# 《数值分析》之

# 常微分方程数值方法

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

中国科学技术大学

- 我们现在可以求解如下方程：

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta \end{cases}$$

- 因为取$y_1 = y$, $y_2 = y'$可以把它转换成一阶方程组的形式

$$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(a) = \alpha \\ y_2' = f(x, y_1, y_2), & y_2(a) = \beta \end{cases}$$

从而可以应用前面的步进方法进行求解。

- 然而如果问题改为

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

则前面方法失效。

# 边值问题的求解困难

- 步进方法不适合用于求解边值问题，因为没有完整的初值，数值求解无法开始。
- 前面是一个典型的两点边值问题。此类问题的求解难度要比初值问题大很多。
- 只有极个别的两点边值问题不需要用数值方法求解。如

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 3, \quad y(\pi/2) = 7 \end{cases}$$

方程的通解为$y(x) = A\sin x + B\cos x$，从而可以应用两点边值确定$A$, $B$，以得到方程的解为$y(x) = 7\sin x + 3\cos x$.

- 如果其中的微分方程通解不知道的话，刚才的方法无效。我们的目标是给出可处理任何两点边值问题的数值方法。

# 存在性和唯一性

- 一般来说，只假设$f$是一个“好”的函数并不能保证解的存在性。如
$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 3, \quad y(\pi) = 7 \end{cases}$$
其中同前得到通解后，应用边值条件确定组合系数时，得到矛盾的方程组$3 = B$和$7 = -B$，因此问题无解。
- 关于两点边值问题解的存在性定理是相当复杂的。下面是Keller给出的一个结果。

**Theorem (边值问题解的存在性定理)**

当$\partial f / \partial y$连续、非负且在不等式$0 \leqslant x \leqslant 1, -\infty < y < +\infty$定义的无限带内有界时，边值问题
$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$
有唯一解

证明下述边值问题有唯一解：

$$\begin{cases} y'' = (5y + \sin 3y)e^x \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

- 这里

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (5 + 3\cos 3y)e^x$$

它在无限带$0 \leqslant x \leqslant 1, -\infty < y < +\infty$内是连续的，而且它以$8e$为上界。另外，由于$3\cos 3y \geqslant -3$，所以它是非负的。因此上述定理所需要的条件满足。

- 前节定理讨论的是一种特殊情形。但是通过简单的变量代换，就可以把更一般的问题化为这里的特殊情形。
- 假设原问题为

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

令$x = a + (b-a)s$, $z(s) = y(a+\lambda s)$, $\lambda = b - a$. 则有$z'(s) = \lambda y'(a+\lambda s)$, $z''(s) = \lambda^2 y''(a+\lambda s)$. 同样地，$z(0) = y(a) = \alpha$, $z(1) = y(b) = \beta$, 于是若$y$是上述边值问题的解，则$z$是下述边值问题的解：

$$\begin{cases} z'' = \lambda^2 f(a+\lambda s, z(s)) \\ z(0) = \alpha, \quad z(1) = \beta \end{cases}$$

反之亦然，即若$y$是后者的解，
则$y(x) = z((x-a)/(b-a))$是前者的解。

**Theorem**

考查下列两点边值问题：

$$1.\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} z'' = g(x,z) \\ z(0) = \alpha, \quad z(1) = \beta \end{cases}$$

其中$g(p,q) = (b-a)^2 f(a+(b-a)p, q)$. 若$z$是问题2的解，则函数$y(x) = z((x-a)/(b-a))$是问题1的解；反之，若$y$是问题1的解，则$z(x) = y(a+(b-a)x)$是问题2的解。

- 为了简化两点边值问题

$$\begin{cases} y'' = g(x, y) \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{cases}$$

为一个具有齐次边值的问题，从$y$中减去一个在0和1取值为$\alpha$和$\beta$的线性函数。

**Theorem (两点边值问题的第二定理)**

考查下列两点边值问题：

$$1.\ \begin{cases} y'' = g(x, y) \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} z'' = h(x, z) \\ z(0) = 0, \quad z(1) = 0 \end{cases}$$

其中$h(p, q) = g(p, q + \alpha + (\beta - \alpha)p)$. 若$z$是问题*2*的解，则函数$y(x) = z(x) + \alpha + (\beta - \alpha)x$是问题*1*的解；反之，若$x$是问题*1*的解，则$z(x) = y(x) - (\alpha + (\beta - \alpha)x)$是问题*2*的解。

