邓建松

2018年10月29日

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidell&1\6

女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 ● 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

#### 【敛性理论

收敛的充分条件及误差值

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大
- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Deideix (

**收敛性理说** 

11 Al 11 A mil to to

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

yacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大
- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组
- 而直接法在对矩阵进行分解的时候,会破坏矩阵的稀疏性

线性方程组的古典迭 代解法

**甲步线性定常迭代况** 

Gauss-Seidel迭代》

me - da Alla ado

敛性理论

2敛的东要条件

收敛的充分条件及误差估计 lacobi洪代法和G-S洪代法

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

女 敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度模型问题

● 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大

- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组
- 而直接法在对矩阵进行分解的时候,会破坏矩 阵的稀疏性
- 寻求能够保持稀疏性的有效算法是数值线性代数中一个重要的研究课题

### 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选行

Gauss-Seidel选作

敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

### 主要有两类

迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解

### 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi选代法和G-S选代法的收敛性

**火敛速度** 

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的游 诉收敛速度

### 主要有两类

- 迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解
- 稀疏直接法:是直接法与某些稀疏矩阵 技巧有机结合的结果,利用矩阵的特 点,使得分解结果尽可能保持稀疏性

## 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法
Jacobi迭代法
Gausse-Seidel读代法

形式推广

收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的II 敛性

女敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

### 主要有两类

- 迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解
- 稀疏直接法:是直接法与某些稀疏矩阵 技巧有机结合的结果,利用矩阵的特 点,使得分解结果尽可能保持稀疏性
- 本课程只讲迭代法

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi 迭代)

Cause Saidalit-/Pi

形才維

#### 收敛性理论

收敛的充要条

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

横刑信腳

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 如何构造迭代序列?

### 线性方程组的古典铁

- 如何构造迭代序列?
- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收 敛?

### 线性方程组的古典铁

- 如何构造迭代序列?
- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收 敛?
- 如果收敛,收敛速度如何?(收敛速度 的定量刻划)

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

协会性理论

### IX SX III. YE VE

收敛的充安条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 女敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

- 如何构造迭代序列?
- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收敛?
- 如果收敛,收敛速度如何?(收敛速度的定量刻划)
- 迭代有限步停止。需要对近似解进行误 差估计和舍入误差分析

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

収敛性埋1

双双的元安末门

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的影

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的II 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

**此**幼性理?

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准
- 在这个标准下,很多时候直接法要比迭 代法好

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代》

形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

**女敛速度** 

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型何應 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准
- 在这个标准下,很多时候直接法要比迭代法好
- 但对大型稀疏方程组来说,迭代法更实用

### Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Iacobi读代法

Carra Carra (St. Abs)

形式排

收敛性理记

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差值计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

T POTK REAL DESIGNATION OF THE PROPERTY OF THE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收分速度 • 考虑非奇异线性方程组Ax = b

### Jacobi迭代法

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法

- 考虑非奇异线性方程组Ax = b
- $\Diamond A = D L U$ . 其中 D 为 A 的对角元 构成的对角阵,-L为A的下三角阵, -U为A的上三角阵(均不含对角元)

### Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

女敛性理i

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 概刑问题

<sup>吴宝四越</sup> lacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 考虑非奇异线性方程组Ax = b
- 令A = D L U, 其中D为A的对角元构成的对角阵,-L为A的下三角阵,-U为A的上三角阵(均不含对角元)
- 则Ax = b可写为x = Bx + g, 其中 $B = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Communication (Part

TE -27:30

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

\$67 FFE (A) 550

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

### • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

形式推り

#### 仅敛性埋ii

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近此效速度 • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推广

#### 收敛性理论

収敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度 • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

• 再把 $x_1$ 代入右边,又得一个新向量 $x_2$ 

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法

• 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

- 再把x1代入右边,又得一个新向量x5
- 依此类推,我们有 $x_k = Bx_{k-1} + g$ ,  $k = 1, 2, \dots$

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭

• 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出

## 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

#### Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 收敛性理i

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估;

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影近收敛速度

- 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出
- 其中B称为Jacobi迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其对角元全是零

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

平均收敛速度和渐近收敛这

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出

- 其中B称为Jacobi迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其对角元全是零
- g称为Jacobi迭代法的常数项

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Carra Carra (State Appet

TT - 10 400

#### 收敛性理记

收敛的充

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

\_\_\_\_

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

• 
$$\ \stackrel{\text{l. L}}{\boxtimes} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

### Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推り

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

• 
$$\ \stackrel{\text{LL}}{\boxtimes} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度

• 迭代矩阵和常数项分别为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/7 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 13/7 \end{pmatrix}$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

形动物

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

lacobi读代注和G-S读代注的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 近收敛速度

### • 迭代得到

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 8/7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1.143 \end{array}\right), \\ x_2 &= \left(\begin{array}{c} 69/14 \\ -12/7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{c} 4.929 \\ -1.714 \end{array}\right) \end{aligned}$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代流

形才推

#### 収敛性埋む

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

• 迭代得到

$$x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 1.143 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 69/14 \\ -12/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.929 \\ -1.714 \end{pmatrix}$$

• 25次迭代后,得到 $x \approx \begin{pmatrix} 7.111 \\ -3.222 \end{pmatrix}$ ,这约等于 方程的准确解 $\begin{pmatrix} 64/9 \\ -29/9 \end{pmatrix}$ 

## Jacobi迭代法代码片段

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

0 0 1 10 10

形式推

又敛性埋诉

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部

```
for i=1 to n
  y[i]=0.0
  for j=1 to n
    y[i]=y[i]+B[i][j]*x[j]
  y[i]=y[i]+g[i]
```

## Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典铁

Gauss-Seidel选代法

• 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的

### Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代)

#### (敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的验验收证的

• 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的

• 先算哪个分量,结果都不变

### Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法

Gauss-Seidel迭代法

(敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S选代法的收敛性

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

- 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的
- 先算哪个分量,结果都不变
- 我们做一下改变: 在计算 $x_k$ 的第一个分量用 $x_{k-1}$ 的各个分量计算,但当计算 $x_k$ 的后面分量时,采用已算出的新分量 $x_1^{(k)}$ 代替 $x_1^{(k-1)}$ ,而其它分量仍用 $x_i^{(k-1)}$

### 新代码片段

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理记

illo Abrahisza mil 42 i

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的中 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

```
for i=1 to n
  x[i]=0.0
  for j=1 to n
    x[i]=x[i]+B[i][j]*x[j]
  x[i]=x[i]+g[i]
```

## 线性方程组的古典迭

Gauss-Seidel选代法

## • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 收敛性埋1

收敛的充要条件

収敛的允分涂件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收分速度 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

● 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 收敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi选代法和G-S选代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的泛近收敛速度

• 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

- 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法
- 如此变化,编程时存储量减少了

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

形式推

欠敛性理i

収敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 lacohi读代法和G-S读代法的道 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

- 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法
- 如此变化,编程时存储量减少了
- 该格式1823年C.F. Gauss在给其学生C.L. Gerling的信中提到, P.L. von Seidel在1874年发表了这一方法

## 迭代矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式技

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

# 迭代矩阵

线性方程组的古典铁

Gauss-Seidel选代法

如果(D − L)<sup>-1</sup>存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

• 我们称 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 为G-S迭代法 的迭代矩阵. 其第一列全是零,  $(D-L)^{-1}b$ 称为G-S迭代法的常数项

# 迭代矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法

Gauss-Seidel选代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的影

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

模型何題 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

- 我们称 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 为G-S迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其第一列全是零,  $(D L)^{-1}b$ 称为G-S迭代法的常数项
- 此时分量的计算次序是不能改变的

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

TEA -- (5 44)-

### 收敛性理i

ille Ale Ah 22 T

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

Gauss-Seidel选代法

• 
$$\mathfrak{P}(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 7/176 & -1/11 \end{pmatrix}$$

邓建松

## 单步线性定常迭代

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 収或性理に

収敛的充要条1

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运 近收敛速度

• 
$$\mathfrak{P}(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 7/176 & -1/11 \end{pmatrix}$$

• 迭代矩阵和常数项分别为

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3/16 \\ 0 & -21/176 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 11/16 \\ -131/176 \end{pmatrix}$$

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理论

Alle Ale Ale also met a

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收分速度 • 取初值 $x_0 = (1,1)^T$ 

邓建松

## 单步线性定常迭代

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 收敛性埋饰

收敛的充要条件

权政的允万余计及沃左伯订

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

• 取初值
$$x_0 = (1,1)^T$$

• 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c}0.5\\-0.8636\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8494\\-0.6413\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8077\\-0.6678\end{array}\right)$$

邓建松

## 单步线性定常迭代

Jacobi迭行

Gauss-Seidel选代法

形式推

### **奴敛性埋花**

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 取初值 $x_0 = (1,1)^T$
- 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c} 0.5\\ -0.8636 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 0.8494\\ -0.6413 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 0.8077\\ -0.6678 \end{array}\right)$$

• 经六次迭代,得到向量 $\begin{pmatrix} 0.8122 \\ -0.6650 \end{pmatrix}$ 

邓建松

## 单步线性定常迭代

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

• 取初值
$$x_0 = (1,1)^T$$

• 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c} 0.5\\ -0.8636 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 0.8494\\ -0.6413 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 0.8077\\ -0.6678 \end{array}\right)$$

