1. for $t=1:n$

$$R(1:n,t)=(\overbrace{0,\cdots,0}^{t-1},1,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-t})^T$$

for $j=1:n-1$

$R(j,t)=R(j,t)/L(j,j)$

$R(j+1:n,t)=R(j+1:n,t)-R(j,t)L(j+1:n,j)$

end

$R(n,t)=R(n,t)/L(n,n)$

end

2. (2018年期末考题) 简记 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ $T=(t_{ij})_{n\times n}$ $b=(b_i)_{n\times 1}$ $x=(x_i)_{n\times 1}$

DIY 回代法

$$ST=\left(\sum_{k=i}^{j}s_{ik}t_{kj}\right)_{n\times n}$$

↳规定 $j<i$ 时不求和

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{j}s_{ik}t_{kj}\right)x_j=b_i+x_i\cdot\lambda\quad(\forall i)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=i}^{n}\sum_{j=k}^{n}s_{ik}t_{kj}x_j=b_i+x_i\cdot\lambda\Rightarrow\sum_{k=i}^{n}s_{ik}\underbrace{\left(\sum_{j=k}^{n}t_{kj}x_j\right)}_{\text{与}i\text{无关}}=b_i+x_i\cdot\lambda$$

$$\Rightarrow\underset{(k=j=i)}{s_{ii}t_{ii}x_i}+\sum_{k=i+1}^{n}s_{ik}\underset{(k>i)}{\left(\sum_{j=k}^{n}t_{kj}x_j\right)}+\underset{(k=i,j>i)}{\sum_{j=i+1}^{n}t_{ij}x_j}=b_i+x_i\lambda$$

记 $U_k=\sum_{j=k}^{n}t_{kj}x_j$

$$\Rightarrow x_i=\left(\sum_{k=i+1}^{n}s_{ik}U_k+\sum_{j=i+1}^{n}t_{ij}x_j-b_i\right)/(\lambda-s_{ii}t_{ii})$$

注：U_k 仅包含 $x_k\sim x_n$

算不清就别写

代价：① 算所有 U_k：$\sum_{k=2}^{n}(2n-2k+1)\sim O(n^2)$

② 算所有 x_i：$\sum_{i=1}^{n}(2n-2i-1)\cdot 2+4\sim O(n^2)$

~~3.~~

$I+l_ke_k^T=I-(-l_k)e_k^T$ 即 $l_k\to -l_k$ 的 Gauss 变换

且 $(I+l_ke_k^T)(I-l_ke_k^T)=I-l_ke_k^T+l_ke_k^T-l_ke_k^Tl_ke_k^T$

$$e_k^Tl_k=(\underbrace{0\cdots 0}_{k-1\text{个}}\ 1\ 0\cdots 0)\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}\Big\}k\uparrow=0$$

$$\Rightarrow L_k^{-1}=I+l_ke_k^T$$

4. $2\times2+3=7$
$2\times2+4=8$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\8\end{pmatrix}$

5. $A=L_1U_1=L_2U_2$ $\quad \det A\neq0 \Rightarrow \det L_i, \det U_i\neq 0 \quad (i=1,2)$

$\Rightarrow L_1^{-1}L_2=U_1U_2^{-1}$ （注：A 上/下三角 $\Rightarrow A^{-1}$ 上/下三角
A,B 上/下三角 $\Rightarrow AB$ 上/下三角）

$\Rightarrow L_1^{-1}L_2=I=U_1U_2^{-1}$

$\Rightarrow L_1=L_2,\ U_1=U_2$

6.（归纳） $l_1=(0,-1,\cdots,-1)^T$ $\quad L_1=I-l_1e_1^T$

$$A_1=L_1A=\begin{pmatrix}1&&&&1\\0&1&&&2\\\vdots&-1&\ddots&&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&-1&\cdots&-1&2\end{pmatrix}$$

记 $l_k=(\underbrace{0,\cdots,0}_{k个},-1,\cdots,-1)^T$

假设 $A_k=(L_k\cdots L_1)A=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}+l_{k+1},\cdots,e_{n-1}+l_{n-1},\alpha_k]$

