

针对 Fourier 级数间断点处 Gibbs 现象的探索

数学科学学院

PB18010496 杨乐园

序言

在数学分析 A3 的教学过程中以及学习调和分析与小波分析学习过程中，我们认识到了 Fourier 级数的重要性与应用广泛性，但同时也知道 Fourier 级数也需要考察收敛性，鉴于本人在李思敏老师教学的过程中傅里叶级数收敛性以及所提出的 Gibbs 现象的好奇与未知，决定利用 Mathematica 探索 Fourier 收敛性条件并研究该现象。

首先，什么是 Fourier 级数？Fourier 级数又称三角函数，是研究周期函数与周期现象的重要数学工具。经查阅数学史与相关资料发现，18 世纪，Euler 等著名数学家在研究弦振动问题时，考虑将函数表示为三角级数的形式，并激起了“任意一个函数是否可以被表示为三角级数”的争论。这个争论实际上就是要解决一个周期函数 $f(x)$ ，是否可以表示为三角函数的和。直到 1808 年，Fourier 详细阐明了这个问题，并用其解决了一些热传导相关问题。

而 Gibbs 现象的定义将会在实验内容中阐述。

基于本人求知欲，本实验从简单的迭代出发，直观认识混沌现象并观察其蕴含的规律。

实验内容

First Part: 分段函数与三角级数部分和函数的图形比较。

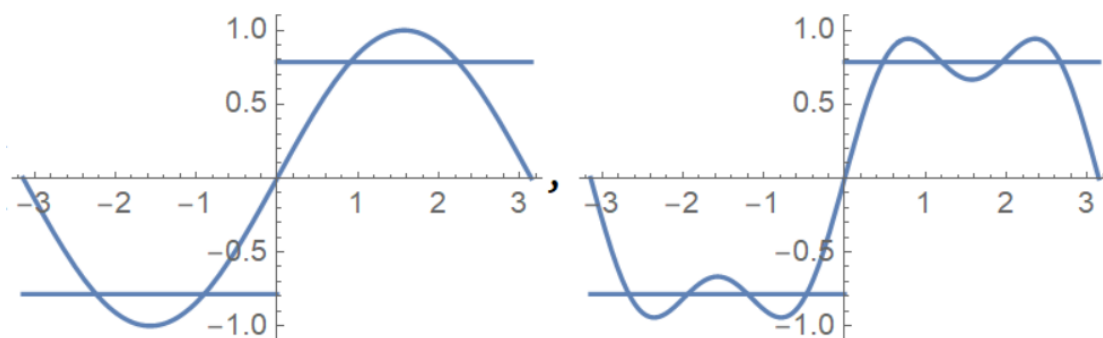
利用 Mathematica 绘制如下两个函数, 给出当 $n=0, 1, 10, 50$ 图形比较

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

程序代码如下:

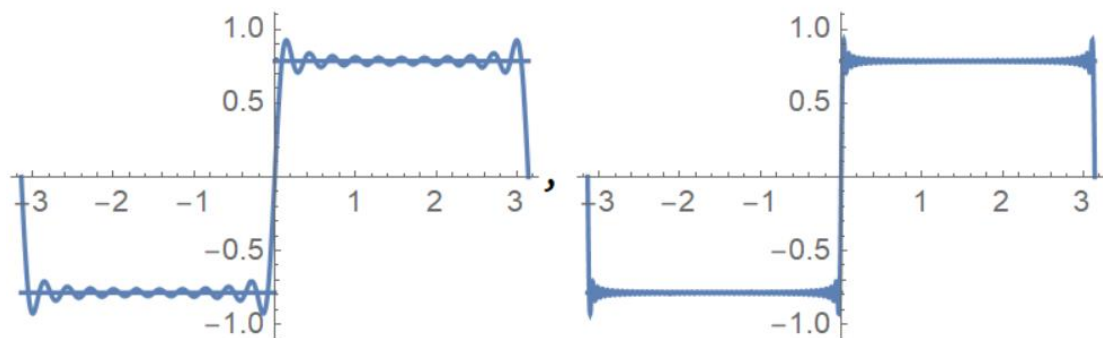
```
Clear[f, g, x, n];  
f[x_] := Which[-Pi < x <= 0, -Pi/4, 0 < x <= Pi, Pi/4];  
g[x_, n_] := Sum[Sin[(2k+1) x]/(2k+1), {k, 0, n}];  
Table[Show[Plot[f[x], {x, -Pi, Pi}], Plot[Evaluate[g[x, n]], {x, -Pi, Pi}], PlotRange -> {{-Pi, Pi}, {-1, 1}}, {n, {0, 1, 10, 50}}]
```

