第二章

Date. No.

1. 三条性质

2. 平方, cauchy

3. 易证

④ $\|AB\|_F^2 = tr(B^TA^TAB)$

$= tr(A^TABB^T) = tr(P^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}PBB^T)$

$= tr(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}PBB^TP^T)$

$\overset{(*)}{\le} \lambda_1 \, tr(PBB^TP^T) \le \lambda_1 \|PB\|_F^2$

$\le \|A\|_2^2\|B\|_F^2$

(*) from PBB^TP^T 对角元均非负.

$\|AB\|_F = \|B^TA^T\|_F = \|B\|_2 \|A\|_F$

⑤ 三条性质.

相容性 $\nu_1(AB) = n \max\limits_{1\le i,j\le n} |(AB)_{ij}|$

$= n \max\limits_{1\le i,j\le n} |\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}|$

$\le n \max\limits_{1\le i,j\le n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|$

$\le n \max\limits_{i,j} n \max\limits_{k} |a_{ik}||b_{kj}|$

$\le n^2 \max\limits_{i,k_1} \max\limits_{k_2,j} |a_{ik_1}||b_{k_2j}| = \nu_1(A)\nu_1(B)$

Date. No.

反例 A: $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

6. $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ 反证.

7. 正定: 若 $\|Ax\|=0 \Rightarrow Ax=0 \overset{rank(A)=n}{\Rightarrow} x=0$.

齐次: 显然

三角不等式: 显然

8. $(I-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i$ 利用三角不等式 + 相容.

9. pf: $\|A^{-1}\| = \max_{\|x\|=1} \|A^{-1}x\|$

$\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \min_{\|x\|=1} \frac{1}{\|A^{-1}x\|} = \min_{x} \frac{\|x\|}{\|A^{-1}x\|}$

$= \min_{x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \min_{x} \|A\|$

10. 等式易知成立.

$\|u_1^T\|_1 = \|a_1^T\|_1 \le \|A\|_\infty$

归纳 $\|u_i^T\|_1 \le 2^{i-1} \|A\|_\infty$

suppose $\le k$ stands

$\|u_{k+1}^T\|_1 \le \|a_{k+1}^T\|_1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} \|A\|_\infty$

$\le 2^k \|A\|_\infty$

□

Date. No.

11. (1) $\begin{pmatrix} 357 & -187 \\ -376 & 187.5 \end{pmatrix}$ $K_\infty(A) = 846377$.

(2). $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ 大 小 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 小 大.

(3). 和 (2) 相反即可.

12. $\forall A \quad \|A\| \le \|I\|\|A\|$

$K(A)$ 由相容性立得.

13. pf: $\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\| \le \|(A+E)^{-1}(A - (A+E))A^{-1}\|$

$\le \|E\|\,\|A^{-1}\|\,\|(A+E)^{-1}\|$

14. $fl(x_1 \cdots x_n) =$ ~~$fl(fl(x_1 x_2) x_3 \cdots x_n$~~

$\boxed{fl(\ ) \text{ 的含义:}}$ $fl(fl(fl(x_1 x_2) x_3) \cdots x_n)$

$= (x_1 \cdots x_n)(1+u)^{n-1} \le 1 + 1.01(n-1)u.$

15. pf: $fl(fl(fl(x_1+x_2)+x_3) \cdots + x_n)$

$= \sum x_i \prod_{j=i}^{n-1}(1+u_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i (1+\eta_i).$

16. $fl((Ax)_i) = fl(\sum a_{ij} x_j) \overset{15题}{=} \sum (1+\eta_j)\, fl(a_{ij} x_j)$

$= \sum (1+\eta_j)(1+\delta)\, a_{ij} x_j$

$\Rightarrow$ 即证

Date. No.

17. $f l(x^T x) \le \sum x_i^2 (1+u)^{n+1-i} \le (\sum x_i^2)(1+u)^n = (\sum x_i^2)(1+nu+O(u^2))$

18. pf: 归纳证明:

若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$. 且 $|a_{11}| \le 2k$ $|a_{ij}|$ ($i\ne1$ 且 $j\ne1$) $\le k$.

则 $A=LU$ $|u_{ij}| \le 2k$.

$n=1$ 时 显然

设 $n\le l$ 时 成立

$n=l+1$ case: 可证明无论 $a_{11} \ge a_{21}$ / $a_{11} < a_{21}$

一步列主元后

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & & \\ 0 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 & \cdots \\ & & & * & \end{pmatrix}$$

A'

A' 满足 $|A'_{11}| \le 2k$ $|A'_{ij}| \le k$ ($i\ne1$ 且 $j\ne1$)

由归纳假设立得.

