偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2019-09

1 基本概念、基本理论

本章主要介绍偏微分方程有限差分方法的基本概念、基本理论

1.1 适定问题

本节通过考虑几个模型方程初值问题的解和性质，提出适定性概念，并用于一般情况。

1.1.1 适定性定义

1. 一些模型方程初值问题的解的特点

   1) 标量方程：

      前面章节已经表明：模型方程（对流方程、扩散方程）的初值问题的解的 L_2 模，对所有的时间都可以用初值数据的 L_2 模控制，即：

$$\| u(\cdot,t) \|_{L_2} \leq \| u(\cdot,0) \|_{L_2} \qquad (*1)$$

      (*1)保证了：初始数据的微小变化，带来的解的变化也是微小的；即：解连续地依赖于初值

   2) 带源项的标量方程：

      若要求(*1)对所有的时间都成立，似乎要求有些严格。此外，PDE常常含低阶项，如：

$$\begin{cases} u_t = u_x + \alpha u, \quad \alpha = constant, \ -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad\qquad -\infty < x < \infty \end{cases};$$

      其中 $f(x)$ 为 2π 周期函数。

3) 对称的方程组:

考虑：$\left\{\begin{array}{ll} u_t = Au_x, & u=(u^{(1)},u^{(2)})^T,\ -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=f(x) & -\infty<x<\infty \end{array}\right.$；

其中 $f(x)=(f_1(x),\ f_2(x))^T$ 为 2π 周期函数，且 $A=\begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $d=constant$。

4) 非对称双曲方程组

考虑：$\left\{\begin{array}{ll} u_t = Bu_x, & u=(u^{(1)},u^{(2)})^T,\ -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=f(x) & -\infty<x<\infty \end{array}\right.$；

其中 $f(x)=(f_1(x),\ f_2(x))^T$ 为 2π 周期函数，

$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d^2 & 0 \end{pmatrix}$, $d=constant>0$。

2. 适定性定义

若初始时刻设置为：$t=t_0$ 时刻，则有：

$$\| u(\cdot,t) \| \le K \| u(\cdot,t_0) \| \qquad (*3)$$

下面针对一般的PDE组，引入适定性(Well-posed)概念：考虑一般的PDE组：

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u, & t>t_0 \\ u(x,t_0)=f(x) & -\infty<x<\infty \end{array}\right. \qquad (*4)$$

其中 $u=(u^{(1)},\cdots,u^{(m)})^T$， $x=(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})^T$， $P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ 是一个一般的 p 阶空间算子，可以写为：

$P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})=\sum_{|\nu|\le p} A_\nu(x,t)(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}})^{\nu_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x^{(n)}})^{\nu_n}$， $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 是非负整数的多重指标，且 $|\ \nu\ |=\sum_i \nu_i$， $A_\nu=A_{\nu_1\cdots\nu_n}$ 是 $m\times m$ 矩

阵函数。为方便起见，假设$A_\nu(x,t) \in C^\infty_{(x,t)}$，且系数和数据对空间维都是$2\pi$周期的。

Definition 1.1 若对每个t_0和$f \in C^\infty(x)$，有：

- 存在唯一的解$u(x,t) \in C^\infty(x,t)$，它关于每个空间维数都是2π 周期的
- 存在与t_0无关的常数α和K，使得：

$$\| u(\cdot,t) \| \leq Ke^{\alpha(t-t_0)} \| f(\cdot) \| \tag{*5}$$

则：（**4*）是适定的*(Well-posed)*

注意：适定性的定义不是唯一的；如：可以使用不同的模、允许有不同的增长的函数形式。对变系数问题，指数增长也是允许的。

非适定性问题称为不适定的(Ill-posed)。

3. 例子

Example 1.1 $\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$。

Example 1.2 $\begin{cases} u_t = u_x + u & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$。

Example 1.3 $\begin{cases} u_t = -u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = e^{i\omega x}\hat{f}(\omega) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ periodic \end{cases}$。

