

# 第四次程序作业

PB18010496 杨乐园

2021 年 11 月 19 日

## 1 问题介绍

对如下二维偏微分方程，基于已给的非均匀三角剖分构建相应的一次有限元空间进行数值求解：

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u(0) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

计算对应的误差并绘制出误差图像，求出每次三角剖分的模最大误差，并计算对应的误差收敛阶。

## 2 实现方法

我们依据代码求解思路顺序给出求解实现程序以及方法的简述：

### 2.1 有限元变分格式

由等价的弱解形式：

$$\text{Find } u_h \in V_h, \text{ s.t. } a(u_h', v') = F(v), \text{ for any } v \in V_h.$$

其中  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ ,  $F(v) = \int_{\Omega} f v$ , 有限元空间为  $V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) | v|_K \in P^1(K), \forall K \in T^h\}$ ,  $T^h$  为对区域  $\Omega$  的三角剖分。从而由观察与计算可知，空间自由度  $\dim(V_h) = \#\{\text{区域 } \Omega \text{ 内部的剖分顶点}\}$ ，设区域内部的剖分顶点个数为  $N$ ，则对应的分片连续基函数为  $\{\phi_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ ，对于  $u_h$  在有限元空间内进行系数展开  $u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(x)$ ，并依次取有限元空间的基函数  $v = \phi_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ ，从而得到如下方程组：

$$a(u_h', \phi_i) = \sum_{j=1}^N u_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

将其写成刚度矩阵的形式：

$$K \cdot U = F$$

其中  $K = (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j=N}$ ,  $U = (u_1, \dots, u_N)^T$ ,  $F = (f_1, \dots, f_N)^T, f_i = F(\phi_i)$ 。

## 2.2 有限元空间的基函数构建

首先我们对标准单元  $\hat{T}$  构建基于顶点的插值基函数。为了下述与一般三角形单元变换之间的方便，我们记标准单元下点坐标为  $(\xi, \eta)$ ，并记三角形三个顶点依照逆时针排序为  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ ，从而对应点处的插值基函数很容易的可以求解出：

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= (0, 0) & \lambda_1 &= 1 - \xi - \eta \\ \hat{a}_2 &= (1, 0) & \lambda_2 &= \xi \\ \hat{a}_3 &= (0, 1) & \lambda_3 &= \eta\end{aligned}$$

进而我们求解一般三角形单元  $T$  下的插值基函数。记一般三角形单元下的点坐标为  $(x, y)$ ，并设三角形三个顶点按逆时针排序后坐标分别为  $b_1 = (x_1, y_1), b_2 = (x_2, y_2), b_3 = (x_3, y_3)$ ，注意到仿射变换：

$$F_T(\xi, \eta) = b_T + B_T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

将标准三角单元  $\hat{T}$  下的点  $(\xi, \eta)$  转化到一般单元  $T$  下的点  $(x, y)$ ，并满足  $F_T(a_i) = b_i, i = 1, 2, 3$ 。从而一般单元下的插值基函数为：

$$\phi_i(x, y) = \lambda_i(B_T^{-1} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - b_T \right)), \quad i = 1, 2, 3.$$

## 2.3 刚度矩阵的构建

由于事先三角剖分已对三角形单元进行了相应的编号，因此依据此顺序依次遍历所有的三角形单元以装配刚度矩阵  $K$ 。需要注意的是，只要三角形单元的顶点为区域  $\Omega$  的内点时，才会有相应的插值基函数，因此先通过顶点的 *marker* 属性判断该顶点是否位于三角形区域内，再决定是否进行计算。

设三角形三个顶点按逆时针排序为  $a_i, a_j, a_k$ ，我们以如下两种情况举例，其余情况以此类推。

(1) 若依次判断后，顶点  $a_i, a_j$  为区域  $\Omega$  内点，为计算  $a(\phi_i, \phi_j)$  我们利用仿射坐标变换  $F_T$  将  $(x, y)$  转换到标准单元下的坐标  $(\xi, \eta)$ ，其中分别将点  $a_i, a_j$  转换至  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ ，并注意到 *Jacobi* 矩阵  $J_T = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = B_T = (b_{ij})$ 。从而有如下计算公式：

$$K_{ij+} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_T \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \int_{\hat{T}} \nabla \lambda_1 J_T^{-1} \cdot J_T^{-T} \nabla \lambda_2^T \cdot |\det J_T| d\xi d\eta$$

由上述所求的标准单元下的基函数，可知  $\nabla \lambda_1 = (-1, -1), \nabla \lambda_2 = (1, 0)$ ，进而有：

$$K_{ij+} = \frac{1}{2|\det J_T|} (b_{11}b_{12} - b_{12}^2 + b_{21}b_{22} - b_{22}^2)$$

