偏微分方程数值方法

双曲型方程

目录

1 特征线方法

- **常系数线性对流方程**

$$u_t + au_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

特征线方程:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0.$$

特征线为平行的直线，解 $u(x,t)$ 沿着特征线保持不变。

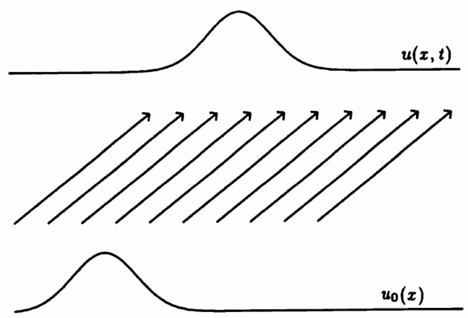


Figure 3.1. Characteristics and solution for the advection equation.

- **变系数线性对流方程** I：$a(x,t)$ 为已知的连续函数，

$$u_t + a(x,t) \cdot u_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

特征线方程:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0.$$

特征线为互不相交的曲线，解 $u(x,t)$ 沿着特征线保持不变。

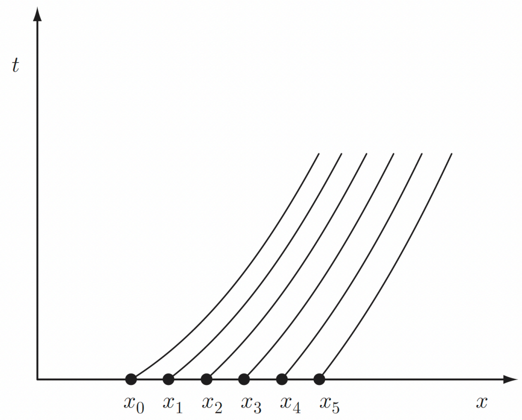


Fig. 4.1. Typical characteristics for $u_t + a(x,t)u_x = 0$.

- **变系数线性对流方程** II：$a(x,t)$ 为已知的连续函数，

$$u_t + (a(x,t)\cdot u)_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+.$$

特征线方程：

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t),t) = -a_x \cdot u.$$

特征线为互不相交的曲线，解 $u(x,t)$ 沿着特征线不为常值，可通过求解常微分方程得到。

- **双曲守恒律方程**

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

特征线方程：

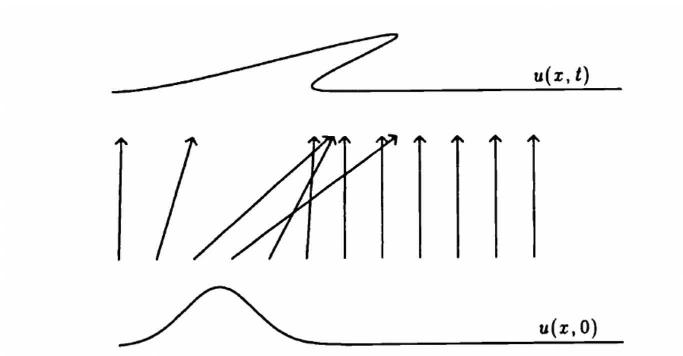
$$\frac{dx}{dt} = f'(u) = a(u), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0.$$

特征线为直线，解 $u(x,t)$ 沿着特征线保持不变。

$$u(x,t) = u_0(x - a(u(x,t))\cdot t)$$

但是可能出现特征线相交的情形，此时古典解不存在。

  – 例：Burgers 方程 $u_t + (u^2/2)_x = 0$，$f'(u) = u$：



Homework: 考虑 Burgers 方程。假设给定光滑初值 $u_0(x)$，其在某些点的导数 $u_0'(x) < 0$。试证明：在 T_b 时刻特征线首次产生相交

$$T_b = \frac{-1}{\min u_0'(x)}$$

此时，方程的解产生无穷斜率，波产生间断（wave “breaks”）。

2 双曲守恒律方程的弱解和熵解

2.1 弱解

- **定义 1(弱解)：** 函数 $u(x,t)$ 称为双曲守恒律的弱解，若对于任意区域 $[x_L,x_R]\times[t^1,t^2]\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$，均有

