有限元方法 2021 秋（11 月 1、3 日作业）

金晨浩 SA21001033

4.x.1 **证明对** $|\alpha| \le m-1$, $D_x^\alpha T_y^m u(x) = T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x), \quad \forall u \in C^{|\alpha|}(B)$.

证明. 考虑 $u \in C^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} D_x^\alpha T_y^m u(x) &= D_x^\alpha\Big(\sum_{|\beta|<m} \frac{1}{\beta!} D_y^\beta u(y)(x-y)^\beta\Big) \\ &= \sum_{|\beta|<m,\ \beta\ge\alpha} D_y^\beta u(y)(x-y)^{\beta-\alpha} \\ &= \sum_{|\beta|\le m-|\alpha|} D^\beta(D^\alpha u(y))(x-y)^\beta = T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x). \end{aligned}$$

由 Density argument 即证。 □

4.x.2 **证明** Taylor **定理**：$\forall f \in C^m([0,1])$,

$$f(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + m\int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} f^{(m)}(1-s)\,ds.$$

证明. 对 m 进行归纳。$m=1$ 时，RHS$= f(0) + \int_0^1 f'(1-s)\,ds = f(1) =$LHS；

假设结论对 m 成立，设 $f \in C^{(m+1)}([0,1])$，那么

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + m\int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} f^{(m)}(1-s)\,ds \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{1}{m!} f^{(m)}(1-s)\,d(s^m) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) + \int_0^1 \frac{1}{m!} s^m f^{(m+1)}(1-s)\,ds \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + (m+1)\int_0^1 \frac{1}{(m+1)!} s^m f^{(m+1)}(1-s)\,ds. \end{aligned}$$

由归纳假设即证。 □

4.x.4 **引理 4.3.14 中我们证明了若区域 Ω 关于某个球是星形的，那么** $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u-\overline{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C_{n,\gamma}|u|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

证明该估计与下式等价：

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_{n,\gamma}(|\int_\Omega u\,dx| + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}).$$

证明. 设引理 4.3.14 的估计成立，那么 $\|u-\overline{u}\|_{L^p(\Omega)} \le \|u-\overline{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C_{n,\gamma}|u|_{W^{1,p}(\Omega)}$. 所以

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u-\overline{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|\overline{u}\|_{L^p} \le C_{n,\gamma}|u|_{W^{1,p}(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}-1}\cdot|\int_\Omega u\,dx|.$$

反之，若题目结论成立，则将 $u-\overline{u}$ 代入，

$$\|u-\overline{u}\|_{L^p(\Omega)} \le C_{n,\gamma}|u-\overline{u}|_{W^{1,p}(\Omega)} = C_{n,\gamma}|u|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

最后利用 $\|u-\overline{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|u-\overline{u}\|^p_{L^p(\Omega)} + |u|^p_{W^{1,p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \le 2^{1-\frac{1}{p}}(\|u-\overline{u}\|_{L^p(\Omega)} + |u|_{W^{1,p}(\Omega)})$ $\le 2(\|u-\overline{u}\|_{L^p(\Omega)} + |u|_{W^{1,p}(\Omega)})$ 即证。 □

4.x.6 **证明一族三角剖分 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是拟一致的当且仅当它是非退化的且 $\exists c, C$ 与 h 无关** s.t. $c\cdot \mathrm{diam}K_1 \le \mathrm{diam}K_2 \le C\cdot\mathrm{diam}K_1$, $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}^h$.

证明. 若 $\{\mathcal{T}\}$ 是拟一致的，则由定义 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是非退化的且 $\rho h\cdot\mathrm{diam}\Omega \le \mathrm{diam}T \le h\cdot\mathrm{diam}\Omega$ $\Rightarrow \rho \le \frac{\mathrm{diam}T}{h\cdot\mathrm{diam}\Omega} \le 1$, $\forall T\in\mathcal{T}^h \Rightarrow \rho \le \frac{\mathrm{diam}K_1}{\mathrm{diam}K_2} \le \rho^{-1}$, $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}^h$;

反之，$\{\mathcal{T}^h\}$ 非退化即 $\exists \rho_0 \in (0,1)$ s.t. $\mathrm{diam}B_T \ge \rho_0\cdot\mathrm{diam}T$。由 $\mathcal{T}^h$ 定义，存在 $T_1 \in \mathcal{T}^h$, $\rho_1 > 0$ s.t. $\mathrm{diam}T_1 \ge \rho_1 h\cdot\mathrm{diam}\Omega \Rightarrow \forall T\in\mathcal{T}^h$, $\mathrm{diam}B_T \ge c\rho_0\rho_1 h\cdot\mathrm{diam}(\Omega)$。 □

5.x.10 **考虑非齐次 Dirichlet&Neumann 混合边界问题**

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \\ u = g_D, & \Gamma\subset\partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_N, & \partial\Omega\backslash\Gamma \end{cases}$$

