup [a_2, \infty)$, 则 $f_E(t)$ 表示 $f(t)$ 一定程度的轮廓。

边界提取

例 4.7 下面给出小波变换在边界提取上的应用。什么是边界？无论什么物体，从低突然变高或者从高突然变低，高低的分界线就是边界。对于图像，颜色或明暗的分界线就是边界。因此边界点就是突变点。而对于函数 $f(t)$ 来说，如果 $f'(t_0) > 0$ ，则 $f(t)$ 在 t_0 的附近增加， $f'(t_0)$ 越大增加越快。如果 $f'(t_0)$ 是 $f'(t)$ 在一定范围中的最大值，则 t_0 就是 $f(x)$ 的突变点。所以对于函数描述的信号来说，导数的绝对值的极大值点就是边界点。边界提取，就是寻找使得导数的绝对值极大的点。

引理 4.2 设 $\theta(t) \in L^1(R)$ ，且

$$\int_R \theta(t) dt = 1.$$

又记

$$\theta_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \theta\left(\frac{t}{\alpha}\right), \alpha > 0,$$

其中 $\theta_\alpha(t)$ 满足

$$\theta_\alpha(t) \leq \frac{C_1}{\alpha}, \theta_\alpha(t) \leq \frac{C_2 \alpha}{x^2},$$

则对 $f(t) \in L^1(R)$ 任一连续点 t ，

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} (f * \theta_\alpha)(t) = f(t).$$

假设 $\theta(t)$ 满足上面引理的条件而且满足

$$\int_R \theta'(t) dt = 0.$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f * \theta_a)(x) &= \int_R f(x)(\theta_a(x-t))' dt \\ &= \int_R f(x-t)(\theta_a)'(t) dt = \int_R f(x-t) \frac{1}{a} \left(\theta \left(\frac{t}{a} \right) \right)' dt \\ &= \int_R f(x-t) \frac{1}{a^2} \theta' \left(\frac{t}{a} \right) dt \end{aligned}$$

令 $\psi(x) = \theta'(x)$, 则上式可以写成

$$\begin{aligned} a \frac{d}{dx} &= \int_R f(x-t) \frac{1}{a} \psi \left(\frac{t}{a} \right) dt \\ &= \frac{1}{a} \int_R f(t) \psi \left(\frac{x-t}{a} \right) dt \\ &\doteq W_a^\psi(x) \end{aligned}$$

以下考察如何利用 $W_a^\psi(x)$ 进行信号的边界提取。当 $a > 0$ 且充分小的时候， $f * \theta_a(x)$ 和 $f(x)$ 近似，因此 $f * \theta_a(x)$ 的导数和 $f(x)$ 的导数近似，又 $W_a^\psi(x)$ 与 $af'(x)$ 近似， $|W_a^\psi(x)|$ 的极大值点 x_0 就是 $af'(x)$ 的极大值点，从而是 $|f'(x)|$ 的极大值点，因此就是 $f(x)$ 表示信号的边界点。总之，信号边界的提取就是计算 $|W_a^\psi(x)|$ 的极大值点。

那为什么不直接计算 $|f'(x)|$ 来求解边界呢？原因在于：信号的采集一般都是采样的，而且得到的数据一般都具有噪声。直接无法求解 $|f'(x)|$ 的极大值点，即使使用连续函数的重构也会有比较大的误差。而 $|W_a^\psi(x)|$ 的计算包含积分，积分具有光滑处理的作用。另外， $|W_a^\psi(x)|$ 的极大值可以利用算法得到，而 $|f'(x)|$ 的极大值点在不知道 $f(x)$ 的表达式的时候是无法计算的。

1. 数据采集。假设得到数据 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, $x_1 < \dots < x_n$ 。
2. 获得连续函数。一般可以通过线性插值, 多项式插值或者样条插值得到;
3. 求 $W_a^\psi(x)$ 。选取函数 $\psi(x)$, 计算得

$$W_a^\psi(x) = \frac{1}{a} \int_{x_1-\delta}^{x_n+\delta} f(t) \psi\left(\frac{x-t}{a}\right) dt,$$