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x,t_2)dx = \int_{x_L}^{x_R} u(x,t_1)dx + \int_{t^1}^{t^2} f(u(x_L,t))dt - \int_{t^1}^{t^2} f(u(x_R,t))dt.$$

- **定义 2 (弱解)：** 函数 $u(x,t)$ 称为双曲守恒律的弱解，若对于任意函数 $\phi(x,t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$，均有

$$\int\int_{t\geq 0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x,0)dx = 0.$$

- Rankine-Hugoniot (RH) **跳跃条件：** 考虑分片古典解，并且任意时刻的间断点个数是有限的，比如存在一条连续可微的时空界面曲线

$$\Gamma:\ x = x(t), \quad t\geq 0$$

将上半平面会划分为左右两块区域，相应的古典解分别记为 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & x < x(t), \\ u_2(x,t), & x > x(t), \end{cases}$$

若它为守恒律方程的一个弱解，则应满足

$$s(u_+ - u_-) = f(u_+) - f(u_-) \tag{1}$$

其中，$s = x'(t)$ 为界面的移动速度，$u_\pm = \lim_{x->x(t)\pm 0} u(x,t)$ 为左右（空间）极限。

- **例：** Burgers 方程的 Riemann 问题:

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

– $u_L > u_R$：存在唯一弱解

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < s \cdot t, \\ u_R, & x > s \cdot t, \end{cases} \qquad s = \frac{1}{2}(u_L + u_R).$$

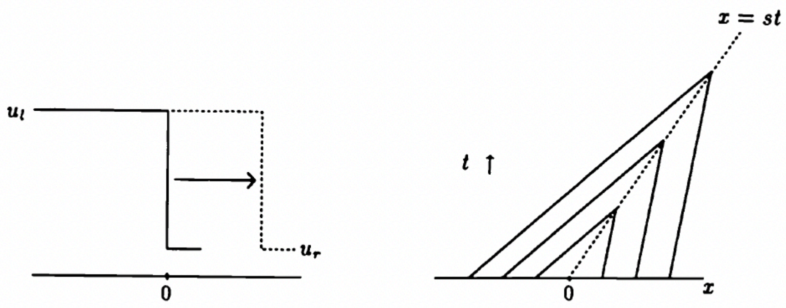


Figure 3.8. Shock wave.

– $u_L < u_R$：弱解不唯一！上述间断解满足弱解条件

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L \cdot t, \\ x/t, & u_L \cdot \leq x \leq u_R \cdot t, \\ u_R, & x > u_R \cdot t, \end{cases}$$

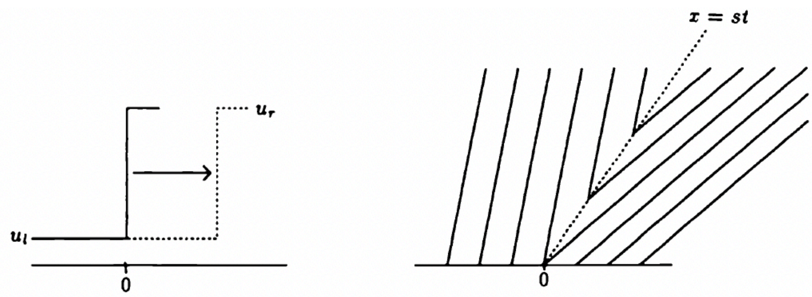


Figure 3.9. Entropy-violating shock.

