邓建松

2018年11月28日

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

letteren bereit

带原点位移的QR总

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR选

- 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题
- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限 次代数运算求得

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用 上Hessenberg

带原点位移的QR迭位

- 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题
- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限次代数运算求得
- 所以矩阵特征值的计算方法本质上都是迭代的

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

汉帝位

QR方法

基本迭代和收敛性

上Hessenberg化 带原点位移的QR选代 双重步位移的QR选代

- 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题
- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限 次代数运算求得
- 所以矩阵特征值的计算方法本质上都是迭代的
- 已有不少非常成熟的数值方法计算矩阵的全部 或部分特征值和特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选作 双重步位移的QR选作

- 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多 项式的根的问题
- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限 次代数运算求得
- 所以矩阵特征值的计算方法本质上都是迭代的
- 已有不少非常成熟的数值方法计算矩阵的全部 或部分特征值和特征向量
- 本节只是介绍几种最常用的基本方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

rs-hondrat

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 复数 λ 称为A的一个特征值是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

are the Section of the Section

实Schur标准用

带原点位移的QR

双重步位移的QR选

- 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 复数 λ 称为A的一个<mark>特征值</mark>是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$
- 此时x称做A的属于λ的一个特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

art of the Anatomical A

实Schur标准用

带原点位移的QR选

市原点包移的QK达1

- 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 复数 λ 称为A的一个<mark>特征值</mark>是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$
- 此时x称做A的属于λ的一个特征向量
- λ 是A的一个特征向量当且仅当 $det(\lambda I A) = 0$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛 实Schur标准形

带原点位移的QR迭值

- 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 复数 λ 称为A的一个<mark>特征值</mark>是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$
- 此时x称做A的属于λ的一个特征向量
- λ 是A的一个特征向量当且仅当 $det(\lambda I A) = 0$
- 多项式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I A)$ 称为A的特征多项式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

l-Hessenberg (

带原点位移的QR迭行

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

• $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

·=:>4-

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

- $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式
- 由代数基本定理知 $p_A(\lambda)$ 有n个根,即A有n个特征值

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

artistic for Annales At

实Schur标准用

带原点位移的QR选

THE PROPERTY LESS THE HILD SHEET WAS A

- $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式
- 由代数基本定理知 $p_A(\lambda)$ 有n个根,即A有n个特征值
- 记A的特征值全体为λ(A), 称之为A的谱集

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

其太洋和和防炎

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QI

和原点包移的QR达f 双重步位移的QR迭f

- $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式
- 由代数基本定理知 $p_A(\lambda)$ 有n个根,即A有n个特征值
- 记A的特征值全体为λ(A), 称之为A的谱集
- 假设 $p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda \lambda_j)^{n_j}$, 其 中 $n_1 + \dots + n_r = n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$, 则 称 n_i 为 λ_i 的代数重数, 而 称 $m_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ 为 λ_i 的几何重数

邓建松

基本概念与性质

夏汝

反幂法

OD-HW

基本迭代和收敛性

ラミ J CHUI (MYEE) IV

___Hessenberg1{

TRUSH TELEVISION OF THE PERSON OF THE PERSON

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 显然 $m_i \leq n_i$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

其太许和和收敛

实Schur标准用

Lat. 1 /6

双重步位移的QR洪

- 显然 $m_i \leq n_i$
- 如果 $n_i = 1$,则称 λ_i 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 λ_i 是A的一个重特征值

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

Tricascinoci 810

.

- 显然 $m_i \leq n_i$
- 如果 $n_i = 1$,则称 λ_i 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 λ_i 是A的一个重特征值
- 如果 $n_i = m_i$,则称 λ_i 为A的一个半单特征值

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . .

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 显然 $m_i \leq n_i$
- 如果 $n_i = 1$,则称 λ_i 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 λ_i 是A的一个重特征值
- 如果 $n_i = m_i$,则称 λ_i 为A的一个<mark>半单特征值</mark>
- 如果A的所有特征值都是半单的,则称A是<mark>非亏</mark> 损的

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 显然*m_i* ≤ *n_i*
- 如果 $n_i = 1$,则称 λ_i 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 λ_i 是A的一个重特征值
- 如果 $n_i = m_i$,则称 λ_i 为A的一个<mark>半单特征值</mark>
- 如果*A*的所有特征值都是半单的,则称*A*是<mark>非亏损的</mark>
- *A*是非亏损的当且仅当*A*有*n*个线性无关的特征 向量,即*A*是可对角化的

相似变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 若存在非奇异阵 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使 得 $B = XAX^{-1}$, 则称 $A \hookrightarrow B$ 是相似的,而上述变换称为<mark>相似变换</mark>

相似变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头5Chur你在:

带原占位移的QR法

带原点位移的QR选值

- 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 若存在非奇异阵 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使 得 $B = XAX^{-1}$, 则称A = B是相似的,而上述变换称为相似变换
- 若A与B相似,则它们有相同的特征值,而且x是A的一个特征向量当且仅当y = Xx是B的一个特征向量

相似变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 若存在非奇异阵 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使 得 $B = XAX^{-1}$, 则称 $A \hookrightarrow B$ 是相似的,而上述变换称为相似变换

- 若A与B相似,则它们有相同的特征值,而且x是A的一个特征向量当且仅当y = Xx是B的一个特征向量
- 矩阵特征值问题的基本思想:把给定矩阵相似 变换为易于计算特征值和特征向量的矩阵

Jordan分解定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

汉布(

OR #

基本迭代和收敛

失5CHUF例(性)

HERE IS DO AN AN AN AN AN

常原点包移的QK达代

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有r个互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, 其(代数)重数分别为 $n(\lambda_1), \ldots, n(\lambda_r)$,则存在 非奇异矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_r))$$

其中

$$J(\lambda_i) = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_i), \dots, J_{k_i}(\lambda_i)) \in \mathbb{C}^{n(\lambda_i) \times n(\lambda_i)}$$

Jordan块

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准先

市原品业协的QK达1

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

其中

$$n_1(\lambda_i) + \cdots + n_{k_i}(\lambda_i) = n(\lambda_i)$$

Schur分解定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR TO

基本迭代和收益

实**Schur**标准共

带原点位移的QR迭值

must de Pesto Abounde In

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,则存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$U^*AU=T$$

其中T是上三角阵。适当选取U可使T的对角元按任意指定的顺序排列

Schur分解定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR TO

基本迭代和收益

实Schur标准开

带原点位移的QR迭位

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,则存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$U^*AU = T$$

其中T是上三角阵。适当选取U可使T的对角元按任意指定的顺序排列

● 特征值问题求解的QR方法就是基于这一定理而设计的

Gerschgorin圆盘定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

世間よけ来からな

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 设
$$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$$
, 令

$$G_i(A) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

则有

$$\lambda(A) = \bigcup_{j=1}^n G_j(A)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

THE PROPERTY AND PROPERTY OF THE PROPERTY OF T

双重步位移的QR选

隐式QR算法

● 设 λ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD±V

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

The second Lab Lab Hard Market

双重步位移的QR迭

- $\forall \lambda$ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

OR TO

基本迭代和收敛

实Schur标准开

HERE JE PERMANANA

市原思证参的QK达1

- 设 λ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解
- 显然x是前面所定义的相应于λ的特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本选代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带层点位移的QR选代 双重步位移的QR选代

- 设 λ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解
- 显然x是前面所定义的相应于λ的特征向量
- 我们称x是相应于λ的右特征向量;而y是相应 于λ的左特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 隐式QR算法

- 设 λ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解
- 显然x是前面所定义的相应于λ的特征向量
- 我们称x是相应于 λ 的<mark>右特征向量</mark>;而y是相应于 λ 的左特征向量
- y是矩阵 A^T 相应于 λ 的右特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

THE RESERVE AS A SECOND

双里步位移的QR发

• 设 x_i 是A对应于特征值 λ_i 的右特征向量, y_i 是A对应于特征值 λ_i 的左特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

基本迭代和收益

实Schur标准开

Tricocupe 810

带原点位移的QR选值

- 设 x_i 是A对应于特征值 λ_i 的右特征向量, y_i 是A对应于特征值 λ_i 的左特征向量
- 若 $\lambda_i \neq \lambda_j$,则必有 $y_j^T x_i = 0$. 注意:即使是在复数域上进行运算,这里也只是进行矩阵转置,没有共轭(对于非零复向量x,可能有 $x^T x = 0$)

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方》

基本这代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR运代 双重步位移的QR运代 隐式QR算法

- 设 x_i 是A对应于特征值 λ_i 的右特征向量, y_i 是A对应于特征值 λ_i 的左特征向量
- 若 $\lambda_i \neq \lambda_j$,则必有 $y_j^T x_i = 0$. 注意:即使是在复数域上进行运算,这里也只是进行矩阵转置,没有共轭(对于非零复向量x,可能有 $x^T x = 0$)
- 实际上,在 $Ax_i = \lambda_i x_i$ 上左乘 y_j^T ; $Extit{T} = \lambda_i y_j^T$ 上右乘 x_i ,然后两式相减,即得 $(\lambda_i - \lambda_i) y_i^T x_i = 0$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

00-20

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 帝原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 隐式QR算法

- 设 x_i 是A对应于特征值 λ_i 的右特征向量, y_i 是A对应于特征值 λ_i 的左特征向量
- 若 $\lambda_i \neq \lambda_j$,则必有 $y_j^T x_i = 0$. 注意:即使是在复数域上进行运算,这里也只是进行矩阵转置,没有共轭(对于非零复向量x,可能有 $x^T x = 0$)
- 实际上,在 $Ax_i = \lambda_i x_i$ 上左乘 y_j^T ; $Ext{c}_{j}^T A = \lambda_j y_j^T$ 上右乘 x_i , 然后两式相减,即得

$$(\lambda_i - \lambda_j) y_j^T x_i = 0$$



多项式的友阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

THE RESERVE TO SERVE AND ADDRESS.

隐式QR算法

• 给定首一n次多项式

$$p(x) = x^{n} + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_{1}x + p_{0}$$

多项式的友阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛

55.3CHUI/柳/HE/I

上Hessenberg(

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

● 给定首一n次多项式

$$p(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1x + p_0$$

• 容易验证矩阵

$$C = \left(\begin{array}{ccccc} -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -p_1 & -p_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

的特征多项式就是p(x)

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准开

上Hessenberg化

双里步位移的QR达

隐式QR算法

● *C*称为*p*(*x*)的**友阵**

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂 沿

QR方法

基本达代和収敛:

实Schur标准并

上Hessenberg代

THE RESERVE AND ADDRESS OF THE

- *C*称为*p*(*x*)的<mark>友阵</mark>
- 那么C的Jordan标准型是什么?

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OB÷:

基本迭代和收益

实Schur标准用

±Hessenberg#

带原点位移的QR选

- C称为p(x)的友阵
- 那么C的Jordan标准型是什么?
- 或者问: 当矩阵A的特征多项式是p(x)时,何时A与C是相似的?

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希法

OR方)

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 晚式OR意注

- *C*称为*p*(*x*)的<u>友阵</u>
- 那么C的Jordan标准型是什么?
- 或者问: 当矩阵A的特征多项式是p(x)时,何时A与C是相似的?
- 结论: 若对应于不同特征值只有一个Jordan块,或者说只有一个特征向量时,矩阵A相似于C(参考: J.H. Wilkinson的著作【代数特征值问题】)

特征值和特值向量敏感性分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

基本迭代和收金

实Schur标准进

带原点位移的QR迭值

隐式QR算法

从数值计算的角度来看,我们应首先弄清要计算的特征值和特征向量是否是病态的,即矩阵元素的小变化,是否会引起所关心的特征值和特征向量的巨大变化

特征值和特值向量敏感性分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方:

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭 从数值计算的角度来看,我们应首先弄清要计算的特征值和特征向量是否是病态的,即矩阵元素的小变化,是否会引起所关心的特征值和特征向量的巨大变化

• 对一般矩阵而言,这一问题非常复杂

特征值和特值向量敏感性分析

非对称特征值问题计 复方法

基本概念与性质

- 从数值计算的角度来看,我们应首先弄清要计 算的特征值和特征向量是否是病态的, 即矩阵 元素的小变化, 是否会引起所关心的特征值和 特征向量的巨大变化
- 对一般矩阵而言,这一问题非常复杂
- 我们这里只介绍一个简单而又非常重要的结果

邓建松

基本概念与性质

氯注

反幂法

基本许和知识价格

实Schur标准用

and the court of the second

双重步位移的OR铁值

隐式QR算法

• 假设 λ 是A的一个单特征值,x是相应的特征向量,而且 $\|x\|_2 = 1$

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

- 假设 λ 是A的一个单特征值,x是相应的特征向量,而且 $\|x\|_2 = 1$
- $\diamondsuit U = (x, U_2) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是酉阵,则我们有

$$U^*AU = \left(\begin{array}{cc} \lambda & x^*AU_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right)$$

基本概念与性质

- 假设 λ 是A的一个单特征值, x是相应的特征向 量,而且 $||x||_2 = 1$
- $\diamondsuit U = (x, U_2) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是酉阵,则我们有

$$U^*AU = \left(\begin{array}{cc} \lambda & x^*AU_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right)$$

由于λ是A的单特征值,所以

$$\delta = \min_{\mu \in \lambda(A_2)} |\lambda - \mu| > 0$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛性

空C-bus 伝維形

l-Hessenhera (r

带原点位移的QR选作

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I - A_2)^{-1}U_2^*$

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

L'Hessenberg (

TRUSH TELEPRITORIAL

双重步位移的QR选

- 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I A_2)^{-1}U_2^*$
- 取y为A的属于 λ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$)

邓建松

基本概念与性质

宣社

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

letteres beaut

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭代

- 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I A_2)^{-1}U_2^*$
- 取y为A的属于 λ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$)
- 由于 λ 是单特征值,所以 $y^T x \neq 0$. (为什么?) 从而可以取y使得 $y^T x = 1$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

今らCHUFを外出力

带原点位移的QR选

市原思业协的QK达1

- 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I A_2)^{-1}U_2^*$
- 取y为A的属于 λ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$)
- 由于 λ 是单特征值,所以 $y^Tx \neq 0$. (为什么?) 从而可以取y使得 $y^Tx = 1$
 - 利用Jordan标准形考虑特征向量的形式

邓建松

基本概念与性质

幂沒

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带限点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I A_2)^{-1}U_2^*$
- 取y为A的属于 λ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$)
- 由于 λ 是单特征值,所以 $y^Tx \neq 0$. (为什么?) 从而可以取y使得 $y^Tx = 1$
 - 利用Jordan标准形考虑特征向量的形式
- 给矩阵A以微小的扰动使其变为 \tilde{A} , 记 $\varepsilon = \|\tilde{A} A\|_2$, 则存在 \tilde{A} 的一个特征值 $\tilde{\lambda}$ 和对应的特征向量 \tilde{x} , 使得(证明略)

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \leqslant ||y||_2 \varepsilon + O(\varepsilon^2), ||\tilde{x} - x||_2 \leqslant ||\Sigma^{\perp}||_2 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

条件数

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

OP #

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

.