- 经六次迭代,得到向量 $\begin{pmatrix} 0.8122 \\ -0.6650 \end{pmatrix}$
- 方程的准确解为

$$\left(\begin{array}{c} 160/197 \\ -131/197 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{c} 0.812183 \\ -0.664975 \end{array}\right)$$

# 两种方法的共性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选作

形式推

女敛性理说

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi选代法和G-S选代法的消 近收敛速度 • 在这两种方法中,新的近似解 $x_k$ 是已知近似解 $x_{k-1}$ 的线性函数,并且只与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

# 两种方法的共性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选件

形式推广

女敛性理i

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的例

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 在这两种方法中,新的近似解 $x_k$ 是已知近似解 $x_{k-1}$ 的线性函数,并且只与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

• Jacobi迭代法:  $M = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$ 

# 两种方法的共性

线性方程组的古典铁

• 在这两种方法中,新的近似解x<sub>k</sub>是已知 近似解 $x_{\iota-1}$ 的线性函数,并且只 与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

- Jacobi迭代法:  $M = D^{-1}(L + U)$ .  $g = D^{-1}b$
- G-S迭代法: *M* = (*D* − *L*)<sup>-1</sup>*U*,  $g = (D - L)^{-1}b$



## 线性方程组的古典迭

• 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为单 步线性定常迭代法

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

### iller Alerbet zm 1

### 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为<mark>单</mark>步线性定常迭代法
  - $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  称为迭代矩阵

## 线性方程组的古典铁

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为单 步线性定常迭代法
  - M ∈ ℝ<sup>n×n</sup>称为迭代矩阵
  - g∈ ℝ<sup>n</sup>称为常数项

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

## 收敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi选代法和G-S选代法的影

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为<mark>单</mark>步线性定常迭代法
  - $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  称为迭代矩阵
  - $g \in \mathbb{R}^n$  称为常数项
  - $x_0 \in \mathbb{R}^n$  称为初始向量

## 收敛与发散

线性方程组的古典铁

• 如果迭代格式对任意的初始向量产生的 向量序列 $\{x_k\}$ (称为迭代序列)都有极 则称该迭代格式是收敛的

## 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选件

Gauss-Seidel达

de Alekkarını

## 以比连用

收敛的充分条件及误差估计 lacobi读代法和G-S读代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列 $\{x_k\}$ (称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的
- 否则称它是不收敛的,或者是发散的

# 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的必 敛性

1X 9X 2基 1及
平均收敛速度和渐近收敛速度
模型问题

- 如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列{x<sub>k</sub>}(称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的
- 否则称它是不收敛的,或者是发散的
- 若收敛,记迭代序列的极限为 $x_*$ ,则 有 $x_* = Mx_* + g$

## 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式排出

女敛性理说

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

11.3 14.44.2.34 11.11.2.14.44.2

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 •  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

## 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典铁

•  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

• 如果存在非奇异矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I-M)=A, \quad Gg=b$$

则迭代序列也收敛到Ax = b的解,此 时两个方程称为等价方程组, 也称迭代 格式与方程组Ax = b是相容的

## 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel选件

形式推

(敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 •  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

• 如果存在非奇异矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I-M)=A$$
,  $Gg=b$ 

则迭代序列也收敛到Ax = b的解,此时两个方程称为等价方程组,也称迭代格式与方程组Ax = b是相容的

• 已有的两种格式是相容的

•  $\partial x_* = b \otimes A = b$ 

## 线性方程组的古典迭

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代

Jacobi迭代

Gauss-Seidel洪代)

形式推

### 收敛性埋诉

### 收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

ARCHITECTURE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- $\partial x_* = b \cap R$
- $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel选作

形式推

### 以致性理用

### 收敛的充要条

収缴的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- $\partial x_* = b \cap M$
- $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列
- 定义 $y_k = x_k x_*$ , 称为 $x_k$ 的误差向量

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel选件

### 收敛性理i

### 收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- $\partial x_* = b \cap M$
- $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列
- 定义 $y_k = x_k x_*$ , 称为 $x_k$ 的误差向量
- 那么

$$y_{k+1} = x_{k+1} - x_* = Mx_k + g - (Mx_* + g)$$
  
=  $My_k = M^k y_0$ 

# 收敛条件

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi选行

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

T POTENTIAL DESCRIPTION DE L'ACTUAL DE L'

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \to 0$ 

# 收敛条件

## 线性方程组的古典铁

• 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \rightarrow 0$ 

• 而 $M^k \to 0$ 的充要条件是 $\rho(M) < 1$ 

# 收敛条件

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代法

Gauss-Seidel ÆT ( N

收敛性理论

收敛的充要条件

収敛的允分条件及误差值计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

- 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \to 0$
- 而 $M^k \to 0$ 的充要条件是 $\rho(M) < 1$

## 定理

# 注解

线性方程组的古典铁

• 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 而与初始向量的选取和常数项无关

## 注解

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的I

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 径,而与初始向量的选取和常数项无关
- 相同的方程组, Jacobi迭代矩阵和G-S迭代矩阵的谱半径不一定相同, 而且无包含关系

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

收敛性埋论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi选代法和G-S选代法的海

- 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 径,而与初始向量的选取和常数项无关
- 相同的方程组, Jacobi迭代矩阵和G-S迭代矩阵的谱半径不一定相同, 而且无包含关系
- 例子: Mathematica sec4.2.1.nb

邓建松

## 单步线性定常迭代流

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

Tre - In Albert

### 收敛性理论

收敛的充要条件

#### 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

T POTAL ACCESS THE FACE ACCESS

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi达代法 Gauss-Seidel迭代法

形式推广

## 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

邓建松

## 单步线性定常迭代

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel JE1

## 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的: 谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

## 定理

如果范数||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q^k}{1 - q} ||x_1 - x_0||$$

邓建松

## 单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

形式推广

## 收敛性埋i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

- 平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

## 定理

如果范数||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q^k}{1 - q} ||x_1 - x_0||$$

• 此定理结论的右边与精确解无关

## 定理证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

TE = 1 M

### 收敛性理论

收敛的充要条件

#### 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Mineral has the

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

•  $\Delta y_k = M^k y_0$ 的两边取范数,则有

$$||y_k|| \leq ||M||^k ||y_0|| = q^k ||y_0||$$

## 定理证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

## 收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度 •  $\Delta Y_k = M^k y_0$ 的两边取范数,则有

$$||y_k|| \leq ||M||^k ||y_0|| = q^k ||y_0||$$

• 根据」的定义

$$||y_0|| = ||x_0 - x_*|| \le ||x_0 - x_1|| + ||x_1 - x_*||$$
  
=  $||x_0 - x_1|| + ||My_0|| \le ||x_0 - x_1|| + q||y_0||$ 

所以有
$$||y_0|| \leqslant \frac{1}{1-a}||x_1-x_0||$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobio I (42)

Gauss-SeidenAT

## .. .. .. ...

收敛的充要条件

### 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

T POTANAZIO TERRAZIO

Jacobi迭代法和G-S迭代法的) 近收敛速度 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 收敛性理记

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

lacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

## 收敛性埋诉

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

## 定理

若||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q}{1 - q} ||x_{k-1} - x_k||$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

**邓建松** 

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

## 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

## 定理

若||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \leqslant \frac{q}{1 - q} ||x_{k-1} - x_k||$$

此定理结论是用刚得到的两个迭代向量估计最新结果的精度

## 定理证明

## 线性方程组的古典铁

## 因为

$$||x_k - x_*|| = ||M(x_{k-1} - x_*)|| \leqslant q||x_{k-1} - x_*||$$
  
$$\leqslant q||x_{k-1} - x_k|| + q||x_k - x_*||$$

所以

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q}{1-a} ||x_{k-1} - x_k||$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

## 收敛性理论

收敛的充要条件

## 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 又敛性埋む

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

## 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度

- 只要*M*的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么*x<sub>k</sub>*与*x<sub>\*</sub>*也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代流

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

## 【敛性理论

收款的充安家計 收敛的充分条件及误差使

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- 只要*M*的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么*x<sub>k</sub>*与*x<sub>\*</sub>*也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
  - $\ddot{\pi} \| M \| = 0.9$ ,  $\| x_{k-1} x_k \| = 10^{-8}$ ,  $\mathbb{M} \| x_k x_* \| \leq 9 \times 10^{-8}$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi选代法 Gauss-Seidel选代》

**佐舎性理** 

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

敛性

## 收敛速度

模型问题
Jacobi迭代法和G-S迭代法的游

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
  - 若 $\|M\| = 0.9$ ,  $\|x_{k-1} x_k\| = 10^{-8}$ , 则 $\|x_k x_*\| \le 9 \times 10^{-8}$
- 若||M||很接近1, 则不能断定精度

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

色步线性定常迭代注

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

## 以默江生化

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的游

- 只要*M*的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么*x*<sub>k</sub>与*x*<sub>\*</sub>也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
  - 若 $\|M\| = 0.9$ ,  $\|x_{k-1} x_k\| = 10^{-8}$ , 则 $\|x_k x_*\| \le 9 \times 10^{-8}$
- 若||M||很接近1, 则不能断定精度
- 实际一般应用1范数和∞范数: 容易计算

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形合動

收敛性理论

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差值计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

1 201X 8X AE CX 1949 (AE 1X 8X AE C

Jacobi迭代法和G-S迭代法的产 近收敛速度 • Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代治

Jacobno 1 (12)

Gauss-Seidel发生

形式推广

## 収或性理》

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel读代》

Gauss-Seidenza

de Alekkarını

## - IV-SV IT-CE N

收敛的充分条件及误差

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Delucing [ (

## 敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速 模型问题

模型何選 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别
  - 能否从B的性质判断L<sub>1</sub>的性质?

