第二章 Fourier 分析基础

1 Fourier 级数

如果 f 是任意以 2π 为周期的函数, 是否能将其展开成如下三角函数和式的形式

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\ ?$$

三角函数系的正交性

函数集

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n = 1, 2, \cdots\right\}$$

是 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的标准正交集.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 1, & n = k \geq 1. \\ 2, & n = k = 0. \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \begin{cases} 1, & n = k \geq 1. \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)dx = 0, \ \forall n, k.$$

定理 如果 f 可展开成三角函数和式的形式, 即

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

则有

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \qquad (1)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \qquad (3)$$

Fourier 级数

定义 假设 f 是以 2π 为周期的函数. 如果三角级数

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

的系数由(1), (2) 和(3) 给出, 则称该三角级数为 f 的 Fourier 级数, 其系数 a_k, b_k 称为 f 的 Fourier 系数.

一般周期函数的 Fourier 级数

定理 如果 f 可展开成如下三角函数和式的形式

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a),$$

则有

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dt,$$
$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(k\pi x/a)dt,$$
$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(k\pi x/a)dt.$$

定义 假设 f 是以 $2a$ 为周期的函数. 其 Fourier 级数定义为如下的三角级数

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a),$$

其中 Fourier 系数 a_k, b_k 由以下公式给出

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dt,$$

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(k\pi x/a)dt,$$

$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(k\pi x/a)dt.$$

余弦和正弦展开

- 如果 f 是以 $2a$ 为周期的偶函数, 则其 Fourier 级数表示为

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(k\pi x/a),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx,\ a_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(k\pi x/a)dx.$$

- 如果 f 是以 $2a$ 为周期的奇函数, 则其 Fourier 级数表示为

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(k\pi x/a)$$

其中

$$b_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(k\pi x/a)dx.$$

任意区间上函数的 Fourier 级数

- 假设 f 定义在区间 (a,b) 上. 可将其延拓成为 $\mathbb{R}$ 上以 $b-a$ 为周期的函数, 从而可得其 Fourier 级数.
- 假设 f 定义在区间 $(0,a)$ 上. 首先将其进行偶延拓

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < a, \\ f(-x), & -a < x < 0. \end{cases}$$

其次将 f_e 延拓成为 $\mathbb{R}$ 上以 $2a$ 为周期的函数, 从而可得 f 的余弦级数

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a),$$

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx,\ a_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(k\pi x/a)dx.$$

- 假设 f 定义在区间 $(0,a)$ 上. 首先将其进行奇延拓

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<a,\\ -f(-x), & -a<x<0. \end{cases}$$

其次将 f_o 延拓成为 $\mathbb{R}$ 上以 $2a$ 为周期的函数, 从而可得 f 的正弦级数

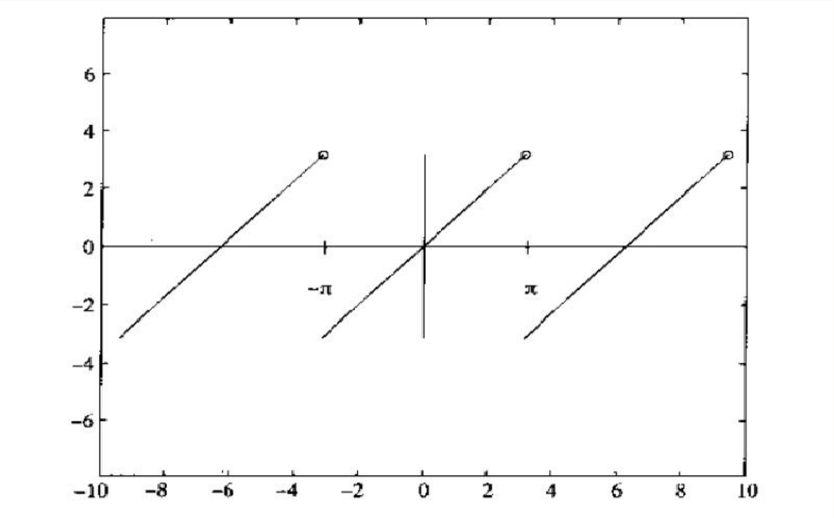
$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x/a),$$

$$b_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(k\pi x/a)dx.$$

例1 考虑函数

$$f(x) = x, \ -\pi \leq x < \pi.$$

将其周期延拓为以 2π 为周期的函数. (如图)



该函数是奇函数, 因此 Fourier 系数 $a_k = 0$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx \\ &= -\frac{1}{\pi k}x\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

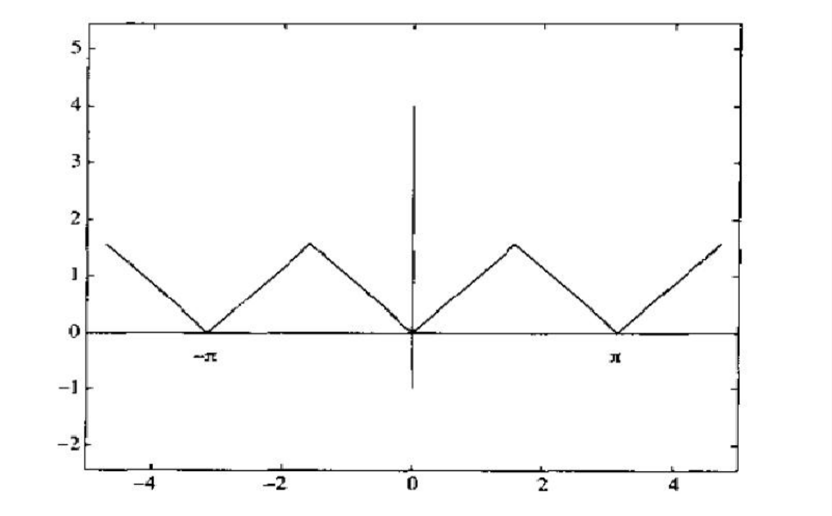
于是其 Fourier 级数为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

例2 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

将其周期延拓为以 2π 为周期的偶函数. (如图)



计算其 Fourier 系数

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \tfrac{\pi}{4}. \\ a_j &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(jx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(jx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\cos(jx)dx \\ &= \frac{4\cos(j\pi/2) - 2\cos(j\pi) - 2}{\pi j^2}. \end{aligned}$$

因为在 Fourier 系数中只有 a_{4k+2} 非零, 所以 Fourier 系数简化为

$$a_{4k+2} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}.$$

于是 Fourier 级数表示为

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((4k+2)x).$$

复型 Fourier 级数

函数系

$$\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}},\ n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\right\}$$

在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中是标准正交的.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}dt=\begin{cases}2\pi, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

定理 如果 f 可展开成复型三角级数的形式, 即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int},$$

则有

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \qquad (*)$$

定义 假设 f 是以 2π 为周期的函数. 如果复型三角级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$$

的系数由$(*)$式给出, 则该级数称为 f 的 **复型 Fourier 级数**, 系数 α_n 称为 f 的 **复型 Fourier 系数**.

实型 Fourier 级数与复型 Fourier 级数的关系

Fourier 系数

$$\alpha_0 = a_0$$

$$\begin{cases} \alpha_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ n \geq 1 \\ \alpha_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n),\ n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n &= \alpha_n + \alpha_{-n},\ n \geq 1 \\ b_n &= i(\alpha_n - \alpha_{-n}),\ n \geq 1 \end{cases}$$

Fourier 级数

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{int} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)(\cos nx - i \sin nx) + a_0 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)(\cos nx + i \sin nx) \\
=& a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)
\end{aligned}
$$

左极限和右极限

- f 在 x 点的左极限:

$$f(x-0)=\lim_{h\to 0^+} f(x-h)$$

- f 在 x 点的右极限:

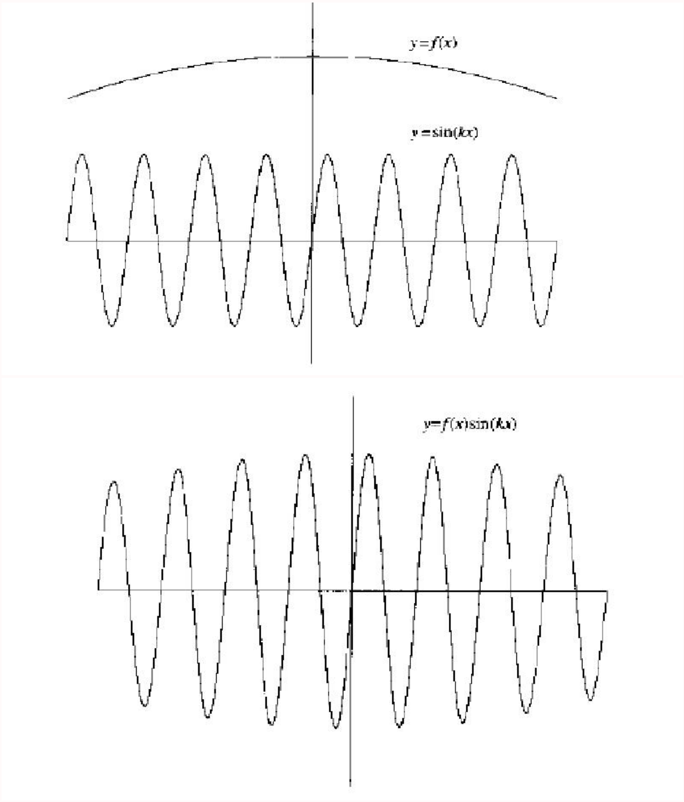
$$f(x+0)=\lim_{h\to 0^+} f(x+h)$$

- 分段连续函数: 称 f 在 $[a,b]$ 上分段连续, 如果其在 $[a,b]$ 上只有有限个间断点, 并且在有限个间断点上左右极限存在且有限.