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 上式表明 λ 和x的敏感性分别与 $||y||_2$ 和 $||Σ^{\perp}||_2$ 的 大小有关

条件数

非对称特征值问题计 复方法

基本概念与性质

- 上式表明 λ 和x的敏感性分别与 $\|y\|_2$ 和 $\|\Sigma^{\perp}\|_2$ 的 大小有关
- 我们分别称 $\|y\|_{2}$ 和 $\|\Sigma^{\perp}\|_{2}$ 为特征值 λ 和特征向 量x的条件数. 记做

$$\operatorname{cond}(\lambda) = \|y\|_2, \quad \operatorname{cond}(x) = \|\Sigma^{\perp}\|_2$$

幂法:初步假设

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

__ ,,,

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

可能此份移動內配

双里步位移的QK以

幂法是计算矩阵模最大特征值和对应特征向量的一种迭代方法

幂法:初步假设

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

#順古拉黎的OD#

带原点位移的QR迭f

隐式OR算法

● 幂法是计算矩阵模最大特征值和对应特征向量 的一种迭代方法

• 为了说明基本想法,我们先假定 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 可对 角化,即A有如下分解

$$A = X\Lambda X^{-1}$$

其中
$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$
 非奇异

幂法:初步假设

非对称特征值问题计 算方法

小连位

基本概念与性质

幂法

反幂法

0 D -> >4

其太许和知此处

实Schur标准)

带原点位移的QR选

双重集位移的AD进程

隐式QR算法

● 幂法是计算矩阵模最大特征值和对应特征向量 的一种迭代方法

• 为了说明基本想法,我们先假定 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 可对 角化,即A有如下分解

$$A = X\Lambda X^{-1}$$

其中
$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ 非奇异}$$

• 再假定 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$

开始迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

0 D ->->

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

THE PROPERTY LESS THE HILD SHEET WAS A

双里步位移的QR达1

隐式QR算法

• 任取一向量 $u_0 \in \mathbb{C}^n$

开始迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准并

T. ressemberg 10

双重步位移的OR法

- 任取一向量 $u_0 \in \mathbb{C}^n$
- 由于X的列向量构成ℂ"的一组基,所以有

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

开始迭代

非对称特征值问题计

• 任取一向量 $u_0 \in \mathbb{C}^n$

由于X的列向量构成 \mathbb{C}^n 的一组基,所以有

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

• 从而我们有

$$A^{k} u_{0} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j} A^{k} x_{j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j} \lambda_{j}^{k} x_{j}$$
$$= \lambda_{1}^{k} \left(\alpha_{1} x_{1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{j} \left(\frac{\lambda_{j}}{\lambda_{1}} \right)^{k} x_{j} \right)$$

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛性

头Schur标准用

上Hessenberg(

TRUSH MATEURS BY QUALA

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

• 由此即知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^ku_0}{\lambda_1^k}=\alpha_1x_1$$

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 由此即知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^ku_0}{\lambda_1^k}=\alpha_1x_1$$

• 这表明当 $\alpha_1 \neq 0$ 且k充分大时,向 量 $u_k = A^k u_0/\lambda_1^k$ 就是A的一个很好的近似特征向 量

实际应用的难处

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反复対

基本法代和协会

实Schur标准形

tar i .

带原点位移的QR设

双重步位移的QR迭f

隐式QR算法

• 我们事先并不知道A的特征值 λ_1

实际应用的难处

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本法律和协会

实Schur标准用

带原点位移的QR迭位

- 我们事先并不知道A的特征值 λ_1
- 对充分大的k, A^k 的计算工作量太大

实际应用的难处

非对称特征值问题计 复方法

幂法

- 我们事先并不知道A的特征值λ₁
- 对充分大的k. A^k 的计算工作量太大
- 因此直接应用上式计算A的近似特征值 有困难

变通

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR设

隐式QR算法

• 在上式中 λ_1^k 只是改变向量的长度,但不改方向,因此我们不必用 λ_1^k 约化 $A^k u_0$

变通

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

其太许伊到收益

实Schur标准用

3,444,111,111,111

带原点位移的QR选

THE SECTION OF THE SE

- 在上式中 λ_1^k 只是改变向量的长度,但不改方向,因此我们不必用 λ_1^k 约化 $A^k u_0$
- 但这种约化也是必要的,以防止溢出

变通

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带跟点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 在上式中 λ_1^k 只是改变向量的长度,但不改方向,因此我们不必用 λ_1^k 约化 $A^k u_0$
- 但这种约化也是必要的,以防止溢出
- 在计算 $A^k u_0$ 时也不必先算出 A^k ,只需迭代地进行就可以了

幂法的迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OP #

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

带原点位移的QR选位

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$; $k \leftarrow 1$

幂法的迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂没

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$; $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$

幂法的迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准并

市原点位移的QR设

双重步位移的QR选

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$; $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$
- $\mu_k = \zeta_i^{(k)}, \zeta_i^{(k)}$ 是 y_k 的模最大分量

幂法的迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂 污

QIVIIA

基本迈1(和収取1

bu----

00 O D

隐式QR算法

• 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$; $k \leftarrow 1$

$$y_k = Au_{k-1}$$

•
$$\mu_k = \zeta_j^{(k)}$$
, $\zeta_j^{(k)}$ 是 y_k 的模最大分量

•
$$u_k = y_k/\mu_k$$

幂法的迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

4.00

ar-man vimax

...

____Hessenberg

THERMILLERINGING

双重步位移的QF

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$; $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$
- $\mu_k = \zeta_j^{(k)}$, $\zeta_j^{(k)}$ 是 y_k 的模最大分量
- $u_k = y_k/\mu_k$
- k ← k + 1, 返回第二步

幂法的迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QKJIIZ

基本迭代和收敛性

.

上Hessenberg

市原思证参的QK达1

.....

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$; $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$
- $\mu_k = \zeta_j^{(k)}$, $\zeta_j^{(k)}$ 是 y_k 的模最大分量
- $u_k = y_k/\mu_k$
- k ← k + 1, 返回第二步
- 这一迭代方法称做幂法

幂法的收敛性定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反氯油

QR方法

基本迭代和收敛性

Section (Market)

带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

定理

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有r个互不相同的特征值,且满 $\mathbb{E}|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_r|$,而且 λ_1 是半单的。如果初 始向量 u_0 在 λ_1 的特征子空间上的投影不为零,则由 幂法产生的向量序列 $\{u_k\}$ 收敛到 λ_1 的一个特征向量 x_1 (极限平行于 x_0 在特征子空间上投影向量),而 且 $\{\mu_k\}$ 收敛到 λ_1

收敛定理的证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方

基本迭代和收敛

实Schur标准是

带原点位移的QR法

THE PROPERTY LEGISLATION OF LOCAL

隐式QR算法

• 根据假设,A的Jordan分解为

$$A = X \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_r) X^{-1}$$

其中 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 非奇异, J_i 是由属于 λ_i 的Jordan块构成的上三角阵, $n_1 + \cdots + n_r = n$. 由于 λ_1 是 半单的,所以 $J_1 = \lambda_1 I_n$

收敛定理的证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方

基本迭代和收敛

头Schur标准:

....

市原思证参的QK运售

隐式QR算法

• 根据假设,A的Jordan分解为

$$A = X \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_r) X^{-1}$$

其中 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 非奇异, J_i 是由属于 λ_i 的Jordan块构成的上三角阵, $n_1 + \cdots + n_r = n$. 由于 λ_1 是 半单的,所以 $J_1 = \lambda_1 I_{n_1}$

$$y = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_{n_r}^T)^T,$$

 $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$

其中 y_i^T 有 n_i 个元素, X_i 有 n_i 列

反幂法

QR方法

5¢5cmi ymg/g

無関連が移動の配

隐式QR算法

• 从而我们有

$$A^{k}u_{0} = X \operatorname{diag}(J_{1}^{k}, \dots, J_{r}^{k})X^{-1}u_{0}$$

$$= X_{1}J_{1}^{k}y_{1} + X_{2}J_{2}^{k}y_{2} + \dots + X_{r}J_{r}^{k}y_{r}$$

$$= \lambda_{1}^{k}X_{1}y_{1} + X_{2}J_{2}^{k}y_{2} + \dots + X_{r}J_{r}^{k}y_{r}$$

$$= \lambda_{1}^{k}\left(X_{1}y_{1} + \sum_{j=2}^{r}X_{j}\left(\frac{J_{j}}{\lambda_{1}}\right)^{k}y_{j}\right)$$

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

∴Hessenberg1₹

双重步位移的QR迭位

隐式QR算法

• 注意到 $\lambda_1^{-1}J_i$ 的谱半径为 $\rho(\lambda_1^{-1}J_i)=$ $|\lambda_i|/|\lambda_1|<1,\ i=2,\ldots,r,$ 所以我们有 $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^k}A^ku_0=X_1y_1$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

The second Lab Lab Hard Market

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 注意到 $\lambda_1^{-1}J_i$ 的谱半径为 $\rho(\lambda_1^{-1}J_i)=$ $|\lambda_i|/|\lambda_1|<1,\ i=2,\ldots,r,$ 所以我们有 $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^k}A^ku_0=X_1y_1$

• 根据假设(u_0 在 λ_1 的特征子空间上的投影不为 零),我们有 $X_1y_1 \neq 0$

邓建松

基本概念与性质

复注

反希法

QR万法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 注意到 $\lambda_1^{-1}J_i$ 的谱半径为 $\rho(\lambda_1^{-1}J_i) = |\lambda_i|/|\lambda_1| < 1, i = 2, ..., r$,所以我们有 $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\lambda_i^k} A^k u_0 = X_1 y_1$

- 根据假设(u_0 在 λ_1 的特征子空间上的投影不为 零),我们有 $X_1y_1 \neq 0$
 - $y = X^{-1}u_0 \Rightarrow u_0 = Xy$, 所以 y_1 即 为 u_0 在 λ_1 的特征子空间上的组合系数,基 向量就是 X_1 中各列向量,从而 X_1y_1 就 是 u_0 在这个特征子空间中的投影向量



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准开

上Hessenberg化

隐式QR算法

• 由幂法产生的 $\{u_k\}$ 满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

汉布法

QIV)JYZ

失SCHUFFMEA

Triessembergio

双重指位移的OR法

隐式QR算法

● 由幂法产生的{*u_k*}满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

• $\|u_k\|_{\infty} = 1$, 即 u_k 至少有一个分量为1, 所以 $\zeta_k = \mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1$ 必为 $A^k u_0$ 的一个模最大分量

• 由幂法产生的 $\{u_k\}$ 满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

- $||u_k||_{\infty} = 1$, $||u_k||_{$ 以 $\zeta_k = \mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1$ 必为 $A^k u_0$ 的一个模最大分 量
- 从而 ζ_k/λ_1^k 就是 $A^k u_0/\lambda_1^k$ 的一个模最大分量

● 由幂法产生的{uょ}满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

- $||u_k||_{\infty} = 1$, $||u_k||_{$ 以 $\zeta_k = \mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1$ 必为 $A^k u_n$ 的一个模最大分 量
- 从而 ζ_k/λ_1^k 就是 $A^k u_0/\lambda_1^k$ 的一个模最大分量
- 这样由前述极限等式我们知下述极限存在:

$$\zeta = \lim_{k \to \infty} \frac{\zeta_k}{\lambda_1^k}$$

实Schur标准用

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 这样我们就有

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0}{\zeta_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0 / \lambda_1^k}{\zeta_k / \lambda_1^k} = \frac{X_1 y_1}{\zeta} = x_1$$

幂法

• 这样我们就有

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0}{\zeta_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0 / \lambda_1^k}{\zeta_k / \lambda_1^k} = \frac{X_1 y_1}{\zeta} = x_1$$

• 由于 $\tilde{y} = (y_1^T, 0, ..., 0)^T$ 是diag $(J_1, ..., J_r)$ 相应 于 λ_1 的特征向量,所以 $X_1y_1 = X\tilde{y}$ 是A相应 于 λ_1 的特征向量,这就说明 x_1 是属于 λ_1 的一个 特征向量

幂法

这样我们就有

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0}{\zeta_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0 / \lambda_1^k}{\zeta_k / \lambda_1^k} = \frac{X_1 y_1}{\zeta} = x_1$$

- 由于 $\tilde{y} = (y_1^T, 0, ..., 0)^T$ 是diag $(J_1, ..., J_r)$ 相应 于 λ_1 的特征向量,所以 $X_1y_1 = X\tilde{y}$ 是A相应 于 λ_1 的特征向量,这就说明 x_1 是属于 λ_1 的一个 特征向量
- 由 $Au_{k-1} = \mu_k u_k, x_1 \neq 0$ 可知 $\mu_k \rightarrow \lambda_1$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

双重步位移的OR铁

隐式QR算法

若定理条件不满足,则由幂法产生的序列的收 敛性分析变得非常复杂

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上.Hessenberg代

带原点位移的QR迭位

- 若定理条件不满足,则由幂法产生的序列的收 敛性分析变得非常复杂
- 这时{*u_k*}可能有若干个收敛于不同向量的子列

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

汉 存法

QR力法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

恭順占位務的OR法

- 若定理条件不满足,则由幂法产生的序列的收 敛性分析变得非常复杂
- 这时{u_k}可能有若干个收敛于不同向量的子列
- \emptyset : $A = XDX^{-1}$, D = diag(3, 2, 1, -3),

$$X = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . .

