有限元方法 2021 秋（11 月 22、24 日作业）

金晨浩 SA21001033

1. PDE：$u_t - \Delta u = 0$. 考虑 Euler 前差/后差格式，时空间步长分别为 $\Delta t, h$。证明：

(1). Euler 后差格式无条件 L^2 模稳定。

(2). 当 $\Delta t \le Ch$, 对某个界定常数 C 时，Euler 前差格式 L^2 模稳定。

证明. PDE 的半离散格式为

$$((u_h)_t, v) + (Du_h, Dv) = 0, \quad \forall v \in V_h. \tag{1}$$

加权格式（θ 格式）为

$$(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, v) + ((1-\theta)Du_h^n + \theta Du_h^{n+1}, Dv) = 0, \quad \forall v \in V_h.$$

当 $\theta = 1$ 时，对应 Euler 后差。此时取 $v = u_h^{n+1}$, 那么

$$\|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 = -\Delta t|u_h^{n+1}|_{H^1}^2 + (u_h^n, u_h^{n+1}) \le \frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u_h^n\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \|u_h^{n+1}\|_{L^2} \le \|u_h^n\|_{L^2}.$$

当 $\theta = 0$ 时，对应 Euler 前差。我们首先取 $v = u_h^n$:

$$\|u_h^n\|_{L^2}^2 = \Delta t|u_h^n|_{H^1}^2 + (u_h^n, u_h^{n+1}) = \frac{1}{2}(\|u_h^n\|_{L^2}^2 + \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2}^2) + \Delta t|u^n|_{H^1}^2$$

$$\Rightarrow \|u_h^n\|_{L^2}^2 = \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + 2\Delta t|u^n|_{H^1}^2 - \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2}^2.$$

下面估计 $\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2}$. 取 $v = u_h^{n+1} - u_h^n$,

$$\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2}^2 = -\Delta t(Du_h^n, D(u_h^{n+1} - D_h^n)) \le \Delta t|u_h^n|_{H^1}|u_h^{n+1} - u_h^n|_{H^1},$$

利用反不等式，$\|h^{n+1} - u_h^n|_{L^2} \le C\Delta t h^{-1}|u^n|_{H^1}$, 代入

$$\|u_h^n\|_{L^2}^2 \ge \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + |u^n|_{H^1}^2(2\Delta t - C^2\Delta t^2 h^{-2}).$$

取 $\Delta t \le Ch^2$（对充分大的界定常数 C）即可保证 L^2 模非增。

当 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时，同样可证无条件稳定性。取测试函数 $v = (1-\theta)u_h^n + \theta u_h^{n+1}$,

$$\theta\|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - (1-\theta)\|u_h^n\|_{L^2}^2 + (1-2\theta)(u_h^{n+1}, u_h^n) + \Delta t|(1-\theta)u_h^n + \theta u_h^{n+1}|_{H^1}^2 = 0,$$

$$\Rightarrow \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|u_h^n\|_{L^2} + (2\theta - 1)\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2}^2 + 2\Delta t|v|_{H^1}^2 = 0.$$

当 $\theta \ge \frac{1}{2}$ 时，$\|u_h^{n+1}\|_{L^2} \le \|u_h^n\|_{L^2}$. □

Remark：反不等式见教材 P111 引理 4.5.3，给定 $1 \le p, q \le \infty$，$0 \le m \le l$，$\mathcal{P}$ 为 $W_p^l \cap W_q^m$ 有限维子空间，那么 $\|v\|_{W_p^l} \le Ch^{m-l+n/p-n/q}\|v\|_{W_q^m}$，$\forall v \in \mathcal{P}$.

特别的，当 $p = q$，$l = m + s$ 时，反不等式为 $\|v\|_{W_p^{m+s}} \le Ch^{-s}\|v\|_{W_p^m}$.

2. 设 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - X^T b$, A **对称正定。求第** $k+1$ **步迭代步长** α_k**，即** $\alpha_k = \underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} f(x_k + \alpha d_k)$. **证明** $\alpha_k = \frac{-r_k^T d_k}{d_k^T A d_k} = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k}$，**其中** $r_k = b - Ax_k$.

证明. $g(\alpha) := f(x + \alpha d) = \frac{1}{2}x^T Ax + \frac{1}{2}\alpha d^T Ax + \frac{1}{2}\alpha x^T Ad + \frac{1}{2}\alpha^2 d^T Ad - X^T b - \alpha d^T b$,

$0 = g'(\alpha) = d^T Ax + \alpha d^T Ad - d^T b = d^T(Ax - b) + \alpha d^T Ad \Rightarrow \alpha = \frac{d^T(Ax-b)}{d^T Ad}$. 代入定义式即可。 □