(1) 若依次判断后，只有  $a_i$  为区域  $\Omega$  内点，我们同样将其转化至标准单元下计算相应的装配矩阵的值，仍保持上述记号不变，则有：

$$K_{ii+} = \int_T \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i = \int_{\hat{T}} \nabla \lambda_1 J_T^{-1} \cdot J_T^{-T} \nabla \lambda_1^T \cdot |\det J_T| d\xi d\eta = \frac{1}{2|\det J_T|} ((b_{11} - b_{12})^2 + (b_{21} - b_{22})^2)$$

## 2.4 右侧系数向量的构建

由于只有剖分的顶点在区域  $\Omega$  内部时, 才存在有意义的插值基函数, 所以在遍历所有三角形单元进行装配刚度矩阵的同时, 生成相应的右侧向量系数。首先给出标准单元下 3 阶积分公式:

$$\int_{\hat{T}} \varphi(x) = \frac{|\hat{T}|}{60} [3 \sum_{i=1}^3 \varphi(\hat{a}_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \varphi(\hat{a}_{ij}) + 27 \varphi(\hat{a})]$$

其中  $\hat{a} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3}{3}$  为标准三角形单元的中心,  $\hat{a}_{ij} = \frac{\hat{a}_i + \hat{a}_j}{2}$  为标准三角单元边上的中点。

若在遍历以及判断后, 假设三角形单元顶点  $a_i$  为区域  $\Omega$  内点, 从而再次利用仿射变换将顶点  $a_i$  映射到标准单元下  $\hat{a}_1$ , 再结合上述三阶计算相应系数, 有如下公式:

$$f_i = \int_T f \cdot \phi = \frac{|\det J_T|}{120} [3f(a_i) + 4f(\frac{a_i + a_j}{2}) + 4f(\frac{a_i + a_k}{2}) + 9f(\frac{a_i + a_j + a_k}{3})]$$

## 2.5 线性方程组解法

本次实验考虑到精度需要以及后续实验需要, 利用共轭梯度迭代方法求解方程组, 其中迭代的初始向量选择为  $(1, 1, \dots, 1)$ , 终止计算精度为  $10^{-20}$ 。

## 2.6 数值解的构建

当我们利用迭代法求解出基函数的系数向量  $U$  之后, 我们需要进行组合基函数与  $U$  以构成连续的分片逼近函数  $u_h$ 。由一次分片基函数的定义, 当需要求解  $u_h(x, y)$  的函数值时, 我们由如下计算程序:

(1) 依次顺序遍历每个三角形单元, 判断点  $b = (x, y)$  是否在三角单元内 (包括位于边界上)。设一般三角形单元  $T$  的三个顶点按逆时针排序为  $a_i, a_j, a_k$ , 则依次计算如下作为三维向量的外积  $\mathbf{a}_i \vec{b} \wedge \mathbf{a}_j \vec{a}_k, \mathbf{a}_j \vec{b} \wedge \mathbf{a}_i \vec{a}_k, \mathbf{a}_k \vec{b} \wedge \mathbf{a}_i \vec{a}_j$  的方向, 当三者方向一致时 (外积为 0 视为任一方向), 则点  $b = (x, y)$  在三角形内部。

(2) 依次判断三角形顶点是否为区域  $\Omega$  的内点。若假设顶点  $a_i$  为内点, 则利用仿射变换将一般单元下  $a_i$  处插值函数的求值转化到标准单元下  $\hat{a}_1$  处插值函数的求值, 从而有如下计算公式:

$$u_h(x, y) = U[i](1 + (-1, -1)F_T^{-1}(x, y)) = U[i](1 + (-1, -1)B_T^{-1} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix})$$

进一步展开即有:

$$u_h(x, y) = U_i[1 + \frac{1}{\det B_T}(x - x_i)(y_j - y_k) + (y - y_i)(x_k - x_j)]$$

## 2.7 误差范数估计

对于数值解与真解, 我们通过计算其无穷范数来比较误差, 将区域  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  的  $x$  和  $y$  方向均进行 100 等分, 记  $\Delta x = \frac{1}{100}, \Delta y = \frac{1}{100}$ , 分别计算数值解与真解在划分节点  $(x_i, y_j) = (i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y), i, j = 0, 1, \dots, 100$  处差值的绝对值, 并且取最大值作为误差值, 即:

$$error = \max_{i,j} \{|u(x_i, y_j) - u_h(x_i, y_j)|\} = \max_{i,j} \{|u(x_i, y_j) - \sum_{e=1}^N u_e \phi_e(x_i, y_j)|\}$$

## 2.8 误差收敛阶的计算

设我们有一列二维区域上的三角形剖分  $T^{h_k}$ ，对应的每个剖分计算出的误差为  $Error_k$ ，并设每个三角剖分  $T^{h_k}$  包含  $E_k$  个三角单元，那么当  $T^{h_k}$  满足 quasi-uniform 条件时，其误差收敛阶计算公式为：

$$Ord_k = 2 \frac{\ln(Error_k/Error_{k+1})}{\ln(E_{k+1}/E_k)}$$

## 3 程序测试结果

我们选取真解函数  $u(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$  测试程序运行结果以及误差收敛阶判断：