记 $V = \{v\in H^1(\Omega): v|_\Gamma = 0\}$, $V_h \subset V$, $a(u,v) = \int_\Omega Du\cdot Dv\,dx$, $F(v) = (f,v) + \int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} g_N v\,ds$. PDE 的变分和有限元的变分离散格式如下

$$(V).\begin{cases} \text{Find } u - g_D \in V \text{ s.t.} \\ a(u,v) = F(v), \quad \forall v\in V. \end{cases} \qquad (V_h).\begin{cases} \text{Find } u_h - \mathcal{I}^h g_D \in V_h \text{ s.t.} \\ a(u_h,v) = F(v), \quad \forall v\in V_h. \end{cases}$$

假设椭圆正则性估计 $|u|_{H^2} \le C\|f\|_{L^2}$ 成立，证明 u_h 满足

$$(1).\quad |u-u_h|_{H^1} \le \inf_{v\in V_h} |u-g_D-v|_{H^1} + 2|g_D-\mathcal{I}^h g_D|_{H^1},$$

$$(2).\quad \|u-u_h\|_{L^2} \le C\Big[h\inf_{v\in V_h}|u-g_D-v|_{H^1} + \|g_D-\mathcal{I}^h g_D\|_{L^2}\Big].$$

证明. 注意到 $|a(u,v)| \le |u|_{H^1}|v|_{H^1}$。$\forall v\in V_h$，我们有

$$\begin{aligned}
|u-u_h|_{H^1}^2 &= a(u-u_h,u-u_h)\\
&= a(u-u_h,u-g_D-v) - a(u-u_h,u_h-\mathcal{I}^h g_D-v) + a(u-u_h,g_D-\mathcal{I}^h g_D)\\
&= a(u-u_h,u-g_D-v) + a(u-u_h,g_D-\mathcal{I}^h g_D)\\
&\le |u-u_h|_{H^1}|u-g_D-v|_{H^1} + |u-u_h|_{H^1}|g_D-\mathcal{I}^h g_D|_{H^1},
\end{aligned}$$

两边约去 $|u-u_h|_{H^1}$ 并对 $v\in V_h$ 取 inf 即证 (1)。我们下面使用 Duality argument 证明 (2)。取 $e = u-g_D-(u_h-\mathcal{I}^h g_D)$，考虑对偶问题：

$$(\text{Duality}).\quad \begin{cases}\text{Find } w\in V \text{ s.t.}\\ a(v,w) = (e,v),\quad \forall v\in V.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\Delta w = e, & \Omega\\ w = 0, & \Gamma\subset\partial\Omega\\ \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0, & \partial\Omega\backslash\Gamma\end{cases}$$

该变分也是存在唯一解的，所以我们有

$$\begin{aligned}
\|e\|_{L^2}^2 &= a(e,w)\\
&= a(u-u_h-(g_D-\mathcal{I}^h g_D),w)\\
&= a(u-g_D-v,w) - a(u_h-\mathcal{I}^h g_D-v,w)\qquad (\forall v\in V_h)\\
&= a(u-g_D-v,w-\mathcal{I}^h w)\qquad (\forall v\in V_h)\\
&\le Ch\inf_{v\in V_h}|u-g_D-v|_{H^1}|w|_{H^2}\\
&\le Ch\inf_{v\in V_h}|u-g_D-v|_{H^1}\|e\|_{L^2}
\end{aligned}$$

所以我们证明了 $\|e\|_{L^2} \le Ch\inf_{v\in V_h}|u-g_D-v|_{H^1}$，利用三角不等式即得到

$$\|u-u_h\|_{L^2} \le Ch\inf_{v\in V_h}|u-g_D-v|_{H^1} + \|g_D-\mathcal{I}^h g_D\|_{L^2}. \qquad \square$$

5.x.12 考虑 Dirichlet&Robin 混合边界问题，下面的 α 是个（正的）常数。

$$\begin{cases}-\Delta u = f, & \Omega\\ u = 0, & \Gamma\subset\partial\Omega\\ \alpha u + \frac{\partial u}{\partial\nu} = g, & \partial\Omega\backslash\Gamma\end{cases}$$

(1). 推导变分格式并给出定解条件使得问题在 H^1 中有唯一解。

(2). 证明变分问题与原问题等价。

(3). 在椭圆正则性假设下，给出并证明 P^1 有限元的 L^2, H^1 模误差估计。

> Remark：某年的博资考原题出处。区别在于博资考把 Robin 边界改成了非齐次的。我们这里就证明非齐次的情形。（夏老师语：非齐次的和齐次的不都一样的嘛）

证明. $\forall v \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$,

$$\int_\Omega fv\,dx = \int_\Omega -\Delta uv\,dx = \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\,ds = \int_\Omega DuDv\,dx + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} (\alpha uv - gv)\,ds,$$

定义

$$a(u,v) = \int_\Omega DuDv\,dx + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} \alpha uv\,ds, \quad F(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} gv\,ds.$$

变分形式为

$$(V).\quad \begin{cases} \text{Find } u \in V \text{ s.t.} \\ a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}.$$

