有限元方法 2021 秋（10 月 11、13 日作业）

金晨浩 SA21001033

2.x.6 **变分问题：求解 $u \in V$ s.t. $a(u,v) = F(v),\ \forall v \in V$。给定 V 的有限维子空间 V_h，证明：当 $a(\cdot,\cdot)$ 对称时，有限元变分问题的解 u_h 是泛函 $Q(v) = a(v,v) - 2F(v)$ 在 V_h 上的极小化子。**

证明. 由定义，u_h s.t. $a(u_h, v) = F(v),\ \forall v \in V_h$。将其带入 $Q(u_h) - Q(v)$ 得到：

$\forall v \in V_h,\ Q(u_h) - Q(v) = a(u_h,u_h) - a(v,v) + 2F(v) - 2F(u_h) = -a(u_h,u_h) - a(v,v) + 2a(u_h,v)$。

由 $a(\cdot,\cdot)$ 对称性知 $Q(u_h) - Q(v) = -a(u_h - v, u_h - v) \leq 0$。 □

2.x.9 **设 $a(\cdot,\cdot)$ 满足强制性和有界性（界定常数分别为 α, C），给定有界线性泛函 $F \in V'$。由 Lax-Milgram 定理知 $\exists! u \in V$ s.t. $a(u,v) = F(v),\ \forall v \in V$。证明 $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}$。**

证明. 因为 $\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = F(u) \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$。 □

2.x.10 **考虑方程 $-u'' + ku' + u = f$，求 k s.t. $\exists v \in H^1(0,1)$ 且 v 不恒为零，但 $a(v,v) = 0$。**

证明. $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + ku'v + uv\,dx \Rightarrow a(u,u) = \int_0^1 (u')^2 + ku'u + u^2\,dx \geq (1 - \frac{|k|}{2})\|u\|_{H^1}^2$。

当 $k \in (-2,2)$ 时，$a(\cdot,\cdot)$ 满足强制性。取 $k = 2$, 那么 $u(x) = e^{-x}$ s.t. $a(u,u) = 0$ 但 u 不恒为零。 □

2.x.12 **令 $a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + u'v + uv)\,dx,\ V = H_0^1(0,1)$，那么 $a(v,v) = \int_0^1 (v')^2 + v^2\,dx,\ \forall v \in V$。**

证明. $\forall v \in H_0^1(0,1),\ a(v,v) = \int_0^1 v^2 + (v')^2 + v'v\,dx = \|v\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 (v^2)'\,dx = \|v\|_{H^1}^2$。 □

5.x.1 **定义 $\tilde{L}^2(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega) : \int_\Omega \phi\,dx = 0\},\ \tilde{\mathcal{D}}(\Omega) = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega \phi\,dx = 0\}$。证明 $\tilde{D}(\Omega)$ 在 $\tilde{L}^2(\Omega)$ 中稠密。**

证明. 设 $f \in \tilde{L}^2(\Omega)$。由稠密性，$\exists\{g_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ s.t. $\|g_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$。取 $f_n := g_n - \overline{g_n}$，其中 $\overline{g_n} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g_n\,dx$。因此 $\overline{f} = 0,\ \overline{f_n} = 0 \Rightarrow \{f_n\} \subset \tilde{D}(\Omega)$。

那么 $\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g_n - f\|_{L^2(\Omega)} + \|\overline{g_n} - \overline{f}\|_{L^2(\Omega)} = \|g_n - f\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{2}}|\overline{g_n} - \overline{f}|$

$\leq \|g_n - f\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{-\frac{1}{2}}\int_\Omega |g_n - f|\,dx \leq 2\|g_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$。即 $\exists\{f_n\} \subset \tilde{D}(\Omega)$ s.t. $f_n \to f$ in $L^2(\Omega)$。 □

5.x.3 设 $1 \le p \le \infty$，$p \ne 2$。

(i). 设 $v, w \in W^{1,p}(\Omega)$，则 $\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i}) w \, dx = -\int_\Omega v (\frac{\partial}{\partial x_i}) \, dx + \int_{\partial\Omega} v w \nu_i \, ds$。

(ii). 设 $u \in W^{2,p}(\Omega)$，$v \in W^{1,p}(\Omega)$，则 $\int_\Omega (-\Delta u) v \, dx = \int_\Omega Du \cdot Dv \, dx - \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial}{\partial \nu}) v \, ds$。

证明. 只需证明 (i)，(i)⇒(ii) 平凡。(i) 对 $v, w \in C^{\Omega}$ 成立，利用 Density Argument 即可。 □