运行结果如下:



n=0 时图形

n=1 时图形



n=10 时图形

n=50 时图形

从图中可以看到: 随着三角函数叠加项的增加, 两个函数的图形越来越接近。可以基于此给出猜想: 可以用无穷多个三角函数叠加来分段表示该分段函数。

而关于 Fourier 级数的收敛性, 有各种不同条件下的收敛定理。而李思敏老师在数学分析 A3 中着重强调到 Dirichlet 收敛定理: 周期为 $2L$ 的周期函数 $f(x)$, 如果在一个周期区间内除有限个第一类间断点外连续, 只有有限个极值点, 则该函数的 Fourier 级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

因此，在 Dirichlet 收敛定理的条件下，Fourier 级数的和函数 $S(x)$ 在函数 $f(x)$ 的连续点处等于函数 $f(x)$ ，在间断点处等于 $f(x)$ 的左右极限的平均值。

而对上述分段函数进行周期为 2π 的延拓，则得到满足 Dirichlet 收敛定理条件的函数，从而其 Fourier 级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1}$ ，并且从程序的演示结果中也可以看到其收敛性。

Second Part: 探讨一般函数的 Fourier 级数展开。

将函数 $f(x) = x^2, (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期分别为 2 和 4 的 Fourier 级数，并将其对应的 Fourier 级数取前 5 项部分和以及前 60 项部分和函数图形与函数 $f(x)$ 图形进行比较。

需注意到，对于周期为 2 的周期函数展开，根据周期函数积分的运算性质，其系数的求解可以直接在 $[0, 2]$ 周期内计算；而对于周期为 4 的周期函数展开，则需要对函数进行延拓才可以。

周期为 2 的函数展开的程序代码如下：

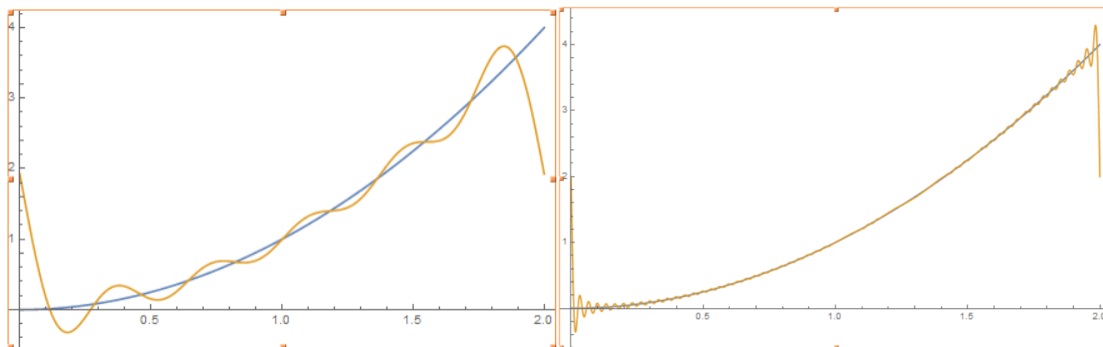
```
Clear[f, Sn, x, a, b, k, n];
f[x_] := x^2;
L=1;
a[k_] := 1/L Integrate[f[x] Cos[(k Pi)/L x], {x, 0, 2}];
b[k_] := 1/L Integrate[f[x] Sin[(k Pi)/L x], {x, 0, 2}];
Sn[x_, n_] := a[0]/2 + Sum[a[k] Cos[(k Pi)/L x] + b[k] Sin[(k Pi)/L
x], {k, 1, n}];
a[k]
b[k]
Sn[x, 5]
Plot[{f[x], %}, {x, 0, 2}]
```