Riemann-Lebesgue 引理

假设 f 是区间 $[a,b]$ 上的分段连续函数, 则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(kx)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)dx = 0.$$



$y=f(x)$
$y=\sin(kx)$
$y=f(x)\sin(kx)$

Fourier 级数的收敛性

定义 称 f 的 Fourier 级数在 x 点处收敛到 f, 如果

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x),$$

其中

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

连续点处的收敛性

定理 假设 f 是以 2π 为周期的连续函数. 如果 f 在 x 点可导, 则 f 的 Fourier 级数在 x 点处收敛到 f.

注: 实际上, 对于连续函数, 其 Fourier 级数是几乎处处收敛到其自身的.

证明

第1步: 改写 Fourier 级数的部分和 S_N.

将 Fourier 系数公式带入部分和, 可得

$$
\begin{aligned}
S_N(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)dt \Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\Big)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos(k(t-x))\Big)dt.
\end{aligned}
$$

引入 Dirichlet 核

$$P_N(u) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos(ku)\right),$$

则 Fourier 级数的部分和可表示为

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_N(t-x)\,dt \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) P_N(u)\,du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) P_N(u)\,du. \end{aligned}$$

第2步: 计算 Dirichlet 核

$$
\begin{aligned}
P_N(u) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos(u) + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2} + 1 + \cos(u) + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N} e^{iku}\right\}\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{2} + \operatorname{Re}\left\{\dfrac{1-e^{i(N+1)u}}{1-e^{iu}}\right\}\right), & u \neq 2j\pi \\ \dfrac{1}{\pi}\left(N + \dfrac{1}{2}\right), & u = 2j\pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin((N+1/2)u)}{\sin(u/2)}, & u \neq 2j\pi \\ \dfrac{1}{2\pi}(2N+1), & u = 2j\pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

第3步: 对 Dirichlet 核积分

根据

$$P_N(u) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos(u) + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu)\right),$$

可得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} P_N(u)du &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \\ &\quad + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu)du \\ &= 1.\end{aligned}$$

第4步: 定理的证明

$$
\begin{aligned}
& S_N(x) - f(x) \\
= & \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) P_N(u) du - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P_N(u) du \\
= & \int_{-\pi}^{\pi} (f(u+x) - f(x)) P_N(u) du \\
= & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(u+x) - f(x)}{\sin(u/2)} \right) \sin((N+1/2)u) du.
\end{aligned}
$$

引入函数

$$
g(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u+x) - f(x)}{\sin(u/2)}, & u \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ 2f'(x), & u = 0. \end{cases}
$$

则有

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin((N+1/2)u)du.$$

因为 f 在 x 点可导, 即 $f^{'}(x) = \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{u}$ 存在, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} g(u) &= \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{\sin(u/2)} \\
&= \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{u}\frac{u/2}{\sin(u/2)}\cdot 2 \\
&= f^{'}(x)\cdot 1\cdot 2 \\
&= 2f^{'}(x).
\end{aligned}$$

于是可知 g 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续. 利用 Riemann-Lebesgue 引理即得

$$S_N(x) \to f(x),\ N\to\infty.$$

左导数和右导数

- 如果 f 在 x 点处的左极限 $f(x-0)$ 存在, 则 f 在 x 点处的左导数定义为

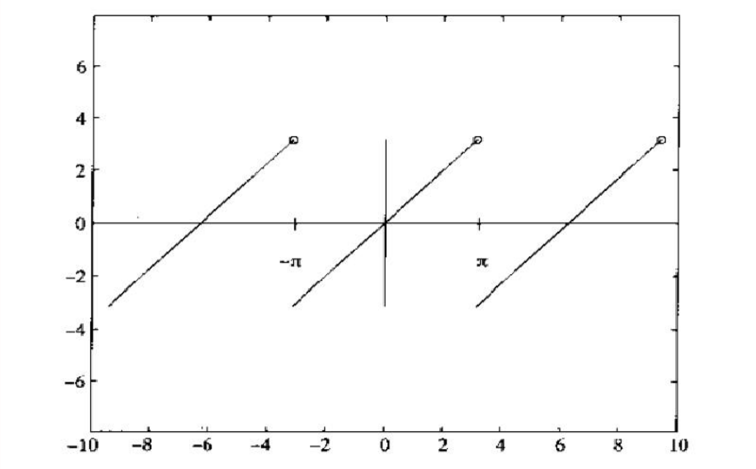
$$f'(x-0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x-0)}{h}.$$

- 如果 f 在 x 点处的右极限 $f(x+0)$ 存在, 则 f 在 x 点处的右导数定义为

$$f'(x+0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}.$$

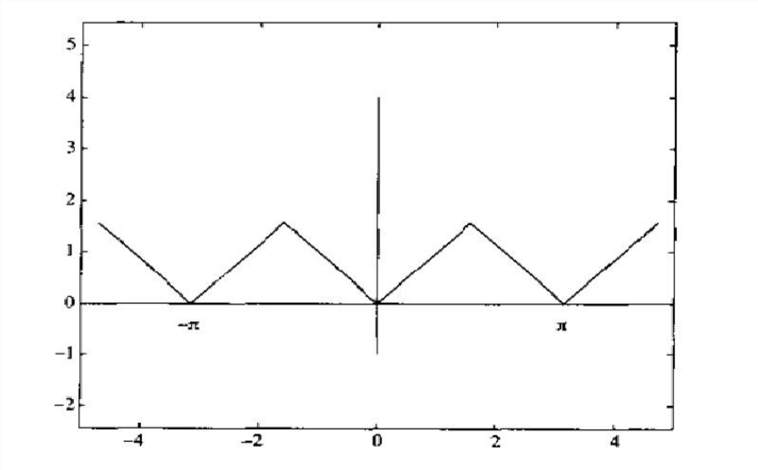
例1 令 f 是 $y=x,\ -\pi\le x<\pi$的周期延拓(如图). f 在 $x=\pi$ 处不连续, 左右极限存在, $f(\pi-0)=\pi, f(\pi+0)=-\pi$. 左右导数存在,

$$f'(\pi-0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{(\pi+h)-\pi}{h}=1$$
$$f'(\pi+0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{(\pi+h-2\pi)-(-\pi)}{h}=1.$$



例2 令 f 是锯齿波函数(如图). 则 f 在 $x=\pi/2$ 处连续但不可导, 其左右导数为

$$f'(\pi/2-0)=1,\quad f'(\pi/2+0)=-1.$$



间断点处的收敛性

定理 假设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的分段连续函数. 如果 f 在 x 点处左右可导, 则 f 的 Fourier 级数在 x 点收敛到

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

证明: 由前面的讨论可知 Fourier 级数的部分和可表示为

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) P_N(u)\,du,$$

其中 Dirichlet 核

$$P_N(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin((N+1/2)u)}{\sin(u/2)}, & u \neq 2j\pi \\ \dfrac{1}{2\pi}(2N+1), & u = 2j\pi \end{cases}$$

满足

$$\int_0^{\pi} P_N(u)\,du = \int_{-\pi}^{0} P_N(u)\,du = \frac{1}{2}.$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&S_N(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} f(u+x)P_N(u)du - \frac{f(x+0)}{2} \\
&\quad + \int_{-\pi}^{0} f(u+x)P_N(u)du - \frac{f(x-0)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} (f(u+x) - f(x+0))P_N(u)du \\
&\quad + \int_{-\pi}^{0} (f(u+x) - f(x-0))P_N(u)du
\end{aligned}
$$

引入函数

$$g_1(u) = \frac{f(u+x) - f(x+0)}{\sin(u/2)}, \ u \in (0, \pi].$$

于是第一项可表示为

$$\int_0^\pi (f(u+x) - f(x+0)) P_N(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g_1(u) \sin((N+1/2)u) du.$$

因为 f 在 x 点处右可导, 即 $f'(x+0) = \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u+x) - f(x+0)}{u}$ 存在, 所以我们有

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 0^+} g_1(u) &= \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u+x) - f(x+0)}{\sin(u/2)} \\ &= \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u+x) - f(x+0)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)} \cdot 2 \\ &= f'(x+0) \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 2f'(x+0). \end{aligned}$$

上式说明 g_1 在 $[0, \pi]$ 上分段连续. 利用 Riemann-Lebesgue 引理即得第一项收敛于 0.

类似地, 为了估计第二项, 引入函数

$$g_2(u) = \frac{f(u+x) - f(x-0)}{\sin(u/2)}, u \in [-\pi, 0).$$

根据 f 在 x 点处左可导, 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0^-} g_2(u) &= \lim_{u\to 0^-} \frac{f(u+x) - f(x-0)}{\sin(u/2)} \\
&= \lim_{u\to 0^-} \frac{f(u+x) - f(x-0)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)} \cdot 2 \\
&= f'(x-0) \cdot 1 \cdot 2 \\
&= 2f'(x-0).
\end{aligned}$$

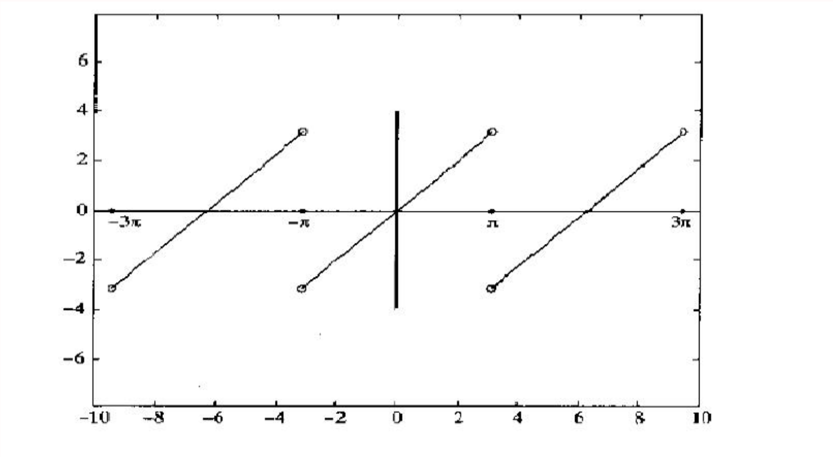
此即说明 g_2 在 $[-\pi, 0]$ 上分段连续. 再次利用 Riemann-Lebesgue 引理, 可得当$N \to +\infty$时

$$\int_{-\pi}^{0} (f(u+x) - f(x-0)) P_N(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} g_2(u) \sin((N+1/2)u) du \to 0.$$

例 令 f 是 $y=x,\ -\pi\le x<\pi$的周期延拓(如图). f 在 $x=\pi$ 处不连续但左右可导, 于是其 Fourier 级数

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

在 $x=\pi$ 点收敛于左右极限的平均值. 由于 $f(\pi-0)=\pi$, $f(\pi+0)=-\pi$, 我们有 $F(\pi)=0$. 这与由 Fourier 级数公式计算的值一致.