由此计算

$$|W_a^\psi(x_1)|, |W_a^\psi(x_2)|, \dots, |W_a^\psi(x_n)|$$

4. 求边界点。根据原始数据、精度等要求, 确定一个阈值 T , 如果 $|W_a^\psi(x_i)|$ 的值超过这个阈值, 我们就认为 $|W_a^\psi(x_i)|$ 是极大值, 对应的 x_i 就是极大值点。

2.3. 小波时频分析-数学显微镜

假设 ψ 是一个基小波, 并且 ψ 及其 Fourier 变换 $\hat{\psi}$ 都是窗函数, 其中心和半径分别为

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}} t |\psi(t)|^2 dt, \\ \Delta_\psi &= \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} (t - t^*)^2 |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \\ \omega^* &= \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega, \\ \Delta_{\hat{\psi}} &= \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

假定实际选择的基小波能使 ω^* 为正数, 且在小波序列 $\psi_{a,b}$ 中参数 $a > 0$.

- 由 ψ 是一个窗函数可知, $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a})$ 也是一个窗函数, 其中心和半径分别为 $at^* + b, a\Delta_\psi$. 由连续小波变换的定义

$$(W_\psi f)(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt$$

可知, $(W_\psi f)(a, b)$ 给出了信号在时间窗

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi]$$

内的局部化信息.

- 由 $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{1/2} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega)$ 可知 $\hat{\psi}_{a,b}$ 是一个窗函数, 其中心和半径分别为 ω^*/a 和 $\Delta_{\hat{\psi}}/a$. 于是由小波变换的频域表示

$$(W_{\psi}f)(a, b) = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle$$

可知, 小波变换具有表征信号频域上局部性质的能力, 它给出了信号在频率窗

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a} \right]$$

内的局部信息.

灵活可变的时频窗

- 连续小波变换具有时频局部化特征, $(W_\psi f)(a, b)$ 给出了信号在时间-频率平面中一个矩形时频窗

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \times$$

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}\right]$$

内的局部信息.

- 时频窗的宽度为 $2a\Delta_\psi$, 面积为 $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$. 当检测高频信息时 (对于小的 $a > 0$), 时间窗自动变窄; 当检测低频信息时 (对于大的 $a > 0$), 时间窗自动变宽.

3 二进小波变换

3.1. 尺度参数离散化

在连续小波变换 $(W_\psi f)(a, b)$ 的频率窗

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a} \right]$$

中, 取 $a_j = \frac{1}{2^j}$, 并且假设 $\omega^* = 3\Delta_{\hat{\psi}}$, 则频率窗为

$$[2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}}, 2^{j+2}\Delta_{\hat{\psi}}].$$

于是, 小波变换 $(W_\psi f)(\frac{1}{2^j}, b)$ 给出了信号在频带

$$[2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}}, 2^{j+2}\Delta_{\hat{\psi}}]$$

中的局部信息. 同时,

$$(0, \infty) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}}, 2^{j+2}\Delta_{\hat{\psi}}]$$

给出了正频率域 $(0, \infty)$ 的一个二进划分. 因此, 由小波变换值

$$(W_\psi f)(\frac{1}{2^j}, b), \quad j \in \mathbb{Z},$$

可以得到信号在所有频域上的信息.

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[<<](#)
[>>](#)
[<](#)
[>](#)

Page 28 of 62

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

注 条件 $\omega^* = 3\Delta_{\hat{\psi}}$ 是很容易满足的.

