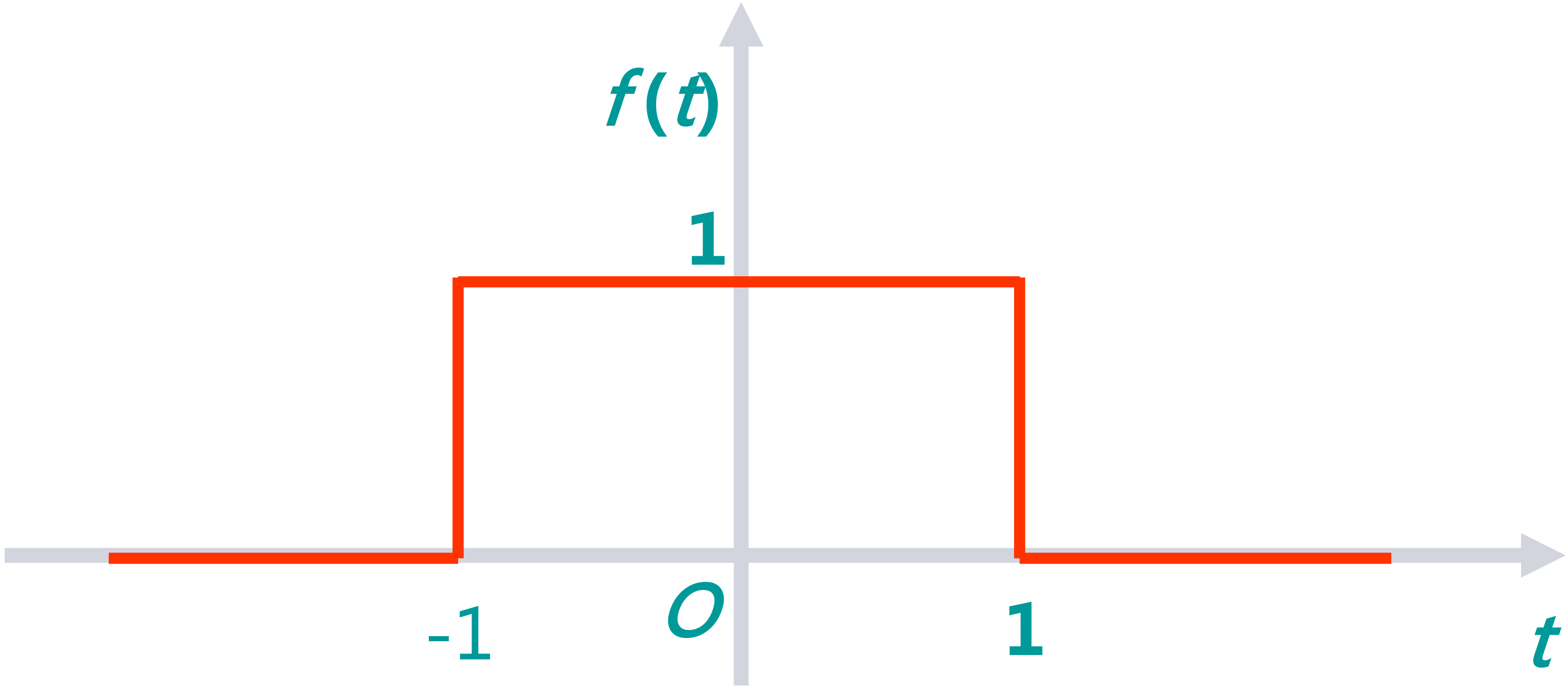
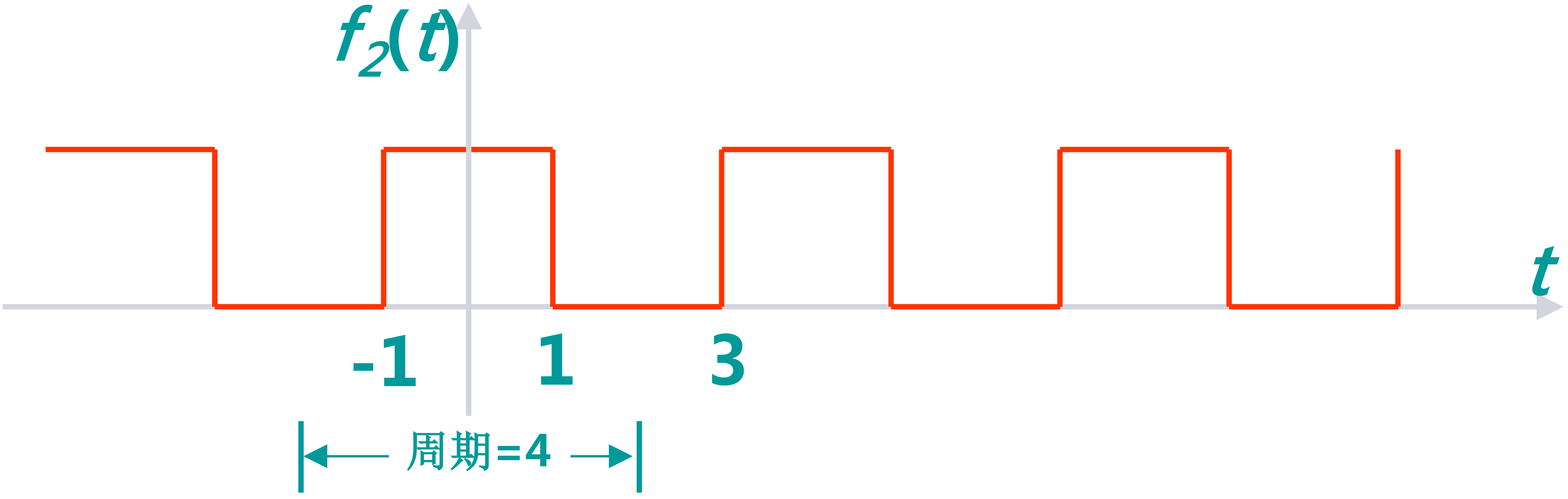
$L^1(R)$上的傅里叶变换

矩形脉冲函数

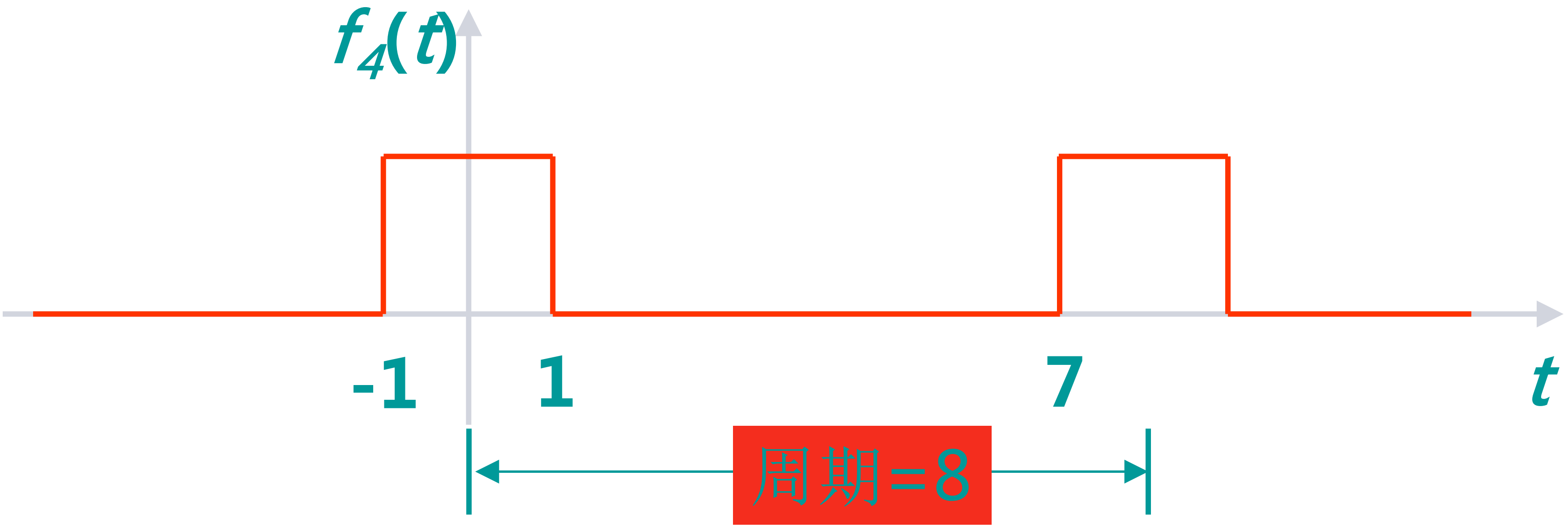
$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ 0, & else. \end{cases},$$

$$f_T(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ 0, & [-T,-1] \cup [1,T]. \end{cases}.$$