Fourier 级数的一致收敛

定义 称 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f, 如果部分和序列

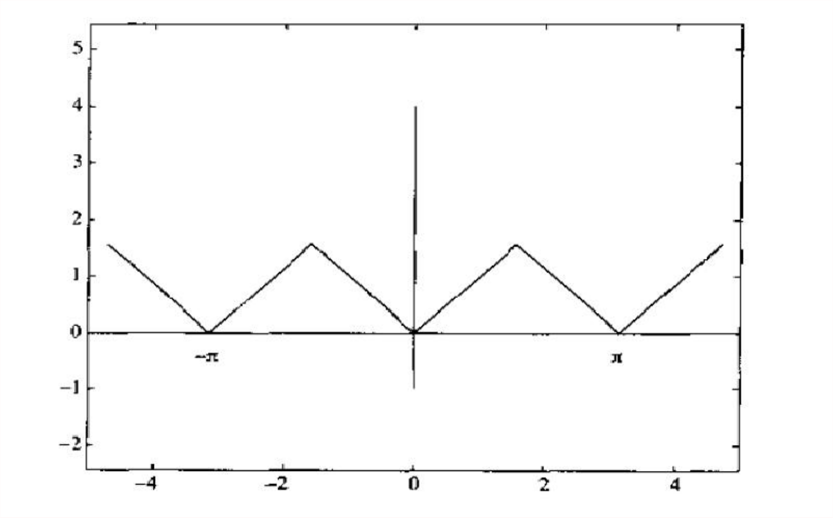
$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

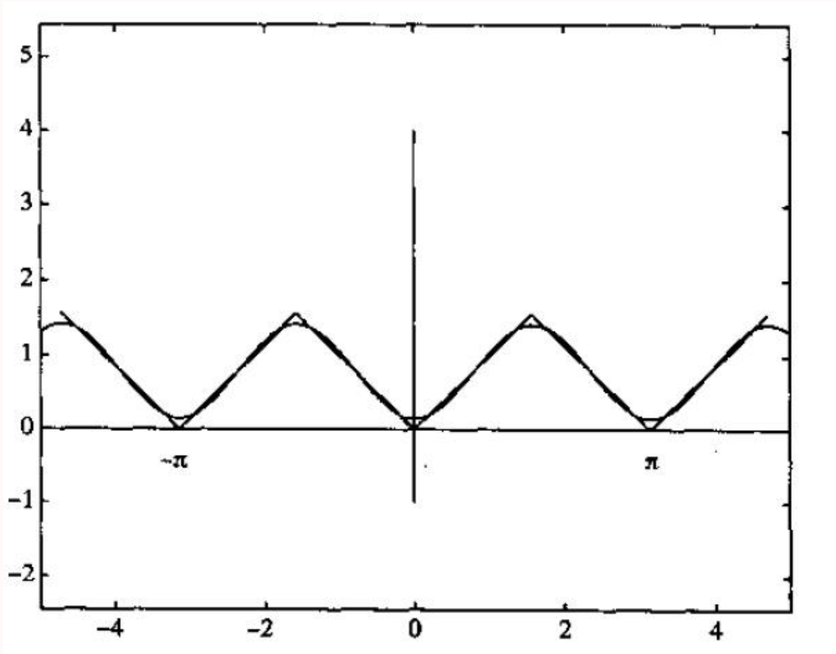
一致收敛于 f.

定理 假设 f 是以 2π 为周期的分段光滑函数. 则其 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 f.

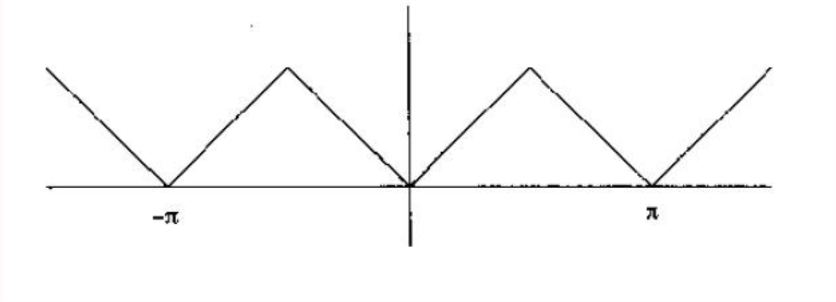
分段光滑函数 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在有限个点外可导且 f' 分段连续, 则称 f 在 $[a, b]$ 上分段光滑.

例1 考虑锯齿波函数(如图) Fourier 级数的一致收敛性.



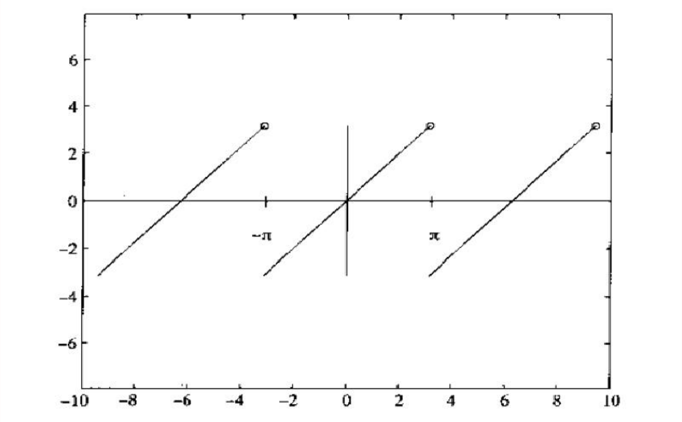


s_2

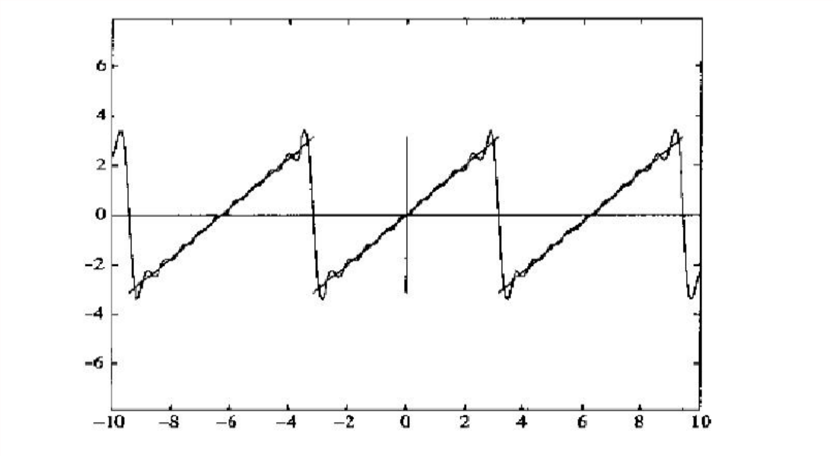


s_{10}

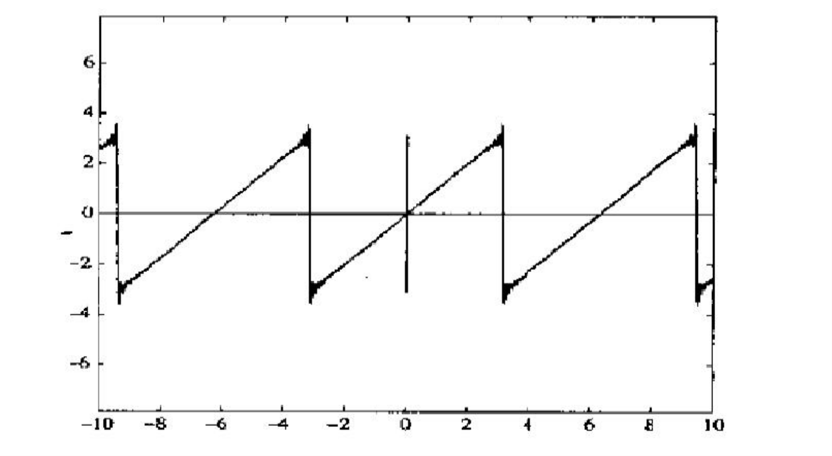
例2 考虑 $y = x,\ -\pi \leq x < \pi$的周期延拓(如图).



Gibbs 现象



s_{10}



s_{50}

例3 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0,\ \pm\pi\\ -1, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

计算 Fourier 系数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right) \\ &= \begin{cases}\frac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\end{aligned}$$

其 Fourier 级数

$$F(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

逐点收敛到 f. 因为 $S_{2n}(x)=S_{2n-1}(x)$, 我们只需考虑部分和

$$S_{2n-1}(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

在间断点 $x=0$ 附近的性质.