假设 ψ 是一个基小波. 令 $\tilde{\psi}(t) = e^{i\alpha t}\psi(t)$, 则 $\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \hat{\psi}(\omega - \alpha)$. 于是, $\hat{\tilde{\psi}}$ 的中心和半径分别为

$$\tilde{\omega}^* = \omega^* + \alpha,$$

$$\Delta_{\hat{\tilde{\psi}}} = \Delta_{\hat{\psi}}.$$

选取 $\alpha = 3\Delta_{\hat{\psi}} - \omega^*$, 即可得 $\tilde{\omega}^* = 3\Delta_{\hat{\tilde{\psi}}}$.

3.2. 二进小波变换

任一信号 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 是否能由连续小波变换 $(W_\psi f)(a, b)$ 在离散化尺度参数 $a_j = 1/2^j$, $j \in \mathbb{Z}$ 下重构?

定义 一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为二进小波, 如果存在两个正常数 A 和 B , 满足 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得稳定性条件

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B$$

成立. 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 其二进小波变换定义为

$$(W_\psi^j f)(b) = 2^{j/2} (W_\psi f)\left(\frac{1}{2^j}, b\right), \quad b \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}.$$

稳定性条件解释

稳定性条件

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B$$

等价于对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$A\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|W_{\psi}^j f\|_2^2 \leq B\|f\|_2^2.$$

二进小波必是基小波

定理 假设 ψ 是二进小波, 则它是满足

$$A \ln 2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2,$$

$$A \ln 2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2,$$

的基小波. 特别地, 如果 $A = B$, 则有

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 4\pi A \ln 2.$$

证明 由变量替换可得

$$\int_1^2 \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega.$$

于是, 由稳定性条件得

$$\int_1^2 \frac{A}{\omega} d\omega \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq \int_1^2 \frac{B}{\omega} d\omega.$$

从而有

$$A \ln 2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2.$$

类似地, 利用

$$\int_{-2}^{-1} \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{-\omega} d\omega = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega.$$

及稳定性条件可得

$$\int_{-2}^{-1} \frac{A}{-\omega} d\omega \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq \int_{-2}^{-1} \frac{B}{-\omega} d\omega.$$

从而有

$$A \ln 2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2.$$

3.3. 二进对偶

定义 假设 ψ 是一个二进小波. 称

$$\widehat{\psi^*}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}$$

的 Fourier 逆变换 $\psi^* \in L^2(\mathbb{R})$ 为 ψ 的二进对偶.

定理 假设 ψ 是一个二进小波. 则其二进对偶 ψ^* 也是一个二进小波, 并且满足

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

此外, 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi}^j f)(b) 2^j \psi^*(2^j(t-b)) db.$$

证明 由 ψ^* 的 Fourier 变换可得

$$\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega) = \frac{\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}.$$

从而有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)|^2 &= \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2)^2} \\ &= \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}. \end{aligned}$$

因此, ψ^* 是二进小波, 且满足

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

令 $g_j(t) = 2^j \overline{\psi(-2^j t)}$, 则有

$$\begin{aligned}(W_\psi^j f)(b) &= 2^{j/2} (W_\psi f)\left(\frac{1}{2^j}, b\right) \\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi(2^j(t-b))} dt \\ &= (f * g_j)(b).\end{aligned}$$

由 $\hat{g}_j(\omega) = \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)}$ 可得

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi^j f)(b) 2^j \psi^*(2^j(t-b)) db \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)} \widehat{\psi}^*(2^{-j}\omega) e^{it\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega \\ &= f(t).\end{aligned}$$

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 38 of 62](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

4 小波框架

4.1. 时间参数离散化

为了计算的有效性, 将时间参数 b 离散化

$$b_{j,k} = \frac{k}{2^j} b_0, \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

其中 $b_0 > 0$ 是一个固定常数, 称为抽样速率. 进一步引入

$$\psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k b_0), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

考虑对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 利用连续小波变换的离散信息

$$(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^j}, b_{j,k}\right) = \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle$$

重构 f .

4.2. 框架理论 (Duffin, Schaeffer, 1952)

4.2.1. 框架

定义: 设 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的序列, 如果存在常数 A, B , 满足 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对任意的 $f \in H$, 有

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

则称 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 H 中的一个框架, A, B 称为框架的上、下界. 如果 $A = B$, 则称 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 H 中的紧框架.

