$$\partial_2^4=\begin{pmatrix}\partial_2^3 & 0_{4\times4}\\ (-1)^2\cdot E_6 & \partial_1^3\end{pmatrix}_{10\times10}=\left(\begin{array}{cccccc|cccc}1&-1&1&0&0&0&&&&\\1&0&0&-1&1&0&&&&\\0&1&0&-1&0&1&&0&&\\0&0&1&0&-1&1&&&&\\\hline &&&&&&-1&1&0&0\\&&&&&&-1&0&1&0\\&&&&&&0&-1&1&0\\&&&E_6&&&-1&0&0&1\\&&&&&&0&-1&0&1\\&&&&&&0&0&-1&1\end{array}\right),$$

$$\partial_3^4=\begin{pmatrix}\partial_3^3 & 0_{1\times6}\\ (-1)^3\cdot E_4 & \partial_2^3\end{pmatrix}_{5\times10}=\left(\begin{array}{cccc|cccccc}-1&1&-1&1&&&0&&&\\\hline &&&&1&-1&1&0&0&0\\&&&&1&0&0&-1&1&0\\&&-E_4&&0&1&0&-1&0&1\\&&&&0&0&1&0&-1&1\end{array}\right),$$

$$\partial_4^4=((-1)^4\cdot E_1\quad \partial_3^3)_{1\times5}=(1\quad -1\quad 1\quad -1\quad 1).$$

例 3. 求 ∂_2^5.

$$\partial_2^5=\begin{pmatrix}\partial_2^4 & 0_{10\times5}\\ (-1)^2\cdot E_{10} & \partial_1^4\end{pmatrix}_{20\times15}=\left(\begin{array}{cc|cc}\partial_2^3 & 0_{4\times4} & & \\ E_6 & \partial_1^3 & 0 & \\\hline & & \partial_1^3 & 0_{6\times1}\\ E_{10} & & -E_4 & \partial_0^3\end{array}\right).$$

参　考　资　料

[1] [英]希尔顿・瓦理著，江泽涵等译，同调论，上海科学技术出版社，1963.
[2] 江泽涵，拓扑学引论，第二分册，上海科技出版社，1965.
[3] 张禾瑞 郝炳新编.《高等代数》下册 1958 年版 p266

满足一般二点端点条件的三次样条的收敛性定理

保明堂　　　　常道荣
（云南大学数学系）　（昆明磷矿矿务局电大）

满足一般二点端点条件

$$\text{i)}\begin{cases}2M_0+\lambda_0M_1=d_0,\\ \mu_nM_{n-1}+2M_n=d_n\end{cases}\text{和 ii)}\begin{cases}2m_0+\mu_0m_1=c_0,\\ \lambda_nm_{n-1}+2m_n=c_n\end{cases}$$

的三次插值样条的存在唯一性，文 [2，3] 都作了讨论． 本文在此基础上，对于非均匀网格，讨论满足一般二点端点条件的三次插值样条的收敛性．

由于 M_j，m_j 所满足的线性方程组为

i) $AM=D$ 和 ii) $Bm=C$，

就 $AM=D$ 而言，A^{-1} 的元素为

$$A_{ij}^{-1}=(-1)^{i+j}|A|_{j-1}^{0}\mu_{j+1}\mu_{j+2}\cdots\mu_i|A|_n^{i+1}/|A|_n^0,\quad 0\leqslant j\leqslant i\leqslant n,$$

$$A_{ij}^{-1}=(-1)^{i+j}|A|_{i-1}^{0}\lambda_i\lambda_{i+1}\cdots\lambda_{j-1}|A|_n^{j+1}/|A|_n^0,\quad 0\leqslant i\leqslant j\leqslant n$$

若对任何 i，j，n 能证明 $A(n,i,j)=|A|_{i-1}^{0}|A|_n^{j+1}/|A|_n^0$ 是一致有界的（当 $n\to\infty$），那么，$\|A^{-1}\|$（或 $\|B^{-1}\|$）的有界性的证明就可立即得到，从而收敛性问题就容易了．为此，先建立一些引理，证明存在充分大的 N，当 i，$j>N$，$n\to\infty$ 时，$A(n,i,j)$ 是一致有界的；当 i，$j<N$，$n\to\infty$ 时，结果亦成立．

