第四次程序作业 Guide

因为你们在作业里面已经算过uniform的刚度矩阵了，所以之前强调过的（作业答案里有些）这里就不多赘述了。下面解释一下easymesh的order怎么算。

一维的时候，对非均匀剖分，我们记$h=\max\limits_{1\leq j\leq N} x_j-x_{j-1}$为区间最大长度。如果我们有一列逐步加密的剖分$\{\pi_k\}$，对应最大长度为$h_k$ $(h_k\to 0)$、计算的误差为err_k，那么我们定义从π_k到π_{k+1}这一步的收敛阶

$$\mathrm{ord}_k := \frac{ln(\frac{\mathrm{err}_k}{\mathrm{err}_{k+1}})}{ln(\frac{h_k}{h_{k+1}})}.$$

当k取的充分大，如果程序写的没问题，ord_k将趋于理论的收敛阶。

二维的时候，情况会稍微复杂一些。对于一个三角剖分$\mathcal{T}^h$，这里的h意味着直径最大的那个三角元，它的直径应当是$O(h)$级别的。比如对于uniform mesh，每条棱N等分时，$\max\limits_{T\in\mathcal{T}^{1/N}} \mathrm{diam} T=\frac{\sqrt{2}}{N}$。

现在，我们有一列二维区域上的三角剖分$\{\mathcal{T}^{h_k}\}$，误差计算为err_k，那么收敛阶的公式计算应当和一维时一样。设$\mathcal{T}^{h_k}$包含E_k个三角元，那么当$\{\mathcal{T}^{h_k}\}$满足quasi-uniform条件时，我们不难发现

$$\frac{1}{\sqrt{E_k}}\sim O(h_k).$$

所以从$\{\mathrm{T}^{h_k}\}$到$\{\mathrm{T}^{h_{k+1}}\}$这一步的收敛阶为

$$\mathrm{ord}_k := 2\frac{ln(\frac{\mathrm{err}_k}{\mathrm{err}_{k+1}})}{ln(\frac{E_{k+1}}{E_k})}.$$

类似，三维的时候，若三角剖分$\{\mathcal{T}^{h_k}\}$是quasi-uniform的，那么

$$\frac{1}{\sqrt[3]{E_k}}\sim O(h_k),\qquad \mathrm{ord}_k := 3\frac{ln(\frac{\mathrm{err}_k}{\mathrm{err}_{k+1}})}{ln(\frac{E_{k+1}}{E_k})}.$$

P.S：这次作业最好画个三维的u-u_h误差函数图像。