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代流

TO AN AREA OF

## 女敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 概刑 品腳

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的辩 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别
  - 能否从B的性质判断L<sub>1</sub>的性质?
  - 能否直接利用A的性质进行判断?

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Incobile##8

C C 11 (2)-702-

形式排

收敛性理说

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼件

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

遊型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

# B与L₁的关系

## 线性方程组的古典迭

## • 回忆

• Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$ 

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- Jacobi迭代:  $v = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi选代法和G-S选代法的部

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- $D^{-1}L$ 为下三角矩阵,对角元为零;  $D^{-1}U$ 为上三角矩阵,对角元为零

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 又敛性埋诉

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- $D^{-1}L$ 为下三角矩阵,对角元为零;  $D^{-1}U$ 为上三角矩阵,对角元为零
- 所以我们完全有理由根据B的性质推断 $L_1$ 的性质

## ∞范数

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代法

形式排

### 收敛性理论

.....

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼件

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的) 近此劲速度 设||B||<sub>∞</sub> < 1</li>

## $\infty$ 范数

## 线性方程组的古典迭

定义

$$\mu = \max_i rac{\displaystyle \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|}{1 - \displaystyle \sum_{i=1}^{i-1} |b_{ij}|}$$

## ∞范数

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi选行

Gauss-Seidel读代

TEST SHELL

#### 收敛性理说

収级的允妥余

収敛的允分余件及误差值计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

• 定义

$$\mu = \max_i rac{\displaystyle\sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|}$$

## 引理

$$\mu \leqslant \|B\|_{\infty} < 1$$

## 证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式排作

### **收敛性理说**

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

The second second second

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

$$\bullet \ \, \Leftrightarrow \ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

## 证明

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

$$ullet \ \, \diamondsuit \ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

• 
$$\emptyset \ell_i + u_i \leqslant ||B||_{\infty} < 1$$

## 证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度

• 
$$\diamondsuit \ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

- $\emptyset \ell_i + u_i \le \|B\|_{\infty} < 1$
- 注意到 $\forall i, b_{ii} = 0$ , 所以存在i,  $\ell_i + u_i = ||B||_{\infty}$

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

\_\_\_\_\_

### 收敛性理论

.....

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新沂收敛速

1 \*01X #X AE OC 1 H HI KE 1X #X AE O

Jacobi迭代法和G-S迭代法的)

## • 注意到

$$egin{aligned} \ell_i + u_i - rac{u_i}{1-\ell_i} &= rac{1}{1-\ell_i}((\ell_i + u_i)(1-\ell_i) - u_i) \ &= rac{\ell_i}{1-\ell_i}(1-\ell_i - u_i) \geqslant 0 \end{aligned}$$

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

## 收敛性理论

收敛的充

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型回應

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度

## • 注意到

$$\ell_i + u_i - rac{u_i}{1 - \ell_i} = rac{1}{1 - \ell_i} ((\ell_i + u_i)(1 - \ell_i) - u_i)$$

$$= rac{\ell_i}{1 - \ell_i} (1 - \ell_i - u_i) \geqslant 0$$

• 所以我们有
$$\frac{u_i}{1-\ell_i} \leq \ell_i + u_i$$

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

## 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

• 注意到

$$\ell_i + u_i - \frac{u_i}{1 - \ell_i} = \frac{1}{1 - \ell_i} ((\ell_i + u_i)(1 - \ell_i) - u_i)$$

$$= \frac{\ell_i}{1 - \ell_i} (1 - \ell_i - u_i) \geqslant 0$$

- 所以我们有 $\frac{u_i}{1-\ell_i} \leq \ell_i + u_i$
- 两边对i取最大值,我们得到

$$\mu = \max_{i} \frac{u_i}{1 - \ell_i} \leqslant \max_{i} (\ell_i + u_i) = \|B\|_{\infty} < 1$$

# $||B||_{\infty} = ||L_1||_{\infty}$

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代流

Jacobi迭代

C C 1 125-11

---

#### 女敛性理说

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

## 定理

设 $\|B\|_{\infty} < 1$ , 则 $\|L_1\|_{\infty} \le \|B\|_{\infty} < 1$ , 而且由G-S选代法产生的近似解 $x_k$ 与准确解 $x_*$ 之间满足

$$||x_k - x_*||_{\infty} \leqslant \frac{\mu^k}{1 - \mu} ||x_1 - x_0||_{\infty}$$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式推

收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Mineral November

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\|L_1\|_{\infty} = \|L_1x\|_{\infty}$ 

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使  $|| A_1 ||_{\infty} = || L_1 x ||_{\infty}$
- $\diamondsuit y = L_1 x, |y_i| = ||y||_{\infty}$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的智证证据

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\|L_1\|_{\infty} = \|L_1x\|_{\infty}$
- $\bullet \ \diamondsuit y = L_1 x, \ |y_i| = ||y||_{\infty}$
- 根据 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 的定义,我们有 $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使  $||A||_{\infty} = ||L_1x||_{\infty}$
- $\diamondsuit y = L_1 x, |y_i| = ||y||_{\infty}$
- 根据 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 的定义, 有 $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- 由于 $B = D^{-1}L + D^{-1}U$ . 所 以 $D^{-1}I$ 为B的下三角部分,  $D^{-1}U$ 为B的上三角部分

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Saidal进程注

形式维

#### 收敛性理说

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

lacobi迭代法和G-S迭代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运 近收敛速度 • 比较两边的第*i*个分量,我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 比较两边的第i个分量, 我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

• 两边取绝对值,可得

$$||y||_{\infty} \leqslant ||y||_{\infty} \ell_i + u_i$$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

形才推

#### ケ幼性理治

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

● 比较两边的第i个分量, 我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

• 两边取绝对值,可得

$$||y||_{\infty} \leq ||y||_{\infty} \ell_i + u_i$$

• 由此可得

$$||L_1||_{\infty} = ||y||_{\infty} \leqslant \frac{u_i}{1 - \ell_i} \leqslant \mu < 1$$

## 估计式的证明

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 根据 $\|L_1\|_{\infty} \leq \mu < 1$ 可得

$$||x_{k} - x_{*}||_{\infty} \leqslant \frac{||L_{1}||_{\infty}^{k}}{1 - ||L_{1}||_{\infty}} ||x_{1} - x_{0}||_{\infty}$$
$$\leqslant \frac{\mu^{k}}{1 - \mu} ||x_{1} - x_{0}||_{\infty}$$

# 1范数

## 线性方程组的古典选 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Gauss-Seidel洪代法

形式排

#### 收敛性理说

Alle Ale Ale also seed A

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近數效速度 • 设 $\|B\|_1 < 1$ 

# 1范数

- 设∥*B*||<sub>1</sub> < 1</li>
- 定义

$$ilde{\mu} = \max_j rac{\displaystyle\sum_{i=1}^{J-1} |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|}$$

## 1范数

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi选付

Cause Saidalit-At-

TEX -- (5-44)-

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 设∥*B*||<sub>1</sub> < 1</li>

• 定义

$$ilde{\mu} = \max_j rac{\displaystyle\sum_{i=1}^{J-1} |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|}$$

• 则类似前面对 $\mu$  < 1的证明可证 $\tilde{\mu} \leq \|B\|_1 < 1$ 



# $||B||_1$ 与 $\rho(L_1)$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Tre - in Adia a

#### V敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 概刑问關

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

## 定理

$$||x_k - x_*||_1 \leqslant \frac{\tilde{\mu}^k}{(1 - \tilde{\mu})(1 - s)} ||x_1 - x_0||_1$$

其中
$$s = \max_{j} \sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|$$
,这是 $B$ 的下三角阵 $D^{-1}L$ 的 $1$ 范数

# $\rho(L_1) < 1$ 的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel 法任

形式推

#### 又敛性理说

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

模型回题 Incobite伊法和C S性伊法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

## 因为

$$(D-L)^{-1}U = (I-D^{-1}L)^{-1}(D^{-1}U(I-D^{-1}L)^{-1})(I-D^{-1}L)$$

所以
$$L_1$$
与 $\tilde{L}_1 = D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$ 相似,从而 $\rho(L_1) = \rho(\tilde{L}_1)$ 

# $\rho(L_1) < 1$ 的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

#### 以蚁は垤ぃ

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 因为

$$(D-L)^{-1}U = (I-D^{-1}L)^{-1}(D^{-1}U(I-D^{-1}L)^{-1})(I-D^{-1}L)$$

所以 $L_1$ 与 $\tilde{L}_1 = D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$ 相似,从而 $\rho(L_1) = \rho(\tilde{L}_1)$ 

