《数值分析》之

非线性方程求根

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向，在许多应用问题中能发现非线性方程的例子。

- 在光的衍射理论中，我们需要方程
$$x - \tan x = 0$$
的根。
- 在行星轨道的计算中，我们需要开普勒方程
$$x - a\sin x = b$$
的根，其中a和b取任意值。

非线性方程的求根也成了一个不可缺少的内容。

通常非线性方程的根的情况非常复杂：

- 解不唯一

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

  有无穷组解。

- 只在某个区域内可能解存在唯一，而且经常很简单的形式得不到精确解。例如：

$$e^x - \cos(\pi x) = 0.$$

- 当用计算机求函数的近似零点时，即使精确解是唯一的，还是会出现许多近似解。

根据不同的需要，非线性方程求根问题可以提出以下三类不同的要求：

- 已知某根近似，要求把根精确化。
- 确定全部的根，或者给定区域上的全部根。
- 判定给定区域上方程根的个数。

主要方法

- 对分法
- 不动点方法
- 牛顿法
- 割线法

对分法

定理

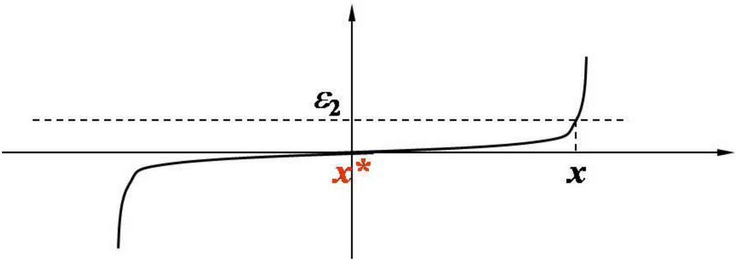
若f是区间$[a,b]$上的连续函数，且$f(a)f(b)<0$，则f在(a,b)内必有一个零点，即$\exists x\in(a,b)$，$f(x)=0$.

算法

1. $[a_0,b_0]=[a,b]$, $x=\frac{a_0+b_0}{2}$
2. if $f(x)\geq 0$, then $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=x$
3. else $a_{n+1}=x$, $b_{n+1}=b_n$

```
While(|a-b|>eps)
         x=(a+b)/2
        f(x)
       若(|f(x)|<eps) x为解
       若f(x)*f(b)<0 修正区间为[x,b]
       若f(a)*f(x)<0 修正区间为[a,x]
End while
```

- 每次缩小一倍的区间，收敛速度为1/2，较慢
- 只能求一个根，使用条件限制较大
- 不能保证x的精度



ε_2
x^*
x

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\varphi(x)$$
$$f(x)\text{的根} \Longleftrightarrow \varphi(x)\text{的不动点}$$

一个数学问题常常能归结成为一个求函数不动点的问题。

思路

从一个初值x^0出发，计算

$$x^1=\varphi(x^0), x^2=\varphi(x^1), \cdots, x^{k+1}=\varphi(x^k), \cdots,$$

若$\{x^k\}_0^\infty$收敛，即存在x^*使得$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$，且$\varphi$连续，则由

$$\lim_{k\to\infty} x^{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x^*)$$

可知$x^*=\varphi(x^*)$，即x^*是φ的不动点，也就是f的根。

不动点方法基本步骤

- 给出方程的局部等价形式, $f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\varphi(x)$.
- 取合适的初值x^0，产生迭代序列$x^{k+1}=\varphi(x^k)$.
- 求极限 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^*$, 该值为方程的根.

问题

迭代序列$\lim\limits_{k\to\infty} x^k$是否收敛?

中国科学技术大学

不动点定理

$\varphi(x)$是定义在$[a,b]$上的函数，若$\varphi(x)$满足

- $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \in [a,b]$.
- $\varphi(x)$在$[a,b]$上可导，且存在正数$L<1$, $\forall x \in [a,b]$, 有$|\varphi'(x)| \le L$.