其中 $\alpha_k=(\underbrace{1,2,\cdots,2^k}_{k+1个},2^k,\cdots,2^k)^T$

则 $L_{k+1}A_k=(I-l_{k+1}e_{k+1}^T)A_k$

① $i<k+1$ 时 $(I-l_{k+1}e_{k+1}^T)e_i=e_i$

② $i=k+1$ 时 $(I-l_{k+1}e_{k+1}^T)(e_{k+1}+l_{k+1})=e_{k+1}$

③ $i>k+1$ 时 $(I-l_{k+1}e_{k+1}^T)(e_i+l_i)=e_i+l_i$ $\quad (i<n)$

④ $(I-l_{k+1}e_{k+1}^T)\alpha_k=\alpha_{k+1}$

$\Rightarrow A_{n-1}=[e_1\cdots e_{n-1}\ \alpha_n]$ $\quad \alpha_n=(0,\cdots,0,2^{n-1})^T$

$\Rightarrow u_{nn}=2^{n-1}$

另法：直接给出 L与U，由 det(U)≠0 及上一题有唯一性。

$$L=\begin{pmatrix}1&&&&\\-1&\ddots&&&\\\vdots&\ddots&\ddots&&\\-1&\cdots&\cdots&-1&1\end{pmatrix}\qquad U=\begin{pmatrix}1&&&1\\&\ddots&&2\\&&&4\\&&1&\vdots\\&&&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

7. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T$ 对称

8. 即证 A_2 对角占优 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_2 & A_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_2 a_1^T$

即证 $\left| a_{i+1,i+1} - \frac{1}{a_{11}} a_{i+1,1}\, a_{1,i+1} \right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} \left| a_{i+1,j+1} - \frac{1}{a_{11}} a_{i+1,1}\, a_{1,j+1} \right|$

$$\text{RHS} \le \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} |a_{i+1,j+1}|}_{\text{用 } i+1 \text{ 行}} + \frac{|a_{i+1,1}|}{|a_{11}|} \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} |a_{1,j+1}|}_{\text{用1行}} < \left(|a_{i+1,i+1}| - |a_{i+1,1}| \right) + \left(|a_{i+1,1}| - \frac{1}{|a_{11}|} |a_{i+1,1}\, a_{1,i+1}| \right)$$

$$= |a_{i+1,i+1}| - \frac{1}{|a_{11}|} |a_{i+1,1}\, a_{1,i+1}|$$

$$\le \text{LHS}$$

$\square$

9. 直接对 $[A,b]$ 同时做行变换 得到 $[U, L^{-1}b]$

```
for  k = 1 : n-1
     A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k,k)
     A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n) - A(k+1:n, k) A(k, k+1:n)     (n-k)^2
     b(k+1:n) = b(k+1:n) - A(k+1:n, k) b(k)     (n-k)
end
for  j = n:-1:2
     y(j) = y(j) / U(j,j)
     y(1:j-1) = y(1:j-1) - y(j) U(1:j-1, j)     (j-1)
end
y(1) = y(1) / U(1,1)
```

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + (n-k) + \sum_{j=2}^{n} (j-1) \text{ 次} = \frac{1}{6} n (2n^2 + 3n - 5)$$

10. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{pmatrix}$ $A_2 = A_2^T$ 在 7. 已证

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 A \qquad L_1 = I - l_1 e_1^T$

而 $\underbrace{L_1 A L_1^T}_{\text{相合}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & A_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & A_2 \end{pmatrix}$ 正定 $\Rightarrow A_2$ 正定

11.

$$A_{11}=LU$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L & 0\\ A_{21}U^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U & L^{-1}A_{12}\\ 0 & S\end{pmatrix}$$

实际上前者即 $L_k\cdots L_1$，后者即 $A^{(k)}$

12. (反证) 若 $\exists\, i,j$ 使 $|u_{ij}|>|u_{ii}|$

则第 i 次 Gauss 变换前 $|u_{ii}|=\max\limits_{\substack{k\geq i\\ j\geq i}}|a_{kj}^{(i-1)}|$

