偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2019-09

1 模型方程—对流方程

本章以模型方程的初值问题为例，介绍有限差分方法的构造，及其基本性质和理论

1.1 对流方程的初值问题

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases} \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 是光滑的 2π 周期的周期函数

1. 初值是一个谐波，对流方程的初值问题(*)的解

   即初值为： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$

   假设解为（即：与初值同类型的解—谐波解）：

   $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega, t)$；代入方程及初值得： $\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = i\omega\hat{u} \\ \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \end{cases}$

   $\Rrightarrow$： $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega(x+t)} \hat{f} = f(x+t)$ 是问题的一个解

2. 一般情况的初值（如：初值为 2π 周期的光滑函数），对流方程的初值问题(*)的解

   即 $f(x)$ 是光滑的 2π 周期的周期函数，则有： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$

   $\Rrightarrow$： $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x+t)} \hat{f} = f(x+t)$

   $\Rrightarrow$：对于固定的 t，关于 $u(x,t)$ 的Parseval关系成立，即：

   $\|u(\cdot,t)\|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |e^{i\omega(x+t)} \hat{f}|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2 = \|f(\cdot)\|^2$ 。

   其中 $\|u\|^2$ 常称为 u 的能量。

   由此可见：该问题的能量是模守恒的。

此外，由方程可得：$uu_t = uu_x$，

$\Rrightarrow$：$\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(\frac{u^2}{2})dx = \int_0^{2\pi}\frac{d}{dx}(\frac{u^2}{2})dx = \frac{u^2}{2}|_0^{2\pi} = 0$

$\Rrightarrow$：本问题的近似方法都应该接近能量是模守恒的

3. 对流方程的初值问题(*)解的特性

$\frac{du}{dt}|_l = (\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x})|_l = (\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x})|_l = 0$，其中$l$为：$\frac{dx}{dt} = -1$，即：$x + t =$常数

$\Rightarrow$：(*)解沿l是不变的，即：$u(x,t) = f(x+t)$；l称为$u_t = u_x$的特征线。这儿l为直线$\Rightarrow$：初值沿特征线传播，传播速度为：$\frac{dx}{dt} = -1$是有限的

$\Rrightarrow$：问题(*)存在特征线，且特征线为直线,解沿特征线是不变的。初值沿特征线以有限速度传播。

1.2 对流方程的初值问题的有限差分方法—二层格式

1. 剖分

由于本问题是2π周期的，所以将区域$[0,2\pi]$用$N+1$个节点x_j均匀剖分，即：$x_j = j\cdot h$，$j = 0,1,\cdots,J$；空间步长为：$h = \frac{2\pi}{J}$；时间离散：均匀剖分，取时间步长为Δt，$t_n = n\cdot\Delta t$，$n = 0,1,\cdots,N$。

格点函数值：解$u(x,t)$在(x,t)平面上的格点$P = (x_j,t_n)$处的值记为：$u_j^n = u(x_j,t_n)$；近似值记为：$v_j^n \simeq u_j^n$；

由于u是2π周期的，所以v 也是2π周期的；故有：$v_j^n = v_{j+J}^n$

2. 方程离散—差商近似微商：

1阶导数$\approx$ 1阶差商（前差-F、后差-B、中心差-C）对时间的1阶导数用前差近似，对空间的1阶导数用中心差近似；即：$u_t|_{j,n} \simeq$

$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}$，$u_x|_{j,n} \simeq \frac{v_{j+1}^n-v_j^n}{2h}$；

$\Rightarrow$：$FTCS$ 格式（有限差分方法、有限差分方程、离散方程）：

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_j^n) = (I + \Delta t D_0)v_j^n \equiv Qv_j^n \\ v_j^0 = f_j = f(x_j), \qquad j = 0, \cdots, J \end{cases} \tag{*1}$$

3. 差分方程(*1)的解

a. 初值是一个谐波，(*1)的近似解

取：$f_j = f(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{f}(\omega)$，$j = 0, 1, \cdots, J$

假设近似解也为一个谐波（即：与初值同类型的解—谐波解）：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$，$j = 0, 1, \cdots, J$；代入差分方程得：

$$e^{i\omega x_j}\hat{v}^{n+1}(\omega) = (e^{i\omega x_j} + \frac{\lambda}{2}(e^{i\omega x_{j+1}} - e^{i\omega x_{j-1}}))\hat{v}^n(\omega)$$

其中 $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$。令 $\xi = \omega h$，则上式可以写为：

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = (1 + i\lambda sin\xi)\hat{v}^n(\omega) = \hat{Q}\hat{v}^n(\omega)$$

，其中 $\hat{Q} = 1 + i\lambda sin\xi$ 称为算子 $Q = (I + \Delta t D_0)$ 的放大因子，或符号。

$\Rightarrow$：$\hat{v}^n(\omega) = \hat{Q}\hat{v}^{n-1}(\omega) = \cdots = \hat{Q}^n\hat{v}^0(\omega) = \hat{Q}^n\hat{f}(\omega)$。

显然，我们可得到：

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j}\hat{Q}^n\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+i\lambda sin\xi)^n e^{i\omega x_j}\hat{f}(\omega)$$

考虑：ω 固定，$\Delta t, h \to 0$ 时，v_j^n 是否收敛于PDE初值问题的解 u_j^n。

ω固定，$h \to 0$，$\Rightarrow$：$\xi = \omega h \to 0$。即只要讨论ξ为小量的情形。

$\hat{Q}^n = (1 + i\lambda sin\xi)^n = (1 + i\omega\Delta t + O(\Delta t h^2\omega^3))^n$

$= (1 + O(\Delta t^2\omega^2 + \Delta t \cdot h^2\omega^3))^n e^{i\omega\Delta t \cdot n}$

$= (1+O(n\Delta t^2\omega^2+n\Delta t\cdot h^2\omega^3))e^{i\omega t_n} = (1+O((\Delta t\omega^2+\Delta t^2\omega^3)t_n))e^{i\omega t_n}$

$\Rightarrow$：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 + O((\Delta t\omega^2 + \Delta t^2\omega^3)t_n))e^{i\omega t_n + x_j}\hat{f}(\omega)$

所以有：$\lim_{\Delta t, h\to 0} v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t_n + x_j}\hat{f}(\omega) = u(x_j, t_n)$；

即：本差分格式逐点收敛于本定解问题；或本差分格式的解逐点收敛于本定解问题的解。

b. 初值可以用一个三角插值表示，(*1)的近似解

取：$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-M}^{M} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)$

假设近似解也为表示为：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-M}^{M} e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega)$；

代入差分方程，根据叠加原理得：

$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-M}^{M}(1 + i\lambda sin\xi)^n e^{i\omega x_j}\hat{f}(\omega)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-M}^{M}(1 + O((\Delta t\omega^2 + \Delta t^2\omega^3)t_n))e^{i\omega t_n + x_j}\hat{f}(\omega)$

所以有：$\lim_{\Delta t, h\to 0} v_j^n = f(x_j + t_n) = u(x_j, t_n)$

c. 讨论初值出现小扰动时，(*1)的近似解的变化。

当初值$u(x,0) = 0$时，其解为$u(x,t) = 0$。若初值有小扰动，

如：$\hat{f}(\omega) = \{ \begin{array}{ll} \varepsilon & \omega = \frac{J}{4} \\ 0 & others \end{array}$

由：$\hat{v}^n(\omega) = (1 + i\lambda sin\xi)^n\hat{f}(\omega)$，得到：

$\hat{v}^n(\frac{J}{4}) = (1 + i\lambda sin(\frac{2\pi}{J+1}\frac{J}{4}))^n\varepsilon \sim (1 + i\lambda)^n\varepsilon$

由$n = \frac{t_n}{\Delta t}$可得：$|\hat{v}^{\frac{t_n}{\Delta t}}(\frac{J}{4})|^2 \sim (1 + i\frac{\Delta t}{h})^{2n}\varepsilon^2 = (1 + (\frac{\Delta t}{h})^2)^{\frac{t_n}{\Delta t}}\varepsilon^2$。

当取$t_n = 1$，即：$n = \frac{1}{\Delta t}$，则有：$|\hat{v}^{\frac{1}{\Delta t}}(\frac{J}{4})|^2 \sim (1 + (\frac{\Delta t}{h})^2)^{\frac{1}{\Delta t}}\varepsilon^2$

$\Rightarrow$：若固定 $\frac{\Delta t}{h}$，$\Delta t, h \to 0$，则有：$|\hat{v}^{\frac{1}{\Delta t}}(\frac{J}{4})| \to \infty$。

这个"增长"可以是任意快的，如：取 $\lambda = \frac{\Delta t}{h} = 10$，$\Delta t = 10^{-5}$，则有：$|\hat{v}^{\frac{1}{\Delta t}}(\frac{J}{4})|^2 \sim 100^{10^5}\varepsilon^2$，$\Rightarrow$：结果无效！

d. 稳定性

在实际计算中，误差是不可避免的。

Definition 1.1 ：考虑一种数值方法，若满足：

$\lim_{\Delta t, h \to 0} \sup_{0 \le t_n \le T} |\hat{Q}^n| \le K(T)$，则称该方法是稳定的

Example 1.1 讨论*(*1)*（即：*FTCS*格式）的稳定性

取一个谐波解，即：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$，

代入差分方程得放大因子：$\hat{Q} = 1 + i\lambda sin\xi$，$\xi = \omega h$

$\Rightarrow$：$|\hat{Q}|^n = |1 + i\lambda sin\xi|^n$。

若 $\Delta t \sim h$，即：$\lambda = \frac{\Delta t}{h} =$ 常数 > 0，且 $t_n \in [0, T]$

$\Rightarrow$：无法找到 $K(T)$ 满足稳定性要求。

$\Rightarrow$：此时，该方法是不稳定的

若 $\Delta t \sim h^2$，即：$\lambda = \frac{\Delta t}{h^2} = c =$ 常数 > 0，且 $t_n \in [0, T]$

$\Rightarrow$：$|\hat{Q}|^n = |1 + \lambda^2 sin^2(\xi)|^n \le (1 + (\frac{\Delta t}{h}))^2)^n = (1 + c\Delta t)^n$

