偏微分方程数值方法

一般问题数值格式的稳定性分析

1 方程的稳定性

定义：微分算子 P 被称为半有界的 (semibounded)，如果对任意时间区间 $t_0 \leq t \leq T$，存在常数 α，使得对所有的足够光滑的函数 $\vec{w}(\vec{x})$，均有

$$2Re(\vec{w}, P\vec{w}) = (\vec{w}, P\vec{w}) + (P\vec{w}, \vec{w}) \leq 2\alpha \|\vec{w}\|_2^2.$$

定理：若算子 P 为半有界的，则方程的解满足 L^2 范数下稳定：

$$\|\vec{u}(\cdot,t)\|_2 \leq e^{\alpha(t-t_0)} \|\vec{u}(\cdot,t_0)\|$$

- **例**：抛物方程组
$$\vec{u}_t = P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})\vec{u} = (A(x,t)\vec{u}_x)_x$$
其中，$A(x,t) + A^*(x,t)$ 的特征值 $\kappa \geq \delta > 0$。

- **例**：对称的变系数双曲型方程组
$$\vec{u}_t = P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})\vec{u} = B(x,t)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + C(x,t)\vec{u}$$
其中，$B_j(x,t) = B_j^*(x,t)$ 为光滑周期的 Hermitian 矩阵函数，$C(x,t)$ 为光滑周期矩阵函数。

2 算子 Q 的性质

定义：空间离散算子 Q 被称为半有界的 (semibounded)，如果对所有的周期格点函数 v，满足

$$2Re(v, Qv)_{\Delta x} = (v, Qv)_{\Delta x} + (Qv, v)_{\Delta x} \leq 2\alpha \|v\|_{\Delta x}^2$$

定理：考虑半离散格式（method of lines）

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = Qv_j, \quad j = 0,1,\ldots,N+1, \\ v_j(0) = f_j, \end{cases}$$

若算子 Q 为半有界的，则解满足

$$\|v(\cdot,t)\|_{\Delta x} \leq e^{\alpha(t-t_0)}\|v(\cdot,t_0)\|_{\Delta x}$$

- **例**：考虑 C-N 全离散格式

  $$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}Q\left(v_j^{n+1}+v_j^n\right)$$

  若算子 Q 为半有界的，则

  $$\|v^n\|_{\Delta x} \leq e^{\beta(1+O(\Delta t))t_n}\|v^0\|_{\Delta x}, \quad \text{其中 } \beta = \max(0,\alpha)$$

- **例**：考虑向后 Euler 全离散格式

  $$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t} = Qv_j^{n+1}, \quad \text{或} \quad (I-\Delta tQ)\,v_j^{n+1} = v_j^n$$

  若算子 Q 为半有界的，则

  $$\|v^n\|_{\Delta x} \leq e^{\alpha(1+O(\Delta t))t_n}\|v^0\|_{\Delta x}$$

- **例**：考虑 Leap-frog 格式和 CN 格式的组合

  $$(I-\Delta tQ_1)\,v_j^{n+1} = 2\Delta tQ_0v_j^n + (I+\Delta Q_1)\,v_j^{n-1}$$

  若算子满足

  $$Re(w,Q_1w)_{\Delta x} \leq \alpha\|w\|_{\Delta x}^2, \quad Re(w,Q_0w)_{\Delta x} = 0$$

  $$\Delta t\|Q_0\|_{\Delta x} = \Delta t\max_w\frac{\|Q_0w\|_{\Delta x}}{\|w\|_{\Delta x}} \leq 1-\delta, \quad \delta > 0$$

  则格式稳定。