在讨论中，除采用[1]的记号外，并引入记号

$$|A|_m^i=\begin{vmatrix} 2 & \lambda_i & & & \\ \mu_{i+1} & 2 & \lambda_{i+1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \mu_{m-1} & 2 & \lambda_{m-1} \\ & & & \mu_m & 2 \end{vmatrix},\quad i=0,1,\cdots,n;\ i\leqslant m\leqslant n.$$

当 $i=0$，$m=n$ 时，$|A|_m^i=|A|_n^0=|A|$．

一、$\|A^{-1}\|$ 有界性的证明

在这里，需引用 [4] 的一些结果．类似于 [4] 的引理 2，若 $0<\lambda_i$，$\mu_j<1$，且规定 $|A|_j^j=2$，可得

$$|A|_{k+1}^j>|A|_k^j,\ |A|_k^j\geqslant 2,\ 0<j\leqslant k,\ k=1,2,\cdots. \tag{1.1}$$

由(1.1)若 $\lambda_0<2|A|_{n-2}^1/(\mu_1|A|_{n-2}^2)$，$\mu_n<2|A|_{n-1}^2/(\lambda_{n-1}|A|_{n-2}^2)$ 时，容易证明

$$\lambda_0<\frac{4}{\mu_1},\ \mu_n<\frac{4}{\lambda_{n-1}}. \tag{1.2}$$

应用归纳法，可以证明

$$|A|_m^{k+1}|A|_{m-1}^k-|A|_m^k|A|_{m-1}^{k+1}=\prod_{i=k}^{m-1}\lambda_i\prod_{j=k+1}^{m}\mu_j, \tag{1.3}$$

对于 $0<\lambda_i,\mu_j<1$，$k\leqslant m-2$，$k=1,2,\cdots,n-3$ 成立．由(1.3)可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|A|_{t-2}^k}{|A|_{t-1}^k}=\lim_{t\to\infty}\frac{|A|_{t-2}^{k+1}}{|A|_{t-1}^{k+1}},\ 0<k\leqslant t-2,\ t=1,2,\cdots, \tag{1.4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|A|_{t-1}^k}{|A|_{t-1}^{k+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{|A|_{t-2}^k}{|A|_{t-2}^{k+1}},\ 0<k\leqslant t-3,\ t=1,2,\cdots,. \tag{1.5}$$

由(1.4)，(1.5)推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A|_n^{k+1}}{|A|_n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{|A|_{n-1}^{k+1}}{|A|_{n-1}^k},\ k\leqslant n-2,\ n=1,2,\cdots, \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|A|_t^0}{|A|_{t+1}^0}=\lim_{t\to\infty}\frac{|A|_t^1}{|A|_{t+1}^1},\ t=1,2,\cdots. \tag{1.7}$$

将 $|A|_{p-1}^0/|A|_p^0$ 展成连分式,并由连分式的性质[5]得恒等式

$$\frac{|A|_{p-1}^0}{|A|_p^0}=\frac{1}{Q_0Q_1}+\frac{\lambda_{p-1}\mu_p}{Q_1Q_2}+\frac{\lambda_{p-1}\lambda_{p-2}\mu_p\mu_{p-1}}{Q_2Q_3}+\cdots+\frac{\lambda_{p-1}\lambda_{p-2}\cdots\lambda_0\mu_p\mu_{p-1}\cdots\mu_1}{Q_pQ_{p+1}},$$

$$p\text{ 为整数,且 }0<p<n. \tag{1.8}$$

[4]中已证明

$$Q_i\text{ 为单增数列,且 }Q_i\geqslant 1;\ Q_iQ_{i+1}\text{ 为单增数列,且 }Q_iQ_{i+1}\geqslant 2,$$

$$i=0,1,2,\cdots. \tag{1.9}$$

有了上述准备,可以证明

引理1. 设 $0<\lambda_i,\ \mu_j<1,\ 0<i<j<n;\ \lambda_0<\frac{4}{\mu_1},\ \mu_n<\frac{4}{\lambda_{n-1}}$, 且令 $\lambda=\max\limits_{i,j}(\lambda_i,\ \mu_j)$, 则有

