偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2019-09

1 高维偏微分方程的有限差分法

本章以二维问题常系数抛物型方程和二维常系数对流方程为例介绍高维偏微分方程的有限差分方法的构造（包括边界条件的处理），及其基本概念和理论，以及边界条件的近似。前面对于一位情况，相容性、收敛性、稳定性等的定义、定理、有关CFL条件的定理均适用于二维、三维等相关高维问题（包括初值问题、初边值问题）

1.1 二维常系数对流方程初值问题

考虑二维常系数对流方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y = 0, \ \ (x,y) \in (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty), \ t > 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y), \ \ (x,y) \in (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty) \end{cases}$$

其中：$u(x,y,t)$, $f(x,y)$ 对 x, y 分别是 2π 周期的周期函数

一、 剖分：

空间采用等距剖分，即：Δx 和 Δy 是常数。

- x 方向：$x_j = j\Delta x, \ j = \cdots, -1, 0, 1, \cdots; \ \Delta x = \frac{2\pi}{n_x}$
- y 方向：$y_k = k\Delta y, \ k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots; \ \Delta y = \frac{2\pi}{n_y}$

时间剖分：为方便分析，这儿采用均分(Δt 是常数)

，且满足稳定

性条件，即：

$t_n = n\Delta t, \ n \geq 0; \ \Delta t = c_{fl} * \min(\Delta x, \ \Delta y)$

$\Rightarrow$: u_{jk}^n 表示精确解 $u(x,y,t)$ 在 (x_j, y_k, t_n) 处的值

二、 有限差分格式–差商$\approx$导数

也可用前面针对1维问题时采用的其它方法构造有限差分格式。为

简单起见，这儿用差商≈导数方法，如：FTBS格式

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1\ k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{jk-1}^n)$$

三、 基本性质：

1. 截断误差、相容性

$T_{jk}^n = \frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^n}{\Delta t} + \frac{a(u_{jk}^n-u_{j-1\ k}^n)}{\Delta x} + \frac{b(u_{jk}^n-u_{j\ k-1}^n)}{\Delta y} = O(\Delta t) + O(\Delta x) + O(\Delta y)$

$\Rightarrow$：逐点相容；易证：按最大模相容；且对时间是1阶精度，对空间也是1阶精度

2. 整体误差、收敛性

令 $e_{jk}^n = v_{jk}^n - u_{jk}^n$； $E^n = \max_{j,k} |e_{jk}^n|$； $r_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$, $r_y = \frac{b\Delta t}{\Delta y}$； 则有：

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{jk}^n - u_{j-1\ k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(u_{jk}^n - u_{jk-1}^n) + \underline{T_{jk}^n\Delta t}$$

$\Rightarrow$: $e_{jk}^{n+1} = e_{jk}^n - r_x(e_{jk}^n - e_{j-1\ k}^n) - r_y(e_{jk}^n - e_{jk-1}^n) - T_{jk}^n\Delta t$

$= (1 - r_x - r_y)e_{jk}^n + r_x e_{j-1\ k}^n + r_y e_{jk-1}^n - T_{jk}^n\Delta t$

若$0 < r_x + r_y \le 1$，则有：

$|e_{jk}^{n+1}| \le (1 - r_x - r_y)|e_{jk}^n| + r_x|e_{j-1\ k}^n| + r_y|e_{jk-1}^n| + |T_{jk}^n|\Delta t$

$\Rightarrow$: $E^{n+1} \le E^n + T^*\Delta t$，其中 $T^* = \max_{j,k,n} |T_{jk}^n| = O(\Delta t + \Delta x + \Delta y)$

$E^0 = 0 \Rightarrow$: $E^{n+1} \le T^*(n+1) * \Delta t \Rightarrow$：（1,1）阶收敛

3. 稳定性–Fourier分析方法

（可由定义，也可利用前面相关的定理）

$v_{jk}^n = \lambda^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$

$v_{jk}^n = \frac{1}{2\pi}\hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$; $\hat{v}^{n+1} = \lambda\hat{v}^n$

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1\ k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{jk-1}^n)$$

$\lambda = 1 - r_x(1 - e^{-i\omega_x \Delta x}) - r_y(1 - e^{-i\omega_y \Delta y})$

令 $\eta_x = \omega_x \Delta x,\ \eta_y = \omega_y \Delta y$

$\lambda = (1 - r_x - r_y) + r_x \cos\eta_x + r_y \cos\eta_y - i(r_x \sin\eta_x + r_y \sin\eta_y)$