运行结果如下：

$$\frac{4 k \pi \cos [2 k \pi] + (-2 + 4 k^2 \pi^2) \sin [2 k \pi]}{k^3 \pi^3}$$

$$\frac{-2 + (2 - 4 k^2 \pi^2) \cos [2 k \pi] + 4 k \pi \sin [2 k \pi]}{k^3 \pi^3}$$

运行对比截图如下：



n=5 时图形

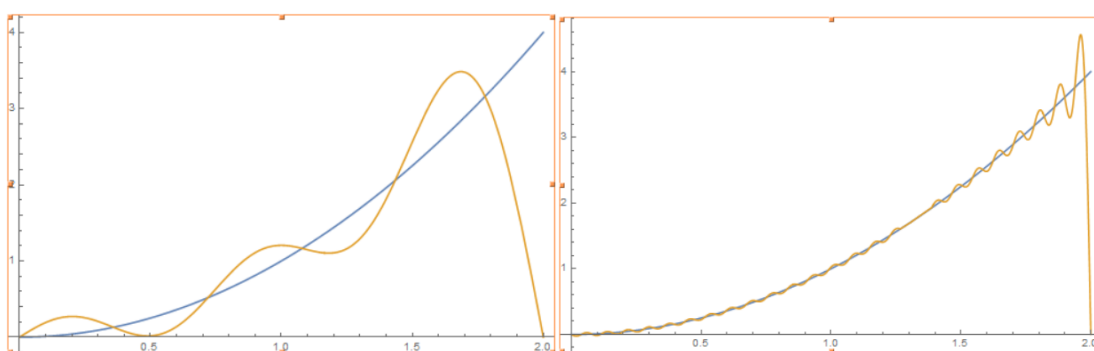
n=60 时图形

将函数延拓为周期为 4 的奇函数，对应的 Fourier 级数取 $n=5$ 与 $n=50$ 的部分和函数的图形绘制程序代码如下：

```
Clear[f, Sn, x, a, b, k, n];
f[x_] := Which[-2 < x < 0, -x^2, 0 <= x <= 2, x^2];
L=2;
a[k_] := 1/L Integrate[f[x] Cos[(k Pi)/L x], {x, -2, 2}];
b[k_] := 1/L Integrate[f[x] Sin[(k Pi)/L x], {x, -2, 2}];
Sn[x_, n_] := a[0]/2 + Sum[a[k] Cos[(k Pi)/L x] + b[k] Sin[(k Pi)/L
x], {k, 1, n}];
a[k]
b[k]
Sn[x, 5]
Plot[{f[x], %}, {x, 0, 2}]
程序运行结果如下：
```

0

$$-\frac{8(2 - 2\cos[k\pi] + k^2\pi^2\cos[k\pi] - 2k\pi\sin[k\pi])}{k^3\pi^3}$$



n=5 时图形

n=50 时图形

从两种展开式中可以看到，在开区间内，Fourier 级数的部分和函数当项数增加时是不断逼近函数的。但是同时也可以看到，在函数的间断点附近图形出现了一个现象：部分和函数好像会出现不逼近于分段函数在该点的函数值现象，并且随着部分和项数的增大，这种不接近的差值宽度会越来越小，而幅度则越来越逼近于某个范围。这种现象即是 Gibbs 现象。

Gibbs 效应：将具有不连续点的周期函数进行 Fourier 级数展开，选取有限项进行合成，选取的项数越多，在所合成的波形中出现的峰起位置越来越靠近函数不连续点。当选取的项数足够大时。该峰起值经不会随着项数的增加而增加，其上冲幅度（合成波形峰值和原始函数的偏差与间断点跃变值之比）趋于一个常数，约为 9%。（Gibbs 现象的数值刻画）

Third Part: Gibbs 现象。

前面已经通过对有间断点的周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和与原函数的对比，发现了 Gibbs 现象，下面通过对具体问题的讨论论证该现象。

设周期为 2π 的周期函数在一个周期内定义为：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

可以看到，这个函数的间断点为 $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, 3\pi, \dots$ ，并且为奇函数，可以得到其相应的 Fourier 级数为正弦函数，即：

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

注意到，构成级数的每个函数 $\frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x, (n = 1, 2, \dots)$ 均是连续函数，但经过无穷次求和却变成了非连续函数。其部分和函数为：

