习题一

1. $(A, I) \Rightarrow (I, A^{-1})$ 用算法描述即可

其它合理答案亦可

2. 记 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ $T=(t_{ij})_{n\times n}$ $b=(b_i)_{n\times 1}$, $x=(x_i)_{n\times 1}$

∵ $ST=(\sum_{k=i}^{j} s_{ik}t_{kj})_{n\times n}$ (~~$i\leq j$~~) $(j\geq i)$ 规定 $j<i$ 时不求和

∴ $(ST-\lambda I)x=b \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=i}^{j} s_{ik}t_{kj})x_j = b_i+\lambda x_i$ $\forall i\in[1,n$

交换上式左边的求和顺序：LHS $= \sum_{k=i}^{n}\sum_{j=k}^{n} s_{ik}t_{kj}x_j$

这里可以直接算出 $= \sum_{k=i}^{n} s_{ik}(\underbrace{\sum_{j=k}^{n} t_{kj}x_j}_{\text{与 } i \text{ 无关}}) = b_i+\lambda x_i$

$x_n=b_i/(s_{nn}t_{nn}-\lambda)$

∴ $s_{ii}t_{ii}x_i + \sum_{k=i+1}^{n} s_{ik}(\sum_{j=k}^{n} t_{kj}x_j) + s_{ii}\sum_{j=i+1}^{n} t_{ij}x_j = b_i+\lambda x_i$

$(k=j=1)$ $(k>j)$ $(k=i, j>i)$

记 $U_k=\sum_{j=k}^{n} t_{kj}x_j$ (仅包含 $x_k \sim x_n$)

$\Rightarrow x_i = (\sum_{k=i+1}^{n} s_{ik}U_k + s_{ii}\sum_{j=i+1}^{n} t_{ij}x_j - b_i)/(\lambda - s_{ii}t_{ii})$

从 x_{n-1} 算到 x_1 即可

代价：①算所有 u_k：$\sum_{k=2}^{n-1}(2n-2k+1) \sim O(n^2)$

②算所有 x_i：$\sum_{i=1}^{n-1}(2n-2i-1)\times 2+4 \sim O(n^2)$

3. 显然 $I+l_k e_k^T$ 为 Gauss 向量为 $-l_k$ 的 Gauss 变换

4.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\8\end{pmatrix}$$

Since $(7-3)/2=2$

$(8-4)/2=2$

5. 反证：假设 $A=L_1U_1=L_2U_2$ 显然 L_1, L_2, U_1, U_2 可逆

$$\Rightarrow \underbrace{L_1^{-1}L_2}_{\text{单位下三角}} = \underbrace{U_1U_2^{-1}}_{\text{上三角}} = I$$

$\Rightarrow L_1=L_2,\quad U_1=U_2$

6.

$$L=\begin{pmatrix}1&&&\\-1&\ddots&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\-1&\cdots&-1&1\end{pmatrix}\qquad U=\begin{pmatrix}1&&&1\\&\ddots&&2\\&&&\vdots\\&&1&2^{n-2}\\&&&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

易验证 $A=LU$，

或用归纳法

假设 $A_k=(L_k\cdots L_1)A=[e_1,\cdots e_k, e_{k+1}+l_{k+1},\cdots e_{n-1}+l_{n-1}, \alpha_k]$

$l_k=(\underbrace{0,0,\cdots 0}_{k\text{个}},-1,-1\cdots -1)^T$，$\alpha_k=(1,2,\cdots 2^k,2^k,2^k,\cdots 2^k)^T$

证明 $L_{k+1}A_k=(I-l_{k+1}e_k^T)A_k$ 具有相同形式即可

7. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow L_1 = I - \frac{a_1 e_1^T}{a_{11}}$

$\Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T$ 对称

8. 记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_2 & A_1 \end{pmatrix}$

即记 $A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_2 a_1^T$ 对角占优即可

$\Leftrightarrow \left| a_{i+1,i+1} - \frac{1}{a_{11}} a_{i+1,1} a_{1,i+1} \right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \left| a_{i+1,j+1} - \frac{1}{a_{11}} a_{i+1,1} a_{1,j+1} \right|$

$\because \text{RHS} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |a_{i+1,j+1}| + \frac{|a_{i+1,1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |a_{1,j+1}|$

$< (|a_{i+1,i+1}| - |a_{i+1,1}|) + (|a_{i+1,1}| - \frac{1}{|a_{11}|} |a_{i+1,1} \cdot a_{1,i+1}|)$

$= |a_{i+1,i+1}| - \frac{1}{|a_{11}|} |a_{i+1,1} \cdot a_{1,i+1}|$

$\leq \text{LHS}$

9. 直接对 $[A, b]$ 同时做 Gauss 变换 记 $[A, b] \Rightarrow [U, L^{-1}b]$

再对 $Ux = L^{-1}b$ 后代法 求解即可

次数为 $\underbrace{O(n^3)}_{\text{Gauss变换}} + \underbrace{O(n^2)}_{\text{后代法}} = O(n^3)$

