5、设 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$. 选择 a,b,c, 使得 $p(x)$ 对如下数据 L^2 误差最小.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	8	4	5	6	12	7	3	2

这里详细提供两种方法.

法一、求最佳拟合曲线拟合表中所给数据.

$p(x)=x^3+ax^2+bx+c$. 取权函数为1

令 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=x^2$

于是 $(\varphi_0,\varphi_0)=8$,

$$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{8}x_i=1+2+3+\cdots+8=36$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{8}x_i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2=204$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{8}x_i^2=204$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{8}x_i^3=1296$$

$$(\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{8}x_i^4=8772$$

$$(\varphi_0,y)=\sum_{i=1}^{8}y_i=8+4+5+6+12+7+3+2=47$$

$$(\varphi_1,y)=\sum_{i=1}^{8}y_ix_i=8\times1+4\times2+5\times3+6\times4+5\times12+7\times6+7\times3+8\times2=194$$

$$(\varphi_2,y)=\sum_{i=1}^{8}y_ix_i^2=992$$

$$(\varphi_0,x^3)=\sum_{i=1}^{8}x_i^3=1296$$

$$(\varphi_1,x^3)=\sum_{i=1}^{8}x_i^4=8772$$

$$(\varphi_2,x^3)=\sum_{i=1}^{8}x_i^5=61776$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}8&36&204\\36&204&1296\\204&1296&8772\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47\\194\\992\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1296\\8772\\61776\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}-1249\\-8578\\-60784\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{369}{8} \\ \frac{1289}{24} \\ -\frac{331}{24} \end{pmatrix}$$

法二、用矛盾方程组的解法.

我们$_{i=1}^{8}$. $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

则 $p(x_i) = p(i) = i^2 \cdot a + i \cdot b + c + i^3$, $i = 1, 2, \cdots, 8$.

$b_1 = (8,\ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 12\ \ 7\ \ 3\ \ 2)^T$

令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -22 \\ -58 \\ -113 \\ -209 \\ -340 \\ -510 \end{pmatrix}$$

下面求出 A^TA. A^Tb

(数据和法一得到的相应结果一致. 可能需要适当调整一下行列)

最后求解 $A^TA x = A^Tb$. $x = (a\ \ b\ \ c)^T$ 即可.

remark:

1、在进行计算时. 可利用 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的公式减少运算量

这个公式可以利用数学归纳法归纳证明.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

2. 有同学试图将 $1, x, x^2$ 化成标准正交基进行计算，虽然这样在解方程时计算量减少，但是将其化成标准正交基的计算过程十分繁琐，使得很多数据无法进行具体运算.

6. 设 $p(x) = ax^2 + bx + 1$，如何选择 a, b，使得 $p(x)$ 在以下两范数下取最小，并计算最小值

$$\|p\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \quad , \quad \|p\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

思路上 ∞ 范数使用关于切比雪夫多项式的定理.

2 范数是普通的微积分求导运算.

解:(1). 已知 $T_2(x)=2x^2-1$, $\frac{1}{2}T_2(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

1°、$a=0$时, $p(x)=bx+1$

$b=0$时, $\|p(x)\|_\infty$达到最小为1

2°、$a\neq0$时, 令 $\frac{1}{a}p(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{1}{a}=x^2-\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow b=0$. $a=-2$.

$\Rightarrow \|p\|_\infty=1$

综上. 当 $a=0, b=0$ 或 $a=-2, b=0$时 $\|\cdot\|_\infty$

(2)、$\|p(x)\|_2^2=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+1)^2dx$ 化简.

令 $\frac{\partial\|p(x)\|_2^2}{\partial a}=\frac{\partial\|p(x)\|_2^2}{\partial b}=0$

得到 $a=-\frac{5}{3}$, $b=0$.

由二元函数极值点的性质. 这必是其一个极值点.

此时 $\|p(x)\|_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Remark

1. ∞范数. 有很多很多同学用的是初等方法. 但是很多同学在分类讨论时产生的解或者漏解或者多解.
2. 有兴趣同学可以参考2016年第七届大学生数学竞赛(决赛)三、四年级试卷第八题. 那里的问题似乎可能更有难度一些.