有限元方法 2021 秋（9 月 27、29 日作业）

金晨浩 SA21001033

1.x.20 证明 $n=1$ 时的 Sobolev 不等式，即 $\Omega=[a,b]$，$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le C\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$。

证明. 利用 1.x.16 的结论：$\forall x,y\in[a,b]$，$u\in W^{1,1}[a,b]$，$|u(x)-u(y)|=|\int_x^y u'(t)\,dt|\le\|u'\|_{L^1}$。
取 x_1,x_2 s.t. $|u(x_1)|=\max_\Omega|u|$，$|u(x_2)|=\min_\Omega|u|\Rightarrow\|u\|_{L^\infty}\le|u(x_1)-u(x_2)|+|u(x_2)|$
$\le\|u'\|_{L^1}+\frac{1}{b-a}\int_a^b|u|\,dx=\|u'\|_{L^1}+\frac{1}{b-a}\|u\|_{L^1}\Rightarrow\|u\|_{L^\infty}\le C\|u\|_{W^{1,1}}$，界定常数 $C=\max\{1,\frac{1}{b-a}\}$。 □

1.x.21 $\Omega=[a,b]$，$n=1$，证明 $\forall u\in W^{1,1}(\Omega)$，$u$ 几乎处处等于一个绝对连续函数。

证明. (i). 首先证明：若 f 满足 $\int_a^b f\varphi'\,dx=0,\ \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，则 $f\equiv C$ a.e.（非平凡！）

设 $g,h\in C_0^\infty(\Omega)$，$\int_a^b h\,dx=1$。令 $\varphi(x):=\int_a^x g(t)\,dt-\int_a^x h(t)\,dt\int_a^b g(t)\,dt\Rightarrow\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$。
$0=\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx=\int_a^b f(x)g(x)\,dx-(\int_a^b f(x)h(x)\,dx)(\int_a^b g(t)\,dt)=\int_a^b(f(x)-\int_a^b f(t)h(t)\,dt)g(x)\,dx$，
由变分引理，$f(x)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt$，a.e. $x\in\Omega\Rightarrow f$ 几乎处处等于常数。

(ii). 令 $u^*(x):=\int_a^x u'(t)\,dt$，注意到 $u-u^*$ 满足 (i) 的条件，所以 $u=u^*+C$ a.e. □

> Remark: 原题只要求证明存在 u 的某个 version 是连续函数。事实上这个结论可以更强，即上面答案给出的。

1.x.30 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘。证明：$\forall u\in W^{1,p}(\Omega)$，$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)}\le C\|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p}}$. 其中 $1\le p\le\infty$，说明 $p=\infty$ 时该估计的含义。

证明. (i).$1\le p<\infty$。因为 $|u(1,\theta)|^p=\int_0^1\frac{\partial}{\partial r}(r^p u(r,\theta)^p)\,dr=p\int_0^1 r^p u^{p-1}u_r+r^{p-1}u^p\,dr$
$\le p\int_0^1|u|^{p-1}|Du|+|u|^p\,dr$，而 $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p=\int_0^{2\pi}|u(1,\theta)|^p\,d\theta$，所以 $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p\le p\int_\Omega|u|^p+|u|^{p-1}|Du|\,dx\,dy$
$\le p(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p+\|Du\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1})=p\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}(\|u\|_{L^p(\Omega)}+\|Du\|_{L^p(\Omega)})\le p2^{1-\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$，
这里用到了不等式 $(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p),\ a,b>0,\ p\ge1$。

所以 $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)}\le C\|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p}}$，界定常数 $C=2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}}p^{\frac{1}{p}}$。

(ii).$p=\infty$，来证：$\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\le\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$，$\forall u\in W^{1,\infty}(\Omega)$。

$|u(1,\theta)|=|\int_0^1\frac{\partial}{\partial r}(ru(r,\theta))\,dr|=|\int_0^1 u+ru_r\,dr|\le\|u\|_{L^\infty(\omega)}+\|Du\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^1 r\,dr\le\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$。 □

Remark: 根据 Evans 5.8(b) 结论，当 Ω 边界正则性足够好时，$u \in W^{1,\infty}(\Omega) \Leftrightarrow u$ 在 Ω 上 Lipschitz 连续。

1.x.32 略。

2.x.2 设 M 为 Hilbert 空间 H 的子空间，证明 $(M^{\perp})^{\perp} = M$。

证明. 由定义，$M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ 平凡。$\forall x \in (M^{\perp})^{\perp}$, 对 x 关于 M 做正交分解得 $x = y + z$, $y \in M,\ z \in M^{\perp}$。注意到 $z = x - y \in (M^{\perp})^{\perp} \Rightarrow z \in (M^{\perp})^{\perp} \cap (M^{\perp}) = \{0\} \Rightarrow x = y \in M$。 □

Remark：对一般的集合 M，我们有：$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span}(M)}$。证明思路类似。

2.x.3 设 H 为 Hilbert 空间，证明：$\forall M, N \subset H,\ M \subset N \Rightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$；$\{0\}^{\perp} = H$。

证明. $\forall x \in N^{\perp}$, 成立 $(x, y) = 0,\ \forall y \in N \Rightarrow (x, y) = 0,\ \forall y \in M \Rightarrow x \in M^{\perp}$；

$\forall x \in H,\ (x, 0) = 0 \Rightarrow H \subset \{0\}^{\perp} \Rightarrow H = \{0\}^{\perp}$。 □

2.x.4 （平行四边形法则）证明 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall x, y \in H.$
这里 $\|\cdot\|$ 为 Hilbert 空间 $(H, (\cdot,\cdot))$ 上的内积诱导的范数。

证明. $\forall x, y \in H$, LHS$= \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \cdots$(平凡验证)。 □

2.x.5 记 P_M 为 Hilbert 空间 H 到闭子空间 M 上的正交投影。证明：$P_{M^{\perp}} = P_M^{\perp}$。

证明. $\forall x \in H,\ \exists! y \in M,\ z \in M^{\perp}$ s.t. $x = y + z$。因为 $(M^{\perp})^{\perp} = M \Rightarrow P_{M^{\perp}}(x) = z$,

$P_M^{\perp}(x) = x - y = z \Rightarrow P_M^{\perp}(x) = P_{M^{\perp}}(x),\ \forall x \in H$。 □