$\le (e^{c\Delta t})^n = e^{ct_n} \le e^{cT} \equiv K(T)$。$\Rightarrow$：此时，该方法是稳定的

由此可见，FTCS格式是不适用的。一方面为了保持稳定性，Δt 的选取需要满足：$\lambda \frac{\Delta t}{h^2} = c =$ 常数 > 0，导致 Δt 很小，cost很大；另一方面，对于一个大的 t，e^{ct} 可以将小扰动放的很大，此时，解也无意义。

e. FTCS格式的修正–加人工粘性

粘性对应的是2阶导数项，"加人工粘性"相当于在方程上增

加2阶导数项；也就是在差分方程上增加$\sigma\Delta thD_+D_-v_j^n$，其中$\sigma$ 是常数。

修改后的差分方程为：$v_j^{n+1}=(I+\Delta tD_0)v_j^n+\sigma\Delta thD_+D_-v_j^n$

$\Rrightarrow$：$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}=D_0v_j^n+\sigma hD_+D_-v_j^n$。

对应的方程为：$u_t=u_x+\sigma hu_{xx}$。

当$\Delta t,h\to 0$时，上面方程收敛于PDE：$u_t=u_x$。

$\Rrightarrow$：当$\Delta t,h\to 0$时，差分方程收敛于偏微分方程。

下面的问题是：选择合适的σ、Δt、h；使得$|\hat{Q}|\le 1$，则有：$sup_{t_n,\omega,\Delta t,h}|\hat{Q}^n|\le K(T)$，即满足稳定性要求

将$v_j^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega)$代入差分方程，得：

$\hat{v}^{n+1}=(1+i\lambda sin(\xi)-4\sigma\lambda sin^2(\frac{\xi}{2}))\hat{v}^n=\hat{Q}\hat{v}^n$

$\Rrightarrow$：$\hat{Q}=1+i\lambda sin(\xi)-4\sigma\lambda sin^2(\frac{\xi}{2})$

$\Rrightarrow$：$|\hat{Q}|^2=(1-4\sigma\lambda sin^2(\frac{\xi}{2}))^2+(\lambda sin(\xi))^2$

$=1-2(2\sigma-\lambda)(2\lambda sin^2(\frac{\xi}{2}))+(4\sigma^2-1)(2\lambda sin^2(\frac{\xi}{2}))^2$，

取$y=2\lambda sin^2(\frac{\xi}{2})>0$。要使得$|\hat{Q}|^2\le 1$，则要求：

$y(-2(2\sigma-\lambda)+(4\sigma^2-1)y)\le 0$，

即：$-2(2\sigma-\lambda)+(4\sigma^2-1)y\le 0$

若$\sigma\le\frac{1}{2}$，$\Rrightarrow$：$4\sigma^2-1\le 0$，再取$2\sigma-\lambda\ge 0$，

则：上面不等式显然成立。由此可得：$0<\lambda\le 2\sigma\le 1$

若$\sigma>\frac{1}{2}$，取$sin^4(\frac{\xi}{2})=sin^2(\frac{\xi}{2})$，则由$|\hat{Q}|\le 1$，可得：

$2\sigma-\lambda-4\sigma^2\lambda+\lambda\ge 0$；$\Rrightarrow$：$2\sigma\lambda\le 1$。

即：$\sigma\ge\frac{1}{2}$，且$\sigma\lambda\le\frac{1}{2}$

f. 二种常用的格式

Lax-Friedrich 格式：（取：$\sigma=\frac{h}{2\Delta t}=\frac{1}{2\lambda}$，$\lambda=\frac{\Delta t}{h}$）

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) + \Delta t D_0 v_j^0 = (I + \Delta t D_0)v_j^n + \frac{h^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

当 $\lambda \leq 1$ 时，有：$|\hat{Q}| \leq 1$

注意：与FTCS格式比较，发现：此方法形式上仅是将FTCS格式中的 v_j^n 改为：$\frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n)$；即做了一个空间平均。

Lax-Wendroff格式：（取：$\sigma = \frac{1}{2}\lambda = \frac{\Delta t}{2h}$）

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

当 $\lambda \leq 1$ 时，有：$|\hat{Q}| \leq 1$

g. 考虑一般的差分近似（单步格式）

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = Q v_j^n \quad Q = \sum_{\mu=-r}^{s} A_\mu(\Delta t, h) E^\mu \\ v_j^0 = f_j \end{cases}$$

其中 A_μ 是 Δt，h 的有理函数，$r, s \geq 0$，且是整数；即：用 $r+s+1$ 个函数 $v_{j-r}^n, \cdots, v_{j+s}^n$ 计算 v_j^{n+1}。

再次考虑谐波解：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$：代入格式得：
$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{Q}\hat{v}^n(\omega) = \hat{Q}^n \hat{v}^0(\omega)$，其中 $\hat{Q} = \sum_{\mu=-r}^{s} A_\mu e^{i\mu\xi}$

假设 $f(x)$ 可展开Fourier级数，即：

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$，且 $\sum_\omega |\hat{f}(\omega)|^2 < \infty$。

构造 f 的格点函数的三角插值：$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-M}^{M} e^{i\omega x} \tilde{f}(\omega)$，

若 f 是分片连续函数，则有：$\lim_{N\to\infty} \|\phi(x) - f(x)\| = 0$

Theorem 1.1 在有限时间区域 $0 \le t \le T$，考虑 $\Delta t, h \to 0$ 时，差分近似：$v_j^{n+1} = Qv_j^n$，$Q = \sum_{\mu=-r}^{s} A_\mu(\Delta t, h)E^\mu$，$v_j^0 = f_j$，假设：

(a) 初值 f 是（分片连续）可展开为*Fourier*级数（$\in L_2$），且其三角插值收敛于 f

(b) 差分近似是稳定的，即存在常数 K_s，使得对所有的 Δt 和 h 有：$\sup_{0\le t_n \le T} |\hat{Q}^n| \le K_s$

(c) 差分近似是相容的，即对每个固定的 ω，有：$\lim_{\Delta t, h\to 0} \sup_{0\le t_n\le T} |\hat{Q}^n(\xi) - e^{i\omega t_n}| = 0$

则：差分近似解的三角插值收敛于微分方程的解，即：

$$\lim_{\Delta t, h\to 0} \sup_{0\le t_n\le T} \|u(\cdot, t_n) - \psi_N(\cdot)\| = 0$$

其中 $u(\cdot, t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x_j+t_n)}\hat{u}^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_j}\hat{f}(\omega)$，差分近似解的三角插值为：

$\psi_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{i\omega x_j}\hat{Q}^n\hat{f}(\omega)$。

证明：

假设问题的初值是分片光滑的，则Parseval关系成立：

$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 = \|f\|^2$

取 M，使得 $0 < M < \frac{N}{2}$，则：

$\|u(\cdot, t_n) - \psi_N(\cdot)\|^2 = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2 + \sum_{|\omega|>\frac{N}{2}} |\hat{f}(\omega)|^2$

$\le \sum_{\omega=-M}^{M} |e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2 + \sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} |e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2$
$+ \sum_{|\omega|>\frac{N}{2}} |\hat{f}(\omega)|^2$

$$(|a-b|^2 \le |a|^2+|b|^2 = 2|a|\cdot|b| \le 2(|a|^2+|b|^2))$$

$$\le I + 2\sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} |\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2 + 2\sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} |\hat{f}|^2 + \sum_{|\omega|>\frac{N}{2}} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} + \sum_{|\omega|>\frac{N}{2}} = \sum_{|\omega|>M}$$

$$= I + 2\sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} |\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2 + \sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} |\hat{f}|^2 + \sum_{|\omega|>M} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\le I + 2\Big(\sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} + \sum_{|\omega|>\frac{N}{2}}\Big)|\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2 + \Big(\sum_{M<|\omega|\le\frac{N}{2}} + \sum_{|\omega|>\frac{N}{2}}\Big)|\hat{f}|^2 + \sum_{|\omega|>M} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$= I + 2\sum_{M<|\omega|} |\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2 + 2\sum_{M<|\omega|} |\hat{f}|^2 = I + II + III$$

$$I = \sum_{\omega=-M}^{M} |e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n\tilde{f}(\omega) + \hat{Q}^n\hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n\hat{f}(\omega)|^2$$
$$\le 2\sum_{\omega=-M}^{M} (|\hat{Q}^n(\tilde{f}-\hat{f})|^2 + |\hat{f}|^2|\hat{Q}^n - e^{i\omega t_n}|^2)$$

（由假设（a）和（c）可得：）

$$\lim_{M\to\infty} I \le 2\lim_{M\to\infty} \sum_{\omega=-M}^{M} (|\hat{Q}^n(\tilde{f}-\hat{f})|^2 + |\hat{f}|^2|\hat{Q}^n - e^{i\omega t_n}|^2)$$
$$= 2\lim_{M\to\infty} \sum_{\omega=-M}^{M} |\hat{Q}^n(\tilde{f}-\hat{f})|^2 + 2\lim_{M\to\infty} \sum_{\omega=-M}^{M} |\hat{f}|^2|\hat{Q}^n - e^{i\omega t_n}|^2 = 0$$

（由假设（a）可得：）

$$\lim_{M\to\infty} II = 2\lim_{M\to\infty} \sum_{M<|\omega|} |\hat{f}|^2 = 0$$

（由假设（b）可得：）

$$\lim_{M\to\infty} III = 2\lim_{M\to\infty} \sum_{M<|\omega|} |\hat{Q}^n|^2 \cdot |\tilde{f}(\omega) - \hat{f} + \hat{f}|^2$$

$\leq 4K_s^2 \lim_{M\to\infty} \sum_{M<|\omega|} (|\tilde{f} - \hat{f}|^2 + |\hat{f}|^2)$

$= 4K_s^2 (\lim_{M\to\infty} \sum_{M<|\omega|} |\tilde{f} - \hat{f}|^2 + \lim_{M\to\infty} II)$

$= 0$。証毕

作业：P50：2.1.1–2.1.3

大作业2

2、针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x,\ -\infty < x < \infty\ t > 0, \\ u(x,0) = sin(2\pi x),\ -\infty < x < \infty, \\ Periodic\ boundary\ condition, T = 1. \end{cases}$$