Example 1.4 $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 100u & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) & -\infty < x < \infty \end{cases}$。

（初值）一般情况：$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 100u & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_\omega e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) & -\infty < x < \infty \end{cases}$。

作业：P113: 4.1.1

1.1.2 一维常系数标量偏微分方程

考虑：

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_x + cu, & t > t_0 \\ u(x,t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\, periodic \end{cases} \qquad (**1)$$

其中a、b、c是复常数。下面讨论：若(**1)是适定的，a、b、c应该满足的条件

由于做时间变换$t' = t - t_0$，常系数总是不变的，所以可以设$t_0 = 0$

Theorem 1.1 *(**1)是适定的(Well-posed)，当且仅当：有一个实常数α，使得对所有的实数ω，有：*

$$ReK \le \alpha,\ \ K = -a\omega^2 + ib\omega + c, \qquad (**2)$$

下面讨论条件(**2)的意义：

1. 常数c的影响（即：非导数项是否影响问题的适定性？）

   偏微分方程(**1)中非导数项不影响问题的适定性

   注意：对一般的偏微分方程也是如此。

2. 抛物型方程

   若$a_r = Re\,(a) > 0$，则称该方程为抛物型方程

   此时，对所有的b，该问题是适定的

   对一般抛物型方程也是如此，这是其特有的，即：高阶导数项决定问题的适定性

3. $Re\,a = 0$，即$Re\,K = -\omega Im\,b$

   若$Im\,b \neq 0$，则问题不是适定的

   $\Rrightarrow$：适定问题存在的形式为：

   $u_t = ia_i u_{xx} + b_r u_x$，其中$a = ia_i$，$b = b_r$；$a_i, b_r$是实数。

   若$a_i \neq 0$，则称该方程为Schrodinger方程；

   若$a_i = 0$，则该方程为双曲型方程

4. $Re\,a < 0$，则该问题不适定

作业：P115: 4.2.1

回顾：

一、标量内积与 L_2 模

令 $\bar{f}$ 为 f 的复共轭，则 L_2 标量内积与 L_2 模分别定义为：

- 函数 f 与 g 的内积：$(f,g)=\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)g(x)dx$，

- 函数 f 的 L_2 模：$\|f\|_2=(f,f)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)f(x)dx)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}|f|^2dx)^{\frac{1}{2}}$

标量内积是双线性的，即：

$(f,g)=\overline{(g,f)},\quad (f+g,h)=(f,h)+(g,h)$

$(\lambda f,g)=\bar{\lambda}(f,g),\quad (f,\lambda g)=\lambda(f,g),\quad \lambda\, is\, costant\, scalar$

L_2 模满足：$\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$，$|(f,g)|\le\|f\|\cdot\|g\|$，

三角不等式：$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$，$|\|f\|-\|g\||\le\|f-g\|$

二、有限维矢量空间的模以及性质

考虑 m 维矢量空间 V_m，$\forall u=(u^{(1)},\cdots,u^{(m)})\in V_m$，$u^{(j)},j=1,\cdots,m$ 是复数，u^* 是 u 的共轭转置，即：$u^*=\bar{u}^T$。

标量内积：$<u,v>=u*v=\sum_{j=1}^m\bar{u}^{(j)}v^{(j)}$；模：$|u|=<u,u>^{\frac{1}{2}}$

标量内积满足下列双线性关系：

$<u,v>=\overline{<v,u>}$，$<u+w,v>=<u,v>+<w,v>$

$<\lambda u,v>=\bar{\lambda}<u,v>$，$<u,\lambda v>=\lambda<u,v>$，$\lambda$ 是复常数

$|<u,v>|\le|u|\cdot|v|$，$|u+v|\le|u|+|v|$

$<u,v>\le|u|\cdot|v|\le\delta|u|^2+\frac{1}{4\delta}|v|^2$，常数 $\delta>0$

1.1.3 一维常系数1阶偏微分方程组

考虑:

$$\begin{cases} u_t = Au_x, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic \end{cases} \tag{$***1$}$$

