数值微分与数值积分

· 重点与知识归纳

· 教材习题

一、知识归纳

· 数值微分

· 数值积分的代数精度，格式构造，复合公式

· Gauss积分公式：scheme确定，性质，$\boxed{\text{误差}}$ ☆

· Romberg积分与理查德外推技术

1. 数值积分的思路：

①. 积分中值定理，$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ×

②. 近似被积函数 $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$ 插值 7.2（给节点）（自由的选择系数和结点）

③. 积分区域可加性，复化求积

$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^c + \int_c^d + \cdots\right) f(x)dx$

④. 进一步提高效率：自适应求积分 7.4 7.5

2. 判断求积公式好坏依据：

① 计算复杂度

② 稳定性：求积系数 A_k 非负，⇒ 稳定

③ 收敛性

④ 代数精度

3. 重要结果汇总

(1). 中矩形公式，梯形公式 代数精度是1.

(2). $I_n = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 具有至少n次代数精度

⟺ 该公式是插值型的

$(A_k = \int_a^b l_k(x)dx)$.

(3). 当n为偶数时（节点个数），Newton-Cotes 公式对

$f(x) = x^{n+1}$ 精确成立.

（因此，Simpson 代数精度=3）

4. Romberg积分与外推（公式 P142）

☆5. Gauss积分

1. 给定积分公式

$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$. A_k, x_k 待定.

针对(2n+2)个待定参数，期望该公式有

(2n+1)次代数精度；即对

$f(x) = \{1, x, \cdots, x^{2n+1}\}$ 精确成立

问题1：代数精度会超过 2n+1 吗？

答：不会，取 $f(x) = \prod_{j=0}^n (x-x_j)^2$

则 $0 < \int_a^b f(x)dx \neq \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = 0$

问题2：Gauss积分公式也是插值型的！

答：可以针对更一般的带权积分

$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)\rho(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x)\right)\rho(x)dx$

$= \sum_{k=0}^n f(x_k) \underline{\int_a^b l_k(x)\rho(x)dx}$

$= \sum_{k=0}^n \underline{A_k}\, f(x_k)$

若上述求积公式具有(2n+1)次代数精度，则称 x_k 为Gauss点，相应公式称为 Gauss 型求积公式！

扫描全能王 创建

2、重要结果：

带权求积节点（Gauss点）= 带权 $\rho(x)$ 正交多项式零点！

Gauss积分公式的计算：

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)\rho(x)dx$$

(1) 利用 $W(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)=x^{n+1}+c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n$

与次数不超过 n 的多项式带权正交，列出方程

$$\int_a^b x^m\cdot W(x)\cdot\rho(x)dx=0,\quad m=0,1,2,\cdots n.$$

得系数 c_k

(2) 根据系数算 x_j

(3) 根据 x_j 算 A_j.（方法不唯一）.

例：试确定求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx = A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

的系数及节点，使其具有最高代数精度。

3. Gauss公式的 error, stable, convergence.

· error P_{396}. ✓

· stable.（系数非负）.（由和 $\int_a^b w(x)dx$）.

P_{396} ✓

· convergence. ✓

扫描全能王 创建

数值微分与数值积分

教材习题

P380. 4. 只给出c.

由例题3.(P_{375}课本). 可以得到Largrange插值基函数的导数值.

类似例3操作 可以得到本题结果

6. 只要将 $f(x+ah)$. $(a=0,\pm1,\pm2)$在 ~~f(x)~~ x 处进行Taylor展开.

再进行一些简单的变形即可得到题目中要证明的两个式子.