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原占位移的OR设

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 幂法的收敛速度主要取决于 $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ 的大小

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg化

双重步位移的OR法

- 幂法的收敛速度主要取决于|λ₂|/|λ₁|的大小
- 这个数总是小于1的,它越小收敛也就越快

非对称特征值问题计 算方法

/中年14

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收金

实Schur标准形

带原占位移的QR铁

带原点位移的QR迭位

- 幂法的收敛速度主要取决于|λ₂|/|λ₁|的大小
- 这个数总是小于1的,它越小收敛也就越快
- 为了加快收敛,我们可以采用位移的方法,即 对 $A \mu I$ 应用幂法,这里选取恰当的 μ , 使 $A \mu I$ 的模最大特征值与其它特征值之模的 距离更大

非对称特征值问题计 复方法

幂法

- 幂法的收敛速度主要取决于|λ₂|/|λ₁|的大小
- 这个数总是小于1的,它越小收敛也就越快
- 为了加快收敛,我们可以采用位移的方法,即 $\forall A - \mu I$ 应用幂法,这里选取恰当的 μ , 距离更大
- 对前例可取 $\mu = 3$,从而收敛到-3对应的特征向 量

求模第二大的特征值和对应特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

万 渠 注

OD-

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化 类質点放致的OP器

双重步位移的QR选作

隐式QR算法

为了求模第二大的特征值和对应的特征向量, 那么直接迭代是不行的

求模第二大的特征值和对应特征向量

非对称特征值问题计 算方法

其太概今与州县

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收益

- Hessenberg

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选

- 为了求模第二大的特征值和对应的特征向量, 那么直接迭代是不行的
- 需要对原矩阵进行降阶:即在知道了 λ_1 和 x_1 的前提下,把矩阵降低一阶,使它只包含A的特征值 $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,这一方法通常称为收缩技巧

求模第二大的特征值和对应特 征向量

非对称特征值问题计 复方法

• 为了求模第二大的特征值和对应的特征向量, 那么直接迭代是不行的

- 需要对原矩阵进行降阶: 即在知道了 λ_1 和 x_1 的 前提下,把矩阵降低一阶,使它只包含A的特 征值 $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 这一方法通常称为收缩技巧
- 最简单实用的收缩技巧是利用正交变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OP #

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

THE PROPERTY IN THE PROPERTY OF THE PROPERTY IN THE PROPERTY I

双重步位移的QR迭f

隐式QR算法

• 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

基本迭代和收益

实Schur标准用

上Hessenberg化

- 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$
- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$ (可用Householder变换实现)

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

其大连种和协

实Schur标准是

letteres been

带原点位移的QR选

- 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$
- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$ (可用Householder变换实现)
- 从而 $PAx_1 = \lambda_1 Px_1 = \lambda_1 \alpha e_1$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂 污

OD-

基本法代和政分科

实Schur标准用

带原点位移的QR选

带原点位移的QR迭件

隐式QR算法

• 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$

- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$ (可用Householder变换实现)
- 从而 $PAx_1 = \lambda_1 Px_1 = \lambda_1 \alpha e_1$
- 而 $x_1 = \alpha P^* e_1$,所以 $PAP^* e_1 = \lambda_1 e_1$,即

$$PAP^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR迭f

THE SECTION OF THE PROPERTY OF

隐式QR算法

• 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$

- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$ (可用Householder变换实现)
- 从而 $PAx_1 = \lambda_1 Px_1 = \lambda_1 \alpha e_1$
- 而 $x_1 = \alpha P^* e_1$,所以 $PAP^* e_1 = \lambda_1 e_1$,即

$$PAP^* = \left(egin{array}{cc} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{array}
ight)$$

• n-1阶矩阵 B_1 的特征值就是 $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,对其应用幂法即可

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

基本迭代和收敛

实Schur标准开

常原点包移的QK达1

隐式OR算法

幂法的计算严重依赖于矩阵特征值的分布情况,因此实际用起来很不方便,特别是不适用于自动计算

非对称特征值问题计 复方法

- 幂法的计算严重依赖于矩阵特征值的分布情 况, 因此实际用起来很不方便, 特别是不适用 于自动计算
- 当矩阵阶数非常高,无法利用其他更有效的算 法时才用幂法计算少数几个模最大的特征值和 相应的特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反复治

基本迭代和收敛

上Hessenberg化 带原点位移的QR选作 双重步位移的QR选作

双重步位移的QI 隐式QR算法

- 幂法的计算严重依赖于矩阵特征值的分布情况,因此实际用起来很不方便,特别是不适用于自动计算
- 当矩阵阶数非常高,无法利用其他更有效的算法时才用幂法计算少数几个模最大的特征值和相应的特征向量
- 基于幂法可以诱导出一些更有效的算法

反幂法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

__Hessenberg\columbia

双重步位移的QR铁

隐式QR算法

● 反幂法也称为反迭代法,它对A⁻¹应用幂法, 从而求出A的模最小特征值和对应的特征向量

反幂法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原占位移的OR法

带原点位移的QR迭代

- 反幂法也称为<mark>反迭代法</mark>,它对*A*⁻¹应用幂法, 从而求出*A*的模最小特征值和对应的特征向量
- 其基本格式为

$$Ay_k = z_{k-1},$$
 $\mu_k = \zeta_i, \ \zeta_i 是 y_k$ 的模最大分量
 $z_k = y_k/\mu_k$

迭代结果

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵対

反幂法

基本法律和协会

实Schur标准用

. . .

带原点位移的QRi

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 若A的特征值为 $|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \le \cdots \le |\lambda_1|$,则 $\{z_k\}$ 收敛到A的对应于 λ_n 的一个特征向量,而 $\{\mu_k\}$ 收敛于 λ_n^{-1}

迭代结果

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵対

反幂法

00-

基本评和到收益

头Schur你在

上Hessenberg

带原点位移的QR迭

隐式QR算法

• 收敛速度由 $|\lambda_n|/|\lambda_{n-1}|$ 的大小决定

应用场合

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 实际应用中,反幂法主要是用来求特征向量的,是在用某种方法求得A的某个特征值 λ_i 的近似值 $\tilde{\lambda}_i$ 之后,应用反幂法于 $A-\tilde{\lambda}_i$ I上

应用场合

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . .

其大许和知此幼

实Schur标准)

带原占位移的QR铁

带原点位移的QR迭代

- 实际应用中,反幂法主要是用来求特征向量的,是在用某种方法求得A的某个特征值 λ_i 的近似值 $\tilde{\lambda}_i$ 之后,应用反幂法于 $A-\tilde{\lambda}_i$ I上
- 即实际计算中常用的是带位移的反幂法,此时 迭代格式为:

$$(A - \mu I)v_k = z_{k-1},$$

$$z_k = v_k / ||v||_2$$

格式分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

可能此份移的內容

隐式QR算法

反幂法每迭代一次就需要解一个线性方程组, 这要比幂法的运算量大得多

格式分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希没

其太许和和收益

实Schur标准)

类简点位移的OD性。

带原点位移的QR选

- 反幂法每迭代一次就需要解一个线性方程组, 这要比幂法的运算量大得多
- 由于方程组的系数矩阵不随k的变化而变化, 所以可以事先对它进行列主元的LU分解,然后 每次迭代就只需要解两个三角形方程组即可

格式分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选行 双重步位移的QR选行 反幂法每迭代一次就需要解一个线性方程组, 这要比幂法的运算量大得多

- 由于方程组的系数矩阵不随k的变化而变化, 所以可以事先对它进行列主元的LU分解,然后 每次迭代就只需要解两个三角形方程组即可
- 这里采用||·||₂进行规范化,只是为了下面的分析方便。实际应用中完全可以采用||·||∞ 进行规范化

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

基本法代和收益

实Schur标准用

無層よ為教物の時

双重步位移的QR选作

隐式QR算法

• 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 - \mu|/|\lambda_2 - \mu|$ 的大小

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

.E.Hessenberg

市原思证检的QK还

双重步位移的QR迭位

- 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 \mu|/|\lambda_2 \mu|$ 的大小
- 从收敛速度的角度来看,μ取得越靠近A的某个 特征值越好

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

带原占位移的OR法

带原点位移的QR选

- 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 \mu|/|\lambda_2 \mu|$ 的大小
- 从收敛速度的角度来看, μ 取得越靠近A的某个特征值越好
- 但是当μ与A的某个特征值很靠近时,A μI就 与一个奇异矩阵很靠近,迭代时就需要求解一 个非常病态的方程组

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性

上Hessenberg化 带原点位移的QR选

带原点位移的QR选作 双重步位移的QR选作

- 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 \mu|/|\lambda_2 \mu|$ 的大小
- 从收敛速度的角度来看, μ 取得越靠近A的某个特征值越好
- 但是当μ与A的某个特征值很靠近时,A μI就 与一个奇异矩阵很靠近,迭代时就需要求解一 个非常病态的方程组
- 实际计算的经验和理论分析的结果表明:
 A μI的病态性并不影响其收敛速度,而且
 当μ与A的某个特征值很靠近时,常常只迭代一

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

L:Hessenberg (

带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 设 λ 是A的一个单特征值,x是属于 λ 的单位特征 向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

l-Hessenhere

THE SECTION OF THE SE

双面非位移的OP性

- 设 λ 是A的一个单特征值,x是属于 λ 的单位特征 向量
- 假定带位移的迭代格式中位移 μ 与 λ 十分靠近,且x是良态的,即cond(x)不太大

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

12 4-24 / D Zmille Al

实Schur标准用

带原点位移的QR选

隐式OR算法

- 设 λ 是A的一个单特征值,x是属于 λ 的单位特征 向量
- 假定带位移的迭代格式中位移 μ 与 λ 十分靠近,且x是良态的,即cond(x)不太大
 - 设(x, U₂)是酉阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

mar v. t.