该方程的精确解为 $u(x,t) = sin(2\pi(x+t))$ 。

对时空区域做均匀剖分，其中 $x_j = j \cdot h,\ j = 0, 1, 2, ..., J$, 时间步长 $h = \frac{1}{J}$ 。令 $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$ 。

问题2.1： 取 $\lambda = 0.5$ ， $J = 80$ ，分别取 $T = 0.1, 0.4, 0.8, 1.0$ 。分别用FTCS、Lax-Friedrich和Lax-Wendroff方法计算其数值解。绘出最大误差随时间变化图；并给出评论。

问题2.2： 取 $\lambda = 0.5$ ， $T = 1.0$ ，分别取 $J = 10, 20, 40, 80, 160$ 。用Lax-Wendroff方法计算其数值解，并与精确解画在同一图上进行比较，给出评论。

1.3 对流方程的初值问题的有限差分格式—多层格式

一、 常系数对流方程的初值问题的常见的有限差分格式:

考虑常系数的对流方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 是 2π 周期的周期函数。

1. 显示格式：由已知层的函数值直接得到未知层的函数值

   如前面介绍的FTCS格式: $v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$

   由初值 $v_j^0 = f_j = f(x_j)$, $j = 0, \cdots, J$ 和上式可直接得到: v_j^n, $n = 1, \cdots, N$。$\Rrightarrow$: FTCS格式是显示格式。其它如: Lax-Fridrich 格式、Lax-Wendroff格式、FTFS格式、FTBS格式, $\cdots$

2. 隐式格式：不能由已知层的函数值直接得到未知层的函数值

   如BTCS格式、BTFS格式、BTBS格式、$\cdots$。BTCS格式: $v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1})$。无法用这个格式和初值 $v_j^0 = f_j = f(x_j)$, $j = 0, \cdots, J$ 直接得到: v_j^n, $n = 1, \cdots, N$。需要解方程组才能得到。

3. 单步格式（二层格式）: 格式只涉及二个时间层

   如: FTCS格式、BTCS格式、$\cdots$。

4. 多步格式（三层、及三层以上格式）格式: 涉及三个, 或三个以上时间层

   如: CTCS格式: $v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$

二、 蛙跳格式（即: CTCS格式）

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^{n-1} & + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \\ v_j^0 = f_j = f(x_j) \end{cases} 。$$

这儿v_j^1需要通过其它单步格式得到，如FTCS格式，

即：$v_j^1=v_j^0+\frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^0-v_{j-1}^0)$，$v_j^0=f_j$。

讨论谐波解，即：$v_j^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega)$，代入格式，得：

$$\hat{v}^{n+1}(\omega)=\hat{v}^{n-1}(\omega)+2i\lambda(sin\xi)\hat{v}^n(\omega)$$

令$\hat{v}^n(\omega)=z^n$，z为复数，代入上式得到特征方程：

$z=z^{-1}+2i\lambda(sin\xi)$，即：$z^2-2i\lambda(sin\xi)z-1=0$

对于$0<\lambda<1$，有二个不同的

解：$z_{1,2}=i\lambda(sin\xi)+-\sqrt{1-\lambda^2sin^2(\xi)}$，且$|z_{1,2}|=1$。

则特征方程的一般解为：$\hat{v}^n=\sigma_1z_1^n+\sigma_2z_2^n$；其中参

数$\sigma_{1,2}$由v_j^0和v_j^1确定。即：

$$\left\{\begin{array}{c}\hat{v}^0(\omega)=\hat{f}(\omega)\\ \hat{v}^1(\omega)=(1+i\lambda sin\xi)\hat{f}(\omega)\end{array}\right.,\ \Rightarrow:\ \left\{\begin{array}{c}\sigma_1+\sigma_2=\hat{f}\\ \sigma_1z_1+\sigma_2z_2=(1+i\lambda sin\xi)\hat{f}(\omega)\end{array}\right.$$

对于低频问题：$|\xi|=|\omega h|<<1$，若λ为常数，则有：

$$\left\{\begin{array}{c}z_1=1+i\omega\Delta t-\frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2+O(\omega^3\Delta t^3)=e^{i\omega\Delta t(1+O(\omega^2\Delta t^2))}\\ z_2=-1+i\omega\Delta t+\frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2+O(\omega^3\Delta t^3)=-e^{-i\omega\Delta t(1+O(\omega^2\Delta t^2))}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$：$\sigma_1=\hat{f}(1+O(\omega^2\Delta t^2))$，$\sigma_2=\hat{f}O(\omega^2\Delta t^2)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow:\ \hat{v}^n(\omega)=&\hat{f}(\omega)(1+O(\omega^2\Delta t^2))e^{i\omega t_n(1+O(\omega^2\Delta t^2))}\\ &+\hat{f}(\omega)O(\omega^2\Delta t^2)(-1)^ne^{-i\omega t_n(1+O(\omega^2\Delta t^2))}\end{aligned}$$

由此可见：解含有二部分；一是相应于准确

解$\hat{u}^n(\omega)=\hat{f}(\omega)e^{i\omega t_n}$的近似，即：

$$\begin{aligned}&\hat{f}(\omega)(1+O(\omega^2\Delta t^2))e^{i\omega t_n(1+O(\omega^2\Delta t^2))}\\ &\quad=\hat{f}e^{i\omega t_n(1+O(\omega^2\Delta t^2))}+O(\omega^2\Delta t^2)\hat{f}e^{i\omega t_n(1+O(\omega^2\Delta t^2))}\\ &\quad=(1+O(t_n\omega^3\Delta t^2))\hat{f}e^{i\omega t_n}+O(\omega^2\Delta t^2)\hat{f}e^{i\omega t_n(1+O(\omega^2\Delta t^2))},\end{aligned}$$

$\Rightarrow$：误差为：$O(t_n\omega^3\Delta t^2)$。

另一部分引起快速振荡，且与PDE无关，常称为“寄生”（parasitic）解。幸运的是：当$\omega^2\Delta t^2 << 1$时，振荡的振幅也很小，且不随时间增加。

此外，由于蛙跳格式是三层格式，所以上节的定理不适用。对于分片光滑的初值，利用前面得到的$\hat{v}(\omega)$公式，以及三角插值证明：蛙跳格式对PDE 解的收敛性。其收敛条件为：初值光滑以及稳定性条件：$\Delta t, h \to 0$时，$\lambda = \frac{\Delta t}{h} < 1-\delta$，$\delta > 0$。（作业）

三、　带源项的PDE初值问题$\begin{cases} u_t = u_x - au & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$的蛙跳格式

这儿$a > 0$，且为常数。

该初值问题的谐波解为：$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega(x+t)} e^{-at} \hat{f}(\omega)$。该解随时间的增长，振幅呈指数衰减。

该初值问题的蛙跳格式

为：$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + 2\Delta t a v_j^n$

讨论该格式的谐波解：，即：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$，代入格式，得：

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^{n-1}(\omega) + 2(i\lambda(sin\xi) - \Delta t a)\hat{v}^n(\omega)$$

令$\hat{v}^n = z^n$，代入上述方程得到其特征方程：$z^2 - 2(i\lambda(sin\xi) - \Delta t a)z - 1 = 0$。特征方程的解为：

$$z_{1,2} = i\lambda(sin\xi) - a\Delta t \pm \sqrt{1 + (i\lambda^2 sin^2(\xi) - a\Delta t)^2}$$

$\Rightarrow$：$\hat{v}^n(\omega) = \sigma_{11} z_1^n + \sigma_{22} z_2^n$

$\Rightarrow$：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j}(\sigma_{11} z_1^n + \sigma_{22} z_2^n) = e^{i\omega x_j}(\sigma_1 z^n + \sigma_2 z^n)$

讨论特殊情况，即：$\omega = 0$，$a\Delta t << 1$ 情况。

$$z_1 = -a\Delta t + \sqrt{1 + (a\Delta t)^2} = 1 - a\Delta t + \frac{1}{2}a^2\Delta t^2 + O(a^3\Delta t^3) = e^{-a\Delta t + O(a^3\Delta t^3)}$$

$$z_2 = -a\Delta t - \sqrt{1 + (a\Delta t)^2} = -1 - a\Delta t - \frac{1}{2}a^2\Delta t^2 + O(a^3\Delta t^3) = -e^{-a\Delta t + O(a^3\Delta t^3)}$$

$\Rrightarrow$： $v_j^n(0) = \hat{f}(0)(1 + O(a^2\Delta t^2))e^{-at_n(1+O(a^2\Delta t^2))}$

$+\hat{f}(0)O(a^2\Delta t^2)(-1)^n e^{at_n(1+O(a^2\Delta t^2))}$。

上式后面部分为寄生解。该寄生解得振幅随时间 t_n 呈指数增长。$\Rrightarrow$：解不可靠；$\Rrightarrow$：本问题的CTCS格式无效。

修正：将格式中的 v_j^n 改为 $\frac{1}{2}(v_j^{n+1} + v_j^{n-1})$，得到新的格式：

$$(1 + a\Delta t)v_j^{n+1} = (1 - a\Delta t)v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

$\Rrightarrow$：特征方程：$(1 + a\Delta t)z^2 = (1 - a\Delta t) - (2i\lambda sin\xi)z$

$\Rrightarrow$：特征方程的解：$z_{1,2} = \frac{i\lambda sin\xi}{1+a\Delta t} \pm \sqrt{\frac{1-\lambda^2 sin^2\xi - a^2\Delta t^2}{(1+a\Delta t)^2}}$

当 $\lambda^2 + a^2\Delta t^2 < 1$ 时，$|z_{1,2}| = \frac{\sqrt{1-a^2\Delta^2}}{1+a\Delta t} \approx e^{-a\Delta t}$

$\Rrightarrow$：$z_{1,2}$ 的振幅随时间 t_n 呈指数衰减，且衰减速度与PDE解的衰减速度相同

作业：P55：2.2.1–2.2.2

大作业3

3、针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x,\ -\infty < x < \infty\ t > 0, \\ u(x,0) = sin(2\pi x),\ -\infty < x < \infty, \\ Periodic\ boundary\ condition, T = 1. \end{cases} \tag{1}$$