## 例

说明下列问题有唯一解:

$$\begin{cases} y'' = [5y - 10x + 35 + \sin(3y - 6x + 21)]e^x \\ y(0) = -7, \quad y(1) = -5 \end{cases}$$

- 边界值非齐次，不能直接应用Keller定理。首先齐次化，设

$$z(x) = y(x) - \ell(x), \quad \ell(x) = -7 + 2x$$

则

$$\begin{aligned} z'' = y'' &= [5y - 10x + 35 + \sin(3y - 6x + 21)]e^x \\ &= \{5(z+\ell) - 10x + 35 + \sin[3(z+\ell) - 6x + 21]\}e^x \\ &= \{5z + \sin 3z\}e^x \end{aligned}$$

新变量$z$的边界值为齐次的，根据前面的例题，此问题解存在唯一。

中国科学技术大学

## 例

把下列问题转化为$[0,1]$区间上的齐次边界值问题：

$$\begin{cases} u'' = u^2 + 3 - x^2 + ux \\ u(3) = 7, \quad u(5) = 9 \end{cases}$$

- 由第一定理，此问题的等价问题为

$$\begin{cases} y'' = g(x,y) \\ y(0) = 7, \quad y(1) = 9 \end{cases}$$

其中$g(x,y) = 4f(3+2x,y)$
$= 4[y^2 + 3 - (3+2x)^2 + (3+2x)y]$。再由第二定理，另一个等价问题为

$$\begin{cases} z'' = h(x,z) \\ z(0) = 0, \quad z(1) = 0 \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} h(x,z) &= g(x, z+7+2x) \\ &= 4[(z+7+2x)^2 + 3 - (3+2x)^2 + (z+7+2x)(3+2x)] \end{aligned}$$

**Theorem (边值问题唯一解定理)**

设$f$为$(x,s)$的连续函数，其中$0\leqslant x\leqslant 1$, $-\infty<s<+\infty$. 假如在这个区域上

$$|f(x,s_1)-f(x,s_2)|\leqslant k|s_1-s_2|,\quad k<8$$

则两点边值问题

$$\begin{cases} y''=f(x,y) \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

在$C[0,1]$中有唯一解。

- 证明：采用Green公式和Banach压缩映射定理。

证明下列问题有唯一解：

$$\begin{cases} y'' = 2e^{x\cos y} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

- 这里$f(x,s) = 2e^{x\cos s}$，由中值定理，

$$|f(x,s_1) - f(x,s_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,s_3)\right||s_1 - s_2|$$

其中所需要的导数满足

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| = |2e^{x\cos s}(-x\sin s)| \leqslant 2e < 8$$

从而由定理，问题的解唯一。

# 打靶法:基本想法

- 考查初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = z \end{cases}$$

对任意的$z$，我们都可以应用前面的数值方法进行求解，记解为$y_z$。
因此对给定的$\beta$，当我们能选择$z$使得$y_z(b) = \beta$时，那么得到的$y_z$就是下列两点边值问题的解：

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- 即首先猜测$y'(a)$的一个值，得到近似解，测试是否有$y(b) = \beta$. 若$y(b) \neq \beta$, 则修改猜测值，继续进行求解和测试。这个过程称为打靶(shooting).

- 因此打靶法可以认为是求解下列的非线性方程：

$$\phi(z) \equiv y_z(b) - \beta$$

  这里的$y_z(x)$函数没有显式定义，只是满足对任意给定$z$，可以计算出对应的函数值，即新的边值与期望边值的差。

- 因此我们可以采用“数值代数”中求解非线性方程的方法进行求解。
  1. 二分法
  2. 割线法
  3. Newton法
  4. ……

- 割线法复习：对于方程$\phi(z)=0$以及给定的两个初值$\phi(z_1)$和$\phi(z_2)$，那么根是下述迭代的极限：

$$z_n = z_{n-1} - \frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{\phi(z_{n-1})-\phi(z_{n-2})}\phi(z_{n-1})$$

- 当已经得到的$z$值使得$\phi(z)$几乎为零时，则停止这个迭代过程，并利用插值多项式去估计较好的零点值。
  - 假设$\phi(z_1),\ldots,\phi(z_n)$很小，这里我们的目标是构造一个多项式$p(x)$满足$p(\phi(z_i))=z_i$, $i=1,2,\ldots,n$. 则下一个估计值是由$p(0)=z_{n+1}$确定。
  - 这相当于用多项式逼近$\phi$的反函数。方法成功的前提是$\phi$的根在一个邻域内有一个可微的反函数。