反幂法

实Schur标准用

带原点位移的QR选

10 000 M E2 10 H 3 M 1 M 2 M 2 1 1

隐式QR算法

 设λ是A的一个单特征值,x是属于λ的单位特征 向量

- 假定带位移的迭代格式中位移 μ 与 λ 十分靠近,且x是良态的,即cond(x)不太大
 - 设(x, U₂)是酉阵
 - 由条件数的定义知

$$\operatorname{cond}(x) = \|U_2(\lambda I - A_2)^{-1} U_2^*\|_2$$
$$= \|(\lambda I - A_2)^{-1} U_2^*\|_2$$

其中
$$A_2 = U_2^* A U_2$$

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

其太连伊和协会

实Schur标准形

上Hessenberg化

114 7/14/2/2/ 122/13/ H 3 **4Q 1** 4/42/1

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 假定给定 z_0 之后,我们用列主元Gauss消去法求解迭代格式中的线性方程组 $(A - \mu I)v_1 = z_0$,得到计算解 \hat{v}_1

- 假定给定zo之后,我们用列主元Gauss消去法求 解迭代格式中的线性方程组 $(A - \mu I)v_1 = z_0$. 得 到计算解û
- 由Gauss消去法的误差分析知论满足

$$(A - \mu I - E)\hat{v}_1 = z_0$$

其中E与 $A - \mu I$ 和 z_0 有关,但 $\|E\|_2$ 有一致的上 界, 通常差不多就是机器精度

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛

头Schur标准形

带眉内拉轻的OP#2

隐式QR算法

• 记 $e = \hat{v}_1 - v_1 = (A - \mu I)^{-1} E \hat{v}_1$, 并将e分解为

$$e=x_1+x_2$$

其中 $x_1 \in \text{span}\{x\}, x_2 \in \text{span}\{x\}^{\perp}$,则存 在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $y \in \mathbb{C}^{n-1}$ 使得

$$x_1 = \alpha x$$
, $x_2 = U_2 y$

实Schur标准用

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭位

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 另一方面, 我们有

$$A - \mu I = (x, U_2) \begin{pmatrix} \lambda - \mu & x^* A U_2 \\ 0 & A_2 - \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ U_2^* \end{pmatrix}$$

b.11------

带原点位移的QR迭值

more than the thirth was made to

隐式QR算法

• 另一方面, 我们有

$$A - \mu I = (x, U_2) \begin{pmatrix} \lambda - \mu & x^* A U_2 \\ 0 & A_2 - \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ U_2^* \end{pmatrix}$$

因而

$$(A - \mu I)^{-1}$$

$$= (x, U_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - \mu} & \frac{-1}{\lambda - \mu} x^* A U_2 (A_2 - \mu I)^{-1} \\ 0 & (A_2 - \mu I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ U_2^* \end{pmatrix}$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛性

alec i destruction

Hossonborg (k

带原占位移的OR法化

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 注意到 $x^*xx^* = x^*$, $x^*U_2 = 0$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准形

上Hessenberg

从里少世级的QNAN

- 注意到*x*xx** = *x**, *x*U*₂ = 0
- 这样我们就有

$$(A - \mu I)^{-1} = \frac{xx^*}{\lambda - \mu} (I - AU_2(A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*)$$

$$+ U_2(A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*$$

$$\alpha = x^*e = x^*(A - \mu I)^{-1}E\hat{v}_1$$

$$= \frac{x^*}{\lambda - \mu} (I - AU_2(A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*)E\hat{v}_1$$

$$y = U_2^*e = U_2^*(A - \mu I)^{-1}E\hat{v}_1$$

$$= (A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*E\hat{v}_1$$

LHessenberg

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

• 注意到

$$(A_2 - \mu I)^{-1} = (I + (\lambda - \mu)(A_2 - \lambda I)^{-1})^{-1}(A_2 - \lambda I)^{-1}$$

实Schur标准形

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭代

隐式OR算法

• 注意到

$$(A_2 - \mu I)^{-1} = (I + (\lambda - \mu)(A_2 - \lambda I)^{-1})^{-1}(A_2 - \lambda I)^{-1}$$

所以当λ与μ很近时

$$s = \|(A_2 - \mu I)^{-1} U_2^*\|_2 \approx \|(A_2 - \lambda I)^{-1} U_2^*\|_2 = \operatorname{cond}(x)$$

基本概念与性

7/7/12

反幂?

QR方

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 注意到

$$(A_2 - \mu I)^{-1} = (I + (\lambda - \mu)(A_2 - \lambda I)^{-1})^{-1}(A_2 - \lambda I)^{-1}$$

所以当λ与μ很近时

$$s = \|(A_2 - \mu I)^{-1} U_2^*\|_2 \approx \|(A_2 - \lambda I)^{-1} U_2^*\|_2 = \operatorname{cond}(x)$$

● 因此当x良态时, s也不会太大, 于是

$$||x_2||_2 = ||y||_2 \leqslant s||E\hat{v}_1||_2$$

就是一个不太大的量

基本概念与性质

幂法

反幂法

OP #

基本迭代和收敛

实Schur标准形

T. riessemberg 16

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 另一方面,

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - |\mu|} (1 + ||A||_2 s) ||E\hat{v}_1||_2$$

却是一个很大的量

基本概念与性质

幂法

汉布法

QR方法

基本迭代和收敛

头 SCHUI **P**MEA

带原点位移的QRi

隐式QR算法

• 另一方面,

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - |\mu|} (1 + \|A\|_2 s) \|E\hat{v}_1\|_2$$
 却是一个很大的量

• 这就是说求解方程组所引起的误差主要对其解 在特征子空间span{x}上投影的长度有影响 邓建松

基本概念与性质

幂法

以 存法

QR万法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选作 • 另一方面,

$$|\alpha|\leqslant \frac{1}{|\lambda|-|\mu|}(1+\|A\|_2s)\|E\hat{v}_1\|_2$$
却是一个很大的量

- 这就是说求解方程组所引起的误差主要对其解 在特征子空间span{x}上投影的长度有影响
- 而这对于我们要计算λ的近似特征向量是十分 有利的

另一方面,

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - |\mu|} (1 + \|A\|_2 s) \|E\hat{v}_1\|_2$$
 却是一个很大的量

- 这就是说求解方程组所引起的误差主要对其解 在特征子空间span{x}上投影的长度有影响
- 而这对于我们要计算λ的近似特征向量是十分 有利的
- 因为我们关心的主要是所得向量的方向而不是 它的长度



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反复注

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

带原点位移的QR选值

隐式QR算法

上面的分析实质上也表明,当μ靠近λ且x良态时,只需应用一次反幂法就可得到λ的较好近似特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本读代和此幼

实Schur标准开

上Hessenberg

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭行

隐式QR算法

• 上面的分析实质上也表明,当 μ 靠 近 λ 且x良态时,只需应用一次反幂法 就可得到 λ 的较好近似特征向量

• 为此我们引进一些概念

达到机器精度

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 设机器精度为u

达到机器精度

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

带原点位移的QR设

双重非位移的AD社

隐式QR算法

- 设机器精度为u
- 对于给定的 $\mu \in \mathbb{C}$, 如果存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$\det(A+E-\mu I)=0, \|E\|_2=O(\mathbf{u})$$

我们称 μ 是A的一个达到机器精度的近似特征值

达到机器精度

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 设机器精度为u
- 对于给定的 $\mu \in \mathbb{C}$, 如果存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$\det(A+E-\mu I)=0, \|E\|_2=\mathit{O}(\mathbf{u})$$

我们称μ是A的一个达到机器精度的近似特征值

• 对于一个给定的 $x \in \mathbb{C}^n$, 如果存在 $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满 $\mathbb{E}\|F\|_2 = O(\mathbf{u})$, 使得 $x \in \mathbb{E}A + F$ 的特征向量,我们称 $x \in A$ 的一个达到机器精度的近似特征向量

两者的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本连种和协会

实Schur标准用

上Hessenberg化

THE PROPERTY LESS THE OWNER.

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 若 μ 是A的一个达到机器精度的近似特征值,则存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $\|E\|_2 = O(\mathbf{u})$ 使得 $(A + E - \mu I)y = 0$ 有非零解

两者的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR迭f

隐式QR算法

• 若 μ 是A的一个达到机器精度的近似特征值,则存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $\|E\|_2 = O(\mathbf{u})$ 使得 $(A + E - \mu I)y = 0$ 有非零解

• 设 $y \in \mathbb{C}^n$ 满足 $(A + E - \mu I)y = 0$, $||y||_2 = 1$, $||E||_2 = O(\mathbf{u})$, 则我们有

$$(A + E)y = \mu y$$

即y是A的一个达到机器精度的近似特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反复注

其太许和和协会

实Schur标准形

上Hessenberg化

The second case of the second

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 若我们在迭代格式中取 $z_0 = (A - \mu I)y$,那么在精确计算的前提下,只需迭代一次就可得到A的达到机器精度的特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性
实Schur标准形
上Hessenberg化
带原点位移的QR迭代
双重步位移的QR迭代

- 若我们在迭代格式中取 $z_0 = (A \mu I)y$,那么在精确计算的前提下,只需迭代一次就可得到A的达到机器精度的特征向量
- 在实际计算时我们无法按这种方式取初始向量,但这说明了在恰当选取初始向量之后,反 幂法具有"一次迭代"性

λ 病态时的情形

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收益

实Schur标准用

上Hessenberg化

.....

隐式QR算法

还需要指出的是,当λ比较病态时,利用反幂 法再进行迭代,一般不会得到更好的近似特征 向量

λ 病态时的情形

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

带原点位移的QR迭

THE RESERVE AND A STATE OF THE STATE OF THE

隐式QR算法

还需要指出的是,当λ比较病态时,利用反幂 法再进行迭代,一般不会得到更好的近似特征 向量

• 例

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 10^{-10} & 1 \end{array}\right)$$

其特征值 $\lambda_1 = 0.99999$, $\lambda_2 = 1.00001$, 对应的特征向量 $x_1 = (1, -10^{-5})^T$, $x_2 = (1, 10^{-5})^T$. 取 $\mu = 1$, $z_0 = (0, 1)^T$,两次迭代结果更差

初始向量的选取方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反复対

.....

基本法代和收益

实Schur标准形

带原占位移的QR的

双重步位移的QR选

隐式QR算法

利用随机数发生子程序随机地选取向量,规范 化后作为初始向量

初始向量的选取方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性实Schur标准形

上Hessenberg化 带原点位移的QR设

带原点位移的QR迭代

- 利用随机数发生子程序随机地选取向量,规范 化后作为初始向量
- 半次迭代法: 首先对 $A \mu I$ 进行LU分解,得到 $A \mu I = LU$,第一次迭代为 $LUv_1 = z_0$. 选 $z_0 = Le$,其中 $e = (1, ..., 1)^T$,则为了求 v_1 只需求解 $Uv_1 = e$

QR方法简介

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准用

带原占位移的OR法

市原思亚参约QK达1

隐式QR算法

QR方法是自计算机问世以来矩阵计算的重大进展之一,也是目前计算一般矩阵的全部特征值和特征向量的最有效方法之一

QR方法简介

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- QR方法是自计算机问世以来矩阵计算的重大进展之一,也是目前计算一般矩阵的全部特征值和特征向量的最有效方法之一
- QR方法是一种迭代方法,它利用正交相似变换 把矩阵逐步约化为上三角阵或者拟上三角阵

QR方法简介

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

夏沣

反复治

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 脆式QR算法

- QR方法是自计算机问世以来矩阵计算的重大进展之一,也是目前计算一般矩阵的全部特征值和特征向量的最有效方法之一
- QR方法是一种迭代方法,它利用正交相似变换 把矩阵逐步约化为上三角阵或者拟上三角阵
- 基本收敛速度是二次的。当原矩阵是实对称时, 可达到三次收敛

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准开

上Hessenberg化

双重步位移的QR铁

隐式QR算法

Metropolis Algorithm for Monte Carlo

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂 沿

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准用

上Hessenberg化

makik Patk Monak

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂污

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg

双重步位移的QR迭

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

25/4-JOT (414X)

头5Chur标(E)

带原点位移的QR选

双重事位我的AD进

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

QR方法

基本迭代和收

上Hessenberg化 带原点位移的QR选

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带限点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting
- Fast Fourier Transform

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting
- Fast Fourier Transform
- Integer Relation Detection



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本选代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting
- Fast Fourier Transform
- Integer Relation Detection
- Fast Multipole Method



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

隐式QR算法

• J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

带原点位移的QR选

常原点包移的QR达1

- J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世 纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解
- 经过几十年的发展,QR方法的现代版本称为隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法 ^{邓建松}

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本选代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带限点位移的QR选代 双重步位移的QR选代

- J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解
- 经过几十年的发展,QR方法的现代版本称为隐式QR算法
- 但在隐式QR算法中没有显式地进行QR分解, 因此有人建议称之为Francis算法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 隐式QR算法

- J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解
- 经过几十年的发展,QR方法的现代版本称为隐 式QR算法
- 但在隐式QR算法中没有显式地进行QR分解, 因此有人建议称之为Francis算法
- 在QR算法之前,曾出现过LR算法,它是基于LU分解的。LR算法是由H.
 Rutishauser在1950年代发展的

QR方法的基本迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

以布

QR月復

and the same

5c3CHur和AE)

带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 对给定的 $A_0 = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,QR方法的基本迭代格式如下:

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$
, $(A_{m-1}$ 的QR分解) $A_m = R_m Q_m$

这里 Q_m 为酉阵, R_m 为上三角阵

QR方法的基本迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

风希法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原占位移的OR铁

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

• 对给定的 $A_0 = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,QR方法的基本迭代格式如下:

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$
, $(A_{m-1}$ 的QR分解) $A_m = R_m Q_m$

这里 Q_m 为酉阵, R_m 为上三角阵

• 课本例6.4.1和其它两个例子的程序演示

QR方法的基本迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

带原点位移的QR迭

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

• 对给定的 $A_0 = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,QR方法的基本迭代格式如下:

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$
, $(A_{m-1}$ 的QR分解) $A_m = R_m Q_m$

这里 Q_m 为酉阵, R_m 为上三角阵

- 课本例6.4.1和其它两个例子的程序演示
- 为了下面理论分析方便,我们暂且要求R_m的对 角元都是非负的

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD-}:\

基本迭代和收敛

实Schur标准用

bu----

双重步位移的QR选值

隐式QR算法

• 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂犯

OD+V

基本迭代和收敛

实Schur标准用

to a contract of

带原点位移的QR选

- 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似
- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$,其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

带原占位移的QR法

常原点包移的QK达

- 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$, 所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似
- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$,其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

Seachur (Mark)

带原点位移的QR选

可能此份報的內容性個

隐式QR算法

• 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似

- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$,其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$
- 定义 $\tilde{R}_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1$, 我们有

$$\tilde{Q}_{m+1}\tilde{R}_{m+1}=A\tilde{Q}_{m}\tilde{R}_{m}$$

非对称特征值问题计 复方法

• 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$, 所以 矩阵序列{A_m}中每一个矩阵都与A相似

- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$. 其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$
- $\mathbb{I} A \tilde{Q}_m = \tilde{Q}_m A_m = \tilde{Q}_m Q_{m+1} R_{m+1}$
- 定义 $\tilde{R}_{k} = R_{k}R_{k-1} \cdots R_{1}$,我们有

$$\tilde{Q}_{m+1}\tilde{R}_{m+1}=A\tilde{Q}_{m}\tilde{R}_{m}$$

• 由此可归纳证明 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$. 这是 A^m 的QR分解



QR方法与幂法的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和収敛

实Schur标准用

T.nessemberg 10

可能此為我的內部

隐式QR算法

• 记 \tilde{R}_m 的元素为 γ_{ij} , \tilde{Q}_m 的第一列为 $q_1^{(m)}$, 则由 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 可得

$$A^m e_1 = \gamma_{11} q_1^{(m)}$$

QR方法与幂法的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

汉希汉

QR方泡

基本迭代和收敛性

.

