偏微分方程数值方法

一般问题数值格式的稳定性分析

标记 $\vec{u}=(u^{(1)},\cdots,u^{(m)})^T$ 为有 m 个分量的向量，$\vec{x}=(x^{(1)},\cdots,x^{(d)})^T$ 为 d 维空间分量。考虑一般问题：

- 变系数方程

$$\begin{cases} \vec{u}_t(\vec{x},t)=P(\vec{x},t,\frac{\partial}{\partial\vec{x}})\vec{u}, \quad t\geq t_0, \\ \vec{u}(\vec{x},t_0)=\vec{f}(\vec{x}), \end{cases} \tag{1}$$

其中，p 阶微分算子定义为

$$P(\vec{x},t,\frac{\partial}{\partial\vec{x}})=\sum_{|\vec{\gamma}|\leq p}A_{\gamma}(\vec{x},t)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{\gamma_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^{(d)}}\right)^{\gamma_d}$$

例如：

(1) 变系数对流方程：$u_t+a(x,t)u_x=0$

(2) 非守恒型扩散方程：$u_t=a(x,t)u_{xx}, \quad a(x,t)\geq\alpha>0$

(3) 守恒型扩散方程：$u_t=(a(x,t)u_x)_x=a(x,t)u_{xx}+a_x(x,t)u_x, \quad a(x,t)\geq\alpha>0$

Lax-Richtmyer **定理：** 若线性变系数差分格式相容于某个适定的线性偏微分方程定解问题，则它的稳定性和收敛性是彼此等价的。

- 非线性方程，

$$\begin{cases} \vec{u}_t(\vec{x},t)=P(\vec{x},t,\frac{\partial}{\partial\vec{x}},\vec{u})\,\vec{u}, \quad t\geq t_0, \\ \vec{u}(\vec{x},t_0)=\vec{f}(\vec{x}), \end{cases} \tag{2}$$

例如：

(1) 非线性一阶双曲型方程：$u_t+f(u)_x=0$

(2) 非线性扩散方程：$u_t=g(u,x,t)_{xx}, \quad g_u\geq\alpha>0$

$u_t=(a(u,x,t)u_x)_x, \quad a\geq\alpha>0$

Strang **定理：** 若非线性差分格式相容于某个适定的非线性偏微分方程定解问题，则它的稳定性和收敛性是彼此等价的。

常用的稳定性分析技术：

(1) Fourier 方法：空间网格为等距的，考虑线性常系数差分格式的纯初值问题或者周期边值问题，可以给出 L^2 模稳定性的充要条件；
注：Fourier 方法只能适用于线性常系数（A_γ 为常值）差分格式，不能应用于线性变系数格式或非线性差分格式；

(2) 离散最大模原理：给出最大模稳定的充分条件；

(3) 冻结系数方法：给出稳定性的必要条件，没有明确的给出具体的离散范数；

(4) 能量法：严格建立差分格式 L^2 模稳定的充分条件；

(5) 直接矩阵方法：可以精确指出数值边界条件对于格式的稳定性的影响，考虑的是有界空间区域，网格函数的离散范数等价于向量的范数，相应的算子范数等价于矩阵范数；

(6) GKS 方法：可以精确指出数值边界条件对于格式的稳定性的影响，其理论基础是半无界区域的 Laplace 变换。

下面介绍三种常用的方法：离散最大模原理、冻结系数方法和能量方法。
假设：A_γ，$\vec{f}$ 和 $\vec{u}$ 在 x 方向均以 2π 为周期，对区间 $[0,2\pi]$ 进行均匀剖分 $\Delta x=\frac{2\pi}{N+1}$

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_N<x_{N+1}=2\pi$$

注： 离散最大模原理和能量法可以处理线性变系数、非线性、非周期边界和非等距网格等因素。

1 离散最大模原理

思想： 若任意网格点的差分格式均满足凸组合系数结构，则差分格式满足离散最大模原理。进而，格式具有最大模（L^∞ 模）稳定性，即 $\|v^n\|_\infty$ 随时间非增。

- **例：** 方程 $u_t=a(x,t)u_{xx}$ 的格式

$$v_j^{n+1}=v_j^n+a(x_j,t^n)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n\right)$$

- **例**：方程 $u_t = au_{xx}$ 的格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n + a\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(\theta(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) + (1-\theta)(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)\right)$$

注：离散最大模原理只是最大模稳定的充分条件，不一定是必要条件。

2 冻结系数方法

思想：当离散网格变密时，系数可以视为局部恒定，甚至将线性变系数差分格式直接视为某个线性（或分片）常系数差分方程的微小扰动。若作为参考对象的线性常系数差分格式是（不）稳定的，则线性变系数差分格式也是（不）稳定的。

过程：

(1) 将差分系数冻结为某个常数，导出相应的线性常系数差分格式；

(2) 利用其他的准确分析技术，给出相应的稳定性结论；

(3) 考虑所有合理的系数冻结范围，所有的稳定性结论的交集就是冻结系数方法给出的结果。

- **例**：方程 $u_t = a(x,t)u_{xx}$ 的格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n + a(x_j, t^n)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n\right)$$

- **例**：方程 $u_t = b(u)u_{xx}$ 的格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n + b(v_j^n)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n\right)$$

- **例**：方程 $u_t + a(x)u_x = 0$ 的格式

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} - a(x_j, t^n)\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right)$$

注：冻结系数方法是模稳定的必要条件，不一定是充分条件。

3 能量方法

思想：直接考虑物理空间，构造数值解的范数 $\|\cdot\|_*$，使其每个时间步的增加不超过 $e^{\alpha\Delta t}$，

$$\|v^{n+1}\|_* \leq e^{\alpha\Delta t}\|v^n\|_*$$

再利用范数等价原理，考虑其离散的 L^2 范数

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x} \leq C_1\|v^{n+1}\|_* \leq C_1 e^{\alpha\Delta t}\|v^n\|_* \leq C_1 e^{\alpha t_n}\|v^0\|_* \leq C_2 e^{\alpha t_n}\|v^0\|_{\Delta x}$$

回顾：离散意义下的内积和 L^2 范数：

$$(u,v)_{\Delta x} = \sum_{j=0}^{N} \bar{u}_j v_j \Delta x, \quad \|u\|_{\Delta x}^2 = (u,u)_{\Delta x} = \sum_{j=0}^{N} \bar{u}_j u_j \Delta x$$

过程：

(1) 选取适当的检验函数，建立能量范数的递推关系；

(2) 指出能量范数同离散 L^2 模的等价关系；

(3) 导出差分格式的 L^2 模稳定性，给出相应的充分条件。