# 最小二乘问题的求解

邓建松

2018年10月19日

# 复习: 数学分析中一个例题

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

. . .

Givens变换

E交变换法

• 题目: 给定平面上n个数据点 $(x_i, y_i)$ , i = 1, 2, ..., n, 求一条直线y = ax + b使得偏差

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

最小

# 复习: 数学分析中一个例题

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder受社

正交变换法

• 题目: 给定平面上n个数据点 $(x_i, y_i)$ , i = 1, 2, ..., n, 求一条直线y = ax + b使得偏差

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

最小

• 通过对 $\varphi(a,b)$ 关于a,b求偏导,并令其等于0,得到关于a,b的线性方程组

# 复习: 数学分析中一个例题

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等止交变换

Givens变换

正交变换法

• 题目: 给定平面上n个数据点 $(x_i, y_i)$ , i = 1, 2, ..., n, 求一条直线y = ax + b使得偏差

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

最小

- 通过对 $\varphi(a,b)$ 关于a,b求偏导,并令其等于0,得到关于a,b的线性方程组
- 系数矩阵可证当x;互不相等时是非奇异的



# 答案

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

正交变换法

### ● a, b为下述方程组的解:

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
  
$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

## 答案

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态变换

Householder变换

正交变换法

### • a, b为下述方程组的解:

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
  
$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

### • 所求直线的方程是

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i} & \sum_{i=1}^{n} y_{i} & n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i} & \sum_{i=1}^{n} x_{i} \end{vmatrix} = 0.$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变剂

Givens变换

• 最小二乘问题多产生于数据拟合

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初寺正父受8

Householder变换

正交变换法

- 最小二乘问题多产生于数据拟合
  - 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$

### 最小二乘问题的求解

### 最小二乘问题

初等正交变换

00 4 200,000

Givens变换

E交变换法

### • 最小二乘问题多产生于数据拟合

- 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$
- 给定在t<sub>i</sub>上取值的n个已知函数

$$\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$$

# 最小二乘问题的求解

### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

### • 最小二乘问题多产生于数据拟合

- 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$
- 给定在t<sub>i</sub>上取值的n个已知函数

$$\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$$

• 考虑 $\psi_i$ 的线性组合

$$f(x;t) = x_1\psi_1(t) + \cdots + x_n\psi_n(t)$$

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

### • 最小二乘问题多产生于数据拟合

- 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$
- 给定在t<sub>i</sub>上取值的n个已知函数

$$\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$$

• 考虑 $\psi_i$ 的线性组合

$$f(x;t) = x_1\psi_1(t) + \cdots + x_n\psi_n(t)$$

• 我们希望在 $t_1,\ldots,t_m$ 上f(x;t)能最佳地逼近 $y_1,\ldots,y_m$ 

# 残量与最佳逼近

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

Householder变换

Givens变换

下交变换法

### • 定义残量

$$r_i(x) = y_i - \sum_{i=1}^n x_j \psi_j(t_i), i = 1, \dots, m$$

其中
$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

# 残量与最佳逼近

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变物

Givens变换

F交变换法

### • 定义残量

$$r_i(x) = y_i - \sum_{j=1}^n x_j \psi_j(t_i), i = 1, \ldots, m$$

其中
$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

• 此问题转化为: 估计参数 $x_1, \ldots, x_n$ , 使 残量 $r_1, \ldots, r_m$ 尽可能得小

## 矩阵-向量形式

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 上式的矩阵-向量形式为r(x) = b - Ax, 其中

$$A = (\psi_j(t_i))_{m \times n}$$

$$b = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T$$

$$r(x) = (r_1(x), \dots, r_m(x))^T$$

# 求解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

• m = n时,我们可以要求r(x) = 0,从而可以用第一章中的方法处理

# 求解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

Householder变

正心恋描》

- m = n时,我们可以要求r(x) = 0,从而可以用第一章中的方法处理
- 当m > n时,一般不可能所有残量都为零,但可以要求r(x)在某种范数意义下最小

# 求解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

- m = n时,我们可以要求r(x) = 0,从而可以用第一章中的方法处理
- 当m > n时,一般不可能所有残量都为零,但可以要求r(x)在某种范数意义下最小
- 最小二乘问题就是求x使得r(x)在2范数 意义下最小

## 定义

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 及向量 $b \in \mathbb{R}^m$ , 确 定 $x \in \mathbb{R}^n$ , 使得

$$||b - Ax||_2 = ||r(x)||_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} ||r(y)||_2$$
  
