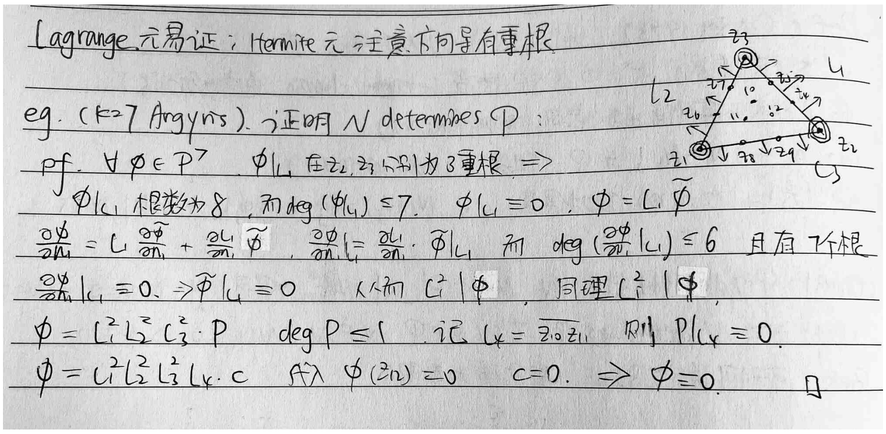
有限元方法 2021 秋（10 月 25、27 日作业）

金晨浩 SA21001033



Lagrange 元易证；Hermite 元注意方向导有重根

eg.（k=7 Argyris）证明 $\mathcal{N}$ determines $\mathcal{P}$：

pf. $\forall \phi \in \mathcal{P}^7$，$\phi|_{L_1}$ 在 z_2, z_3 分别为 3 重根 $\Rightarrow$

$\phi|_{L_1}$ 根数为 8，而 $\deg(\phi|_{L_1}) \le 7$，$\phi|_{L_1} \equiv 0$，$\phi = L_1 \tilde{\phi}$

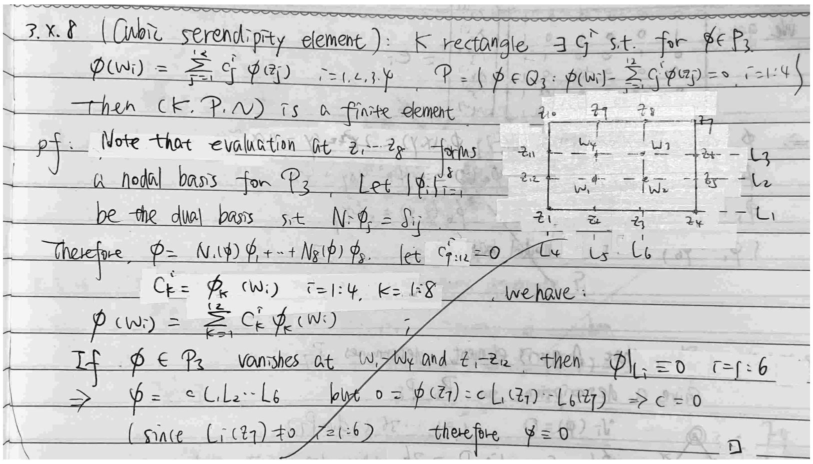
$\frac{\partial \phi}{\partial n_1} = L_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n_1} + \frac{\partial L_1}{\partial n_1} \tilde{\phi}$，$\frac{\partial \phi}{\partial n_1}\big|_{L_1} = \frac{\partial L_1}{\partial n_1} \cdot \tilde{\phi}|_{L_1}$ 而 $\deg(\frac{\partial \phi}{\partial n_1}|_{L_1}) \le 6$ 且有 7 个根

$\frac{\partial \phi}{\partial n_1}|_{L_1} \equiv 0$，$\Rightarrow \tilde{\phi}|_{L_1} \equiv 0$ 从而 $L_1^2 \mid \phi$，同理 $L_i^2 \mid \phi$，

$\phi = L_1^2 L_2^2 L_3^2 \cdot P$ $\deg P \le 1$，记 $L_4 = \overline{z_{10} z_{11}}$ 则 $P|_{L_4} \equiv 0$.

$\phi = L_1^2 L_2^2 L_3^2 L_4 \cdot c$ 代入 $\phi(z_{12}) = 0$ $c = 0$. $\Rightarrow \phi \equiv 0$. □

图 1: 3.x.8 Argyris7 验证过程



3.x.8 (Cubic serendipity element): K rectangle $\exists c_j^i$ s.t. for $\phi \in P_3$

$\phi(w_i) = \sum_{j=1}^{12} c_j^i \phi(z_j)$ $i=1,2,3,4$，$\mathcal{P} = \{\phi \in Q_3 : \phi(w_i) - \sum_{j=1}^{12} c_j^i \phi(z_j) = 0, i=1:4\}$

Then $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ is a finite element.

pf: Note that evaluation at $z_1 \cdots z_8$ forms a nodal basis for P_3. Let $\{\phi_i\}_{i=1}^{8}$ be the dual basis s.t. $N_i \phi_j = \delta_{ij}$.