该方程的精确解为 $u(x,t) = sin(2\pi(x+t))$。对时空区域做均匀剖分，其中 $x_j = j \cdot h,\ j = 0, 1, 2, ..., J$，时间步长 $h = \frac{1}{J}$。令 $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$。

问题3.1： 取$T=1.0$，$J=80$，分别取$\lambda=0.5,1.5$。用CTCS格式（v_j^1用FTFS格式）计算其数值解，并与精确解画在同一图上进行比较，给出评论。

问题3.2： 取$\lambda=0.5$，$T=1.0$，分别取$J=10,20,40,80,160$。用CTCS格式（v_j^1用FTFS格式）计算其数值解，并与精确解画在同一图上进行比较，给出评论。

问题3.3： 取$\lambda=0.5$，$J=80$，分别取$T=0.2,0.5$。用FTBS格式计算其数值解，并与精确解画在同一图上进行比较，给出评论。

1.4 迎风格式与CFL条件

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$；其解为 $u(x,t) = f(x+t)$。

一、 $u_t = u_x$ 的FTBS格式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_j^n - v_{j-1}^n) = (I + \Delta t D_-)v_j^n \equiv Qv_j^n \\ v_j^0 = f_j = f(x_j), \qquad j = 0, \cdots, J \end{cases}$$

取一个谐波解，即：$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$，

代入差分方程得放大因子：$\hat{Q} = 1 + \lambda(1 - e^{i\omega h})$，$\xi = \omega h$

$\Rightarrow$： $|\hat{Q}|^2 = (1 + \lambda(1 - cos\xi))^2 + (\lambda sin\xi)^2 =$
$(1 + 2\lambda sin^2\frac{\xi}{2})^2 + (\lambda sin\xi)^2 > 1$

$\Rightarrow$：该格式无法满足稳定性要求；即：该方法是不稳定的

$u_t = u_x$ 的FTBS格式不稳定的原因何在？如何构造稳定的格式？

二、 常系数对流方程初值问题的解的依赖区

沿直线 $x + t = constant$ 解不变。该直线称为特征线。在任意点 $P = (x,t)$ 处的解，由过该点的特征线与 $t = 0$ 的交点 $P_0 = (x_0, 0)$ 点的值 $u|_{P_0}$ 确定，即：$u|_P = u|_{P_0}$。

$D_P = \{P_0\}$ 称为 P 点的解的依赖区。若取 $P = (x_j, t_{n+1})$，则 $x_0 = x_j + t_{n+1}$。

三、 常系数对流方程的初值问题的有限差分格式的数值解的依赖区：

常系数对流方程初值问题的FTCS格式：$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$。

v_j^{n+1} 依赖于：$v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n$；$\Rightarrow$： $v_{j-2}^{n-1}, v_{j-1}^{n-1}, v_j^{n-1}, v_{j+1}^{n-1}, v_{j+2}^{n-1}$；

$\Rightarrow$： $\cdots$；$\Rightarrow$： $v_{j-n-1}^0, v_{j-n}^0, \cdots, v_j^0, \cdots, v_{j+n}^0, v_{j+n+1}^0$

在 $P=(x_j,t_{n+1})$ 点的近似解 v_j^{n+1} 依赖于初始时刻的点：

$x_{j-n-1},x_{j-n},\cdots,x_j,\cdots,x_{j+n},x_{j+n+1}$ 的近似解。

则称 $N_P=\{x_{j-n-1},x_{j-n},\cdots,x_j,\cdots,x_{j+n},x_{j+n+1}\}$ 为 P 点数值解的依赖区；

四、 CFL条件

CFL条件：PDE解的依赖区 D_P 必须被包含在数值解的依赖区 N_P： $D_P\subseteq N_P$

Theorem 1.2 *CFL条件是有限差分格式收敛的必要条件*

对于FTCS格式，若满足CFL条件，则要求满足： $x_{j-n-1}\le x_{P_0}\le x_{j+n+1}$

$\Rightarrow$： $(j-n-1)h\le jh+(n+1)\Delta t\le(j+n+1)h$，

$\Rightarrow$： $-1\le\frac{\Delta t}{h}\le 1$ 这是FTCS格式收敛的必要条件。

CFL条件适合于变系数情形，甚至是非线性双曲问题；它是这些格式收敛的必要条件！

五、 迎风格式

迎风格式：特征线方向与模板方向一致的格式；逆风格式：特征线方向与模板方向不一致的格式

Example 1.2 讨论 $u_t+au_x=0$， a 是常数，的迎风格式

*FTFS*格式的格式： $v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n-v_j^n)$。

v_j^{n+1} 依赖于： v_j^n,v_{j+1}^n； $\Rightarrow$： $v_j^{n-1},v_{j+1}^{n-1},v_{j+2}^{n-1}$； $\Rightarrow$： $\cdots$；

$\Rightarrow$： $v_j^0,\cdots,v_{j+n}^0,v_{j+n+1}^0$

则数值解的依赖区为： $N_P=\{x_j,\cdots,x_{j+n},x_{j+n+1}\}$

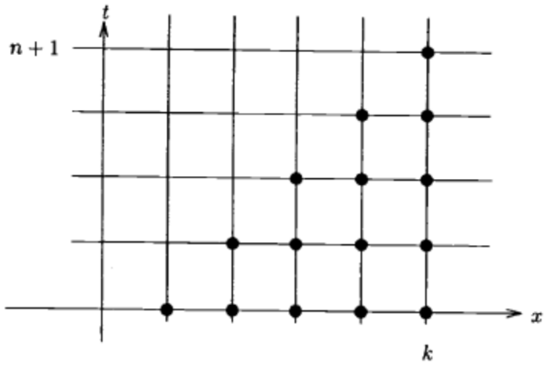

FIGURE 5.7.2. Numerical domain of dependence of point $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ for difference scheme (5.7.3) where $R = 1\Delta t/\Delta x$.

特征线为： $x - at = constant$

$\Rrightarrow$： 当 $a < 0$ 时，*FTFS*格式为迎风格式；当 $a > 0$ 时，*FTFS*格式为逆风格式。

$P = (x_j, t_{n+1})$ 点*PDE*的精确解的依赖区为： $D_P = \{x_{P_0}\}$， $x_{P_0} = x_j - at_{n+1}$。

*CFL*条件： $x_j \le x_{P_0} \le x_{j+n+1}$，

$\Rrightarrow$： $jh \le jh - a(n+1)\Delta t \le (j+n+1)h$， $\Rrightarrow$： $-1 \le \frac{a\Delta t}{h} \le 0$

$\Rrightarrow$： 当 $a < 0$ 时，*FTFS*格式为迎风格式，格式可能收敛；当 $a > 0$ 时，*FTFS*格式为逆风格式，格式不收敛。

对于*FTBS*格式做类似的分析可得：当 $a < 0$ 时，*FTBS*格式为逆风格式；当 $a > 0$ 时，*FTBS*格式为迎风格式。

$\Rrightarrow$： $u_t + au_x = 0$ 的迎风格式：

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - \frac{a\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n), & a < 0 \\ v_j^n - \frac{a\Delta t}{h}(v_j^n - v_{j-1}^n), & a > 0 \end{cases}$$

作业：针对方程 $u_t + u_x = 0$，导出其解的依赖区；其蛙跳格式的数值解的依赖区；以及CFL条件

1.5 隐式格式

一、 BTCS格式

讨论$\left\{\begin{array}{ll} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{array}\right.$的BTCS格式；其中该问题的初值、解均为$2\pi$周期的周期函数。

BTCS格式：$\left\{\begin{array}{l} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) \\ v_j^0 = f(x_j),\ j = 0, 1, \cdots, J v_j^n = v_{j+J+1}^n \end{array}\right.$

即：$\frac{\Delta t}{2h} v_{j-1}^{n+1} + v_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2h} v_{j+1}^{n+1} = v_j^n$；$v_0^n = v_{J+1}^n$；$v_{-1}^n = v_J^n$。

令$V^n = (v_0^n, \cdots, v_J^n)^T$，$\Rightarrow$：$AV^{n+1} = V^n$，

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2h} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\Delta t}{2h} \\ \frac{\Delta t}{2h} & 1 & -\frac{\Delta t}{2h} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t}{2h} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{\Delta t}{2h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\Delta t}{2h} & 1 & -\frac{\Delta t}{2h} \end{pmatrix}_{(J+1)\times(J+1)}$$

$\Rightarrow$要得到问题的解，则需要在每个时间步求解一个$J+1$阶线性代数方程组。

稳定性条件：

讨论简单波解：假设$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$，代入格式，得：

$(1 - i\lambda sin\xi)\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^n(\omega)$，$\Rightarrow$：放大因子：$\hat{Q} = \frac{1}{1 - i\lambda sin\xi}$，$\Rightarrow$：$|\hat{Q}| \le 1$。且除$\xi = 0, \pi$，即：$\omega = 0, \frac{\pi}{h}$以外，$|\hat{Q}| < 1$，即：解都是衰减的；$\omega = 0, \frac{\pi}{h}$时，$|\hat{Q}| = 1$，即：振幅不变。

$\Rrightarrow$：该格式是无条件稳定的——这是一个典型的隐式格式；对时间步长没有约束，可以选择较大的时间步长。大多数全隐式格式都是无条件稳定的

二、 Crank-Nicolson格式

$u_t = u_x = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_x$，

$(I - \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^n$， $j = 0, \cdots, J$

$\Rrightarrow$：放大因子：$\hat{Q} = \frac{2+i\lambda sin\xi}{2-i\lambda sin\xi}$， $\Rrightarrow$： $|\hat{Q}| = 1$。

$\Rrightarrow$：该格式是无条件稳定的，且对所有的ω（频率），振幅不变。

三、 θ–方法

$u_t = u_x = \theta u_x + (1-\theta)u_x$，

$(I - \Delta t\theta D_0)v_j^{n+1} = (I + \Delta t(1-\theta)D_0)v_j^n$， $j = 0, \cdots, J$，其中$0 \leq \theta \leq 1$。

$\Rrightarrow$：放大因子：$\hat{Q} = \frac{1+i(1-\theta)\lambda sin\xi}{1-i(1-\theta)\lambda sin\xi}$。

$\Rrightarrow$： $\theta \geq \frac{1}{2}$时，该格式是无条件稳定的。通常取：$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$。