• 类似 $\infty$ 范数时的情况可证 $\|\tilde{\mathcal{L}}_1^T\|_{\infty} \leq \tilde{\mu} < 1$ ,从而有

$$\rho(L_1) \leqslant \|\tilde{L}_1^T\|_{\infty} \leqslant \tilde{\mu} < 1$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Iacobi读代法

C C + 1 (2) / (0.2)

Tre - In Albert

#### 收敛性理论

illy Altrick also As Altrica 46 Altrica

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收分速度 • 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$ 

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$
- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^TD^{-1}$ , 上三角 部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$

邓建松

### 单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$
- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^T D^{-1}$ ,上三角部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T = (D^{-1}U(I D^{-1}L)^{-1})^T = (I L^TD^{-1})^{-1}U^TD^{-1}$

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$
- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^T D^{-1}$ ,上三角部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T = (D^{-1}U(I D^{-1}L)^{-1})^T = (I L^TD^{-1})^{-1}U^TD^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T x = y \Longrightarrow y = L^T D^{-1} y + U^T D^{-1} x$

## 误差估计的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式推

**女敛性理说** 

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

lacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 由G-S迭代法的格式,可得

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2})$$

# 误差估计的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### (敛性理说

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的验证收敛速度

• 由G-S迭代法的格式,可得

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2})$$

• 分量表示即为

$$x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})$$
  
  $+ \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)})$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

TE = 17 ME

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

ACCUMPANTAL AND ACTION AND ACCUMPANT

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

ART TO A 2 TO SERV

Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度 ▶ 两边取绝对值后对*i*求和,再交换求和顺序

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_{i}^{(k)} - x_{i}^{(k-1)} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k)} - x_{j}^{(k-1)} \right| \right)$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k-1)} - x_{j}^{(k-2)} \right| \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k)} - x_{j}^{(k-1)} \right| \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k-1)} - x_{j}^{(k-2)} \right| \right)$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Course-Seidel洪代注

形式维

#### 收敛性理说

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型回遞

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度



$$\tilde{u}_j = \sum_{i=i+1}^n |b_{ij}|, \quad \tilde{\ell}_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|$$

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

## 令

$$\tilde{u}_j = \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|, \quad \tilde{\ell}_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|$$

• 则接前推导我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left( \tilde{u}_j \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| + \tilde{\ell}_j \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right| \right)$$

## 线性方程组的古典迭

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

## 从而有

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \tilde{\ell}_j \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right|$$

$$\leq \tilde{\mu} \sum_{j=1}^{n} (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right|$$

 $\leq \cdots \cdots$ 

 $\leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(1)} - x_j^{(0)} \right|$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

e e e e e e e e e e

#### 收敛性理证

ally Aly Aly Aly Aly Aly TA STA MY ARVILLE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 你性

#### 此幼神度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_j < 1$ 



邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Gauss-Seidel读代法

形式排

#### 收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

- 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_i < 1$
- 所以

$$(1-s)\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(k)}-x_{j}^{(k-1)}\right|\leqslant \tilde{\mu}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(1)}-x_{j}^{(0)}\right|$$

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 根据 $\tilde{u}$ 和s的定义, $1-s \leq 1-\tilde{u}_i < 1$
- 所以

$$(1-s)\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(k)}-x_{j}^{(k-1)}\right|\leqslant \tilde{\mu}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(1)}-x_{j}^{(0)}\right|$$

• 这就是 $(1-s)||x_k-x_{k-1}||_1 \leqslant \tilde{\mu}^{k-1}||x_1-x_0||_1$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Course-Seidel洪代注

形式排

#### 收敛性理说

.....

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部 近此效速度 • 注意到 $x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代

lacobi迭色

Carra Carra (Str. Inst

TTV -- IN ARE

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

• 注意到
$$x_k - x_* = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$$

• 所以

$$||x_{k} - x_{*}||_{1} \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} ||x_{i} - x_{i+1}||_{1}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-s} \sum_{i=k}^{\infty} \tilde{\mu}^{i} ||x_{1} - x_{0}||_{1}$$

$$\leqslant \frac{\tilde{\mu}^{k}}{(1-\tilde{\mu})(1-s)} ||x_{1} - x_{0}||_{1}$$

# 从A直接判断: 正定矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

lacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部

## 定理

如果A是对称的,而且对角元全是正数,则Jacobi迭代法收敛的充要条件是A和2D – A都正定

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

Commercial (St. 493)

TEX -45-445-

#### 收敛性理论

收敛的充要备

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi选代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 迭代矩阵 $B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭色

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 収敛性埋む

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

48 mi / 1 mi

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

• 迭代矩阵
$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

• 由于对角元全是正数,所以

$$B = D^{-1/2} (I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

#### l/r 会r 4H: 1HI 3

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

• 迭代矩阵
$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

• 由于对角元全是正数,所以

$$B = D^{-1/2} (I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

• A对称,所以 $I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$ 也是对称的,而且它与B相似,所以B的特征值全为实数

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

TEX -- In Alberta

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

1 \*01X #X AE OC 1 H HI KE1X #X AE O

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度 • Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I - B和I + B的特征值均为正实数

邓建松

### 单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》 形式推广

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型间限

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

● 所以ρ(B) < 1等价于A与2D – A均正定

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

收敛性理i

Alle Ale Ale also seek day A

收敛的充分条件及误差

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型间限

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

- 所以ρ(B) < 1等价于A与2D A均正定
  - D<sup>-1/2</sup>AD<sup>-1/2</sup>相合于A;
     2I − D<sup>-1/2</sup>AD<sup>-1/2</sup>相合于2D − A

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi读代的

Carra Catalant (BA)

形式排

#### 收敛性理记

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收劲速度

### • 正定理

线性方程组的古典迭

• 正定理

定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

线性方程组的古典迭

• 正定理

定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

• 定理证明见第4节

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel洪代

形才維

**收敛性理**i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部

• 正定理

### 定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

- 定理证明见第4节
- 逆定理(习题第7题)

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法 Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Seidell©10

**女**敛性理i

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 正定理

### 定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

- 定理证明见第4节
- 逆定理(习题第7题)

### 定理

若系数矩阵A是具有正对角元的对称矩阵, G-S迭代 法对任意初值收敛, 则A必是正定的

# 对角占优矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选作

Gauss-Seidel迭代

仪蚁住垤化

权政的允安来刊

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收数速度 • 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 若对所有的 $i = 1, \dots, n$ .

$$|a_{ii}|\geqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

并且至少有一个对i有严格不等号成立,则称A是弱严格对角占优的。如果对所有i都有严格不等号成立,则称A是严格对角占优的



# 可约和不可约矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代

Gauss-Seidelætt

**收敛性理**说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

**敛性** 

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 若存在n阶排列 方阵P使得

$$PAP^T = \left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right)$$

其中 $A_{11}$ 是r阶方阵, $A_{22}$ 是n-r阶方阵,则称A是可约的或可分的;反之称为不可约的或不可分的

# 可约矩阵的意义

### 线性方程组的古典迭

• 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^{T}Px = Pb$$

# 可约矩阵的意义

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的产 近收敛速度 • 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^{T}Px = Pb$$

•  $ildel{ilde|{ilde|{ildel{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|}{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ille|i}{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ille|i|}{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ille|i|}{ilde|{ilde|{ilde|{ilde|{ille|i|}{ilde|{ilde|ilde|{ille|ilde|{ille|ilde|{ille|ilde|{ille|i|}{ille|}{ille|}{ilie|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{ille|}{$ 

$$\left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right)$$

# 可约矩阵的意义

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^TPx = Pb$$

● 记*Px* = *v*, *Pb* = *f*, 则有

$$\left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right)$$

• 如此我们可以先求解r阶方程组 $A_{11}$  $y_1 = f_1$ , 得 到 $y_1$ , 代入 $A_{12}y_1 + A_{22}y_2 = f_2$  后就可以解出 $y_2$ 

# 可约矩阵的等价定义

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

(敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设A为n ( $n \ge 2$ )阶方阵,  $\mathcal{W} = \{1, ..., n\}$ . 如果存在 $\mathcal{W}$ 的两个非空的子集 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 满足

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{W}, \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$$

使得 $a_{ij} = 0$ ,  $(i \in S, j \in T)$ , 则称A为可约的,否则称A是不可约的

## 不可约对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi还代法

-auss-Seidel达代

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

I POTKAKAEDKAHADALTAKAKAED

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部 近收敛速度 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的,则称该矩阵为不可约对角占优的

## 不可约对角占优

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优 的,则称该矩阵为不可约对角占优的
- 下述三对角阵为不可约对角占优矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

# 不可约对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Cause Saidali##

Guasa Scidenza ( (

dbr Δbr b4- τπ 2

#### N-MILL-II

収取的冗级家

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

- 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的的,则称该矩阵为不可约对角占优的
- 下述三对角阵为不可约对角占优矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

● 弱严格对角占优矩阵,有可能一行全是零;而不可约对角占优,就排除了这种情形,从而任意对角元非零

### 线性方程组的古典选 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Gauss-Seidel读代法

形式排作

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi选代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 对角占优与非奇异的关系:

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推广

(敛性理论

Alle Ale Ale also seek day A

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部

• 对角占优与非奇异的关系:

### 定理

如果矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则A非奇异

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

.....