i) 当 $p\to\infty$ 时, $|A|_{p-1}^0/|A|_p^0$ 收敛,且

$$\frac{1}{2}<\lim_{p\to\infty}\frac{|A|_{p-1}^0}{|A|_p^0}<\frac{1}{2-\mu_p\mu_{p-1}}; \tag{1.10}$$

ii) 当 $n\to\infty$ 时, $|A|_n^{p+1}/|A|_n^{p+2}$ 收敛,且

$$2-\lambda_{p+1}\mu_{p+2}<\lim_{n\to\infty}\frac{|A|_n^{p+1}}{|A|_n^{p+2}}<2. \tag{1.11}$$

证. 根据(1.2),(1.9),注意到(1.8)的右边 $\leqslant\frac{1}{2}\ [1+\lambda^2+\lambda^4+\cdots+\lambda^{2(p-1)}]+2\lambda_1^{2(p-1)}$, 而此级数当 $p\to\infty$ 时收敛,故 $|A|_{p-1}^0/|A|_p^0$ 收敛. 再由(1.7),并应用(1.9)和(1.1),即得(1.10). 当然对于 p 为有限数时,(1.10)亦成立. 同理可证 ii) 中的结论.

完全一样的思路,知 $|A|_{n-2}^1/|A|_{n-2}^2$ 和 $|A|_{n-1}^2/|A|_{n-2}^2$ 收敛. 并令 $\xi_0=\lim\limits_{n\to\infty}[2|A|_{n-2}^1/(\mu_1|A|_{n-2}^2)]$, $\eta_0=\lim\limits_{n\to\infty}[2|A|_{n-1}^2/(\lambda_{n-1}|A|_{n-2}^2)]$, 此时, ξ_0 与 η_0 为两个与 n 无关的有限数.

在引理1中,由于 $2-\lambda_{p+1}\mu_{p+2}>1$, $\frac{1}{2-\mu_p\lambda_{p-1}}<1$, 显然,当 $n\to\infty$ 时,有

引理2. 设 $0<\lambda_i,\ \mu_j<1,\ \lambda_0<\xi_0,\ \mu_n<\eta_0$, 有

$$\min\left[\frac{|A|_n^{p+1}}{|A|_n^{p+2}}-\lambda_p\mu_{p+1}\frac{|A|_{p-1}^0}{|A|_p^0}\right]\geqslant(2-\lambda_{p+1}\mu_{p+2})-\lambda_p\mu_{p+2}(2-\mu_p\lambda_{p-1})^{-1}$$

$$=\varepsilon(p)>0. \tag{1.12}$$

引理3. 设 $0<\lambda_i,\ \mu_j<1,\ \mu_n<\eta_0$, 则

$$|A|_n^{p+2}/|A|_n^q\text{ 收敛,且 }\lim_{n\to\infty}\frac{|A|_n^{p+2}}{|A|_n^q}>0. \tag{1.13}$$

证. 用反证法,将 $|A|_n^{p+2}$ 展开,并除以 $|A|_n^q$, 得

$$\frac{|A|_n^{p+2}}{|A|_n^q}=|A|_{q-1}^{p+2}-|A|_{q-2}^{p+2}\frac{|A|_n^{q+1}}{|A|_n^q}. \tag{1.14}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A|_n^{p+2}}{|A|_n^q}=0$, 由(1.14),得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A|_n^q}{|A|_n^{q+1}}=\frac{|A|_{q-2}^{p+2}}{|A|_{q-1}^{p+2}}. \tag{1.15}$$

由引理 1 的 ii) 及 $|A|_j^i$ 的单增性，(1.15) 的左边和右边的取值范围没有公共部分，故(1.15)不可能成立．因而 $\lim\limits_{n\to\infty}(|A|_n^{p+2}/|A|_n^q)\neq 0$.