其中 $A = (a_{ij})_{m\times m}$， $u = (u^{(1)}(x,t),\cdots,u^{(m)}(x,t))^T$ 。

1. 定理

Theorem 1.2 当且仅当 A 的特征值是实数，且有完备的特征向量，则*(***1)*是适定的

证明:

1) 首先证明：A 的特征值是实数，才有(***1)是适定的可能性

2) 设 A 的特征值都是实数，且有完备的特征向量组，该问题是适定的

3) 设 A 的特征值都是实数，但特征向量组不完备：（要证：不适定）

a) 讨论一个典型情况：$u_t = Au_x = (\lambda I + J)u_x$ ；问题不适定

b) 讨论一般情况：存在可逆矩阵S，使得：

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1 I+J_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_r I+J_r\end{pmatrix}$$

若所有块矩阵都是标量（即J_j是标量，且为0），则意味着A可对角化，且有完备的特征向量组；此外，若至少有一个块矩阵不是标量，则问题就不可能是适定的（见前面讨论）

2. 低阶项不影响强双曲方程组初值问题的适定性

对$u_t=Au_x$：

- 若A的特征值是实数，且互不相等，则该方程组是严格双曲的
- 若A的特征值是实数，且具有完备的特征向量，则该方程组是强双曲的
- 若A的特征值是实数，则该方程组是弱双曲的

Definition 1.2 对$u_t=Au_x$，若A是一个*Hermite*矩阵(即：$A=A^*=\bar{A}^T$)，则称$u_t=Au_x$是对称双曲的

$\Rightarrow$：对称双曲和严格双曲是强双曲的特殊情况

$\Rightarrow$：强双曲方程组的初值问题是适定的；弱双曲方程组的初值问题是不适定的

Lemma 1.1 若$y\in C^1$，且满足不等式$\frac{dy}{dt}\le\alpha y$，$t\ge0$；则：$y(t)\le e^{\alpha t}y(0)$

Theorem 1.3 考虑带有非导数项的扰动的强双曲问题：

$$\begin{cases} u_t = Au_x + Bu, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ periodic \end{cases}$$

若 B 是 $m \times m$ 常数矩阵，则该问题是适定的

作业：P122: 4.3.1

1.1.4 一维常系数抛物型偏微分方程组

考虑：$\begin{cases} u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu = Pu, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic \end{cases}$

其中A、B、C均为常系数矩阵，P是空间算子。

Definition 1.3 若A 的特征值λ满足：$Re\,\lambda \geq \delta$，$\delta > 0$是一个常数，则称$u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu = Pu$是抛物型的

Theorem 1.4 抛物型方程组的初值问题是*Well-Posed*

证明：

(1) 解的稳定性与存在性

“假设”：$A + A^* \geq \delta I,\ \delta > 0$（这个假设最后是需要证明的！）

1)、初值为一谐波，即：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$

2)、初值是光滑的，可以展开为收敛的Fourier级数，即：

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Sigma_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$

3)、下面证明前面的“假设”：

（目标：对于抛物型方程，总可以通过变换，使得：$A + A^* \geq \delta I,\ \delta > 0$）

Lemma 1.2 *Schur*引理：对为一个固定的矩阵A，存在唯一的一个矩阵U，使得U^*AU是一个上三角矩阵

(2) 解的唯一

作业：P126: 4.4.1；4.4.2

1.1.5 一般常系数微分方程组

考虑：

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = P(\frac{\partial}{\partial x})u, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic \end{array}\right. \tag{1}$$