- 打靶法是非常耗时的方法，因此下面考查如何可以更有效地应用打靶法得出所需要的数值解。
  - 显然应该充分发掘$y'(a)$的任何信息。因为高精度在打靶法的第一步基本上是被浪费的，因此可以考虑用大步长求解初值问题。只有当$\phi(z)$值几乎是零时才使用较小的步长。
- 有一类问题，对其应用割线法可以一步得到精确解。实际上，当$\phi$为线性函数时就会发生这种情况。同样当微分方程是线性的时候也会出现这种情况。

# 线性函数

- 在线性情况下，两点边值问题具有形式

$$\begin{cases} y'' = u(x) + v(x)y + w(x)y' \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

  其中$u(x)$, $v(x)$, $w(x)$在区间$[a, b]$上连续。

- 假设已经用两个不同的初始条件两次求解上式相应的初值问题，得到解$y_1$和$y_2$，即

$$\begin{cases} y_1(a) = \alpha & y_1'(a) = z_1 \\ y_2(a) = \alpha & y_2'(a) = z_2 \end{cases}$$

中国科学技术大学

- 考虑$y_1$和$y_2$的一个线性组合：

$$y(x) = \lambda y_1(x) + (1-\lambda)y_2(x)$$

其中$\lambda$为一个参数。容易验证$y(x)$满足微分方程以及第一个初值条件，即$y(a)=\alpha$. 可以选择参数$\lambda$使得$y(b)=\beta$, 即为了满足

$$\beta = y(b) = \lambda y_1(b) + (1-\lambda)y_2(b)$$

可得

$$\lambda = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}$$

从而对应的$y(x)$即为给定两点边值问题的解。

- 在计算机中实际上述想法时，我们可以通过下述方法同时得到$y_1$和$y_2$
  1. 所考虑的初值问题分别为

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 1 \end{cases}$$

     其中$f(x,y,y') = u(x) + v(x)y + w(x)y'$. 第一个的解为$y_1$，第二个的解为$y_2$
  2. 为产生$x$不显式出现的一阶方程组，令$y_0 = x$，$y_3 = y_1'$，$y_4 = y_2'$，因而带有初值的微分方程组为

$$\begin{cases} y_0' = 1 & y_0(a) = a \\ y_1' = y_3 & y_1(a) = \alpha \\ y_2' = y_4 & y_2(a) = \alpha \\ y_3' = f(y_0, y_1, y_3) & y_3(a) = 0 \\ y_4' = f(y_0, y_1, y_4) & y_4(a) = 1 \end{cases}$$

  3. 对$a = x_0 \leqslant x_i \leqslant x_m = b$，离散函数近似值$y_1(x_i)$和$y_2(x_i)$应当存放在内存中。$\lambda$的值应用前面的公式计算，然后再分别计算出$x_i$上相应的$y$值。

# 二阶线性方程的理论基础

### Theorem

若$u$, $v$, $w$是闭区间$[a, b]$上的连续函数，则对任何实数对$\alpha$和$\alpha'$，初值问题

$$\begin{cases} y'' = u(x) + v(x)y + w(x)y' \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \alpha' \end{cases}$$

在$[a, b]$上有唯一解。

### Theorem

非齐次方程

$$y'' - vy - wy' = u$$

的每个解可以表示成$y_0 + c_1y_1 + c_2y_2$的形式，其中$y_0$为上述方程的特解，而$y_1$和$y_2$构成齐次方程

$$y'' - vy - wy' = 0$$

的线性无关的解集。

## Theorem

若线性两点边值问题

$$\begin{cases} y'' = u(x) + v(x)y + w(x)y' \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

有解，而且若$y_1$不是解，那么则有$y_1(b) - y_2(b) \neq 0$，而且$y$是所需要的解。(这里的$y_1$，$y_2$定义就是相应的初值问题的解，在$a$点导数值分别为0和1)

证明：设$y_0$，$y_1$，$y_2$分别是下列初值问题的解：

$$\begin{array}{lll} y_0'' = u + vy_0 + wy_0' & y_0(a) = \alpha & y_0'(a) = 0 \\ y_1'' = vy_1 + wy_1' & y_1(a) = 1 & y_1'(a) = 0 \\ y_2'' = vy_2 + wy_2' & y_2(a) = 0 & y_2'(a) = 1 \end{array}$$