f(t)
1
-1
O
1
t



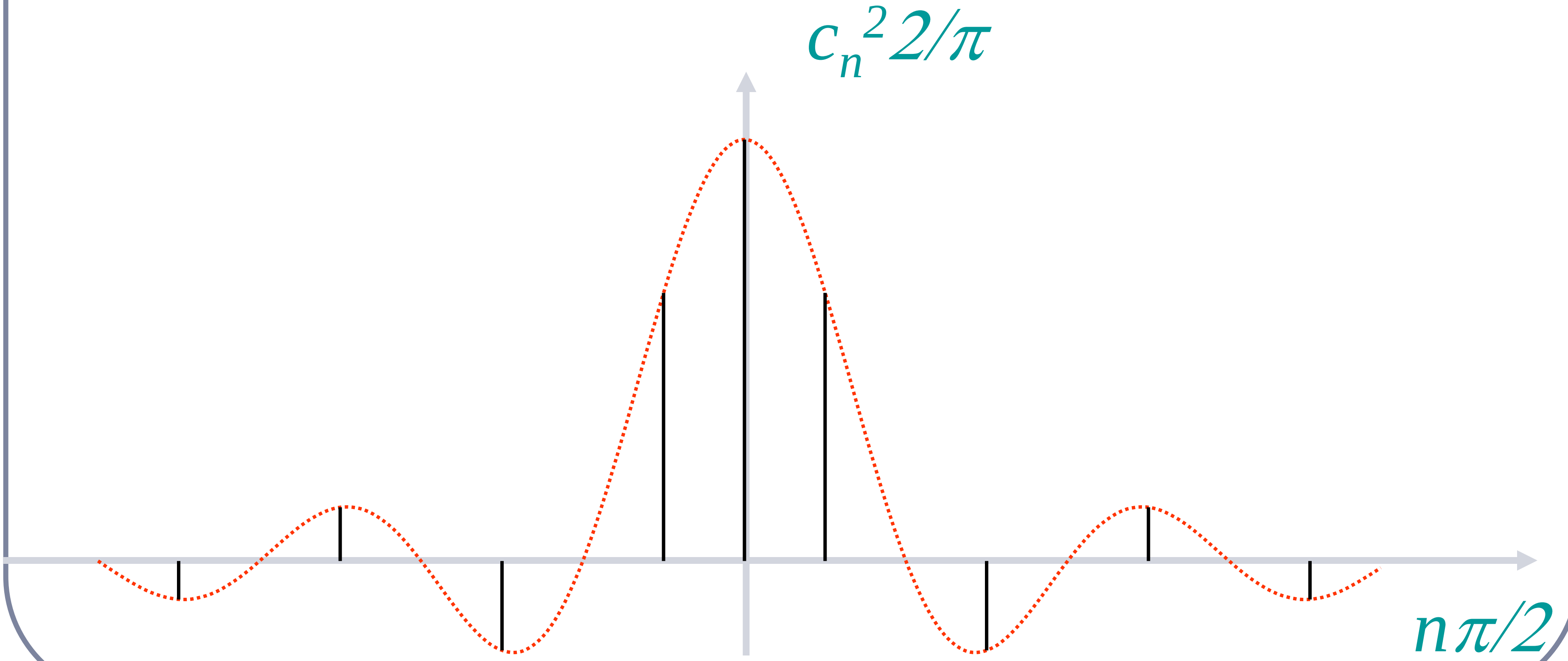
$f_2(t)$
t
-1
1
3
周期=4

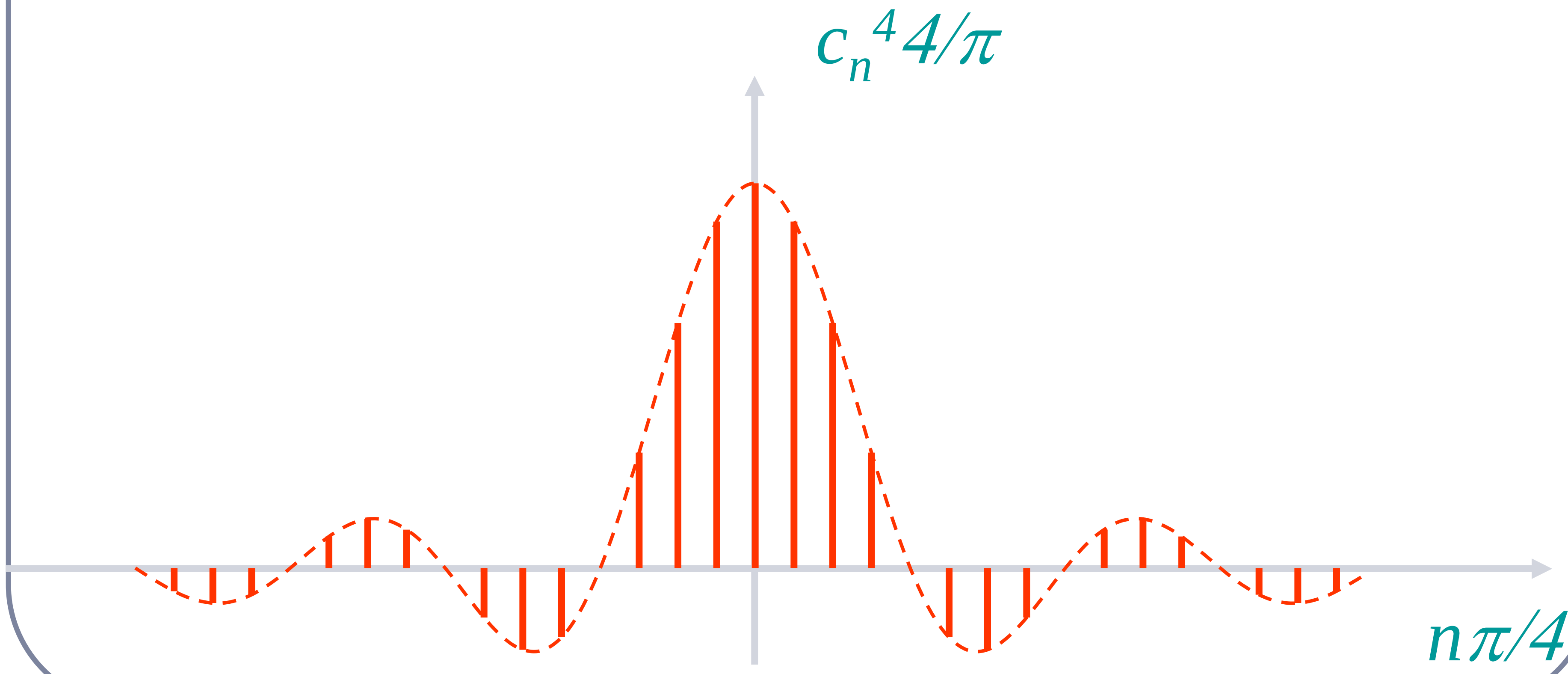

$f_4(t)$
-1
1
7
t
周期=8

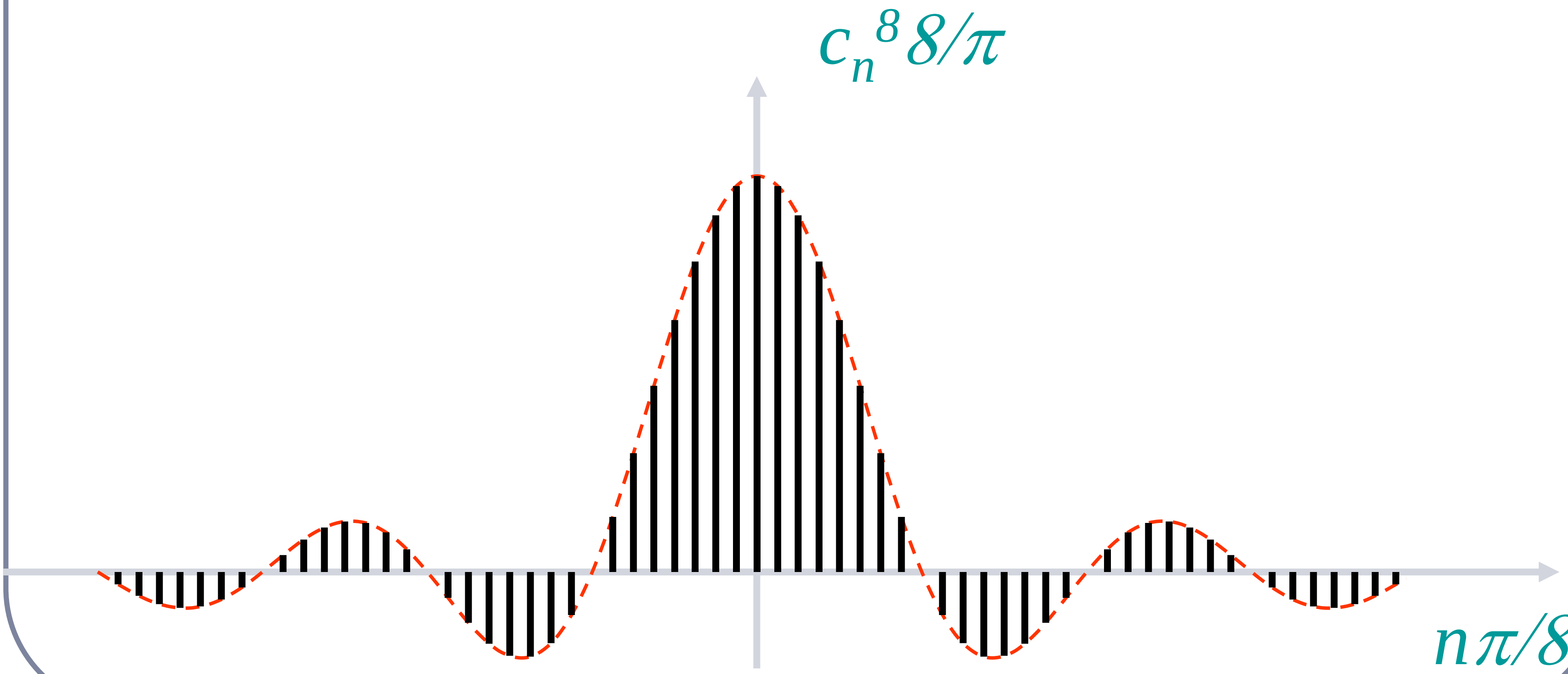
傅里叶级数

$$
\begin{aligned}
c_n^T &= \frac{1}{2T}\int_{-1}^{1} e^{-iw_n^T x}dx \\
&= \frac{1}{T}\frac{\sin(w_n^T)}{w_n^T},
\end{aligned}
$$

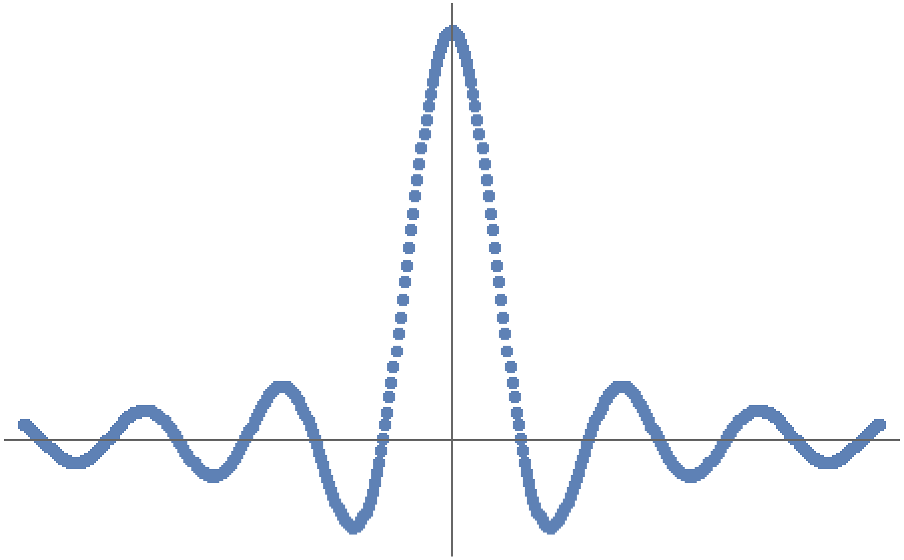
这里$w_n^T = \frac{n\pi}{T}$，$c_0^T = \frac{1}{T}$。

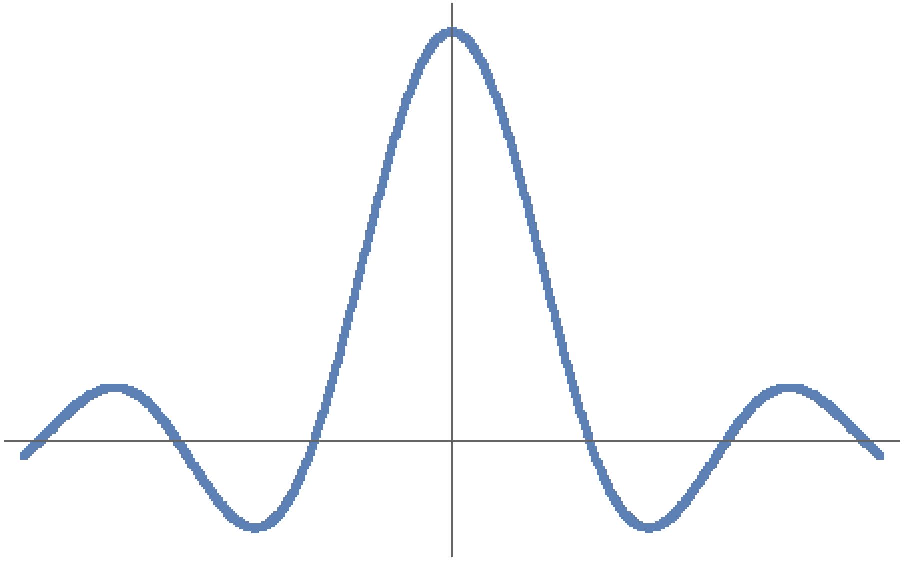

$c_n^2 2/\pi$
$n\pi/2$


$c_n^4 4/\pi$
$n\pi/4$



$c_n{}^8 8/\pi$
$n\pi/8$





重新计算傅里叶级数

- 给定一个非周期函数f(x)
- 定义函数$f_T(x)$是f(x)在[-T,T]上延拓后的周期为2T的周期函数
- 将$f_T(x)$展开成傅里叶级数

$$f_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{i\frac{k\pi x}{T}}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\frac{k\pi t}{T}} dt$$

- 代入，并令周期趋向无穷，有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{T\to\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-i\frac{k\pi t}{T}}dt\right)e^{i\frac{k\pi x}{T}}\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{i\frac{k\pi(x-t)}{T}}dt\right]
\end{aligned}
$$

令$\lambda_k=\frac{k\pi}{T}$, $\Delta\lambda=\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\pi}{T}$，有

$$
f(x)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(t)e^{i\frac{k\pi(x-t)}{T}}dt\right]\Delta\lambda
$$

- 记 $F_T(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-T}^{T}f(t)e^{i\frac{k\pi(x-t)}{T}}dt,$

则

$$f(x)=\lim_{T\to\infty}F_T(\lambda)\Delta\lambda=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_T(\lambda)d\lambda.$$

另一方面，当$T\to\infty$，$F_T(\lambda)$即为积分$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\frac{k\pi(x-t)}{T}}dt$，因此有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}dtd\lambda.$$

记

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

称之为函数$f(t)$的傅里叶变换。在本书中，我们有时也会用一个新的记号

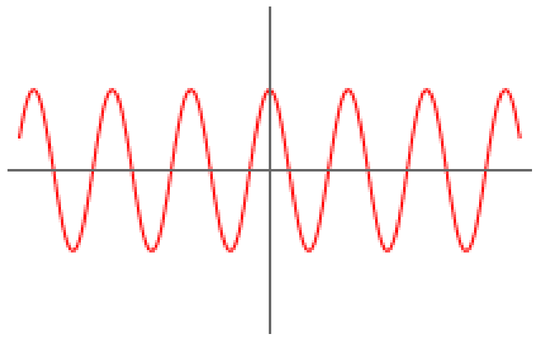
$$\mathfrak{F}[f](\lambda)=\hat{f}(\lambda).$$

傅里叶变换

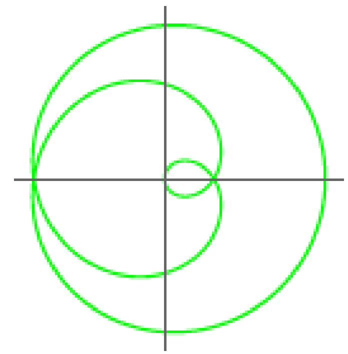
傅里叶变换的计算是具有非常明确的几何意义。假设$f(t)$是一个实值函数，固定λ，记

$$x_\lambda(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t)\cos\lambda t,\quad y_\lambda(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t)\sin\lambda t,$$

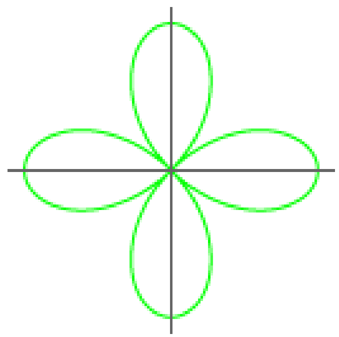
则$(x_\lambda(t),y_\lambda(t))$对应参数$t$的一条参数曲线。