易证：$0 \le r_x + r_y \le 1;\ r_x > 0;\ r_y > 0$，则有：$|\lambda| \le 1 \Rightarrow$：格式稳定

4. CFL条件

准确解为：$u(x, y, t) = f(x - at, y - bt)$

$\Rightarrow$：准确解在 $P = (x^*, y^*, t^*)$ 处的解 $u(x^*, y^*, t^*)$ 的依赖区为：

$D_P = (x_0^*, y_0^*, 0)$，其中：$x_0^* = x^* - at_n^{*}, y_0^* = y^* - bt_n^{*}$

若取 $P = (x_j, y_k, t^{n+1})$，则有：

$D_P = (x_0^*, y_0^*, 0)$，其中：$x_0^* = x_j - at_{n+1}, y_0^* = y_k - bt_{n+1}$

且针对这个偏微分方程的FTBS格式在 $P = (x_j, y_k, t^{n+1})$ 处数值解的依赖区为：

$N_P = [x_{j-n-1}, x_j] \times [y_{k-n-1}, y_k] = [(j - n - 1)\Delta x, j\Delta x] \times [(k - n - 1)\Delta y, k\Delta y]$

CFL条件 $D_P \subset N_P \Rightarrow$：

$$\begin{cases} x_{j-n-1} \le x_0^* \le x_j, \Rightarrow:\ 0 < r_x \le 1 \\ y_{k-n-1} \le y_0^* \le y_k, \Rightarrow:\ 0 < r_y \le 1 \end{cases}$$

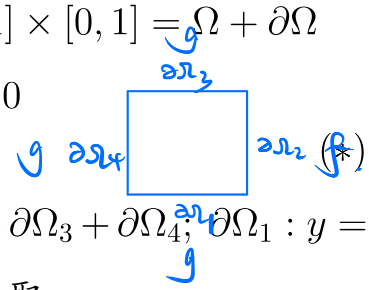
注意：CFL条件是收敛的必要条件，不充分；这儿稳定的充要条件是：$0 \le r_x + r_y \le 1;\ r_x > 0;\ r_y > 0$

作业：（第二本参考书）P251：HW5.8.7(a)(b)

1.2 二维常系数扩散方程的初边值问题

考虑二维常系数扩散方程的适定的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t = \nu_1 u_{xx} + \nu_2 u_{yy}, & (x,y) \in \Omega = (0,1)\times(0,1),\ t>0 \\ I.C:\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & (x,y)\in\bar{\Omega} = [0,1]\times[0,1] = \Omega + \partial\Omega \\ B.C:\ u(x,y,t) = g(x,y,t) & (x,y)\in\partial\Omega,\ t\geq 0 \end{cases} \tag{$*$}$$



其中常数 $\nu_1, \nu_2 > 0$；边界为：$\partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2 + \partial\Omega_3 + \partial\Omega_4; \partial\Omega_1 : y = 0; \partial\Omega_2 : x = 1; \partial\Omega_3 : y = 1; \partial\Omega_4 : x = 0$。边界条件取：

$$\begin{cases} u(x,y,t) = g(x,y,t) & (x,y)\in\partial\Omega_1+\partial\Omega_3+\partial\Omega_4,\ t\geq 0 \\ u_x(1,y,t) = f(y,t) & (x,y)\in\partial\Omega_2,\ t\geq 0 \end{cases}$$

即：在 $x=1$ 处，给出的是第二类边界条件（Neumann B.C.）；在其余的边界，给出的是第一类边界条件（Dirichlet B.C.）。

空间采用等距剖分，即：

- x 方向均分成 n_x 等份：$x_j = j\Delta x,\ j = 0,1,\cdots,n_x;\ \Delta x = \frac{1}{n_x}$
- y 方向均分成 n_y 等份：$y_k = j\Delta y,\ k = 0,1,\cdots,n_y;\ \Delta y = \frac{1}{n_y}$

时间剖分：为方便分析，这儿采用均分，且满足稳定性条件

一、 FTCS格式：

$$\begin{cases} v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n + \frac{\nu_1\Delta t}{(\Delta x)^2}(v_{j+1,k} - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{\nu_2\Delta t}{(\Delta y)^2}(v_{j,k+1} - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n); \\ \qquad j = 1,\cdots,n_x-1; k = 1,\cdots,n_y-1 \\ v_{jk}^0 = \varphi(x_j,y_k); \\ \qquad j = 0,1,\cdots,n_x; k = 0,1,\cdots,n_y \end{cases} \tag{$*1$}$$