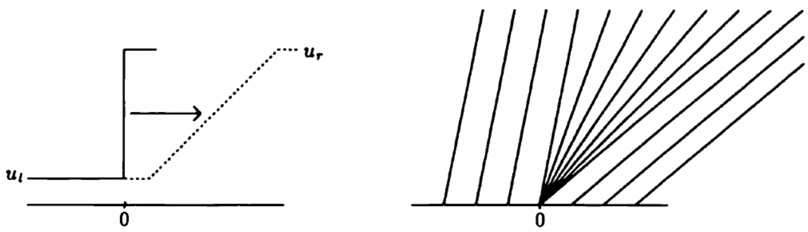


Figure 3.10. Rarefaction wave.

2.2 粘性解

- 设 $u^{\varepsilon}(x,t)$ 为如下问题的解

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad \varepsilon > 0$$

若存在极限函数 $u(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(x,t)$，则 $u(x,t)$ 为守恒律方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 的解。

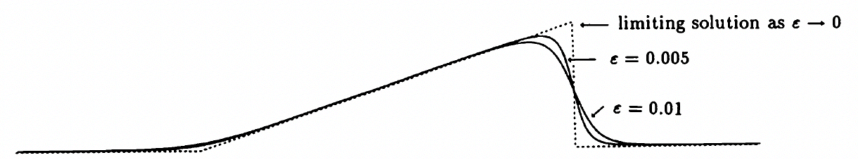


Figure 3.7. Solution to the viscous Burgers' equation for two different values of ϵ.

2.3 熵解

- 标量双曲守恒律方程的熵解存在且唯一。

- Oleinik **熵条件**：弱解满足

$$\frac{f(u_-) - f(v)}{u_- - v} \geq s \geq \frac{f(u_+) - f(v)}{u_+ - v}, \quad v \in [\min(u_-,u_+), \max(u_-,u_+)]$$

  则弱解为熵解。

- Osher **熵条件**： 若函数 $f(u)$ 是凸可微的，则要求

$$f'(u_-) \geq s \geq f'(u_+)$$

- **间断的熵解**：设函数 $f(u)$ 是凸可微的，解在 (x_*, t^*) 点出现间断
  - $f'(u_-) \geq f'(u_+)$：后面时刻的时空区域处处有特征线穿过，则间断点 (x_*, t^*) 演化成间断面 $x = x(t)$。
    (1) 若熵条件中不等式严格成立，则两侧的特征线均交汇到间断界面 $x = x(t)$，相应的局部间断结构称为**激波** (shock)，$s = x'(t)$ 称为**激波速度**；
    (2) 若熵条件中不等式局部退化为恒等式，则两侧的特征线同间断界面平行，相应的局部间断结构称为**接触间断** (contact discontinuity)；

- $f'(u_-) \le f'(u_+)$：后面时刻的某个扇形（时空）区域没有特征线穿过，则间断点 (x_*, t^*) 将会消失，对应的熵解具有局部**稀疏波**结构。在扇形区域内，稀疏波满足自相似结构

$$u(x,t) = u\left(\frac{x - x_*}{t - t^*}\right)$$

3 数值格式

- **数值方法的挑战**：高精度高分辨率格式
  - 激波速度的刻画以及间断界面的捕捉要准确；
  - 在真解相对光滑区域，精度和计算效率要高；
  - 在间断界面附近，数值振荡现象要得到控制；
  - 数值解要收敛到熵解，至少是弱解。

  激波装配技术：先用特殊算法确定间断界面的位置，在用其他高效高精度格式计算界面之间光滑解。

  激波捕捉技术：直接建立统一的数值操作过程，可以同时适用于光滑解和间断解的数值模拟，而不用额外追踪间断界面的位置。

- **例**：Burgers 方程 $u_t+(u^2/2)_x=0$ 的 Riemann 问题 $u(x,0)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x\geq 0.\end{cases}$ 考虑格式

$$v_j^{n+1}=v_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}v_j^n(v_j^n-v_{j-1}^n), \quad \Rightarrow \quad v_j^n=v_j^0$$