10. (正定的前提是对称)

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 A L_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_{11}} & I \end{pmatrix}$

设 $\vec{x} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$, $\vec{y} = L_1^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$\therefore x^T A_2 x = y^T A y > 0 \Rightarrow A_2$ 正定

11. 设 $A_{11} = LU$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ A_{21}U^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & L^{-1}A_{12} \\ 0 & S \end{pmatrix}$$ ✓

12. 反证：若 $\exists\ i<j$，$|u_{ii}| < |u_{ij}|$

$\because$ 第 i 次 Gauss 变换前 $|u_{ii}| = \max\limits_{\substack{m\geq i \\ n\geq i}} |a_{mn}^{(i-1)}|$，且第 i 次变换不改变第 i 行的值

注意到第 $i+1$ 次及之后的变换仅改变 ~~$i+1$ 行~~ $i+1 \sim n$ 行的值

$\therefore\ |u_{ij}| = |a_{ij}^{(i-1)}| \leq |u_{ii}|$

13. $PA = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$

or 解方程 ~~PA~~ $A[x_1, x_2, \cdots x_n] = I$

$\Rightarrow LU[x_1, x_2, \cdots x_n] = P$ 运用前代、回代法

$\Rightarrow A^{-1} = [x_1, x_2, \cdots x_n]$

14. $A[x_1, x_2, \cdots x_n] = I$

则 $A^{-1}(i,j) = x_j(i)$

故求解 $LU \cdot x_j = e_j$ 即可

15. 设 $A^T = \tilde{L}\tilde{U}$，由 8 知 $\tilde{U}$ 严格对角占优

$\therefore\ A = \tilde{U}^T\tilde{L}^T$ 令 $L = \tilde{U}^T D$，$U = D^{-1}\tilde{L}^T$ 即可

$D = \mathrm{diag}(\tilde{u}_{ii}^{-1})$

16. (1) $N(y,k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & -y_1 & \\ & \vdots & \\ & -y_{k-1} & \\ & 1-y_k & \\ & -y_{k+1} & \\ & \vdots & I_{n-k} \\ & -y_n & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}k \times \frac{1}{1-y_k}} \begin{pmatrix} I_{k-1} & -y_1 & \\ & \vdots & \\ & -y_{k-1} & \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ & -y_n & I_{n-k} \end{pmatrix}$

行i加上y_i×行$_k$ I

$\therefore N(y,k)^{-1} = I - \frac{y}{y_k - 1} e_k^T$

(2) $(I - y e_k^T) x = e_k \iff y = \frac{1}{x_k}(x - e_k)$ $x_k \neq 0$

(3) 记$A = [\alpha_1, \cdots \alpha_n]$

则寻找 y_1, s.t. $N(y_1, 1)\alpha_1 = e_1$

$\Rightarrow A^{(1)} = N(y_1, 1) A = [e_1, \alpha_2^{(1)} \cdots, \alpha_n^{(1)}]$

找 y_2, s.t. $N(y_2, 2)\alpha_2^{(2)} = e_2$

$\because (I - y_2 e_2^T) e_1 = e_1$

$\Rightarrow A^{(2)} = N(y_2, 2) A = [e_1, e_2, \alpha_3^{(2)} \cdots \alpha_n^{(2)}]$

以此类推，$A^{(n)} = I$.

$\therefore A^{-1} = N(y_n, n) N(y_{n-1}, n-1) \cdots N(y_1, 1)$

进行到底 $\iff a_{kk}^{(k)} \neq 0 \iff A$

17. $A = L_1 L_1^T = L_2 L_2^T$

$\therefore L_2^{-1} L_1 = L_2^T L_1^{-T} = (L_2^{-1} L_1)^{-T}$，记$P = L_2^{-1} L_1$. 则P正交且P即为对角阵

$\Rightarrow L_2^{-1} L_1 = I$

$L_1 = L_2$

18，L的带宽为$n+1$，下证：

设$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$，由题设 $\forall i > n+k$ $a_{ik} = 0$

$\because l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} l_{kp}) / l_{kk}$

对k进行归纳，假设 $\forall p \le k$, $l_{ip} = 0$，$\forall i > n+p$

则由上式知 $l_{ik} = 0$ $p=1$时，$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} = 0$ 显然成立

18. 补充 带状矩阵的 LU 分解

(1) 带状矩阵的定义：对 $m\times n$ 的矩阵 A，若对 $\forall j > i+q$，均有 $a_{ij}=0$，则称 A 具有上带宽 q；对 $\forall\ i>j+p$ 均有 $a_{ij}=0$，则称 A 具有下带宽 p。矩阵 A 的带宽为 $p+q+1$