变换时将 u_{ii} 对应元素换至 (i,i) 位并消去 $(i+1:n,\, i)$ 位

注意第 i 次变换时 $1\sim i-1$ 行仅有置换而无值改变

故第 i 次变换后 $i+1\sim n$ 次不改变 $\max\limits_{j>i}|a_{ij}^{(k)}|$ 故 $|u_{ij}|\leq\max\limits_{j>i}|a_{ij}^{(k)}|\leq|u_{ii}|$

13. $PA=LU \Rightarrow A^{-1}=U^{-1}L^{-1}P$

由于列主元，故 "$\det A\neq 0 \Rightarrow$ 算法可执行完全"

14. 暴力求解

15. 设 $A^T=\tilde{L}\tilde{U}$ 三角分解 由 8. 易得 $\tilde{U}$ 严格对角占优

$A=\tilde{U}^T\tilde{L}^T$ 则令 $L=\tilde{U}^T\cdot D$ $U=D^{-1}\tilde{L}$ 即可

其中 $\tilde{U}=(\tilde{u}_{ij})$ $D=\mathrm{diag}(\tilde{u}_{ii}^{-1})$ 严格对角占优可逆 $\Rightarrow$ 唯一分解

16. (1)

$$N(y,k)=\begin{pmatrix}I_{k-1} & \begin{matrix}-y_1\\ \vdots\\ -y_{k-1}\end{matrix} & \\ & 1-y_k & \\ & \begin{matrix}-y_{k+1}\\ \vdots\\ -y_n\end{matrix} & I_{n-k}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行 } k \text{ 除以 } 1-y_k}\begin{pmatrix}I_{k-1} & \begin{matrix}-y_1\\ \vdots\\ -y_{k-1}\end{matrix} & \\ & 1 & \\ & \begin{matrix}-y_{k+1}\\ \vdots\\ -y_n\end{matrix} & I_{n-k}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{行 } i \text{ 加上 } y_i \text{ 乘行 } k]{(i\neq k)} I$$

$$\Rightarrow N(y,k)^{-1}=I-\frac{y}{y_k-1}e_k^T$$

(2) $(I-ye_k^T)x=e_k$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{x_k}(x-e_k)$ $x_k\neq 0$ 即可

(3) $A=[\alpha_1\cdots\alpha_n]$ ①找 y_1 使 $N(y_1,1)\alpha_1=e_1$

$A^{(1)}=N(y_1,1)A=[e_1\ \ \alpha_2^{(1)}\cdots\alpha_n^{(1)}]$

②找 y_2 使 $N(y_2,2)\alpha_2^{(1)}=e_2$

而 $(I-y_2e_2^T)e_1=e_1$

$\Rightarrow A^{(2)}=N(y_2,2)A^{(1)}=[e_1\ \ e_2\ \ \alpha_3^{(2)}\cdots\alpha_n^{(3)}]$

以此类推 得 $A^{(n)}=I$

则 $A^{-1}=N(y_n,n)\cdots N(y_1,1)$

由(2), $e_k^TA^{(k)}e_k\neq 0$ 时才可进行到底

$(k=1,2,\cdots,n)$

17. $A=L_1L_1^T=L_2L_2^T$

其中 L_1,L_2 对角元正数下三角, A正定

$\Rightarrow L_2^{-1}L_1=L_2^TL_1^{-T}=(L_2^{-1}L_1)^{-T}$ 令 $U=L_2^{-1}L_1$ 对角元为正下三角

$UU^T=I$ $\Rightarrow$ U正交 而 U 对角元正数下三角 $\Rightarrow U=I$

$\Rightarrow L_2=L_1$

18. $n+1$

$A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ $a_{ik}=0$ $\forall i>n+k$

$i>n+k$ 时

证 $l_{ik}=\left(a_{ik}-\sum_{p=1}^{k-1}l_{ip}l_{kp}\right)/l_{kk}=0$

(对k归纳) 则由 $p<k$ 及 $i>n+p$ 有 $l_{ip}=0$ (归纳假设)