又由(1.14)知，从 $|A|_n^{q+1}/|A|_n^q$ 的收敛性可得到 $|A|_n^{p+2}/|A|_n^q$ 的收敛性．

现证 $\lim\limits_{n\to\infty}(|A|_n^{p+2}/|A|_n^q)>0$. 此时，仍引用规定：当 $k=j$，$j-1$ 时，$|A|_k^j=2$，1. 对于 $n\to\infty$ 考虑

i) 当 $p+2=q$ 时，结论显然成立．

ii) 当 $p+2<q$ 时，由(1.14)有等式

$$\frac{|A|_n^{p+2}}{|A|_n^q}=\frac{1}{|A|_{q-1}^{p+2}}\left|\frac{|A|_{q-1}^{p+2}}{|A|_{q-2}^{p+2}}-\frac{|A|_n^{q+1}}{|A|_n^q}\right|.$$

由 $|A|_j^i$ 的单增性及(1.10)，亦得(1.13)成立．在(1.14)中，若 $|A|_{q-2}^{p+2}=0$ 时，结论显然成立．

iii) 当 $p+2>q$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A|_n^{p+2}}{|A|_n^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|A|_{p+1}^q-|A|_p^q\dfrac{|A|_n^{p+3}}{|A|_n^{p+2}}}>0.$$

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}(|A|_n^{p+2}/|A|_n^q)$ 为一大于零的有限数．

引理 4. 设 $0<\lambda_i$，$\mu_j<1$，$-\infty<\lambda_0<\xi_0$，$-\infty<\mu_n<\eta_0$，$0<p<q<n$，那么，$\lim\limits_{n\to\infty}\left||A|_p^0|A|_n^q/|A|_n^0\right|=N(p,\ q,\ \lambda_0)$ 为不等于零的有限数．

证． 将 $|A|_n^0$ 展开，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{|A|_n^0}{|A|_p^0|A|_n^q}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{|A|_n^{p+2}}{|A|_n^q}\right|\left|\frac{|A|_n^{p+1}}{|A|_n^{p+2}}-\lambda_p\mu_{p+1}\frac{|A|_{p-1}^0}{|A|_p^0}\right|,$$

由引理 2 和引理 3 即知上式右端为一不为零的有限数，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left||A|_p^0|A|_n^q/|A|_n^0\right|=N(p,\ q,\ \lambda_0)<\infty.$$

特别，对于 $\lambda_0<4+2\sqrt{3}$，$\mu_n<4+2\sqrt{3}$，$\lambda_i=\mu_j=\dfrac{1}{2}$，则有 [4] 中引理 8 的结果．

引理 5. 设 $\lambda_0<\xi_0$，$\mu_n<\eta_0$，$0<\lambda_i$，$\mu_j<1$，则 $\|A^{-1}\|$ 有界．

证 对于 $0<p$，$q<n$，令 $\Omega=\max\left||A|_p^0|A|_n^q/|A|_n^0\right|$，$\lambda=\max\limits_{i,j}(\lambda_i,\ \mu_j)$，由 A^{-1} 的元素知

$$\|A^{-1}\|=\left[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i+j}|A|_{j-1}^0\mu_{j+1}\cdots\mu_i|A|_n^{i+1}/|A|_n^0\right]$$

$$+\left[\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j}|A|_{i-1}^0\lambda_i\cdots\lambda_{j-1}|A|_n^{j-1}/|A|_n^0\right]$$

$$\leqslant\Omega\cdot 2\sum_{j=1}^{n}\lambda^j\leqslant\Omega/(1-\lambda).$$

所以 $\|A^{-1}\|$ 有界．

由于 $\|B^{-1}\|$ 的性质与 $\|A^{-1}\|$ 的一样，故 $\|B^{-1}\|$ 也是有界的.

二、收敛性定理的证明

定理 1. 设 $f(x)\in C^1[a, b]$，Δ 为 $[a, b]$ 上的网格分划，且 $0<\lambda_i$，$\mu_j<1$，i，$j=1, 2, \cdots, n-1$. 若 $-\infty<\lambda_0<\xi_0$，$-\infty<\mu_n<\eta_0$，那么，满足一般二端点条件的三次插值样条 $s_\Delta(x)$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta\|=0$，且

$$\varepsilon_1=c_0-(2+\mu_0)f'(a)\to 0,\ \varepsilon_2=c_n-(2+\lambda_n)f'(b)\to 0$$

时，在 $[a, b]$ 上，$s'_\Delta(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$，且关于 $[a, b]$ 内的 x 一致地有 $|s_\Delta^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)|=o(\|\Delta\|)^{1-p}$，$p=0, 1$.