(2) 若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 上下带宽分别为 q. p，且 A 有三角分解 $A=LU$，则 U 的上带宽为 q，L 的下带宽为 p

证明类似于 18题，用归纳法即可

19

记 $A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & \quad n-i \end{array} & \end{array}$ $\quad L=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & L_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & \quad n-i \end{array} & \end{array}$

$\therefore\ LL^T=\begin{pmatrix} L_1L_1^T & * \\ * & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1=L_1L_1^T$

20、21、22、23 略

24. (1) 对称性显然

$\because\ (A+iB)^*=A^T-iB^T \Rightarrow A=A^T,\ B=-B^T$

$\because\ (x^T,y^T)\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^TAx+y^TAy\underbrace{-x^TBy+y^TBx}$ $(*)$

不能约掉

$(y^TBx)^T=x^TB^Ty=-x^TBy$

又对 $\forall z.w\in\mathbb{R}^n$ $(z^T-iw^T)(A+iB)(z+iw)\geq 0$ (H正定)

$\Rightarrow z^TAz+w^TBz+w^TAw-z^TBw\geq 0$

令 $z=w,\ w=Y$，则 $(*)\geq 0 \Rightarrow$ C正定

(2) 求解 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ 啊

小测：

1. $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

pf: $\|A\|_2 = \cancel{\max}\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} \le \sqrt{Tr(A^TA)} = \|A_F\| \le \sqrt{n\,\lambda_{max}(A^TA)} = \sqrt{n}\,\|A\|_2$

2. $\max_{i,j}|a_{ij}| \le \|A\|_2 \le n\max_{i,j}|a_{ij}|$

pf: 不妨 $|a_{pq}| = \max_{i,j}|a_{ij}|$

$\therefore \max_{i,j}|a_{ij}| = |e_p^T A e_q| \le \max_{\|y\|_2=\|x\|_2=1}|y^TAx| = \|A\|_2$

$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le n\,|a_{pq}|$

3. $\|A\|_\infty/\sqrt{n} \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$

不妨 $\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|$ ，令 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}(sgn(a_{k1}), \cdots sgn(a_{kn}))^T$

$\therefore \sqrt{n}\,\|A\|_2 \ge \sqrt{n}\,\|Ax\|_2$ ，记 $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$ $\vec{a}_i \in \cancel{\mathbb{R}^n}\mathbb{R}^{1\times n}$

$\therefore \sqrt{n}\,\|Ax\|_2 = \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}_i\cdot\vec{x})^2} \ge \sqrt{n\cdot(\vec{a}_k\cdot\vec{x})^2} = \|A\|_\infty$

又 $\|A\|_2 \le \|A\|_F \underbrace{\le \sqrt{n}}\,\|A\|_\infty$

两边~~求~~平方后显然.

2. (方法)

Lemma：设 $S=\begin{array}{cc|l} s_{11} & \vec{s}_{12} & 1 \\ 0 & S_1 & n-1 \\ 1 & n-1 & \end{array}$ ，$T=\begin{array}{cc|l} t_{11} & \vec{t}_{12} & 1 \\ 0 & T_1 & n-1 \\ 1 & n-1 & \end{array}$ ，$\vec{b}=\begin{array}{c|l} \beta & 1 \\ \vec{b}_1 & n-1 \end{array}$

若方程 $(ST-\lambda I_n)\vec{x}=\vec{b}$ 非奇异，且 $\vec{x}_1\in\mathbb{R}^{n-1}$ 满足 $(S_1T_1-\lambda I_{n-1})\vec{x}_1=\vec{b}_1$

则 $\vec{x}=\begin{pmatrix}\gamma\\ \vec{x}_1\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\ n-1\end{matrix}$ 是 $(ST-\lambda I)\vec{x}=\vec{b}$ 的解

其中 $\gamma=(\beta-s_{11}\vec{t}_{12}\vec{x}_1-\vec{s}_{12}T_1\vec{x}_1)/s_{11}t_{11}-\lambda$

证明：代入验证即可

回到原题，我们便可以设计一种算法，从 x_n 自下而上算到 x_1

```
x = b(n) / ( S(n,n) T(n,n) - λ )
for k = n-1 to 1
    if k == n-1
        w = T(n,n) x
    else
        w = ( T(k+1, k+1:n) x
                    w        )        } 计算 $w = T_1\vec{x}_1$
    γ = $\frac{1}{2}$ (b(k) - S(k,k) T(k,k+1:n) x - S(k,k+1:n) w )
    x = ( γ
          k )
```

复杂度：∵每次循环都只需要算三个向量内积，时间复杂度 $O(n)$

故整体复杂度为 $O(n^2)$