#### 又敛性埋论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 对角占优与非奇异的关系:

### 定理

如果矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则A非奇异

• 可约对角占优的,矩阵有可能奇异:

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

## 严格对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi选作

Cause Saidali##

100 =8° 480

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 若A奇异,则Ax = 0有非零解x. 不妨 设 $|x_i| = ||x||_{\infty} = 1$ , 则有

$$|a_{ii}|=|a_{ii}x_i|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{ij}x_j
ight|\leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

## 严格对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 这与A严格对角占优矛盾

• 若A 奇异,则Ax = 0 有非零解x. 不妨  $\mathfrak{P}[x_i] = ||x||_{\infty} = 1$ , 则有

$$|a_{ii}|=|a_{ii}x_i|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{ij}x_j
ight|\leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

4□ → 4□ → 4 □ → 1 □ → 9 Q (~)

## 不可约对角占优情形的证明

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

■ 同样, 若A奇异, 则存在x满  $\mathbb{E}\|x\|_{\infty} = 1$ 使得Ax = 0

## 不可约对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理记

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 同样,若A奇异,则存在x满 足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 使得Ax = 0

• 定义 $\mathcal{S} = \{i : |x_i| = 1\},$  $\mathcal{T} = \{k : |x_k| < 1\}$ 

# 不可约对角占优情形的证明

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 同样, 若A奇异, 则存在x满  $\mathbb{E}\|x\|_{\infty} = 1$ 使得Ax = 0
- 定义 $S = \{i : |x_i| = 1\},$  $\mathcal{T} = \{k : |x_k| < 1\}$
- 显然 $S \cup T = W$ ,  $S \cap T = \emptyset$ , 而且S非空

# ア为空集

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

lacobi迭代注

Gauss-Seidel洪代》

形合動

收敛性理记

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

The second contract of the second

1 1 20 70 2

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 假设T为空集

# ア为空集

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代

形式推

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近數分速度

- 假设T为空集
- 那么x的各分量的绝对值均为1,从而 $\forall i \in S$ ,

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

# T为空集

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### (敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的常近收敛速度

- 假设T为空集
- 那么x的各分量的绝对值均为1,从而 $\forall i \in S$ ,

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

• 这与A弱严格对角占优矛盾

# |*T*非空:利用不可约完成证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

收敛性理论

收敛的充要条

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi洪代法和G-S洪代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 因为A不可约,所以存在 $i \in S$ ,  $k \in T$ 使得 $a_{ik} \neq 0$ 

# T非空:利用不可约完成证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel选代

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

- 因为A不可约,所以存在 $i \in S$ ,  $k \in T$ 使得 $a_{ik} \neq 0$
- 于是|*a<sub>ik</sub>x<sub>k</sub>*| < |*a<sub>ik</sub>*|, 并且

$$|a_{ii}| = |a_{ii}x_i| \leqslant \sum_{j \in \mathcal{S}, j \neq i} |a_{ij}||x_j| + \sum_{j \in \mathcal{T}} |a_{ij}||x_j|$$
 $< \sum_{j \in \mathcal{S}, j \neq i} |a_{ij}| + \sum_{j \in \mathcal{T}} |a_{ij}|$ 
 $= \sum_{i \neq i} |a_{ij}|$ 

这也与A为弱严格对角占优矛盾

## 推论

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi选件

Gauss-Seidel迭代法

### 收或性理》

収敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

### 推论

若A是严格对角占优的或者不可约对角占优的对称矩阵,且A的对角线元素均为正数,则A正定

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推广

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟 近收敛速度 A对称,所以特征值均为实数。为证A正定,只 需要证明所有特征值均为正数

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

#### 人或注理化

收敛的充要条件

収缴的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

● *A*对称,所以特征值均为实数。为证*A*正定,只需要证明所有特征值均为正数

• 若有一个特征值 $\lambda \leq 0$ , 考虑矩阵 $A - \lambda I$ 

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### (敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- A对称,所以特征值均为实数。为证A正定,只需要证明所有特征值均为正数
- 若有一个特征值 $\lambda \leq 0$ , 考虑矩阵 $A \lambda I$
- 矩阵 $A \lambda I$ 只是在A的对角线元素上增加了一些,所以 $A \lambda I$ 和A一样是严格对角占优或者不可约对角占优的,从而是非奇异的,这与 $\lambda$ 为A的特征值矛盾

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

形动物

#### **女敛性理i**

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第

定理

若A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则Jacobi迭代法和G-S迭代法都收敛

# 证明: Jacobi迭代

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代法

形式排

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近數效速度 •  $\forall i, a_{ii} \neq 0$ 

# 证明: Jacobi迭代

## 线性方程组的古典迭

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆

# 证明: Jacobi迭代

# 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

•  $\forall i, a_{ii} \neq 0$ 

- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值λ的模长不小干1

# 证明: Jacobi迭代

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推广

### 敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S选代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

保室网感 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值λ的模长不小于1
- 考虑矩阵 $\lambda D L U$ , 这也是严格对角 占优的或者不可约对角占优的,从而非 奇异

# 证明: Jacobi迭代

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭f Gauss-Sei

Gauss-Seidel迭代

16- M- ML 101 17

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

P均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 •  $\forall i, a_{ii} \neq 0$ 

- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值λ的模长不小于1
- 考虑矩阵 $\lambda D L U$ , 这也是严格对角 占优的或者不可约对角占优的,从而非 奇异
- 由于 $\lambda I B = D^{-1}(\lambda D L U)$ ,所以 $\det(\lambda I B) \neq 0$ ,矛盾

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 收敛性理论

収取的冗安来

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

lacobi读代注和C\_S读代注的:

Jacobi迭代法和G-S迭代法的) 近收敛速度 • G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式組

#### と 放性理 は

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的; 近收敛速度

• G-S迭代法的迭代矩阵
$$L_1 = (D - L)^{-1}U$$

• 
$$\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel运行。

## 收敛性理i

## 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

•  $\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$ 

• 若 $|\lambda| \ge 1$ ,则 $D - L \pi \lambda D - \lambda L - U$ 也是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,从而它们均可逆

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

形式推广

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的新
近收敛速度

• G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

•  $\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$ 

- 若 $|\lambda| \ge 1$ ,则D L和 $\lambda D \lambda L U$ 也是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,从而它们均可逆
- 这就证明了G-S迭代法收敛

## 线性方程组的古典迭

• 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 仪 敛 性 埋 7

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

1 201X 8X 8E1X 1940 NE1X 8X 8E13

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度

• 单步线性定常迭代法: 
$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

• 误差向量 $y_k = x_k - x_*$ 满足 $y_k = M^k y_0$ , 从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

# 线性方程组的古典铁

- 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$
- 误差向量v<sub>k</sub> = x<sub>k</sub> − x<sub>k</sub>满足v<sub>k</sub> = M<sup>k</sup>v<sub>0</sub>, 从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

• 初始误差 $\|y_0\|$ 一般不知道,通常用 $\|M^k\|$ 的大小 刻画迭代法收敛的速度

# 线性方程组的古典铁

• 单步线性定常迭代法: 
$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

• 误差向量 $v_k = x_k - x_k$ 满足 $v_k = M^k v_0$ . 从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

- 初始误差||y₀||一般不知道,通常用||M<sup>k</sup>||的大小 刻画迭代法收敛的速度
- 定义 $R_k(M) = \frac{-\ln \|M^k\|}{k}$ 为k次迭代的<mark>平均收敛</mark> 速度

# 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推

收敛性理记

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

1 20代联基度和40亿代联基度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$ 

# 误差缩减的比例因子

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Carra Carra (Str. A)

形式組

### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

HT IN THE REAL PROPERTY OF THE PARTY OF THE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的详 近收敛速度

- 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$
- 所以当k充分大时,总有 $R_k(M) > 0$ .

# 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典铁

- 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时,  $||M^k|| \to 0$
- 所以当k充分大时,总有 $R_k(M) > 0$ .
- $\Re R_k = R_k(M) > 0$ , 数量

$$\sigma = \left(\frac{\|y_k\|}{\|y_0\|}\right)^{1/k} \approx \|M^k\|^{1/k} = e^{-R_k}$$

就表示误差范数在k次迭代中平均每次 迭代所缩减的比例因子

# 对称矩阵情形

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式組

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

**干均収取速度和削延収取速**度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 若*M*是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

# 对称矩阵情形

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭付

Gauss-Seidel迭代

形式推

(敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 若*M*是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

• 所以 $R_k(M) = -\ln \rho(M)$ , 这是与k无关的量

# 对称矩阵情形

线性方程组的古典铁

若M是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

- 所以 $R_k(M) = -\ln \rho(M)$ , 这是与k无关 的量
- 但在一般情况下,R<sub>k</sub>是依赖于k的,这 时计算 $R_{\iota}$ 就非常复杂

# 收敛速度比较

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭

**收敛性理**i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 如果两个迭代矩阵G和H满 足 $R_k(H) > R_k(M) > 0$ ,我们就说,对于k次迭代来讲,对应于H的迭代法比对应于G的迭代法的收敛速度快