而 $a_{ik}=0$ $\Rightarrow l_{ik}=0$

19. $A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & n-i \end{array} & \end{array}$ $L=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & L_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & n-i \end{array} & \end{array}$

$LL^T=\begin{pmatrix} L_1L_1^T & * \\ * & * \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A_1=L_1L_1^T$

20. $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix}$, 列分块 $n-1$, 1

A_{11} 各阶顺序主子式 $\neq 0$ $\Rightarrow$ $A_{11}=L_1U_1$ $\begin{cases} L_1 \text{单位下三角} \\ U_1 \text{上三角} \end{cases}$ 可逆

$A_{11}^T=A_{11}$ $\Rightarrow$ $U_1^TL_1^T=L_1U_1$ $\Rightarrow$ $\underset{\text{下三角}}{L_1^{-1}U_1^T}=\underset{\text{上三角}}{U_1L_1^{-T}}$ 且对角元与 U_1 的相同

设 $U_1=\tilde{U}D$ $\tilde{U}$ 单位上三角, D_1 对角,可逆 $\Rightarrow$ $L_1^{-1}U_1^T=U_1L_1^{-T}=D_1$ $\Rightarrow$ $U=D_1L_1^T$ $\Rightarrow$ $A_{11}=L_1D_1L_1^T$

A有分解 $\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ \alpha^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1^T & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1D\alpha=A_{12} \\ \mu=A_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=(L_1D)^{-1}A_{12} \\ \mu=A_{22} \end{cases}$

(唯一性) $LDL^T=\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$ $\Rightarrow$ $(\tilde{L}^{-1}L)D(\tilde{L}^{-1}L)^T=\tilde{D}$ 记 $S=\tilde{L}^{-1}L$ 单位下三角

$\underset{\text{下三角}}{SD}=\underset{\text{上三角}}{\tilde{D}S^{-T}}$ $\Rightarrow$ $SD=D$ 而 $A_{11}=L_1\cdot D_1\cdot L_1^T$ 沿用记号

$\Rightarrow \det D_1\neq 0$ 记 $S=\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix}$, 列分块 $n-1$, 1

$\Rightarrow \begin{cases} S_1D_1=D_1 \\ \beta^TD_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1=I \\ \beta^T=0 \end{cases} \Rightarrow S=I$

$\Rightarrow L=\tilde{L} \Rightarrow D=\tilde{D}$

21. $a_{ik}=\sum_{p=1}^{k} l_{ip}l_{kp}$ $(i\geq k)$

$\Rightarrow \begin{cases} l_{ik}=\dfrac{a_{ik}-\sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}l_{kp}}{l_{kk}} & (i>k) \\ l_{ii}=\left(a_{ii}-\sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}^2\right)^{1/2} \end{cases}$

顺序: l_{11}

$\downarrow$

$l_{21}\to l_{22}$

$l_{31}\to l_{32}\to l_{33}$

......

```
for k=1:n
  for j=1:k-1
    A(k,j)=A(k,j)/A(j,j)
    for i=j+1:k
      A(k,i)=A(k,i)-A(k,j)A(i,j)
    end
  end
  A(k,k)=√A(k,k)
end
```

22. $A=LDL^T$ $A^{-1}=(L^{-1})^TD^{-1}L^{-1}$

设计算法求 L^{-1} 即可

24. (1) $(A+iB)^H = A^T - iB^T$

$\Rightarrow A = A^T,\ B^T = -B$

$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (x^T\ y^T)\, C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^T A x + y^T A y - x^T B y + y^T B x \quad (*)$

而 $\forall z, w \in \mathbb{R}^n \qquad (z^T - i w^T)(A + iB)(z + iw) \geq 0$ 取等 $\Leftrightarrow z = w = 0$

即 $\quad z^T A z + w^T B z + w^T A w - z^T B w \geq 0$

取 $z = x,\ w = y$ 即得 $(*) \geq 0$ 取等 $\Leftrightarrow x = y = 0$

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} Ax - By = b \\ Bx + Ay = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$

↳ 正定，用 choleskey 即可