有限元方法 2021 秋（10 月 18、20 日作业）

金晨浩 SA21001033

HW1. **设** Ω **有界区域。证明** $C_0^\infty(\Omega)$ **在** $L^2(\Omega)$ **中稠密，并对** $u \equiv 1$ **构造** $C_0^\infty(\Omega)$ **中的逼近列。**

> Remark: 这个证明我不想写了，大家去看实分析笔记。思路是先证明对球形区域成立，再证一般区域。结论对无界区域也成立。对 $u \equiv 1$ 的逼近，建议大家构造一个具体的例子出来，不要用卷积偷懒。

HW2. **同一个 PDE 可能有不同的变分形式。对二维问题，给出两个矩阵函数**

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \text{ s.t. } A^{(1)} \neq A^{(2)},$$

$$\text{且} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_j (a_{ij}^{(1)} \partial_i) \text{与} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_j (a_{ij}^{(2)} \partial_i) \text{为同一个算子。}$$

证明. 记 $T_k = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \partial_j (a_{ij}^{(k)} \partial_i) = a_{11}^{(k)} \partial_{11} + (a_{12}^{(k)} + a_{21}^{(k)}) \partial_{12} + a_{22}^{(k)} \partial_{22} + \frac{\partial a_{12}^{(k)}}{\partial x_2} \partial_1 + \frac{\partial a_{21}^{(k)}}{\partial x_1} \partial_2$，那么 $T_1 = T_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(2)} \\ a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(2)} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \frac{a_{12}^{(1)}}{\partial x_2} = \frac{a_{12}^{(2)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_{21}^{(1)}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{21}^{(2)}}{\partial x_1} \end{cases} \quad \& \quad a_{12}^{(1)} + a_{21}^{(1)} = a_{12}^{(2)} + a_{21}^{(2)}$$

$$\Leftrightarrow A^{(1)} - A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

b 为常数。选取 $A^{(1)}, A^{(2)}$ s.t. $b \neq 0$ 即可。举个具体的例子：

(Source) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = f$。区域 Ω，Dirichlet 边界，测试函数空间 $V = H_0^1(\Omega)$。

$$\begin{cases} \text{离散 1：求解} u \in V \text{ s.t. } \int_\Omega u_x v_x + u_x v_y + u_y v_y = \int_\Omega f v \, dx, \ \forall v \in V. \\ \text{离散 2：求解} u \in V \text{ s.t. } \int_\Omega u_x v_x + u_y v_x + u_y v_y = \int_\Omega f v \, dx, \ \forall v \in V. \end{cases}$$

对应双线性函数分别为 $a_1(u,v) = \int_\Omega u_x v_x + u_x v_y + u_y v_y$ 和 $a_2(u,v) = \int_\Omega u_x v_x + u_y v_x + u_y v_y$。 □

HW3. **考虑模型问题** $\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, & x \in \partial\Omega \backslash \Gamma \end{cases}$ **，这里** $f \in L^2(\Omega)$**，**$\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$**，允许** meas$(\Gamma)$=0**。给出该模型问题的变分，证明若变分问题的解** $u \in H^2(\Omega)$ **则** u **也是原方程的解。并且给出变分问题适定性的证明。**

证明. $V := \{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma = 0\}$. 定义 $a(u,v) = \int_\Omega DuDv\,dx + \int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} \alpha uv\,dS$，$F(v) = \int_\Omega fv\,dx$。

设 $u \in V$ 是下面变分问题的解：

$$a(u,v) = F(v),\ \forall v \in V.$$

因为 $a(u,v) = \int_\Omega DuDv\,dx + \int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} \alpha uv\,dS = \int_\Omega (-\Delta u)v\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\,dS + \int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} \alpha uv\,dS$ $= \int_\Omega (-\Delta u)v\,dx,\ \forall u, v \in V$, 所以 $a(u,v) = F(v) \Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f)v\,dx = 0, \forall v \in V \Rightarrow -\Delta u = f.$

反之，原方程的解也是变分问题的解。注意到上述推导与不依赖于 meas(Γ) 大小。

利用 Trace 不等式即证 $a(\cdot,\cdot)$ 的连续性。下证强制性。假设 $\exists \{u_n\} \subset H^1(\Omega)$, $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ s.t. $a(u_n, u_n) < \frac{1}{n}$。因为 $H^1(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^2(\Omega)$，所以 $\exists \{u_{n_k}\}$ 和 $u \in L^2(\Omega)$ s.t. $u_{n_k} \to u$ in $L^2(\Omega)$. 又因为 $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$，$\int_\Omega u\phi_j\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{n_k}\phi_j\,dx = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_j} \phi\,dx$, 所以 u 存在弱导数且 $\|Du - Du_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \Rightarrow u_{n_k} \to u$ in $H^1(\Omega)$, $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

另一方面，$\|Du_{n_k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \|u_{n_k}\|^2_{L^2(\partial\Omega\backslash\Gamma)} \le \int_\Omega |Du_{n_k}|^2\,dx + \int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} \alpha u_{n_k}^2\,dS < \frac{1}{n} \Rightarrow \|Du_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ $\Rightarrow Du = 0$, u 为常数。代入边界条件可知 $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u \equiv 0$, 与 $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$ 矛盾。

综上，$a(\cdot,\cdot)$ 满足强制性、连续性，由 Lax-Milgram 定理知变分问题解存在唯一。 □

3.x.10. **构造节点基函数。**K **是以** $(0,0),(1,0),(0,1)$ **为顶点的三角形，**$\mathcal{P}$ **取为** P^2**，**$\mathcal{N}$ **取顶点、中点处的点泛函。**

证明. 平凡验证 $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ 是有限元空间。设基函数 $\phi_i = \lambda_1^{(i)}x^2 + \lambda_2^{(i)}y^2 + \lambda_3^{(i)}xy + \lambda_4^{(i)}x + \lambda_5^{(i)}y + \lambda_6^{(i)}$, 取 $N_1(0,0), N_2(1,0), N_3(0,1), N_4(\frac{1}{2},0), N_5(0,\frac{1}{2}), N_6(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, 代入 $N_j(\phi_i) = \delta_{ij}$, 可以得到

$$\begin{aligned} &N_1(\phi) = \lambda_6, \quad N_2(\phi) = \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6, \\ &N_3(\phi) = \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6, \quad N_4(\phi) = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_4 + \lambda_6, \\ &N_5(\phi) = \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_5 + \lambda_6, \quad N_6(\phi) = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_5 + \lambda_6. \end{aligned}$$

(上式省略上、下标 i) 我们得到下面的方程组：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(i)} \\ \lambda_2^{(i)} \\ \lambda_3^{(i)} \\ \lambda_4^{(i)} \\ \lambda_5^{(i)} \\ \lambda_6^{(i)} \end{pmatrix} = e_i.$$

求解出所有的 $\lambda_j^{(i)}$, ϕ_i 具体表达式如下：

$$\begin{aligned} &\phi_1(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 3x - 3y + 1, \quad \phi_2(x,y) = 2x^2 - x, \\ &\phi_3(x,y) = 2y^2 - y, \ \ \phi_4(x,y) = -4x^2 - 4xy + 4x, \\ &\phi_5(x,y) = -4y^2 - 4xy + 4y, \ \ \phi_6(x,y) = 4xy. \end{aligned}$$

□