其中 $x = (x^{(1)}, \cdots, x^{(d)})^T$ 、 $u = (u^{(1)}, \cdots, u^{(m)})^T$ 、 $\omega = (\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(d)})^T$ 。
假设初值为： $f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{i<\omega,x>} \hat{f}(\omega)$， $<\omega, x>= \Sigma_{j=1}^{d} \omega_j x^{(j)}$
构造谐波解为： $u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{i<\omega,x>} \hat{u}(\omega,t)$，代入源方程得：

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{u}(\omega,t)_t = \hat{P}(i\omega)\hat{u}(\omega,t) \\ \quad\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$： $\hat{u}(\omega,t) = e^{\hat{P}t}\hat{f}(\omega)$，其中 $\hat{P}(i\omega)$ 是 $m \times m$ 矩阵。

Theorem 1.5 偏微分方程组的初值问题（*1*）是*Well-Posed*$\Leftrightarrow$（当且仅当）对所有的ω，存在常数K和α，使得：

$$|e^{\hat{P}(i\omega)t}| \leq K \cdot e^{\alpha t} \tag{2}$$

Theorem 1.6 偏微分方程组的初值问题（*1*）是*Well-Posed*的必要条件是：对任意的ω， $\hat{P}(i\omega)$ 的特征值λ，满足$Re\,\lambda \leq \alpha$

Theorem 1.7 假设满足上面定理的条件，且对于任意ω，存在常数K和变换矩阵$S(\omega)$，使得$|S(\omega)| \cdot |S^{-1}(\omega)| \leq K$；同时， $S^{-1}\hat{P}(i\omega)S$是对角阵，则该偏微分方程组的初值问题（*1*）是*Well-Posed*。

Theorem 1.8 若对于任意ω，存在常数α，使得$\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I$；则该偏微分方程组的初值问题（*1*）是*Well-Posed*。

Definition 1.4 若对所有的光滑函数$w(x)$，有常数α，使得$(w, Pw) + (Pw, w) \leq 2\alpha(w, w)$；则称微分算子$P(\frac{\partial}{\partial t})$为半有界算子（*semibounded*）

注意：本定义并不意味：微分算子$P(\frac{\partial}{\partial t})$是有界的

Theorem 1.9 微分算子$P(\frac{\partial}{\partial t})$为半有界算子$\Leftrightarrow$（当且仅当）：$\hat{P}(i\omega)+\hat{P}^*(i\omega)\leq 2\alpha I$。

Theorem 1.10 若P是半有界算子，则（*1*）的解满足：

$$||u(\cdot,t)||\leq e^{\alpha t}||u(\cdot,0)||$$

Example 1.5 $\frac{\partial}{\partial t}u=\sum_{j=1}^{d}A_j\frac{\partial}{\partial x^{(j)}}u$ 是对称双曲方程组，若A_j, $j=1,\cdots,d$，是*Hermite*矩阵，则相应的初值问题是适定的。

Theorem 1.11 假设对于每个ω，存在常数$\alpha, K>0$；若有满足$K^{-1}I\leq\hat{H}(\omega)\leq KI$的正定的*Hermite*矩阵$\hat{H}(\omega)=\hat{H}^*(\omega)$，使得$\hat{H}(\omega)\hat{P}(i\omega)+\hat{P}^*(i\omega)\hat{H}(\omega)\leq 2\alpha\hat{H}$成立；则（*1*）是适定的

Theorem 1.12 问题（*1*）是适定的$\Leftrightarrow$可以构造出满足（*3*）和（*4*）的*Hermite*矩阵。

作业：P134: 4.5.1；4.5.2

1.2 差分方法的相容性、收敛性、稳定性

第2本参考书（P40—） 本节主要针对一般的偏微分方程的初值问题：

$$\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{L}u = g, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic\end{array}\right. \tag{5.1}$$

其中$\mathcal{L}$是（时空）偏微分算子，考虑其一般差分格式$Lv_j^n = g_j^n$的相容性、收敛性和稳定性。

回顾：

- 有限维空间：

  常用实的欧氏空间$\mathcal{R}$或复的欧氏空间$\mathcal{C}$ 中的模：$\forall U^n = (U_1^n, \cdots, U_N^n) \in \mathcal{R}$或$\mathcal{C}$

  l_2模（2模）：$||U^n||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |U_j^n|^2}$