逐项微商得

$$\begin{aligned} S'_{2n-1}(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx - \sin 2(k-1)x}{2\sin x} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

由此可知, S_{2n-1} 在 $x=0$ 的右边的第一个极大值点是 $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

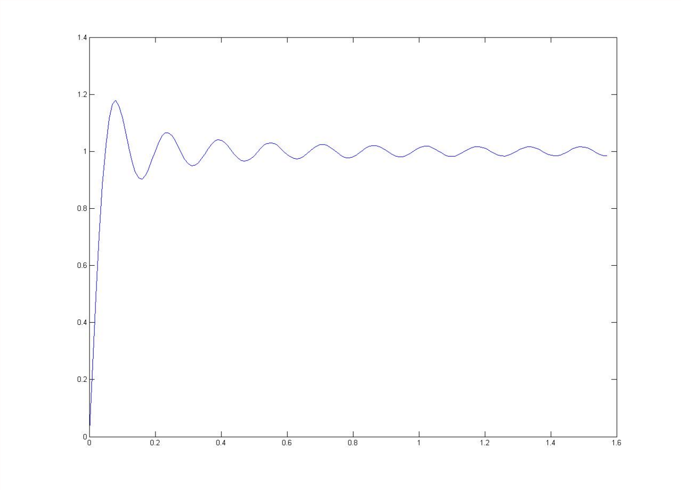
其极大值为

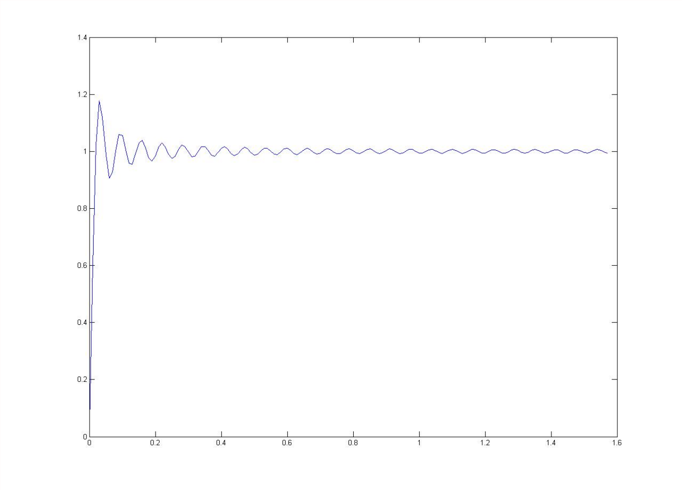
$$\begin{aligned} S_{2n-1}(x_n) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{x_n}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\frac{\frac{t}{2n}}{\sin\frac{t}{2n}}dt. \end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}(x_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt = 1.17898\cdots.$$

此式说明, 不论 n 多大, 都有一个点 $x_n = \frac{\pi}{2n}$, 使 $S_{2n-1}(x)$ 在这点达到一个峰值, 其值比 $f(x_n) = 1$ 的值大约超出 0.17898. 当 $n \to \infty$ 时, 达到峰值的点趋近于 0.


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Fourier 级数依范数收敛

定理 如果 $f \in L^2([-\pi, \pi])$, 则其 Fourier 级数在 $L^2([-\pi, \pi])$ 中依范数收敛于 f, 即其 Fourier 级数的部分和

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

满足

$$\|f - S_N\|_{L^2} \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

定理 如果 $f \in L^2([-\pi,\pi])$, 则其复型 Fourier 级数在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中依范数收敛于 f, 即其 Fourier 级数的部分和

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikt}$$

满足

$$\|f - S_N\|_{L^2} \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

证明

第一步: 部分和 S_N 的几何解释.

令 $V = L^2([-\pi, \pi])$, V_N 是由 $\{1, \cos(kx), \sin(kx),\ 1 \le k \le N\}$ 张成的空间. 则 V_N 是 V 的 $2N+1$ 维子空间, 并且

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}},\ 1 \le k \le N\right\}$$

是 V_N 的标准正交基.

假设 $f \in L^2([-\pi,\pi])$. 其 Fourier 级数部分和表示为

$$
\begin{aligned}
S_N(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \right) \cos(kx) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \right) \sin(kx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{N} \left\langle f, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \left\langle f, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}},
\end{aligned}
$$

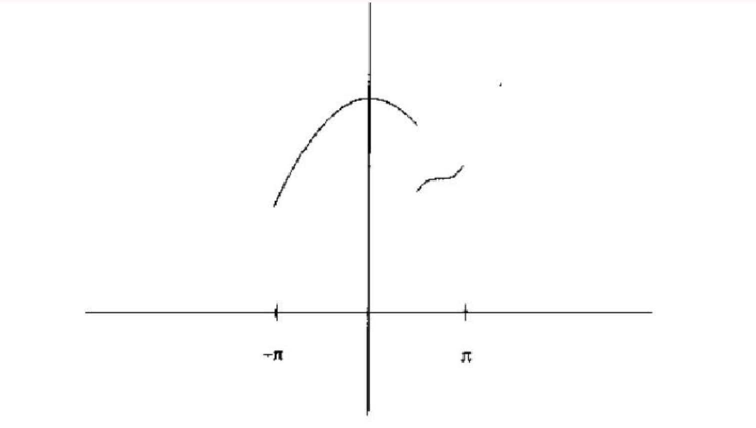
此式表明 S_N 是 f 到 V_N 的正交投影, 即 S_N 是 f 到 V_N 的最佳逼近.

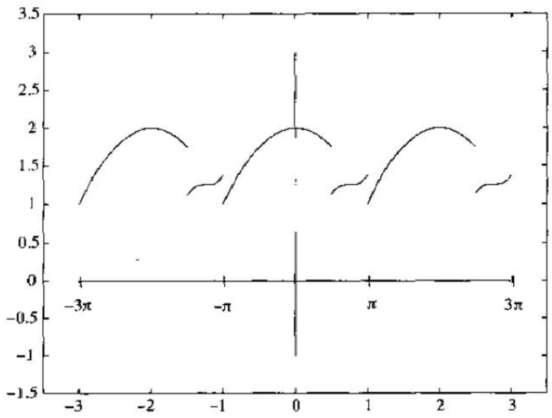
$$
\|f - S_N\|_{L^2} = \min_{g \in V_N} \|f - g\|_{L^2}.
$$

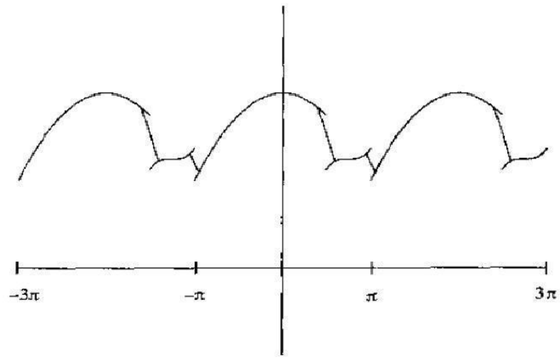
第二步: 对 $f \in L^2([-\pi,\pi])$ 逼近.

$L^2([-\pi,\pi])$ 中的函数可由以 2π 为周期的光滑函数任意逼近, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在以 2π 为周期的光滑函数 g, 满足

$$\|f - g\|_{L^2} \leq \epsilon/2.$$




3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3π
−π
π
3π
−3
−2
−1
0
1
2
3


−3π
−π
π
3π

第三步: 定理的证明

令

$$g_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)$$

为 g 的 Fourier 级数部分和. 由于 g 是以 2π 为周期的光滑函数, 因此 g_N 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 g, 从而依范数收敛于 g. 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N_0 > 0$, 使得当 $N > N_0$ 时, 有

$$\|g - g_N\|_{L^2} \leq \epsilon/2.$$

由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|f-g_N\|_{L^2} &= \|f-g+g-g_N\|_{L^2}\\ &\le \|f-g\|_{L^2}+\|g-g_N\|_{L^2}\\ &\le \epsilon.\end{aligned}$$

因为 $g_N \in V_N$, 并且 S_N 是 f 到 V_N 的最佳逼近, 所以我们有

$$\|f-S_N\|_{L^2} \le \|f-g_N\|_{L^2} \le \epsilon.$$

Parseval 等式

定理-实型 Parseval 等式 假设 $f \in L^2([-\pi,\pi])$, 其 Fourier 系数为 a_k, b_k. 则下述等式成立

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = 2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 + |b_k|^2.$$

进一步, 设 $g \in L^2([-\pi,\pi])$, 其 Fourier 系数为 c_k, d_k, 则有

$$\frac{1}{\pi}\langle f, g\rangle = 2a_0\overline{c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{c_k} + b_k\overline{d_k}.$$

定理-复型 Parseval 等式 假设 $f \in L^2([-\pi, \pi])$, 其复型 Fourier 系数为 α_k. 则下述等式成立

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

进一步, 设 $g \in L^2([-\pi, \pi])$, 其复型 Fourier 系数为 β_k, 则有

$$\frac{1}{2\pi}\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\overline{\beta_k}.$$

证明 令

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikx}$$

$$g_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \beta_k e^{ikx}$$

分别是 f 和 g 的 Fourier 级数部分和. 则有 $f_N \to f, g_N \to g,\ N \to \infty$.

