有限元方法 2021 秋（11 月 8、10 日作业）

金晨浩 SA21001033

10.x.5 **设** V, V_h **为** H **的子空间，**$\dim V_h < \infty$**，**$a(\cdot,\cdot)$ **为** H **上的对称正定双线性型。给定** $F \in H^{'}$**，设** $u \in V$, $u_h \in V_h$ **分别满足** $a(u,v) = F(v)$, $\forall v \in V$; $a(u_h, v) = F(v)$ $\forall v \in V_h$**。证明**

$$\|u - u_h\|_a \le \inf_{v\in V_h} \|u - v\|_a + \sup_{w\in V_h\setminus\{0\}} \frac{|a(u - u_h, w)|}{\|w\|_a}.$$

证明. $\forall v \in V_h$,

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_a &\le \|u - v\|_a + \|v - u_h\|_a \\ &= \|u - v\|_a + \sup_{w\in V_h\setminus\{0\}} \frac{|a(v - u_h, w)|}{\|w\|_a} \\ &= \|u - v\|_a + \sup_{w\in V_h\setminus\{0\}} \frac{|a(u - u_h, w) + a(v - u, w)|}{\|w\|_a}\end{aligned}$$

选取 v_0 为 u 在 $(H, a(\cdot,\cdot))$ 内积下，在 V_h 中的正交投影，所以 $\|u - v_0\|_a = \inf_{v\in V_h} \|u - v\|$, $a(u - v_0, w) = 0$, $\forall w \in V_h$. 代入前面即可。 □

补充题 1. 定义 $A : M \mapsto AM = \mu M + \lambda \mathrm{tr}(M)I$, **其中** $0 < \mu_1 \le \mu \le \mu_2$, $0 < \lambda < \infty$. $(d = 2, 3)$ **定义** $\mathbb{R}^{d\times d}$ **上的内积** $\langle M, N\rangle = \sum_{i,j=1}^{d} M_{ij}N_{ij}$. **证明** A **对称正定。**

证明. 对称性：$\langle M, AN\rangle = \langle M, \mu N + \lambda \mathrm{tr}(N)I\rangle = \mu\langle M, N\rangle + \lambda \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(N) = \langle AM, N\rangle$.

正定性：$\langle AM, M\rangle = \mu\langle M, M\rangle + \lambda \mathrm{tr}(M)\langle I, M\rangle = \mu\langle M, M\rangle + \lambda \mathrm{tr}(M)^2 \ge \mu\langle M, M\rangle$. □

补充题 2. $\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(D\boldsymbol{v} + (D\boldsymbol{v})^T)$, $D\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x v_1 & \partial_y v_1 \\ \partial_x v_2 & \partial_y v_2 \end{pmatrix}$. **证明：**$\int_\Omega \varepsilon(\boldsymbol{v}) : \varepsilon(\boldsymbol{v}) \ge C \int_\Omega D\boldsymbol{v} : D\boldsymbol{v}$.

证明.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varepsilon(\boldsymbol{v}) : \varepsilon(\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega (\frac{\partial v_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial x_2})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1})^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\frac{\partial v_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial v_1}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial x_1})^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2})^2 \\ &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega D\boldsymbol{v} : D\boldsymbol{v},\end{aligned}$$

第二个等号利用了分部积分，$\int_\Omega \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \int_\Omega \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$. □

Remark：一般情况的 Korn 不等式证明较复杂，见书 P316-319，不作要求。

补充题 3. **设** $\Omega = [-1,1]\times[0,1]\cup[-1,0]\times[-1,0]$, **对二维 Poisson 方程齐次 Dirichlet 问题，给出** f **光滑但** $u\notin H^2(\Omega)$ **的例子。**

证明. 考虑半径为 $\frac{1}{2}$ 的 $\frac{3}{4}$-圆 $\Omega' := \{(r,\theta) : |r| < \frac{1}{2},\ 0<\theta<\frac{3}{2}\pi\}$. 定义

$$v(r,\theta) = r^{\frac{2}{3}}\sin\frac{2}{3}\theta,\ u(r,\theta) = (\frac{1}{4}-r^2)v(r,\theta).$$

那么 $\Delta u = -\frac{20}{3}v,\ \Delta v = 0$. 取 $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2}),\ u^\varepsilon = u*\eta_\varepsilon,\ \eta_\varepsilon$ 为光滑子。所以 $u^\varepsilon\equiv u$ in Ω' 且 $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0,\ \Delta u^\varepsilon = -\frac{20}{3}v*\eta_\varepsilon$, 光滑。但 $\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial r^2} = O(u^{-\frac{4}{3}})$, 在 0 附近，所以 $u^\varepsilon\notin H^2(\Omega)$. □

补充题 4. **三角形，每条棱上有两个点估计，请问是否构成** P^2 **有限元？**

证明. 不构成。考虑三角形以 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 为顶点、每条棱上的点估计选取 $1/3, 2/3$ 点处。那么 $\phi(x,y) = x^2+y^2+xy-x-y+\frac{2}{9}$ 零插值这六个点。 □