# 收敛速度比较

线性方程组的古典铁

- 如果两个迭代矩阵*G*和*H*满 足 $R_k(H) > R_k(M) > 0$ , 我们就说,对 于k次迭代来讲,对应于H的迭代法比 对应于G的迭代法的收敛速度快
- 有可能对某些k,  $R_k(G) < R_k(H)$ , 而对 另一些 $k, R_k(G) > R_k(H)$

# 收敛速度比较

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法

Gauss-Seidel迭代

ille Ale kil. mil 1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

**平均收敛速度和渐近收敛速度** 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 如果两个迭代矩阵G和H满 足 $R_k(H) > R_k(M) > 0$ ,我们就说,对于k次迭代来讲,对应于H的迭代法比对应于G的迭代法的收敛速度快

- 有可能对某些k,  $R_k(G) < R_k(H)$ , 而对 另一些k,  $R_k(G) > R_k(H)$
- 所以我们考虑k → ∞时 $R_k(M)$ 的极限

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi选作

Gauss-Seidel迭代

形式組

#### 欠敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

T POTANCIECE TRIPIALITANCES

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式推

### (敛性理论

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的中 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

我们有

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代)

Gauss-Seidel迭代

形式推

### (敛性埋花

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的中

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收分速度

• 为了刻画整个迭代过程的收敛速度,我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

## 定理

$$R_{\infty}(M) = -\ln \rho(M)$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

佐佐州: 珊立

### 仪蚁性理化

收敛的充要条件收敛的充分条件及误差估计

敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

## 定理

$$R_{\infty}(M) = -\ln \rho(M)$$

• 定理的成立不依赖于范数的选取

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel洪代的

形式排

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

#### 平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的; 近收敛速度 • 只需证明 $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$ 即可

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 攵敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度

- 只需证明  $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$  即可
- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||,$ 所以 $\rho(M) \leq ||M^k||^{1/k}$

## 线性方程组的古典铁

- 只需证明  $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$  即可
- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||$ ,所 以 $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$
- 另一方面,对 $\forall \varepsilon > 0$ . 考虑矩阵

$$B_{\varepsilon} = \frac{1}{\rho(M) + \varepsilon} M$$

## 线性方程组的古典铁

- 只需证明  $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$  即可
- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||$ ,所 以 $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$
- 另一方面,对 $\forall \varepsilon > 0$ . 考虑矩阵

$$B_{\varepsilon} = \frac{1}{\rho(M) + \varepsilon} M$$

显然ρ(Bε) < 1</li>

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Communication (Inch.)

Tre - In Albert

### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 平均收敛速度和渐近收敛速度

構形品類

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 于是 $\lim_{k\to\infty}B^k_{\varepsilon}=0$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

形式排

#### 收敛性理说

ally Aly Aly -20

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影

#### 收敛速度

#### 平均收敛速度和渐近收敛速

1 2013 23 22 22 14 60 22 13 23 24 25

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- 于是 $\lim_{k\to\infty}B^k_{\varepsilon}=0$
- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $||B_{\varepsilon}^k|| \le 1$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

于均收数速度和削进收数速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部 近收敛速度

- 于是 $\lim_{k\to\infty}B^k_{\varepsilon}=0$
- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $||B_{\varepsilon}^k|| \le 1$
- 这就是 $||M^k|| \leq (\rho(M) + \varepsilon)^k$

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi选行

Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi选代法和G-S选代法的消 近收敛速度 • 于是  $\lim_{k\to\infty} B_{\varepsilon}^k = 0$ 

- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $\|B_{\varepsilon}^k\| \le 1$
- 这就是 $||M^k|| \leq (\rho(M) + \varepsilon)^k$
- 至此我们证明了:对任意的 $\varepsilon > 0$ ,存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时,

$$\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k} \leqslant \rho(M) + \varepsilon$$

这就完成了证明

# 模型问题

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi达代法

Gauss-Seidel选作

### .. .. .. ..

### IX-5X III-II F

权权的范瑟尔目

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速

#### 英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ● 为了具体说明迭代法的收敛速度,我们考虑用 五点差分格式求解[0,1]²上的Poisson方程第一 边值问题

边值问题 
$$\begin{cases} \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), (x, y) \in (0, 1)^2 \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

这里「表示正方形定义域的边界

# 离散化

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度 • 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形

# 离散化

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seideli

Gauss-Seidel达代

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

#### 英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形
- 记小正方形的顶点为 $(x_i, y_j)$

# 离散化

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代验

de Ar Marin

以比上比

收敛的充分条件及误差估计 Insobiit/#/注和C Sit/#注的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形
- 记小正方形的顶点为 $(x_i, y_j)$
- 用二阶差商

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j)} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg|_{(x_i,y_i)} = \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) + O(h^2)$$

代替二阶偏微分,这里 $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ 

# 矩阵形式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 收敛性埋u

收敛的充要条件

权政的允万余什及庆左伯订

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

# • 如此得到方程组

$$\begin{cases}
4u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f_{ij} \\
i, j = 1, \dots, n-1 \\
u_{i,0} = u_{i,n} = u_{0,j} = u_{n,j} = 0, \quad i, j = 0, \dots, n
\end{cases}$$

# 矩阵形式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi运代法

Sauss-Seidel迭代

形式推

### 収或性埋化

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

lacobi迭代法和G-S迭代法的运 近收敛速度 • 如此得到方程组

$$\begin{cases}
4u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f_{ij} \\
i, j = 1, \dots, n-1 \\
u_{i,0} = u_{i,n} = u_{0,j} = u_{n,j} = 0, \quad i, j = 0, \dots, n
\end{cases}$$

• 写成矩阵形式:

$$T_{n-1}U+UT_{n-1}=h^2F,$$

其中 $U = (u_{i,j}), F = (f_{ij}), T_{n-1} 为 n - 1$ 阶三对角矩阵矩阵,主对角元素为2, 上下次对角元素为-1

# 矩阵拉直: 自然顺序排列

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel读

Gauss-Seidel迭

b 敛性理记

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 为了得到通常的Ax = b形式的线性方程组,我们对U和F中的元素进行"拉直":先按j由小到大排列,j相同的按i由小到大排列

# 矩阵拉直: 自然顺序排列

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

JL- AL-bl. em )

収数は埋化

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 为了得到通常的Ax = b形式的线性方程组,我们对U和F中的元素进行"拉直":先按j由小到大排列,j相同的按i由小到大排列
- 如此我们得到方程组

$$Au = h^2 f$$

其中向量u和f是矩阵U和F拉直的结果

# 系数矩阵A

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代

形式推

又敛性埋诏

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

**艾型问题** 

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

$$A = \begin{pmatrix} T_{n-1} + 2I_{n-1} & -I_{n-1} & & & & \\ -I_{n-1} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -I_{n-1} & \\ & & -I_{n-1} & T_{n-1} + 2I_{n-1} \end{pmatrix}$$

● *A*是(*n* − 1)<sup>2</sup>阶块三对角阵,五条对角线上有非 零元:它也是不可约对角占优的对称正定阵

# 系数矩阵A

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi运代法

Guasa Sciucing ( ())

IL-AL-DL-em )

收敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运 近收敛速度

$$A = \begin{pmatrix} T_{n-1} + 2I_{n-1} & -I_{n-1} & & & & \\ -I_{n-1} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -I_{n-1} & \\ & & -I_{n-1} & T_{n-1} + 2I_{n-1} \end{pmatrix}$$

- *A*是(*n* 1)<sup>2</sup>阶块三对角阵,五条对角线上有非零元;它也是不可约对角占优的对称正定阵
- 每个对角元的左、右各有两个非零元素,据离 对角元远近,分别对应对角元上下和左右邻居

# A的特征值和特征向量

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 収或性理に

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

**范型问题** 

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 •  $T_{n-1}$ 的特征值为 $\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{j\pi}{n}$ , 对应的单位特征向量为

$$z_j = \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{j\pi}{n}, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{2j\pi}{n}, \dots, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{(n-1)j\pi}{n}\right)^T$$

# A的特征值和特征向量

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

## 収或性理

収敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 •  $T_{n-1}$ 的特征值为 $\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{j\pi}{n}$ , 对应的单位特征向量为

$$z_j = \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{j\pi}{n}, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{2j\pi}{n}, \dots, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{(n-1)j\pi}{n}\right)^T$$

• 利用"拉直"操作,可以证明A的特征值 为 $\lambda_{pq} = \lambda_p + \lambda_q$ ,对应特征向量为 $z_p z_q^T$ "拉直"的 结果

# Jacobi迭代法

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形才推广

### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛运

**干均収级速度和新近収级速** 

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L + U) = I - \frac{1}{4}A$ 

# Jacobi迭代法

# 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

- 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L+U) = I - \frac{1}{4}A$
- B的对角元为0, 其左右分别有两个非零元素 (值为1/4),对应于对角元的左右和上下邻居

# Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

**收**敛性理语

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L+U) = I \frac{1}{4}A$
- B的对角元为0,其左右分别有两个非零元素 (值为1/4),对应于对角元的左右和上下邻居
- 所以迭代格式为

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4} \left( u_{i+1,j}^{(k-1)} + u_{i-1,j}^{(k-1)} + u_{i,j+1}^{(k-1)} + u_{i,j-1}^{(k-1)} \right) + \frac{h^2}{4} f_{ij},$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0, i, j = 1, \dots, n-1$$