计算内积可得

$$
\begin{aligned}
\langle f_N, g_N \rangle &= \left\langle \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikx}, \sum_{n=-N}^{N} \beta_n e^{inx} \right\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_k \overline{\beta_n} \langle e^{ikx}, e^{inx} \rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \overline{\beta_k} \langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle \\
&= 2\pi \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \overline{\beta_k}.
\end{aligned}
$$

下面证明

$$\langle f_N, g_N\rangle \to \langle f, g\rangle, \quad N \to \infty.$$

利用 Schwarz 不等式和三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&|\langle f, g\rangle - \langle f_N, g_N\rangle| \\
&= |(\langle f, g\rangle - \langle f, g_N\rangle) + (\langle f, g_N\rangle - \langle f_N, g_N\rangle)| \\
&\leq |\langle f, g - g_N\rangle| + |\langle f - f_N, g_N\rangle| \\
&\leq \|f\|_{L^2}\|g - g_N\|_{L^2} + \|f - f_N\|_{L^2}\|g_N\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

由

$$\|g_N\|_{L^2} = \|g_N - g + g\|_{L^2} \leq \|g_N - g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2},$$

可知 $\|g_N\|_{L^2} \to \|g\|_{L^2}$. 结合 $\|f_N - f\|_{L^2} \to 0$ 及 $\|g - g_N\|_{L^2} \to 0$, 即可得

$$\langle f_N, g_N\rangle \to \langle f, g\rangle,\ N \to \infty.$$

例1 设 $f(x)=x,\ -\pi\le x<\pi$. 其 Fourier 级数为

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

利用 Parseval 等式可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}.$$

再由

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

得等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例2 设 f 为锯齿波函数. 其 Fourier 级数为

$$F(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((4k+2)x).$$

由于 f 在 $x=0$ 连续且左右可导, $F(0)$ 收敛于 $f(0)$, 从而得等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

利用 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{\pi^2}{8}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$

及

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{\pi^2}{6},$$

可得等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

2 Fourier 变换

假设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非周期函数. 考虑 f 在区间 $[-l, l]$ 上的 Fourier 级数展开

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/l},$$

其中

$$\alpha_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-in\pi t/l} dt.$$

将 Fourier 系数公式带入得,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{in\pi(x-t)/l} dt, \ -l < x < l.$$

令 $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $\triangle\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}$, 以及

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt.$$

则展开式表示为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l(\lambda_n) \triangle \lambda_n, \ -l < x < l.$$

令 $l \to \infty$, 则可得 f 在 $\mathbb{R}$ 上的展开

$$f(x) = \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_l(\lambda_n) \triangle \lambda_n, \ x \in \mathbb{R}.$$

① 当 $l \to \infty$ 时, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_l(\lambda_n) \triangle \lambda_n$ 可看成积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} F_l(\lambda) d\lambda$.

② 当 $l \to \infty$ 时, $F_l(\lambda)$ 即为积分 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt$.

于是可得

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right] d\lambda.$$

通过引入

$$c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

可得 f 在 $\mathbb{R}$ 上的展开

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

利用 f 的复型展开可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Big[\cos\lambda(x-t)+i\sin\lambda(x-t)\Big]dtd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt\right)+i\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)dt\right)d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\right)\sin\lambda x d\lambda, \end{aligned}$$

于是 f 的实型展开为

$$f(x)=\int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda,$$

其中

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t dt,$$

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t dt.$$

$L^1(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换

- $L^1(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上可积函数全体, 即

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \right\}.$$

- 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 其 Fourier 变换定义为

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

其 Fourier 逆变换定义为

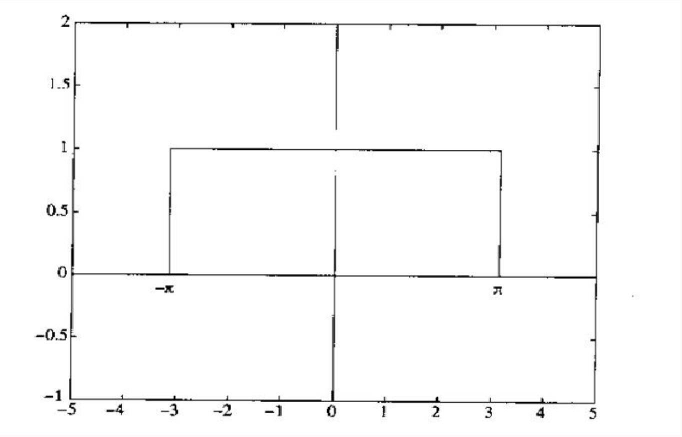
$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

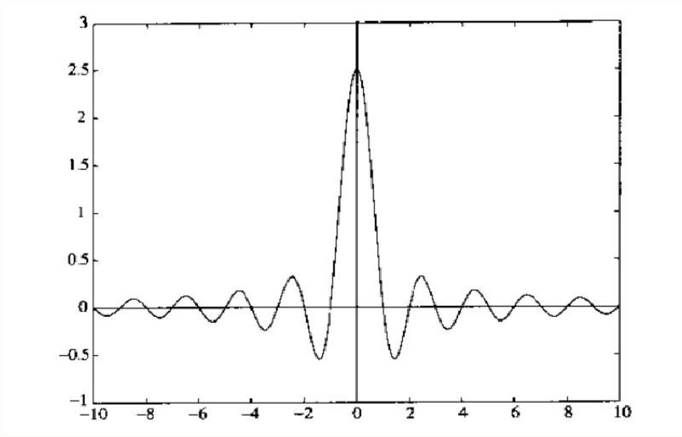
例 考虑矩形波

$$f(t)=\begin{cases}1 & if\ -\pi\le t\le \pi\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\lambda)=\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\lambda t)dt\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}.\end{aligned}$$


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−π
π


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10

Fourier 变换的性质

- 假设$f \in L^1(\mathbb{R})$, 则其 Fourier 变换满足

(1) $\lim\limits_{|\lambda|\to+\infty} \mathcal{F}[f](\lambda) = 0.$

(2) $\mathcal{F}[f]$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(3) $|\mathcal{F}[f](\lambda)| \le \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$; 进一步, $\mathcal{F}[f]$ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 到 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子.

证明

(1) **Riemann-Lebesgue 引理** 假设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty.$$

(2) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}[f](\lambda+h) - \mathcal{F}[f](\lambda)| \\
&= \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(e^{-i(\lambda+h)t} - e^{-i\lambda t})dt\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}(e^{-iht} - 1)dt\Big| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{-iht} - 1|dt \to 0, \quad h \to 0.
\end{aligned}$$

(3) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}[f](\lambda)| &= \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\Big| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1.
\end{aligned}$$

- 假设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$ 有

(1) 平移性: $\mathcal{F}[f(t-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f](\lambda)$

(2) 调制性: $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda - a)$

(3) 伸缩性: $\mathcal{F}[f(bt)](\lambda) = \dfrac{1}{|b|}\mathcal{F}[f](\dfrac{\lambda}{b}),\ \ b \neq 0$

- Fourier 变换的时、频域求导

(1) 假设对任意的 $k = 0, 1, 2, \cdots, n$, $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\mathcal{F}[f] \in C^n(\mathbb{R})$, 且对任意的 $k = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$\mathcal{F}[t^k f(t)](\lambda) = i^k \frac{d^k}{d\lambda^k}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}.$$

(2) 假设 $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, 且对任意的 $k = 1, 2, \cdots, n$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k \mathcal{F}[f](\lambda).$$

- 卷积定理

定义 设 f 和 g 是 $\mathbb{R}$ 上的两个函数, 如果积分

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

存在, 称其为 f 和 g 的卷积.

定理 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, 满足

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

并且

$$\mathcal{F}[f * g](\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda).$$

证明

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(t)e^{-i\lambda t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx\right)e^{-i\lambda t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)e^{-i\lambda(t-x)}dt\right)g(x)e^{-i\lambda x}dx.
\end{aligned}
$$

做变量替换 $u = t - x, v = x$, 可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du\right)g(v)e^{-i\lambda v}dv \\
&= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)e^{-i\lambda v}dv\right) \\
&= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda).
\end{aligned}
$$

例 高斯型函数 $f(t)=e^{-at^2}$ 的 Fourier 变换.

$$f'(t)=-2ate^{-at^2}=-2atf(t).$$

上式两端取 Fourier 变换得

$$(i\lambda)\mathcal{F}[f](\lambda)=(-2ai)\frac{d}{d\lambda}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}.$$

从而可得微分方程

$$\frac{d}{d\lambda}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}+\frac{\lambda}{2a}\mathcal{F}[f](\lambda)=0,$$

其通解为

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=Ce^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

确定常数 C

$$
\begin{aligned}
C = \mathcal{F}[f](0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}
$$

从而高斯型函数 $f(t) = e^{-at^2}$ 的 Fourier 变换为高斯型函数

$$
\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.
$$

Fourier 反演公式

定理 如果 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, 则在 f 的连续点 x 有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

注 对 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 其 Fourier 变换不一定满足 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

推论 如果 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, 并且 f 是连续的, 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}[f](x) = f(-x).$$

证明 令 $g = \mathcal{F}[f]$, 于是

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](-x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \\
&= \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}[f](x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

例 高斯型函数 $f(x) = e^{-ax^2} \in L^1(\mathbb{R})$, 并且在 $\mathbb{R}$ 上连续. 其 Fourier 变换

$$g(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$$

也在 $L^1(\mathbb{R})$ 中. 因此可得

$$\mathcal{F}[g](x) = f(-x) = e^{-ax^2}.$$

$L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换

Parseval 等式 设 $f\in L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$, 则

$$\|f\|_{L^2}=\|\hat{f}\|_{L^2}.$$

证明 令 $g(x)=\overline{f(-x)}$ 且

$$h(x)=(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{f(t-x)}dt.$$

于是由卷积定理可知, $h\in L^1(\mathbb{R})$ 满足

$$\hat{h}=\sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}=\sqrt{2\pi}|\hat{f}|^2.$$

引理 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 则 $f * g$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续有界, 即

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

结合上述引理可知, $h \in L^1(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续有界, 并且 $\hat{h}$ 非负. 因此 $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ (?), 从而反演公式成立, 即

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^2 e^{ix\lambda} d\lambda.$$

当 $x = 0$ 时, 即得 $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.

$L^2(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换

稠密扩充

因为 $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 即对任意 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 可以找到 $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ 中的函数列 $\{f_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^2}=0.$$

由于 $f_n\in L^1(\mathbb{R})$, 所以其 Fourier 变换 $\hat{f}_n$ 有定义. 于是定义 $\hat{f}$ 为 $\hat{f}_n, n\in\mathbb{Z}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的极限. 这样的定义是否有意义?

