有限元方法 2021 秋（9 月 22 日作业）

金晨浩 SA21001033

0.x.11 考虑差分方法 $\frac{-2}{h_i+h_{i+1}}(\frac{U_{i+1}-U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i-u_{i-1}}{h_i}) = f(x_i)$**。证明** $\tilde{u}_S := \sum U_i\phi_i$ **满足** $a(\tilde{u}_S, v) = Q(fv),\ \forall v \in S$**，其中** $S = \{v \in C^0(0,1) : v|_{(x_i,x_{i+1})} \in P^1,\ v(0) = 0\},\ a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx$, $Q(w) := \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{h_i+h_{i+1}}{2} w(x_i),\ h_0 = h_{n+1} = 0$。

证明. $\forall i,\ a(\tilde{u}_S, \phi_i) = \sum\limits_j U_j \int_0^1 \phi_i'\phi_j'\,dx = \frac{U_i-U_{i-1}}{h_i} - \frac{U_{i+1}-U_i}{h_{i+1}} = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})f(x_i) \Rightarrow \forall v = \sum\limits_i \lambda_i\phi_i \in S$, $v(x_i) = \lambda_i \Rightarrow a(\tilde{u}_S, v) = \sum\limits_i \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})\lambda_i f(x_i) = \sum\limits_i \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})v(x_i)f(x_i) = Q(fv)$。 □

0.x.12 令 Q **同上题定义，证明** $|Q(w) - \int_0^1 w(x)\,dx| \le Ch^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |w''(x)|\,dx$。

证明. $|Q(w) - \int_0^1 w(x)\,dx| = |\sum\limits_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x) - \frac{1}{2}(w(x_{i-1}) + w(x_i))\,dx|$

$= |\sum\limits_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x)\,d(x - x_{i-\frac{1}{2}}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2}(w(x_{i-1}) + w(x_i))\,dx| = |\sum\limits_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-\frac{1}{2}})w'(x)\,dx|$

$= |\sum\limits_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2}(x - x_i)(x_{i+1} - x)w''(x)\,dx| \le \frac{1}{8}h^2\|w''\|_{L^1}$。

界定常数 C 可以取到 $\frac{1}{8}$。 □

Remark：不要忘了估计界定常数。界定常数估计出来不超过 1 的我都批对了。

1.x.1 设 Ω **有界，**$1 \le p \le q \le \infty$**。证明：**$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$**，并给出** Ω **无界时的反例。**

证明. 仅考虑 $p < q$：设 $f \in L^q(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega |f|^p\,dx = \int_\Omega 1 \cdot |f|^p\,dx \le (\int_\Omega |f|^{p\cdot\frac{q}{p}})^{\frac{p}{q}} \cdot (\int_\Omega 1\,dx)^{\frac{q-p}{q}}$ $= \|f\|_{L^q}^p \cdot |\Omega|^{1-\frac{p}{q}} \Rightarrow \|f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^q} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} < \infty$。

反例：$\Omega = (1, +\infty),\ f(x) = \frac{1}{x} \in L^2(\Omega)$ 但 $f \notin L^1(\Omega)$。 □

1.x.3 设 Ω **有界，**$f_j \to f$ in $L^q(\Omega)$**。证明** $f_j \to f$ in $L^p(\Omega)$**，**$\forall 1 \le p \le q \le \infty$。

证明. $\|f_j - f\|_{L^p} \le \|f_j - f\|_{L^q} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \to 0$。 □

Remark：Holder 不等式在 L^p 空间的应用，可参考 Folland《Real Analysis》6.1 节。

1.x.2 **证明区域** Ω **上的连续有界函数全体（记为 E）在** $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ **下构成** Banach **空间。**

证明. 设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset E$，$\exists f \in L^\infty(\Omega)$ s.t. $f_j \to f$ in $L^\infty(\Omega) \Rightarrow f_j$ 一致收敛到 $f \Rightarrow f$ 连续有界，$f \in E \Rightarrow E$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 的闭子空间，所以 E 完备。 □

Remark：完备度量空间的闭子空间也是完备的。

1.x.8 **证明** $D^\alpha|x| = x^\alpha/|x|$**，** $x \neq 0,\ |\alpha| = 1$。

证明. 设 $x \in \mathbb{R}^n$，$D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j}$，$1 \le j \le n$。$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\int |x| \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} |x| \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx$，
$\int_{|x|>\varepsilon} |x| \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = -\int_{|x|>\varepsilon} \phi \frac{x_j}{|x|}\, dx + \varepsilon \int_{|x|=\varepsilon} \phi \cdot \upsilon^j\, dS$，其中 υ 表示 $\partial B(x,\varepsilon)$ 上的外法向量。
$|\varepsilon \int_{|x|=\varepsilon} \phi \cdot \upsilon^j\, dS| \to 0 \Rightarrow \int |x| \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = -\int \phi \frac{x_j}{|x|}\, dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}|x| = |x|^{-1} x_j$。 □

Remark：（分部积分公式）$u, v \in C^1(\bar{\Omega})$，$\int_\Omega u_{x_i} v\, dx = -\int_\Omega u v_{x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} u v \upsilon^i\, dS.$

1.x.13 **设** $f(x) = |x|^r$，$x \in \mathbb{R}^n$，$r \in \mathbb{R}$。**证明当** $r > 1-n$ **时** f **在单位球内有一阶弱导数。**

证明. 设 $x \in \mathbb{R}^n$，$D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j}$，$1 \le j \le n$。$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\int |x|^r \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} |x|^r \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx$，
$\int_{|x|>\varepsilon} |x|^r \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = -\int_{|x|>\varepsilon} r|x|^{r-2} x_j \phi\, dx + \varepsilon^r \int_{|x|=\varepsilon} \phi \cdot \upsilon^j\, dS$。要使得 $|x|^r$ 弱导数存在，
即需要 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^r \int_{|x|=\varepsilon} \phi \cdot \upsilon^j\, dS = 0$，而 $|\int_{|x|=\varepsilon} \phi \cdot \upsilon^j| \sim O(\varepsilon^{n-1}) \Rightarrow r+n-1 > 0$，$r > 1-n$。

所以 $r > 1-n$ 时，$f(x) = |x|^r$ 在单位球内有一阶弱导数 $D^\alpha|x|^r = r|x|^{r-2} x^\alpha$。 □