1 能量方法

思想：直接考虑物理空间，构造数值解的范数 $\|\cdot\|_*$，使其每个时间步的增加不超过 $e^{\alpha\Delta t}$，

$$\|v^{n+1}\|_* \le e^{\alpha\Delta t}\|v^n\|_*$$

再利用范数等价原理，考虑其离散的 L^2 范数

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x} \le C_1\|v^{n+1}\|_* \le C_1 e^{\alpha\Delta t}\|v^n\|_* \le C_1 e^{\alpha t_n}\|v^0\|_* \le C_2 e^{\alpha t_n}\|v^0\|_{\Delta x}$$

回顾：离散意义下的内积和 L^2 范数：

$$(u,v)_{\Delta x} = \sum_{j=0}^{N} \bar{u}_j v_j \Delta x, \quad \|u\|_{\Delta x}^2 = (u,u)_{\Delta x} = \sum_{j=0}^{N} \bar{u}_j u_j \Delta x$$

若 u,v 是连续函数定义在格点上，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}(u,v)_{\Delta x} = (u,v) = \int \bar{u}(x)v(x)dx$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\|u\|_{\Delta x}^2 = (u,u) = \int \bar{u}(x)u(x)dx$$

过程：

(1) 选取适当的检验函数，建立能量范数的递推关系；

(2) 指出能量范数同离散 L^2 模的等价关系；

(3) 导出差分格式的 L^2 模稳定性，给出相应的充分条件。

常用的工具：

(1) 求和性质（一般形式，注意周期边界）

$$\sum_{j=1}^{N}\left(v_j(w_{j+1}-w_j)+w_j(v_j-v_{j-1})\right) = v_N w_{N+1} - v_0 w_1$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(v_j(w_{j+1}-w_{j-1})+w_j(v_{j+1}-v_{j-1})\right) = v_N w_{N+1} + w_N v_{N+1} - v_0 w_1 - v_1 w_0$$

(2) Cauchy-Schwartz 不等式

$$|(u,v)_{\Delta x}| \le \|u\|_{\Delta x}^{1/2}\|v\|_{\Delta x}^{1/2}$$

(3) $\varepsilon-ab$ 不等式

$$|ab|\le \varepsilon a^2+\frac{1}{4\varepsilon}b^2,\quad \varepsilon>0$$

(4) 离散的 Gronwall 不等式：

设 $\{f_n\}_{n\ge 0}$ 和 $\{g_n\}_{n\ge 0}$ 是两个肺腑序列，$\{g_n\}_{n\ge 0}$ 是单增序列。如果存在给定的正数 C，使得

$$f_{n+1}\le C\sum_{m=0}^{n} f_m\Delta t+g_{n+1},\quad n\ge 0$$

则当 Δt 充分小，有

$$f_n\le e^{Cn\Delta t}g_n$$

- **例：** 线性方程 $u_t=u_x$，考虑其 Crank-Nicolson 格式

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta t}{2}Q(v_j^{n+1}+v_j^n),\quad 其中\ Q=D_0=\frac{E^1-E^{-1}}{2\Delta x}$$

- **例：** 线性方程 $u_t=a(x)u_x$，$a(x)$ 满足 Lipschitz 连续，考虑其 Crank-Nicolson 格式

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta t}{2}Q(v_j^{n+1}+v_j^n),\quad 其中\ Q=Q_j=a_jD_0$$

- **例：** 变系数线性方程 $u_t=(a(x,t)u_x)_x, a(x,t)>0$，考虑其格式

$$\begin{aligned}v_j^{n+1}=&v_j^n+\Delta tQv_j^n=v_j^n+\Delta tD_-(a_{j+1/2}^nD_+v_j^n)\\=&v_j^n+\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(a_{j+1/2}^n(v_{j+1}^n-v_j^n)-a_{j-1/2}^n(v_j^n-v_{j-1}^n)\right)\end{aligned}$$

其中 $a_{j+1/2}^n=a(x_{j+1/2},t^n)$ 或 $a_{j+1/2}^n=\frac{1}{2}\left(a(x_j,t^n)+a(x_{j+1},t^n)\right)$。

- **例：** 线性方程 $u_t=u_x$，考虑其 Leap-Frog 格式

$$v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+2\Delta tQv_j^n,\quad 其中\ Q=D_0=\frac{E^1-E^{-1}}{2\Delta x}$$

Homework: 讨论 $u_t+a(x,t)u_x=0$，其中 $a(x,t)>0$ 且 $a_x(x,t)$ 有界。讨论 Lax-Friedrichs 格式的 L^2 模稳定性:

$$v_j^{n+1}=\frac{1}{2}(v_{j+1}^n+v_{j-1}^n)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}a_j^n(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)$$