边界条件处理：

$$\begin{cases} v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n + \frac{\nu_1 \Delta t}{(\Delta x)^2}(v_{j+1,k} - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{\nu_2 \Delta t}{(\Delta y)^2}(v_{j,k+1} - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n); \\ \quad j = 1, \cdots, n_x - 1; k = 1, \cdots, n_y - 1 \\ v_{jk}^0 = \varphi(x_j, y_k); \\ \quad j = 0, 1, \cdots, n_x; k = 0, 1, \cdots, n_y \end{cases} \quad (*1)$$

- Dirichlet B.C.: $u(x, y, t) = g(x, y, t),\ (x, y) \in \partial\Omega_1 + \partial\Omega_3 + \partial\Omega_4$

$$\begin{cases} v_{0k}^n = g(0, k\Delta y, n\Delta t) & k = 0, 1, \cdots, n_y;\ n > 0 \\ v_{j0}^n = g(j\Delta x, 0, n\Delta t) & j = 0, 1, \cdots, n_x;\ n > 0 \\ v_{jn_y}^n = g(j\Delta x, 1, n\Delta t) & j = 0, 1, \cdots, n_x;\ n > 0 \end{cases}$$

- Neumann B.C.: $u_x(1, y, t) = f(y, t),\ (x, y) \in \partial\Omega_2$

(1) 1阶近似：

$$\frac{v_{n_x k}^n - v_{n_x-1\ k}^n}{\Delta x} = f(y_k, t_n),\ k = 0, 1, \cdots, n_y;\ n \geq 0;$$

(2) 2阶近似：

$$\frac{v_{n_x+1\ k}^n - v_{n_x-1\ k}^n}{2\Delta x} = f(y_k, t_n),\ k = 0, 1, \cdots, n_y;\ n \geq 0; \qquad (*2)$$

对于2阶近似，增加了一个未知数 $v_{n_x+1\ k}^{n+1}$，需要增加一个方程。对于前面的FTCS格式，取 $j = n_x$ 得：

$$v_{n_x\ k}^{n+1} = v_{n_x\ k}^n + \mu_x(v_{n_x+1\ k}^n - 2v_{n_x\ k}^n + v_{n_x-1\ k}^n) + \mu_y(v_{n_x\ k+1}^n - 2v_{n_x\ k}^n + v_{n_x\ k-1}^n)$$

由 $(*2)$ 得：$v_{n_x+1\ k}^n = v_{n_x-1\ k}^n + 2\Delta x f(y_k, t_n)$ 代入上式，得：

$$v_{n_x\ k}^{n+1} = v_{n_x\ k}^n + 2\mu_x(v_{n_x-1\ k}^n - v_{n_x\ k}^n + \Delta x f(y_k, t_n)) + \mu_y(v_{n_x\ k+1}^n - 2v_{n_x\ k}^n + v_{n_x\ k-1}^n)$$

二、 ADI方法：

$$u_t = \nu_1 u_{xx} + \nu_2 u_{yy}$$

思想：对空间导数的近似，引入过渡层，交替用隐式（显式）

1. $t_n \to t_{n+1/2}$：关于x的导数用隐式，关于y的导数用显式（或反过来）

$$\frac{v_{jk}^{n+1/2} - v_{jk}^n}{\Delta t/2} = \frac{\nu_1}{\Delta x^2}\delta_x^2 v_{jk}^{n+1/2} + \frac{\nu_2}{\Delta y^2}\delta_y^2 v_{jk}^n$$

$$\Rightarrow: (1 - 1/2\frac{\nu_1 \Delta t}{\Delta x^2}\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} = (1 + 1/2\frac{\nu_2\Delta t}{\Delta y^2}\delta_y^2)v_{jk}^n$$

$$\Rightarrow: (1 - 1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} = (1 + 1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n; \tag{1a}$$

其中：$\mu_x = \frac{\nu_1\Delta t}{\Delta x^2}$, $\mu_y = \frac{\nu_2\Delta t}{\Delta y^2}$, $\delta_x = E^{1/2} - E^{-1/2}$ 稳定性：$v_{jk}^n = \frac{1}{2\pi}\hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$; $\hat{v}^{n+1} = \hat{Q}\hat{v}^n$，代入$(1a)$得到放大因子$\hat{Q}$，即：

$$\hat{Q}^{1/2} = \frac{1 - 2\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y/2)}{1 + 2\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x/2)}$$

