Homework-Spline Function

PB18010496 杨乐园

2021 年 9 月 26 日

1 Introduction

分别对指数函数

$$f(x) = e^x, \qquad x \in [0,1]$$

在$N(= 10, 20, 30, 40)$的等距节点处构造三次自然样条、固定边界($S'(0) = 1, S'(1) = e$)的三次样条插值函数，并计算在每个区间中点$x_{i-\frac{1}{2}}$的差值，并取模最大值为误差值即

$$\max_i \{|f(x_{i-\frac{1}{2}} - S(x_{i-\frac{1}{2}})|\}$$

并对$N = 10, 20, 40, 80$比较上述两组节点的结果，并利用公式

$$Ord = \frac{ln(Error_{old}/Error_{new})}{ln(N_{new}/N_{old})}$$

计算算法的收敛阶。

除此之外，并利用

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i(x)dx = \frac{h_i}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{h_i^3}{24}(M_i + M_{i+1})$$

计算积分

$$\int_0^1 S(x)dx$$

的值，并给出与$\int_0^1 f(x)dx$精确积分的误差。

2 Method

通过Mathematica编程，首先构造相应结点(t)、函数值(y)、检验差值点(s)以及相关的一系列的辅助列表(h, b)，再根据Gauss消去法直接构造好相应所需的点列(u, v)，最后利用解上三角的回代法解出相应的二阶函数值(z)，并根据

$$S_i(x) = y_i + C_i(x - x_i) + B_i(x - x_i)^2 + A_i(x - x_i)^3$$

其中

$$A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i)$$
$$B_i = \frac{z_i}{2}$$

$$C_i = -\frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{h_i}{3}z_i + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

构造出相应的$S_i(x)$函数，以此即可计算出相应检验差值点的函数值，并可以计算相应差值。另一方面再根据Introduction中的公式计算出相应积分值，并可给出相应的误差。将上面功能写为相应的Module块，便于操作运算，最后输出相应列表。

3 Results

输出结果如下：

n	error1	order1	error2	order2
10	0.001241988377	–	$6.95586473214\times10^{-7}$	–
20	0.0003108171695	1.998513567	$4.38712913961\times10^{-8}$	3.98688079812
40	0.00007772448710	1.999625104	$2.75377529670\times10^{-9}$	3.99379442621
80	0.00001943239171	1.999905715	$1.72470641150\times10^{-10}$	3.99698813801

图 1: 插值函数误差以及收敛阶

n	integate1	error1	integrate2	error2
10	1.718370963762994	0.0000891353039485330	1.718281589865599	$2.38593446665395\times10^{-7}$
20	1.718292992222406	0.000011637633606852	1.718281813544292	$1.49147530917604\times10^{-8}$
40	1.718283225078593	$1.39661954755156\times10^{-6}$	1.718281827526832	$9.32213682285427\times10^{-10}$
80	1.718282003101554	$1.74642509068375\times10^{-7}$	1.718281828400781	$5.82640054004754\times10^{-11}$

图 2: $\int_0^1 S(x)dx$积分值以及相应误差

4 Discussion

通过对数据的观察我们发现：

对于三次自然样条，随着N的增大也即等距节点加密，样条函数与$f(x) = e^x$的误差逐渐减小，并通过对$order1$的观察我们发现，其阶数基本上都约等于2(1.9985-1.9999)，故可以看出三次样条函数以平方量级收敛于相应函数，符合相关理论证明给出的结论。其次，关于积分$\int_0^1 S(x)dx$，对表格的观察不难发现，随着N其也收敛于精确积分值$\int_0^1 f(x)dx$，即误差逐渐递减。

而对于固定边界($S'(0) = 1, S'(1) = e$)的样条函数，当$n = 10$时，误差就已经达到了6.956×10^{-7}如此小的程度，而且随着N的增大，其误差值也显著降低，甚至误差值远小于同组的三次自然样条函数误差值，而对于其收敛阶，明显为4(3.98688-3.99699)，也即成4次方量级收敛。另一方面，关于积分$\int_0^1 S(x)dx$，通过对表格的观察可以看到，随着N其也十分快速的收敛于精确积分值$\int_0^1 f(x)dx$，即误差逐渐递减，甚至误差值远小于同组的自然样条误差值。

5 Computer Code

代码部分请参见附件!(Homework4_0323.nb)。