Parseval 等式

定理 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 则

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}.$$

特别地,

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

卷积定理

定理 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 则

$$f * g = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} \cdot \hat{g}],$$

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} * \hat{g}.$$

Fourier 变换与滤波器

线性时不变算子 设 X, Y 分别为输入信号空间和输出信号空间. 称算子 $L: X \to Y$ 是线性时不变的, 如果满足

$$\text{线性: } L[\alpha f + \beta g] = \alpha L f + \beta L g.$$

$$\text{时不变: } L[f(t-a)] = L[f](t-a).$$

Home Page
Title Page
Page 92 of 143
Go Back
Full Screen
Close
Quit

例 (卷积算子) 函数 l 具有有限支撑. 对任意信号 f, 定义算子

$$L[f](t)=(l*f)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} l(t-x)f(x)dx,\quad t\in\mathbb{R}.$$

则 L 是线性时不变的. 因为对任意的 $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L[f(x-a)](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} l(t-x)f(x-a)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} l(t-a-x)f(x)dx \\ &= L[f](t-a). \end{aligned}$$

定理 设 L 是分片连续函数信号空间的线性时不变算子, 则存在可积函数 h, 使得对任意的信号 f 有

$$L[f] = f * h.$$

证明

第一步: 设 λ 是任意实数. 则存在 h 满足

$$L[e^{i\lambda x}](t) = \sqrt{2\pi}\hat{h}(\lambda)e^{i\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

定义函数 $h^\lambda(t) = L[e^{i\lambda x}](t),\ t \in \mathbb{R}$. 因为 L 是时不变的, 所以对任意的 $a \in \mathbb{R}$

$$L[e^{i\lambda(x-a)}](t) = h^\lambda(t-a).$$

又因为 L 是线性的, 我们有

$$\begin{aligned} L[e^{i\lambda(x-a)}](t) &= e^{-i\lambda a} L[e^{i\lambda x}](t) \\ &= e^{-i\lambda a} h^\lambda(t). \end{aligned}$$

从而对任意的 $a \in \mathbb{R}$

$$h^\lambda(t-a) = e^{-i\lambda a} h^\lambda(t).$$

特别地, 当 $t = a$ 时, 有

$$h^{\lambda}(0) = e^{-i\lambda a} h^{\lambda}(a).$$

从而对任意的 $t \in \mathbb{R}$

$$h^{\lambda}(t) = e^{i\lambda t} h^{\lambda}(0).$$

于是

$$L[e^{i\lambda x}](t) = h^{\lambda}(t) = h^{\lambda}(0) e^{i\lambda t}.$$

令 $\hat{h}(\lambda) = h^{\lambda}(0)/\sqrt{2\pi}$ 即可得证.

第二步: 函数 $\hat{h}(\lambda)$ 确定了算子 L.

将算子 L 作用于 Fourier 变换反演公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

两边得

$$\begin{aligned} L[f](t) &= L\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda\Big](t) \\ &\approx L\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j \hat{f}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x} \Delta\lambda\Big](t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j \hat{f}(\lambda_j) L[e^{i\lambda_j x}](t) \Delta\lambda. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) L[e^{i\lambda x}](t) d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \left(\sqrt{2\pi}\hat{h}(\lambda) e^{i\lambda t}\right) d\lambda \\ &= (f * h)(t). \end{aligned}$$

$h, \hat{h}$ 的物理意义

假设 h 连续,δ 是小的正数. 考虑脉冲信号

$$f_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & if \; -\delta \le t \le \delta \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

将算子 L 作用于f_δ, 可得

$$\begin{aligned} L[f_\delta](t) = (f_\delta * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\delta(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &\approx h(t)\int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(\tau)d\tau = h(t). \end{aligned}$$

- $h(t)$ 是脉冲信号通过 L 后的近似响应, 称 h 是 L 的脉冲响应函数.
- 对于单频率信号 $e^{i\lambda t}$, $\hat{h}(\lambda)$ 构成了其响应幅度. 称 $\hat{h}$ 为 L 的系统函数.

因果滤波器

定义 输入信号到达后才产生输出信号的滤波器称为因果滤波器, 即

$$f(t) = 0,\ t < t_0 \ \Rightarrow \ L[f](t) = 0,\ t < t_0.$$

定理 设 L 是具有脉冲响应函数 h 的滤波器. L 是因果的当且仅当对于任意 $t < 0$, 有 $h(t) = 0$.

采样定理

频率带限信号 如果存在常数 $\Omega > 0$, 使得

$$\hat{f}(\lambda) = 0, \ |\lambda| > \Omega$$

成立, 则称 f 为频率带限信号. 或记为

$$supp \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega].$$

当 Ω 为满足上式的最小频率时, 称 $\nu := \frac{\Omega}{2\pi}$ 为 Nyquist 频率, 称 $2\nu := \frac{\Omega}{\pi}$ 为 Nyquist 采样率.

定理 (Shannon-Whittaker 采样定理)

假设 $\hat{f}(\lambda)$ 是分段光滑且频率带限的, 即存在常数 $\Omega > 0$, 使得 $supp\hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$. 则 f 可由其在 $t_j = j\pi/\Omega, j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 上的采样值完全确定, 并可通过下列级数展开得到

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/\Omega) \frac{\sin(\Omega t - j\pi)}{\Omega t - j\pi}.$$

证明 在区间 $[-\Omega,\Omega]$ 上将 函数 $\hat{f}(\lambda)$ 进行 Fourier 级数展开

$$\hat{f}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\pi k\lambda/\Omega},$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\lambda)e^{-i\pi k\lambda/\Omega}d\lambda.$$

由于 $\hat{f}(\lambda)=0,\ |\lambda|>\Omega$, 所以 Fourier 系数可表示为

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{-i\pi k\lambda/\Omega}d\lambda \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(-k\pi/\Omega). \end{aligned}$$

于是有

$$\hat{f}(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(j\pi/\Omega)e^{-i\pi j\lambda/\Omega}.$$

由于 $\hat{f}$ 是分段光滑的,因此上述级数一致收敛, 而利用 Fourier 变换的反演公式又得到

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f(j\pi/\Omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\pi j\lambda/\Omega + i\lambda t} d\lambda.
\end{aligned}
$$

从而由积分

$$
\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\pi j\lambda/\Omega + i\lambda t} d\lambda = 2 \frac{\Omega \sin(t\Omega - j\pi)}{t\Omega - j\pi},
$$

可得重构公式

$$
f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/\Omega) \frac{\sin(\Omega t - j\pi)}{\Omega t - j\pi}.
$$

测不准原理

设 $f \in L^2(\mathbb{R})$. 对 $a, \alpha \in \mathbb{R}$ 引入

$$\Delta_a f = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}.$$

$$\Delta_a \hat{f} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda-\alpha)^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}.$$

定理 (测不准原理)

假设 $f \in L^2(\mathbb{R})$. 则对任意的 $a, \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$\Delta_a f \cdot \Delta_\alpha \hat{f} \geq \frac{1}{4}.$$

证明 首先下面的等式成立

$$\begin{aligned}
&\left\{(\frac{d}{dt} - i\alpha)(t-a)\right\} f - \left\{(t-a)(\frac{d}{dt} - i\alpha)\right\} f \\
&= f + (t-a)f' - i\alpha(t-a)f - (t-a)(f' - i\alpha f) \\
&= f.
\end{aligned}$$

上式两端取内积得

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \langle\{(\tfrac{d}{dt} - i\alpha)(t-a)\}f(t), f(t)\rangle \\ &\quad -\langle\{(t-a)(\tfrac{d}{dt} - i\alpha)\}f(t), f(t)\rangle \\ &= \langle(t-a)f(t), (-\tfrac{d}{dt} + i\alpha)f(t)\rangle \\ &\quad -\langle(\tfrac{d}{dt} - i\alpha)f(t), (t-a)f(t)\rangle \\ &= -2\,\mathrm{Re}\,\langle(t-a)f(t), (\tfrac{d}{dt} - i\alpha)f(t)\rangle.\end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式, 可得

$$\|f\|_{L^2}^2 \le 2\|(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t)\|_{L^2}\|(t-a)f(t)\|_{L^2}.$$

利用 Parseval 等式及 Fourier 变换

$$\mathcal{F}[(\frac{d}{dt} - i\alpha)f](\lambda) = i(\lambda - \alpha)\hat{f}(\lambda)$$

可知

$$\|(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t)\|_{L^2} = \|(\lambda - \alpha)\hat{f}(\lambda)\|_{L^2}.$$

于是, 我们有

$$\|(\lambda - \alpha)\hat{f}(\lambda)\|_{L^2}\|(t - a)f(t)\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2.$$

此即表明

$$\Delta_a \hat{f} \Delta_a f \geq \frac{1}{4}.$$

3 离散 Fourier 分析

近似计算 Fourier 系数

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

利用梯形积分公式

$$\begin{aligned}\alpha_k &\approx \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)e^{-\frac{2\pi ijk}{n}}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)e^{-\frac{2\pi ijk}{n}}.\end{aligned}$$

即

$$\alpha_k \approx \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j\overline{w}^{jk},$$

其中

$$y_j = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right),\ w = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

三角多项式插值

假设 f 以 2π 为周期, 并且已知 f 在等距结点 $x_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$ 上的值, $y_j = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $0 \le j \le n-1$. 求三角多项式

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}$$

满足插值条件

$$p(x_j) = y_j, \quad 0 \le j \le n-1.$$

问题转化为求线性方程组

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{2\pi ijk}{n}} = y_j,\ 0 \le j \le n-1.$$

对任意的 $0 \le p \le n-1$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi ijp}{n}} &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{2\pi ij(k-p)}{n}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ij(k-p)}{n}}.\end{aligned}$$

由

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ij(k-p)}{n}} = \begin{cases} n, & k = p, \\ 0, & k \neq p \end{cases}$$

可得

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi ijp}{n}} = nc_p,$$

此即表明

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi ijk}{n}}.$$

数值计算 Fourier 变换

假设 f 在 $[a,b]$ 外为0, 在 $[a,b)$ 上连续, 并且 $f(b)=f(a)$. 已知 f 在 $a+j\frac{b-a}{n}$, $0\le j\le n-1$, 处的采样值. 数值计算 Fourier 变换