L'Hessenberg

THE PROPERTY DESIGNATION OF LOCAL

双重步位移的QR

隐式QR算法

• 记 \tilde{R}_m 的元素为 γ_{ij} , \tilde{Q}_m 的第一列为 $q_1^{(m)}$, 则由 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 可得

$$A^m e_1 = \gamma_{11} q_1^{(m)}$$

• 所以 $q_1^{(m)}$ 可以看作是对A用 e_1 作初始向量的幂法 所得到的向量

QR方法与幂法的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选 双重步位移的QR选 • 记 \tilde{R}_m 的元素为 γ_{ij} , \tilde{Q}_m 的第一列为 $q_1^{(m)}$, 则由 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 可得

$$A^m e_1 = \gamma_{11} q_1^{(m)}$$

- 所以 $q_1^{(m)}$ 可以看作是对A用 e_1 作初始向量的幂法 所得到的向量
- 若A的模最大特征值 λ_1 与其他特征值分离,那么 $q_1^{(m)}$ 将收敛到A的一个属于 λ_1 的特征向量

Am下三角元素趋于0

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复対

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准)

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选

隐式QR算法

定理

设 $A ∈ \mathbb{C}^{n \times n}$ 的n个特征值满足

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_n|>0$$

并设n阶方阵Y的第i行是A对应于 λ_i 的左特征向量。如果Y有LU分解,则由QR方法产生的矩阵 A_m 的对角线以下的元素趋向于0,同时第i个对角元趋向于 λ_i , $i=1,2,\ldots,n$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

THE SELECTION AS A DOME.

隐式QR算法

● A可对角化,从而A^m也可对角化

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

古法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR迭值

- A可对角化,从而A^m也可对角化
- 基于条件,构造 A^m 的QR分解,其中各元素 在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

QR方

基本迭代和收敛性

头Schur标准用 上Hessenherm

带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR迭代

- A可对角化,从而A^m也可对角化
- 基于条件,构造 A^m 的QR分解,其中各元素 在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知
- 利用 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 和QR分解的唯一性得到 \tilde{Q}_m 和 \tilde{R}_m ,其在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方河

基本迭代和收敛性

实Schur标准形 上Hessenberg(

带原点位移的QR迭件 双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

● A可对角化,从而A^m也可对角化

- 基于条件,构造 A^m 的QR分解,其中各元素 在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知
- 利用 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 和QR分解的唯一性得到 \tilde{Q}_m 和 \tilde{R}_m ,其在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知
- 利用 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$ 可证 A_m 下三角元素趋向于零

定理证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

TO 14

反幂注

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

l-Hassanhara (

TRUSH TELEVISION OF THE

双重步位移的QR迭值

•
$$\diamondsuit X = Y^{-1}$$
, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 则有 $A = X \Lambda Y$

定理证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准)

上Hessenberg化

THE PROPERTY LEADING THE PROPERTY OF

双重步位移的QR迭

- $\diamondsuit X = Y^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 则有 $A = X \Lambda Y$
- 设Y的LU分解为Y = LU, 其中L是单位下三角阵,U是上三角阵

定理证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR #

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR法

市原点证例的QKIGT

- $\diamondsuit X = Y^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 则有 $A = X \Lambda Y$
- 设Y的LU分解为Y = LU, 其中L是单位下三角阵,U是上三角阵
- 从而我们有

$$A^{m} = X\Lambda^{m}Y = X\Lambda^{m}LU = X(\Lambda^{m}L\Lambda^{-m})\Lambda^{m}U$$
$$= X(I + E_{m})\Lambda^{m}U$$

构造Am的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

• 由于L是单位下三角阵,而 $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ (i > j), 所以有 $\lim_{m \to \infty} E_m = 0$

构造A^m的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂犯

OR #3

基本迭代和收敛

实Schur标准

类原内位移的OD类

带原点位移的QR选位

- 由于L是单位下三角阵,而 $|\lambda_i| < |\lambda_j| (i > j)$,所以有 $\lim_{m \to \infty} E_m = 0$
- $\diamond X$ 的QR分解为X = QR. 由于X非奇异,所以可要求R的对角元全是正数。这样我们有

$$A^{m} = QR(I + E_{m})\Lambda^{m}U = Q(I + RE_{m}R^{-1})R\Lambda^{m}U$$

构造Am的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QIV)JI

SEAT-AGE CONTAIN

头Schur标准)

带原点位移的QR迭f

隐式QR算法

• 由于L是单位下三角阵,而 $|\lambda_i| < |\lambda_j| (i > j)$,所以有 $\lim_{m \to \infty} E_m = 0$

• ϕX 的QR分解为X = QR. 由于X非奇异,所以可要求R的对角元全是正数。这样我们有

$$A^{m} = QR(I + E_{m})\Lambda^{m}U = Q(I + RE_{m}R^{-1})R\Lambda^{m}U$$

• 当m充分大时, $I + RE_m R^{-1}$ 非奇异,故可取它的QR分解 $I + RE_m R^{-1} = \hat{Q}_m \hat{R}_m$,其中 \hat{R}_m 的对角元均正数

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

少、JCHUFPMEル

上Hessenberg化

隐式QR算法

• 由 $E_m \to 0 (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty}\hat{Q}_m=\lim_{m\to\infty}\hat{R}_m=I$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

___Hessenberg16

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 由 $E_m \to 0 (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty}\hat{Q}_m=\lim_{m\to\infty}\hat{R}_m=I$$

• 至此我们有 $A^m = (Q\hat{Q}_m)(\hat{R}_mR\Lambda^mU)$

基本概念与性质

幂法

反幂 污

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

双重步位移的OR铁化

隐式QR算法

• 由 $E_m \to 0 (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty}\hat{Q}_m=\lim_{m\to\infty}\hat{R}_m=I$$

- 至此我们有 $A^m = (Q\hat{Q}_m)(\hat{R}_mR\Lambda^mU)$
 - 这是*A*^m的一个QR分解,只是对角元可能 不是正数

水毒粉

基本概念与性品

反复注

OR方法

实Schur标准形

l-Hessenberσ(k

带原点位移的QR迭代

双重步位移的QR迭代

• 由 $E_m \to 0 \ (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty} \hat{Q}_m = \lim_{m\to\infty} \hat{R}_m = I$$

- 至此我们有 $A^m = (Q\hat{Q}_m)(\hat{R}_mR\Lambda^mU)$
 - 这是*A*"的一个QR分解,只是对角元可能 不是正数
- 为校正这一点,设 u_{ii} 是U的对角元,定义

$$D_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \dots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\right)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

宣社

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 这样我们就有

$$A^{m} = (Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2})(D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U)$$

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

至平心1(中以以

头Schur标准用

非質点位数的ADE

双重步位移的QR迭化

隐式QR算法

• 这样我们就有

$$A^{m} = (Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2})(D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U)$$

• 由于 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$,所以根据QR分解的唯一性,我们有

$$\tilde{Q}_{m} = Q \hat{Q}_{m} D_{1}^{m} D_{2}, \tilde{R}_{m} = D_{2}^{-1} D_{1}^{-m} \hat{R}_{m} R \Lambda^{m} U$$

带原点位移的QR设

双重步位移的QR迭f

隐式QR算法

• 这样我们就有

$$A^{m} = (Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2})(D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U)$$

• 由于 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$,所以根据QR分解的唯一性, 我们有

$$\tilde{Q}_{m} = Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2}, \tilde{R}_{m} = D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U$$

• 所以有

$$A_{m} = \left(D_{2}^{*}(D_{1}^{*})^{m}\hat{Q}_{m}^{*}Q^{*}\right)A\left(Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2}\right)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性

失3CHUF例(性)

- Hessenberg

带原点位移的QR迭位

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

• 而注意到 $A = X\Lambda Y = X\Lambda X^{-1} = QR\Lambda R^{-1}Q^*$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万况

头Schur标准先

T. Hessellberg 16

- 而注意到 $A = X\Lambda Y = X\Lambda X^{-1} = QR\Lambda R^{-1}Q^*$
- 从而有

$$A_m = D_2^* (D_1^*)^m \hat{Q}_m^* R \Lambda R^{-1} \hat{Q}_m D_1^m D_2$$

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本这代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 隐式QR療法

- 而注意到 $A = X\Lambda Y = X\Lambda X^{-1} = QR\Lambda R^{-1}Q^*$
- 从而有

$$A_m = D_2^* (D_1^*)^m \hat{Q}_m^* R \Lambda R^{-1} \hat{Q}_m D_1^m D_2$$

• 这里除 \hat{Q}_m 外,其它矩阵都是上三角阵,而 $\hat{Q}_m \to I \ (m \to \infty)$,所以 A_m 的下三角元趋向于零

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本这代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选代 双重步位移的QR选代 隐式QR算法

- 而注意到 $A = X \Lambda Y = X \Lambda X^{-1} = QR \Lambda R^{-1} Q^*$
- 从而有

$$A_m = D_2^* (D_1^*)^m \hat{Q}_m^* R \Lambda R^{-1} \hat{Q}_m D_1^m D_2$$

- 这里除 \hat{Q}_m 外,其它矩阵都是上三角阵,而 $\hat{Q}_m \to I \ (m \to \infty)$,所以 A_m 的下三角元趋向于零
- 从而对角元趋向于A的第i个特征值

只用到实数运算的QR方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg化

THE RESIDENCE OF THE SECOND

隐式QR算法

实际应用中所遇到的大量特征值问题都是关于 实矩阵的,因此我们希望设计出只涉及到实数 运算的QR迭代

只用到实数运算的QR方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希拉

OR方注

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR迭f

带原点位移的QR迭代

隐式QR算法

- 实际应用中所遇到的大量特征值问题都是关于 实矩阵的,因此我们希望设计出只涉及到实数 运算的QR迭代
- 如此的迭代格式为

$$A_{m-1}=Q_mR_m$$

$$A_m = R_m Q_m$$

其中 Q_m 是正交矩阵, R_m 是上三角阵

只用到实数运算的QR方法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR迭代

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 实际应用中所遇到的大量特征值问题都是关于 实矩阵的,因此我们希望设计出只涉及到实数 运算的QR迭代

• 如此的迭代格式为

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$
$$A_m = R_m Q_m$$

其中 Q_m 是正交矩阵, R_m 是上三角阵

● 但由于复共轭特征值的存在,因此我们不能期望迭代格式产生的Am仍趋向于一个上三角阵

实Schur分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD-

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原占位移的OR法(

.....

隐式QR算法

定理

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,则存在正交矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{mm} \end{pmatrix}$$

其中 R_{ii} 或者是一个实数,或者是一个具有一对复共 轭特征值的2阶方阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准形

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭行

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OBTO

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上.Hessenberg代

.....

隐式OR算法

- 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形
- 类似可证明实QR迭代格式产生的A_k应逼近于A的实Schur标准形

基本概念与性质

幂法

反幂法

实Schur标准形

l-Hossonborg (/

带原点位移的QR迭

.....

- 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形
- 类似可证明实QR迭代格式产生的*A_k*应逼近于*A*的实Schur标准形
- 但目前这个版本的QR方法在实用性方面没有竞争力,因为:

基本概念与性质

幂法

反幂法

实Schur标准形

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭代

- 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形
- 类似可证明实QR迭代格式产生的*A_k*应逼近于*A*的实Schur标准形
- 但目前这个版本的QR方法在实用性方面没有竞争力,因为:
 - 每次迭代的运算量太大

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR迭值

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形

- 类似可证明实QR迭代格式产生的*A_k*应逼近于*A*的实Schur标准形
- 但目前这个版本的QR方法在实用性方面没有竞争力,因为:
 - 每次迭代的运算量太大
 - 收敛速度太慢

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD±∀

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg化

双重步位移的QR铁化

隐式QR算法

把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂污

QR方法

实Schur标准形

Thessenberg 16

双重步位移的QR铁

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
 - 上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形

3,550,000

带原点位移的QR选

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
 - 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

实Schur标准形

Triessembergio

带原点位移的QR选值

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
 - 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

实Schur标准形

带原点位移的QR迭

双重步位移的QR迭化

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
 - 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况
 - 双重步位移

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QICHIA

基本迭代和收敛性

实Schur标准形

带原点位移的QR选值

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
 - 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况
 - 双重步位移
- 实用算法: 隐式QR算法

把QR方法改造成实用算法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形 上Hessenberg(4

带原点位移的QR选作

双重步位移的QR迭代

卷式QR算法

● 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变

- 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况
 - 双重步位移
- 实用算法: 隐式QR算法
 - 平均两次QR迭代就可以分离出一个特征值或 2×2 于矩阵,计算量为 $O(n^3)$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

.....