19. pf: 首先 Gauss 消去后 仍为列对角占优阵.

对归纳法: $\max_{i,j} |U_{ij}| \le \|A\|_1$

$k=1$ 成立

$k\ge l$ 时成立

$k+1$ case: ~~第一列: 绝对值之和在一步列主元后为~~

~~[illegible]~~ 消去后 A 第一行为 U 第一行

其他~~列~~行 一步列主元后

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * \cdots \\ 0 & A' \\ & \end{pmatrix}$$

$$A'_{ij} = A_{i+1,j+1} - \frac{A_{i+1,1}}{a_{11}} A_{1,j+1}$$

$$\sum |A'_{ij}| \le \left(\sum_i |A_{i,j+1}|\right) + |A_{1,j+1}| \le \|A\|_1$$

$$\Rightarrow \|A'\|_1 \le \|A\|_1$$

$$\Rightarrow \max_{i,j} |U'_{ij}| \le \|A'\|_1 \le \|A\|_1$$

综上 即证

(20) 类似 2.4.1

$$\tilde{u}_{ij} = a_{ij}^{(i-1)}$$

$$a_{ij}^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k-1)} - \tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj}(1+r_k)\right)(1+\varepsilon_k)$$

$$\tilde{u}_{ij} = a_{ij}\prod(1+\varepsilon_k) - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj}(1+\delta_k)$$ 非零最多 m+1次

$$a_{ij} = \cancel{\frac{\hat{u}_{ij}}{(1+\varepsilon)^{m+1}}} \quad \cancel{\frac{\hat{u}_{ij}}{(1+\varepsilon)^{m+1}}} \quad \frac{\hat{u}_{ij}}{(1+\varepsilon)^{m+1}} + \sum \hat{l}_{ik}\hat{u}_{ik}\frac{(1+\delta)^{m+2}}{(1+\varepsilon)^{m+1}}$$

$$= \sum \hat{l}_{ik}\hat{u}_{kj} - e_{ij}$$

$$e_{ij} = \hat{l}_{ii}\hat{u}_{ij}\frac{(1+\varepsilon)^{m+1}-1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} + \sum \hat{l}_{ik}\tilde{u}_{ik}\frac{(1+\delta)^{m+2}-(1+\delta)^{m+1}}{(1+\varepsilon)^{m+1}}$$

$$|e_{ij}| \le \sum_{k=1}^{i} |\hat{l}_{ik}|\,|\tilde{u}_{kj}|\,\frac{1.01(m+2)u}{1-1.01(m+1)u}$$

即 $\|E\|_\infty \le \frac{1.01(m+2)u}{1-1.01(m+1)u} \cdot n\|\tilde{U}\|_\infty\|\tilde{L}\|_\infty$

Date. No.

21. $\tilde{l}_{kk} = fl\left[\sqrt{a_{kk} - \sum_{p=1}^{k} \tilde{l}_{kp}}\right.$

$= [a_{kk}(1+\delta_k) - \sum_{p=1}^{k-1} \tilde{l}_{kp}^2 (1+\delta_p)]^{\frac{1}{2}} (1+\varepsilon_k)$

$\Rightarrow a_{kk} = \frac{\tilde{l}_{kk}^2}{(1+\delta_k)(1+\varepsilon_k)^2} + \sum_{p=1}^{k-1} \tilde{l}_{kp} \frac{(1+\delta_p)}{(1+\delta_k)}$

$\Rightarrow e_{kk} = \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon_k)^2(1+\delta_k)}\right) \tilde{l}_{kk}^2 + \sum_{p=1}^{k-1} \tilde{l}_{kp}^2 \left(1 - \frac{1+\delta_p}{1+\delta_k}\right)$

$\Rightarrow |e_{kk}| \leq \frac{2.02\,nu}{1-1.01nu} \sum_{p=1}^{k} \tilde{l}_{kp}^2$

$\tilde{l}_{ik} = fl\left(\left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} \tilde{l}_{ip}\tilde{l}_{kp}\right) / \tilde{l}_{kk}\right). \ (i \neq k)$

类似地

$|e_{ik}| \leq \frac{2.02nu}{1-1.01nu} \sum_{p=1}^{k} |\tilde{l}_{ip}|\,|\tilde{l}_{kp}|$

$\Rightarrow |E| \leq \frac{2.02nu}{1-1.01nu} |\tilde{L}|\,|\tilde{L}|^T$