平凡验证变分问题与原问题等价（我这里就略了，但你们不能偷懒）。取 $v \equiv 1$ 得定解条件

$$\int_\Omega f\,dx = \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} (\alpha u - g)\,ds.$$

利用 Trace 不等式可证明 $a(\cdot,\cdot)$ 与 $F(\cdot)$ 的有界性。假设 $\exists\{u_n\} \subset V$, $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ s.t. $a(u_n,u_n) < \frac{1}{n}$。因为 $H^1(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^2(\Omega)$，所以 $\exists\{u_{n_k}\}$ 和 $u \in L^2(\Omega)$ s.t. $u_{n_k} \to u$ in $L^2(\Omega)$. 又因为

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega u\phi_j\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{n_k}\phi_j\,dx = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_j}\phi\,dx,$$

所以 u 存在弱导数且 $\|Du - Du_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \Rightarrow u_{n_k} \to u$ in $H^1(\Omega)$, $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

另一方面，$\|Du_{n_k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|u_{n_k}\|^2_{L^2(\partial\Omega\setminus\Gamma)} < \frac{1}{n} \Rightarrow \|Du_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \Rightarrow Du = 0$, u 为常数。代入边界条件可知 $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u \equiv 0$, 与 $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$ 矛盾。

综上，我们证明了 $a(\cdot,\cdot)$ 的强制性。利用 Lax-Milgram 定理即证变分问题存在唯一解。

设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 为给定的拟一致的三角剖分，$V_h = \{v \in V : v|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}^h\}$. 记 $\mathcal{I}^h$ 为 $\mathcal{T}^h, V_h$ 给出的插值算子，我们默认以下估计成立：

(多项式插值误差估计)：$\|v - \mathcal{I}^h v\|_V \le Ch|v|_{H^2}$, $\forall v \in V$.

(椭圆正则性估计)：若u是齐次问题的解，那么 $|u|_{H^2} \le C\|f\|_{L^2}$.

有限元变分离散为

$$(V_h).\quad \begin{cases} \text{Find } u_h \in V_h \text{ s.t.} \\ a(u_h,v) = F(v), \quad \forall v \in V_h. \end{cases}$$

将 (V) 与 (V_h) 相减，我们得到

$$a(u-u_h,v)=0,\quad \forall v\in V_h.$$

因此

$$\|u-u_h\|_{H^1}^2=a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v)\le C\|u-u_h\|_{H^1}\|u-\mathcal{I}^h u\|_{H^1},$$
$$\Rightarrow |u-u_h\|_{H^1}\le Ch|u|_{H^2}.$$

考虑对偶问题

$$\begin{cases}-\Delta w=u-u_h\\ w=0,\quad \Gamma\\ \frac{\partial w}{\partial \nu}=0,\quad \partial\Omega\backslash\Gamma\end{cases}$$

那么此时的变分问题为

$$\begin{cases}\text{Find } w\in V \text{ s.t.}\\ a(w,v)=(u-u_h,v),\quad \forall v\in V.\end{cases}$$

对偶变分问题解也存在唯一，因此

$$\|u-u_h\|_{L^2}^2=a(w,u-u_h)=a(u-u_h,w-\mathcal{I}^h w)\le Ch\|u-u_h\|_{H^1}|w|_{H^2}$$

由椭圆正则性估计 $\Rightarrow \|u-u_h\|_{L^2}^2\le Ch\|u-u_h\|_{H^1}\|u-u_h\|_{L^2}\Rightarrow \|u-u_h\|_{L^2}\le Ch\|u-u_h\|_{H^1}$.

综上，$\|u-u_h\|_{H^s}\le Ch^{2-s}|u|_{H^2},\quad s=0,1.$ □

5.x.13 **设** $p\ge 1,\ \Gamma\subset\partial\Omega$ **正测度，那么**

$$\|v\|_{L^p(\Omega)}\le C_{\Omega,\Gamma}\Big(\,\Big|\int_\Gamma v\,ds\Big|+|v|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big),\quad \forall v\in W^{1,p}(\Omega).$$

证明. $\|v\|_{L^p(\Omega)}\le\|v-\overline{v}\|_{L^p(\Omega)}+\|\overline{v}\|_{L^p(\Omega)}=:I_1+I_2$, 由 Poincare 不等式，$I_1\le C|v|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

$$I_2=|\Omega|^{\frac{1}{p}}|\overline{v}|=\frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{|\Gamma|}\cdot\Big|\int_\Gamma\overline{v}\,ds\Big|\le\frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{|\Gamma|}\Big(\int_\Gamma|v-\overline{v}|\,ds+\Big|\int_\Gamma v\,ds\Big|\Big)$$

利用 Trace 不等式，$\int_\Gamma|v-\overline{v}|\,ds\le\|v-\overline{v}\|_{L^p(\Gamma)}\cdot|\Gamma|^{1-\frac{1}{p}}\le C\|v-\overline{v}\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le C|v|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
代入 I_2, I_1+I_2 即证结论。 □