《数值分析》之

函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

- 多项式插值误差定理
  设$f \in C^{n+1}[a,b]$，多项式p是f在不同结点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上的插值多项式，$\deg p \leqslant n$。则对$[a,b]$中每个x，都有$\xi_x \in (a,b)$使得

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

- 即如何选取结点x_i，使得$w(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$ 在$[a,b]$上的绝对值最大值最小?
- 为了简单起见，不妨令$[a,b] = [-1,1]$. 转而考虑一般的首一n次多项式$p(x)$使得它在$[-1,1]$上的绝对值最大值最小。
- 需要用到(第一类)Tchebyshev多项式*。

---

*Tchebyshev (1821.5.16–1894.12.8)，俄罗斯数学家。1850年证明了Bertrand猜测，即n与$2n$之间必有至少一个素数，也接近证明了素数定理。同时他在概率论、正交函数和积分理论方面有重要贡献。其英文名有时也写作Chebyshev

有两种等价的定义方式

- 递归定义：

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

- 解析形式定义：

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Tchebyshev多项式性质

- $|T_n(x)| \leqslant 1, \ -1 \leqslant x \leqslant 1$
- $T_n\left(\cos\frac{j\pi}{n}\right) = (-1)^j, \ j = 0, \ldots, n$
- $T_n\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) = 0, \ j = 1, \ldots, n$
- $2^{1-n}T_n$是一个首一多项式

中国科学技术大学

Theorem

设$p(x)$为一个n次首一多项式，则

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)|\geqslant 2^{1-n}$$

证明：反证法。设对任意$x\in[-1,1]$, $|p(x)|<2^{1-n}$.
令$q(x)=2^{1-n}T_n$, $x_i=\cos(i\pi/n)$,

$$(-1)^i p(x_i)\leqslant|p(x_i)|<(-1)^i q(x_i)$$

即$(-1)^i\big(q(x_i)-p(x_i)\big)>0$, $i=0,\ldots,n$. 这说明在区间$[-1,1]$上，多项式$q-p$的符号在正负之间变动了$n+1$次，即它在$(-1,1)$之间至少有n个根，而这是不可能的，因为$q-p$的次数至多是$n-1$.

最佳结点选取

- Tchebyshev结点：结点x_i是Tchebyshev多项式$T_{n+1}(x)$的根
- 插值误差

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{|t|\leqslant 1} |f^{(n+1)}(t)|$$

中国科学技术大学

Theorem (Faber's定理)

对任意给定的结点组

$$a \leqslant x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant b, \quad n \geqslant 0 \tag{1}$$

在区间$[a, b]$上存在一个连续函数f使得f在这组结点上的插值多项式不能一致收敛于f.

Theorem

若$f \in C[a, b]$，则存在(1)式中那样的一组结点，使得f在这组结点上的插值多项式p_n满足

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$$

- $C[a,b]$上的正线性算子L是指它满足
  1. 线性性：$L(af+bg)=aLf+bLg,\ a,b\in\mathbb{R},\ f,g\in C[a,b]$
  2. 正性：若$f\geqslant 0$，则$Lf\geqslant 0$
- 正线性算子的著名例子来自于Serge Bernstein在1912年定义的如下算子: 在$C[0,1]$中，

$$(B_nf)(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_k^n(x),\qquad B_k^n(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

这里的$\{B_k^n(x)\}$称为Bernstein基函数。

Theorem

设$L_n (n \geqslant 1)$是定义在$C[a,b]$上的一个正线性算子序列，其中每个算子在相同的空间中取值。若对于函数$f(x) = 1, x, x^2$, $\|L_n f - f\|_\infty \to 0$成立，则对所有的$f \in C[a,b]$此结论也成立。

证明：若L为正线性算子，则由$f \geqslant g$可知$Lf \geqslant Lg$, 进一步有$L(|f|) \geqslant |Lf|$. 记$h_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$. 再定义α_n, β_n, γ_n如下：

$$\alpha_n = L_n h_0 - h_0, \quad \beta_n = L_n h_1 - h_1, \quad \gamma_n = L_n h_2 - h_2$$

由定理的假设可知

$$\|\alpha_n\|_\infty \to 0, \quad \|\beta_n\|_\infty \to 0, \quad \|\gamma_n\|_\infty \to 0$$

下面证明对于任意$f \in C[a,b]$以及任意的$\varepsilon > 0$, 存在m使得当$n > m$时$\|L_n f - f\|_\infty < 3\varepsilon$.

由于f在紧区间上连续，从而一致连续，所以存在$\delta > 0$, 使得对于区间$[a, b]$中所有的x和y, 当$|x - y| < \delta$时，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 令$c = 2\|f\|_\infty/\delta^2$, 则有当$|x - y| \geqslant \delta$时，

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\|f\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{(x - y)^2}{\delta^2} = c(x - y)^2$$

从而对于$[a, b]$内的任意x, y有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + c(x - y)^2$$

上述不等式重写为：

$$|f - f(y)h_0| \leqslant \varepsilon h_0 + c[h_2 - 2yh_1 + y^2 h_0]$$

从而根据正线性算子的定义有：

$$|L_n f - f(y)L_n h_0| \leqslant \varepsilon L_n h_0 + c[L_n h_2 - 2yL_n h_1 + y^2 L_n h_0]$$

进一步用y代替x，

$$
\begin{aligned}
&|(L_nf)(y)-f(y)(L_nh_0)(y)|\\
&\leqslant \varepsilon(L_nh_0)(y)+c[(L_nh_2)(y)-2y(L_nh_1)(y)+y^2(L_nh_0)(y)]\\
&=\varepsilon[1+\alpha_n(y)]+c[y^2+\gamma_n(y)-2y(y+\beta_n(y))+y^2(1+\alpha_n(y))]\\
&=\varepsilon+\varepsilon\alpha_n(y)+c\gamma_n(y)-2cy\beta_n(y)+cy^2\alpha_n(y)\\
&\leqslant \varepsilon+\varepsilon\|\alpha_n\|_\infty+c\|\gamma\|_\infty+2c\|h_1\|_\infty\|\beta_n\|_\infty+c\|h_2\|_\infty\|\alpha_n\|_\infty
\end{aligned}
$$

因此存在m, 当$n\geqslant m$时，$\|L_nf-f\cdot L_nh_0\|_\infty\leqslant 2\varepsilon$. 因此必要时再增大$m$有

$$
\begin{aligned}
\|L_nf-f\|_\infty \leqslant&\|L_nf-f\cdot L_nh_0\|_\infty+\|f\cdot L_nh_0-f\cdot h_0\|_\infty\\
\leqslant&2\varepsilon+\|f\|_\infty\|\alpha_n\|_\infty\leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

Bernstein算子的情形

- h_0: $(B_n h_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) = 1$
- h_1:
$$(B_n h_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$$
- h_2:
$$(B_n h_2)(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \to x^2$$

从而Bohman-Korovkin定理此时给出了Weierstrass定理：即有界闭区间上的连续函数可以被多项式一致逼近。

最佳逼近

- 考虑定义在给定拓扑空间X上的全体实值连续函数形成的空间$C(X)$，这里X为紧的Hausdorff空间
- 定义范数为

$$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|$$

则$C(X)$成为一个赋范空间(从而是Banach空间)

- $C(X)$中的最佳逼近问题为：给定$f \in C(X)$以及$C(X)$的一个有限维子空间G, 计算$g \in G$使得

$$\|f - g\| = \mathrm{dist}(f, G) := \inf_{\bar{g}\in G} \|f - \bar{g}\|$$

- 由上节“最佳逼近存在性定理”可知g是存在的