  不收敛到弱解（激波传播速度不满足 RH 跳跃条件）！

3.1 守恒型差分格式

- **定义（守恒型）**：称差分格式是守恒型格式，若它可以统一表述为

$$v_j^{n+1}=v_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}_{j+1/2}^n-\hat{f}_{j-1/2}^n\right), \quad \forall j \tag{2}$$

  其中，$\hat{f}_{j+1/2}$ 称为数值流通量，具有表达式

$$\hat{f}_{j+1/2}=\hat{f}(v_{j-r},\cdots,v_{j+s})$$

  满足性质
  - 连续性：$\hat{f}$ 关于每个变量都满足局部 Lipschitz 连续性；
  - 相容性：$\hat{f}(v,\cdots,v)=f(v)$。

- **定理（Lax-Wendroff 定理）**：设守恒型差分格式同双曲守恒律相容。当网格尺度趋于零时，若数值解几乎处处有界且收敛到某个函数，则极限必定是问题的弱解。

- **例：** Lax-Friedrichs 格式

$$v_j^{n+1}=\frac{1}{2}\left(v_{j+1}^n+v_{j-1}^n\right)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f(v_{j+1}^n)-f(v_{j-1}^n)\right].$$

- **例：** Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned}v_j^{n+1}=&v_j^n-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f(v_{j+1}^n)-f(v_{j-1}^n)\right]\\&+\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left\{A_{j+1/2}^n\left[f(v_{j+1}^n)-f(v_j^n)\right]-A_{j-1/2}^n\left[f(v_j^n)-f(v_{j-1}^n)\right]\right\},\end{aligned}$$

其中，$A_{j+1/2}^n=f'\left(\frac{1}{2}(u_j^n+u_{j+1}^n)\right)$。

- **例：** Richtmyer 格式

$$\begin{aligned}v_{j+1/2}^{n+1/2}=&\frac{1}{2}\left(v_j^n+v_{j+1}^n\right)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f(v_{j+1}^n)-f(v_{j-1}^n)\right]\\v_j^{n+1}=&v_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(v_{j+1/2}^{n+1/2})-f(v_{j-1/2}^{n+1/2})\right]\end{aligned}$$

- **例：** MacCormack 格式

$$\begin{aligned}\tilde{v}_j^n=&v_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(v_{j+1}^n)-f(v_j^n)\right]\\v_j^{n+1}=&\frac{1}{2}\left(v_j^n+\tilde{v}_j^n\right)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f(\tilde{v}_j^n)-f(\tilde{v}_{j-1}^n)\right]\end{aligned}$$

- **例：** Roe 型迎风格式

$$v_j^{n+1}=v_j^n-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\left[1-sgn(a_{j+1/2}^n)\right]\Delta_+f(v_j^n)+\left[1+sgn(a_{j-1/2}^n)\right]\Delta_-f(v_j^n)\right\}$$