7. 解:

$$f(x+ah)=f(x)+ahf'(x)+\frac{1}{2}(ah)^2f''(x)+\frac{1}{6}(ah)^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{24}(ah)^4f^{(4)}(x)+O(h^5)$$

(1). $f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)$.

$$=\left(f(x+3h)-f(x)\right)+3\left(f(x+h)-f(x+2h)\right)$$

$$=\left\{3hf'(x)+\frac{1}{2}(3h)^2f''(x)+\frac{1}{6}(3h)^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{24}(3h)^4f^{(4)}(x)+O(h^5)\right\}$$

$$+3\left\{-hf'(x)+\frac{1}{2}(-3h^2)f''(x)+\frac{1}{6}\left(h^3-(2h)^3\right)f^{(3)}(x)+\frac{1}{24}\left(h^4-(2h)^4\right)f^{(4)}(x)+O(h^5)\right\}$$

$$=h^3f^{(3)}(x)+\frac{3}{2}h^4f^{(4)}(x)+O(h^5)$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{1}{h^3}\left[f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)\right]\underbrace{-\frac{3}{2}hf^{(4)}(x)+O(h^2)}_{O(h)}$$

(2). $f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)$

$$=\cdots=2h^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{2}h^5f^{(5)}(x)+O(h^7)$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{1}{h^3}[f\cdots]+\underbrace{O(h^4)-\frac{1}{4}h^2f^{(5)}(x)}_{O(h^2)}$$

综上. R_2 V. 因为其对称, 奇偶数项消掉 (在Taylor展开计算时会减少计算量)

扫描全能王 创建

15. 记号同教材 P376.

$$L = f'(x) = \varphi(h) - \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^2 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x)h^4 - \cdots \quad ①$$

$$L = f'(\tfrac{h}{2}) = \varphi(\tfrac{h}{2}) - \frac{1}{24}f^{(3)}(x)h^2 - \frac{1}{120\times16}f^{(5)}(x)h^4 - \cdots \quad ②$$

$$② \times 4 \Rightarrow 4L = 4\varphi(\tfrac{h}{2}) - \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^2 - \cdots \quad ③$$

于是③-①，便有 $3L = 4\varphi(\frac{h}{2}) - \varphi(h) + O(h^4)$

$$\Rightarrow L = \frac{4}{3}\varphi(\tfrac{h}{2}) - \frac{1}{3}\varphi(h) + O(h^4).$$

16. 对 $f(x+h)$，$f(x+2h)$ 在 x 处进行Taylor展开.

answer：$O(h)$.

计算如果想简便一些，或许可以直接计算系数.（展开到哪一步，可以事先预估.
单看表达式，猜测应该不会很高！）
精度.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) + \frac{(2h)^3}{6}f^{(3)}(x) + O(h^4)$$

$$= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(x) + O(h^4)$$

于是 $f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$

$$\overset{\text{代入}}{=} \cdots = h^1(\quad) + h^2(\quad) + h^3(\quad) + O(h^4). \quad \cancel{h^4(\quad)+}$$

17. $f(x+ih)$ 在 $f(x)$ 处进行Taylor展开. 之后整理成 $af(x)+bf'(x)+cf''(x)+\cdots$ 的形式.

令 $a=b=0$. $c=1$ 即可（~~可行~~ 表达上 忽略 h^3 的影响）

answer：
$$\begin{cases} A \ \forall \\ B = 1-3A \\ C = 3A-2 \\ D = 1-A \end{cases}$$

扫描全能王 创建

P_{389}. T_1.

将 $[a,b]$ n 等分，步长 $h=\frac{b-a}{n}$，选取等距节点 $x_k=a+kh$ 构造出来的插值型求积公式

$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$，称为 Newton—Cotes 公式，$C_k^{(n)}$ 称为柯特斯系数.

令 $x=a+th$，则

$$C_k^{(n)}=\frac{1}{b-a}\int_a^b l_k(x)\,dx=\frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{t-j}{k-j}\,dt=\frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(t-j)\,dt$$

按此公式，很容易计算系数表达式. $\left(\frac{1}{8}f(0)+\frac{3}{8}f(\frac{1}{3})+\frac{3}{8}f(\frac{2}{3})+\frac{1}{8}f(1)\right)$

课本 P_{384} 例1.