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel迭代》

形式維

### 收敛性理记

JL- Al-Al-Al-al-mat

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

**十**均収蚁速度和新近収蚁速/

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • B的特征值为 $\mu_{pq} = 1 - \frac{1}{4} \lambda_{pq}$ 

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式推

### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

1 种种类型以近线 有种种用处理采取效应

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- B的特征值为 $\mu_{pq} = 1 \frac{1}{4} \lambda_{pq}$ 
  - 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选件

形式推

### 仪或性埋化

収级的允安余件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的II 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 运费 • B的特征值为 $\mu_{pq}=1-rac{1}{4}\lambda_{pq}$ 

- 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值
- 所以 $\rho(B) = \cos \frac{\pi}{n} = \cos h\pi$ , 从而可知渐近收敛速度为

$$R_{\infty}(B) = -\ln \rho(B) = -\ln \cos h\pi$$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobbo I (II)

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 义蚁性埋化

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

• B的特征值为
$$\mu_{pq} = 1 - \frac{1}{4} \lambda_{pq}$$

- 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值
- 所以 $\rho(B) = \cos \frac{\pi}{n} = \cos h\pi$ , 从而可知渐近收敛速度为

$$R_{\infty}(B) = -\ln \rho(B) = -\ln \cos h\pi$$

• 从而当 $h \to 0$ 时,我们有

$$R_{\infty}(B) \sim \frac{1}{2}\pi^2 h^2$$

# B对应的特征值问题

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobite代表

aduss-seiden<u>a</u>ji,

形式推

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

1 20月代 (東大)本月史 (中科月月上月天東大)本月

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值

# B对应的特征值问题

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 仅敛性埋饰

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

**干均权效逐及和利廷权效逐**/

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值
- B的特征值问题为 $B\eta = \mu\eta$

# B对应的特征值问题

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

(敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的。

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值
- B的特征值问题为 $B\eta = \mu\eta$
- 回忆: *B*的对角元全是零,每个对角元的左、 右各有两个非零元素(值为1/4),所以采用二 重指标表示*B*对应的特值问题为

$$\begin{cases} \mu \eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \eta_{i+1,j} + \eta_{i-1,j} + \eta_{i,j+1} + \eta_{i,j-1} \right) \\ \eta_{i0} = \eta_{in} = \eta_{0j} = \eta_{nj} = 0 \end{cases}$$

# $L_1$ 对应的特征值问题

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式推

### 收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

平均収级速度和新近収级速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ● L<sub>1</sub>对应的特征值问题为

$$L_1\xi = \lambda\xi \to \lambda D\xi = \lambda L\xi + U\xi$$

# $L_1$ 对应的特征值问题

# 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

● L<sub>1</sub>对应的特征值问题为

$$L_1\xi = \lambda\xi \to \lambda D\xi = \lambda L\xi + U\xi$$

所以采用二重指标表示Li的特征值问题为

$$\begin{cases} \lambda \xi_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda \xi_{i-1,j} + \lambda \xi_{i,j-1} + \xi_{i,j+1} + \xi_{i+1,j} \right) \\ \xi_{i0} = \xi_{in} = \xi_{0j} = \xi_{nj} = 0 \end{cases}$$

# 单步线性定常迭代剂

Jacobil医代波

Gauss-Seidel选代》

形式推广

### 收敛性理论

収级的允安余

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

1 2010 以及逐度和初度收入2018

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} (\eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1})$$

邓建松

# 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 收敛性埋饰

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} (\eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1})$$

• 由边值为零,可知若 $\lambda$ 是 $L_1$ 的非零特征值当且 仅当 $\lambda^{1/2}$ 是B的非零特征值

邓建松

# 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的中

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} (\eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1})$$

- 由边值为零,可知若 $\lambda$ 是 $L_1$ 的非零特征值当且 仅当 $\lambda^{1/2}$ 是B的非零特征值
- 因此L<sub>1</sub>的特征值非负

# G-S迭代法的渐近收敛速度

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭化

Gauss-Seidel迭代》

形式推

### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

干奶仪蚁速度和剧组仪蚁速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

# • 从而我们可知

$$R_{\infty}(L_1) = -\ln \rho(L_1) = -2\ln \rho(B) \sim \pi^2 h^2,$$
  
 $h \to 0$ 

# G-S迭代法的渐近收敛速度

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代

Gauss-Seidel达代

## 收敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 从而我们可知

$$R_{\infty}(L_1) = -\ln \rho(L_1) = -2\ln \rho(B) \sim \pi^2 h^2,$$
  
 $h \to 0$ 

这说明G-S迭代法的渐近收敛速度是Jacobi迭代 法的渐近收敛速度的两倍

# 超松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

形才推

收敛性理i

Alle Ale Ade also made it

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题 Jacobi选作注和G-S选作注的

lacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 这是一种新的迭代法

# 超松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭色

Gauss-Seidel迭代海

形式組

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

acobi迭代法和G-S迭代法的影 : 此效速度 • 这是一种新的迭代法

• 它是G-S迭代法的引申和推广

# 超松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

## 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

acobi迭代法和G-S迭代法的运 近收敛速度

- 这是一种新的迭代法
- 它是G-S迭代法的引申和推广
- 也可以看作是G-S迭代法的加速

# 线性方程组的古典铁

• 在迭代格式中 $\phi x_{k+1} - x_k = \Delta x$ , 

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

## 收敛性理i

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

## 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- 在迭代格式中令 $x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代》

(人)以[正任)

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 在迭代格式中 $\diamondsuit x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$
- 对于已有的迭代格式, $\Delta x$ 是由格式完全确定的

线性方程组的古典铁

- 在迭代格式中 $\phi x_{k+1} x_k = \Delta x$ ,
- 这可以看作是在向量x₁上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$
- 对于已有的迭代格式, $\Delta x$ 是由格式完 全确定的
- 我们可以在修正项的前面加上一个参 数ω以得到松弛迭代格式



# G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典铁

• G-S 迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

# G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

iauss-Seidel选代法

形式推

### 仪蚁注理》

收敛的充要条

収级的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• G-S迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

$$\Delta x = D^{-1}Lx_{k+1} + (D^{-1}U - I)x_k + D^{-1}b$$

# G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代》

形式推

### 収蚁注理证

收敛的充要条件

Jacobi 迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • G-S迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

- $\Delta x = D^{-1}Lx_{k+1} + (D^{-1}U I)x_k + D^{-1}b$
- 松弛迭代格式

$$x_{k+1} = x_k + \omega \Delta x$$
  
=  $(1 - \omega)x_k + \omega(D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b)$ 

# 术语

## 线性方程组的古典选 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Cause-Saidal读件过

形式维

### 收敛性理说

iller Alle Africke 1

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi选代法和G-S选代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

DE DE 199 JES

lacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • ω叫做松弛因子

## 线性方程组的古典铁

### ω叫做松弛因子

• 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭</mark> 代法,简记为SOR迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

## • ω叫做松弛因子

- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭代法</mark>,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代記

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速! 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

## • ω叫做松弛因子

- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做超松弛迭代法,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation
- 当 $\omega$  < 1时,对应的格式叫做低松弛迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消

### • ω叫做松弛因子

- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭代法</mark>,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation
- 当 $\omega$  < 1时,对应的格式叫做低松弛迭代法
- 当 $\omega = 1$ 时,对应的格式就是G-S迭代法

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Cause Saidali##

Gauss-Seidenza (

形式推

#### 収或性理に

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的验 近收敛速度 • 如果 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在,松弛迭代格式可以写为

$$x_{k+1} = L_{\omega}x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

其中

$$L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$$

称为松弛迭代格式的迭代矩阵

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代)

Gauss-SeidelÆ10

#### dbr Δbr bel- τπι 2

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型何题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的游 证效效速度 • 如果 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在,松弛迭代格式可以写为

$$x_{k+1} = L_{\omega}x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

其中

$$L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$$

称为松弛迭代格式的迭代矩阵

• 注意:  $(D - \omega L)^{-1}$ 为下三角矩阵,  $((1 - \omega)D + \omega U$ 为上三角矩阵

# 收敛定理

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

lle Ale Me TIII à

权权的允安求什

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

acobi迭代法和G-S迭代法的部 近收敛速度

## 定理

SOR选代法收敛的充分必要条件是

$$\rho(L_{\omega}) < 1$$

## 定理

SOR选代法收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2$ 

第一个定理显然。下面证明第二个

# $0 < \omega < 2$ 的证明

## 线性方程组的古典迭

• 迭代法收敛,所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$ 

## $0 < \omega < 2$ 的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel洪代》

形式推

#### 収敛性埋7

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

• 迭代法收敛, 所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$ 

$$|\det L_{\omega}| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1$$

## $0 < \omega < 2$ 的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计 Incobite 伊達和C S连伊達的

致性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 迭代法收敛, 所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$

$$|\det L_{\omega}| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1$$

• 注意到

$$L_{\omega} = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1 - \omega)I + \omega D^{-1}U),$$
  

$$\det((1 - \omega)I + \omega D^{-1}U) = (1 - \omega)^{n},$$
  

$$\det(I - \omega D^{-1}L)^{-1} = 1$$

邓建松

#### 单先线性定常铁代法

Incobist 作注

Communication (Park

TT - 15 4 15 .