由二阶线性微分方程理论，定理中给定的微分方程通解为

$$y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

其中$c_1$，$c_2$为任意常数。

前面讨论的$y_1$和$y_2$是通解的特殊情况。它们由下式给出：

$$y_1 = y_0 + z_1 y_2, \quad y_2 = y_0 + z_2 y_2$$

我们已经假定定理中的两点边值问题有解，那么存在$c_1$，$c_2$使得

$$\alpha = y_0(a) + c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a)$$
$$\beta = y_0(b) + c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b)$$

其中第一个式即为$c_1 = 0$. 于是$c_2$应当满足的式子为

$$\beta = y_0(b) + c_2 y_2(b)$$

若$y_1(b) - y_2(b) \neq 0$, 则前面定义的$y$就是所需要的解。
若$y_1(b) - y_2(b) = 0$, 此即$y_2(b) = 0$, 从而$y_0(b) = \beta$, 所以$y_1$是所需的解。 $\square$

- 现在讨论如何应用Newton方法求解两点边问题。
- 设$y_z$为下列问题的解

$$\begin{cases} y_z'' = f(x, y_z, y_z') \\ y_z(a) = \alpha, \quad y_z'(a) = z \end{cases}$$

  我们要选择$z$使得$\phi(z) \equiv y_z(b) - \beta = 0$.
- 关于$\phi$的Newton公式是

$$z_{n+1} = z_n - \frac{\phi(z_n)}{\phi'(z_n)}$$

# 导数计算

- 为了确定$\phi'$，对两点边值问题关于$z$求偏导，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_z''}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial y_z}\dfrac{\partial y_z}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial y_z'}\dfrac{\partial y_z'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} y_z(a) = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial z} y_z'(a) = 1 \end{cases}$$

- 令$v = \partial y_z / \partial z$, 上式简化为

$$\begin{cases} v'' = f_{y_z}(x, y_z, y_z')v + f_{y_z'}(x, y_z, y_z')v' \\ v(a) = 0, \quad v'(a) = 1 \end{cases}$$

这是一个初值问题，称为第一变分方程。它可以与关于$y_z$的初值问题一起求解。然后利用$v(b)$得到$\phi'(z)$:

$$v(b) = \frac{\partial y_z(b)}{\partial z} = \phi'(z)$$

从而可以应用Newton方法求解问题。

# 多重打靶法

- 多重打靶法(multiple shooting)是打靶法的一个重要发展。其基本策略是把给定的区间$[a, b]$分成子区间，并试图在每个小段上求解整体问题。
- 下面以区间$[a, b]$被分成$[a, c]$和$[c, b]$的情况说明多重打靶法。此时考虑的问题仍然为

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- 在每个子区间上，求解下列两个初值问题，得到解为$y_1$和$y_2$.

$$\begin{cases} y_1'' = f(x, y_1, y_1') & y_1(a) = \alpha & y_1'(a) = z_1, & a \leqslant x \leqslant c \\ y_2'' = f(x, y_2, y_2') & y_2(b) = \beta & y_2'(b) = z_2, & c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

这里$z_1$和$z_2$是所配置的参数。$y_2$的数值解按$x$递减方向进行。

- 下面的目标是调整参数$z_1$和$z_2$直到分段函数

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & a \leqslant x \leqslant c \\ y_2(x) & c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

变成问题的解。因此需要$y$和$y'$在$c$点上满足：

$$y_1(c) - y_2(c) = 0, \quad y_1'(c) - y_2'(c) = 0$$

- 通常选择$z_1$和$z_2$可以实现这一目标。可以采用二维Newton方法处理这一问题。
- 对$k$个子区间的多重打靶法将涉及到$k$个子函数。每个子函数通过求解一个初值问题得到。这$k$个子函数的初值构成一个有$2k$个参数的集合。在区间的$k-1$个内分点上的连续性得到$2k-2$个条件，再加上端点条件，正好参数个数与条件个数匹配。同样采用非线性方程组迭代求解。

- 同样考虑的是如下两点边值问题：

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- 把区间$[a, b]$离散化为$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$. 虽然不需要是均匀分布，但为了简化形式，后面假设

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

- 导数的近似计算公式为

$$y'(x) = \frac{1}{2h}(y(x+h) - y(x-h)) - \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}(y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)) - \frac{1}{12}h^2 y^{(4)}(\tau)$$

- 用$y_i$表示$y(x_i)$的近似值。把边值问题中的导数用前面的数值公式代替，则有如下离散形式

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ \dfrac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = f\big(x, y_i, (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)\big), \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ y_{n+1} = \beta \end{cases}$$