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

记部分和函数与原始函数 $f(x)$ 的偏差与间断点跃变值之比为：

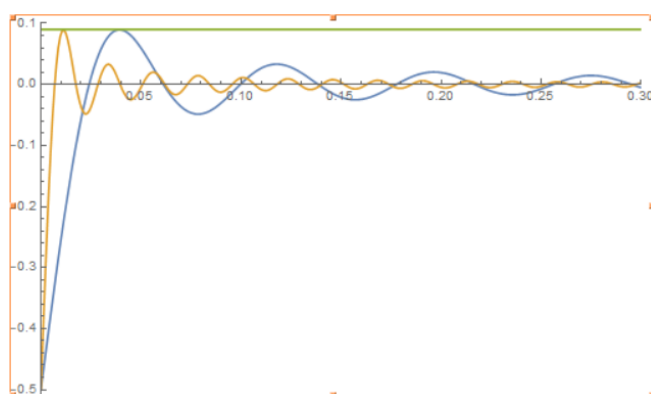
$$E_N(x) = \frac{S_N(x) - f(x)}{2} = \sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x - \frac{1}{2}$$

下面讨论函数 $E_N(x)$ 的取值变化。

取 N 为不同值，观察 $E_N(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内逼近零位置的函数值得变化情况。程序代码如下所示：

```
Clear[EN, x, N];
EN[x_, N_] := Sum[(2 Sin[(2 n - 1) x]) / ((2 n - 1) Pi), {n, 1, N}] - 1/2;
Plot[{EN[x, 40], EN[x, 140], .09}, {x, 0, Pi}, PlotRange -> {{0, 0.3}, {-0.51, 0.1}}]
```

运行结果如下所示：



从图中可以看到，函数 $E_N(x)$ 在靠近 0 位置处的值逼近 0.09。为了更加直观且仔细看到这种变化，通过数值加强对比。进行如下代码：

```
Clear[x, i, data, data1];
data=Table[FindMaximum[{EN[x, k], x>0}, {x, 0}], {k, 1, 400, 10}];
data1=data;
For[i=1, i<=Length[data], i++, data1[[i]][[2]]=data[[i]][[1]];data1[
[i]][[1]]=x/. data[[i]][[2]]]
data1
程序运行结果如下：
```

```
{{1.5708, 0.13662}, {0.1428, 0.0898345}, {0.0747998, 0.0895844}, {0.0506709, 0.0895332},
{0.0383121, 0.0895147}, {0.0307999, 0.0895059}, {0.0257508, 0.0895011}, {0.0221239, 0.0894981},
{0.0193925, 0.0894962}, {0.0172615, 0.0894949}, {0.0155524, 0.089494}, {0.0141513, 0.0894933},
{0.0129818, 0.0894927}, {0.0119908, 0.0894923}, {0.0111404, 0.089492}, {0.0104026, 0.0894917},
{0.0097565, 0.0894915}, {0.00918594, 0.0894913}, {0.00867843, 0.0894911}, {0.00822407, 0.089491},
{0.00781491, 0.0894909}, {0.00744453, 0.0894908}, {0.00710768, 0.0894907}, {0.00679999, 0.0894907},
{0.00651783, 0.0894906}, {0.00625815, 0.0894905}, {0.00601838, 0.0894905}, {0.0057963, 0.0894904},
{0.00559002, 0.0894904}, {0.0161938, 0.0330947}, {0.0156558, 0.0330946}, {0.00505079, 0.0894903},
{0.0146803, 0.0330945}, {0.0142368, 0.0330944}, {0.0138193, 0.0330943}, {0.0134256, 0.0330943},
{0.0130537, 0.0330942}, {0.0127019, 0.0330941}, {0.0123685, 0.0330941}, {0.0361564, 0.0112326}}
```

从计算结果可以看到，峰值的坐标离 0 越来越远，而峰值虽然越来越接近 0.09，但也似乎越来越小。试问：随着项数级数的继续增加，峰值是否会进一步减小？进行如下代码：

```
{FindMaximum[{EN[x, 3100], x > 0}, {x, 0}], FindMaximum[{EN[x,
12000], x > 0}, {x, 0}], FindMaximum[{EN[x, 30000], x > 0}, {x, 0}]}
运行代码如下：
```

```
{{0.00532979, {x→0.00962746}}, {0.000285514, {x→0.0464694}}, {0.0000845603, {x→0.0627795}}}
```