### 3.1 真解图像

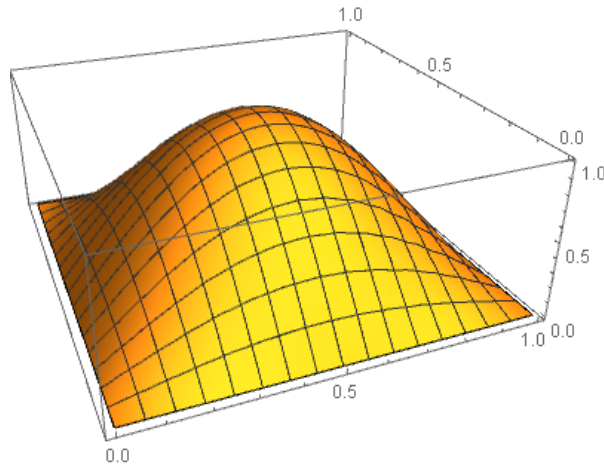


图 1: 真解函数图像

### 3.2 不同密度剖分下数值求解结果

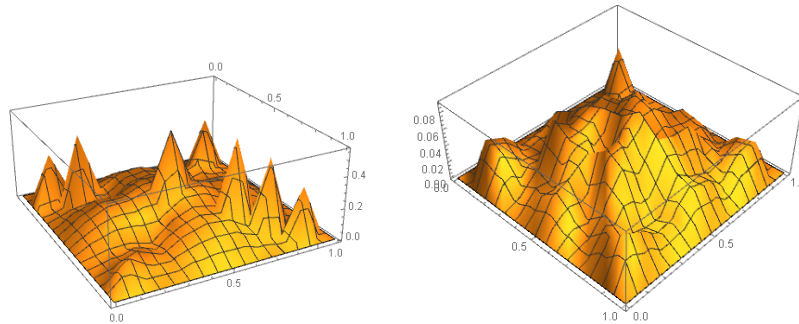
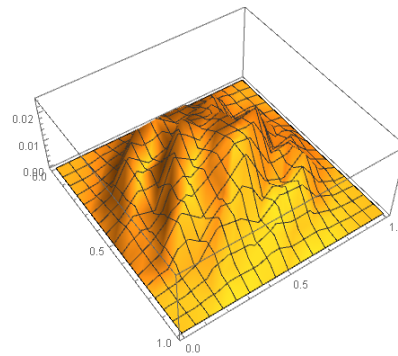
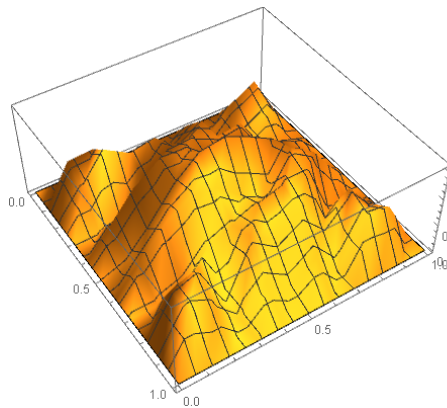
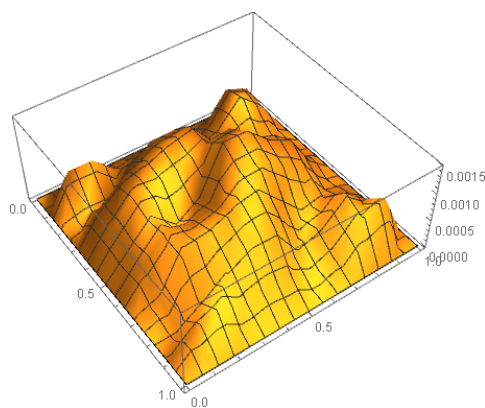
#### 3.2.1 数值求解误差与收敛阶

n	无穷范数误差	Order
1	0.561899	—
2	0.0909394	2.62733
3	0.0246155	1.88534
4	0.00634302	1.95633
5	0.00148576	2.09397

图 2: 真解函数图像

### 3.3 数值求解的误差图像

由于误差图像为三维图像，我们只选取最具突出函数走向的一个方向截取图片，若想看动态图片以及各个角度下的图像，参见 *code* 文件夹下的 *Wolfram Mathematica* 生成文件 *draft.nb*。

(a) *mesh0*(b) *mesh1*(c) *mesh2*(d) *mesh3*(e) *mesh4*

## 4 结果讨论

通过对数据以及图像的观察我们发现：

随着三角剖分密度的增大，数值求解的结果更逼近于真解的结果，即模最大误差越来越小；并从误差收敛阶可以看出，一次有限元空间无穷范数范数的收敛阶大致为 2，较好的符合理论推导。

## 5 Computer Code

代码部分请参见附件。