Homework-Iterative Method to Find Roots

PB18010496 杨乐园

2021 年 4 月 16 日

1 Introduction

编写牛顿迭代法与弦截法求根的通用程序，并对函数$f(x) = -x + \frac{1}{3}x^3$分别采用牛顿迭代法与弦截法，在初值为$x_0 = 0.1, 0.2, 0.9, 9.0$处迭代计算相应的迭代解。

2 Method

这一次实验方法比较直白，只需按照对应的迭代方式构造出函数即可。

首先对于牛顿迭代法，迭代函数为

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

迭代点列的格式为

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

从而只需依照该迭代格式直接生成相关的点列即可，但注意，为了精度需求，内部采用符号计算结果，最后进行数值化简，并且设置迭代跳出的误差为10^{-15}，记录迭代次数与最终迭代数值解，生成输出列表即可

对于弦截法，其迭代格式为

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

从而依据此迭代格式直接迭代即可。由于弦截法并未给出x_1，我们这里取牛顿迭代法算出的x_1即可，另外仍设置迭代跳出的误差为10^{-15}，并记录迭代次数与最终迭代数值解，并生成输出列表。

3 Results

输出结果如下：

图 1: 牛顿迭代法

初值x0	迭代次数	数值结果	数值误差
0.1	4	$1.186318098578189948 0\times10^{-88}$	$1.\times10^{-15}$
0.2	4	$6.585316213013012414 0\times10^{-64}$	$1.\times10^{-15}$
0.9	8	-1.7320508075688772935	$1.\times10^{-15}$
9.	10	1.7320508075688772935	$1.\times10^{-15}$

图 2: 弦截法

初值x0	迭代次数	数值结果	数值误差
0.1	5	$-2.128094694578842172 0\times10^{-50}$	$1.\times10^{-15}$
0.2	5	$-2.404679520261929046 0\times10^{-37}$	$1.\times10^{-15}$
0.9	10	1.7320508075688772935	$1.\times10^{-15}$
9.	14	1.7320508075688772935	$1.\times10^{-15}$

4 Discussion

通过对数据的结果观察我们可以发现：对于牛顿迭代法，初值为$x_0 = 0.1, 0.2, 0.9, 9.0$时，迭代解分别收敛于原函数的精确根$0, 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$；而对于弦截法，迭代解则分别收敛于原函数的精确根$0, 0, \sqrt{3}, \sqrt{3}$；收敛次数上面，在保证相同误差下，弦截法要慢于牛顿迭代法几次；并且可以看到初值$x_0 = 0.9$时，二者收敛的根完全不一样，分别为$-\sqrt{3}, \sqrt{3}$，可见用弦的斜率代替导数值还是有很大区别的，这可能直接影响到所收敛到的根值。

5 Computer Code

代码部分请参见附件!(Homework5_0413.nb)。