则有，

1. $\exists 1\ x^*$, s.t. $x^* = \varphi(x^*)$, 称x^*为$\varphi(x)$的不动点。
2. 迭代格式$x^{k+1} = \varphi(x^k)$对任意的初值$x^0 \in [a,b]$均收敛于$\varphi(x)$的不动点x^*。
3. 误差估计式为

$$|x^* - x^k| \le \frac{L^k}{1-L}|x^1 - x^0|$$

- 不动点的存在唯一性

做辅助函数$\psi(x)=x-\varphi(x)$,则有$\psi(a)\leq 0,\psi(b)\geq 0$，则

$$\exists x^*,\ s.t.\ \psi(x^*)=0,\ i.e. x^*=\varphi(x^*).$$

若$x^{**}=\varphi(x^{**})$，则有

$$|x^*-x^{**}|=|\varphi(x^*)-\varphi(x^{**})|=|\varphi'(\xi)||x^*-x^{**}|\leq L|x^*-x^{**}|,\xi\in[a,b]$$

由$L<1$可知$x^*=x^{**}$.

- 迭代格式收敛

当$x_0 \in [a,b]$时，可用数学归纳法证明，迭代序列$\{x_k\} \subseteq [a,b]$，于是由微分中值定理

$$\begin{aligned} x^{k+1} - x^* = \varphi(x^k) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x^k - x^*), \xi \in [a,b] \\ |x^{k+1} - x^*| \le L|x^k - x^*| = L|\varphi(x^{k-1}) - x^*| \\ \le L^2|x^{k-1} - x^*| \le \cdots \le L^{k+1}|x^0 - x^*| \end{aligned}$$

因为$L < 1$,因此有当$k \to \infty$时，$L^{k+1} \to 0$,则

$$x_{k+1} \to x^*.$$

即迭代格式$x^{k+1} = \varphi(x^k)$收敛。

- 误差估计

$$|x^{k+1}-x^k| = |\varphi(x^k)-\varphi(x^{k-1})| \le L|x^k-x^{k-1}| \le \cdots L^k|x^1-x^0|$$

设k固定，对任意正整数p，有

$$\begin{aligned}|x^{k+p}-x^k| &\le |x^{k+p}-x^{k+p-1}|+\cdots+|x^{k+1}-x^k| \\ &\le (L^{k+p-1}+L^{k+p-2}+\cdots+L^k)|x^1-x^0| \\ &= \frac{L^k}{1-L}|x^1-x^0|\end{aligned}$$

由p的任意性，$\lim\limits_{p\to+\infty} x^{k+p} = x^*$，故有

$$|x^*-x^k| \le \frac{L^k}{1-L}|x^1-x^0|$$

注

构造满足定理条件的等价形式一般难于做到。要构造收敛迭代格式有两个要素：

- 等价形式
- 初值选取

例

代数方程$x^3-2x-5=0$。

1. $x=\sqrt[3]{2x+5}$, $\varphi'(x)=\frac{1}{3}\frac{1}{(2x+5)^{\frac{2}{3}}}$, 迭代格式$x^{k+1}=\sqrt[3]{2x^k+5}$
2. $x=\frac{x^3-5}{2}$, $\varphi'(x)=\frac{3x^2}{2}$, 迭代格式$x^{k+1}=\frac{(x^k)^3-5}{2}$
3. $x=\frac{2x+5}{x^2}$, $\varphi'(x)=-\frac{2(5+x)}{x^3}$, 迭代格式$x^{k+1}=\frac{2x^k+5}{x_k^2}$

中国科学技术大学

例

计算下列函数的不动点

$$f(x) = 4 + \frac{1}{3}\sin(2x)$$

由中值定理，我们有

$$|f(x)-f(y)| = \frac{1}{3}|\sin(2x)-\sin(2y)| = \frac{2}{3}|\cos(2\xi)||x-y|, \quad \xi \in (a,b)$$

取初值$x = 4$,执行20次迭代.

x=4, M=20

for k=1,M

$x = 4 + \frac{1}{3}\sin(2x)$

例

1	4.3297861
2	4.2308951
3	4.2736338
⋮	⋮
14	4.2614830
15	4.2614840
16	4.2614836
⋮	⋮
20	4.2614837

Newton迭代法

将$f(x)$在初值处作Taylor展开

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) + \frac{f''(x^0)}{2}(x - x^0)^2 + \cdots$$

当x与x^0很接近，取线性部分作为$f(x)$的近似，有

$$f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) \approx 0$$

若$f'(x^0) \neq 0$,则有

$$x = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$$

可以归纳定义迭代格式为

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

Newton迭代的等价方程为：

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

因此有

$$\varphi'(x)=\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

- 若$f(x)$在$x=a$处为单根，则

$$f(a)=0,\ f'(a)\neq 0$$

故有$\varphi'(a)=0$. 所以，迭代格式收敛.