• 注意题所求是 Simpson 公式

remark:

1. Simpson 公式 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$ $\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$.

2. Simpson 公式是二次插值得到的，对 3 次多项式精确成立.

3. 不用 Lagrange 插值，用 Newton 插值可以得到 Simpon 公式的误差估计.

即：$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx=\int_a^b\left[f(a)l_0(x)+f(\frac{a+b}{2})l_1(x)+f(b)l_2(x)\right]dx$

$$=\int_a^b\left[f(a)+f[a,x_1](x-a)+f[a,x_1,b](x-a)(x-x_1)\right]dx.$$

考虑三点 Hermite 插值. (a, $x_1=\frac{a+b}{2}$, b, x_1)
(x_1 重节点).

则积分公式的 Newton 型表达式：

$$\int_a^b\left[f(a)+f[a,x_1](x-a)+f[a,x_1,b](x-a)(x-x_1)+\underbrace{f[a,x_1,b,x_1](x-a)(x-x_1)(x-b)}_{\text{积分 }0}\right]dx$$

即所得积分公式与 Simpon 公式完全一样.
三次多项式

Hermite 插值余项 $\underline{\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)}$

划线部分不变号. 类似梯形公式可用积分中值定理.

扫描全能王 创建

$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_2(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b H_3(x)dx$

$= \int_a^b \left[\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)\right]dx$

$\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\cdot\frac{-1}{120}(b-a)^5$

5. 将1, x, x^2, x^3, x^4依次代入, 验证等号成立

9. 解: 为简化计算量, 利用积分的线性性质, 只要将 1, $\cos x$ 代入等号成立, 即可

求得 $A_1 = A_2 = \pi$.

第(2)问. 要说明对 $\cos(2k+1)x$, $\sin kx$ 精确成立. $k=0,1,2,\dots,n$. 将表达式直接代入即可

~~这里因为~~ LHS: $\int_0^{2\pi} \cos(2k+1)x\,dx = 0$; RHS: $\pi[\cos(2k+1)\cdot 0 + \underbrace{\cos[(2k+1)\pi]}_{=0}]$;

LHS $= \int_0^{2\pi} \sin kx\,dx = \begin{cases} 0 & k=0 \\ 0 & k>0 \end{cases}$

RHS $= \pi(\ldots)$

~~一种方法是将~~

13. 将1, x, x^2 直接代入确定 $A=0$, $B=\frac{4}{3}$, $C=\frac{2}{3}$

再将 x^3 代入 发现两边不相等. 最大次数是2

remark: 解线性方程组时, 还是要灵活一些!

22. 存在、依然是将1, x, x^2 代入即可

取 $f(x)=1$. 得 $1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

取 $f(x)=x$. LHS $=\frac{1}{2}$. RHS $= \frac{1}{2}(x_0+x_1) \Rightarrow x_0+x_1=1$

取 $f(x)=x^2$. LHS $=\frac{1}{3}$ RHS $= \frac{1}{2}(x_0^2+x_1^2) \Rightarrow x_0^2+x_1^2=\frac{2}{3}$

解上面两个式子. $x_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$

扫描全能王 创建

P8. 8.

解: 方法一. 将 $1, x, x^k$ 依次代入即得

(1). $A_0=A_1=\frac{1}{3}$, $x_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1=\sqrt{\frac{3}{5}}$

(2) $A_0=A_2=\frac{7}{25}$, $A_1=\frac{8}{25}$. $x_0=-\sqrt{\frac{5}{7}}$, $x_1=0$, $x_2=\sqrt{\frac{5}{7}}$

方法二

预备知识: ①. P317. 正交多项式定理. 开始两项. $1, x-a_1$

得到正交多项式序列

$P_0(x)$ $P_1(x)$ $P_2(x)$ $P_3(x)$

$1, x, x^2-\frac{3}{5}, x^3-\frac{5}{7}x$

注意.上述内积是带权 x^2 正交.