例 设 $H = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$.

对任意的 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\sum_{j=1}^3 |\langle x, e_j \rangle|^2 = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{3}{2}\|x\|^2.$$

于是, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 \mathbb{R}^2 中的紧框架, 其中 $A = B = 3/2$. 显然, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是线性相关的, 从而构不成 \mathbb{R}^2 的基.

框架与标准正交基

定理 Hilbert 空间 H 中的序列 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是标准正交基的充分必要条件是 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 构成 H 的紧框架, 且 $A = B = 1$, $\|\phi_j\| = 1, j \in \mathbb{Z}$.

证明 (充分性) 由 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 构成 H 的 $A = B = 1$ 的紧框架可知, 对任意的 $f \in H$, 有

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

特别取 $f = \phi_k$, 则有

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2.$$

因为 $\|\phi_k\| = 1$, 所以 $\sum_{j \neq k} |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2 = 0$. 从而 $\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \delta_{jk}$, 即 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 H 中的标准正交集.

4.2.2. 框架算子与对偶框架

定义 设 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个框架. 称线性算子

$$F : H \rightarrow l^2, Ff = \{\langle f, \phi_j \rangle\}_{j \in \mathbb{Z}}, \forall f \in H,$$

为框架 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 的分析算子. 称 F 的伴随算子

$$F^* : l^2 \rightarrow H, F^*c = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \phi_j, \forall c = \{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2,$$

为框架 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 的综合算子. 令 $T = F^*F$, 则

$$T : H \rightarrow H, Tf = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \forall f \in H.$$

称 T 为框架 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 的框架算子.

框架算子的性质

根据框架算子 T 的定义, 易知

$$\langle Tf, f \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j \rangle|^2.$$

因此, 框架条件等价于, 对于任意的 $f \in H$

$$A\langle f, f \rangle \leq \langle Tf, f \rangle \leq B\langle f, f \rangle,$$

即

$$AI \leq T \leq BI,$$

其中 I 为恒等算子.

可得

- $T^* = T$, 并且

$$A\|f\| \leq \|Tf\| \leq B\|f\|, \quad f \in H.$$

- T 可逆, 并且 T^{-1} 满足

$$(T^{-1})^* = T^{-1},$$

$$\frac{1}{B}\|f\| \leq \|T^{-1}f\| \leq \frac{1}{A}\|f\|, \quad f \in H,$$

$$\frac{1}{B}I \leq T^{-1} \leq \frac{1}{A}I.$$

时频局部化

连续小波变换

二进小波变换

小波框架

正交小波

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 46 of 62

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 假设 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个以 A, B 为框架界的框架, T 为相应的框架算子. 令

$$\tilde{\phi}_j = T^{-1}\phi_j, j \in \mathbb{Z}.$$

则 $\{\tilde{\phi}_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 H 的以 B^{-1}, A^{-1} 为框架界的框架. 称 $\{\tilde{\phi}_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 为 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 的对偶框架.

证明: 对任意的 $f \in H$, 有

$$\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle = \langle f, T^{-1}\phi_j \rangle = \langle T^{-1}f, \phi_j \rangle.$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle T^{-1}f, \phi_j \rangle|^2 \\ &= \|F(T^{-1}f)\|^2 \\ &= \langle T^{-1}f, f \rangle. \end{aligned}$$

再由

$$\frac{1}{B}I \leq T^{-1} \leq \frac{1}{A}I$$

可得

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2.$$

4.2.3. 框架展开

定理 假设 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个框架, 并且 $\{\tilde{\phi}_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是其对偶框架. 则对任意的 $f \in H$, 有

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j$$

或

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle \phi_j.$$

证明 对任意的 $f \in H$, 有

$$\begin{aligned}
 f &= T^{-1}Tf = T^{-1}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j\right) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle (T^{-1}\phi_j) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j.
 \end{aligned}$$