要使得$|\hat{Q}| \le 1$，只要$|\hat{Q}^{1/2}| \le 1$，即：

$$\begin{cases} \mu_x > 0 \\ 0 < \mu_y \le 1 \end{cases}$$

2. $t_{n+1/2} \to t_{n+1}$：关于x的导数用显式，关于y的导数用隐式

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{\nu_1}{\Delta x^2}\delta_x^2 v_{jk}^{n+1/2} + \frac{\nu_2}{\Delta y^2}\delta_y^2 v_{jk}^{n+1}$$

$$\Rightarrow: (1 - 1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + 1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}; \tag{2a}$$

其稳定性条件为：

$$\begin{cases} \mu_y > 0 \\ 0 < \mu_x \le 1 \end{cases}$$

$$(1-1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}=(1+1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n; \qquad (1a)$$

$$(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}; \qquad (2a)$$

3. 将(1a)与(2a)结合起来，得到：

$$\Rightarrow: (1-1/2\mu_x\delta_x^2)(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+1/2\mu_y\delta_y^2)(1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^n; \qquad (3a)$$

令 $v_{jk}^n=\frac{1}{2\pi}\hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j+\omega_y y_k)}$; $\hat{v}^{n+1}=\hat{Q}\hat{v}^n$，代入(3a)得到放大因子$\hat{Q}$，即：

$$\hat{Q}=\frac{(1-2\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x\ /2))(1-2\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y\ /2))}{(1+2\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x\ /2))(1+2\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y\ /2))}$$

$\Rightarrow: |\hat{Q}|\le 1$ $\Rrightarrow$：(3a)是无条件稳定的

(1a)(2a)或(3a)分别被称为Peaxeman-Rachford格式

相容性： 将(3a)改写为：

$$(1-1/2\mu_x\delta_x^2-1/2\mu_y\delta_y^2+1/4\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}$$
$$=(1+1/2\mu_x\delta_x^2+1/2\mu_y\delta_y^2+1/4\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^n$$
$$\frac{v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n}{\Delta t}=\frac{\nu_1}{\Delta x^2}\delta_x^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})+\frac{\nu_2}{\Delta y^2}\delta_y^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})$$
$$-\frac{\nu_1\nu_2\Delta t}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n)$$

由此可见：上式除最后一项外，即为Crank-Nicolson格式

$$u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^n=\Delta t u_t+\frac{\Delta t^2}{2}u_{tt}+O(\Delta t^3)=\Delta t u_t+O(\Delta t^2)$$
$$\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}u_j=u_{xx}+\frac{\Delta x^2}{12}u_{xxxx}+O(\Delta x^4)=u_{xx}|_j+O(\Delta x^2)$$
$$\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}(u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^n)=\Delta t\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}(u_t|_{jk}^n+O(\Delta t))$$
$$=\Delta t((u_{tyy}|_{jk}^n+O(\Delta t))+O(\Delta y^2))$$
$$\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}(u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^n)=\Delta t\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}((u_{tyy}|_{jk}^n+O(\Delta t))+O(\Delta y^2))$$
$$=\Delta t((u_{txxyy}|_{jk}^n+O(\Delta t))+O(\Delta y^2)+O(\Delta x^2))$$

Crank-Nicolson格式的截断误差为$O(\Delta t^2+\Delta y^2+\Delta x^2)$

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^n}{\Delta t}=-\frac{1}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}(u_{jk}^{n+1}+u_{jk}^n)-\frac{1}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}(u_{jk}^{n+1}+u_{jk}^n)+\frac{\Delta t}{4}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}(u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^n)$$
$$=u_t-u_{xx}-u_{yy}+O(\Delta t^2+\Delta y^2+\Delta x^2)+O(\Delta t^2\Delta x^2))+O(\Delta t^2\Delta x^2))$$

$\Rightarrow$：格式是相容的，且截断误差为：$O(\Delta t^2 + \Delta y^2 + \Delta x^2)$

注 意：(1a)与(2a)是P-R格 式， 实 质 上 就 是 复 合 格 式(3a)。对(3a)来说，也可以由此得到其它形式的二步法；即也可以由其它形式得到；如：$D^{'}Yakonov$格式：

$$\begin{cases} (1 - \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})v_{jk}^* = (1 + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})(1 + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^n \\ (1 - \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* \end{cases}$$

