# 《数值分析》误差简介

### 徐岩

中国科学技术大学数学科学学院

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/



- 误差和有效数字
- 约束误差
- 一些例子



- x\*: 精确值
- x: 近似值

### 绝对误差

- 绝对误差= 精确值-近似值= x\* x
- 绝对误差可正可负

### 相对误差

- 相对误差=  $\frac{$ 绝对误差}{ 精确值} =  $\frac{x^*-x}{x^*}$
- 相对误差=  $\frac{$ 绝对误差}{近似值} =  $\frac{x^*-x}{x}$

ME AND REFER

## 误差的来源

- 原始误差:模型误差(忽略次要因素,如空气阻力)和原始 数据误差
  - 数学模型的误差
  - 物理模型的误差
- 舍入误差: 计算误差, 计算机仅能表示表示有限位数据引起



# 误差的来源

- 截断误差:方法误差,算法本身引起
  - $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ , 在实际计算中,常常使用有限项 近似无穷项

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

被舍弃的余项

$$(-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)(1+\theta x)^{k+1}}, 0 < \theta < 1$$

即为截断误差。



• 加减

$$(x^* \pm y^*) - (x \pm y) = e_x \pm e_y$$
  $\frac{e_x \pm e_y}{x^* \pm y^*}$  两相近数相减,相对误差增大

相乘

$$(x^* \cdot y^*) - (x \cdot y) = x^*(y * -y) + y(x^* - x) = ye_x + x^*e_y$$
  
= max{|x^\*|, |y|}(|e\_x| + |e\_y|)

相除

# 有效位数

定义: 当x的误差为某一位的半个单位,则这一位到第一个非零的位数称为x的有效位数。

- 有效位的多少直接影响到近似值的绝对误差和相对误差
- 3.28和0.00587均有3位有效数字
- 4.0和4.000分别有2位和4位有效数字。



## 误差控制

- 选择收敛稳定的数值方法
- 提高数值计算的精度: 单精度、双精度
- 避免2个非常接近的数相减
- 多个数求和时,从小数加到大数



### 一些例子

例

在计算机中求函数 $f(x) = 1 - \cos(x)$ 在x接近0点的值。  $\cos(x) \simeq 1$ 当x接近0点时,此时如果用此公式直接计算,很容易在0点附近失去精度。如果采用如下公式,

$$1 - \cos(x) = \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{1 + \cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}$$

则可以避免这样的问题



### 一些例子

例

在计算机中求函数 $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 在x取比较大的值.

$$f(12345) = \sqrt{12346} - \sqrt{12345}$$
$$= 111.113 - 111.108$$
$$= 0.005$$

但实际上,f(12345) = 0.00450003262627751.



例

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

应该用下面的方式来计算

$$s_n = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2} + 1$$



例

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

我们有

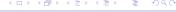
$$A_n + 5A_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x + 5} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

构造方法如下

**1** 
$$A_n = \frac{1}{n} - 5A_{n-1}, A_0 = In\frac{6}{5}, i2 \text{ if } \hat{A}_n$$

② 
$$A_{n-1} = \frac{1}{5}(\frac{1}{n} - A_n)$$
,  $A_8 = 0.019$ , i2作 $\tilde{A}_n$ 





### 一些例子

			~
n	$A_n$	$A_n$	$A_n$
0	0.182	0.182	0.182
1	0.088	0.090	0.088
2	0.058	0.050	0.058
3	0.0431	0.083	0.0431
4	0.0343	-0.165	0.0343
5	0.0284	1.025	0.0284
6	0.024	-4.958	0.024
7	0.021	24.933	0.021

- 对格式1,如果前一步有误差,则被放大5倍加到后一步
- 这样的格式称为不稳定格式。



#### H.W.

1. 给出计算如下式子的方法,保证解的精确性

① 
$$f(x) = \frac{x - \sin x}{\tan x}$$
, x接近0

② 
$$f(x) = (\alpha + x)^n - \alpha^n$$
, x接近0

**③** 
$$f(x) = \sin(\alpha + x) - \sin \alpha$$
,  $x$ 接近0



#### 上机作业

级数计算[Hamming (1962)]

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)}$$

x取值 $x=0.0,0.1,0.2,\cdots,1.0,10.0,20.0,\cdots,300.0$ 共41个值,要求误差小于 $10^{-6}$ ,并给出相应的k的取值上界。

输出格式: 三列:

x,  $\varphi(x)$ , k