对于第二个重构公式, 我们有

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle \phi_j &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, T^{-1}\phi_j \rangle \phi_j \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle T^{-1}f, \phi_j \rangle \phi_j \\
 &= T(T^{-1}f) = f.
 \end{aligned}$$

框架展开的特殊性

- 如果 $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \phi_j$, 其中 $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2$ 满足 c_j 不全等于 $\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle$. 则

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2 > \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2.$$

这说明,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle \phi_j.$$

是利用框架 $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 展开时, 最“节省”的展开方式.

- 如果对任意的 $f \in H$, $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle u_j$. 则对任意的 $f \in H$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle u_j, f \rangle|^2 \geq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{\phi}_j, f \rangle|^2.$$

这说明,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j$$

是相同系数的不同展开中最“节省”的.

说明 4.4 注意到由于 $\{\phi_j\}$ 不一定线性无关, 所以上述的展开是不唯一的。那么基于框架的展开有什么样的特殊性呢? 这里我们可以从两个方面来看这个问题。首先我们给出一些记号:

$$\tilde{F} : H \rightarrow l^2, \tilde{F}(f) = \{\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle\}, \forall f \in H,$$

$$Im(F) = \{Ff \in H, \forall f \in H\} = Im(\tilde{F}) = \{\tilde{F}f \in H, \forall f \in H\}$$

1. 如果 $f = \sum c_j \phi_j$, 其中 $\{c_j\}$ 不完全等于 $\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle$, 则

$$\sum |c_j|^2 > \sum |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2$$

这说明利用框架 $\{\phi_j\}$ 展开是最节省的展开方式。

事实上, 由于 $f = \sum c_j \phi_j$, 所以 $f = F^*c$, 其中 $c = \{c_j\}_{j \in Z}$ 。设 $c = a + b$, 其中 $a \in Im(F) = Im(\tilde{F})$, $b \perp Im(F)$ 。由于 $a \perp b$, 所以

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

另外, 由于 $a \in \text{Im}(F) = \text{Im}(\tilde{F})$, 所以存在 $g \in H$, 使得 $a = \tilde{F}g$, 即 $c = \tilde{F}g + b$, 注意到对任意的 $f \in H$, 有

$$0 = \langle b, Ff \rangle = \langle F^*b, f \rangle$$

所以 $F^*b = 0$ 。因此

$$f = F^*c = F^*\tilde{F}g + F^*b = g$$

所以 $c = \tilde{F}f + b$, 且

$$\|c\|^2 = \|\tilde{F}f\|^2 + \|b\|^2 = \sum |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 + \|b\|^2$$

2. 如果 $f = \sum \langle f, \phi_j \rangle u_j$, 其中 $\{u_j\}$ 不完全等于 $\tilde{\phi}_j$, 则

$$\sum |\langle f, u_j \rangle|^2 \geq \sum |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2$$

4.3. 小波框架

定义 对于函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, 如果序列

$$\psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - kb_0), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架, 则称 ψ 生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个小波框架 $\{\psi_{b_0;j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ 而有抽样速率 b_0 .

定理 假设 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个小波框架 $\{\psi_{b_0;j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ 而有抽样速率 b_0 , 且框架界为 A, B . 则 ψ 是一个二进小波, 且

$$b_0 A \leq 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \leq b_0 B.$$

小波框架重构

框架算子

$$Tf = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

对偶框架

$$\tilde{\psi}_{b_0;j,k} = T^{-1}(\psi_{b_0;j,k}), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

重构公式

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \tilde{\psi}_{b_0;j,k}$$

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}.$$

时频局部化

连续小波变换

二进小波变换

小波框架

正交小波

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 53 of 62

Go Back

Full Screen

Close

Quit

重构计算

- 紧框架, 即 $A = B$.

