

Homework-Truncation Error

PB18010496 杨乐园

2021 年 3 月 15 日

1 Introduction

通过对Hamming级数

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)}$$

在 x 不同取值位置的有限项计算, 估计级数的精确值, 并给出在截断误差 $< 10^{-6}$ 时, 所需有限项 k 的上界。

2 Method

通过Mathematica编程, 从1项逐渐累加直到截断误差符合要求, 记录相应的 k 值, 并输出相应列表。

另一方面, 从分析学角度可以看到, 为求 N 使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)} < 10^{-6}$$

而对 $\forall x \neq 0$ 有

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)} < \int_N^{\infty} \frac{1}{k(k+x)} dk = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{N+x}{N}\right)$$

故只需

$$\frac{1}{x} \ln\left(\frac{N+x}{N}\right) < 10^{-6}$$

解得

$$N > \frac{x}{e^{10^{-6}x} - 1}$$

从而只需取

$$N = \lfloor \frac{x}{e^{10^{-6}x} - 1} \rfloor + 1$$

即可。

同理, 对 $x = 0$ 时, 只需取

$$N > e^{10^6}$$

即可

3 Results

输出结果见下页：

4 Discussion

通过对数据的观察我们发现，在 $0 \leq x < 1$ 时， k 取值均为1000000，其他 x 下 k 的取值也都十分接近1000000，并且随着 x 的增大， k 以5的步长递减。

对比分析估计所得与实际计算累加所得，可以看出分析估计十分接近实际累加精确的 k 上界，故分级估计良好。

5 Computer Code

代码部分请参见附件。

x	$\varphi(x)$	k
0.	1.644934066848	1000001
0.1	1.53461	1000000
0.2	1.44088	1000000
0.3	1.36008	1000000
0.4	1.28958	1000000
0.5	1.22741	1000000
0.6	1.17211	1000000
0.7	1.12252	1000000
0.8	1.07776	1000000
0.9	1.03711	1000000
1.	1.	1000000
10	0.2928968253968	999996
20	0.1798869828572	999991
30	0.1331662376973	999986
40	0.1069635759734	999981
50	0.08998410676659	999976
60	0.07799784021586	999971
70	0.06904052510912	999966
80	0.06206849098682	999961
90	0.05647300669832	999956
100	0.05187377517640	999951
110	0.04802031452949	999946
120	0.04474056906128	999941
130	0.04191224106358	999936
140	0.03944589474574	999931
150	0.03727453725763	999926
160	0.03534694515587	999921
170	0.03362324938192	999916
180	0.03207193178645	999911
190	0.03066773161902	999906
200	0.02939015474061	999901
210	0.02822239170647	999896
220	0.02715051916712	999891
230	0.02616290135466	999886
240	0.02524973531175	999881
250	0.02440270099773	999876
260	0.02361468900039	999871
270	0.02287958641717	999866
280	0.02219210685512	999861
290	0.02154765425838	999856
300	0.02094221293433	999851

图 1: 分析估计

x	$\varphi(x)$	k
0.	1.644934066848	1000000
0.1	1.53461	1000000
0.2	1.44088	1000000
0.3	1.36008	1000000
0.4	1.28958	1000000
0.5	1.22741	1000000
0.6	1.17211	1000000
0.7	1.12252	1000000
0.8	1.07776	1000000
0.9	1.03711	1000000
1.	1.	999999
10	0.2928968253968	999995
20	0.1798869828572	999990
30	0.1331662376973	999985
40	0.1069635759734	999980
50	0.08998410676659	999975
60	0.07799784021586	999970
70	0.06904052510912	999965
80	0.06206849098682	999960
90	0.05647300669832	999955
100	0.05187377517640	999950
110	0.04802031452949	999945
120	0.04474056906128	999940
130	0.04191224106358	999935
140	0.03944589474574	999930
150	0.03727453725763	999925
160	0.03534694515587	999920
170	0.03362324938192	999915
180	0.03207193178645	999910
190	0.03066773161902	999905
200	0.02939015474061	999900
210	0.02822239170647	999895
220	0.02715051916712	999890
230	0.02616290135466	999885
240	0.02524973531175	999880
250	0.02440270099773	999875
260	0.02361468900039	999870
270	0.02287958641717	999865
280	0.02219210685512	999860
290	0.02154765425838	999855
300	0.02094221293433	999850

图 2: 实际累加