其中，$a_{j+1/2}^n\left(v_{j+1}^n-v_j^n\right)=f(v_{j+1}^n)-f(v_j^n)$。

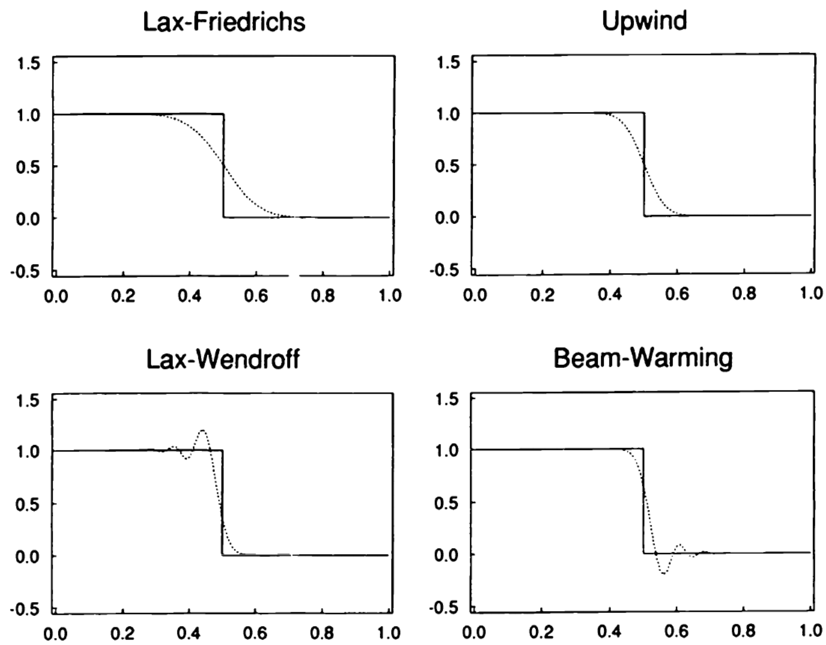
$$\begin{aligned}\hat{f}_{j+1/2}^n=&\begin{cases}f(v_j^n), & a_{j+1/2}^n\geq 0\\ f(v_{j+1}^n), & a_{j+1/2}^n<0\end{cases}\\=&\frac{1}{2}\left[f(v_j^n)+f(v_{j+1}^n]\right)-\frac{1}{2}sgn(a_{j+1/2}^n)\left[f(v_{j+1}^n)-f(v_j^n]\right.\end{aligned}$$

- **例：** Burgers 方程的 Riemann 问题：$u_-=-1,u_+=1$

  使用 Roe 型迎风格式。

  守恒型格式的解收敛到某个弱解，但不是熵解！

- **例：** 线性方程 $u_t + u_x = 0$ 的 Riemann 问题：$u_- = 1$, $u_+ = 0$
  守恒型格式的解可能产生数值震荡！



3.2 单调格式

- 方程满足单调保持性质：若初值是单增或单减函数，则任意时刻的熵解保持相同的单调性。

- **定义（单调保持格式）：** 若初值是单调函数，则任意时刻的数值解均具有相同的单调性。
  通常难以验证！

- 方程满足性质：

$$v(x,0) \le u(x,0), \forall x \quad \Rightarrow \quad v(x,t) \le u(x,t), \forall x, \forall t > 0$$

- **定义（单调格式）：** 称数值格式是守恒型格式，若它可以统一表述为

$$v_j^{n+1} = H(v_{j-r}^n, \cdots, v_{j+s}^n), \quad \forall j \tag{3}$$

  是单调格式，如果函数 H 关于每个变元是非减的。

- **定理**：考虑三点格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n\right), \quad \hat{f}_{j+1/2}^n = \hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n),$$

  若导数满足关系

$$\hat{f}_1 \geq 0, \quad \hat{f}_2 \leq 0, \quad \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}_1 - \hat{f}_2\right) \leq 1$$

  则该三点格式是单调格式的。

- **例**：在相应的 CFL 条件下，Roe 型迎风格式不是单调格式。

- **例**：在相应的 CFL 条件下，Lax-Friedrichs 格式是单调格式；但是 Lax-Wendroff 格式不是单调格式。
  Lax-Friedrichs 格式的解在激波附近产生过渡点，但是 Lax-Wendroff 格式产生数值震荡！

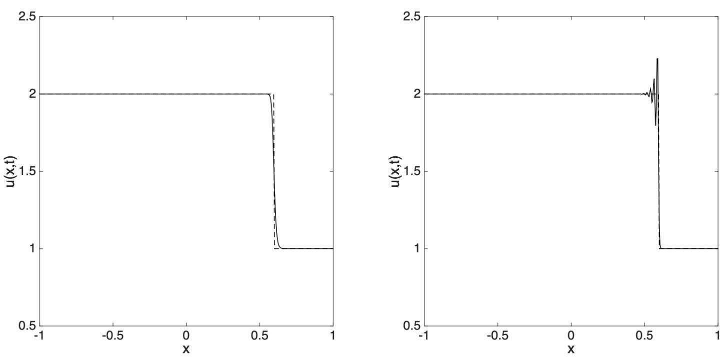


Figure 4.2. *The solution at $T = 0.2$ of Burgers' equation, solved using a scheme in conservation form with a Lax–Friedrichs numerical flux (left) and a Lax–Wendroff numerical flux (right). In both cases, the computed solution (solid line) and the exact solution (dashed line) is shown.*