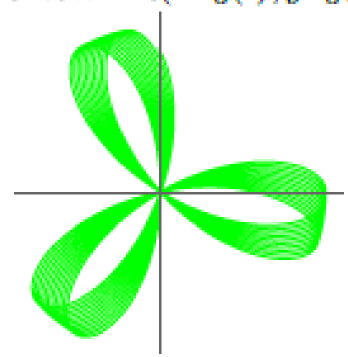
a. 函数$f(x)$



b. 参数曲线$(x_{-3}(t), y_{-3}(t))$



c. 参数曲线$(x_{-0.5}(t), y_{-0.5}(t))$

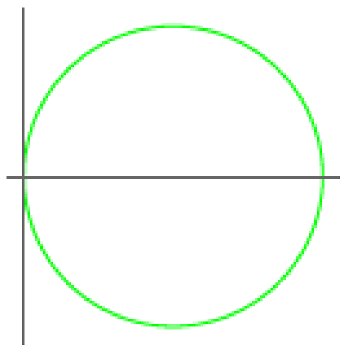


d. 参数曲线$(x_{-0.33}(t), y_{-0.33}(t))$

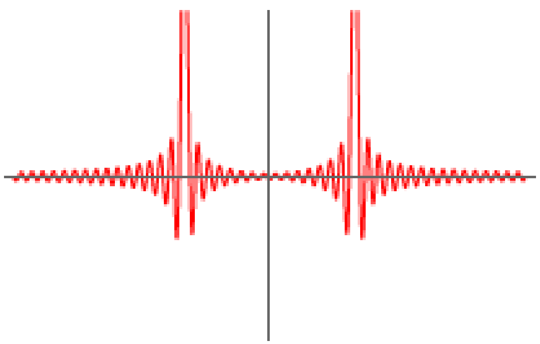
注意到傅里叶变换可以写成

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_{-\lambda}(t)dt + i\int_{-\infty}^{\infty} y_{-\lambda}(t)dt$$

即傅里叶变换的实部和虚部正比于参数曲线$(x_{-\lambda}(t), y_{-\lambda}(t))$围成区域的重心的$x$和$y$



e. 参数曲线$(x_{-1}(t), y_{-1}(t))$

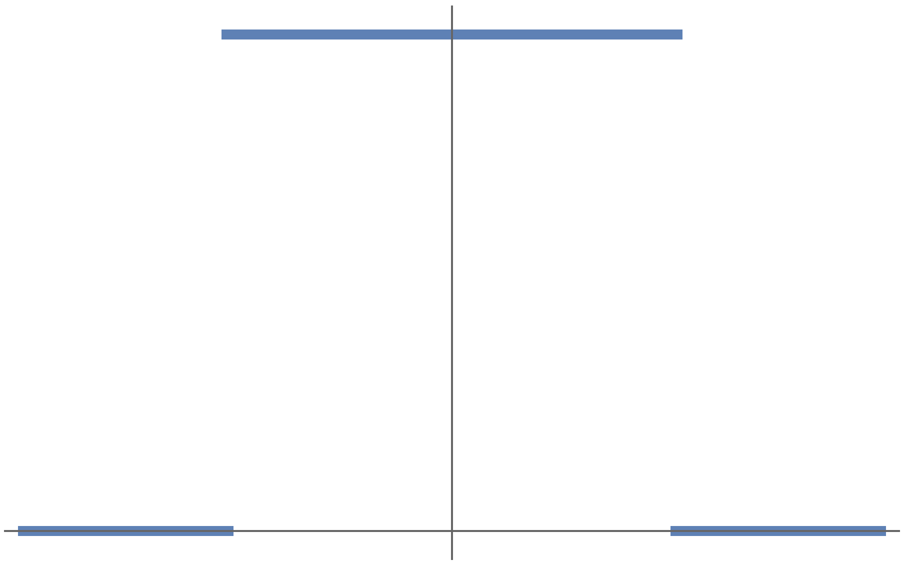


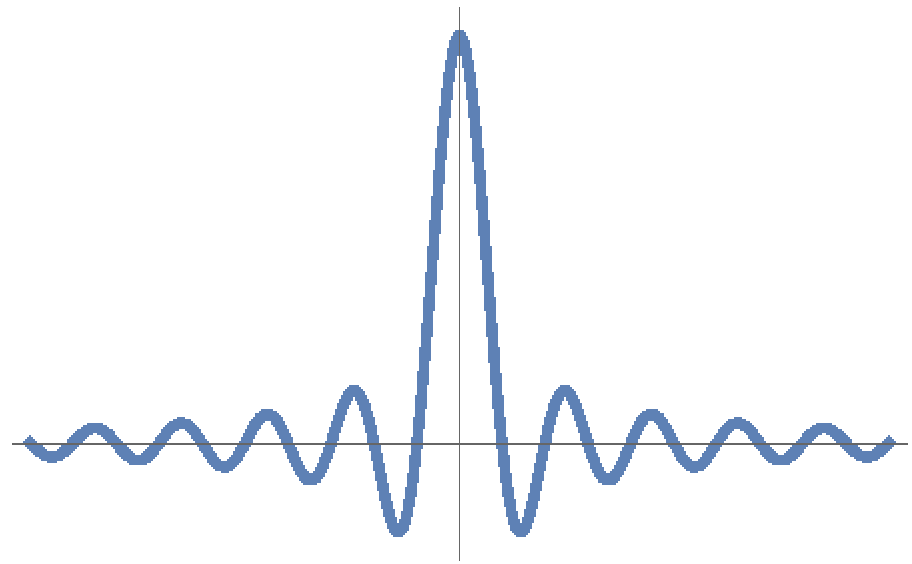
f. 函数的傅里叶变换

例子

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & else.\end{cases}$$

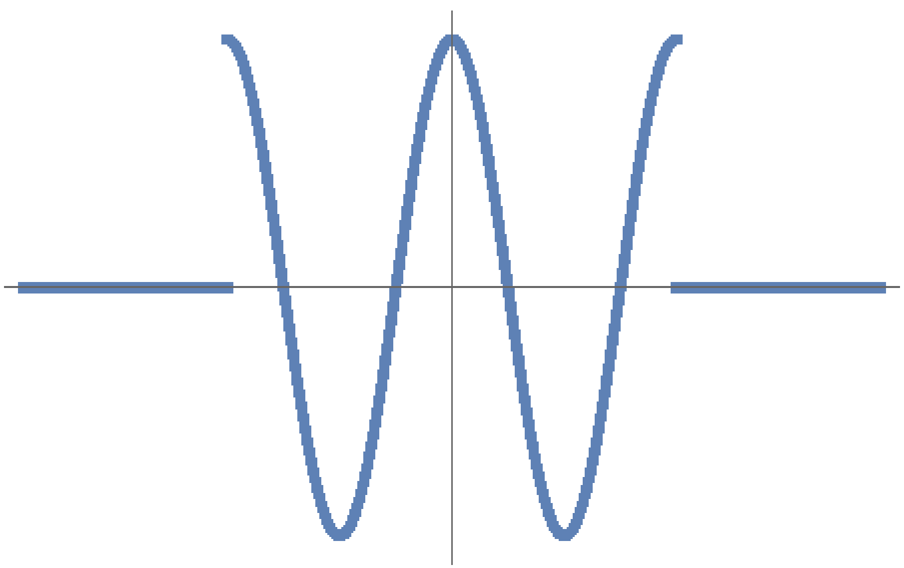
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda x\\ &= \frac{\sqrt{2}\sin\lambda\pi}{\sqrt{\pi}\lambda}\end{aligned}$$

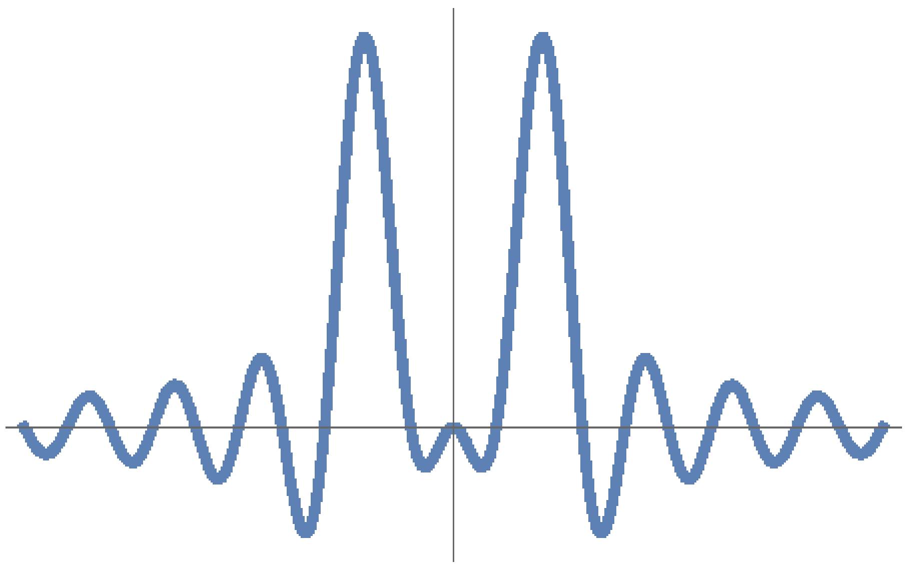




$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & -\pi \le x \le \pi; \\ 0, & else. \end{cases}$$

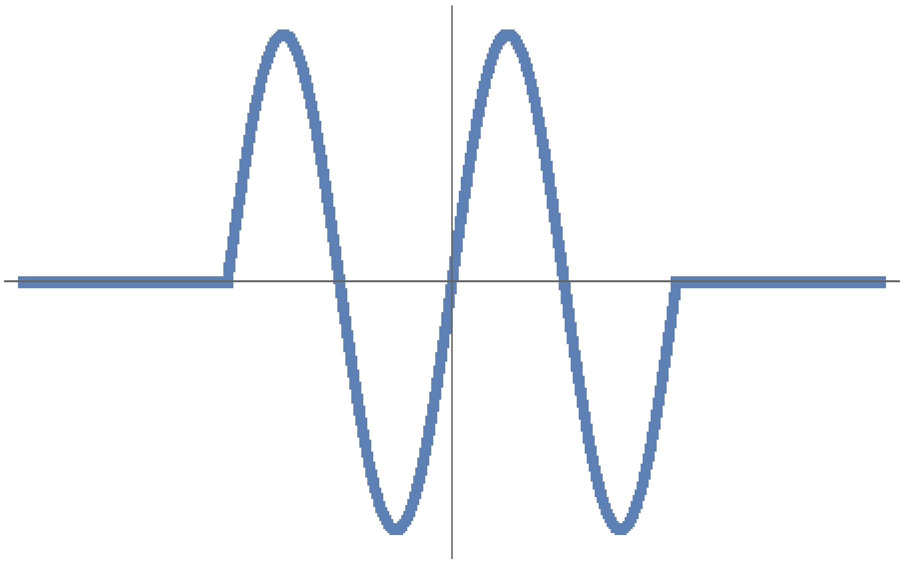
$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2x \cos \lambda x \\
&= \frac{\sqrt{2} \sin \lambda\pi}{\sqrt{\pi}(4-\lambda^2)}
\end{aligned}$$

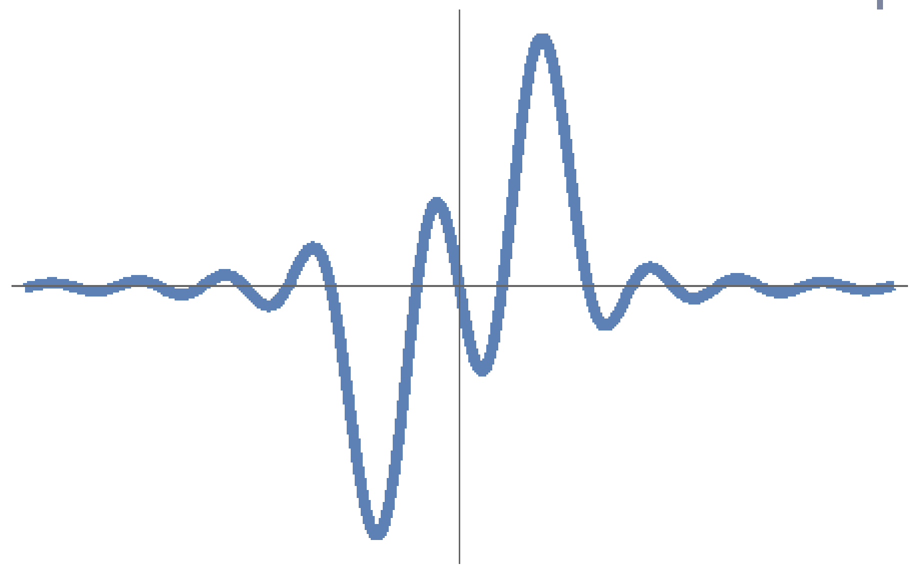




$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & -\pi \leq x \leq \pi; \\ 0, & else. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i \sin 2x \sin \lambda x \\ &= \frac{-2\sqrt{2} i \sin \lambda \pi}{\sqrt{\pi}(4 - \lambda^2)} \end{aligned}$$