- 未知数为$y_1, \ldots, y_n$，方程个数为$n$. 若$f$为$y_i$的非线性形式，那么这些方程是非线性的，求解将变得非常困难。

# 线性情况

- 现在假定$f$关于$y$和$y'$是线性的，即

$$f(x,y,y') = u(x) + v(x)y + w(x)y'$$

则上述方程组成为线性方程组，形式为

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ \left(-1 - \dfrac{1}{2}hw_i\right)y_{i-1} + (2 + h^2 v_i)y_i \\ \qquad + \left(-1 + \dfrac{1}{2}hw_i\right)y_{i+1} = -h^2 u_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n \\ y_{n+1} = \beta \end{cases}$$

其中$u_i = u(x_i)$，$v_i = v(x_i)$，$w_i = w(x_i)$

- 引进缩写

$$a_i = -1 - \frac{1}{2}hw_{i+1}, d_i = 2 + h^2 v_i, c_i = -1 + \frac{1}{2}hw_i, b_i = -h^2 u_i$$

则方程组的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & & \\ & a_2 & d_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_0\alpha \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n - c_n\beta \end{pmatrix}$$

- 系数矩阵为三对角的，所以可用特殊的Gauss消去法求解。
- 特别地，当$h$足够小，而且$v_i > 0$时，矩阵是对角占优的，因为

$$|2 + h^2 v_i| > \left|1 + \frac{1}{2} h w_i\right| + \left|1 - \frac{1}{2} h w_i\right| = 2$$

- 在后面的收敛性分析中需要下面这个等式：

$$\begin{aligned} |d_i| - |c_i| - |a_{i-1}| &= 2 + h^2 v_i - \left(1 - \frac{1}{2} h w_i\right) - \left(1 + \frac{1}{2} h w_i\right) \\ &= h^2 v_i \end{aligned}$$

中国科学技术大学

- 下面证明当$h \to 0$时，离散解收敛于边值问题的解。为了知道边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

是否有唯一解，引用下面Keller给出的一个定理。

**Theorem**

边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) = c_{13} \\ c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) = c_{23} \end{cases}$$

若满足下列条件，则在$[a, b]$上有唯一解

1. $f$及其一阶偏导数$f_x$, $f_y$, $f_{y'}$在域$D = [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$上连续；
2. 在$D$上$f_y > 0$, $|f_y| \leqslant M$, $|f_{y'}| \leqslant M$；
3. $|c_{11}| + |c_{12}| > 0$, $|c_{21}| + |c_{22}| > 0$, $|c_{11}| + |c_{21}| > 0$, $c_{11}c_{12} \leqslant 0 \leqslant c_{21}c_{22}$

- 因此在线性问题中我们假设$u, v, w \in C[a, b]$, $v > 0$. 这样我们所考虑的两点边值问题有唯一解。
- 用$y(x)$表示问题的真解，$y_i$表示离散问题的解。这里$y_i$与$h$有关。我们将估计$|y(x_i) - y_i|$，并指出当$h \to 0$时它也趋向于零。
- $y(x)$满足下列方程组

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}(y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})) - \frac{1}{12}h^2 y^{(4)}(\tau_i) \\
&= u_i + v_i y(x_i) + w_i\left[\frac{1}{2h}(y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) - \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi_i)\right]
\end{aligned}
$$

- 另外一方面，离散解满足下述方程

$$
\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = u_i + v_i y_i + \frac{1}{2h}w_i(y_{i+1} - y_{i-1}))
$$

- 两式相减，并记$e_i = y(x_i) - y_i$, 则有

$$\frac{1}{h^2}(e_{i-1} - 2e_i + e_{i+1}) = v_i e_i + \frac{1}{2h} w_i (e_{i+1} - e_{i-1}) + h^2 g_i$$

其中

$$g_i = \frac{1}{12} y^{(4)}(\tau_i) - \frac{1}{6} y'''(\xi_i)$$

- 合并同类项，并且两边同乘以$-h^2$后，得到

$$\left(-1 - \frac{1}{2} h w_i\right) e_{i-1} + (2 + h^2 v_i) e_i + \left(-1 + \frac{1}{2} h w_i\right) e_{i+1} = -h^4 g_i$$