- **定理**：单调格式的数值解一致有界，必然收敛到双曲守恒律的熵解。

- **定理**（Godunov **定理**）：单调格式最多只有一阶局部截断误差。

- **定理**：单调格式必然是单调保持格式。

3.3 TVD **格式**

- **定义**（**全变差**，total variation）：

  - 连续函数：$TV(v) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|v(x) - v(x-\varepsilon)|dx = \int_{-\infty}^{\infty}|v'(x)|dx$

– 网格函数：$TV(w) = \sum_j |w_{j+1} - w_j|$

- 方程满足性质：全变差不增

$$TV(u(x,t_2)) \le TV(u(x,t_1)), \quad \forall t_2 > t_1$$

- **定义（TVD 格式）**：称数值格式是全变差不增的，若它的数值解恒满足

$$TV(v^{n+1}) \le TV(v^n), \quad \forall n$$

- Harten **定理**：设数值格式具有增量形式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - C_{j-1/2}\left(v_j^n - v_{j-1}^n\right) + D_{j+1/2}\left(v_{j+1}^n - v_j^n\right),$$

  且处处成立

$$C_{j+1/2} \ge 0, \quad D_{j+1/2} \ge 0, \quad C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \le 1$$

  则它是 TVD 的。

- **例**：在相应的 CFL 条件下，Roe 型迎风格式是 TVD 的。
  注：TVD 格式可以避免剧烈的数值震荡，但数值解有可能收敛到非熵解的弱解，可以引入“熵修正”技术。

- **定理**：单调格式是 TVD 的，TVD 格式是单调保持格式。
  注：逆命题不成立！

- **定理**：局限于线性差分格式的范畴，单调格式、TVD 格式和单调保持格式是彼此等价的。进而，线性 TVD 格式至多有一阶局部截断误差。

- **定理**：高阶 TVD 格式必然是非线性的，即使离散对象是线性双曲守恒律。

Homework: 针对非线性方程 $u_t + f(u)_x = 0$，利用“流通分裂技术”构造数值算法：

$$u_t + f^+(u)_x + f^-(u)_x = 0, \qquad f^{\pm}(u) = \frac{1}{2}\left(f(u) \pm \alpha u\right)$$

其中，$\alpha = \max_u |f'(u)|$。对 $f^{\pm}(u)$ 分别使用迎风格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f^+(v_j^n) - f^+(v_{j-1}^n)\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f^-(v_{j+1}^n) - f^-(v_j^n)\right)$$

试判断格式是否为守恒型格式，并分析其单调性质和 TVD 性质。

4 双曲型方程组

- **定义（双曲型常系数线性方程组）：** $\vec{u}(x,t)=(u_1,u_2,\dots,u_m)^T$ 是未知的 m 维向量值函数，常系数线性方程组

$$\vec{u}_t + A\vec{u}_x = 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

称为双曲型，若 A 的特征值 $\{\lambda_i, i=1,\cdots,m\}$ 都是实数，对应的特征向量 $\{\vec{r}_i, i=1,\cdots,m\}$ 线性无关。

- **特征分解**
  - 矩阵 A 可进行特征分解：$A = R\Lambda R^{-1}$
  - 方程组映射至特征空间：$\vec{v} = R^{-1}\vec{u}$

$$\vec{v}_t + \Lambda\vec{v}_x = 0$$

或

$$(v_p)_t + \lambda_p (v_p)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_p(x,t) = v_p(x-\lambda_p t, 0)$$