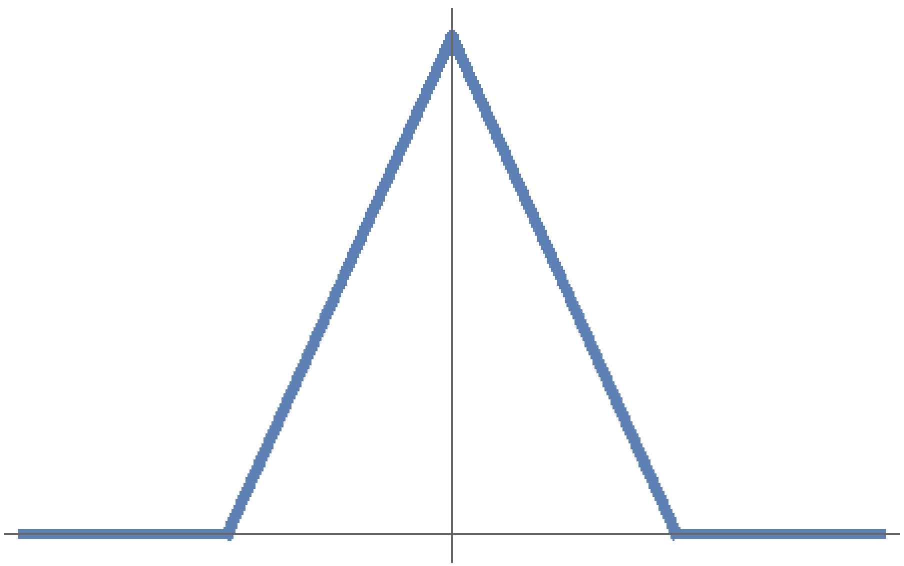
$$f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi \le x \le 0; \\ \pi - x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & else. \end{cases}$$

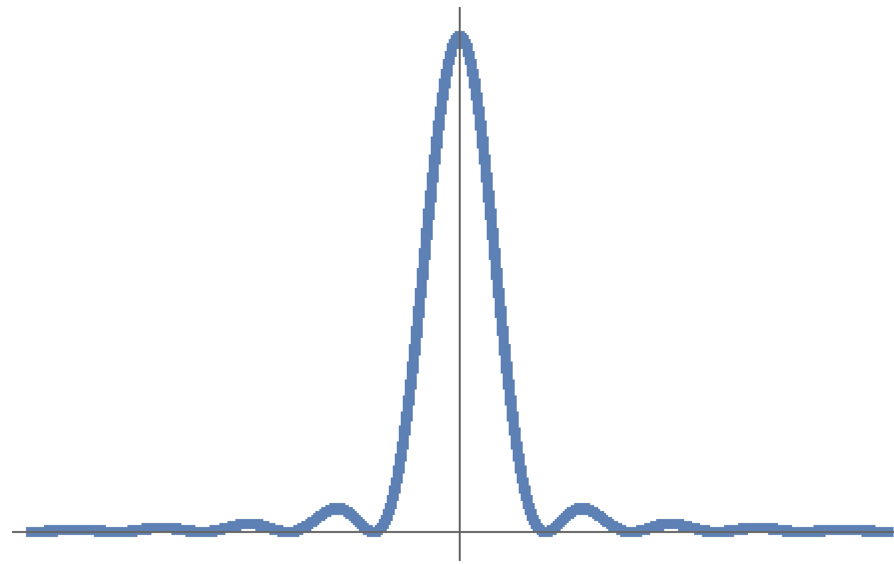
$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(\lambda x) dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x)(\pi - x) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi} \sin(\lambda x) dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-\cos(\lambda\pi)}{\lambda^2}$$

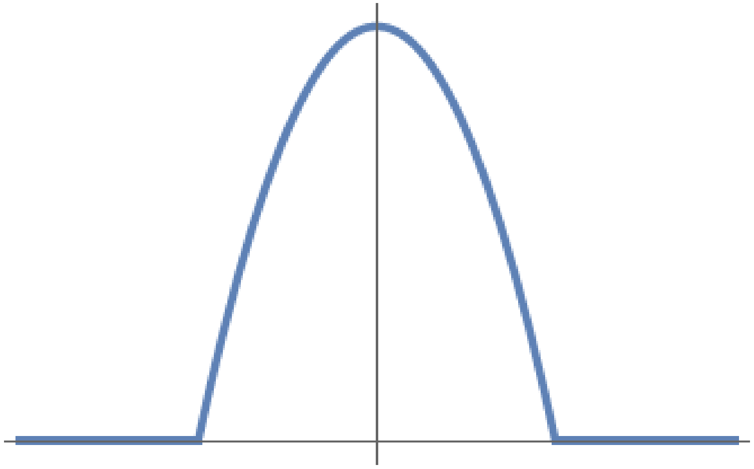


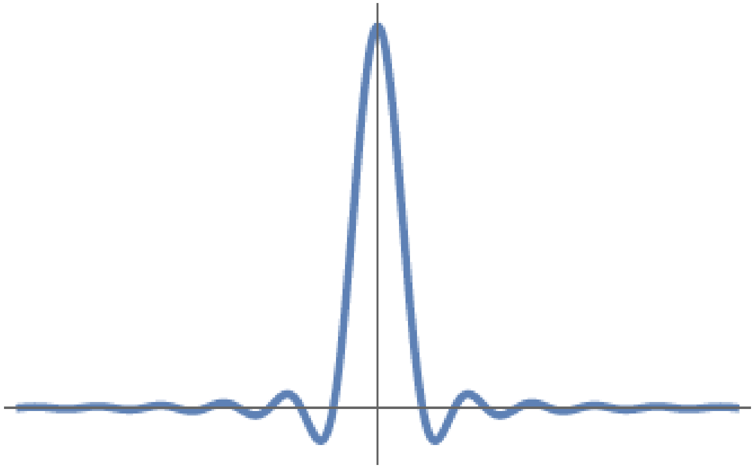


例 3.6 计算

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & else. \end{cases} \tag{3.10}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1-x^2) e^{-i\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} (1-x^2) \Big|_{x=-1}^{1} - \frac{2}{i\lambda} \int_{-1}^{1} x e^{-i\lambda x} dx \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i\lambda} \left(\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} x \Big|_{x=-1}^{1} + \frac{1}{i\lambda} \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda x} dx \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i\lambda} \left(\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} \left(x + \frac{1}{i\lambda} \right) \Big|_{x=-1}^{1} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i\lambda} \left(\frac{e^{-i\lambda}(1+\frac{1}{i\lambda}) - e^{i\lambda}(-1+\frac{1}{i\lambda})}{-i\lambda} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4\cos\lambda}{\lambda^2} - \frac{4\sin\lambda}{\lambda^3} \right)
\end{aligned}
$$





例 **3.7** 计算e^{-ax^2}的傅里叶变换$g(\lambda)$。

$$
\begin{aligned}
g(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-\left(ax^2+i\lambda x\right)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-a\left(x+\frac{i\lambda}{2a}\right)^2-\frac{\lambda^2}{4a}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_R e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{i\lambda}{2\sqrt{a}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_R e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{a}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{a\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}
\end{aligned}
$$

我们有

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} = \mathfrak{F}[e^{-ax^2}](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx,$$

$$\begin{aligned} e^{-ax^2} &= \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}e^{-i\lambda x}d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}e^{i\lambda x}d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \end{aligned}$$

在上面的推导中，由$f(x)$的定义知

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

即$f(x)$可以表示成傅里叶变换$\hat{f}(\lambda)$的积分形式，这个称为傅里叶逆变换，

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\mathfrak{F}[f]\right]=f$$

这个论述的严格描述可以概括为下面的定理。

定理 3.1 如果$f(t)\in L^1(R)$，$\hat{f}(\lambda)\in L^1(R)$，则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

证明 利用$\hat{f}(\lambda)$的表达式可得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}dtd\lambda$$

由于$f(t)e^{i\lambda(x-t)}$在R^2上不可积，不能直接用Fubini定理，所以，我们用$e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}$ 去乘以$f(t)e^{i\lambda(x-t)}$。注意到当ϵ趋向0时，$e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}$趋向1。定义

$$I_\epsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}e^{i\lambda(x-t)}dt\right)d\lambda \tag{3.11}$$

利用Fnbini定理，我们采用两种不同的方法计算$I_\epsilon(x)$。将上式对t求积分得到

$$I_\epsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.12}$$

因为$\left|\hat{f}(\lambda)e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}e^{i\lambda x}\right|\leq|\hat{f}(\lambda)|$，而且$\hat{f}(\lambda)$可积，应用控制收敛定理可得

$$\lim_{\epsilon\to 0}I_\epsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.13}$$

另一方面，应用Fubini定理对λ积分可得

$$I_\epsilon(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_\epsilon(x-t)f(t)dt \tag{3.14}$$

其中$g_\epsilon(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iu\lambda}e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}d\lambda$。由例子3.7可知：

$$g_\epsilon(u)=\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}e^{-\frac{u^2}{\epsilon^2}}.$$

从而，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|I_\epsilon(x)-f(x)|\,dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int\int g_\epsilon(x-t)\,|f(x)-f(t)|\,dxdt=0$$

再利用式子3.13即可证明定理。 #

引理 3.1 如果$f(x)\in L^1(R)$且连续，则当α趋向零时，

$$\int_R g_\alpha(x-t)f(t)dt=f(x),$$

其中$g_\alpha(u)=\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}$。

FT and IFT

$L^1(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换

- $L^1(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上可积函数全体, 即

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty \right\}.$$

- 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 其 Fourier 变换定义为

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

其 Fourier 逆变换定义为

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

傅里叶变换的性质

- 假设$f \in L^1(\mathbb{R})$, 则其 Fourier 变换满足

(1) $\lim\limits_{|\lambda|\to+\infty} \mathcal{F}[f](\lambda) = 0.$

(2) $\mathcal{F}[f]$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(3) $|\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$; 进一步, $\mathcal{F}[f]$ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 到 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子.

证明

(1) Riemann-Lebesgue 引理 假设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty.$$

(2) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}[f](\lambda+h) - \mathcal{F}[f](\lambda)| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(e^{-i(\lambda+h)t} - e^{-i\lambda t})dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}(e^{-iht} - 1)dt\right| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{-iht} - 1|dt \to 0, \quad h \to 0.
\end{aligned}$$

(3) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}[f](\lambda)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1.
\end{aligned}$$

注意到，给定一个函数$f(t)\in L^1(R)$，它的傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}[f](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t) \\
&\doteq R(\lambda) - I(\lambda)i
\end{aligned}
$$

记$|\mathfrak{F}[f](\lambda)| = \sqrt{R^2(\lambda)+I^2(\lambda)}$，它被称为傅里叶变换的振幅，$\varphi(\lambda) = \arctan\left(\frac{I(\lambda)}{R(\lambda)}\right)$，它被称为傅里叶变换的相位。

如果$f(t)$是一个实值函数，则

$$R(-\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(-\lambda t)dt=R(\lambda)$$

$$I(-\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(-\lambda t)dt=-I(\lambda)$$

所以，振幅是一个偶函数，而相位是一个奇函数。进一步的，如果$f(t)$是一个实的偶函数，则$I(\lambda)=0$，从而它的傅里叶变换就是一个实的偶函数。如果$f(t)$是一个实的奇函数，则$R(\lambda)=0$，从而它的傅里叶变换就是一个纯虚的奇函数。同样，如果如果$f(t)$是一个纯虚函数，则

$$R(-\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(-\lambda t)dt=-R(\lambda)$$

$$I(-\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(-\lambda t)dt=I(\lambda)$$

即振幅是一个奇函数，而相位是一个偶函数。

1. 傅里叶变换和逆变换是线性算子，即对任意的常数c，有

$$\mathfrak{F}[f+g]=\mathfrak{F}[f]+\mathfrak{F}[g], \mathfrak{F}[cf]=c\mathfrak{F}[f]$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[f+g]=\mathfrak{F}^{-1}[f]+\mathfrak{F}^{-1}[g], \mathfrak{F}^{-1}[cf]=c\mathfrak{F}^{-1}[f]$$

2. 傅里叶变换的导数和导数的傅里叶变换：

定理 3.2 *(a)* 设$f(x), xf(x)\in L^1(R)$，则$\mathfrak{F}[f](\lambda)$可微，并且

$$\mathfrak{F}[xf(x)](\lambda)=i\mathfrak{F}[f]'(\lambda).$$

(b) 如果$f(x)\in L^1(R)$，在任何有界闭区间上绝对连续，且$f'(x)\in L^1(R)$，则

$$\mathfrak{F}[f'(x)](\lambda)=i\lambda\mathfrak{F}[f(x)](\lambda)$$

证明 (a) 考虑差商

$$\frac{\widehat{f}(\lambda+h)-\widehat{f}(\lambda)}{h}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(x)\left(\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right)e^{-ix\lambda}dx \tag{3.15}$$

从而有不等式

$$\left|f(x)\left(\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right)\right|\leq|x||f(x)|\in L^1(R),$$

而且

$$\lim_{h\to 0}f(x)\left(\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right)=-ixf(x).$$

在式子3.15中，令h趋于0并由控制收敛定理有

$$\mathfrak{F}[f]'(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(x)(-ix)e^{-i\lambda x}dx=-i\mathfrak{F}[xf(x)](\lambda).$$

(b) 因为$f(x)$和$e^{-i\lambda x}$绝对连续，且$f'(x)$在R上可积，所以对任意的$A>0$，$B>0$，由分部积分得

$$\int_{-B}^{A} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-B}^{A} + i\lambda\int_{-B}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

下面证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

由于$f(x)$在任何有界闭区间上绝对连续，所以有

$$f(x)-f(0) = \int_0^x f'(u)du$$

又$f'(x)\in L^1(R)$，所以存在c_1，c_2，使得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c_1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = c_2$$

下面证明$c_1=0$。否则，不妨设$c_1>0$，则存在A，使得当$x>A$，$f(x)>\frac{c_1}{2}$，从而当$N>A$，有

$$\int_A^N f(x)dx \geq \frac{c_1}{2}(N-A) \to +\infty,$$

这个和f可积矛盾。同理可证明$c_2=0$。这样就证明了这个定理。

- 假设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$ 有

(1) 平移性: $\mathcal{F}[f(t-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f](\lambda)$