由以上三个结果可以看到，当级数增加到一定程度以后，峰值取值位置逼近于零的同时，峰值也越来越小。这样就会有一个疑问：是否随着项数趋于无穷大时，峰值会趋于零，即不存在 Gibbs 现象呢？事实上，只要周期函数 $f(x)$ 在一个周期内可积且绝对可积，可以使用 Fourier 均方误差证明 Fourier 级数部分和函数在项数趋于无穷大时，Gibbs 现象将不存在。

Forth Part: 函数延拓为连续函数的 Fourier 级数。

而在实际研究中要消除 Gibbs 现象可以采取对函数进行延拓的方法。如对实验 Second Part 中函数 $f(x) = x^2, (0 \leq x \leq 2)$ 进行偶延拓，使其变为周期为 4 的函数 $f(x) = x^2, (-2 \leq x \leq 2)$ ，这样就避免了 Gibbs 现象的出现。

绘制 $f(x)$ 在区间 $[-4, 4]$ 内分别取 $n=5$ 和 $n=50$ 的 Fourier 级数部分和函数图形。

程序代码如下：

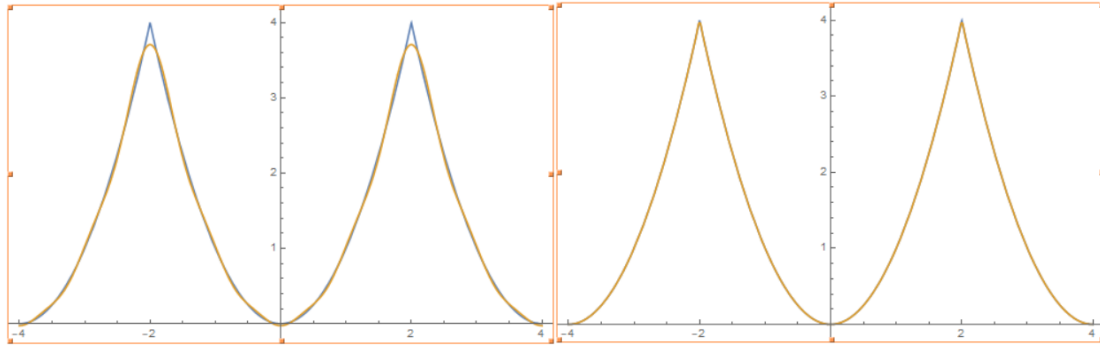
```
Clear[f, Sn, x, x0, v, L, a, b, k, n, g];
f[x_]:=Which[0<=x<=2, x^2, -2<=x<=0, x^2];
L=2;
F[x_]:=Module[{x0=x}, g[t_]:=Which[0<=t<=2, t^2, -
2<t<0, t^2]; If[Round[x0/4]==0, v=g[x0], v=g[x0-Round[x0/4]*4]];v];
a[k_]:=1/L Integrate[f[x] Cos[(k Pi)/L x], {x, -2, 2}];
b[k_]:=1/L Integrate[f[x] Sin[(k Pi)/L x], {x, -2, 2}];
```

```

Sn[x_, n_] := a[0]/2 + Sum[a[k] Cos[(k Pi)/L x] + b[k] Sin[(k Pi)/L
x], {k, 1, n}];
Sn[x, 5]
Plot[{F[x], %}, {x, -4, 4}]

```

程序运行结果如下：



n=5 时图形

n=50 时图形

我们可以看到，已经不存在 Gibbs 现象。

总结

之所以选择对 Gibbs 现象进行研究,是因为其在热力学统计中具有重要应用,如 Gibbs 函数判据,并由此可以推导出系统的平衡条件和平衡稳定性条件,以及可以讨论范德瓦尔斯等温气液相变等等,而 Fourier 级数的探讨由来也是对热力学应用的研究所得,Fourier 也用此解决了许多热力学问题,在此便不再多言,感兴趣的可以翻一翻热力学 Gibbs 判据这一部分内容。

我们通过以上探讨,一方面证明里 Gibbs 现象的存在性,另一方面给出了,随着项数的增加,其峰值位置趋近于间断点,上冲幅度趋近于常数 0.09。