  - 映射回物理空间

$$\vec{u}(x,t) = R\vec{v}(x,t) = \sum_{p=1}^{m} v_p(x,t)\vec{r}_p(x,t)$$

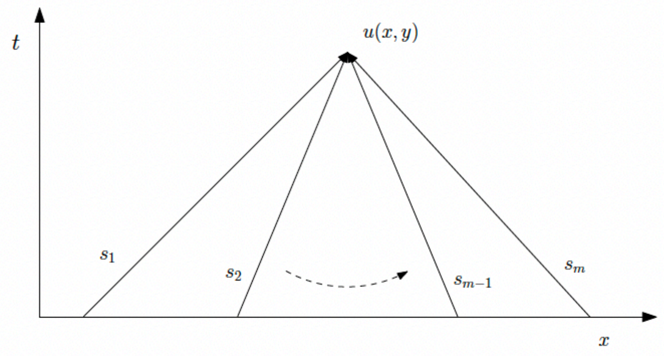


Figure 3.1. *Construction of the solution $u(x,t)$ as the superposition of m linear waves, assuming an ordering of $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0 \geq \cdots \geq \lambda_m$. The domain of dependence is contained within the cone defined by λ_1 and λ_m.*

- **例：** Riemann 问题：对应的准确解为分片常数。

$$\vec{u}(x,0) = \begin{cases} \vec{u}_l = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \vec{r}_p, & x<0, \\ \vec{u}_r = \sum_{p=1}^{m} \beta_p \vec{r}_p, & x>0. \end{cases}$$

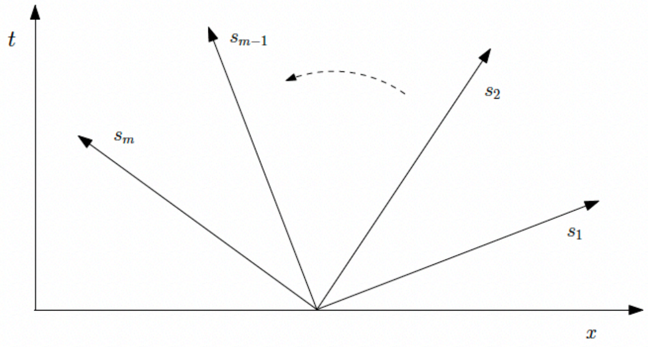
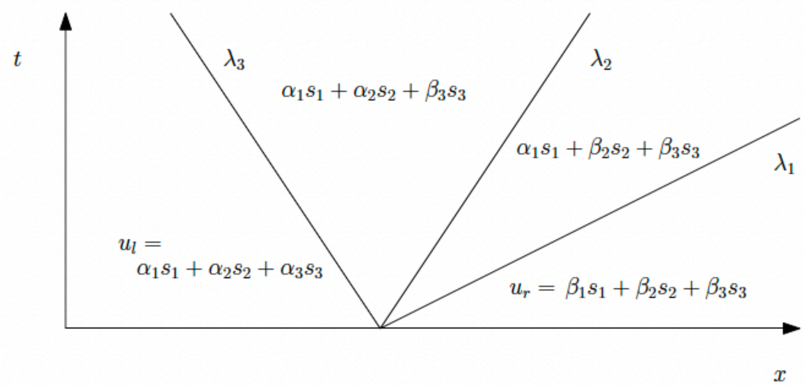


Figure 3.2. *Development of the solution $u(x,t)$ for a system with m linear waves. We have assumed an ordering of $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0 \geq \cdots \geq \lambda_m$. The domain of influence is contained within the cone defined by λ_m and λ_1.*