作业：构造$u_t + u_x + u_y = 0$的ADI格式

三、 近似分解方法：

Crank-Nicolson格式：

$$\frac{v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^{n}}{\Delta t}=\frac{\nu_1}{2\Delta x^2}\delta_x^2(v_{jk}^{n}+v_{jk}^{n+1})+\frac{\nu_2}{2\Delta y^2}\delta_y^2(v_{jk}^{n}+v_{jk}^{n+1})$$

$$\Rightarrow:\ (1-\frac{\nu_1\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}-\frac{\nu_2\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{\nu_1\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}+\frac{\nu_2\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^{n}$$

在上式左边加上： $\frac{\nu_1\nu_2\Delta t^2}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2 v_{jk}^{n+1}$

在上式右边加上： $\frac{\nu_1\nu_2\Delta t^2}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2 v_{jk}^{n}$

则：相当于在差分方程中增加： $\frac{\nu_1\nu_2\Delta t^2}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^{n})$，该项的量级是： $O(\Delta t^2+\Delta t^2\Delta x^2+\Delta t^2\Delta y^2)$

由于原来Crank-Nicolson格式的精度是$O(\Delta t^2+\Delta x^2+\Delta y^2)$，所以增加该项，并不影响原格式的精度。

$\Rightarrow$新格式： $(1-1/2\mu_x\delta_x^2)(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+1/2\mu_y\delta_y^2)(1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n}$

这样得到新格式的方法称为近似分解法

由“ADI”方法或上面“近似分解”方法得到的数值格式可以是一个复合形式，也可以拆开；但是是按拆开形式计算的；因此，都有过渡层（这儿分别是$v_{jk}^{n+1/2}$，v_{jk}^{*}）。这类复合格式，最难处理的就是如何给出合适的“过渡层的边界条件”

四、 过渡层的边界条件的数值近似

P-R格式：

$$\begin{cases}(1-1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}=(1+1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n}\\(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}\end{cases}$$

$D'Yakonov$格式：

$$\begin{cases}(1-\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})v_{jk}^{*}=(1+\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})(1+\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^{n}\\(1-\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^{n+1}=v_{jk}^{*}\end{cases}$$

其中：$\mu_x = \frac{\nu_1 \Delta t}{\Delta x^2}$, $\mu_y = \frac{\nu_2 \Delta t}{\Delta y^2}$, $\delta_x = E^{1/2} - E^{-1/2}$

1. Dirichlet B.C.：$u(x,y,t) = g(x,y,t),\ (x,y) \in \partial\Omega,\ t > 0$

   (1) 对于 $D^{'}Yakonov$ 格式：

   1阶近似：

$$\begin{cases} v_{0k}^* = g(0, k\Delta y, (n+1)\Delta t), \quad v_{n_x k}^* = g(1, k\Delta y, (n+1)\Delta t) \\ v_{j0}^* = g(j\Delta x, 0, (n+1)\Delta t), \quad v_{j n_y}^* = g(j\Delta x, 1, (n+1)\Delta t) \end{cases}$$

   2阶近似：由于差分方程是2阶的（即对PDE的近似是2阶的）；为了保证数值方法整体上是2阶精度，边界近似也需要2阶。最有效、方便的方法是从PDE的近似出发；如：

   由 $D^{'}Yakonov$ 格式的第二式，取 $j=0$ 可得：

$D^{'}Yakonov$ 格式：

$$\begin{cases} (1 - \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}) v_{jk}^* = (1 + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})(1 + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}) v_{jk}^n \\ (1 - \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}) v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0k}^* & = (1 - \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}) v_{0k}^{n+1} \\ & = -\frac{1}{2}\mu_y v_{0k+1}^{n+1} + (1+\mu_y) v_{0k}^{n+1} - \frac{1}{2}\mu_y v_{0k-1}^{n+1} \\ & = -\frac{1}{2}\mu_y g(0, (k+1)\Delta y, (n+1)\Delta t) \\ & \quad + (1+\mu_y) g(0, k\Delta y, (n+1)\Delta t) - \frac{1}{2}\mu_y g(0, (k-1)\Delta y, (n+1)\Delta t) \end{cases}$$