Therefore, $\phi = N_1(\phi)\phi_1 + \cdots + N_8(\phi)\phi_8$. let $c_{9:12}^i = 0$

$c_k^i = \phi_k(w_i)$ $i=1:4$, $k=1:8$, we have:

$\phi(w_i) = \sum_{k=1}^{12} c_k^i \phi_k(w_i)$;

If $\phi \in P_3$ vanishes at $w_1 - w_4$ and $z_1 - z_{12}$, then $\phi|_{L_i} \equiv 0$ $i=1:6$

$\Rightarrow \phi = c L_1 L_2 \cdots L_6$ but $0 = \phi(z_7) = c L_1(z_7) \cdots L_6(z_7) \Rightarrow c = 0$

(since $L_i(z_7) \ne 0$ $i=1:6$) therefore $\phi \equiv 0$ □

图 2: 3.x.12 四边形元验证过程

3.x.13 **设 K 为矩形，$\mathcal{P} = Q_1$，则以矩形四边中点为点泛函的节点基无法决定 $\mathcal{P}$。**

证明. 不妨设 K 以 $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ 为顶点，则 $\phi(x,y) = -2xy + x + y - \frac{1}{2}$ 在四边中点取值均为 0 但 $\phi \not\equiv 0$. □

Remark:

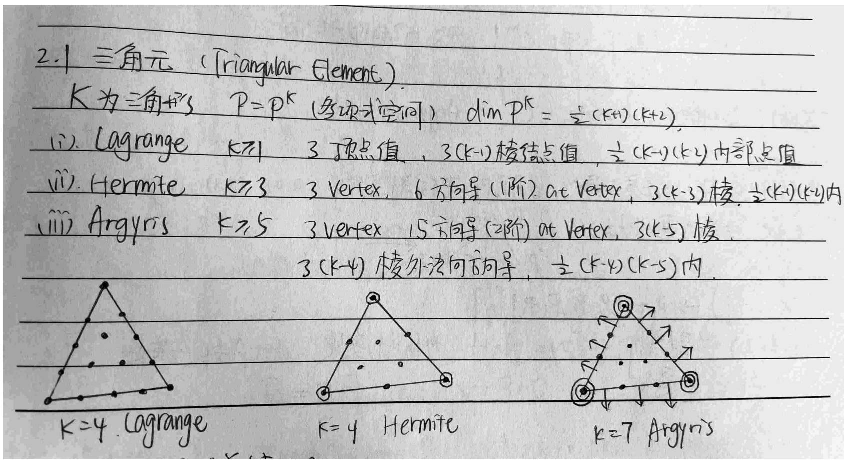


图 3: 三角有限元整理

补充题 1. 考虑模型问题 $\begin{cases} -\Delta u = f, \ x \in \Omega = [0,1]^2 \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$
构造 P^1 有限元，$h = \frac{1}{N+1}$，均匀三角网格剖分，求解刚度矩阵与质量矩阵。

证明. 刚度矩阵 K、质量矩阵 M 均为 $N \times N$ 的方阵，各分量为

$$K_{ij} = \begin{cases} 4, & i = j \\ -1, & |i-j| = 1 \text{或} N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad M_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}h^2, & i = j \\ \frac{1}{12}h^2, & |i-j| = 1 \text{或} N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

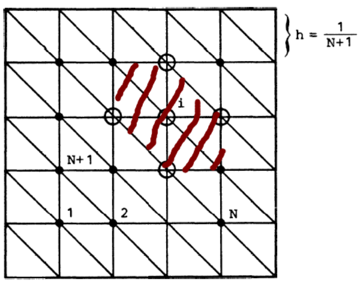


图 4: 注意基函数的支集范围和三角元对角线的走向有关

注意数量级、基函数的支集！我这里的基函数按（从下到上）第 r 行（从左往右）第 c 列为第 $(r-1)N+c$ 个元素的顺序排列。那么第 r 行第 c 列的基函数和第 $r+1$ 行第 $c+1$、第 $r-1$ 行第 $c-1$ 列的基函数支集交仅为一条边。故 K, M 矩阵带宽均为 $2N+1$。 □

夏老师黑板上写的三角元对角线的走向与我这不一样。如果那样取的话，基函数按从下往上、从右往左的顺序编号即可得到一样的结果。

补充题 2. 在标准三角元上验证 Morley 元是有限元，并证明 Morley 元不是 C^0 的。

证明. 验证三角元的过程即死算。考虑 K_1, K_2 是以 $(0,0), (1,0)$ 为公共边且关于其对称的两个三角形，K_1 以 $(0,0), (1,0), (0,1)$ 为顶点。取

$$\phi(x,y) = x(1-x).$$

那么 ϕ 在 $(0,0), (0,1)$ 上不连续但 $\mathcal{I}_K\phi$ 连续。 □