(2) 调制性: $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda - a)$

(3) 伸缩性: $\mathcal{F}[f(bt)](\lambda) = \frac{1}{|b|}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{b}),\ \ b \neq 0$

证明 对于第一个式子，

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(t-a)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\lambda t}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda(t+a)}dt \\ &= e^{-i\lambda a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = e^{-i\lambda a}\mathfrak{F}[f](\lambda)\end{aligned}$$

对于第二个式子，

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[e^{iat}f(t)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-i\lambda t}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\lambda-a)t}dt \\ &= \mathfrak{F}[f](\lambda-a)\end{aligned}$$

证明 如果$b>0$，则

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}[f(bt)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(bt)e^{-i\lambda t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t/b}\frac{1}{b}dt \\
&= \frac{1}{b}\mathfrak{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)
\end{aligned}
$$

同理，如果$b<0$，则

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}[f(bt)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(bt)e^{-i\lambda t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i\lambda t/b}\frac{1}{b}dt \\
&= \frac{1}{-b}\mathfrak{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)
\end{aligned}
$$

从这个公式可以看出，时间的延迟对应到频率的移相。就是说，时间的延迟不会改变信号在频率域的振幅，只是在它对应的相位上移动一个和频率相关的角度。频移特性产生频谱的搬移，也称为调制特性。由

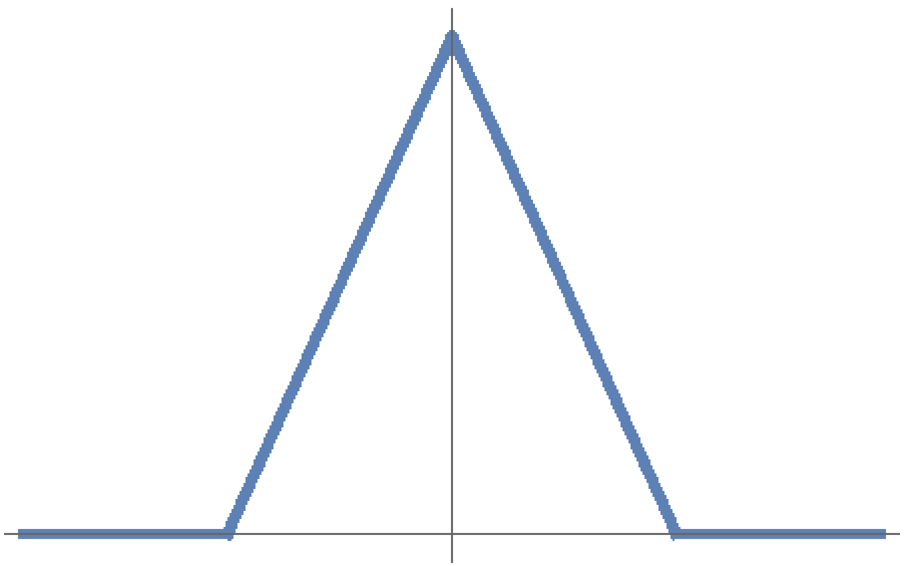
$$\mathfrak{F}[f(t)\cos(\lambda_0 t)] = \mathfrak{F}\left[f(t)\frac{e^{i\lambda_0 t}+e^{-i\lambda_0 t}}{2}\right] = \frac{\mathfrak{F}[f](\lambda-\lambda_0)+\mathfrak{F}[f](\lambda+\lambda_0)}{2},$$

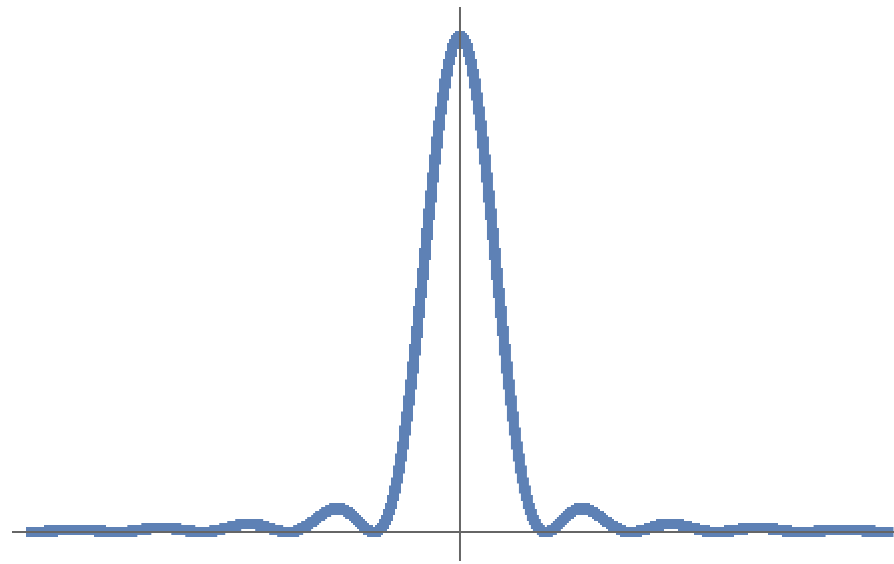
$$\mathfrak{F}[f(t)\sin(\lambda_0 t)] = \mathfrak{F}\left[f(t)\frac{e^{i\lambda_0 t}-e^{-i\lambda_0 t}}{2}\right] = \frac{\mathfrak{F}[f](\lambda-\lambda_0)-\mathfrak{F}[f](\lambda+\lambda_0)}{2},$$

知幅度调制是将信号乘以一高频的正弦或者余弦信号，该过程在时域中表现为信号改变了正弦或余弦信号的幅度，在频域中则使的频谱产生搬移。在幅度调制中，将携带信息的信号称为调制信号，高频的正弦或余弦信号称为载波，两者相乘的信号称为已调信号。

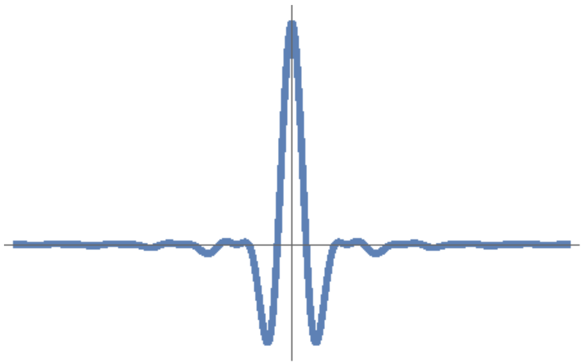
$$f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi \le x \le 0; \\ \pi - x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & else. \end{cases}$$

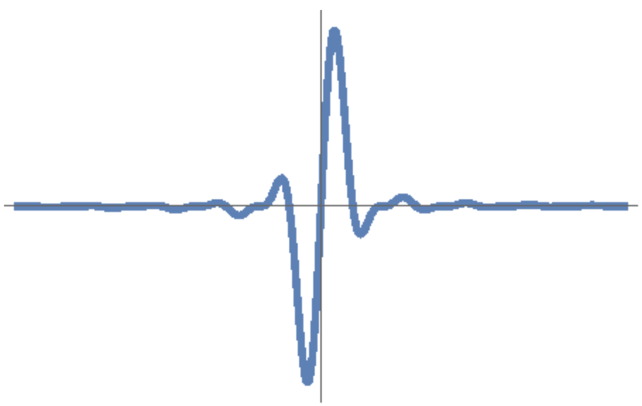
$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{e^{-i\pi t}\left(-1+e^{i\pi t}\right)^2}{\sqrt{2\pi}t^2} \end{aligned}$$