证. 引入 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵

$$G=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & (1-\mu_0)/9 & & & \text{\Large 0} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \text{\Large 0} & & & (1-\lambda_n)/9 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

则由一阶导数所满足的方程组得

$$Bm-BGc=(I-BG)c, \tag{2.1}$$

这里，I 为 $(n+1)\times(n+1)$ 单位矩阵. (2.1)的右端为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(c_0-\frac{2+\mu_0}{3}c_1\right) \\ -\frac{\lambda_1}{3}\left(c_0-\frac{2+\mu_0}{3}c_1\right)+\frac{\mu_1}{3}(c_1-c_2) \\ -\frac{\lambda_2}{3}(c_1-c_2)+\frac{\mu_2}{3}(c_2-c_3) \\ \vdots \\ -\frac{\lambda_{n-1}}{3}(c_{n-2}-c_{n-1})+\frac{\mu_{n-1}}{3}(c_n-c_{n-1}) \\ \frac{1}{3}\left(c_n-\frac{2+\lambda_n}{3}c_{n-1}\right) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

由此不难得到向量(2.2)各行的估计分别为

$$\left|\frac{1}{3}\left(c_0-\frac{2+\mu_0}{3}c_1\right)\right|\leqslant\left|\frac{1}{3}[c_0-(2+\mu_0)f'(a)]\right| + \left|\frac{2}{3}(2+\mu_0)\omega(f';\ \|\Delta\|)\right|,$$

$$\left|\frac{1}{3}\left(c_n-\frac{2+\lambda_n}{3}c_{n-1}\right)\right|\leqslant\left|\frac{1}{3}[c_n-(2+\lambda_n)f'(b)]\right|$$
$$+\left|\frac{2}{3}(2+\lambda_n)\omega(f';\|\Delta\|)\right|,$$

$$\left|-\frac{\lambda_1}{3}\left(c_0-\frac{2+\mu_0}{3}c_1\right)+\frac{\mu_1}{3}(c_1-c_2)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{3}|c_0-(2+\mu_0)f'(a)|+\left|\frac{2}{3}(2+\mu_0)\omega(f';\|\Delta\|)\right|+3\omega(f';\|\Delta\|),$$

$$\left|-\frac{\lambda_{n-1}}{3}(c_{n-2}-c_{n-1})+\frac{\mu_{n-1}}{3}\left(c_n-\frac{2+\lambda_n}{3}c_{n-1}\right)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{3}|c_n-(2+\lambda_n)f'(b)|+\left|\frac{2}{3}(2+\lambda_n)\omega(f';\|\Delta\|)\right|+3\omega(f';\|\Delta\|),$$

以及

$$\left|-\frac{\lambda_i}{3}(c_{i-1}-c_i)+\frac{\mu_i}{3}(c_i-c_{i+1})\right|\leqslant 6\omega(f';\|\Delta\|),\quad 3\leqslant i\leqslant n-2,$$

这里，$\omega(f';\|\Delta\|)$ 为 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的连续模．综上所述，(2.2)的范数不超过两个量

$$\frac{1}{3}|\varepsilon_1|+\frac{2}{3}|2+\mu_0|\omega(f';\|\Delta\|)+6\omega(f';\|\Delta\|),$$
$$\frac{1}{3}|\varepsilon_2|+\frac{2}{3}|2+\lambda_n|\omega(f';\|\Delta\|)+6\omega(f';\|\Delta\|)$$

中之最大者，设此两个量中之最大者为 ε，则由引理 5 有

$$\|m-Gc\|\leqslant\|B^{-1}\|\varepsilon=\eta_1. \tag{2.3}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\|m-Gc\|\to 0$．又

$$Gc=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}c_0+(1-\mu_0)c_1/9\\ \frac{1}{3}c_1\\ \vdots\\ \frac{1}{3}c_{n-1}\\ \frac{1}{3}c_n+(1-\lambda_n)c_{n-1}/9\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{3}c_0+\frac{(1-\mu_0)}{9}c_1-f'(a)=\frac{1}{3}\varepsilon_1+\frac{1-\mu_0}{3}\omega(f';\|\Delta\|),$$
$$\frac{1}{3}c_n+\frac{(1-\lambda_n)}{9}c_{n-1}-f'(b)=\frac{1}{3}\varepsilon_2+\frac{1-\lambda_n}{3}\omega(f';\|\Delta\|),$$