② 重要定理: 插值型公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的节点 $a\le x_0<\cdots<x_n\le b$ 是 Gauss 点

$\Leftrightarrow$ 以这些节点为零点的多项式.

$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ 与任何次数不超过 n 的多项式 $p(x)$ 带权 $\rho(x)$ 正交

($\int_a^b p(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx=0$

有了上述两个预备,再来解.

(a). 只需取 $P_2(x)$ 的零点即可

再求系数 A_k. 可以直接代入 A_k 的表达式, 也可以利用恒等式求, 推荐前者.

(b) 只需取 $P_3(x)$ 的零点即可

再求系数 A_k

11 $\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}+1$.

只需取 $f(x)=x^3$. 即可

21 (1). $A=\frac{5}{9}=C$; $B=\frac{8}{9}$ (取算法).

(2). 同(1). 代 Largrange 插值.

答案.

22. 只需利用常用区间变换公式 $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$, $t\in[-1,1]$ 即可

P404. 6. 直代 P402 公式.

(1). $R(2,2)=\frac{742}{675}$

(2) = $R(2,2)=\frac{1}{24}\pi$

扫描全能王 创建

补：推导 Labatto 积分公式，计算 A_i，并说明 $A_i>0$，$(i=1,2,\dots,n-1)$.

Sol: $\int_a^b w(x)\, p_{2n-1}(x)\,dx = A_0\, p_{2n-1}(a) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i\, p_{2n-1}(x_i) + A_n\, p_{2n-1}(b)$ $\quad(*)$

$\deg p(x) \le 2n-1$. ($2n$个自由度. because we have $n+1$ coefficients and $n-1$ nodes)

令 $T(x) = r(x-a)+s(b-x)$, where $s=\frac{p_{2n-1}(a)}{b-a}$, $r=\frac{p_{2n-1}(b)}{b-a}$. 即 $T(x)$ 插值于 $p_{2n-1}(a)$, $p_{2n-1}(b)$.

于是 $p_{2n-1}(x) - T(x) = (x-a)(b-x)\, g_{2n-3}(x)$.

$(*)$中 LHS $= \int_a^b w(x)(x-a)(b-x)\, g_{2n-3}(x)\,dx + r\int_a^b w(x)(x-a)\,dx + s\int_a^b w(x)(b-x)\,dx$

令 $w^*(x) = w(x)(x-a)(b-x)$. 以其为新的权函数构造 Gauss 积分公式（对 $2n-3$ 次多项式精确成立）

（节点 x_i^* $n-1$. 系数 A_i^* $n-1$.）

于是

$$\text{LHS} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i^*\, g_{2n-3}(x_i^*) + r\int_a^b w(x)(x-a)\,dx + s\int_a^b w(x)(b-x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} A_i^* \frac{p_{2n-1}(x_i^*) - r(x_i^*-a) - s(b-x_i^*)}{(x_i^*-a)(b-x_i^*)} + r\int_a^b w(x)(x-a)\,dx + s\int_a^b w(x)(b-x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} A_i^* \frac{1}{(x_i^*-a)(b-x_i^*)}\, p_{2n-1}(x_i^*) + r\left(\int_a^b w(x)(x-a)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i^*}{b-x_i^*}\right) + s\left(\int_a^b w(x)(b-x)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i^*}{x_i^*-a}\right)$$

$\Rightarrow$ ~~A_i^*~~ $A_i = \frac{A_i^*}{(x_i^*-a)(b-x_i^*)}$. $i=1,2,\dots,n-1$.

$$A_0 = \frac{\int_a^b w(x)(b-x)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i^*}{x_i^*-a}}{b-a}, \quad A_n = \frac{\int_a^b w(x)(x-a)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i^*}{b-x_i^*}}{b-a}$$

$\Rightarrow$ P396 引理1 知 $A_i^*>0$. $i=1,2,\dots,n-1$. $x_i^*\in(a,b)$.

扫描全能王 创建