  $l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |U_j^n|^2 \Delta x}$

  l_∞模（最大模）：$||U^n||_\infty = sup_{1\le j\le N}|U_j^n|$

- 无限维序列空间：

  对于初值问题，计算区域是无界的，所以空间网格个数是无限的，相应的格点函数可视为无穷序列或无限维向量

  无限维实的或复的l_2空间：

  $l_2 = \{U^n = (\cdots, U_{-1}^n, U_0^n, U_1^n, \cdots)^T :\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^n|^2 < \infty\}$

  l_2模（2模）：$||U^n||_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^n|^2}$

  $l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^n|^2 \Delta x}$

无限维有界序列空间l_∞：

$l_\infty = \{U^n = (\cdots, U_{-1}^n, U_0^n, U_1^n, \cdots)^T : sup_{-\infty<j<\infty}|U_j^n| < \infty\}$

l_∞模（最大模）：$||U^n||_\infty = sup_{-\infty\le j\le\infty}|U_j^n|$

- 高维问题（以二维问题为例）

  有限维空间，$U^n = \{U_{ij}^n\}_{i=1,j=1}^{n_x,n_y}$：

  l_2模（2模）：$||U^n||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}|U_{ij}^n|^2}$

  $l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}|U_{ij}^n|^2\Delta x\Delta y}$

  无限维空间，$U^n = \{U_{ij}^n\}_{i=-\infty,j=-\infty}^{\infty,\infty}$：

  l_2模（2模）：$||U^n||_2 = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|U_{ij}^n|^2}$

  $l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|U_{ij}^n|^2\Delta x\Delta y}$

1.2.1 截断误差与差分方法的精度:

截断误差：与差分方程$Lv_j^n = g_j^n$等价的微分方程，与源方程$\mathcal{L}u = g$之差

Definition 1.5 对于满足$\mathcal{L}u = g$的任意光滑函数$u(x,t)$，$T_j^n = Lu_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j,t_n) - g(x_j,t_n))$称为差分格式$Lv_j^n = g_j^n$在$(x_j,t_n)$处的（局部）截断误差。

注意：截断误差与推导过程无关，即：不同点的截断误差是相同的（作业？）

截断误差反映了差分方程对源方程的近似程度。

Definition 1.6 若截断误差$T_j^n = Lu_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j,t_n) - g(x_j,t_n)) = O((\Delta x)^p) + ((\Delta t)^q)$则称为差分格式$Lv_j^n = g_j^n$的（局部）截断误差对时间是$p$ 阶、对空间是q阶的，即：差分格式$Lv_j^n = g_j^n$对时间是p阶、对空间是q阶精度。

1.2.2 差分方法的相容性：

相容性：反映源方程与差分方程之间的关系

Definition 1.7 当$\Delta x,\ \Delta t \to 0$时，若差分格式$Lv_j^n = g_j^n$ 的截断误差$T_j^n \to 0$，则称为该差分格式$Lv_j^n = g_j^n$与源方程$\mathcal{L}u = g$是（无条件）逐点相容的。

Definition 1.8 对于$\mathcal{L}u = g$的二层格式：$\mathbf{V}^{n+1} = Q\cdot\mathbf{V}^n + \Delta t\cdot G^n$，其中$\mathbf{V}^n = (\cdots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \cdots)$，$G^n = (\cdots, g_{-1}^n, g_0^n, g_1^n, \cdots)$。$\forall(x,t)$，若$\Delta x,\ \Delta t \to 0$ 时，源方程$\mathcal{L}u = g$的解$u(x,t)$为$\mathbf{U}^{n+1} = Q\cdot\mathbf{U}^n + \Delta t\cdot G^n + \Delta t\cdot T^n$，且$||T^n|| \to 0$，则称该差分格式$Lv_j^n = g_j^n$ 与源方程$\mathcal{L}u = g$ 是按模$||\cdot||$（无条件）相容的。