所以，当 $n\to\infty$时，

$$\|Gc-(f'(x_0),\ f'(x_1),\ \cdots,\ f'(x_n))^T\|=\eta_2\to 0. \tag{2.4}$$

由(2.3),(2.4)，当 $n\to\infty$时，

$$\|m-f'\|=\|m-Gc+Gc-f'\|\leqslant\eta_1+\eta_2=\bar{\eta}\to 0,$$

其中，$f'=(f'(x_0),\ f'(x_1),\ \cdots,\ f'(x_n))^T$.

现考察 $|s'_\Delta(x)-(f_i-f_{i-1})/h_i|$．因为

$$s'_\Delta(x) = m_{j-1}\frac{(x_j - x)(2x_{j-1} + x_j - 3x)}{h_j^2} - m_j\frac{(x - x_{j-1})(2x_j + x_{j-1} - 3x)}{h_j^2}$$

$$+ 6\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j^3}(x - x_j)(x - x_{j-1}),$$

所以

$$\left| s'_\Delta(x) - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right| = \left| \left[\frac{3}{h_j^2}\left(x - \frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \right.$$

$$\times \left[(m_{j-1} - f'_{j-1}) + (m_j - f'_j) + \left(f'_{j-1} + f'_j - 2\frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right) \right]$$

$$\left. + \frac{1}{h_j}\left(x - \frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)[(m_j - f'_j) - (m_{j-1} - f'_{j-1}) + (f'_j - f'_{j-1})] \right|$$

$$\leqslant \left[\frac{3}{h_j^2}\left(\frac{h_j}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right][\bar{\eta} + \bar{\eta} + 2\omega(f'; \|\Delta\|)]$$

$$+ \frac{1}{h_j}\frac{h_j}{2}[\bar{\eta} + \bar{\eta} + \omega(f'; \|\Delta\|)] = 2\bar{\eta} + \frac{3}{2}\omega(f'; \|\Delta\|).$$

由此得到估计

$$|s'_\Delta(x) - f'(x)| = \left| \left[s'_\Delta(x) - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right] - \left[f'(x) - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right] \right|$$

$$\leqslant 2\bar{\eta} + \frac{5}{2}\omega(f'; \|\Delta\|) = o(1).$$

在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上，

$$|s_\Delta(x) - f(x)| = \left| \int_{x_{j-1}}^{x} [s'_\Delta(x) - f'(x)]dx \right| \leqslant o(1)\|\Delta\|.$$

故定理得证.

定理 2. 设 $f(x) \in C^2[a, b]$，Δ 为 $[a, b]$ 上的任意网格分划，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta\| = 0$。若 $-\infty < \lambda_0 < \xi_0$，$-\infty < \mu_n < \eta_0$，那么，满足一般二点端点条件的三次插值样条 $s_\Delta(x)$，当 $n \to \infty$，

$$\varepsilon_1 = d_0 - (2 + \lambda_0)f''(a) \to 0，\ \varepsilon_2 = d_n - (2 + \mu_n)f''(b) \to 0$$

时，$s''_\Delta(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f''(x)$，且关于 $[a, b]$ 内的 x 一致地有 $|s_\Delta^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)| = o(\|\Delta\|)^{2-p}$，$p = 0, 1, 2$.