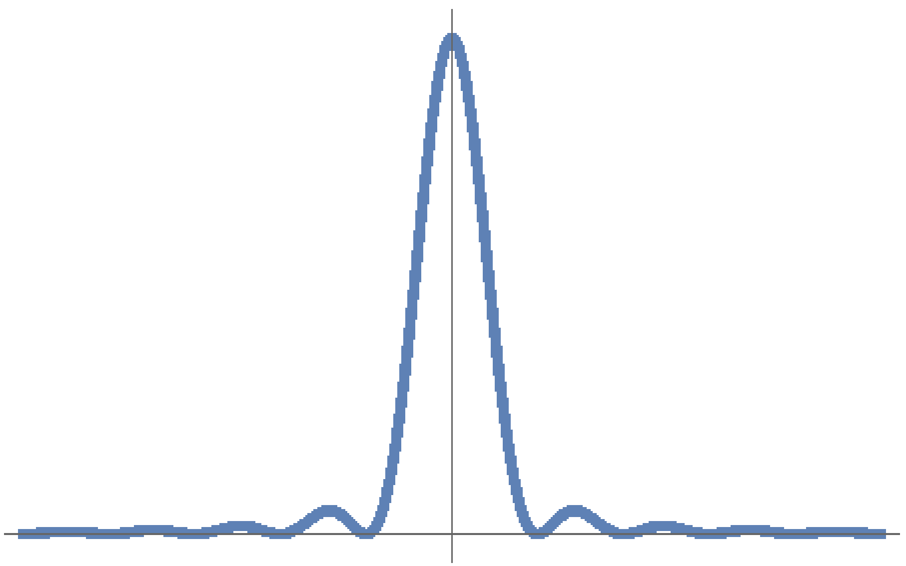




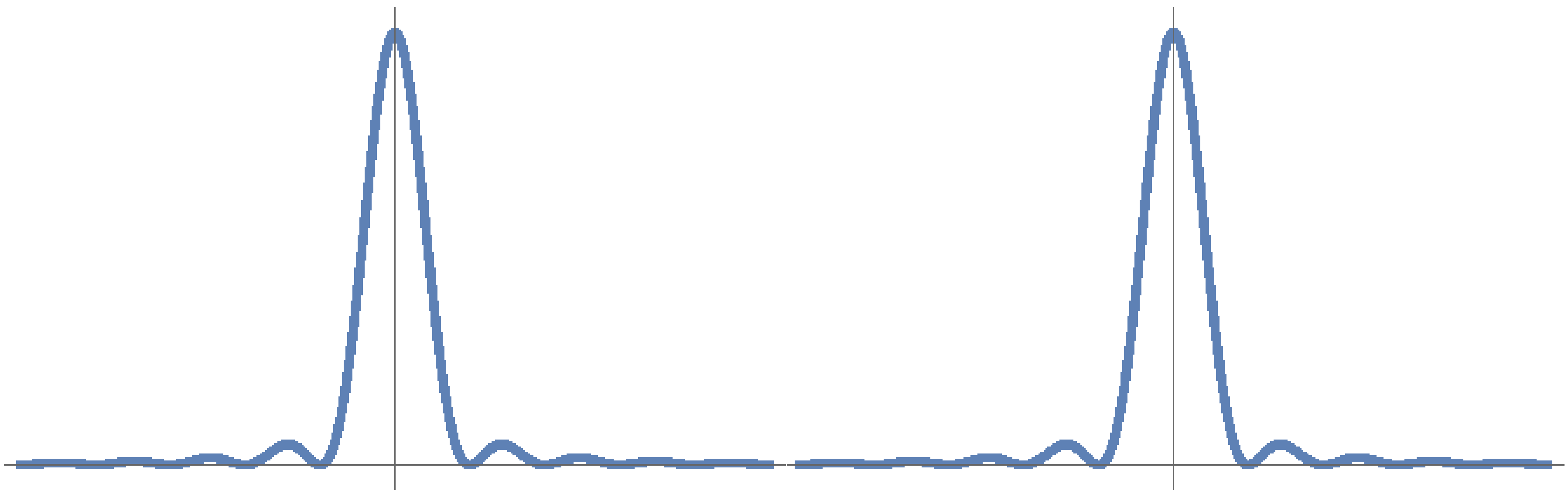
$f(x-3)$ 的傅里叶变换





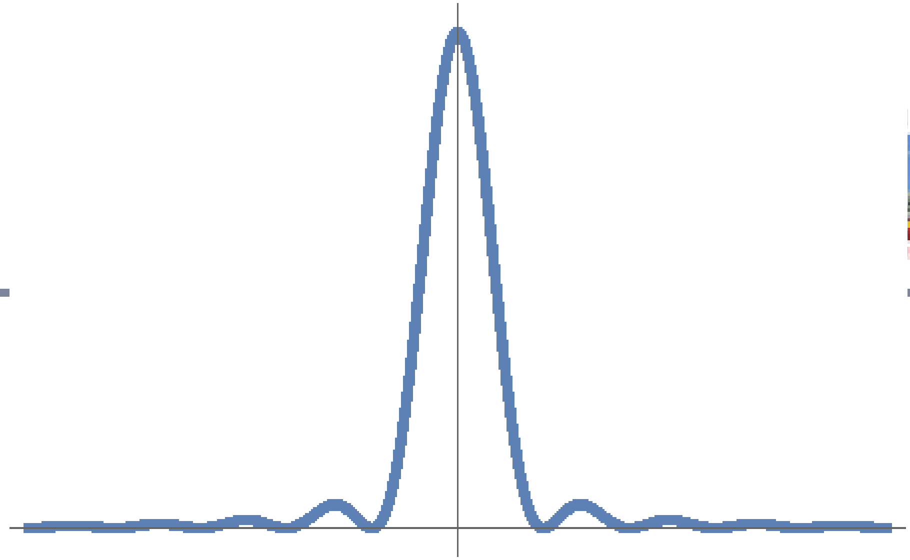


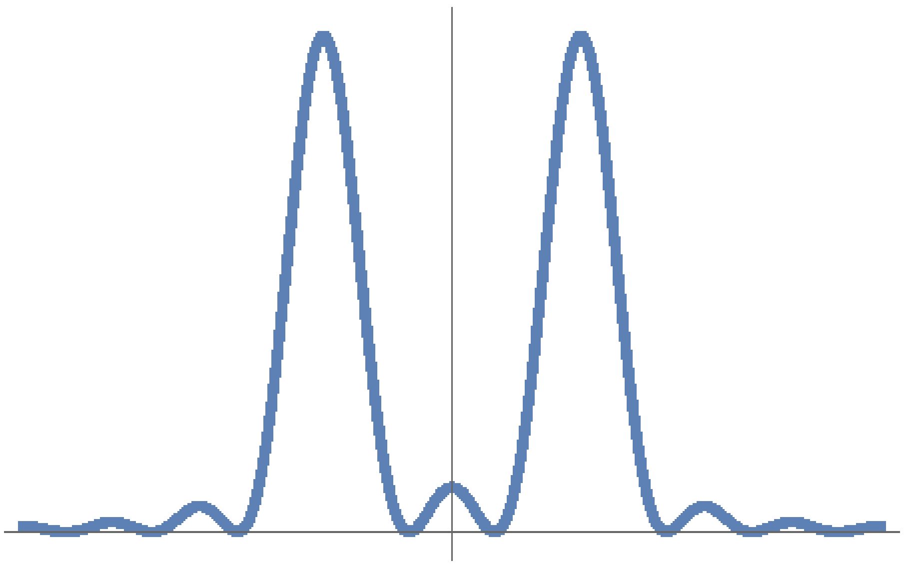
时间的平移



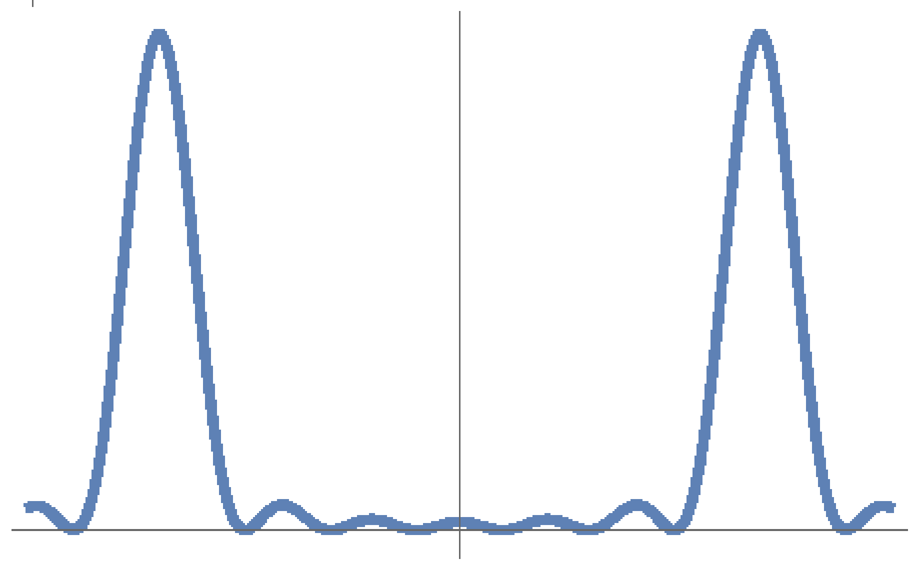
调频

$f(x)$



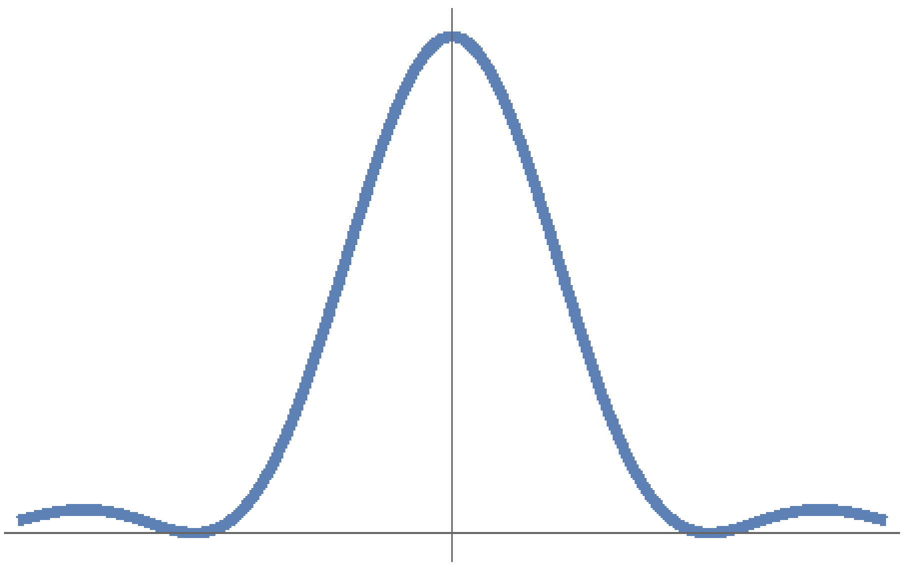


$f(x)\cos(3x)$

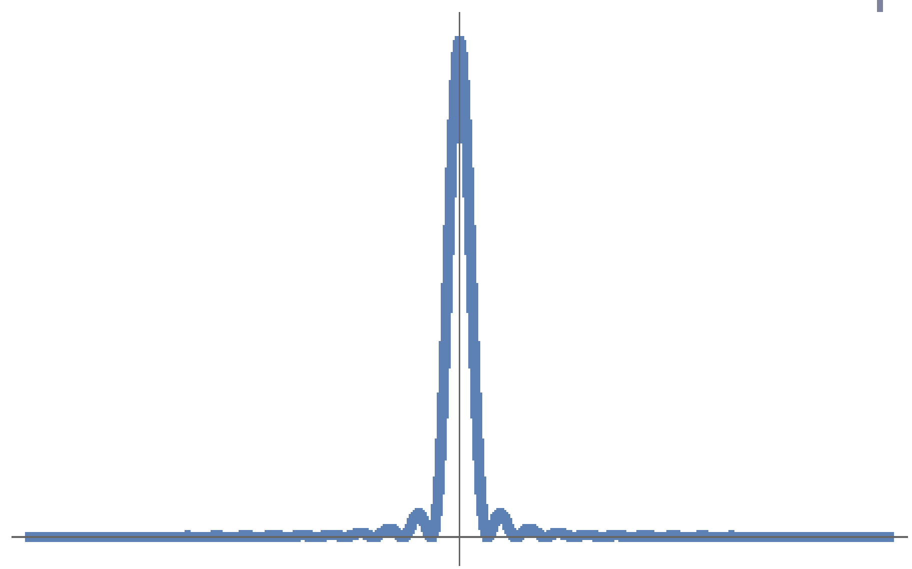


$f(x)\cos(7x)$

尺度变换



$$f(3x)$$



$$f\left(\frac{1}{3}x\right)$$

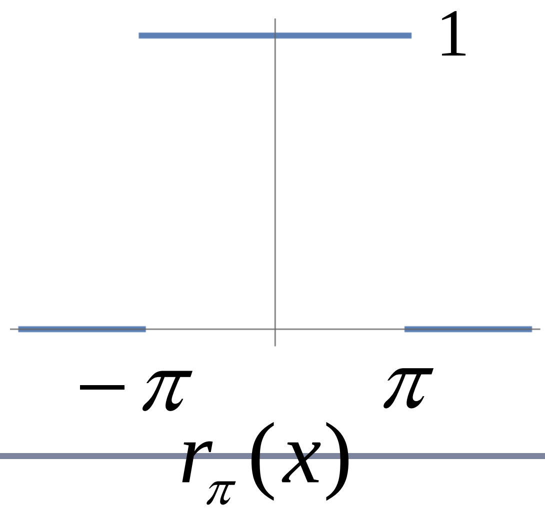
说明 3.1 对于尺度变换的性质，我们需要理解信号$f(x)$和$f(bx)$之间的关系。不妨设$b>1$，如果我们对信号在时域和频域进行测量，测量的精度有限。那么信号$f(bx)$在时域中的测量精度比信号$f(x)$要高。然而，有尺度变换的性质可知，信号$f(bx)$的傅里叶变换在频域中的测量的精度就会比$f(x)$的傅里叶变换低。换句话就是不可能在时域和频域都达到很高的精度，这事实上就是后面要讲的测不准原理。

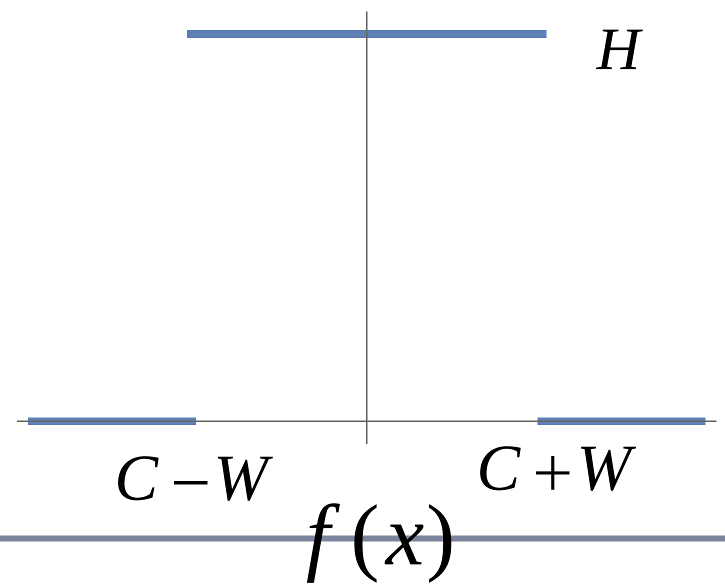
计算

例 3.12 下面看一下一个通用的矩形波的傅里叶变换：

$$f(x) = \begin{cases} H, & C - W \le x \le C + W; \\ 0, & else. \end{cases}$$

在这个例子中，我们可以利用傅里叶变换的公式直接计算。但是，这样的计算量比较大，如果利用傅里叶变换的性质就可以大大减少计算量。





$f(x) = Hr_\pi(\frac{\pi}{W}(x+C))$，从而

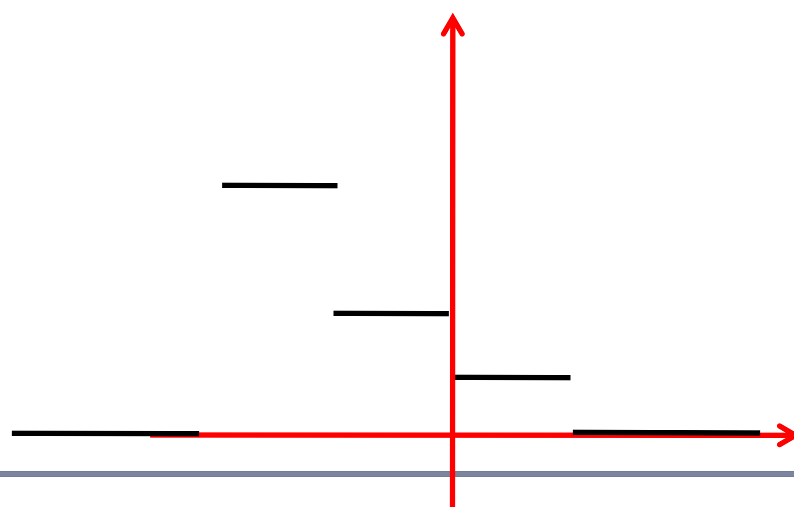
$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= H\frac{W}{\pi}e^{-iC\lambda}\widehat{r}_\pi(\frac{W\lambda}{\pi}) \\ &= H\frac{W}{\pi}e^{-iC\lambda}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{W\lambda}{\pi}\pi}{\sqrt{\pi}\frac{W\lambda}{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{H}{\lambda}\sin(W\lambda)e^{-iC\lambda}\end{aligned}$$

例 3.13 下面看一下一个变化高度的组合矩形波的傅里叶变换:

$$s(x)=\begin{cases}2, & -2<x\leq -1;\\ 1, & 0<x\leq 2;\\ 0.5, & 2<x\leq 3;\\ 0, & else.\end{cases}$$

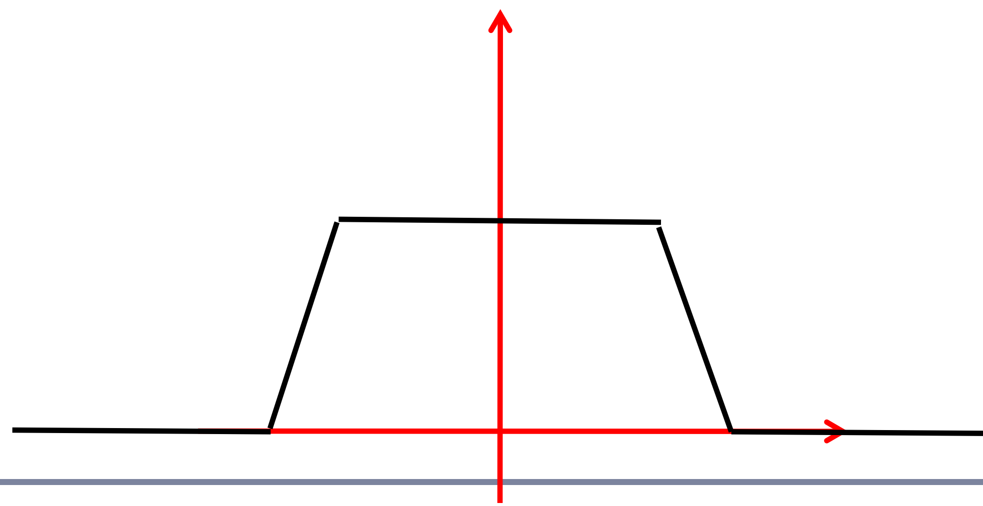
可以看出，上述函数是三个通用的矩形波的和，其中$H_1=2,C_1=-1.5,W_1=0.5$，$H_2=1,C_2=1,W_2=1$，$H_3=0.5,C_3=2.5,W_3=0.5$。从而，利用上面的公式可以得到

$$\widehat{s}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\lambda}\left(2\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)e^{i\frac{3\lambda}{2}}+\sin(\lambda)e^{-i\lambda}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)e^{-i\frac{5\lambda}{2}}\right).$$