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

由变量替换 $\theta=2\pi\frac{t-a}{b-a}$, 可得

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{b-a}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+\frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right)e^{-i\lambda\left(a+\frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right)}d\theta \\ &= \frac{b-a}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{-i\lambda a}\int_0^{2\pi} f\left(a+\frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right)e^{-i\lambda\frac{(b-a)\theta}{2\pi}}d\theta.\end{aligned}$$

令 $g(\theta) = f\left(a + \frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right)$, 且 $\lambda_k = \frac{2\pi}{b-a}k$. 于是可得

$$\hat{f}(\lambda_k) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_k a}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)e^{-ik\theta}d\theta\right).$$

对任意的 $0 \le j \le n-1$, 令

$$y_j = g\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

从而, 近似求得

$$\hat{f}(\lambda_k) \approx \frac{b-a}{n\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_k a}\sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi ijk}{n}}.$$

离散 Fourier 变换 (DFT)

定义 令 $\mathcal{S}_n$ 表示以 n 为周期的复序列全体, 即, 任意 $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \mathcal{S}_n$ 满足

$$y_{j+n} = y_j, \ j \in \mathbb{Z}.$$

定义 假设 $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in S_n$. 定义 y 的离散 Fourier 变换为序列 $\mathcal{F}_n\{y\} := \{\hat{y}_k\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, 其中

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{w}^{jk}, \ w = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

DFT 的性质

(1) $\mathcal{F}_n$ 是从 $\mathcal{S}_n$ 到 $\mathcal{S}_n$ 的线性算子.

(2) 假设 $y=\{y_k\}\in\mathcal{S}_n$, 其 DFT 为 $\mathcal{F}_n\{y\}=\hat{y}$. 则 $y=\mathcal{F}_n^{-1}\{\hat{y}\}$ 由下式给出

$$y_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\hat{y}_k w^{jk}.$$

证明

DFT 的矩阵表示

$$\mathcal{F}_n\{y\} = \hat{y} = (\bar{F}_n)(y)$$

其中 $y = (y_0, \cdots, y_{n-1})^T$, $\hat{y} = (\hat{y}_0, \cdots, \hat{y}_{n-1})^T$,

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

只需证明

$$\frac{1}{n}F_n\overline{F_n} = I_n,$$

即矩阵 $\dfrac{F_n}{\sqrt{n}}$ 是酉矩阵. 进而需要证明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{lk}\overline{w}^{kj} = \begin{cases} 1 & if\ j = l \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

当 $j \neq l,\ 0 \leq j, k \leq n-1$ 时, 有 $w^{l-j} \neq 1$. 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{lk}\overline{w}^{kj} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{k(l-j)} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1-w^{(l-j)n}}{1-w^{l-j}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $j = l$ 时, 由 $w^{l-j} = 1$ 可得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{lk}\overline{w}^{kj} = \frac{1}{n}\cdot n = 1.$$

(3) 假设 $y=\{y_k\}\in\mathcal{S}_n$ 且 $z=\{z_k\}$ 满足 $z_k=y_{-k}$, 则

$$(\mathcal{F}_n\{z\})_j=(\mathcal{F}_n\{y\})_{-j}.$$

(4) 假设 $y=\{y_k\}\in\mathcal{S}_n$ 且 $z=\{z_k\}$ 满足 $z_k=\overline{y_k}$, 则

$$(\mathcal{F}_n\{z\})_j=\overline{(\mathcal{F}_n\{y\})_{-j}}.$$

推论

- $y\in\mathcal{S}_n$ 是偶序列 (奇序列) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_n\{y\}$ 是偶序列 (奇序列).
- $y\in\mathcal{S}_n$ 是实序列 $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{F}_n\{y\})_j=\overline{(\mathcal{F}_n\{y\})_{-j}}$.
- $y\in\mathcal{S}_n$ 是实的偶序列 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_n\{y\}$ 是实的偶序列.
- $y\in\mathcal{S}_n$ 是实的奇序列 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_n\{y\}$ 是纯虚的奇序列.

(5) 假设 $y=\{y_k\}\in\mathcal{S}_n$, $p\in\mathbb{Z}$, 且 $z=\{z_k\}$ 满足 $z_k=y_{k+p}$, 则

$$(\mathcal{F}_n\{z\})_j=w^{pj}(\mathcal{F}_n\{y\})_j.$$

(6) 假设 $y=\{y_k\}\in\mathcal{S}_n$, $p\in\mathbb{Z}$, 且 $z=\{z_k\}$ 满足 $z_k=w^{-pk}y_k$, 则

$$(\mathcal{F}_n\{z\})_j=(\mathcal{F}_n\{y\})_{j+p}.$$

(7) 卷积定理

周期离散卷积 假设 $y, z \in \mathcal{S}_n$, 则 y 和 z 的卷积 $y * z \in \mathcal{S}_n$ 定义为

$$(y * z)_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j z_{k-j} = \sum_{j=0}^{n-1} y_{k-j} z_j.$$

卷积定理 假设 $y, z \in \mathcal{S}_n$, 则

$$\mathcal{F}_n\{y * z\} = \mathcal{F}_n\{y\}\mathcal{F}_n\{z\},$$

$$\mathcal{F}_n\{yz\} = \frac{1}{n}\mathcal{F}_n\{y\} * \mathcal{F}_n\{z\}.$$

(8) 假设 $y \in \mathcal{S}_n$, 则 $n \sum_{k=0}^{n-1} |y_k|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |(\mathcal{F}_n\{y\})_j|^2.$

快速 Fourier 变换-FFT (J.W.Cooley, J.W.Tukey, 1965)

假设 $n = 2N$. 考虑计算序列 $y = \{y_k\} \in \mathcal{S}_n$ 的离散 Fourier 变换

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{2N-1} y_j \overline{w}^{jk}, \quad k = 0, 1, \cdots, 2N-1.$$

将和式按奇偶指标分组

$$\begin{aligned}\hat{y}_k &= \sum_{j=0}^{N-1} y_{2j} \overline{w}^{2jk} + \sum_{j=0}^{N-1} y_{2j+1} \overline{w}^{(2j+1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} y_{2j} \overline{w}^{2jk} + \overline{w}^{k} \sum_{j=0}^{N-1} y_{2j+1} \overline{w}^{2jk}.\end{aligned}$$

于是可得

$$\hat{y}_k = (\mathcal{F}_N\{(y_0, y_2, \cdots, y_{2N-2})\})_k + \overline{w}^k (\mathcal{F}_N\{(y_1, y_3, \cdots, y_{2N-1})\})_k.$$

由下列关系

$$(\mathcal{F}_N\{(y_0,\cdots,y_{2N-2})\})_{k+N} = (\mathcal{F}_N\{(y_0,\cdots,y_{2N-2})\})_k,$$

$$(\mathcal{F}_N\{(y_1,\cdots,y_{2N-1})\})_{k+N} = (\mathcal{F}_N\{(y_1,\cdots,y_{2N-1})\})_k,$$

$$\overline{w}^{k+N} = \overline{w}^k e^{-\frac{2\pi i}{2N}\cdot N} = -\overline{w}^k,$$

可得, 对任意的 $0 \le k \le N-1$,

$$\hat{y}_k = (\mathcal{F}_N\{(y_0,\cdots,y_{2N-2})\})_k + \overline{w}^k(\mathcal{F}_N\{(y_1,\cdots,y_{2N-1})\})_k,$$

$$\hat{y}_{k+N} = (\mathcal{F}_N\{(y_0,\cdots,y_{2N-2})\})_k - \overline{w}^k(\mathcal{F}_N\{(y_1,\cdots,y_{2N-1})\})_k.$$

由上述公式计算离散 Fourier 变换 $\hat{y}_k$, $\hat{y}_{k+N}$ 需要的乘法次数是 $2(N-1)^2+N-1$, 因此计算量几乎减半. 如果 $n=2^L$, 该过程可继续至 2 阶离散 Fourier 变换.

计算复杂度

令 K_L 表示利用上述算法计算离散 Fourier 变换 $\mathcal{F}_n\{y\}$, $n = 2^L$, 所需的乘法次数. 为了计算 $\mathcal{F}_n\{y\}$, 需要计算

$$\mathcal{F}_N\{(y_0, y_2, \cdots, y_{2N-2})\} \text{ 和 } \mathcal{F}_N\{(y_1, y_3, \cdots, y_{2N-1})\},$$

其中 $N = 2^{L-1}$. 于是有

$$K_L = 2K_{L-1} + 2^{L-1} - 1,\ K_1 = 0.$$

递推可得

$$\begin{aligned} K_L &= (L-2)2^{L-1} + 1 \\ &= \frac{1}{2}n(\log_2^n - 2) + 1 \\ &= \frac{1}{2}n\log_2^n - n + 1. \end{aligned}$$

FFT 的应用

• 计算周期卷积

假设 $y, z \in \mathcal{S}_n$. 直接计算 y 和 z 的卷积

$$(y * z)_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j z_{k-j} = \sum_{j=0}^{n-1} y_{k-j} z_j.$$

需要 n^2 次乘法. 由 FFT 及卷积定理

$$(\mathcal{F}_n\{y * z\})_k = (\mathcal{F}_n\{y\})_k (\mathcal{F}_n\{z\})_k, \ \ 0 \le k \le n-1,$$

可得如下算法: $n = 2^L$,

- 利用 FFT 计算 $\mathcal{F}_n\{y\}$ 及 $\mathcal{F}_n\{z\}$.
- 计算 $\mathcal{F}_n\{y\}\mathcal{F}_n\{z\}$.
- 利用快速 Fourier 逆变换计算 $\mathcal{F}_n^{-1}\{\mathcal{F}_n\{y * z\}\}$.

