《数值分析》之

常微分方程数值方法

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

刚性问题

- 在用微分方程描述的一个变化过程中，若往往又包含着多个相互作用但变化速度相差十分悬殊的子过程，这样一类过程就认为具有“刚性”。描述这类过程的微分方程初值问题称为“刚性问题”。
- 例如，宇航飞行器自动控制系统一般包含两个相互作用但效应速度相差十分悬殊的子系统，一个是控制飞行器质心运动的系统，当飞行器速度较大时，质心运动惯性较大，因而相对来说变化缓慢；另一个是控制飞行器运动姿态的系统，由于惯性小，相对来说变化很快，因而整个系统就是一个刚性系统。
- 用来描述这些过程的微分方程初值问题都是刚性问题。刚性问题解答的难度就在于其快变子系统的干扰，当我们试图在慢变区间上求解刚性问题时，尽管快变分量的值已衰减到微不足道，但这种快速变化的干扰仍严重影响数值解的稳定性和精度，给整个计算带来很大的实质性的困难。

刚性问题

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -100 & -1001 \end{pmatrix} y(x)$$

$$\Rightarrow \quad Z'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1000 \end{pmatrix} Z(x)$$

$$Z_1(x) = Z_1(0)e^{-x} \quad Z_2(x) = Z_2(0)e^{-1000x} \simeq 0$$

精度由$Z_1(x)$决定，稳定性由$Z_2(x)$决定.

考察初值问题

$$y'(x) = -30y(x), \quad y(0) = 1$$

在区间$[0, 0.5]$上的解。分别用欧拉显、隐式格式和改进的欧拉格式计算数值解。

节点x_i	欧拉显式	欧拉隐式	改进欧拉法	精确解$y = e^{-30x}$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	-2.0000	2.5×10^{-1}	2.5000	4.9787×10^{-2}
0.2	4.0000	6.25×10^{-2}	6.2500	2.4788×10^{-3}
0.3	-8.0000	1.5625×10^{-2}	1.5625×10^{1}	1.2341×10^{-4}
0.4	1.6×10^{1}	3.9063×10^{-3}	3.9063×10^{1}	6.1442×10^{-6}
0.5	-3.2×10^{1}	9.7656×10^{-4}	9.7656×10^{1}	3.0590×10^{-7}

差分方程的绝对稳定性

考虑最简单的模型：只有初值产生误差，看看这个误差的传播。对于一般的差分方程

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = h(b_k f_n + b_{k-1} f_{n-1} + \cdots + b_0 f_{n-k})$$

- 由初始误差产生了差分解的误差，实际上是同一差分方程，取不同初值所得到的2组差分解之间的差。
- 这个差不仅于差分方程本身有关，而且与微分方程本身有关。
- 如果微分方程本身是不稳定，那就没理由要求这2组解充分接近。
- 差分方程的稳定性概念是建立在微分方程稳定的基础上的。

把这个典型微分方程规定为：

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y, \quad (Re\lambda < 0)$$

差分方程运用到如上的微分方程后，可以得到

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = \lambda h(b_k y_n + b_{k-1} y_{n-1} + \cdots + b_0 y_{n-k})$$

对于给定的初始误差$e_0, e_1, \cdots, e_{k-1}$, 误差方程具有一样的形式

$$a_k e_n + a_{k-1} e_{n-1} + \cdots + a_0 e_{n-k} = \lambda h(b_k e_n + b_{k-1} e_{n-1} + \cdots + b_0 e_{n-k})$$

绝对稳定性

差分方程称为绝对稳定的，若差分方程作用到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y, \quad (Re\lambda < 0)$$

时，对任意的初值，总存在左半复平面上的一个区域，当λh在这个区域时，差分方程的解趋于0。这个区域称为稳定区域

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n$$

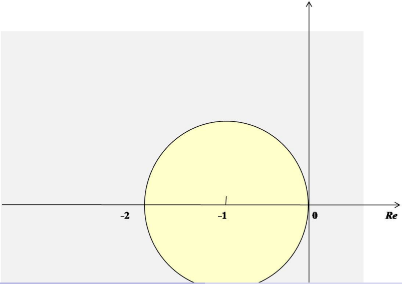
误差方程：

$$e_{n+1} = e_n + \lambda h e_n$$

令$\mu = \lambda h$, 绝对稳定区域为

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = |1 + \mu| < 1$$

绝对稳定区域为以-1为中心的圆盘



二阶Runge-Kutta方法

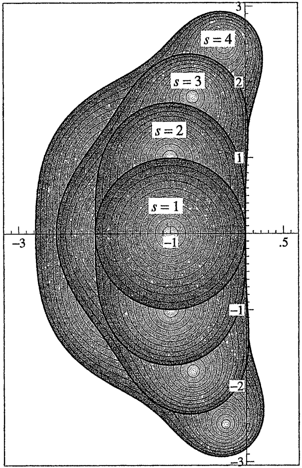
$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n + \frac{h^2}{2}\lambda^2 y_n = (1+\mu+\frac{\mu^2}{2})y_n$$

$$y_n = (1+\mu+\frac{\mu^2}{2})^n y_0$$

绝对稳定区域为 $\Leftrightarrow \quad |1+\mu+\frac{\mu^2}{2}| \leq 1$

中国科学技术大学

1–4 阶显式Runge-Kutta方法的绝对稳定区域为



Euler隐式公式的稳定性

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h} y_n$$

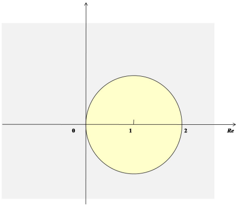
误差方程：

$$e_{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h} e_n$$

绝对稳定区域为

$$|1-\mu| > 1$$

因此，绝对稳定区域包含$Re(\mu) < 0$的左半平面,此时方法称为A-stable.