- **例：** 迎风格式
  - 矩阵 A 可进行特征分解：$A = R\Lambda R^{-1}$
  - 方程组进行至特征空间：$\vec{v} = R^{-1}\vec{u}$

$$\vec{v}_t + \Lambda \vec{v}_x = 0$$

  - 方程组 $\vec{v}$ 的迎风格式：$\Lambda_+ = diag(\max(\lambda_i, 0))$, $\Lambda_- = diag(\min(\lambda_i, 0))$

$$\vec{v}_j^{n+1} = \vec{v}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda_+\left(\vec{v}_j^n - \vec{v}_{j-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda_-\left(\vec{v}_{j+1}^n - \vec{v}_j^n\right)$$

  - 方程组 $\vec{u}$ 的迎风格式：$A_- = R\Lambda_- R^{-1}$，$A_+ = R\Lambda_+ R^{-1}$

$$\vec{u}_j^{n+1} = \vec{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}A_+\left(\vec{u}_j^n - \vec{u}_{j-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}A_-\left(\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n\right)$$

– 注：格式蕴涵了“流通分裂技术”的基本思想，即

$$A\vec{u} = \vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}^{+}(\vec{u}) + \vec{f}^{-}(\vec{u}) = A_{+}\vec{u} + A_{-}\vec{u}$$

- **定义（双曲型守恒律方程组）**：$\vec{u}(x,t) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$ 是未知的 m 维向量值函数，非线性方程组

$$\vec{u}_t + \vec{f}(\vec{u})_x = 0,$$

称为（严格）双曲型，若矩阵 $A(\vec{u}) = \vec{f}'(\vec{u}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 的特征值 $\{\lambda_i(\vec{u}), i = 1, \cdots, m\}$ 都是（互异）实数，对应的特征向量 $\{\vec{r}_i(\vec{u}), i = 1, \cdots, m\}$ 线性无关。

- **例**：Euler 方程：Riemann 问题准确解包括了激波、稀疏波和接触间断。

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix}_x = \vec{0}$$

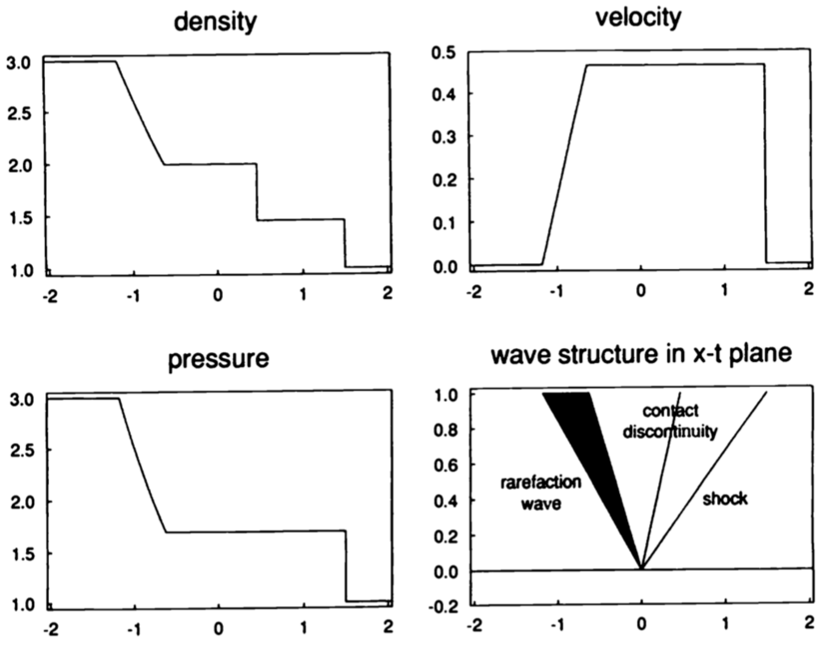


Figure 1.1. Solution to a shock tube problem for the one-dimensional Euler equations.

- **守恒型数值格式**：

$$\vec{v}_j^{n+1} = \vec{v}_j^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}^n_{j+1/2} - \hat{f}^n_{j-1/2}\right)$$