框架算子

$$T = AI$$

对偶框架

$$\tilde{\psi}_{b_0;j,k} = T^{-1}(\psi_{b_0;j,k}) = \frac{1}{A}\psi_{b_0;j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

重构公式

$$f = \frac{1}{A} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} = \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}.$$

- 非紧框架, $A \approx B$.

框架算子

$$T \approx \frac{A+B}{2}I$$

$$T^{-1} \approx \frac{2}{A+B}I$$

对偶框架

$$\tilde{\psi}_{b_0;j,k} \approx \frac{2}{A+B}\psi_{b_0;j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

重构公式

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \tilde{\psi}_{b_0;j,k} \approx \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}.$$

具体地,

令 $R = I - \frac{2}{A+B}T$, 则有

$$\frac{A-B}{A+B}I \leq R \leq \frac{B-A}{A+B}I.$$

于是可得 $\|R\| \leq \frac{B-A}{A+B} < 1$, 从而

$$T^{-1} = \frac{2}{A+B}(I - R)^{-1} = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^{+\infty} R^n.$$

进一步, 对偶框架可表示为

$$\tilde{\psi}_{b_0;j,k} = T^{-1}(\psi_{b_0;j,k}) = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

在 (*) 式中, 取近似

$$\tilde{\psi}_{b_0;j,k} \approx \frac{2}{A+B} \psi_{b_0;j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

则其余项为

$$r_{j,k} = \frac{2}{A+B} \sum_{n=1}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k}.$$

从而

$$\begin{aligned} \|r_{j,k}\| &\leq \frac{2}{A+B} \sum_{n=1}^{+\infty} \|R\|^n \|\psi_{b_0;j,k}\| \\ &= \frac{2}{A+B} \|\psi_{b_0;j,k}\| \frac{\|R\|}{1 - \|R\|} \\ &= \frac{B-A}{A(A+B)} \|\psi_{b_0;j,k}\|. \end{aligned}$$

f 的展开为

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \tilde{\psi}_{b_0;j,k} \\
 &= \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} + \frac{2}{A+B} \sum_{n=1}^{+\infty} R^n \left(\sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} \right) \\
 &= \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} + (T^{-1} - \frac{2}{A+B} I) T f \\
 &= \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} + R f,
 \end{aligned}$$

并且

$$\|Rf\| \leq \|R\| \|f\| \leq \frac{B-A}{A+B} \|f\|.$$

可见, 如果 $A \approx B$, 则 $\|Rf\|$ 很小, 于是得到对 f 的精确近似.

- 非紧框架, 不满足 $A \approx B$.

在 (*) 式中, 取前 $N + 1$ 项作为近似

$$\tilde{\psi}_{b_0;j,k}^N = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^N R^n \psi_{b_0;j,k}.$$

则其余项为

$$\begin{aligned} r_{j,k}^N &= \frac{2}{A+B} \sum_{n=N+1}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k} \\ &= \frac{2}{A+B} R^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k} \\ &= R^{N+1} \tilde{\psi}_{b_0;j,k}. \end{aligned}$$

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[<<](#)
[>>](#)
[<](#)
[>](#)

Page 59 of 62

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

时频局部化

连续小波变换

二进小波变换

小波框架

正交小波

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 60 of 62

Go Back

Full Screen

Close

Quit

f 的近似展开为

$$f_N = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \tilde{\psi}_{b_0;j,k}^N.$$

并且误差估计为

$$\|f - f_N\| \leq \|R^{N+1}\| \leq \|R\|^{N+1} \|f\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^{N+1} \|f\|.$$

可见, 随着 N 的增加, 误差指数减少.

时频局部化

连续小波变换

二进小波变换

小波框架

正交小波

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 61 of 62

Go Back

Full Screen

Close

Quit

5 正交小波

定义 函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为正交小波, 如果

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基. 称 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交小波基.

若 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交小波基, 则对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 有展开式

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

其中

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

问题: 这样的正交小波 ψ 是否存在? 怎样构造?