即

$$a_{i-1} e_{i-1} + d_i e_i + c_i e_{i+1} = -h^4 g_i$$

- 设$\lambda = \|e\|_\infty$，并且指标$i$满足

$$|e_i| = \|e\|_\infty = \lambda$$

这里$e$为向量$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. 这样从上式我们有

$$|d_i||e_i| \leqslant h^4|g_i| + |c_i||e_{i+1}| + |a_{i-1}||e_{i-1}|$$

- 因此有

$$\begin{aligned}
|d_i|\lambda &\leqslant h^4\|g\|_\infty + |c_i|\lambda + |a_{i-1}|\lambda \\
\lambda(|d_i| - |c_i| - |a_{i-1}|) &\leqslant h^4\|g\|_\infty \\
h^2 v_i \lambda &\leqslant h^4\|g\|_\infty \\
\|e\|_\infty &\leqslant h^2\frac{\|g\|_\infty}{\inf v(x)}
\end{aligned}$$

其中$\|g\|_\infty \leqslant \frac{1}{12}\|y^{(4)}\|_\infty + \frac{1}{6}\|y'''\|_\infty$。而$\|g\|_\infty / \inf v(x)$是一个与$h$无关的项，因此当$h \to 0$时$\|e\|_\infty$是$\mathcal{O}(h^2)$。

- 配置法所提供的思路可以用来解决应用数学中的许多问题。
- 假设给定一个线性算子$L$ (例如，积分算子或者微分算子)，并且希望求解方程

$$Lu = w$$

  其中$w$已知，$u$未知。
- 配置法求解此类问题的思路为：
  1. 选取某个基向量组$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，然后待定向量

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

  2. 为了尝试求解$Lu = w$, 把$u$的待定形式代入，得到

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} c_j L v_j$$

     从而得到

$$\sum_{j=1}^{n} c_j L v_j = w$$

- 一般来说，无法从
$$\sum_{j=1}^{n} c_j L v_j = w$$
中解出系数$c_1, c_2, \ldots, c_n$，但我们可以使之几乎成立。
- 在配置法中，向量$u$，$w$，$v_j$定义在相同的区域上。我们可以要求函数$w$与$\sum_{j=1}^{n} c_j L v_j$在$n$个给定点上的值相同，即
$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L v_j)(x_i) = w(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
- 这是一个由$n$个方程，$n$个未知数构成的线性方程组。因此可以计算出所需要的系数。当然我们应该选择函数$v_j$和点$x_i$使得上述线性方程组对应的矩阵非奇异。

- 问题的描述为

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = w \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

其中$p$, $q$, $w$已知，并且在$[0,1]$上连续。未知函数$u$也定义在区间$[0,1]$上，但期望它是二阶连续的。

- 定义

$$Lu \equiv u'' + pu' + qu$$

- 定义向量空间：

$$V = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$$

我们的目标是在$V$中寻找$Lu = w$的一个解。

- 如果从$V$中取一组基函数$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 则齐次边界条件自然满足。一种选择是

$$v_{jk}(x) = x^j(1-x)^k, \quad j,k \geqslant 1$$

容易验证这组基函数满足

$$\begin{aligned} v'_{jk} &= jv_{j-1,k} - kv_{j,k-1}, \\ v''_{jk} &= j(j-1)v_{j-2,k} - 2jkv_{j-1,k-1} + k(k-1)v_{j,k-2} \end{aligned}$$

- 因此很容易写出$Lv_{jk}$的表达式。从而可以采用配置法求解前面的问题。

- 下面考虑稍微更一般的问题：

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = w \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \end{cases}$$

这时可能更好的基函数选择是B样条。

- 为了使基函数具有二阶连续导数，考虑三次B样条，并且为了简化记号，取$x_{i+1} - x_i = h$. 并且用样条结点作为配置点。
- 设$n$是采用的基函数个数。为了确定$n$个系数，需要$n$个条件。其中包括两个端点条件：

$$\sum_{j=1}^{n} c_j v_j(a) = \alpha, \quad \sum_{j=1}^{n} c_j v_j(b) = \beta$$

- 而由于维数为$n$的三次样条空间，有$n-2$个结点，因此恰好取这些内结点作为配置结点，从而得到另外的$n-2$个条件:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(Lv_j)(x_i) = w(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

其中

$$h = \frac{b-a}{n-3}, \quad x_i = a + (i-1)h$$

这样我们有$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} = b$. 另外，为了定义完全的B样条基函数，需要对这些结点进行扩充。

- 此时对应的系数矩阵是带状的，可以考虑如何充分利用这一稀疏性质以提高效率。