作业：P58, 2.3.1

1.6 误差

预备知识——Taylor展开定理：

$f(x\pm h)=f(x)\pm hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(-h)^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{(-h)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)$，其中：$\xi$ 介于x与$x+h$之间。

一、 截断误差

Definition 1.2 截断误差：

与差分方程等价的*PDE*与源*PDE*的差。即：差分方程中近似解v_j^n用精确解u_j^n代替后得到的与差分方程等价的*PDE*与源*PDE*的差。

$\Rrightarrow$：截断误差是数值方法精度的度量。

Example 1.3 讨论$u_t=u_x$的*FTCS*格式的截断误差

*FTCS*格式：$v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)$。根据定义其截断误差$T(x,t)$为：

$T(x_j,t_n)=T_j^n=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}-(u_t-u_x)|_{x_j}^{t_n}$

$\quad=\frac{u(x_j,t_n+\Delta t)-u(x_j,t_n)}{\Delta t}-\frac{u(x_j+h,t_n)-u(x_j-h,tn)}{2h}-(u_t-u_x)|_{x_j}^{t_n}$

将上式在(x_j,t_n)处（简写为(j,n)）做*Taylor*展开，得：

$T_j^n=\frac{\Delta tu_t|_j^n+\frac{1}{2}\Delta t^2u_{tt}|_j^{\xi_t})}{\Delta t}-\frac{2hu_x|_j^n+2\frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_{\xi_x}^n}{2h}-(u_t-u_x)|_j^n$

$\quad=\frac{1}{2}\Delta tu_{tt}(x_j,\xi_t)-\frac{1}{12}h^2u_{xxx}(\xi_x,t)$；

其中$\xi_t\in(t_n,t_{n+1})$，$\xi_x\in(x_{j-1},x_{j+1})$。若取$M_{tt}$为$u_{tt}$的上界，$M_{xxx}$为$u_{xxx}$的上界，则有：

$$|T|\le\frac{1}{2}\Delta tM_{tt}+\frac{1}{12}h^2M_{xxx}$$

二、 格式（方法）的精度

Definition 1.3 数值格式的精度：

若数值格式的截断误差为：$T = O(h^p + \Delta t^q)$，则称该数值格式是 (p,q) 阶精度的；即：该格式对空间是 p 阶精度，对时间是 q 阶精度。

$\Rightarrow$：FTCS格式是 $(2,1)$ 阶精度；即：该格式对空间是 2 阶精度，对时间是 1 阶精度

Example 1.4 讨论 $u_t = u_x$ 的*FTCS*格式的一个修正格式的精度

*FTCS*格式的一个修正格式：

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \sigma\frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

。 根据定义其截断误差 $T(x,t)$ 为：

$$\begin{aligned}T_j^n &= \tfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \tfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h} - \tfrac{\sigma\Delta t(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)}{h} - (u_t - u_x)|_{x_j}^{t_n}\\ &= \tfrac{\Delta t u_t|_j^n+\frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^{\xi_t})}{\Delta t} - \tfrac{2hu_x|_j^n+2\frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_{\xi_x}^n}{2h} - (u_t-u_x)|_j^n\\ &= \tfrac{1}{2}\Delta t u_{tt}(x_j,t_n) - \sigma h u_{xx}(x_j,t_n) + O(h^2+\Delta t^2)\,;\end{aligned}$$

$\Rightarrow$：一般情况下：即 $\sigma \neq \frac{\Delta t}{2h}$，上述格式是 $(1,1)$ 阶精度的。

由于：$u_t = u_x$，$\Rightarrow$：$u_{tt} = (u_x)_t = (u_t)_x = u_{xx}$，

$\Rightarrow$：当 $\sigma = \frac{\Delta t}{2h}$ 时，$\Rightarrow$：$T = O(h^2 + \Delta t^2)$，即格式是 $(2,2)$ 阶精度的

BTCS格式的截断误差：$T_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h} - (u_t-u_x)|_{x_j}^{t_{n+1}}$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{u(x_j,t_n+\Delta t)-u(x_j,t_n)}{\Delta t} - \tfrac{u(x_j+h,t_{n+1})-u(x_j-h,t_{n+1})}{2h} - (u_t-u_x)|_{x_j}^{t_{n+1}}\\ &= \tfrac{1}{2}\Delta t u_{tt}|_{x_j}^{\eta} - \tfrac{1}{3!}h^2 u_{xxx}|_{\xi}^{t_{n+1}} = O(h^2+\Delta t^1)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$：BTCS格式是 $(1,2)$ 阶精度

三、 整体误差

整体误差：数值解与精确解之间的差，即：$e_j^n = v_j^n - u_j^n$

Example 1.5 讨论 $u_t = u_x$ 的*FTFS*格式的整体误差

*FTFS*格式的格式：$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n)$。

根据截断误差的定义有：$T_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$；

$\Rightarrow$：$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) + \Delta t T_j^n$；

$\Rightarrow$：$e_j^{n+1} = e_j^n + \frac{\Delta t}{h}(e_{j+1}^n - e_j^n) - \Delta t T_j^n = (1-\lambda)e_j^n + \lambda e_{j+1}^n - \Delta t T_j^n$；

其中 $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$。

令 $E^n = max_j\{|e_j^n|\}$，$\bar{T} = max_{j,n}\{|T_j^n|\}$；若 $0 < \lambda < 1$，则有：

$|e_j^{n+1}| \le (1-\lambda)E^n + \lambda E^n + \bar{T}\Delta t = E^n + \bar{T}\Delta t \le \cdots \le$

$E^0 + n\bar{T}\Delta t = E^0 + \bar{T}t_n$

若 $E^0 = 0$，即：初值是准确的；则：当 $\Delta t, h \to 0$ 时，

$\bar{T} \to 0$；且 $E^n \to 0$；即：数值解收敛，且收敛于精确解。

作业：P61：2.4.1–2.4.2

1.7 基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

常见的数值积分公式（回顾）

- 端点均为积分节点

  $n=1$（梯形公式）：

  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$， $h=x_1-x_0$， $\xi\in(x_0,x_1)$

  $n=2$（Simpson公式）：

  $$\int_{x_0}^{x_2} f(x)=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),$$
  $$h=x_2-x_1=x_1-x_0，\ \xi\in(x_0,x_2)$$

- 端点均不为积分节点

  $n=0$（中点公式）：

  $\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)=2hf(x_0)+\frac{h^3}{3}f''(\xi)$， $h=x_1-x_0=x_0-x_{-1}$， $\xi\in(x_{-1},x_1)$

  $n=1$：

  $$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)=\frac{3h}{2}(f(x_0)+f(x_1))+\frac{3h^3}{4}f''(\xi),$$
  $$h=x_2-x_1=x_1-x_0=x_0-x_{-1}，\ \xi\in(x_{-1},x_2)$$

- 积分节点仅为一个端点

  $$\int_a^b f(x)=(b-a)f(a)+\frac{1}{4}(b-a)^2f'(\xi)，\ \xi\in(a,b)$$

针对$u_t+au_x=0$， a为常数， $(x,t)\in\bar{D}=[0,1]\times[0,T]$，基于其积分形式，构造以格点处的函数为未知数的有限差分格式。

一、 剖分

用节点$0=x_0<x_1<\cdots<x_J=1$将$[0,1]$分成J个小区域(cell)；则涉及格点x_j的cell为: $I_j=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$， $j=1,\cdots,J-1$。

用节点$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$将$[0, T]$分成$N$个小区域$[t_n, x_{n+1}]$，$n = 0, \cdots, N-1$。

二、 方程离散

取时空区域$\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$为控制区域（控制体）。

讨论控制体Ω_j^n上，$u_t + au_x = 0$的积分形式：

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})dt = 0$$

该方程式是精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似，得到不同的有限差分格式；如：

由公式（）可得：

$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})dt = (u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n)\Delta t + \frac{1}{4}\Delta t^2 (u_t|_{j+\frac{1}{2}}^{\eta} - u_t|_{j-\frac{1}{2}}^{\eta})$，$\eta \in (t_n, t_{n+1})$

由中点公式可得：

$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n)dx = h(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{24}h^3(u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n)|_{x=\xi}$，$\xi \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$

$\Rrightarrow$：$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{h}(u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + O(h^2) + O(\Delta t) = 0$，$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) + O(h^2)$

$\Rrightarrow$：$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + O(h^2) + O(\Delta t) = 0$，即FTCS格式

$\Rrightarrow$：截断误差为$O(h^2 + \Delta t)$；对时间1阶、对空间2阶精度。

取时空区域$\Omega_j^n = [t_{n-1}, x_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$为控制区域（控制体）。

讨论控制体Ω_j^n上，$u_t+au_x=0$的积分形式：

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(u^{n+1}-u^{n-1})dx+\int_{t_n}^{t_{n+1}}a(u_{j+\frac{1}{2}}-u_{j-\frac{1}{2}})dt=0$$

该方程式精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似，得到不同的有限差分格式；如：

由中点公式可得：

$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(u_{j+\frac{1}{2}}-u_{j-\frac{1}{2}})dt=$
$2\Delta t(u_{j+\frac{1}{2}}^n-u_{j-\frac{1}{2}}^n)+\frac{\Delta t^3}{3}(u_{tt}|_{j+\frac{1}{2}}^{\eta}-u_{tt}|_{j-\frac{1}{2}}^{\eta})$，$\eta\in(t_{n-1},t_{n+1})$

由中点公式可得：

$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(u^{n+1}-u^{n-1})dx=$
$h(u_j^{n+1}-u_j^{n-1})+\frac{1}{24}h^3(u_{xx}^{n+1}-u_{xx}^{n-1})|_{x=\xi}$，$\xi\in(x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}})$

$\Rrightarrow$： $\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{\Delta t}+\frac{a}{h}(u_{j+\frac{1}{2}}^n-u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})+O(h^2)+O(\Delta t^2)=0$，

$u_{j+\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_j^n)+O(h^2)$

$\Rrightarrow$： $\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{\Delta t}+\frac{a}{h}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+O(h^2)+O(\Delta t)=0$，即CTCS格式