下面看一下一个组合的线性信号的傅里叶变换:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le\frac{5}{8};\\ 4(x+\frac{5}{8}), & -\frac{5}{8}<x\le-\frac{3}{8};\\ 1, & -\frac{3}{8}<x\le\frac{3}{8};\\ 4(\frac{5}{8}-x), & \frac{3}{8}<x\le\frac{5}{8};\\ 0, & else.\end{cases}$$



可以看出$f'(x)$是一个组合的矩形波函数，其中$H_1 = 4, C_1 = -\frac{1}{2}, W_1 = \frac{1}{8}$，$H_2 = 4, C_2 = \frac{1}{2}, W_2 = \frac{1}{8}$。所以$f'(x)$的傅里叶变换是

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{8i}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{8}\sin\frac{\lambda}{2}.$$

从而，$f(x)$的傅里叶变换

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{i\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{8i}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{8}\sin\frac{\lambda}{2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{8}{\lambda^2}\sin\frac{\lambda}{8}\sin\frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

例 高斯型函数 $f(t)=e^{-at^2}$ 的 Fourier 变换.

$$f'(t)=-2ate^{-at^2}=-2atf(t).$$

上式两端取 Fourier 变换得

$$(i\lambda)\mathcal{F}[f](\lambda)=(-2ai)\frac{d}{d\lambda}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}.$$

从而可得微分方程

$$\frac{d}{d\lambda}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}+\frac{\lambda}{2a}\mathcal{F}[f](\lambda)=0,$$

其通解为

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=Ce^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

确定常数 C

$$\begin{aligned} C=\mathcal{F}[f](0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}}. \end{aligned}$$

从而高斯型函数 $f(t)=e^{-at^2}$ 的 Fourier 变换为高斯型函数

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

卷积定理

- 编辑频谱的主要工具是**乘法**

$$
\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)e^{-i\lambda t}dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(x)e^{-i\lambda x}dx
$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\iint f(t)g(x)e^{-i\lambda(x+t)}dtdx
$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\iint f(u-t)g(t)e^{-i\lambda u}dudt
$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\int\left(\int f(u-t)g(t)dt\right)e^{-i\lambda u}du
$$

定义 设 f 和 g 是 $\mathbb{R}$ 上的两个函数, 如果积分

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

存在, 称其为 f 和 g 的卷积.

定理 设 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, 则 $f*g\in L^1(\mathbb{R})$, 满足

$$\|f*g\|_{L^1}\le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

并且

$$\mathcal{F}[f*g](\lambda)=\sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda).$$

例 3.11 求下面两个函数的卷积:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-\alpha t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

这里$\alpha, \beta > 0, \alpha \neq \beta$。

如果$t \leq 0$,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx$$

在这个积分中，由于x和$t-x$至少有一个不大于零，从而$f_1(x)f_2(t-x)=0$，即

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如果$t > 0$，由卷积的定义可知：

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{t} + \int_{t}^{\infty} \right) f_1(x) f_2(t-x) dx \\ &= \int_{0}^{t} e^{-\alpha x} e^{-\beta(t-x)} dx \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

定理 3.4 设$f,g\in L^1(R)\bigcap L^2(R)$，则

$$\langle f,g\rangle=\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle$$

特别的，如果$g=f$，则得到$Plancherel$等式：

$$||f||_{L^2}=||\widehat{f}||_{L^2}.$$

证明 令$G(t)=\overline{g(-t)}$，$h=f*G$，则$h\in L^1(R)$，由卷积性质有

$$\widehat{h}(\lambda)=\sqrt{2\pi}\widehat{f}(\lambda)\widehat{G}(\lambda)$$

将傅里叶逆变换应用到$\widehat{h}$，并计算$h(0)$，有

$$\langle f,g\rangle=h(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\lambda)d\lambda=\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle.$$

特别的，如果我们取$g(t)=f(t)$，就可以得到Plancherel等式。

- 函数的正则性：

定理 3.5 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|(1+|\lambda|^p)d\lambda < \infty,$$

则f及其直到p次导数连续有界。

证明 $p=0$的情形就是作业1的结果。对于$p=1$，注意到

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \widehat{f}(\lambda)\left(\frac{e^{-i\lambda h}-1}{h}\right)e^{i\lambda x}d\lambda \qquad (3.17)$$

由于

$$\left|\int_R \widehat{f}(\lambda)\left(\frac{e^{-i\lambda h}-1}{h}\right)\right|\leq\int_R|\widehat{f}(\lambda)|(1+|\lambda|)d\lambda<\infty,$$

从而上式的右端可积。令h趋向0，可得上式的左边是$f'(x)$，即$f(x)$可微，并且

$$|f'(t)|\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\lambda)||\lambda|d\lambda<\infty.$$

对于$p>1$，首先通过归纳可以证明f的$p-1$阶导都存在，且连续有界。对于p阶导，在式子3.17中将$f(x)$换成$f^{(p-1)}(x)$并利用导数的傅里叶变换公式即可同理证明其p阶导存在且连续有界。 #

性质	函数$f(t)$	傅里叶变换$\widehat{f}(\lambda)$
逆变换	$\widehat{f}(t)$	$f(-\lambda)$
卷积	$f_1 * f_2(t)$	$\sqrt{2\pi}\widehat{f_1}(\lambda)\widehat{f_2}(\lambda)$
乘积	$f_1 f_2(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f_1} * \widehat{f_2}(\lambda)$
平移	$f(t-a)$	$e^{-ia\lambda}\widehat{f}(\lambda)$
调制	$e^{i\lambda_0 t}f(t)$	$\widehat{f}(\lambda-\lambda_0)$
尺度	$f(bt)$	$\frac{1}{\lvert b\rvert}\mathfrak{F}[f](\frac{\lambda}{b})$
时域求导	$f^{(k)}(t)$	$(i\lambda)^k\widehat{f}(\lambda)$
频域求导	$(-it)^k f(t)$	$\widehat{f}^{(k)}(\lambda)$

$L^2(R)$上的傅里叶变换

如果$f \in L^2(R)$但是$f \notin L^1(R)$，则f的傅里叶变换不能用前一节的公式来计算，因为$f(x)e^{-i\lambda t}$可能不可积。然而，正如绪论中说的，傅里叶变换和小波变换面对的对象是在$L^2(R)$空间中。所以，我们需要建立理论来计算$L^2(R)$中的傅里叶变换。这里关键的想法是利用$L^1(R)\bigcap L^2(R)$ 中的函数的傅里叶变换的极限来定义f 的傅里叶变换。

因为连续函数空间在$L^1(R)$和$L^2(R)$中都稠密，所以空间$L^1(R)\bigcap L^2(R)$在$L^2(R)$中稠密。因此可以找到$L^1(R)\bigcap L^2(R)$ 中收敛到f的函数类$\{f_n, n = 1, \dots, \infty\}$使得

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^2} = 0.$$

由于$\{f_n, n = 1, \dots, \infty\}$收敛，所以$\{f_n, n = 1, \dots, \infty\}$也是一个Cauchy序列，这就意味着当$m, n$足够大的时候，$||f_m - f_n||$ 可以任意小。另外，$f_n \in L^1(R)$，所以可以定义f_n的傅里叶变换$\widehat{f_n}(\lambda)$。

另外，由Plancherel等式，

$$||\widehat{f}_n(\lambda) - \widehat{f}_m(\lambda)|| = ||f_n - f_m||,$$

可知$\widehat{f}_n(\lambda)$也是一个Cauchy列。由Hilbert空间的完备性知，所有的Cauchy列收敛到该空间的一个元素。因此，存在$\widehat{f}(\lambda) \in L^2(R)$使得

$$\lim_{n\to\infty} ||\widehat{f}_n - \widehat{f}||_{L^2} = 0.$$

$\widehat{f}$被定义为f的傅里叶变换。

注意到当傅里叶变换扩充到$L^2(R)$后，Parseval等式，Plancherel等式，卷积定理都成立。但是，对于卷积定理，这里有些不同的地方。首先我们给出下面的定理。

$$f(x), g(x) \in L^2(R) \Rightarrow f(x)g(x) \in L^2(R)$$

$$f(x), g(x) \in L^2(R) \Rightarrow f(x) * g(x) \notin L^2(R)$$

定理 3.6 如果$f(x), g(x) \in L^2(R)$，则

$$\mathfrak{F}[f(x)g(x)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f} * \widehat{g})(\lambda)$$

定理 3.7 如果$f(x) \in L^2(R)$，$g(x) \in L^1(R)$，则

$$\mathfrak{F}[f(x) * g(x)](\lambda) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)$$

证明 设λ固定，记$h(x)=\overline{g(x)}e^{i\lambda x}$，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{h}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\overline{g(x)}e^{i\lambda x}e^{-iux}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\overline{g(x)e^{-i(\lambda-u)x}}dx\\ &= \overline{\widehat{g}(\lambda-u)}\end{aligned}$$

因为$(fg)\in L^1(R)$，从而

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(x)g(x)e^{-i\lambda x}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(x)\overline{h(x)}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \widehat{f}(u)\overline{\widehat{h}(u)}du\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \widehat{f}(u)\widehat{g}(\lambda-u)du\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f}*\widehat{g})(\lambda)\end{aligned}$$

证明 因为$||f*g||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^1}$，所以知$f*g \in L^2(R)$。另一方面，由$\widehat{f} \in L^2(R)$，$\widehat{g} \in L^\infty(R)$，可知$\widehat{f}\widehat{g} \in L^2(R)$。所以，我们证明

$$\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}\widehat{g}] = \frac{1}{2\pi} f*g.$$

记$f_r(x) = \int_{-r}^{r} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$，则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r}\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda &= \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\left(\int_R g(u)e^{-i\lambda u}du\right)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_R g(u)\left(\int_{-r}^{r}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda(x-u)}\right)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_R g(u)f_r(x-u)du = \frac{1}{2\pi}(f_r*g)(x).
\end{aligned}$$

另一方面，$\lim_{r\to\infty}||f_r - f||_{L^2} = 0$，从而

$$||f_r*g - f*g||_{L^2} \leq ||f_r - f||_{L^2}||g||_{L^1} \to 0, r \to \infty.$$

高斯函数的傅里叶变换

$$f(t)=\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{\beta^2}},\qquad \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{\beta^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\beta^2}{4}\lambda^2}$$

- 我们考虑当 $\beta\to 0$ 时，$f(t)$ 的性质
  - 当 $t\neq 0$ 时，$f(t)\to 0$ ；
  - 当 $t=0$ 时，$f(t)\to\infty$ ；
  - 另一方面，$\int f(t)dt=1$

问题：

- 首先，函数的值不能趋向无穷；
- 只在一个点的值非零的函数，它的黎曼积分和勒贝格积分都是零；
- 在积分中，$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ ，这个式子也是矛盾的
- 新的工具：广义函数

广义函数和傅里叶变换对

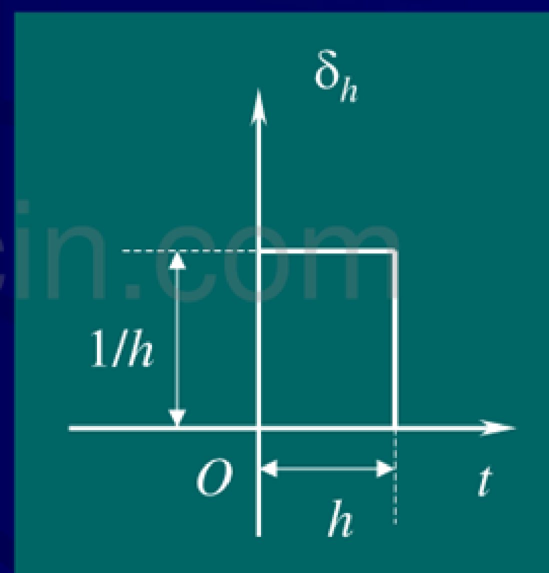
经典函数

- 数与数的对应
- 经典函数的困难：“点电荷”，“点源”，“质点”等物理概念描述困难

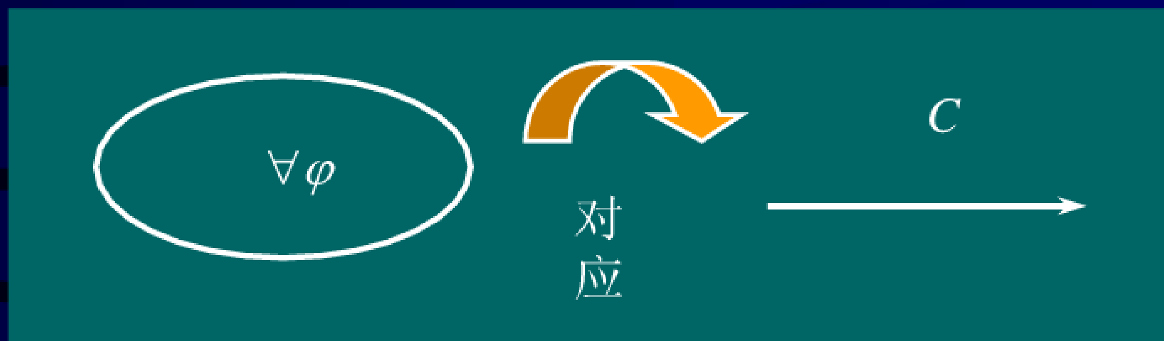
$$\delta_h = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0 \\ 1/h, & \text{if } 0 < t < h \\ 0, & \text{if } t > h \end{cases}$$