隐式梯形公式的稳定性

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\lambda y_n + \lambda y_{n+1}]$$

$$y_{n+1} = \frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}} y_n$$

绝对稳定区域为

$$\left|\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}}\right| \leq 1$$

$$\mu = 2(a+bi) \quad |1+a+bi|^2 \leq |1-a-bi|^2$$

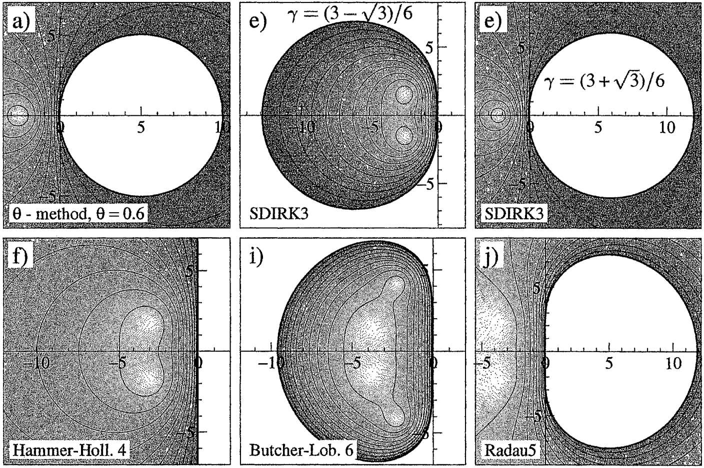
$$(1+a)^2 + b^2 \leq (1-a)^2 + b^2$$

$$a \leq 0 \quad Re(\mu) \leq 0$$

方法为A-stable。

Theorem (Dahlquist)

- A-stable的线性多步方法必是隐式方法
- A-stable的线性多步方法至多为二阶精度.


a)
5
0
5
10
-5
θ - method, θ = 0.6
e)
γ = (3 − √3)/6
5
-10
-5
0
-5
SDIRK3
e)
γ = (3 + √3)/6
5
0
5
10
-5
SDIRK3
f)
5
-10
-5
0
-5
Hammer-Holl. 4
i)
5
-10
-5
0
-5
Butcher-Lob. 6
j)
5
-5
0
5
10
-5
Radau5

二阶Adam-Bashforth方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f(y_n) - f(y_{n-1}))$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(3y_n - y_{n-1}) = (1 + \frac{3}{2}\mu)y_n - \frac{\mu}{2}y_{n-1}$$

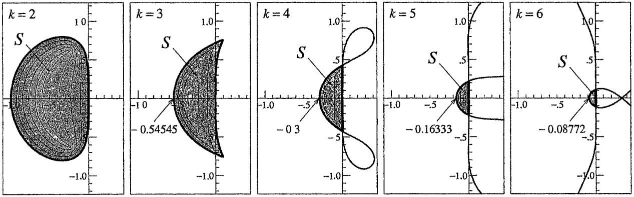
特征方程

$$z^2 - (1 + \frac{3}{2}\mu)z + \frac{\mu}{2} = 0$$

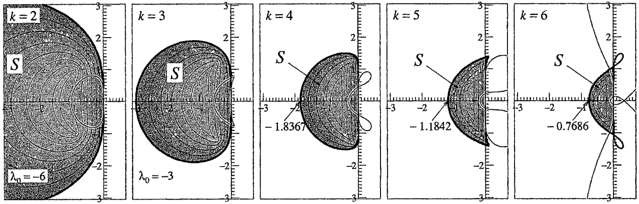
绝对稳定性要求特征方程的2个根在$|z| \leqslant 1$中，而且模为1的根是单根.

多步方法的稳定性

显式多步方法

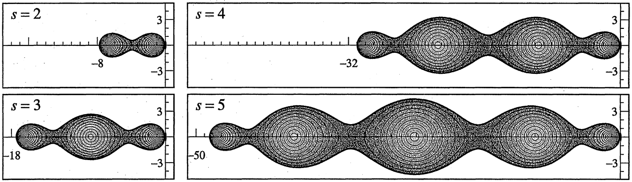


隐式多步方法

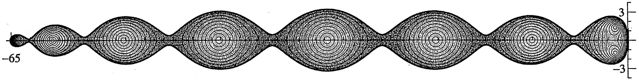


其他稳定性区域

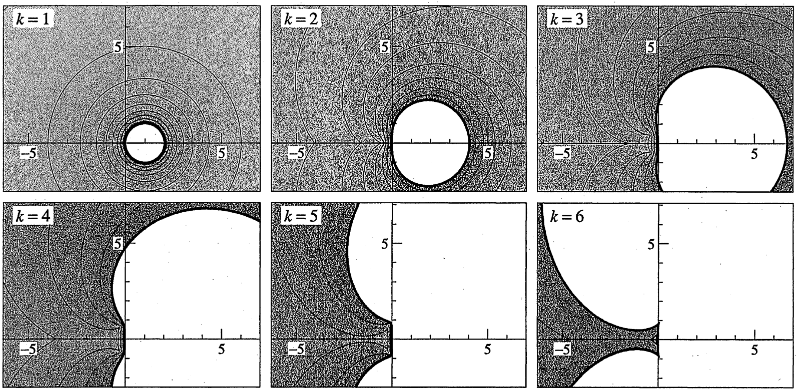
Chebyshev方法



Zolotarev方法



向后差商方法



程序作业

- 画出五阶Adams-Bashforth公式和五阶Adams-Moulton公式的绝对稳定性区域
- 可以使用Mathematica绘制,使用ImplicitPlot函数

中国科学技术大学