$\Rrightarrow$：截断误差为$O(h^2+\Delta t^2)$；对时间2阶、对空间2阶精度。

作业：针对$u_t+au_x=0$，a为常数，基于其积分形式构造时间1阶、空间3阶的有限差分格式

2 模型方程—扩散方程

2.1 常系数扩散方程初值问题

考虑常系数的扩散方程的初值问题：

$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$；其初值 $f(x)$ 为 2π 周期的周期函数。

一、 常系数扩散方程的初值问题的解

设初值为：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)$，则解可设为（即：与初值同类型的解）：$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{u}(\omega,t)$；代入方程及初值得：

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = -\omega^2 \hat{u} \\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

$\Rrightarrow$：$\hat{u}(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}\hat{f}$；解为：$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$。

$\Rrightarrow$：每个Fourier分量都随时间 t 的增大而衰减；对大的 ω，衰减是非常强的。而且，它不同于双曲型方程，它的传播速度是无限的。

此外，由Parseval关系得：

$\|u(\cdot,t)\|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |e^{-\omega^2 t}\hat{f}(\omega)|^2 \le \|f(\cdot)\|^2$

$\Rrightarrow$：能量稳定

二、 有限差分方法

1. （时间）向前Euler方法（FTCS）—-二层显式格式

$$v_j^{n+1} = (I + \Delta t D_+ D_-)v_j^n = v_j^n + \frac{\Delta t}{h^2}(v_{j+1} - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

稳定性：取谐波解 $v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$，代入格式，得：

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = (1-4\sigma sin^2(\frac{\xi}{2}))\hat{v}^n(\omega) = \hat{Q}\hat{v}^n(\omega) = \cdots = \hat{Q}^{n+1}\hat{v}^0(\omega) = \hat{Q}^{n+1}\hat{f}(\omega)$$

$\Rightarrow$：放大因子:$\hat{Q} = (1-4\sigma sin^2(\frac{\xi}{2}))$，$\xi = \omega h$，$\sigma = \frac{\Delta t}{h^2}$。

若要求：$|\hat{Q}| \le 1$，则有：$\sigma \le \frac{1}{2}$。即：$\sigma \le \frac{1}{2}$时，格式稳定。

截断误差：

$$T_j^n = \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}(x_j, t_n) - 2\frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_j, t_n) + O(h^3 + \Delta t^2) = O(h^2 + \Delta t)$$

2. 蛙跳格式（CTCS）—-多层格式

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2\Delta t D_+ D_- v_j^n = v_j^{n-1} + 2\frac{\Delta t}{h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

稳定性：取谐波解 $v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$，代入格式，得：

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^{n-1}(\omega) - 8\sigma sin^2(\frac{\xi}{2})\hat{v}^n(\omega)$$

令 $\hat{v}^n = z^n$，代入上述方程得到其特征方程：$z^2 + 8\sigma sin^2(\frac{\xi}{2})z - 1 = 0$。

特征方程的解为：$z_{1,2} = -4\sigma sin^2(\frac{\xi}{2}) \pm \sqrt{1 + (4\sigma sin^2(\frac{\xi}{2}))^2}$

由于$\xi \ne 0$，所以$|z_{1,2}| > 1$. $\Rightarrow$：该方法不稳定，格式无效。$\Rightarrow$：需要修正

将CTCS格式中 v_j^n 项用 $\frac{1}{2}(v_j^{n+1} + v_j^{n-1})$ 近似，得到Dufort-Frankel格式：

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2\frac{\Delta t}{h^2}(v_{j+1}^n - v_j^{n+1} - v_j^{n-1} + v_{j-1}^n)$$

$\Rightarrow$： $v_j^{n+1} = \frac{1}{1+2\sigma}(2\sigma(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + (1-2\sigma)v_j^{n-1})$

特征方程： $z^2 - \frac{4\sigma}{1+2\sigma}cos(\xi)z - \frac{1-2\sigma}{1+2\sigma} = 0$。其解为：

$z_{1,2} = \frac{2\sigma}{1+2\sigma}cos(\xi) \pm \frac{1}{1+2\sigma}\sqrt{1-4\sigma^2 sin^2(\xi)}$

$= \frac{2\sigma}{1+2\sigma}cos(\xi) \pm \frac{1}{1+2\sigma}\sqrt{A}$，

其中 $A = 1 - 4\sigma^2 sin^2(\xi) \leq 1$。

若： $A \geq 0$ $\Rightarrow$： $|z_{1,2}| \leq \frac{2\sigma}{1+2\sigma} + \frac{1}{1+2\sigma} = 1$，则格式稳定；

若： $A < 0$ $\Rightarrow$： $z_{1,2} = \frac{1}{1+2\sigma}(2\sigma cos(\xi) \pm i\sqrt{-A})$，

$|z_{1,2}| = \frac{1}{(1+2\sigma)^2}(4\sigma^2 cos^2(\xi) + 4\sigma^2 cos^2(\xi)) < 1$，则格式稳定

$\Rightarrow$：D-F格式是无条件稳定的，且是显式格式。

截断误差： $T_j^n = \frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{h^2}$

$= \frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{\Delta t^2}{h^2}\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}$

$= (u_t - u_{xx} + \frac{\Delta t^2}{h^2}u_{tt} + O(\Delta t^2 + h^2 + \frac{h^4}{\Delta t^2}))|_j^n$

$\Rightarrow$： 若： $\lim_{h,\Delta t\to 0}\frac{\Delta t}{h} = 0$， 则： $\lim_{h,\Delta t\to 0} T_j^n = 0$。

如： 取 $\Delta t = c\cdot h^{1+\delta}$， 且 $\delta > 0$， 则有： $T_j^n = O(h^{2\delta})$。

当我们取 $\delta = 1$， 即： $\Delta t = c\cdot h^2$， 则格式的精度为（2,2）阶，与CTCS格式精度一致。

3. （时间）向后Euler方法（BTCS）–隐式格式

$$(I - \Delta t D_+ D_-)v_j^{n+1} = v_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{h^2}(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) = v_j^n$$

稳定性：取谐波解 $v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega)$，代入格式，得：

放大因子: $\hat{Q} = (\frac{1}{1+4\sigma sin^2(\frac{\xi}{2})})$， $\xi = \omega h$， $\sigma = \frac{\Delta t}{h^2}$。

$\Rightarrow$： $|\hat{Q}| \leq 1$， 即：对所有非零的 ω 都是衰减的，格式是无条件稳定的

$\Rightarrow$：在计算中可以取 $\Delta t = h$。

截断误差：

$$
\begin{aligned}
T_j^{n+1} &= \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \\
&= (u_t - u_{xx} - \frac{\Delta t}{2}u_{tt} - \frac{1}{12}h^2 u_{xxxx} + \cdots)|_j^{n+1} \\
&= O(\Delta t + h^2)
\end{aligned}
$$

整体误差：

$$
\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= v_j^n + \sigma(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) \\
u_j^{n+1} &= u_j^n + \sigma(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + T_j^{n+1}\Delta t
\end{aligned}
$$

整体误差：$e_j^{n+1} = v_j^{n+1} - u_j^{n+1}$

$\Rightarrow$： $e_j^{n+1} = e_j^n + \sigma(e_{j+1}^{n+1} - 2e_j^{n+1} + e_{j-1}^{n+1}) - T_j^{n+1}\Delta t$

$\Rightarrow$： $(1+2\sigma)e_j^{n+1} = e_j^n + \sigma(e_{j+1}^{n+1} + e_{j-1}^{n+1}) - T_j^{n+1}\Delta t$

假设T_j^{n+1}有上界：$\bar{T} = \max_{j,n}\sup|T_j^{n+1}|$；

令$E^n = \max_j|e_j^n|$；则有：

$\sigma > 0$， $\Rightarrow$： $(1+2\sigma)E^{n+1} \le E^n + 2\sigma E^{n+1} + \bar{T}\Delta t$

$\Rightarrow$： $E^{n+1} \le E^n + \bar{T}\Delta t \le \cdots \le E^0 + (n+1)\Delta t\bar{T}$

若初值为准确值$E^0 = 0$， $t_{n+1} = (n+1)\Delta t \le t_{end}$， 则有：

$E^{n+1} \le \bar{T}t_{end} \le \frac{\Delta t}{2}(M_{tt} + \frac{1}{6\sigma}M_{xxxx})t_{end}$

$\Rightarrow$： $\Delta t, h \to 0$时， $E^{n+1} \to 0$；即：数值解收敛于准确解，格式收敛。

4. Crank-Nicolson格式–显式格式

$u_t = u_x = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_{xx}$，

$(I - \frac{\Delta t}{2}D_+D_-)v_j^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}D_+D_-)v_j^n$， $j = 0, \cdots, J$

$\Rightarrow$： 放大因子： $\hat{Q} = \frac{1-2\sigma sin^2(\frac{\xi}{2})}{1+2\sigma sin^2(\frac{\xi}{2})}$

$\Rightarrow$： $|\hat{Q}| \le 1$。该格式是无条件稳定的。

5. θ–方法–显式格式

$u_t = u_{xx} = \theta u_{xx} + (1-\theta)u_{xx}$，

$(I - \frac{\Delta t}{2}\theta D_+D_-)v_j^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}(1-\theta)D_+D_-)v_j^n$， $j = 0, \cdots, J$；

其中$0 \le \theta \le 1$。

$\Rrightarrow$：是关于u_j^{n+1}的三对角方程组：

$$-\theta\sigma v_{j-1}^{n+1} + (1+2\theta\sigma)v_j^{n+1} - \theta\sigma v_{j+1}^{n+1} = v_j^n + (1-\theta)\sigma(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$\Rrightarrow$：放大因子：$\hat{Q} = \frac{1-4(1-\theta)\sigma sin^2(\frac{\xi}{2})}{1+4\theta\sigma sin^2(\frac{\xi}{2})}$

$\Rrightarrow$：当$1 \ge \theta \ge \frac{1}{2}$时，$|\hat{Q}| \le 1$。该格式是无条件稳定的。

$\Rrightarrow$：通常取$1 \ge \theta \ge \frac{1}{2}$；

$\theta = 0$，为FTCS格式；$\theta = 1$，为BTCS格式；

$\theta = \frac{1}{2}$，为Crank-Nicolson 格式

作业：P70: 2.5.2, 2.5.3

2.2 基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

常见的数值积分公式（回顾）

- 端点均为积分节点

  $n=1$（梯形公式）：$\int_{x_0}^{x_1} f(x) = \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$，$h=x_1-x_0$，$\xi\in(x_0,x_1)$