#### 收敛性理论

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

梅刑品腳

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近此幼迪度

### • 从而有

$$|\det L_{\omega}|=|(1-\omega)^n|<1$$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Communication (Part

Tre - In Alb.

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

快坐回應

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

### • 从而有

$$|\det L_{\omega}|=|(1-\omega)^n|<1$$

• 即 $|1 - \omega| < 1$ ,也就是 $0 < \omega < 2$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代流

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代》 形式推广

#### 收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 从而有

$$|\det L_{\omega}| = |(1-\omega)^n| < 1$$

- 即 $|1 \omega| < 1$ ,也就是 $0 < \omega < 2$
- 这个结果说明,要使SOR迭代法收敛,必须选取收敛因子 $\omega \in (0,2)$

## 充分条件:对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭色

Gauss-Saidal 法保証

00000

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

### 定理

若系数矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,且松弛因子 $\omega \in (0,1)$ ,则SOR迭代法收敛

## 证明关键

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

形式推

#### 收敛性埋诉

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

The second secon

Jacobi迭代法和G-S迭代法的) 近數效速度 •  $\mathfrak{P}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

## 证明关键

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭化

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

収缴的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近此效速度 •  $\mathfrak{P}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

• 根据三角不等式:

$$|\lambda + \omega - 1| \ge |\lambda| - (1 - \omega)$$
  
=  $|\lambda|\omega + (|\lambda| - 1)(1 - \omega) \ge |\lambda|\omega$ 

## 证明关键

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代》

Jacobi迭位

Gauss-Seidel迭代

102(1tt)

#### 1人3人工生化

以政的允安來什

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 •  $\mathbb{R}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

• 根据三角不等式:

$$|\lambda + \omega - 1| \ge |\lambda| - (1 - \omega)$$
$$= |\lambda|\omega + (|\lambda| - 1)(1 - \omega) \ge |\lambda|\omega$$

• 所以 $D - \omega L$ ,  $(\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U$  都是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,从而是非奇异的

# 充分条件: 对称正定

线性方程组的古典铁

## 定理

若系数矩阵A是实对称的正定矩阵, 当 $0 < \omega < 2$ 时,SOR方法收敛

根据该定理可知, 当A对称正定时, G-S决 代法收敛

## 证明

## 线性方程组的古典铁

• 设λ是L。的任一特征值 (可以是复数), x为对 应的特征向量,则(注意 $L^T = U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda(D - \omega L)x$$

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 形式推广

#### 収敛性理算

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度 • 设 $\lambda$ 是 $L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T}=U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda(D - \omega L)x$$

● 左乘x的共轭转置向量x\*:

$$x^*((1-\omega)D + \omega L^T)x = \lambda x^*(D - \omega L)x$$

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理i

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的# 敛性

#### 收敛速度

十均收數速度和附近收數速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 • 设 $\lambda$ 是 $L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T}=U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda (D - \omega L)x$$

● 左乘x的共轭转置向量x\*:

$$x^*((1-\omega)D + \omega L^T)x = \lambda x^*(D - \omega L)x$$

•  $\Leftrightarrow x^*Dx = \delta, x^*Lx = \alpha + i\beta, M$  $f(x^*L^Tx) = \alpha - i\beta$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

TE = 2 Mr.

#### 收敛性理论

Alle Ale Ale electe

此效的本公条件基果的社

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的) 近收敛速度

### • 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

## 线性方程组的古典铁

### 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

• 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

• 两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

• 右侧的分子和分母相减,得 到 $\omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

#### 收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

• 两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

- 右侧的分子和分母相减,得 到 $\omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)$
- 当A正定时 $\delta > 0$ ,  $\delta 2\alpha = x^*Ax > 0$ , 所以 当 $0 < \omega < 2$ 时 $|\lambda| < 1$ , 即SOR迭代法收敛

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代》

形式排

收敛性理に

収敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

T POTANCE COMPACTANCE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • SOR迭代法的谱半径依赖于ω

## 线性方程组的古典铁

- SOR迭代法的谱半径依赖于ω
- 如何选取恰当的ω, 从而使得收敛速度最快?

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel选代

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的诊 近收敛速度

- SOR迭代法的谱半径依赖于ω
- 如何选取恰当的ω, 从而使得收敛速度最快?
- 为此我们考虑特征值问题 $L_{\omega}x = \lambda x$ , 即

$$((\lambda - 1 + \omega)D - \lambda \omega L - \omega U)x = 0$$

## 线性方程组的古典铁

- SOR迭代法的谱半径依赖干ω
- 如何选取恰当的ω,从而使得收敛速度最快?
- 为此我们考虑特征值问题 $L_{i}x = \lambda x$ . 即

$$((\lambda - 1 + \omega)D - \lambda \omega L - \omega U)x = 0$$

• 回忆:  $L_{\omega}$ 的所有特征值相乘等于 $(1-\omega)^n$ , 所以 当 $\omega$  ≠ 1时无零特征值

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

40° mil 2 m 100

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收效速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$

$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

## 线性方程组的古典铁

• 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

• 下面分两步讨论问题:

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi选作

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 仅敛性埋<sub>化</sub>

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 近收敛速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

- 下面分两步讨论问题:
  - B与Lω的特征值之间的关系

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

- 下面分两步讨论问题:
  - $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系
  - $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 变化的情况

## $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi选行

Gauss-Saidal 洪州

形式維

收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流

• 当 $\lambda \neq 0$ 时,作变换 $u_{ij} = (\pm \lambda^{1/2})^{i+j} v_{ij}$ ,则有 $\mu v_{ij} - \frac{1}{2} (v_{i-1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1}) = 0,$ 其中 $\mu = \pm \frac{\lambda + \omega - 1}{(\lambda^{1/2})^{1/2}}$ 

# $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobius代法

Gauss-Seidel迭代

収歇 [正程]

权政的允安来任

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

平均收敛速度和

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 当 $\lambda \neq 0$ 时,作变换 $u_{ij} = (\pm \lambda^{1/2})^{i+j} v_{ij}$ ,则有

$$\mu v_{ij} - \frac{1}{2}(v_{i-1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1}) = 0,$$

其中
$$\mu = \pm \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega^{\lambda^{1/2}}}$$

• 当 $\omega \neq 1$ 时,若 $\lambda \in L_{\omega}$ 的特征值,则由

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \mu^2 \omega^2 \lambda$$

确定的两个 $\mu$ 都是B的特征值,反之亦然

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

C 1 126 /026

#### 收敛性理证

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

横刑品腳

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$ 



## 线性方程组的古典迭

- 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$
- 当B的特征值为 $\pm \mu_i$ 时,对应于 $L_1$ 的特征值 为0和 $\mu_i^2$

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi选代法和G-S选代法的产 近收敛速度

- 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$
- 当B的特征值为 $\pm \mu_i$ 时,对应于 $L_1$ 的特征值为0和 $\mu_i^2$
- 回忆:  $\Xi \mu \in B$ 的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值

# $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 变化的情况

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

0 0 11 12 1

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 【敛性埋论

收敛的充要条件

秋秋的几分来TF及庆空间日

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟 近收敛速度 • 设 $0 \le \mu < 1$ 是B的一个特征值, $0 < \omega < 2$ ,则由方程

$$\lambda + \omega - 1 = \pm \mu \omega \lambda^{1/2}$$

可得 $L_{\omega}$ 的两个特征值分别是

$$\lambda_{+}(\omega,\mu) = \left(\frac{\mu\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^{2} - (\omega - 1)}\right)^{2},$$

$$\lambda_{-}(\omega,\mu) = \left(\frac{\mu\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^2 - (\omega - 1)}\right)^2,$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Gauss-Seidel读代法

形式排

#### 收敛性理说

illy Aly Aly 2c and 42

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的II

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐沂收敛速

T POTANCIAL DETERMINATION ACCES

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式性性

#### **女敛性理**论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

• 分析细节忽略

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理i

収敛的充分条件及

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

- 分析细节忽略
- 结论: 随着 $\omega$ 从0开始增加, $\rho(L_{\omega})$ 减少,直至

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}$$

 $\mathrm{H}\rho(L_{\omega})$ 达到极小,然后开始变大。这个 $\omega$ 称为最佳松弛因子

当ω取上述最佳松弛因子时,我们有

$$egin{aligned} R_{\infty}(L_{\omega}) &= -\ln 
ho(L_{\omega}) \ &= -\ln rac{1-\sqrt{1-
ho(B)^2}}{1+\sqrt{1-
ho(B)^2}} \ &= -\ln rac{1-\sin h\pi}{1+\sin h\pi} \sim 2h\pi, h 
ightarrow 0 \end{aligned}$$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Soidal读程:

Gauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理记

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 当ω取上述最佳松弛因子时,我们有

$$egin{aligned} R_{\infty}(L_{\omega}) &= -\ln 
ho(L_{\omega}) \ &= -\ln rac{1-\sqrt{1-
ho(B)^2}}{1+\sqrt{1-
ho(B)^2}} \ &= -\ln rac{1-\sin h\pi}{1+\sin h\pi} \sim 2h\pi, h 
ightarrow 0 \end{aligned}$$

SOR迭代法要比Jacobi迭代法和G-S迭代法快得多!