Homework-Romberg Numerical integration

PB18010496 杨乐园

2021 年 4 月 30 日

1 Introduction

编写计算定义在任意区间$[a,b]$上的函数f的$Romberg$算法，可指定计算到$Romberg$阵列的任意行数，并且输出整个阵列与计算误差，并用如上程序计算积分值验证算法正确性。

$$I_1(f)=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \qquad I_2(f)=\int_{-1}^1 \frac{\cos x-e^x}{\sin x}dx \qquad I_3(f)=\int_1^\infty \frac{1}{xe^x}dx$$

其中相关函数值时，用$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$代替一些无法直接定义的函数值。而对于第三个积分计算，采取变量替换$x=\frac{1}{t}$即可。

计算到$Romberg$阵列中的第七行，输出误差。

2 Method

$Romberg$算法计算公式如下：

$$\begin{cases} R(0,0)=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] & \\ R(n,0)=\frac{1}{2}R(n-1,0)+h_n\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a+(2i-1)h_n) & n\geq 1 \\ R(n,m)=R(n,m-1)+\frac{1}{4^m-1}[R(n,m-1)-R(n-1,m-1)] & n\geq 1, m\geq 1 \end{cases}$$

其中

$$h_0=b-a \qquad h_n=\frac{h_{n-1}}{2} \quad (n\geq 1)$$

故只需根据算法直接编写计算过程即可，$Romberg$算法如下：

romberg (f,a,b,M)

$h=(b-a)$

$R(0,0)=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$

for $n=1$ **to** M

  $h=h/2$

  $R(n,0)=\frac{1}{2}R(n-1,0)+h\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a+(2i-1)h)$

  for $m=1$ **to** n

    $R(n,m)=R(n,m-1)+\frac{1}{4^m-1}[R(n,m-1)-R(n-1,m-1)]$

3 Results

输出结果如下：

图 1: $I_1(f) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}$的$Romberg$阵列与误差

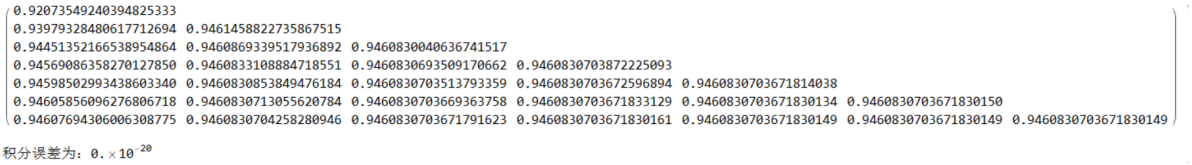


图 2: $I_2(f) = \int_{-1}^1 \frac{\cos x - e^x}{\sin x}$的$Romberg$阵列与误差

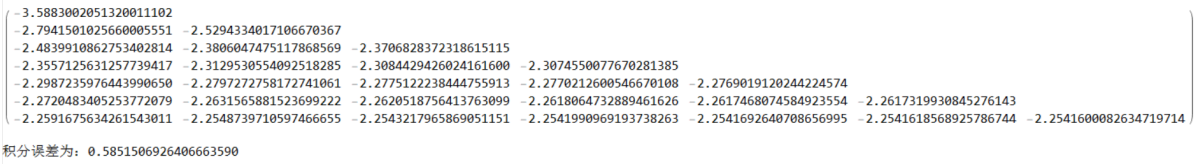
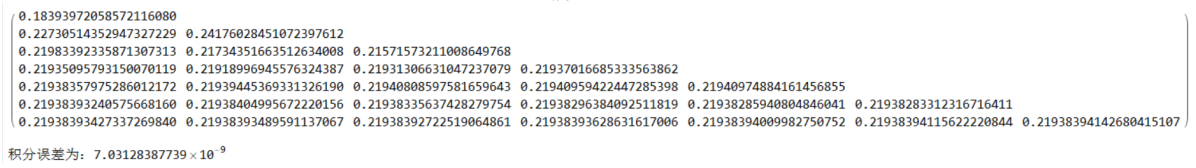


图 3: $I_3(f) = \int_1^\infty \frac{1}{xe^x}$的$Romberg$阵列与误差



4 Discussion

通过对数据的观察我们发现：

$Romberg$算法较好的给出积分的数值计算值，误差除了第二个积分计算有0.585较大，其他均十分小，结果良好。

5 Computer Code

代码部分请参见附件!(Homework9_0429.nb)。