Fourier 变换与滤波器

线性时不变算子 设 X, Y 分别为输入信号空间和输出信号空间. 称算子 $L: X \to Y$ 是线性时不变的, 如果满足

$$\text{线性: } L[\alpha f + \beta g] = \alpha L f + \beta L g.$$

$$\text{时不变: } L[f(t-a)] = L[f](t-a).$$

例 (卷积算子) 函数 l 具有有限支撑. 对任意信号 f, 定义算子

$$L[f](t) = (l * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t-x)f(x)dx, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

则 L 是线性时不变的. 因为对任意的 $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L[f(x-a)](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} l(t-x)f(x-a)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} l(t-a-x)f(x)dx \\ &= L[f](t-a). \end{aligned}$$

定理 设 L 是分片连续函数信号空间的线性时不变算子, 则存在可积函数 h, 使得对任意的信号 f 有

$$L[f] = f * h.$$

证明

第一步: 设 λ 是任意实数. 则存在 h 满足

$$L[e^{i\lambda x}](t) = \sqrt{2\pi}\hat{h}(\lambda)e^{i\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

定义函数 $h^\lambda(t) = L[e^{i\lambda x}](t),\ t \in \mathbb{R}$. 因为 L 是时不变的, 所以对任意的 $a \in \mathbb{R}$

$$L[e^{i\lambda(x-a)}](t) = h^\lambda(t-a).$$

又因为 L 是线性的, 我们有

$$\begin{aligned} L[e^{i\lambda(x-a)}](t) &= e^{-i\lambda a} L[e^{i\lambda x}](t) \\ &= e^{-i\lambda a} h^\lambda(t). \end{aligned}$$

从而对任意的 $a \in \mathbb{R}$

$$h^\lambda(t-a) = e^{-i\lambda a} h^\lambda(t).$$

特别地, 当 $t=a$ 时, 有

$$h^\lambda(0)=e^{-i\lambda a}h^\lambda(a).$$

从而对任意的 $t\in\mathbb{R}$

$$h^\lambda(t)=e^{i\lambda t}h^\lambda(0).$$

于是

$$L[e^{i\lambda x}](t)=h^\lambda(t)=h^\lambda(0)e^{i\lambda t}.$$

令 $\hat{h}(\lambda)=h^\lambda(0)/\sqrt{2\pi}$ 即可得证.

第二步: 函数 $\hat{h}(\lambda)$ 确定了算子 L.

将算子 L 作用于 Fourier 变换反演公式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

两边得

$$\begin{aligned}
L[f](t) &= L\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\Big](t)\\
&\approx L\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_j \hat{f}(\lambda_j)e^{i\lambda_j x}\Delta\lambda\Big](t)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_j \hat{f}(\lambda_j)L[e^{i\lambda_j x}](t)\Delta\lambda.\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)L[e^{i\lambda x}](t)d\lambda\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)\left(\sqrt{2\pi}\hat{h}(\lambda)e^{i\lambda t}\right)d\lambda\\
&= (f*h)(t).
\end{aligned}$$

$h, \hat{h}$ 的物理意义

假设 h 连续,δ 是小的正数. 考虑脉冲信号

$$f_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & if \ -\delta \le t \le \delta \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

将算子 L 作用于f_δ, 可得

$$\begin{aligned} L[f_\delta](t) = (f_\delta * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\delta(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &\approx h(t)\int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(\tau)d\tau = h(t). \end{aligned}$$

- $h(t)$ 是脉冲信号通过 L 后的近似响应, 称 h 是 L 的脉冲响应函数.
- 对于单频率信号 $e^{i\lambda t}$, $\hat{h}(\lambda)$ 构成了其响应幅度. 称 $\hat{h}$ 为 L 的系统函数.

因果滤波器

定义 输入信号到达后才产生输出信号的滤波器称为因果滤波器, 即

$$f(t) = 0,\ t < t_0 \ \Rightarrow\ L[f](t) = 0,\ t < t_0.$$

定理 设 L 是具有脉冲响应函数 h 的滤波器. L 是因果的当且仅当对于任意 $t < 0$, 有 $h(t) = 0$.

采样定理

频率带限信号 如果存在常数 $\Omega > 0$, 使得

$$\hat{f}(\lambda) = 0, \ |\lambda| > \Omega$$

成立, 则称 f 为频率带限信号. 或记为

$$supp \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega].$$

当 Ω 为满足上式的最小频率时, 称 $\nu := \frac{\Omega}{2\pi}$ 为 Nyquist 频率, 称 $2\nu := \frac{\Omega}{\pi}$ 为 Nyquist 采样率.

定理 (Shannon-Whittaker 采样定理)

假设 $\hat{f}(\lambda)$ 是分段光滑且频率带限的, 即存在常数 $\Omega > 0$, 使得 $supp\hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$. 则 f 可由其在 $t_j = j\pi/\Omega, j = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 上的采样值完全确定, 并可通过下列级数展开得到

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/\Omega) \frac{\sin(\Omega t - j\pi)}{\Omega t - j\pi}.$$

证明 在区间 $[-\Omega,\Omega]$ 上将 函数 $\hat{f}(\lambda)$ 进行 Fourier 级数展开

$$\hat{f}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\pi k\lambda/\Omega},$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\lambda)e^{-i\pi k\lambda/\Omega}d\lambda.$$

由于 $\hat{f}(\lambda)=0,\ |\lambda|>\Omega$, 所以 Fourier 系数可表示为

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{-i\pi k\lambda/\Omega}d\lambda\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(-k\pi/\Omega).\end{aligned}$$

于是有

$$\hat{f}(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(j\pi/\Omega)e^{-i\pi j\lambda/\Omega}.$$

由于 $\hat{f}$ 是分段光滑的,因此上述级数一致收敛, 而利用 Fourier 变换的反演公式又得到

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(j\pi/\Omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{-i\pi j\lambda/\Omega+i\lambda t}d\lambda.
\end{aligned}
$$

从而由积分

$$\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{-i\pi j\lambda/\Omega+i\lambda t}d\lambda = 2\frac{\Omega\sin(t\Omega-j\pi)}{t\Omega-j\pi},$$

可得重构公式

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}f(j\pi/\Omega)\frac{\sin(\Omega t-j\pi)}{\Omega t-j\pi}.$$