   可以验证该近似是二阶的

   同样可得：$v_{n_x k}^*, v_{j0}^*, v_{j n_y}^*$ 的二阶近似

   (2) 对于P-R格式：（以 $v_{0k}^{n+1/2}$ 为例）

   逻辑上可取：

P-R格式：

$$\begin{cases} (1 - 1/2\mu_x \delta_x^2) v_{jk}^{n+1/2} = (1 + 1/2\mu_y \delta_y^2) v_{jk}^n \\ (1 - 1/2\mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} = (1 + 1/2\mu_x \delta_x^2) v_{jk}^{n+1/2} \end{cases}$$

$$v_{0k}^{n+1/2} = g(0, k\Delta y, (n + 1/2\Delta t) \tag{1b}$$

   也可以通过P-R格式得到。将P-R格式中一个式子左右调换，然后另一式相加，得：

$$v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) v_{jk}^n + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1}$$

取 $j=0$ 得：

$$v_{0k}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{0k}^n+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{0k}^{n+1} \quad (2b)$$

其中：$v_{0k}^n=g(0,k\Delta y,n\Delta t),v_{0k}^{n+1}=g(0,k\Delta y,(n+1)\Delta t)$。

将上式在 $(0,k\Delta y,(n+1/2)\Delta t)$ 处做Taylor展开，得：

$$v_{0k}^{n+\frac{1}{2}}=g(0,k\Delta y,(n+1/2)\Delta t)+O(\Delta t^2)+O(\Delta t^2\Delta y^2)$$

由此可见(1b)和(2b)都可以保证格式的精度没有降低

2. Neumann B.C.

(1) Neumann B.C.与P-R格式

Neumann B.C.设在 $y=0$ 处，$u_y(x,0,t)=g^N(x,t)$；（若设在在 $y=1$ 处，处理方式类似）

1阶近似： $v_{j0}^{n+1}=v_{j1}^{n+1}-\Delta y g^N(j\Delta x,(n+1)\Delta t)$ 代入P-R格式的第二步，或 $D'Yakonov$ 格式的第二式；得到不含 v_{j0}^{n+1} 的方程。

2阶近似： $v_{j(-1)}^{n+1}=v_{j1}^{n+1}-2\Delta y g^N(j\Delta x,(n+1)\Delta t)$。多了一个未知数 $v_{j(-1)}^{n+1}$，需要增加1 个方程

对P-R格式的第二步取 $k=0$，得：

$(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{j0}^{n+1}=(1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{j0}^{n+1/2}$；将上式得到的 $v_{j(-1)}^{n+1}$ 代入，得到：

$v_{j0}^{n+1}-\mu_y(v_{j1}^{n+1}-v_{j0}^{n+1})=(1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{j0}^{n+1/2}-\frac{\Delta t}{\Delta y}g^N(j\Delta x,(n+1)\Delta t)$

注意： 若Neumann B.C.设在 $x=0$ 或 $x=1$ 处，则需要改变P-R格式中对 x、y 方向隐式、显示近似的顺序，即：

P-R格式：

$$\begin{cases} (1-1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} = (1+1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n \\ (1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} \end{cases}$$

$\overset{\text{变更隐式显示近似次序}}{\Rightarrow}$：

$$\begin{cases} (1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1/2} = (1+1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^n \\ (1-1/2\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1} = (1+1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1/2} \end{cases}$$

另外，若由于某种原因不能变更次序的，则需要特别小心地处理Neumann B.C.

(2) Neumann B.C.与 $D^{'}Yakonov$ 格式 $\begin{cases} (1-\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})v_{jk}^* = (1+\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})(1+\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^n \\ (1-\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* \end{cases}$

Neumann B.C.设在 $x=0$ 处，$u_y(0,y,t)=g^N(y,t)$；（若设在 $x=1$ 处，处理方式类似）

1阶近似： $v_{1k}^{n+1}-v_{0k}^{n+1}=\Delta x g^N(k\Delta y,(n+1)\Delta t)$

将算子 $(1-1/2\mu_y\delta_y^2)$ 同时作用于上式二边，再利用 $D^{'}Yakonov$ 格式的第二式 $(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=v_{jk}^*$ 得:

$(1-1/2\mu_y\delta_y^2)(v_{1k}^{n+1}-v_{0k}^{n+1}) = v_{1k}^*-v_{0k}^* = \Delta x(1-1/2\mu_y\delta_y^2)g^N(k\Delta y,(n+1)\Delta t) \overset{\triangle}{\equiv} g_k^{*(n+1)}$