  $n=2$（Simpson公式）：$\int_{x_0}^{x_2} f(x) = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$，$h=x_2-x_1=x_1-x_0$，$\xi\in(x_0,x_2)$

- 端点均不为积分节点

  $n=0$（中点公式）：$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(\xi)$，$h=x_1-x_0=x_0-x_{-1}$，$\xi\in(x_{-1},x_1)$

  $n=1$：$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) = \frac{3h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) + \frac{3h^3}{4}f''(\xi)$，$h=x_2-x_1=x_1-x_0=x_0-x_{-1}$，$\xi\in(x_{-1},x_2)$

- 一个端点均为积分节点

  $\int_a^b f(x) = (b-a)f(a) + \frac{1}{4}(b-a)^2 f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$

一、 剖分

用节点$0=x_0<x_1<\cdots<x_M=1$将$[0,1]$分成M个小区域(cell)；则涉及格点x_j的cell为:$I_j=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$，$j=1,\cdots,M-1$。

用节点$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$将$[0,T]$分成t个小区域$[t_n,x_{n+1}]$，$j=0,\cdots,M-1$。

二、 方程离散

考虑$u_t=u_{xx}+f(x,t)$，$(x,t)\in\bar{\Omega}=[0,1]\times[0,T]$

（一） 基于积分形式，构造以**函数的格点值**为未知数的有限差分格式

取时空区域$\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$为控制区域（控制体）。

讨论控制体Ω_j^n上，$u_t = u_{xx} + f(x,t)$的积分形式：$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n)dx =$ $\int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x,t)dxdt$ 该方程式精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似，得到不同的有限差分格式。

1. 源项

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x,t)dxdt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (hf(x_j,t) + \frac{h^3}{12} f_{xx}(\xi,t))dt$$
$$= h(\Delta t f(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^2}{4} f_t(x,\eta)) + O(h^3 \Delta t)$$
$$= h\Delta t f(x_j,t_n) + O(h\Delta t^2) + O(\Delta t h^3)$$

2. 流量项

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt =$$
$$\Delta t((u_x)_{j+\frac{1}{2}}^n - (u_x)_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{\Delta t}{4}((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}})_t|_{t=\eta_2}$$
$$(u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}} = h(u_{xx})_j + O(h^3) =$$
$$h(D_+D_-u_j + O(h^2)) + O(h^3) = hD_0u_j + O(h^3)$$
$$(u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}} =$$
$O(h)$， $\Rightarrow$： $((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}})_t = O(h)$

$\Rightarrow$： $\int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt =$
$$h(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{3}(\frac{h}{2})^3 (u^{n+1} - u^n)_{xx}|_{x=\xi_1}$$
$$u^{n+1} - u^n = \Delta t u_t + O(\Delta t^2) =$$
$O(\Delta t)$， $\Rightarrow$： $(u^{n+1} - u^n)_{xx} = O(\Delta t)$

$\Rightarrow$： $h(u_j^{n+1} - u_j^n) + O(\Delta t h^3) = h\Delta t f(x_j,t_n) +$
$$O(h\Delta t^2) + O(\Delta t h^3) + hD_+D_-u_j^n + O(\Delta t h^3) + O(\Delta t^2 h^3)$$

$\Rightarrow$： $u_j^{n+1}-u_j^n=$
$\Delta t f(x_j,t_n)+\Delta t D_+D_-u_j^n+O(\Delta t^2)+O(\Delta t h^2)$

$\Rightarrow$ 差分格式： $v_j^{n+1}+v_j^n+\Delta t f(x_j,t_n)+\Delta t D_+D_-v_j^n$

取时空区域 $\Omega_j^n=[t_{n-1},t_{n+1}]\times[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

讨论控制体 Ω_j^n 上， $u_t=u_{xx}+f(x,t)$ 的积分形式： $\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(u^{n+1}-u^{n-1})dx=$
$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt+\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}f(x,t)dxdt$ 该方程式精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似，得到不同的有限差分格式。

1. 源项

   $\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}f(x,t)dxdt=2h\Delta t f(x_j,t_n)+O(h\Delta t^3)$

2. 流量项

   $\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt=$
   $2h\Delta t D_+D_-u_j^n+O(h\Delta t^3)+O(\Delta t h^3)$

   $\Rightarrow$： $h(u_j^{n+1}-u_j^{n-1})=2h\Delta t f(x_j,t_n)+O(h\Delta t^2)+$
   $2hD_+D_-u_j^n+O(\Delta t h^3)+O(\Delta t^3 h)$

   $\Rightarrow$ 差分格式： $v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+2\Delta t f(x_j,t_n)+2\Delta t D_+D_-v_j^n$

（二） 基于积分形式，构造以**函数的网格平均**为未知数的有限差分格式

取时空区域 $\Omega_j^n=[t_n,t_{n+1}]\times[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(u^{n+1}-u^n)dx=\int_{t_n}^{t_{n+1}}((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt$
$+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}f(x,t)dxdt$。该方程式精确成立的。

令 $\bar{u}_j$、$\bar{f}_j$ 分别为在网格 $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的积分平均，

即：$\bar{u}_j = \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x,t)dx$，$\bar{f}_j = \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x,t)dx$，则

有：

$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(u^{n+1}-u^n)dx = h(\bar{u}_j^{n+1}-\bar{u}_j^n)$

$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x,t)dxdt = h\int_{t_n}^{t_{n+1}}\bar{f}_j dt$

$$h(\bar{u}_j^{n+1}-\bar{u}_j^n) = h\int_{t_n}^{t_{n+1}}\bar{f}_j dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}}((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt$$

该方程式精确成立的，与守恒率的积分形式等价。下面对

上式中的积分做近似，有：

$\bar{u}_{j+1}-\bar{u}_j = \frac{1}{h}\int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{3}{2}}} u(x,t)dx - \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x,t)dx$

$= \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(u(x+h,t)-u(x,t))dx$

$= \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(hu_x+\frac{h^2}{3}u_{xx}+\frac{h^3}{6}u_{xxx}+\frac{h^4}{24}u_{xxxx}+O(h^5))dx$

$= \frac{1}{h}(h(u_{j+\frac{1}{2}}-u_{j-\frac{1}{2}})+\frac{h^2}{2}((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})+\frac{h^3}{6}((u_{xx})_{j+\frac{1}{2}}-(u_{xx})_{j-\frac{1}{2}})$

$+\frac{h^4}{24}((u_{xxx})_{j+\frac{1}{2}}-(u_{xxx})_{j-\frac{1}{2}})+O(h^6))$

同理可得：

$\bar{u}_j-\bar{u}_{j-1} = \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x,t)dx - \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{3}{2}}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} u(x,t)dx$

$= \frac{1}{h}(h(u_{j+\frac{1}{2}}-u_{j-\frac{1}{2}})-\frac{h^2}{2}((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})+\frac{h^3}{6}((u_{xx})_{j+\frac{1}{2}}-(u_{xx})_{j-\frac{1}{2}})$

$-\frac{h^4}{24}((u_{xxx})_{j+\frac{1}{2}}-(u_{xxx})_{j-\frac{1}{2}})+O(h^6))$

$\Rrightarrow$：

$D_+D_-\bar{u}_j = \frac{1}{h^2}(\bar{u}_{j+1}-2\bar{u}_j+\bar{u}_{j-1}) = \frac{1}{h^2}((\bar{u}_{j+1}-\bar{u}_j)-(\bar{u}_j-\bar{u}_{j-1}))$

$= \frac{1}{h^2}(h((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})+\frac{h^3}{12}((u_{xxx})_{j+\frac{1}{2}}-(u_{xxx})_{j-\frac{1}{2}})+O(h^5))$

$= \frac{1}{h}(h((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})+O(h^2))$

$\int_{t_n}^{t_{n+1}}((u_x)_{j+\frac{1}{2}}-(u_x)_{j-\frac{1}{2}})dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}}(hD_+D_-\bar{u}_j+O(h^3))dt$

$= \Delta thD_+D_-\bar{u}_j + O(\Delta th^3) + \Delta t^2(hD_+^-\bar{u}_j+O(h^3))$

$= \Delta thD_+^-\bar{u}_j + O(\Delta th^3) + O(h\Delta t^2)$

$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\bar{f}_j = \Delta t\bar{f}_j^n + O(\Delta t^2)$

$\Rrightarrow$： $\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} + \Delta t \bar{f}_j^n + \Delta t D_+ D_- \bar{u}_j + O(\Delta t^2) + O(\Delta t h^2)$

$\Rrightarrow$： $\bar{v}_j^{n+1} = \bar{v}_j^{n+1} + \Delta t \bar{f}_j^n + \Delta t D_+^- \bar{v}_j + O(\Delta t^2) + O(\Delta t h^2)$

这类格式很难做误差分析

作业：针对 $u_t = u_{xx}$，基于其在控制体 $\Omega_j^n = [t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的积分形式，构造以函数的网格平均为未知数的有限差分格式，并给出精度。

2.3 用待定系数法构造高阶有限差分格式

构造高阶有限差分格式的关键是用构造导数的高阶近似。

待定系数法构造导数的高阶近似：用若干点的函数值的线性组合近似函数的导数（包括高阶导数）的方法

一、 均匀网格剖分

对于均匀剖分，可以论证：用u在三个点：$x_{j\pm1}=(j\pm1)h, x_j=jh$处的函数值的线性组合是无法得到$u_{xx}$的3阶近似。

$\Rrightarrow$：点的个数很重要。

讨论：是否可以用u在五个点：$x_{j\pm2}=(j\pm2)h, x_{j\pm1}=(j\pm1)h, x_j=jh$处的函数值的线性组合得到$u_{xx}$的4阶近似？

令$\Delta=\alpha_1u_{j-2}+\alpha_2u_{j-1}+\alpha_3u_j+\alpha_4u_{j+1}+\alpha_5u_{j+2}\approx u_{xx}$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$是待定系数。将$\Delta$在$x_j$处做Taylor展开，得：