收敛速度

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} - a &= \varphi(x^n) - \varphi(a) \\
&= (x^n - a)\varphi'(a) + \frac{(x^n - a)^2}{2}\varphi''(\xi_n) \\
&= \frac{(x^n - a)^2}{2}\varphi''(\xi_n) \\
&\approx \frac{(x^n - a)^2}{2}\varphi''(a)
\end{aligned}
$$

Newton迭代是二阶迭代方法。

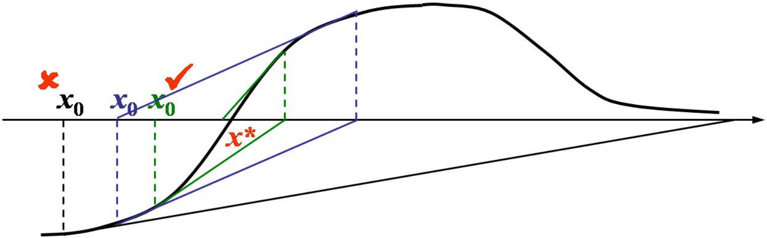
用Newton迭代法求方程$e^x - 1.5 - \arctan x = 0$的负零点。取初值$x^0 = -7$.

解：$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2+1}$, Newton迭代格式为

$$x^{n+1} = x^n - \frac{e^{x^n} - 1.5 - \arctan(x^n)}{e^{x^n} - \frac{1}{(x^n)^2+1}}$$

n	x	$f(x)$
0	-7.0	-0.702×10^{-1}
1	-10.67709617664001399296984386	-0.226×10^{-1}
2	-13.27916737563271290859786319	-0.437×10^{-2}
3	-14.05365585426923873474831753	-0.239×10^{-3}
4	-14.10110995686641347616312706	-0.800×10^{-6}
5	-14.10126977093941594621579506	-0.901×10^{-11}
6	-14.10126977273996842508300314	-0.114×10^{-20}
7	-14.10126977273996842531155122	0.000

- Newton迭代格式的一般仅应用于求解方程的实系数方程的实根
- Newton迭代格式的收敛速度快，格式简单，应用广泛
- Newton迭代格式的收敛性依赖于初值x^0的选取。



弦截法

- Newton法的一个缺点是它需要求零点的函数导数。
- 将Newton迭代中的导数，用差商代替

$$f'(x^n) = \frac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}$$

- 由此得到弦截法

$$x^{n+1} = x^n - f(x^n)\frac{x^n - x^{n-1}}{f(x^n) - f(x^{n-1})}$$

- 弦截法是2步格式。收敛速度比Newton迭代慢，收敛阶为$1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$。

非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

写成向量形式

$$F(\boldsymbol{x}) = 0$$

这里，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$F(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))^T$.

直接推广Newton迭代为：

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (J(\mathbf{x}^k))^{-1} F(\mathbf{x}^k)$$

这里

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

实际中，用解方程组的形式

$$J(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = F(\mathbf{x}_k).$$

在$\mathbf{x}$的邻域中，若$\|J(\mathbf{x})\|_\infty \le L < 1$，而初始值充分接近于解，则迭代收敛。

上机作业

- 分别编写用Newton迭代和弦截法求根的通用程序
- 用如上程序计算下述函数的根

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x = 0$$

取初值x_0为0.1,0.2,0.9,9.0.

- 输出形式如下：

x_0	迭代次数	数值结果	数值误差

- 简单分析你得到的数据

UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY OF CHINA
中国科学技术大学