$\Rightarrow$: $v_{1k}^*-v_{0k}^*=g_k^{*(n+1)}$

2阶近似： $v_{(-1)k}^{n+1}=v_{1k}^{n+1}-2\Delta x g^N(k\Delta y,(n+1)\Delta t)$。多了一个未知数 $v_{j(-1)}^{n+1}$，需要增加1 个方程

将算子 $(1-1/2\mu_y\delta_y^2)$ 同时作用于上式二边，得：

$(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{(-1)k}^{n+1} = (1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{1k}^{n+1}-2\Delta x(1-1/2\mu_y\delta_y^2)g^N(k\Delta y,(n+1)\Delta t)$

令：$g_k^{*(n+1)}=(1-1/2\mu_y\delta_y^2)g^N(k\Delta y,(n+1)\Delta t)$，由 $D^{'}Yakonov$ 格式的第二式 $(1-1/2\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=v_{jk}^*$ 得:

$$v_{(-1)k}^* = v_{1k}^*-2g_k^{*(n+1)} \tag{1c}$$

对 $D'Yakonov$ 格式的第一式取 $j=0$，得：

$$(1-1/2\mu_x\delta_x^2)v_{0k}^* = (1+1/2\mu_x\delta_x^2)(1+1/2\mu_y\delta_y^2)v_{0k}^n \qquad (2c)$$

又 $(1-1/2\mu_x\delta_x^2)v_{0k}^* = v_{0k}^* - 1/2\mu_x(v_{(-1)k}^* - 2v_{0k}^* + v_{1k}^*)$
$\overset{(1c)}{=} g_k^{*(n+1)}v_{0k}^* - \mu_x(v_{1k}^* - v_{0k}^* - v_{1k}^* - 2g_k^{*(n+1)})$ 由此可得：

$$(1+\mu_x)v_{0k}^* - \mu_x v_{1k}^* = (1+1/2\mu_x\delta_x^2)(1+1/2\mu_y\delta_y^2)v_{0k}^n - \mu_x g_k^{*(n+1)}$$

五、 Dougles-Rachford格式

1. 格式：

针对PDE：$u_t = u_{xx} + u_{yy}$

BTCS格式：$(1-\mu_x\delta_x^2-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n$

希望上式左边变成：$(1-\mu_x\delta_x^2)(1-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}$

为此，需要在BTCS格式的左边增加：$\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^{n+1}$ 项

为等式二边平衡，需要在BTCS格式的右边增加：$\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^n$ 项

$\Rightarrow$：在BTCS格式上增加了 $\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n)$ 项。前面已经证明，该项是 $O(\Delta t^2)$，所以增加该项，不影响原格式的（逐点）相容性和精度。$\Rightarrow$：Dougles-Rachford格式：

$$(1-\mu_x\delta_x^2)(1-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1+\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^n \qquad (1d)$$

以及计算中用的等价格式：

$D'Yakonov$ 格式：

$$\begin{cases} (1-\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})v_{jk}^* = (1+\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2})(1+\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^n \\ (1-\frac{\Delta t}{2}\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2})v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^* = (1+\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n \\ (1-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* - \mu_y\delta_y^2v_{jk}^n \end{cases}$$

2. 稳定性：$v_{jk}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$

$\overset{\hat{v}^{n+1}=\hat{Q}\hat{v}^n}{\Rightarrow}$ 放大因子：$\hat{Q} = \frac{1+\mu_x\mu_y(-4\sin^2\frac{\omega_x\Delta x}{2})(-4\sin^2\frac{\omega_y\Delta y}{2})}{(1+4\mu_x\sin^2\frac{\omega_x\Delta x}{2})(1+4\mu_y\sin^2\frac{\omega_y\Delta y}{2})}$

若 $\mu_x \geq 0$, $\mu_y \geq 0 \Rightarrow$: $\hat{Q} > 0$，且 $\hat{Q} \leq 1$。所以Dougles-Rachford格式是无条件稳定的

3. 边界条件处理：

（作业）

作业：

对二维扩散方程的Dougles-Rachford格式，构造下列不同边界条件的数值方法。

(1) 构造在 $x=0$ 处，Dirichlet B.C: $u(0,y,t)=g_1(y,t)$ 在过渡层的近似

(2) 分别构造在 $x=0$ 处，Neumann B.C.: $u_x(0,y,t)=g(y,t)$ 在过渡层的1阶和2阶近似