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)u_j \\
&+ h(-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5)(u_x)_j \\
&+ h^2(2\alpha_1+\tfrac{1}{2}\alpha_2+\tfrac{1}{2}\alpha_4+2\alpha_5)(u_{xx})_j \\
&+ h^3(-\tfrac{4}{3}\alpha_1-\tfrac{1}{6}\alpha_2+\tfrac{1}{6}\alpha_4+\tfrac{4}{3}\alpha_5)(u_{xxx})_j \\
&+ h^4(\tfrac{2}{3}\alpha_1+\tfrac{1}{24}\alpha_2+\tfrac{1}{24}\alpha_4+\tfrac{2}{3}\alpha_5)(u_{xxxx})_j \\
&+ h^5(-\tfrac{4}{15}\alpha_1-\tfrac{1}{120}\alpha_2+\tfrac{1}{120}\alpha_4+\tfrac{4}{15}\alpha_5)(u_{xxxxx})_j \\
&+ O(h^6)\approx(u_{xx})_j
\end{aligned}
$$

$$\Rrightarrow: \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0 \\ -2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5=0 \\ (2\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_4+2\alpha_5)h^2=1 \\ -\frac{4}{3}\alpha_1-\frac{1}{6}\alpha_2+\frac{1}{6}\alpha_4+\frac{4}{3}\alpha_5=0 \\ \frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{24}\alpha_2+\frac{1}{24}\alpha_4+\frac{2}{3}\alpha_5=0 \end{cases}$$

此方程组有5个方程、5个未知数，且系数矩阵满秩，所以

$$\text{有唯一解：} \begin{cases} \alpha_1=-\frac{1}{6h^2} \\ \alpha_2=\frac{5}{3h^2} \\ \alpha_3=-\frac{3}{h^2} \\ \alpha_4=\frac{5}{3h^2} \\ \alpha_5=-\frac{1}{6h^2} \end{cases}$$

将α_1、α_2、α_3、α_4、α_5代入Δ中$(u_{xxxxxx})_j$的系数，

得：

$$-\frac{4}{15}\alpha_1-\frac{1}{120}\alpha_2+\frac{1}{120}\alpha_4+\frac{4}{15}\alpha_5=0$$

此时有：$\Delta=(u_{xx})_j+O(h^4)$；即Δ是u_{xx}的4阶近似。

$\Rrightarrow$：$u_t=u_{xx}$的空间4阶，时间1阶的差分格式：

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta t}{h^2}(-\frac{1}{6}v_{j-2}^n+\frac{4}{3}v_{j-1}^n-3v_{j-2}^n+\frac{5}{3}v_{j+1}^n-\frac{1}{6}v_{j+2}^n)$$

理论上：可通过多个点的函数值的线性组合得到导数的足够高阶的近似。

实际上：如果用的点太多（即：模板太大），将带来边界处理的困难。

二、 非均匀网格剖分

空间区域剖分：在很多情况下，为了减少计算量，空间区域的剖分要用非均匀剖分，尤其是对自适应算法。

如取非均匀剖分：$x_{j+1}-x_j=\frac{3}{2}h$，$x_j-x_{j-1}=\frac{3}{4}h$。

若用 u 在三个点：$x_{j\pm1}, x_j$ 处的函数值的线性组合近似 u_{xx}

，则有：

$\Delta = \alpha_1 u_{j+1} + \alpha_2 u_j + \alpha_3 u_{j-1} \approx u_{xx}$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

是待定系数。

$u_{j\pm1}$ 在 x_j 处做Taylor展开为：

$$u_{j+1} = u_j + \tfrac{3}{2}h(u_x)_j + (\tfrac{3}{2}h)^2(u_{xx})_j + O(h^3)$$
$$u_{j-1} = u_j + \tfrac{-3}{4}h(u_x)_j + (\tfrac{-3}{4}h)^2(u_{xx})_j + O(h^3)$$

则有：

$$\begin{aligned}\Delta &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u_j + (\tfrac{3}{2}\alpha_1 - \tfrac{3}{4}\alpha_3)h(u_x)_j \\ &+ \tfrac{1}{2}((\tfrac{3}{2})^2\alpha_1 + (\tfrac{3}{4})^2\alpha_3)h^2(u_{xx})_j + O(h^3) \approx (u_{xx})_j\end{aligned}。$$

$$\Rrightarrow: \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \tfrac{3}{2}\alpha_1 - \tfrac{3}{4}\alpha_3 = 0 \\ \tfrac{1}{2}((\tfrac{3}{2})^2\alpha_1 + (\tfrac{3}{4})^2\alpha_3)h^2 = 1 \end{cases}, \quad \Rrightarrow: \begin{cases} \alpha_1 = \frac{16}{27h^2} \\ \alpha_2 = -\frac{3\times16}{27h^2} \\ \alpha_3 = \frac{2\times16}{27h^2} \end{cases}$$

$\Rrightarrow$：$u_t = u_{xx}$ 的空间、时间均为1阶的差分格式：

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{16\Delta t}{27h}(2v_{j-1}^n - 3v_j^n + v_{j+1}^n)$$

$\Rrightarrow$：非均匀网格比均匀网格要复杂的多，且很难做分析研究。

对于缓变网格，可通过坐标变换，在变换平面进行

作业：试证；（均匀剖分）用 u 在三个点：$x_{j\pm1} = (j\pm1)h, x_j = jh$ 处的函数值的线性组合是无法得到 u_{xx} 的3阶或高于3阶的近似。

2.4 变系数扩散方程

考虑变数的扩散方程：$u_t = b(x,t)u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0$，其中热传导系

数 $b(x,t)>0$。

1. FTCS格式：

$$v_j^{n+1}=(I+b_j^n\Delta tD_+D_-)v_j^n=v_j^n+b_j^n\frac{\Delta t}{h^2}(v_{j+1}-2v_j^n+v_{j-1}^n)$$

，其中 $b_j^n=b(x_j,t_n)$。

稳定性：

取谐波解 $v_j^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega)$，代入格式，

得：$\hat{v}^{n+1}(\omega)=(1-4b_j^n\sigma sin^2(\frac{\xi}{2}))\hat{v}^n(\omega)=\hat{Q}\hat{v}^n(\omega)=\cdots=\hat{Q}^{n+1}\hat{v}^0(\omega)$

$=\hat{Q}^{n+1}\hat{f}(\omega)$，放大因子：$\hat{Q}=(1-4b_j^n\sigma sin^2(\frac{\xi}{2}))$，$\xi=\omega h$，$\sigma=\frac{\Delta t}{h^2}$。

若要求：$|\hat{Q}|\le 1$，则有：$b_j^n\sigma\le\frac{1}{2}$；

即：$b_j^n\sigma\le\frac{1}{2}$时，格式稳定。

截断误差：

$T_j^n=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-b_j^n\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}$

$=\frac{1}{2}\Delta tu_{tt}(x_j,t_n)-2\frac{h^2}{4!}u_{xxxx}(x_j,t_n)+O(h^4+\Delta t^2)=O(h^2+\Delta t)$

整体误差：

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n+b_j^n\sigma(v_{j+1}^{n+1}-2v_j^{n+1}+v_{j-1}^{n+1})\\ u_j^{n+1} &= u_j^n+b_j^n\sigma(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})+T_j^{n+1}\Delta t\end{aligned}$$

整体误差：$e_j^{n+1}=v_j^{n+1}-u_j^{n+1}$

$\Rightarrow$：$e_j^{n+1}=e_j^n+b_j^n\sigma(e_{j+1}^{n+1}-2e_j^{n+1}+e_{j-1}^{n+1})-T_j^{n+1}\Delta t$

$\Rightarrow$：$(1+2b_j^n\sigma)e_j^{n+1}=e_j^n+b_j^n\sigma(e_{j+1}^{n+1}+e_{j-1}^{n+1})-T_j^{n+1}\Delta t$

假设 B 是 $b(x,t)$ 在计算区域的最小上界；且 T_j^{n+1} 有上界：$\bar{T}=\max_{j,n}\sup|T_j^{n+1}|$；令 $E^n=\max_j|e_j^n|$；则有：$\sigma>0$，$\Rightarrow$：$(1+2\sigma)E^{n+1}\le E^n+2\sigma E^{n+1}+\bar{T}\Delta t$

$\Rightarrow$：$E^{n+1}\le E^n+\bar{T}\Delta t\le\cdots\le E^0+(n+1)\Delta t\bar{T}$

若初值为准确值 $E^0=0$，$t_{n+1}=(n+1)\Delta t\le t_{end}$，则有：

$E^{n+1}\le\bar{T}t_{end}\le\frac{\Delta t}{2}(M_{tt}+\frac{1}{6\sigma}M_{xxxx})t_{end}$

$\Rightarrow$：$\Delta t,h\to 0$ 时，$E^{n+1}\to 0$；即：数值解收敛于准确解，格式收敛。

2. θ–方法

$u_t=b(x,t)u_{xx}=\theta b(x,t)u_{xx}+(1-\theta)b(x,t)u_{xx}$，

$v_j^{n+1}=v_j^n+\Delta t b^*(\theta D_+D_-v_j^{n+1}+(1-\theta)D_+D_-v_j^n)$，$j=0,\cdots,J$；其中 $0\le\theta\le 1$，b^* 可以做多种选择，如 $b^*=\frac{v_j^{n+1}+v_j^n}{2}$、$b^*=v_j^{n+\frac{1}{2}}$ 等。

截断误差：为简单起见，取 $b^*=v_j^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
T_j^{n+\frac{1}{2}} &= \\
&[(\tfrac{1}{2}-\theta)\Delta t u_{xxt}-\tfrac{b}{12}(\Delta x)^2u_{xxxx}+\tfrac{1}{24}(\Delta t)^2u_{ttt}-\tfrac{b}{8}(\Delta t)^2u_{xxtt}\\
&\quad+\tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2}-\theta)\Delta t(\Delta x)^2u_{xxxxt}-\tfrac{2b}{6!}(\Delta x)^4u_{xxxxxx}+\cdots]_j^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

稳定性条件、收敛性条件均为：在所考虑的计算区域中的每一点都有：

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\theta)b(x,t)\le\frac{1}{2}$$

作业：针对偏微分方程：$u_t=(p(x)u_x)_x$，构造有限差分格式，并且分析其截断误差。