双重步位移的QR选

隐式QR算法

为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩阵A经相似变换约化为一个准上三角阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

All the boundaries and the

TRUSH MATEURS BY QUALA

- 为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩阵A经相似变换约化为一个准上三角阵
- 为此,我们先看一下基于Householder变换的相似变换可以得到什么

非对称特征值问题计 算方法

沙建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代

- 为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩阵A经相似变换约化为一个准上三角阵
- 为此,我们先看一下基于Householder变换的相似变换可以得到什么
- 第一步我们自然选取Householder变换 H_1 ,使得 H_1A 的第一列有尽可能多的零元素

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩阵A经相似变换约化为一个准上三角阵
- 为此,我们先看一下基于Householder变换的相似变换可以得到什么
- 第一步我们自然选取Householder变换 H_1 ,使得 H_1A 的第一列有尽可能多的零元素
- 最多可以得到n-1个零。这能做到么?

相似变换的妥协

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

__ ,,,

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

The second control of the

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 在对 $A = (a_{ij})$ 左乘 H_1 进行行变换之后,还需要对A右乘 H_1 进行列变换

相似变换的妥协

非对称特征值问题计 复方法

上Hessenberg化

 在对A = (a_{ii})左乘H₁进行行变换之后,还需要 对A右乘H1进行列变换

● 为了保证已在*H*₁A中的第一列所出现的零元素 不至于因右乘H,被破坏,我们选取H,具有如下 形式:

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

\tilde{H}_1 的构造

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

氯洪

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

3,0000019911

上Hessenberg化

带原点位移的QR选作

双里步位移的Q

隐式QR算法

• 如此我们有

$$H_1AH_1=\left(egin{array}{ccc} a_{11} & a_2^T ilde{H}_1\ ilde{H}_1a_1 & ilde{H}_1A_{22} ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

其中
$$a_1^T = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}),$$

 $a_2^T = (a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}), A_{22}$ 是A右下角的 $n-1$ 阶
主子阵

\tilde{H}_1 的构造

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

泵注

反幂法

OR方法

基本迭代和收急

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 如此我们有

$$H_1AH_1 = \left(egin{array}{ccc} a_{11} & a_2^T ilde{H}_1 \ ilde{H}_1a_1 & ilde{H}_1A_{22} ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

其中
$$a_1^T = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}),$$

 $a_2^T = (a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}), A_{22}$ 是A右下角的 $n-1$ 阶
主子阵

• 所以Householder变换 \tilde{H}_1 的最佳选择应该使得 $\tilde{H}_1a_1 = pe_1$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

0 D → 3

基本迭代和收敛

空Schur标准形

上Hessenberg化

TRUSH TELEPROPERTOR

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 如此 H_1AH_1 的第一列中除开始两个元素外,余下的n-2个元素为零

邓建松

基本概念与性质

幂法

汉希法

QR方法

基本迭代和收敛性

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭件

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

- 如此 H_1AH_1 的第一列中除开始两个元素外,余下的n-2个元素为零
- 类似对后面各列进行处理,我们可以找 到n-2个Householder变换 H_1, \ldots, H_{n-2} 使得

$$H_{n-2}\cdots H_1AH_1\cdots H_{n-2}=H$$

其中 $H = (h_{ij})$ 满足 $h_{ij} = 0$, i > j + 1, 这样的矩阵 称为上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

基本迭代和中

实Schur标准?

上Hessenberg化

双重步位移的QR定

• 现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂 污

QR方法

基本迭代和收敛

SCOCITAL PROFES

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

隐式QR算法

• 现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

• 一般称如此分解式为A的上Hessenberg分解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛的 实Schur标准形

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

- 一般称如此分解式为A的上Hessenberg分解
- 算法运算量为 $10n^3/3$; 如果要记录Q, 还需要增加运算量 $4n^3/3$

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

- 一般称如此分解式为A的上Hessenberg分解
- 算法运算量为 $10n^3/3$; 如果要记录Q, 还需要增加运算量 $4n^3/3$
- 算法6.4.1的程序演示

误差分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂剂

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

and the contract of the contract

带原点位移的QR迭f

隐式QR算法

• 可以证明:如此算法得到的上Hessenberg矩阵 \hat{H} 满足

$$\hat{H} = Q^T (A + E) Q$$

其中Q是正交矩阵, $||E||_F \leqslant cn^2 ||A||_F \mathbf{u}$

误差分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

EC.

反幂法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR选行 双重步位移的QR选行

隐式QR算法

• 可以证明:如此算法得到的上Hessenberg矩阵 \hat{H} 满足

$$\hat{H} = Q^T (A + E) Q$$

其中Q是正交矩阵, $\|E\|_F \leqslant cn^2 \|A\|_F \mathbf{u}$

• 我们也可以采用Givens变换(运算量增加)或者列 主元的Gauss消去法将A约化为上Hessenberg矩 阵(运算量少,但稳定性较差)

唯一性定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

.....

反复治

OR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭f

隐式QR算法

定理

设A有如下两个上Hessenberg分解:

$$U^TAU = H$$
, $V^TAV = G$

其中 $U = (u_1, \ldots, u_n)$ 和 $V = (v_1, \ldots, v_n)$ 是n阶正交矩阵, $H = (h_{ij})$ 和 $G = (g_{ij})$ 是上Hessenberg矩阵。 若 $u_1 = v_1$,而且H的次对角元 $h_{i+1,i}$ 均不为零,则存在对角元均为1或-1的对角阵D,使得U = VD,H = DGD

定理证明

非对称特征值问题计 算方法 邓母松

基本概念与性质

幂決

反幂法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR设

THE STATE OF THE SECOND SECOND

隐式QR算法

采用归纳法证明

• 假定对某个m已证 $u_j = \varepsilon_j v_j$, j = 1, ..., m, 其 中 $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_j = 1$ 或-1, j = 2, ..., m. 下面证明 存在 $\varepsilon_{m+1} = 1$ 或-1使得 $u_{m+1} = \varepsilon_{m+1} v_{m+1}$

定理证明

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

基本迭代和收金

头Schur例

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭位

隐式QR算法

采用归纳法证明

- 假定对某个m已证 $u_j = \varepsilon_j v_j$, j = 1, ..., m, 其 中 $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_j = 1$ 或-1, j = 2, ..., m. 下面证明 存在 $\varepsilon_{m+1} = 1$ 或-1使得 $u_{m+1} = \varepsilon_{m+1} v_{m+1}$
- 根据上Hessenberg分解式,我们有

$$AU = UH$$
, $AV = VG$

U, V的关系反应到H, G上

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂没

反幂犯

QR万汉

签件地1、作收取

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

隐式QR算法

● 比例两个矩阵等式的第*m*列,我们有

$$Au_m = h_{1m}u_1 + \cdots + h_{mm}u_m + h_{m+1,m}u_{m+1}$$

 $Av_m = g_{1m}v_1 + \cdots + g_{mm}v_m + g_{m+1,m}v_{m+1}$

U,V的关系反应到H,G上

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

.....

as As As I Canada

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭

市原点证例的QK达T

隐式QR算法

● 比例两个矩阵等式的第*m*列,我们有

$$Au_m = h_{1m}u_1 + \cdots + h_{mm}u_m + h_{m+1,m}u_{m+1}$$

 $Av_m = g_{1m}v_1 + \cdots + g_{mm}v_m + g_{m+1,m}v_{m+1}$

• 在上式两边分别左乘 u_i^T 和 v_i^T ,可得

$$h_{im} = u_i^T A u_m, \quad g_{im} = v_i^T A v_m, i = 1, \dots, m$$

U,V的关系反应到H,G上

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

巨壮

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

● 比例两个矩阵等式的第*m*列,我们有

$$Au_m = h_{1m}u_1 + \cdots + h_{mm}u_m + h_{m+1,m}u_{m+1}$$

 $Av_m = g_{1m}v_1 + \cdots + g_{mm}v_m + g_{m+1,m}v_{m+1}$

• 在上式两边分别左乘 u_i^T 和 v_i^T ,可得

$$h_{im} = u_i^T A u_m, \quad g_{im} = v_i^T A v_m, i = 1, \dots, m$$

• 根据归纳假设,可得 $h_{im} = \varepsilon_i \varepsilon_m g_{im}, i = 1, ..., m$

第m+1列的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

基本概念与性质

幂法

反幂法

00-20

基本迭代和收敛

实Schur标准

上Hessenberg化

TRUSH TELEPRINGING

双重步位移的QR迭化

隐式QR算法

• 从而我们有

$$h_{m+1,m}u_{m+1} = \varepsilon_m(Av_m - \varepsilon_1^2 g_{1m}v_1 - \dots - \varepsilon_m^2 g_{mm}v_m)$$

= $\varepsilon_m(Av_m - g_{1m}v_1 - \dots - g_{mm}v_m)$
= $\varepsilon_m g_{m+1,m}v_{m+1}$

第m+1列的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反复?

00-

基本迭代和收敛性 实Schur标准形

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代

隐式QR算法

• 从而我们有

$$h_{m+1,m}u_{m+1} = \varepsilon_m(Av_m - \varepsilon_1^2 g_{1m}v_1 - \dots - \varepsilon_m^2 g_{mm}v_m)$$

= $\varepsilon_m(Av_m - g_{1m}v_1 - \dots - g_{mm}v_m)$
= $\varepsilon_m g_{m+1,m}v_{m+1}$

• 由此即得 $|h_{m+1,m}| = |g_{m+1,m}|$

第m+1列的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代

隐式QR算法

• 从而我们有

$$h_{m+1,m}u_{m+1} = \varepsilon_m(Av_m - \varepsilon_1^2 g_{1m}v_1 - \dots - \varepsilon_m^2 g_{mm}v_m)$$

= $\varepsilon_m(Av_m - g_{1m}v_1 - \dots - g_{mm}v_m)$
= $\varepsilon_m g_{m+1,m}v_{m+1}$

- 由此即得 $|h_{m+1,m}| = |g_{m+1,m}|$
- 而 $h_{m+1,m} \neq 0$,所以我们有 $u_{m+1} = \varepsilon_{m+1} v_{m+1}$,其中 $\varepsilon_{m+1} = 1$ 或-1

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

上Hessenberg化

mark de Pezze Abionoble

隐式QR算法

● 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂犯

12 -k-35 AP #mlfr A

实Schur标准是

上Hessenberg化

.....

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

● 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR TO

基本迭代和收敛

实Schur板

上Hessenberg化

市场出生物的**从**1727

隐式QR算法

● 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

● 实际上我们可以把H的第一列取为任意单位向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希况

O D → \

基本迭代和收益

买Schur标

上Hessenberg化

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

• 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

- 实际上我们可以把H的第一列取为任意单位向量
 - 根据H的第一列确定一个正交阵Q

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收金

实Schur板

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代

隐式QR算法

• 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

- 实际上我们可以把H的第一列取为任意单位向量
 - 根据H的第一列确定一个正交阵Q
 - 那么对 Q^TAQ 进行前述上Hessenberg化,设变换矩阵为 \tilde{H} , \tilde{H} 具有上述形式,那么 $H=Q\tilde{H}$ 的第一列就是所指定的单位向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂注

OR 方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

THE RESERVE THE PARTY AND ADDRESS OF THE

隐式QR算法

一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零, 则称为不可约的

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希沿

. .