1.2.3 差分方法收敛性：

收敛性：反映源方程的精确解与差分方程的近似解之间的关系

Definition 1.9 $\forall(x,t)$，当$\Delta x,\ \Delta t \to 0$，$j\Delta x \to x$，$n\Delta t \to t$时，有$v_j^n \to u_j^n = u(x_j,t_n)$，则称近似于源方程$\mathcal{L}u = g$的差分格式$Lv_j^n = g_j^n$是（无条件）逐点收敛的。

Definition 1.10 $\forall(x,t)$，若$\Delta x,\ \Delta t \to 0$，$j\Delta x \to x$，$(n+1)\Delta t \to t$时，有$||\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1}|| \to 0$，则称源方程$\mathcal{L}u = g$的差分格式$Lv_j^n = g_j^n$（在$t$时刻）是按模$||\cdot||$ （无条件）收敛的。若$||T^n|| = O((\Delta x)^p +$

$(\Delta t)^q$，则称该差分格式按模$||\cdot||$具有(p,q) 阶精度；或称该差分格式是按模$||\cdot||$ (p,q) 阶收敛的。

1.2.4 稳定性：

稳定性：定解条件（初值条件）的微小变化对数值解的影响

1. 定义

Definition 1.11 对于$\mathcal{L}u=g$的二层格式：

$$\mathbf{V}^{n+1}=Q\cdot\mathbf{V}^n,\ n\geq 1, \tag{$*1$}$$

其中Q为差分算子，$\mathbf{V}^n=(\cdots,v_{-1}^n,v_0^n,v_1^n,\cdots)$。$\forall(x,t)$，若$\exists$常数$\Delta x_0>0$，$\Delta t_0>0$，$K\geq 0$，$\beta\geq 0$，使得$\forall 0\leq t\leq(n+1)\Delta t$，$0<\Delta x\leq\Delta x_0$，$0<\Delta t\leq\Delta t_0$，有：

$$||\mathbf{V}^{n+1}||\leq Ke^{\beta t}||\mathbf{V}^0||, \tag{$*2$}$$

则称该差分格式*(*1)*关于模$||\cdot||$是（无条件）稳定的。

Definition 1.12 上面定义中的（*2）由下式代替：

$$||\mathbf{V}^{n+1}||\leq K||\mathbf{V}^0||, \tag{$*3$}$$

上面二种定义比较强，常见的其它定义还有：
如：对于$\forall T$，当$(n+1)\Delta t\leq T$时，（*2）或（*3）成立；其中K和β可以与T有关。

2. 命题

考虑$\mathcal{L}u = g$的二层差分格式：$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$, $n \geq 1$的稳定性

(a) 命题1

(*1)关于$||\cdot||$是稳定的$\Leftrightarrow$ $\exists$常数$\Delta x_0 > 0$，$\Delta t_0 > 0$，$K \geq 0$，$\beta \geq 0$，使得$\forall 0 \leq t \leq (n+1)$，$0 < \Delta x \leq \Delta x_0$，$0 < \Delta t \leq \Delta t_0$，有：

$$||Q^{n+1}|| \leq Ke^{\beta t}, \quad (*4)$$

（注意：$||Q^{n+1}||$是算子模。算子模$||S||$的定义：$||S||_h = sup_{||u||_h=1}||Qu||_h$）

(b) 命题2

在$L_{2,\Delta x}$空间，序列U^n是稳定的，当且仅当在$L_2[-\pi,\pi]$空间中，序列$\hat{U}^n$是也稳定的

(c) 命题3

$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$关于$l_{2,\Delta x}$模是稳定的$\Leftrightarrow$ $\exists$常数$\Delta x_0 > 0$，$\Delta t_0 > 0$，$K \geq 0$，$\beta \geq 0$，使得$\forall 0 < \Delta x \leq \Delta x_0$，$\omega \in [0, 2\pi]$，有：

$$|g(\omega)|^{n+1} \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t}$$

其中g为格式的放大因子，即：$\hat{v}^{n+1} = g\hat{v}^n$

(d) 命题4

$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$关于$l_{2,\Delta x}$模是稳定的$\Leftrightarrow$: $\exists$常数$\Delta x_0 > 0$，$\Delta t_0 >$