证. 同样引入定理 1 中的矩阵 G，由 M 所满足的方程组有等式.

$$AM - AGd = (I - AG)d. \tag{2.5}$$

(2.5) 式的右端为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(d_0 - \frac{2 + \lambda_0}{3}d_1\right) \\ -\frac{\mu_1}{3}\left(d_0 - \frac{2 + \lambda_0}{3}d_1\right) + \frac{\lambda_1}{3}(d_1 - d_2) \\ -\frac{\mu_2}{3}(d_1 - d_2) + \frac{\lambda_2}{3}(d_2 - d_3) \\ \vdots \\ -\frac{\mu_{n-1}}{3}(d_{n-2} - d_{n-1}) + \frac{\lambda_{n-1}}{3}(d_n - d_{n-1}) \\ \frac{1}{3}\left(d_n - \frac{2 + \mu_n}{3}d_{n-1}\right) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

由于

$$d_j = 6\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right)\Big/(h_j + h_{j+1}) = 3f''(\xi_j),x_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}.$$

类似于定理1,向量(2.6)的范数不超过两个量

$$\frac{1}{3}\bar{\varepsilon}' + \frac{4}{3}(2+\lambda_0)\omega(f'';\|\Delta\|) + \frac{4}{3}\omega(f'';\|\Delta\|),$$

$$\frac{1}{3}\bar{\varepsilon}'' + \frac{4}{3}(2+\mu_n)\omega(f'';\|\Delta\|) + \frac{4}{3}\omega(f'';\|\Delta\|)$$

中之最大者,其中,$\omega(f'';\|\Delta\|)$ 为 $f(x)$ 的二阶导数的连续模. 设上述两个量中之最大者为 $\bar{\varepsilon}$. 根据 $\|A^{-1}\|$ 的有界性及(2.5),(2.6),当 $n\to\infty$ 时有

$$\|M - Gd\| \leqslant \|A^{-1}\|\bar{\varepsilon} = \bar{\eta}_1' \to 0.$$

类似于定理 1,当 $n\to\infty$ 时,

$$\|Gd - (f''(x_0), f''(x_1), \cdots, f''(x_n))^T\| = \bar{\eta}_2' \to 0.$$

所以,当 $n\to\infty$ 时,

$$\|M - f''\| \leqslant \bar{\eta}_1' + \bar{\eta}_2' = \bar{\eta}' \to 0,$$

这里,$f'' = (f''(x_0), f''(x_1), \cdots, f''(x_n))^T$.

现考察 $|f''(x) - s''_\Delta(x)|$. 由于 $s''_\Delta(x)$ 的线性性,

$$\begin{aligned}|f''(x) - s''_\Delta(x)| &= \left|f''(x) - \frac{M_j(x-x_j)}{h_j} - \frac{M_{j+1}(x_{j+1}-x)}{h_j}\right| \\ &= \left|[f''(x) - f''_j + f''_j - M_j]\frac{x-x_j}{h_j}\right. \\ &\quad \left.+ [f''(x) - f''_{j+1} + f''_{j+1} - M_{j+1}]\frac{x_{j+1}-x}{h_j}\right| \\ &\leqslant [\omega(f'';\|\Delta\|) + \bar{\eta}']\left(\frac{x-x_j}{h_j} + \frac{x_{j+1}-x}{h_j}\right) \\ &= \omega(f'';\|\Delta\|) + \bar{\eta}'.\end{aligned}$$

所以,当 $n\to\infty$ 时,$|f''(x) - s''_\Delta(x)| = o(1)$.

根据 *Roll* 定理在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上,$|f'(x) - s'_\Delta(x)| = o(\|\Delta\|)$,$|f(x) - s_\Delta(x)| = o(\|\Delta\|)^2$. 到此,定理 2 证毕.

在均匀的网格划分的情形下,[4] 中定理 1 和定理 2 是本文的定理 1 和定理 2 的特例.

参 考 资 料

[1] Ahlberg, J. H., E. N. Nilsson and J. L. Walsh, *The theory of spline and their application*, Academic Press, New York, 1967.

[2] 孙家昶,一般端点条件下三次插值样条的存在与唯一性,计算数学,2(1978),1—9.

[3] 保明堂,常道荣,关于三次样条存在性定理的注记,未发表.

[4] 保明堂,常道荣,在均匀网格当 λ_0, $\mu_n<4+2\sqrt{3}$ 时三次样条的收敛定理,数学的实践与认识,3(1979),40—54.

[5] A. H. 哈凡斯基著,叶乃膺译,连分式及其推广在近似分析问题上的应用,科学出版社,北京,1962.