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭

SALED ELIGINA

- 一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零, 则称为不可约的
- 之所以如此定义,如果有一个下次对角元为零, 那么可以分别考虑上下子阵的特征值问题

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂沒

~~~

基本迭代和收敛

上Hessenberg化 带原点位移的QR选

- 一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零, 则称为不可约的
- 之所以如此定义,如果有一个下次对角元为零, 那么可以分别考虑上下子阵的特征值问题
- 唯一性定理表明:如果 $Q^TAQ = H$ 为不可约的上Hessenberg矩阵,则Q和H在相差一个正负号的意义下完全由Q的第一列确定

非对称特征值问题计 算方法

基本概令与性。

巨社

反幂法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零,则称为不可约的
- 之所以如此定义,如果有一个下次对角元为零, 那么可以分别考虑上下子阵的特征值问题
- 唯一性定理表明:如果 $Q^TAQ = H$ 为不可约的上Hessenberg矩阵,则Q和H在相差一个正负号的意义下完全由Q的第一列确定
- 这是得以建立隐式QR方法的关键所在

## 上Hessenberg矩阵的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭行

隐式QR算法

● 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵

# 上Hessenberg矩阵的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收益

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

隐式QR算法

- 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵
- H的QR分解可以通过n-1个平面旋转变换完成

$$P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12}H=R$$

# 上Hessenberg矩阵的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR TO

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭 双面先位移的QR迭

- 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵
- $\bullet$  H的QR分解可以通过n-1个平面旋转变换完成

$$P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12}H=R$$

• 令 $Q = (P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12})^T$ ,则H = QR就是H的QR分解

# 上Hessenberg矩阵的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

c en

又布法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化 带原点位移的QR选

隐式QR算法

• 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵

● H的QR分解可以通过n-1个平面旋转变换完成

$$P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12}H=R$$

- $\Diamond Q = (P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12})^T$ ,则H = QR就是H的QR分解
- 为了完成一次QR迭代,还需要计算 $\tilde{H} = RQ = RP_{12}^TP_{23}^T\cdots P_{n-1}^T$ ,

#### RQ的计算结果

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

errer Nata

反幂法

基本迭代和收益

3,444,111,111,111

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭

隐式QR算法

• 由于 $P_{12}$ 是(1,2)坐标平面内的旋转变换,因此 $RP_{12}^T$ 仅有前两列与R不同,而 $RP_{12}^T$ 的前两列是由R的前两列的线性组合构成,R为上三角阵,所以 $RP_{12}^T$ 的第一个下次对角元非零

#### RQ的计算结果

非对称特征值问题计 算方法

小连位

基本概念与性质

巨壮

反幂》

基本迭代和收敛

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 由于 $P_{12}$ 是(1,2)坐标平面内的旋转变换,因此 $RP_{12}^T$ 仅有前两列与R不同,而 $RP_{12}^T$ 的前两列是由R的前两列的线性组合构成,R为上三角阵,所以 $RP_{12}^T$ 的第一个下次对角元非零
- 因此RQ仍是一个上Hessenberg矩阵

#### RQ的计算结果

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

^ P

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 由于 $P_{12}$ 是(1,2)坐标平面内的旋转变换,因此 $RP_{12}^T$ 仅有前两列与R不同,而 $RP_{12}^T$ 的前两列是由R的前两列的线性组合构成,R为上三角阵,所以 $RP_{12}^T$ 的第一个下次对角元非零

- 因此RQ仍是一个上Hessenberg矩阵
- 上Hessenberg矩阵经一次QR迭代后还是 上Hessenberg矩阵,计算运算量为O(n²)

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂污

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

TO SEE MANUAL PROPERTY OF THE

隐式QR算法

 从一个不可约上Hessenberg矩阵H<sub>k</sub>出发,经过 一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵H<sub>k+1</sub>,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QIVIIA

\_\_\_\_\_

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭值

双重步位移的OR供在

隐式QR算法

从一个不可约上Hessenberg矩阵H<sub>k</sub>出发,经过 一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵H<sub>k+1</sub>,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

• 这里的QR迭代实际上就是连续n-1次平面旋转操作,不同于标准的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

か 建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

9(17)3124

district Vintage

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭值

隐式QR算法

 从一个不可约上Hessenberg矩阵H<sub>k</sub>出发,经过 一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵H<sub>k+1</sub>,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

- 这里的QR迭代实际上就是连续n-1次平面旋转操作,不同于标准的QR分解
- 回忆: 上Hessenberg矩阵分解的唯一性

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QIVAIA

实Schur标准形

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 从一个不可约上Hessenberg矩阵 $H_k$ 出发,经过一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵 $H_{k+1}$ ,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

- 这里的QR迭代实际上就是连续n-1次平面旋转操作,不同于标准的QR分解
- 回忆: 上Hessenberg矩阵分解的唯一性
- 知道了 $Q_k$ 的第一列,就几乎完全确定了整个矩阵 $Q_k$

## 加速收敛:原点位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

氯法

反幂法

\_\_ ...

基本迭代和收敛

头Schur标准并

上Hessenberg

THE PROPERTY LESS THE HEAVY CONTRACT IN

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 基本的QR方法是线性收敛的

## 加速收敛:原点位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

基本法代和协会

实Schur标准开

L:Hessenberg

the selection to the selection of

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

- 基本的QR方法是线性收敛的
- 为了加速收敛,我们引进原点位移

## 加速收敛:原点位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

实Schur标准用

letterer been

TRACESTOCK

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 基本的QR方法是线性收敛的

- 为了加速收敛,我们引进原点位移
- 带原点位移的QR迭代格式如下:

$$H_m - \mu_m I = Q_m R_m$$

$$H_{m+1} = R_m Q_m + \mu_m I$$

其中 $H_0 = H$ 为给定的上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

\_\_ ,..

基本迭代和收敛

头Schur标准力

上Hessenberg

III JAKAN IELIS II TQ TO ZE I

双重步位移的QR选作

隐式QR算法

•  $H_m$ 为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}$ , $h_{nn}^{(m)}$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg

双重步位移的QR迭位

隐式QR算法

- $H_m$ 为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}$ ,  $h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ 应很小,因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值

非对称特征值问题计 算方法

**邓建松** 

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本法代和收敛

实Schur标准用

LHessenberg

双重步位移的QR选

隐式QR算法

- $H_m$ 为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}$ ,  $h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ 应很小,因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值
- 因此我们可以取 $\mu_m = h_{nn}^{(m)}$

非对称特征值问题计 复方法

- *H*<sub>m</sub>为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两 个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}, h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ ,应很小, 因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值
- 因此我们可以取 $\mu_m = h_{nn}^{(m)}$
- 可以证明: 若 $h_{n,n-1}^{(m)} = \varepsilon$ 很小,则一次带原点位 移的QR迭代后, $h_{n,n-1}^{(m+1)} = O(\varepsilon^2)$ ,即收敛速度从 线性收敛加速到二次收敛

非对称特征值问题计算方法

基本概念与性质

反幂法

OR方法

QK力法
基本迭代和收敛性
实Schur标准形
上Hessenberg化
带原点位移的QR迭代
双重步位移的QR迭代
隐式QR算法

- $H_m$ 为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}, h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ 应很小,因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值
- 因此我们可以取 $\mu_m = h_{nn}^{(m)}$
- 课本例6.4.2的程序演示

#### 双重步位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

基本法律和协会

实Schur标准用

上Hessenberg化

市原思证参的QK达1

双重步位移的QR式

隐式QR算法

单步原点位移的QR迭代具有严重的缺点: 若A具有复共轭特值,则实位移一般并不能起 到加速的作用

### 双重步位移

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选代 聚重步位移的QR选代 除充QR整法

- 单步原点位移的QR迭代具有严重的缺点: 若A具有复共轭特值,则实位移一般并不能起 到加速的作用
- 为此,我们引入双重步位移的QR迭代,基本想法是把两步带原点位移的QR迭代合并为一步, 以避免复数运算

### 迭代格式

非对称特征值问题计

• 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 考察如下的迭代格式:

$$H_1 = Q_0^T A Q_0$$

上Hessenberg分解

$$H_k - \mu_k I = Q_k R_k$$

QR分解

$$H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$k=1,2,\ldots$$

#### 迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 ● 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 考察如下的迭代格式:

$$H_1 = Q_0^\mathsf{T} A Q_0$$
 上Hessenberg分解  $H_k - \mu_k I = Q_k R_k$  QR分解  $H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$   $k = 1, 2, \ldots$ 

● 假设迭代格式中出现的上Hessenberg矩阵都是不可约的。否则,可分别对沿对角线的上下两个子矩阵进行QR迭代

## 复共轭特征值的处理

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

夏汝

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

LHessenberg

双重步位移的QR选

邓建松

• 假设 $H_k$ 的尾部 $2 \times 2$ 子矩阵

$$S_k = \begin{pmatrix} h_{mm}^{(k)} & h_{mn}^{(k)} \\ h_{nm}^{(k)} & h_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad m = n - 1$$

有一对复共轭特征值 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 。这时我们不能期望 $h_m^{(k)}$ 最终收敛于A的某个特征值,而且此时取 $\mu_k = h_m^{(k)}$ 也完全没有加速效果

## 复共轭特征值的处理

非对称特征值问题计 复方法

● 假设Hk的尾部2×2子矩阵

$$S_k = \begin{pmatrix} h_{mm}^{(k)} & h_{mn}^{(k)} \\ h_{nm}^{(k)} & h_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad m = n - 1$$

有一对复共轭特征值71和72。这时我们不能期 望 $h_m^{(k)}$ 最终收敛于A的某个特征值,而且此时 

为了加速,我们应当取γ₁或γ₂作位移,但这样 就会涉及到复数运算

## 连续两次位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂污

QR万次

**基本运**代和权3

实Schur标准用

带原占位移的ORi

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 为了避免复数运算,我们计划用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移,即进行如下迭代:

$$H_k - \gamma_1 I = U_1 R_1,$$
  $G_1 = R_1 U_1 + \gamma_1 I$   
 $G_1 - \gamma_2 I = U_2 R_2,$   $H_{k+1} = R_2 U_2 + \gamma_2 I$ 

## 连续两次位移

非对称特征值问题计 复方法

▶ 为了避免复数运算,我们计划用γ₁和γ₂连续作 两次位移,即进行如下迭代:

$$H_k - \gamma_1 I = U_1 R_1,$$
  $G_1 = R_1 U_1 + \gamma_1 I$   
 $G_1 - \gamma_2 I = U_2 R_2,$   $H_{k+1} = R_2 U_2 + \gamma_2 I$ 

• 由此格式,记
$$M = (H_k - \gamma_1 I)(H_k - \gamma_2 I)$$
, $Q = U_1 U_2$ , $R = R_2 R_1$ ,则 $M = QR$ , $H_{k+1} = Q^* H_k Q$ 

## 验算

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂剂

基本法代和政

实Schur标准形

±Hessenberg

\_\_\_\_\_

双重步位移的QR选

隐式QR算法

$$QR = U_1 U_2 R_2 R_1 = U_1 (G_1 - \gamma_2 I) R_1$$

$$= U_1 (R_1 U_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) I) R_1$$

$$= U_1 R_1 (U_1 R_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) I)$$

$$= (H_k - \gamma_1 I) (H_k - \gamma_2 I) = M$$

$$U_1 G_1 = U_1 (R_1 U_1 + \gamma_1 I) = (U_1 R_1 + \gamma_1 I) U_1 = H_k U_1$$

$$U_2 H_{k+1} = G_1 U_2$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR万ì

基本迭代和收益

实Schur标准用

T. Hessellberg 16

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 根据*M*的定义,我们有

$$M = H_k^2 - sH_k + tI$$

其中
$$s = \gamma_1 + \gamma_2 = h_{mm}^{(k)} + h_{nn}^{(k)} \in \mathbb{R}$$
,  
 $t = \gamma_1 \gamma_2 = \det S_k \in \mathbb{R}$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

非質点位数的ADE

双重步位移的QR的

隐式QR算法

● 根据*M*的定义,我们有

$$M=H_k^2-sH_k+tI$$
  
其中 $s=\gamma_1+\gamma_2=h_{mm}^{(k)}+h_{nn}^{(k)}\in\mathbb{R},$   
 $t=\gamma_1\gamma_2=\det S_k\in\mathbb{R}$ 

• 所以M是实矩阵

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 根据*M*的定义,我们有

$$M = H_k^2 - sH_k + tI$$
  
其中 $s = \gamma_1 + \gamma_2 = h_{mm}^{(k)} + h_{nn}^{(k)} \in \mathbb{R}$ ,  
 $t = \gamma_1 \gamma_2 = \det S_k \in \mathbb{R}$ 

- 所以M是实矩阵
- 根据QR分解的性质,即使 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均不是 $H_k$ 的特征值,并假定在计算过程中 $R_1$ 和 $R_2$ 的对角元均取为正数,那么Q也是实矩阵

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 根据*M*的定义,我们有

$$M = H_k^2 - sH_k + tI$$
  
其中 $s = \gamma_1 + \gamma_2 = h_{mm}^{(k)} + h_{nn}^{(k)} \in \mathbb{R}$ ,  
 $t = \gamma_1 \gamma_2 = \det S_k \in \mathbb{R}$ 

- 所以M是实矩阵
- 根据QR分解的性质,即使 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均不是 $H_k$ 的特征值,并假定在计算过程中 $R_1$ 和 $R_2$ 的对角元均取为正数,那么Q也是实矩阵
- 所以H<sub>k+1</sub>也是实矩阵