0，$c>0$，使得$\forall 0<\Delta x\le\Delta x_0$，$\omega\in[0,2\pi]$，有：

$$|g(\omega)|\le 1+c\Delta t$$

——————————————Von Neumann条件

(e) 命题5

若$\mathbf{V}^{n+1}=Q\cdot\mathbf{V}^n$是稳定的，则：对任意的标量$b$，差分格式$\mathbf{V}^{n+1}=(Q+b\Delta tI)\cdot\mathbf{V}^n$ 也是稳定的

作业：(第2本参考书)P45: 2.2.1；P64: 2.3.1(a)(c),2.3.2(a),2.3.3(b)；P77: 2.4.1

作业：(第2本参考书)P111: 3.1.2

补充作业：

1、试证$|r=\frac{a\Delta t}{\Delta x}|\le 1$时，$u_t+au_x=0$的$Lax$格式$v_j^{n+1}=\frac{1}{2}(v_{j+1}^n+v_{j-1}^n)-\frac{1}{2}r\delta_0 v_j^n$ 关于L_∞ 是稳定的

2、分析$u_t=u_{xx}$的$FTCS$格式关于$L_{2,\Delta x}$的稳定性

1.2.5 LAX定理—差分方法相容性、收敛性、稳定性之间的关系

LAX定理反映差分方法相容性、收敛性和稳定性之间的关系

- 相容性：差分方程与偏微分方程的关系
- 收敛性：差分方程的解与偏微分方程的解之间的关系
- （初值）稳定性：差分方程的解与偏微分方程定解条件（初值条件）的关系

Theorem 1.13 （*Lax*等价定理）：对于一个适定的相信线性偏微分方程初值问题的相容的二层差分格式，其收敛性与稳定性是等价的。

Theorem 1.14 （*Lax*定理）：对于一个适定的相信线性偏微分方程初值问题，其按$||\cdot||$模是(p,q)阶精度的二层差分格式为：$\mathbf{V}^{n+1} = Q\cdot\mathbf{V}^n + \Delta t G^n$，若它关于$||\cdot||$模是稳定的，则它是关于$||\cdot||$模$(p,q)$阶收敛的。

1.3 偏微分方程的耗散性、色散性

首先，讨论PDE的耗散性、色散性，如：$u_t + au_x = 0$
任取一个谐波作为PDE的解，即取：$u(x,t) = e^{i(kt+\omega x)}$；其中$k$为波的频率，$\omega$是该波的波数，波长为$\frac{2\pi}{\omega}$
放大因子：$\lambda_e \triangleq \frac{u(x,t+\Delta t)}{u(x,t)} = e^{ik\Delta t} = e^{-b\Delta t}e^{i\alpha t}$
$\lambda_e = |\lambda_e|e^{i\varphi_e}$，称$|\lambda_e| = e^{-b\Delta t}$为$\lambda_e$ 的模，称$\varphi_e = \alpha\Delta t$为$\lambda_e$的幅角。

1. PDE的耗散性

   若PDE的谐波解的振幅不随时间增长，且至少有一个谐波的振幅是衰减的，则称该PDE具有耗散性，其解是稳定的。若PDE的所有谐波解的振幅既不增长，也不衰减，则称该PDE是无耗散的，其解是稳定的。若非上述二种情况，则称该PDE是逆耗散的，其解不稳定。