计算复杂度为

$$(n \log_2^n - 2n + 2) + n + (\frac{1}{2} n \log_2^n - n + 1) = \frac{3n}{2} \log_2^n - 2n + 3.$$

- **计算非周期卷积**

假设 y, z 为非周期有限信号, 即

$$y_k = 0 \ \text{ if } k < 0 \text{ or } k \geq M,$$

$$z_k = 0 \ \text{ if } k < 0 \text{ or } k \geq Q,$$

其中 $Q \leq M$. 考虑计算非周期卷积

$$(y * z)_k = \sum_{q=0}^{Q-1} y_{k-q} z_q, \ k = 0, 1, \cdots, M + Q - 2.$$

其计算复杂度为 MQ. 令 n 是满足 $n \geq M + Q - 1$ 的最小的 2 的整数次幂, 并将 y 和 z 看成是 n 周期序列. 于是非周期卷积的计算转化为利用 FFT 计算周期卷积. 计算复杂度为 $\frac{3n}{2}\log_2^n - 2n + 3$.

注 如果两个信号的长度不相称, 则上述 FFT 方法失效.

例 考虑计算

$$(y * z)_k = \sum_{q=0}^{4} y_{k-q} z_q$$

其中 $Q = 5$, $M = 1000$. 直接计算非周期卷积需要 5000 次乘法, 而利用 FFT 方法计算 $(n = 1024)$ 需要乘法次数约为 10^4.

• 多项式插值

Chebyshev 多项式

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta,\ \ \theta \in [0, \pi].$$

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$\cdots.$$

令 $\mathcal{P}_n$ 表示次数小于等于 n 的实系数多项式全体. 则 $\mathcal{P}_n$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 并且 $\{T_j\}_{j=0}^n$ 构成该空间的基底. 特别地, 对任意的 $P \in \mathcal{P}_n$, 可唯一的表示为

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x).$$

令 $x_k = \cos(k\frac{\pi}{n}),\ k = 0, \cdots, n$, 为插值节点, 则对 $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} y_k = P(x_k) \ &= \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x_k) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jk\frac{\pi}{n}). \end{aligned}$$

将上式改写

$$
\begin{aligned}
y_k &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} a_j w^{jk} + \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{0} a_{-j} w^{jk} \\
&= \sum_{j=-n}^{n} c_j w^{jk},
\end{aligned}
$$

其中 $w = e^{i\pi/n}$,

$$
c_j = \begin{cases} \frac{1}{2}a_j, & 0 < j \le n, \\ a_0, & j = 0, \\ \frac{1}{2}a_{-j}, & -n \le j < 0. \end{cases}
$$

将 $y = (y_k)$ 延拓成 $2n$ 周期的偶序列, 则有

$$
y_k = \sum_{j=-n}^{n} c_j w^{jk},\ 0 \le j \le 2n-1.
$$

对任意的 $0 \le p \le n$,

$$r_p = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \bar{w}^{pk} = \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{j=-n}^{n} c_j w^{(j-p)k}$$
$$= \sum_{j=-n}^{n} c_j \left(\sum_{k=0}^{2n-1} w^{(j-p)k} \right).$$

经计算可得

$$r_p = 2nc_p,\ p = 0, \cdots, n-1,$$

$$r_n = 2n(c_n + c_{-n}) = 4nc_n.$$

因此

$$a_j = \frac{1}{n\epsilon_j} \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \bar{w}^{jk},\ j = 0, 1, \cdots, n$$

其中

$$\epsilon_0 = \epsilon_n = 2; \epsilon_1 = \cdots = \epsilon_{n-1} = 1.$$

算法

- 计算 $y_{2n-k} = y_k,\ k = 1, \cdots, n-1.$
- 利用 FFT 计算

$$(y_0, \cdots, y_{2n-1}) \mapsto (Y_0, \cdots, Y_{2n-1}).$$

- 计算 $a_n = \frac{1}{n} Y_n,\ n = 1, 2, \cdots, n-1;\ a_0 = \frac{1}{2n} Y_0;\ a_n = \frac{1}{2n} Y_n.$

离散滤波器

定义 假设 X 和 Y 均为离散信号空间. 称算子 $F: X \to Y$ 是线性时不变的, 如果满足

$$\text{线性: } F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y).$$

$$\text{时不变: } F(T_p(x)) = T_p(F(x)),$$

其中

$$(T_p(x))_k = x_{k-p}.$$

定理 如果 F 是离散信号空间上的线性时不变算子, 则存在序列 f, 使得

$$F(x) = f * x.$$

反之, 如果存在序列 f , 使得 $F(x) = f * x$, 则 F 线性时不变算子.

证明 令 e^n 表示单位脉冲序列, 即

$$e_k^n = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n. \end{cases}$$

对任意序列

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^n,$$

其响应为

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(x_n e^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n F(e^n).$$

令 $f^n = F(e^n)$. 由于 F 是时不变的, 因此对任意的 $p \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned} T_p(f^n) &= T_p(F(e^n)) \\ &= F(T_p(e^n)) \\ &= F(e^{n+p}) \\ &= f^{n+p}. \end{aligned}$$

另一方面, 由 T_p 的定义可得

$$(T_p(f^n))_k = f^n_{k-p}.$$

于是有

$$f^{n+p}_k = f^n_{k-p}.$$

当 $n=0$ 时, 可得对任意的 $p\in\mathbb{Z}$

$$f_k^p = f_{k-p}^0.$$

于是

$$\begin{aligned}(F(x))_k &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n (F(e^n))_k \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n f_k^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n f_{k-n}^0.\end{aligned}$$

上式表明

$$F(x) = f * x,$$

其中 $f := f^0$.

如果 $F(x) = f * x$, 则显然 F 是线性的. 同时 F 也是时不变的, 这是因为

$$
\begin{aligned}
(F(T_p(x)))_k &= (f * T_p(x))_k \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (T_p(x))_n f_{k-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-p} f_{k-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n f_{k-p-n} \\
&= (f * x)_{k-p} \\
&= (T_p(F(x)))_k.
\end{aligned}
$$

Z 变换

定义 序列 $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in l^2$ 的 Z 变换定义为函数 $\hat{x} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$:

$$\hat{x}(\phi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ij\phi}.$$

注 令 $z = e^{i\phi}$, 则 Z 变换 $\hat{x}$ 成为

$$\hat{x}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j z^{-j}.$$

Z 变换与 Fourier 级数

- 假设 $f \in L^2[-\pi,\pi]$, 其 Fourier 级数展开为

$$f(\phi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{in\phi}$$

其中

$$x_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)e^{-in\phi}d\phi.$$

由 Parseval 等式可知, $x=(x_n)\in l^2$. 于是 Fourier 级数展开过程是将函数 $f\in L^2[-\pi,\pi]$ 转化为序列 $x=(x_n)\in l^2$ 的过程.

- 假设 $x = (x_n) \in l^2$, 其 Z 变换为

$$\hat{x}(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-in\phi}.$$

由于 $x = (x_n) \in l^2$, 存在 $f \in L^2[-\pi, \pi]$ 满足在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中

$$f(-\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-in\phi} = \hat{x}(\phi),$$

并且 x_n 是 f 的第 n 个 Fourier 系数. 于是, Z 变换把序列 $x \in l^2$ 转化为函数 $f(-\cdot) \in L^2[-\pi, \pi]$.

• **定理** Z 变换是 l^2 到 $L^2[-\pi,\pi]$ 的等距同构, 即对任意的 $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots), y = (\cdots, y_{-1}, y_0, y_1, \cdots) \in l^2$, 有

$$\frac{1}{2\pi}\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} = \langle x, y\rangle_{l^2}.$$

证明 令 $f(-\cdot) = \hat{x}$, $g(-\cdot) = \hat{y}$. 则由 Parseval 等式可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} &= \frac{1}{2\pi}\langle f(-\cdot), g(-\cdot)\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-\phi)\overline{g(-\phi)}d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\overline{g(\phi)}d\phi \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\overline{y_n} \\
&= \langle x, y\rangle_{l^2}.
\end{aligned}$$

卷积算子与 Z 变换

定理 假设 $f=(f_n), x=(x_n)\in l^2$. 则

$$(\widehat{f*x})(\phi)=\hat{f}(\phi)\hat{x}(\phi).$$

证明

$$\begin{aligned}(\widehat{f*x})(\phi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f*x)_n e^{-in\phi}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k x_{n-k})e^{-in\phi}.\end{aligned}$$

由分解 $e^{-in\phi}=e^{-ik\phi}e^{-i(n-k)\phi}$ 可得

$$\begin{aligned}(\widehat{f*x})(\phi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(f_k e^{-ik\phi})\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-k}e^{-i(n-k)\phi}\\ &= (\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{-ik\phi})(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_n e^{-in\phi})\\ &= \hat{f}(\phi)\hat{x}(\phi).\end{aligned}$$

卷积算子的伴随

定理 假设 F 是序列 $f=(f_n)$ 相关的卷积算子. 则 F 的伴随算子 F^* 是序列 $f_n^*=\overline{f_{-n}}$ 相关的卷积算子, 其转移函数为 $\overline{\hat{f}}$.

证明 由卷积和 l^2 定义可知

$$
\begin{aligned}
\langle F(x), y\rangle_{l^2} &= \langle f*x, y\rangle_{l^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f*x)_n \overline{y_n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{n-k}x_k\overline{y_n} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_{-(k-n)}} y_n} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \overline{(f^* * y)_k} = \langle x, f^* * y\rangle_{l^2}.
\end{aligned}
$$

此外, F^* 的转移函数为

$$\begin{aligned}
\widehat{f^*}(\phi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^* e^{-in\phi} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_{-n}} e^{-in\phi} \\
&= \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{-n} e^{in\phi}} \\
&= \overline{\sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m e^{-im\phi}} \\
&= \overline{\hat{f}}(\phi).
\end{aligned}$$