显然函数的积分为“1”
并且与 h 无关

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)dt = \int_0^h \frac{1}{h} dt = 1$$



广义函数



经典函数：数——数的关系
广义函数：函数——数的关系

严格地说，广函 f 不是 x 的函数，即对每一个 x 并不对应一个值，而是对每一个检验函数对应一个值！！

基本空间

$C^{\infty}(R)$ R上具有任意阶连续微商的函数全体组成的空间

$C_0^{\infty}(R)$ $C^{\infty}(R)$ 中具有紧支集的空间

基本空间就是 $C_0^{\infty}(R)$ 里面定义了收敛性后的空间

定义 3.2 设$\varphi_j, \varphi \in C_0^{\infty}(R)$，如果

- 存在R中的紧集K，使得φ_j, φ的支集都包含在K中；
- φ_j以及任意阶导数都一致收敛到φ和φ的相应的导数；

则线性空间$C_0^{\infty}(R)$在给定上述收敛后的空间称为基本空间，记作D。

定义 3.3 设$\varphi_j \in D$，如果

- 存在R中的紧集K，使得φ_j, φ的支集都包含在K中；
- $$\lim_{i,j\to\infty}\left(\max_{x\in K}|D^m\varphi_j - D^m\varphi_i|\right) = 0$$

则称φ_j是基本空间D中的基本列。

定义 3.4 基本空间D上的连续线性泛函称为D上的广义函数，即如果D上的实值线性泛函u满足

1. 对任意的$\varphi_1, \varphi_2 \in D$，$c_1, c_2 \in R$，

$$u(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 u(\varphi_1) + c_2 u(\varphi_2),$$

2. 如果$\varphi_j, \varphi \in D$，且$\varphi_j \to \varphi$，则

$$u(\varphi_j) \to u(\varphi),$$

则称u是D上的广义函数。

例 3.16 设f是R上任意紧集上都可积的函数，定义D上的泛函

$$u_f(\varphi) = \int_R f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D,$$

很容易证明上述泛函是D上的线性连续泛函。由上式所确定的广义函数称为正则的。

例 3.17 定义广义函数δ函数为

$$\delta(\varphi) = \varphi(0), \forall \varphi \in D.$$

首先，它显然是D上的线性泛函，并且，如果$\lim_{j\to\infty}\varphi_j = 0$，有

$$|\delta(\varphi_j)| = |\varphi_j(0)| \leq sup_{x\in R}|\varphi_j(x)| \to 0,$$

所以δ函数连续。于是δ函数是广义函数。

不过δ函数一定不是正则的。事实上，如果存在可积函数$f(x)$，使得

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) = \int_R f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in D.$$

为此，取

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a; \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

按照上述假定有，

$$\int_R f(x)\varphi_a(x)dx = \varphi_a(0) = e^{-1},$$

但是左边的积分

$$\begin{aligned} \left|\int_R f(x)\varphi_a(x)dx\right| &= \left|\int_{|x|<a} f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx\right| \\ &\leq \int_{|x|<a} |f(x)|dx \to_{a\to 0} 0 \end{aligned}$$

显然这两个是矛盾的。因此δ函数不是正则的。

定义 3.5 设u_j, u是广义函数，如果对每一个$\varphi \in D$，有

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi)$$

就称$\{u_j\}$收敛到u，记作$\lim_{j\to\infty} u_j = u$。

例 3.18 设$f_j(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin jx}{x}, x\in R$，则

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x)=\delta(x).$$

事实上，可以证明对任意的$\varphi\in D$，有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_R \varphi(x+t)\frac{\sin jt}{t}dt=\varphi(x).$$

这个证明留作作业。

从而，在上式中取$x=0$，便可以得到

$$\lim_{j\to\infty} f_j(\varphi)=\lim_{j\to\infty}\int_R \frac{1}{\pi}\frac{\sin jx}{x}\varphi(x)dx=\varphi(0)=\delta(\varphi),$$

即

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x)=\delta.$$

广义函数的运算法则

- 加法

$$(f+g,\varphi)=(f,\varphi)+(g,\varphi),\forall\varphi\in D$$

- 数乘

$$(\alpha f,\varphi)=\alpha(f,\varphi)=(f,\alpha\varphi),\forall\varphi\in D$$

- 坐标扩展

$$(f(cx),\varphi(x))=\int_R f(cx)\varphi(x)dx=\frac{1}{|c|}(f(x),\varphi(\frac{x}{c}))$$

例子

$$(\delta(cx),\varphi(x)) = \frac{1}{|c|}(\delta(x),\varphi(\frac{x}{c})) = \frac{1}{|c|}\varphi(0)$$

$$= \left(\frac{1}{|c|}\delta(x),\varphi(x)\right)$$

所以：

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x),\delta(-x) = \delta(x)$$

导数

假设$f(x)$是R上连续可微的函数，$\varphi \in D$，由分部积分可得

$$\int_R f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_R f(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -\int_R f(x)\varphi'(x)dx$$

所以，对于广义函数可以定义微商$f'(\varphi) = -f(\varphi')$。

定义 3.6 设u是广义函数，定义u的微商u'是D上的线性泛函，并且满足

$$u'(\varphi) = -u(\varphi'), \forall \varphi \in D.$$

不难证明$u \in D$，$u' \in D$，从而我们可以证明广义函数具有任意阶导数，并且

$$D^m u(\varphi) = (-1)^m u(D^m \varphi).$$

例 3.19 函数$H(x)$为:

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}H'(\varphi)&=-H(\varphi')\\&=-\int_R H(x)\varphi'(x)dx\\&=-\int_0^\infty \varphi'(x)dx\\&=\varphi(0)=\delta(\varphi)\end{aligned}$$

所以$H'(x)=\delta(x)$。

例 3.20 设$f(x) \in C^1(R)\ \{0\}$，记$a = f(+0) - f(x-0)$，又设f和f'在紧集上可积，则

$$\frac{d}{dx}f = a\delta + f'$$

这是因为对于任意的$\varphi \in D$，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(\varphi) &= -f(\varphi') \\
&= -\int_{-\infty}^{0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -f(-0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} f(x)\varphi'(x)dx + f(+0)\varphi(0) + \int_{0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= a\varphi(0) + \int_{R} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= a\delta(\varphi) + f'
\end{aligned}$$

这个例子告诉我们，如果$f \in C^1(R)$，则广义函数的导数和经典的导数定义一致，但是如果函数具有第一类间断点，则广义函数的导数会在间断点处引入δ函数。

乘积

定义 3.7 设u是广义函数，$f\in C^\infty(R)$，则它们的乘积fu定义为

$$(fu)(\varphi)=u(f\varphi),\forall\varphi\in D$$

很容易验证fu是一个广义函数。类似的，我们也可以定义乘积对应的广义函数的导数。不难证明：

$$D(fu)=fu'+uf',$$

这是因为

$$\begin{aligned}(D(fu))(\varphi)&=-(fu)(\varphi')=-u(f\varphi')=-u\left((f\varphi)'-\varphi f'\right)\\&=u'(f\varphi)+u(\varphi f')=(fu'+uf')(\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g(x)\delta(x-y),\varphi(x))&=(\delta(x-y),g(x)\varphi(x))\\&=g(y)\varphi(y)=(g(y)\delta(x-y),\varphi(x))\end{aligned}$$

从而，

$$g(x)\delta(x-y)=g(y)\delta(x-y),$$

故

$$x\delta(x)=0\delta(x)=0$$

卷积

从而如果将它看出一个正则的广义函数，有

$$
\begin{aligned}
(f*g)(\varphi) &= \int_R (f*g)(z)\varphi(z)dz \\
&= \int_R \left(\int_R f(z-y)g(y)dy \right) \varphi(z)dz \\
&= \int_R g(y) \left(\int_R f(z-y)\varphi(z)dz \right) dy \\
&= \int_R g(y) \left(\int_R f(z)\varphi(z+y)dz \right) dy
\end{aligned}
$$

卷积

定义 3.8 设u，v是两个广义函数，如果由下式定义的ω是一个广义函数，

$$\omega(\varphi) = v_y\left[u_x(\varphi(x+y))\right]$$

则称ω是u，v的卷积，记作$\omega = u * v$。其中上式的定义中u_x表示广义函数u的定义以x作为积分变量。

说明 3.2 上述卷积的定义不是对所有的广义函数都成立，因为在这个定义中我们需要$\varphi(x) \in D$时，$\varphi(x+y) \in D$。这个不是对所有的广义函数成立。因此，我们这里给出一个卷积可以定义的条件。设u，v是广义函数，记A，B是u，v的支集，给定一个紧集F，定义

$$\widetilde{F} = \{(x,y) | x + y \in F\},$$

如果对任意的紧集F，$\widetilde{F}$都是有界集，则$u * v$就是一个广义函数。

例子

$$\big(f(x)*\delta(x),\varphi(x)\big)=\big(f(x),(\delta(y),\varphi(x+y))\big)$$

$$=(f(x),\varphi(x))$$

$$\Rightarrow\ f(x)*\delta(x)=f(x)$$

$$\big(f(x)*\delta'(x),\varphi(x)\big)=\big(f(x),(\delta'(y),\varphi(x+y))\big)$$

$$=(f(x),-\varphi'(x))=(f'(x),\varphi(x))$$

$$\Rightarrow\ f(x)*\delta'(x)=f'(x)$$

广义函数的傅里叶变换

经典函数的傅里叶变换

$$F(f)=\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

所以，广义函数的傅里叶变换

$$\big(F(f),\varphi\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx=\big(f,F(\varphi)\big)$$

但是，$F(\varphi)$ 不一定在基本空间中。解决的方法是定义新的基本空间，称为速降空间。

傅里叶变换对

注意到傅里叶变换和傅里叶逆变换的形式非常类似，他们具有一定的对称性。事实上，如果$f(t)$的傅里叶变换是$\widehat{f}(\lambda)$，且$\widehat{f} \in L^1(R)$，则$\widehat{f}$作为一个函数也可以计算它的傅里叶变换。它的傅里叶变换是

$$\mathfrak{F}[\widehat{f}](\lambda) = f(-\lambda).$$

证明

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \tag{3.44}$$

所以

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda = \mathfrak{F}[\widehat{f(\lambda)}](t).$$

例 3.22 我们现在看一下我们前面提到的$\delta(x)$函数。

$$\mathfrak{F}[\delta](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

所以，我们认为$\delta(x)$和常函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$构成一个傅里叶变换对，即

$$\mathfrak{F}[\delta(x)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right](\lambda) = \delta(-\lambda) = \delta(\lambda).$$

例 3.23 同理，

$$\mathfrak{F}[\delta(x-a)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}|_{x=a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda}$$

所以，我们认为$\delta(x-a)$和常函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda}$构成一个傅里叶变换对，即

$$\mathfrak{F}[\delta(x-a)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda}, \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iax}\right](\lambda) = \delta(a-\lambda) = \delta(\lambda-a).$$

例 3.25 设$H(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \frac{1}{2}, & t=0;\\ 1, & t>0.\end{cases}$，则$H(t)$的傅里叶变换是$\mathfrak{F}[H(t)](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i\lambda}+\pi\delta(\lambda)\right)$。

这里不直接计算函数$H(t)$的傅里叶变换，而改成计算函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i\lambda}+\pi\delta(\lambda)\right)$的逆傅里叶变换。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i\lambda}+\pi\delta(\lambda)\right)\right](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{i\lambda}+\pi\delta(\lambda)\right)e^{i\lambda t}d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi\delta(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\lambda}e^{i\lambda t}d\lambda\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\lambda t)+i\sin(\lambda t)}{i\lambda}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\\
&= H(t)
\end{aligned}$$

傅里叶变换对

注意到傅里叶变换和傅里叶逆变换的形式非常类似，他们具有一定的对称性。事实上，如果$f(t)$的傅里叶变换是$\widehat{f}(\lambda)$，如果$\widehat{f}\in L^1(R)$，则$\widehat{f}$作为一个函数也可以计算它的傅里叶变换。它的傅里叶变换是

$$\mathfrak{F}[\widehat{f}](\lambda) = f(-\lambda).$$

函数$f(t)$	傅里叶变换$\widehat{f}(\lambda)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\delta(t-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ia\lambda}$
$H(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{i\lambda}+\pi\delta(\lambda))$
$H(t)e^{-\beta t}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\beta+i\lambda}$
$e^{-\beta t^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}$