2. PDE的色散性

   若不同波数的谐波以不同的速度传播，则称该PDE具有色耗散性，其解是色散的

   若谐波的传播速度与波数无关，则称该PDE无色散，其解是无色散的

Example 1.6 讨论$u_t + au_x = 0$的耗散性、色散性（a是常数）。

Example 1.7 讨论$u_t + cu_{xxx} = 0$的耗散性、色散性（c是常数）。$\Longrightarrow$：该*PDE*

1.4 差分方程的耗散性、色散性

1.4.1 用MPDE方法分析 $U_t = LU$ 的差分格式的耗散性、色散性

以一个例子介绍MPDE方法：考虑 $u_t + au_x = 0,\ a > 0$ 的FTBS格式：

$$v_j^{n+1} = v_j^n - r(v_j^n - v_{j-1}^n),\ r = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \tag{$*0$}$$

将讨论差分格式 $(*0)$ 的耗散性、色散性转换为讨论与差分格式 $(*0)$ 等价的 $U_t = LU$ 型PDE，即MPDE的耗散性、色散性。

作业：分析偏微分方程 $u_t + u_x - \nu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx} = 0$ 的耗散性、色散性，其中 $\nu_2,\ \mu_3$ 分别为常数

大作业4 针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0,\ -\infty < x < \infty\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0.4 \le x \le 0.6 \\ 0, & others \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

构造其FTBS格式，用其分别计算 $t = 1.0, 2.0, 5.0$ 时刻的数值解该方程的精确解，并绘图，与精确解比较，给出评论。其中 $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 分别取0.2和0.8，空间步长取 $\Delta x = 0.05$。

1.4.2 差分方程的耗散性、色散性

类似于上面讨论PDE耗散性、色散性的做法，任取一个谐波作为差分方程的解，即取：$v_j^n = e^{i(\omega x_j + kt_n)} \overset{\text{时空均匀剖分}}{=} e^{i(\omega j\Delta x + kn\Delta t)}$，代入差分方程得：离散的色散关系 $k = k(\omega) = \alpha + ib$；一般 k 是复数。由此得到差分方程的谐波解：

$v_j^n = e^{-bt_n}e^{i\omega(x_j-(\frac{-\alpha}{\omega})t_n)}$，其中$\frac{-\alpha}{\omega}$为波速。

Definition 1.13 若差分方程的谐波解为：$v_j^n = e^{-bt_n}e^{i\omega(x_j-(\frac{-\alpha}{\omega})t_n)}$，则：

- $b < 0$

  该差分方程的解的振幅随时间无界增长，该差分方法是逆耗散的，其解不稳定。

- $b > 0$

  该差分方程的解的振幅随时间递减，该差分方法是耗散的，其解是稳定的。

- $b = 0$

  该差分方程的解的振幅随时间不变化，该差分方法是无耗散的。

- $\alpha \equiv 0$

  该差分方程的谐波解传播速度为*0*，即不传播；该差分方法是无色耗散的。

- $\alpha \neq 0$

  该差分方程的谐波解以$\frac{-\alpha}{\omega}$的速度传播。若$\frac{-\alpha}{\omega}$与ω有关，即该差分方程的谐波解的传播速度与ω 有关，该差分方法是色耗散的。

- $\frac{|\lambda|}{|\lambda_e|} < 1$时，则称该格式为数值耗散（数值正耗散）；反之，称该格式为数值逆耗散

- $\frac{\phi}{\varphi_e} < 1$时，则数值解的相位滞后于真实的谐波，称该数值方法为负色散；反之，相位超前，称之为正色散

Example 1.8 讨论$u_t + au_x = 0$的*FTBS*格式的稳定性、耗散项、色散性（a是常数）。

作业：

1)分析偏微分方程$u_t = u_x$的FTCS格式耗散性、色散性（用二种方法）

2)利用上述例题的结果，对“大作业4”的结果（对比准确解与数值解的图）进行分析