#### 初步结论

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反复为

基本法代和的创

实Schur标准用

上Hessenberg化

隐式QR算法

• 在没有误差的情况下,用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移进行QR迭代产生的 $H_{k+1}$ 仍是实的上Hessenberg矩阵

#### 初步结论

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵対

反复治

00-2-1

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg

双重步位移的QRi

隐式QR算法

- 在没有误差的情况下,用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移进行QR迭代产生的 $H_{k+1}$ 仍是实的上Hessenberg矩阵
- 但是,实际计算时,由于舍入误差的影响,如此得到的 $H_{k+1}$ 一般并不是实矩阵

#### 初步结论

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

OR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭f 双重步位移的QR迭f

双重步位移的QR迭 隐式QR算法

- 在没有误差的情况下,用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移进行QR迭代产生的 $H_{k+1}$ 仍是实的上Hessenberg矩阵
- 但是,实际计算时,由于舍入误差的影响,如此得到的 $H_{k+1}$ 一般并不是实矩阵
- 为了确保得到的 $H_{k+1}$ 仍是实矩阵,我们对迭代格式进行修改

#### 基于M的迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR TO

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双里步位移的QK达

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式如下:

### 基于M的迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本法代和协会

实Schur标准用

上Hessenberg化

Mr. - Is on as Mr. S.L.

• 修改后的迭代格式如下:

① 计算 $M = H_k^2 - sH_k + tI$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本法律和协会

实Schur标准开

\_\_\_nessemberg }c

双重步位移的OR法

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式如下:

① 计算 $M = H_k^2 - sH_k + tI$ 

② 计算M的QR分解M = QR;

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

## PS .b P=29 Ah o p.20

双重步位移的QR选

隐式QR算法

### • 修改后的迭代格式如下:

- ① 计算 $M = H_k^2 sH_k + tI$
- ② 计算M的QR分解M = QR;
- ③ 计算 $H_{k+1} = Q^T H_k Q$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

mate its Perty Ahoon

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式如下:

- ① 计算 $M = H_k^2 sH_k + tI$
- ② 计算M的QR分解M = QR;
- M的下带宽是2,即次对角元和次次对角元非零

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QRi

双重步位移的QR迭f

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式如下:

- ① 计算 $M = H_k^2 sH_k + tI$
- ② 计算M的QR分解M = QR;
- M的下带宽是2,即次对角元和次次对角元非零
- 如此计算第一步形成*M*的运算量就是*O*(*n*<sup>3</sup>)

# 降低运算量的想法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

∴Hessenberg1₹

市原思证协的QK运行

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式运算量比较大

### 降低运算量的想法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

O D → \

基本迭代和收益

头5Chur你在)

上Hessenberg

双重步位移的QR选

隐式QR算法

- 修改后的迭代格式运算量比较大
- 想法:已有结论告诉我们,无论采用何种方法 求正交矩阵 $\tilde{Q}$ 使得 $\tilde{Q}^T H_k \tilde{Q} = \tilde{H}_{k+1}$ 为 上Hessenberg矩阵,只要保证 $\tilde{Q}$ 的第一列与Q的 第一列相同,则 $\tilde{H}_{k+1}$ 就与 $H_{k+1}$ 本质上是一样的

### 降低运算量的想法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幕決

反幂法

QR力法

基本迭代和收敛

失SCHUF弥佳/

带原点位移的QR法

市原思证协的QK达1

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式运算量比较大

- 想法:已有结论告诉我们,无论采用何种方法 求正交矩阵 $\tilde{Q}$ 使得 $\tilde{Q}^T H_k \tilde{Q} = \tilde{H}_{k+1}$ 为 上Hessenberg矩阵,只要保证 $\tilde{Q}$ 的第一列与Q的 第一列相同,则 $\tilde{H}_{k+1}$ 就与 $H_{k+1}$ 本质上是一样的
- 而这要求 $H_{k+1}$ 是不可约的

## $H_k$ 与 $H_{k+1}$ 不可约性的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

失SCHUIMMEA

上Hessenberg

\_\_\_\_

隐式QR算法

### 定理

 $若H_k$ 是不可约的上Hessenberg矩阵,且 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均非 $H_k$ 的特征值,则 $H_{k+1}$  也是不可约的上Hessenberg矩阵

### 定理证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

Triessembergio

双重步位移的QR

隐式QR算法

### 采用反证法

### 定理证明

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . .

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR设

### 采用反证法

- 记 $H_{k+1} = (\tilde{h}_{ij})$ , 并假定存在 $r (1 \leq r \leq n-1)$ 使 得 $\tilde{h}_{r+1,r} = 0$ , 而 $\tilde{h}_{i+1,i} \neq 0 (i = 1, 2, ..., r-1)$
- 比较等式 $H_kQ = QH_{k+1}$ 两边矩阵的前r列,我们有

$$H_k q_j = \tilde{h}_{1j} q_1 + \dots + \tilde{h}_{jj} q_j + \tilde{h}_{j+1,j} q_{j+1},$$
  $j = 1, \dots, r-1$   $H_k q_r = \tilde{h}_{1r} q_1 + \tilde{h}_{2r} q_2 + \dots + \tilde{h}_{rr} q_r$ 

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛性

实Schur标准形

THEREIGN

双面非位移的OP许

隐式QR算法

• 由此考虑r+1个向量 $q_1, H_k q_1, \ldots, H'_k q_1$ ,它们均可以表示为 $q_1, \ldots, q_r$ 的线性组合,因此存在不全为零的 $\alpha_i$ ,

$$\left(\sum_{i=0}^r \alpha_i H_k^i\right) q_1 = 0$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

市原点证参约QK达 可需此位秒的QD进

隐式QR算法

• 由此考虑r+1个向量 $q_1, H_k q_1, \ldots, H'_k q_1$ ,它们均可以表示为 $q_1, \ldots, q_r$ 的线性组合,因此存在不全为零的 $\alpha_i$ ,

$$\left(\sum_{i=0}^r \alpha_i H_k^i\right) q_1 = 0$$

• 注意到 $q_r$ 只出现在 $H'_k^{-1}q_1$ 和 $H'_kq_1$ 中,因此必有 $\alpha_r \neq 0$ ; 否则所有系数都是零

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR/J/2

SCOCITUT (PATE)

.....

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 由M = QR可得 $q_1 = \frac{1}{r_{11}} Me_1$ . 将其代入到上式,并注意M也是 $H_k$ 的多项式,我们有My = 0, 其中

$$y = \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i H_k^i\right) e_1$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带票点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 由M = QR可得 $q_1 = \frac{1}{r_{11}} Me_1$ . 将其代入到上式,并注意M也是 $H_k$ 的多项式,我们有My = 0, 其中

$$y = \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i H_k^i\right) e_1$$

• 记 $H_k = (h_{ij})$ , 直接计算可知y的第r + 1个分量为

$$\alpha_r h_{21} h_{32} \cdots h_{r+1,r} \neq 0$$

这就是说方程组My = 0有非零解,这与 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均非 $H_k$ 的特征值,从而M非奇异矛盾



# 实现从 $H_k$ 到 $H_{k+1}$ 的新方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

**0** D → 3

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

双重指位移的OR铁化

隐式QR算法

• 由于Q的第一列是M的第一列单位化得到的

# 实现从 $H_k$ 到 $H_{k+1}$ 的新方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反**掃没

QR万法

X3C11014/11/1/1

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

- 由于Q的第一列是M的第一列单位化得到的
- 由 $M = H_k^2 sH_k + tI$ 可知M的第一列为

$$Me_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0, \dots, 0)^T$$

其中

$$\xi_{1} = (h_{11}^{(k)})^{2} + h_{12}^{(k)}h_{21}^{(k)} - sh_{11}^{(k)} + t$$
  

$$\xi_{2} = h_{21}^{(k)}(h_{11}^{(k)} + h_{22}^{(k)} - s)$$
  

$$\xi_{3} = h_{21}^{(k)}h_{32}^{(k)}$$

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

\_\_\_\_

实Schur标准形

3,44-1141 1211411

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 在M的QR分解中,如果Householder变换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共线

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

隐式QR算法

- 在M的QR分解中,如果Householder变换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共线
  - 利用Householder变换的定义与意义,可直接证明(作为练习)

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . .

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 在M的QR分解中,如果Householder变 换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共 线
  - 利用Householder变换的定义与意义,可直接证明(作为练习)
- 这就是说 $P_0$ 的第一列就可以作为Q的第一列

- 在*M*的QR分解中,如果Householder变 换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共 线
  - 利用Householder变换的定义与意义,可直 接证明(作为练习)
- 这就是说Po的第一列就可以作为Q的第一列
- 根据Householder变换的理论,可以确定Pa的具 体表示

# $P_0$ 的表示

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

-----

9(17)

5cacnur<sub></sub>

带原点位移的QR法

双重步位移的QR选

隐式QR算法

● P<sub>0</sub>可以按下述方式确定:

$$P_0=\operatorname{diag}(\tilde{P}_0,I_{n-3})$$

其中

$$\tilde{P}_0 = I_3 - \beta v v^T,$$
  $v = (\xi_1 - \alpha, \xi_2, \xi_3)^T,$   
 $\alpha = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$   $\beta = 2/(v^T v)$ 

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反复为

其太许和和协会

实Schur标准形

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭件

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 现令 $B = P_0H_kP_0$ ,则我们只要找到第一列为 $e_1$ 的正交矩阵 $\tilde{Q}$ ,使得 $\tilde{Q}^TB\tilde{Q} = \tilde{H}$ 为上Hessenberg矩阵,那么 $\tilde{H}$ 就是所期望的 $H_{k+1}$ 

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 现令 $B = P_0H_kP_0$ ,则我们只要找到第一列为 $e_1$ 的正交矩阵 $\tilde{Q}$ ,使得 $\tilde{Q}^TB\tilde{Q} = \tilde{H}$ 为上Hessenberg矩阵,那么 $\tilde{H}$ 就是所期望的 $H_{k+1}$
- 根据前面给出的约化一个矩阵为 上Hessenberg矩阵的方法以及上Hessenberg矩阵 的唯一性可知,这是很容易做到的

邓建松

基本概念与性质

12/11/14

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR

带原点位移的QR达 双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 现令 $B = P_0 H_k P_0$ ,则我们只要找到第一列为 $e_1$ 的正交矩阵 $\tilde{Q}$ ,使得 $\tilde{Q}^T B \tilde{Q} = \tilde{H}$ 为上Hessenberg矩阵,那么 $\tilde{H}$ 就是所期望的 $H_{k+1}$ 

- 根据前面给出的约化一个矩阵为 上Hessenberg矩阵的方法以及上Hessenberg矩阵 的唯一性可知,这是很容易做到的
- 而且算法的运算量只是O(n²)

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

常原点包移的QR达位

双重步位移的QR的

隐式QR算法

• 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只是改变了H的前三列和前三行,因此B比上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元素

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg

10 22 11 La La 11 Agri

双重步位移的QR边

隐式QR算法

- 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只是改变了H的前三列和前三行,因此B比上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元素
- 由此我们可以构造Householder变换P<sub>1</sub>把第一列 多余的两个非零元素消去

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选 隐式QR算法

- 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只是改变了H的前三列和前三行,因此B比上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元素
- 由此我们可以构造Householder变换P<sub>1</sub>把第一列 多余的两个非零元素消去
- 逐步递推下去,就可以把*B*化为上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只是改变了H的前三列和前三行,因此B比上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元素
- 由此我们可以构造Householder变换*P*<sub>1</sub>把第一列 多余的两个非零元素消去
- 逐步递推下去,就可以把B化为上Hessenberg矩阵
- 由此给出的就是著名的Francis双重步位移

## 实用算法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂注

基本迭代和收敛

实Schur标准开

世 占 位 移 的 O R 社

双重步位移的QR迭

卷式QR算法

● 前面的讨论解决了用QR方法求给定实矩阵的 实Schur标准形的几个关键问题

## 实用算法

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性周

反复注

tt 4-24 / D Zoolle A

实Schur标准用

.

带原点位移的QR泛

双重步位移的QR法

隐式QR算法

- 前面的讨论解决了用QR方法求给定实矩阵的 实Schur标准形的几个关键问题
- 为了得到一个实用的算法,我们还需要给出一个有效的判定准则,确定迭代过程中所产生的上Hessneberg矩阵的次对角元何时可以忽略不计

### 实用算法

非对称特征值问题计 算方法 <sup>邓建松</sup>

基本概念与性质

反幂法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化 带原点位移的QR选

隐式QR算法

- 前面的讨论解决了用QR方法求给定实矩阵的 实Schur标准形的几个关键问题
- 为了得到一个实用的算法,我们还需要给出一个有效的判定准则,确定迭代过程中所产生的上Hessneberg矩阵的次对角元何时可以忽略不计
- 一种简单而实用的准则是: 当

$$|h_{i+1,i}| \leq (|h_{ii}| + |h_{i+1,i+1}|)\mathbf{u}$$

时,就将h<sub>i+1,i</sub>看做零

# 隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

\_\_ ,..

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

● 把前面所有分析综合在一起,就是<mark>隐式QR算法</mark>

### 隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收益

实Schur标准用

带原点位移的QR选作

ES-PODESH

隐式QR算法

- 把前面所有分析综合在一起,就是<mark>隐式QR算法</mark>
- 该算法计算给定的n阶实矩阵A的实Schur分解:  $Q^TAQ = T$ , 其中Q是正交矩阵,T为拟上三角阵,即对角块为 $1 \times 1$ 或 $2 \times 2$ 方阵的块上三角阵,而且每个 $2 \times 2$ 的对角块必有一对复共轭特征值

## 算法注解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

夏注

反复为

基本法代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选

**范式QR算法** 

• 实际计算的统计表明,这一算法每分离出一个1×1或2×2子矩阵平均需要2次QR迭代

## 算法注解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

反希没

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

带原点位移的QRi

双重步位移的OR铁

隐式QR算法

- 实际计算的统计表明,这一算法每分离出一个1×1或2×2子矩阵平均需要2次QR迭代
- 只计算特征值,运算量平均为 $10n^3$ ,如果还需要Q,总运算量平均约为 $25n^3$

## 算法注解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带際点位移的QRi

隐式OR算法

- 实际计算的统计表明,这一算法每分离出一个1×1或2×2子矩阵平均需要2次QR迭代
- 只计算特征值,运算量平均为 $10n^3$ ;如果还需要Q,总运算量平均约为 $25n^3$
- 算法是稳定的