离散滤波器

定义 假设 X 和 Y 均为离散信号空间. 称算子 $F: X \to Y$ 是线性时不变的, 如果满足

$$\text{线性: } F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y).$$

$$\text{时不变: } F(T_p(x)) = T_p(F(x)),$$

其中

$$(T_p(x))_k = x_{k-p}.$$

定理 如果 F 是离散信号空间上的线性时不变算子, 则存在序列 f, 使得

$$F(x) = f * x.$$

反之, 如果存在序列 f , 使得 $F(x) = f * x$, 则 F 线性时不变算子.

证明 令 e^n 表示单位脉冲序列, 即

$$e_k^n = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n. \end{cases}$$

对任意序列

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^n,$$

其响应为

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(x_n e^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n F(e^n).$$

令 $f^n = F(e^n)$. 由于 F 是时不变的, 因此对任意的 $p \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned} T_p(f^n) &= T_p(F(e^n)) \\ &= F(T_p(e^n)) \\ &= F(e^{n+p}) \\ &= f^{n+p}. \end{aligned}$$

另一方面, 由 T_p 的定义可得

$$(T_p(f^n))_k = f^n_{k-p}.$$

于是有

$$f^{n+p}_k = f^n_{k-p}.$$

当 $n=0$ 时, 可得对任意的 $p \in \mathbb{Z}$

$$f_k^p = f_{k-p}^0.$$

于是

$$\begin{aligned} (F(x))_k &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n (F(e^n))_k \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n f_k^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n f_{k-n}^0. \end{aligned}$$

上式表明

$$F(x) = f * x,$$

其中 $f := f^0$.

如果 $F(x) = f * x$, 则显然 F 是线性的. 同时 F 也是时不变的, 这是因为

$$\begin{aligned}
(F(T_p(x)))_k &= (f * T_p(x))_k \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (T_p(x))_n f_{k-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-p} f_{k-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n f_{k-p-n} \\
&= (f * x)_{k-p} \\
&= (T_p(F(x)))_k.
\end{aligned}$$

Z 变换

定义 序列 $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in l^2$ 的 Z 变换定义为函数 $\hat{x} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$:

$$\hat{x}(\phi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ij\phi}.$$

注 令 $z = e^{i\phi}$, 则 Z 变换 $\hat{x}$ 成为

$$\hat{x}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j z^{-j}.$$

Z 变换与 Fourier 级数

- 假设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 其 Fourier 级数展开为

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{in\phi}$$

其中

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} d\phi.$$

由 Parseval 等式可知, $x = (x_n) \in l^2$. 于是 Fourier 级数展开过程是将函数 $f \in L^2[-\pi, \pi]$ 转化为序列 $x = (x_n) \in l^2$ 的过程.

- 假设 $x=(x_n)\in l^2$, 其 Z 变换为

$$\hat{x}(\phi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-in\phi}.$$

由于 $x=(x_n)\in l^2$, 存在 $f\in L^2[-\pi,\pi]$ 满足在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中

$$f(-\phi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-in\phi}=\hat{x}(\phi),$$

并且 x_n 是 f 的第 n 个 Fourier 系数. 于是, Z 变换把序列 $x\in l^2$ 转化为函数 $f(-\cdot)\in L^2[-\pi,\pi]$.

- **定理** Z 变换是 l^2 到 $L^2[-\pi,\pi]$ 的等距同构, 即对任意的 $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots), y = (\cdots, y_{-1}, y_0, y_1, \cdots) \in l^2$, 有

$$\frac{1}{2\pi}\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} = \langle x, y\rangle_{l^2}.$$

证明 令 $f(-\cdot) = \hat{x}$, $g(-\cdot) = \hat{y}$. 则由 Parseval 等式可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} &= \frac{1}{2\pi}\langle f(-\cdot), g(-\cdot)\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-\phi)\overline{g(-\phi)}d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\overline{g(\phi)}d\phi \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\overline{y_n} \\
&= \langle x, y\rangle_{l^2}.
\end{aligned}$$

卷积算子与 Z 变换

定理 假设 $f = (f_n), x = (x_n) \in l^2$. 则

$$\widehat{(f * x)}(\phi) = \hat{f}(\phi)\hat{x}(\phi).$$

证明

$$\begin{aligned}\widehat{(f * x)}(\phi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f * x)_n e^{-in\phi} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k x_{n-k})e^{-in\phi}.\end{aligned}$$

由分解 $e^{-in\phi} = e^{-ik\phi}e^{-i(n-k)\phi}$ 可得

$$\begin{aligned}\widehat{(f * x)}(\phi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(f_k e^{-ik\phi})\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-k}e^{-i(n-k)\phi} \\ &= (\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{-ik\phi})(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_n e^{-in\phi}) \\ &= \hat{f}(\phi)\hat{x}(\phi).\end{aligned}$$

卷积算子的伴随

定理 假设 F 是序列 $f=(f_n)$ 相关的卷积算子. 则 F 的伴随算子 F^* 是序列 $f_n^*=\overline{f_{-n}}$ 相关的卷积算子, 其转移函数为 $\overline{\hat{f}}$.

证明 由卷积和 l^2 定义可知

$$
\begin{aligned}
\langle F(x), y\rangle_{l^2} &= \langle f * x, y\rangle_{l^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f * x)_n \overline{y_n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{n-k} x_k \overline{y_n} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_{-(k-n)}} y_n} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \overline{(f^* * y)_k} = \langle x, f^* * y\rangle_{l^2}.
\end{aligned}
$$

此外, F^* 的转移函数为

$$\begin{aligned}\widehat{f^*}(\phi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^* e^{-in\phi} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_{-n}} e^{-in\phi} \\ &= \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{-n} e^{in\phi}} \\ &= \overline{\sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m e^{-im\phi}} \\ &= \overline{\hat{f}}(\phi).\end{aligned}$$