Homework-Finite Differences

PB18010496 杨乐园

2021 年 6 月 3 日

1 Introduction

编写求解两点边值问题的通用子程序，允许用户提供相应的a, α, b, β, n，以及相应的函数$u(t), v(t), w(t)$。并应用该通用子程序求解如下两个边值问题：

$$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 3, x(\frac{\pi}{2}) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = 2e^t - x \\ x(0) = 2, x(1) = e + \cos 1 \end{cases}$$

分别离散成$n = 10, 20, 40, 80, 160$的情况，输出误差，并计算相应的收敛阶，计算公式如下：

$$Ord = \frac{ln(Error_{old}/Error_{new})}{ln(N_{new}/N_{old})}$$

2 Method

对于固定的n，计算出相应的$h = (b-a)/(n+1)$，从而相应的离散点为$t_i = a + ih, i = 0, 1, ..., n+1$，进而记$u_i = u(t_i), v_i = v(t_i), w_i = w(t_i)$，并引进缩写：

$$\begin{aligned} a_i &= -1 - \tfrac{1}{2}hw_{i+1} \\ d_i &= 2 + h^2 v_i \\ c_i &= -1 + \tfrac{1}{2}hw_i \\ b_i &= -h^2 u_i \end{aligned}$$

进而我们依据相应的位置，构造出对应的矩阵与右侧方程的值，即可求解。

具体*Mathematica*代码如下：

```
h = (b - a)/(n + 1);
matrix = Table[0, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
right = Table[0, {i, 1, n}];
right[[1]] = -h^2 (u /. t -> (a + h)) - alpha (-1 - 1/2 h w /. t -> (a + h));
matrix[[1, 1]] = 2 + h^2 v /. t -> (a + h);
matrix[[1, 2]] = -1 + 1/2 h w /. t -> (a + h);
For[i = 2, i <= n - 1, i++,
    matrix[[i, i - 1]] = -1 - 1/2 h w /. t -> (a + i h);
```

```
    matrix[[i, i]] = 2 + h^2 v /. t -> (a + i h);
    matrix[[i, i + 1]] = -1 + 1/2 h w /. t -> (a + i h);
    right[[i]] = -h^2 u /. t -> (a + i h); ];
matrix[[n, n - 1]] = -1 - 1/2 h w /. t -> (a + n h);
matrix[[n, n]] = 2 + h^2 v /. t -> (a + n h);
right[[n]] = -h^2 (u /. t -> (a + n h)) - beta (-1 + 1/2 h w /. t -> (a + n h));
N[Inverse[matrix].right, 20]
```

3 Results

通过输入相关参数信息，有如下输出结果：

N	方程一的误差	误差阶	方程二的误差	误差阶
10	0.004728095556498570	-	0.0002440063883136427	-
20	0.001297928836343749	1.865047908674772	0.0000671202061701243	1.86209986701858
40	0.000340223526244531	1.931656473491854	0.0000176067439937147	1.93061901027692
80	0.000087173867116167	1.96451529048164	$4.5114452688876\times10^{-6}$	1.9644665482125
160	0.000022063657209298	1.9822237625255	$1.1418852654531\times10^{-6}$	1.9821719850252

4 Discussion

通过对数据的观察我们发现：随着离散点数量的增大，即n的增大，误差值逐渐减小，而计算出对应的误差阶趋近于2，这较好的符合理论结果。

5 Computer Code

代码部分请参见附件!(Homework15_0601.nb)。