=  $\min_{y \in \mathbb{R}^n} ||Ay - b||_2$ 

这就是最小二乘问题,简记为LS(Least-Squares)问题,其中r(x)称为残向量

# 最小二乘解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 最小二乘问题的解x又称作线性方程组

$$Ax = b$$
,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 

的最小二乘解

# 最小二乘解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

正交变换剂

• 最小二乘问题的解x又称作线性方程组

$$Ax = b$$
,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 

的最小二乘解

• 当*m* > *n*时,方程组称为<mark>超定方程</mark> 组或矛盾方程组

# 最小二乘解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初寺正文文章 Householder变换 Givens变换 • 最小二乘问题的解x又称作线性方程组

$$Ax = b$$
,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 

的最小二乘解

- 当*m* > *n*时,方程组称为超定方程 组或矛盾方程组
- 当m < n时,方程组称为欠定方程组



#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变物

正交变换法

 $\mathbf{0}$  m=n:

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = m = n

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = m = n
  - 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

**们等止父**变换

Householder变换

Givens变换

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{n}$  rank A = m = n
  - rank A = k < m = n
- m > n:

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

$$\mathbf{0}$$
  $m=n$ :

- $\mathbf{0}$  rank A = m = n
- rank A = k < m = n
- m > n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = n < m

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder李維

Givens变换

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = m = n
  - 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$
- m > n:

  - ②  $\operatorname{rank} A = k < n < m$

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder李維

Givens变换

$$\mathbf{0}$$
  $m=n$ :

- $\mathbf{0}$  rank A = m = n
- 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$
- m > n:

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder李维

Givens变换

正交变换法

$$\mathbf{0}$$
  $m=n$ :

- $\mathbf{0}$  rank A = m = n
- 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$
- m > n:
- - $\mathbf{0}$  rank A = m < n

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

11 11 20240.

Givens变换

正交变换法

$$\mathbf{0}$$
  $m=n$ :

- $\mathbf{0}$  rank A = m = n
- rank A = k < m = n
- m > n:
- - $\mathbf{o}$  rank A = m < n

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder®

en obside

正交变换法

• 本章主要讨论(2-1)情形

### 最小二乘问题的求解

邓建枢

### 最小二乘问题

初笔正交变换

Givens变换

- 本章主要讨论(2-1)情形
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , A的<mark>值域</mark>定义为

$$\mathcal{R}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n \}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变

01101021

- 本章主要讨论(2-1)情形
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , A的<mark>值域</mark>定义为

$$\mathcal{R}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n \}$$

•  $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$ , 其中 $a_i$ 为A的列向量

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变

E交变换法

- 本章主要讨论(2-1)情形
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , A的<mark>值域</mark>定义为

$$\mathcal{R}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n \}$$

- $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$ , 其中 $a_i$ 为A的列向量
- A的零空间定义为

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

其维数记为null(A)

# 解的存在性

最小二乘问题的求解

70年位

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

E交变换法

• 一个子空间S ⊂  $\mathbb{R}$ "的正交补定义为

$$\mathcal{S}^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^n : y^T x = 0, \forall x \in \mathcal{S} \}$$

# 解的存在性

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变剂 Givens变换

E交变换法

• 一个子空间S ⊂  $\mathbb{R}$ "的正交补定义为

$$\mathcal{S}^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^n : y^T x = 0, \forall x \in \mathcal{S} \}$$

• 方程组Ax = b的解存在的充分必要条件是

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}([A, b])$$

## 非齐次方程的全部解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 假设Ax = b的解存在,x是其任一给定的解,则方程组的全部解是 $x + \mathcal{N}(A)$ 

## 非齐次方程的全部解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

T 25 20 40 24

- 假设Ax = b的解存在,x是其任一给定的解,则方程组的全部解是 $x + \mathcal{N}(A)$
- 方程组Ax = b的解唯一的充分必要条件是 $\mathcal{N}(A) = \{0\}$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• m = 3, rank A = 2, 则 $\mathcal{R}(A)$ 可以用一张 平面表示

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变物

Householder变

F交变换法

- m = 3, rank A = 2, 则 $\mathcal{R}(A)$ 可以用一张 平面表示
- 当x取遍 $\mathbb{R}^n$ 时,y = Ax就取遍整个 $\mathcal{R}(A)$

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

E交变换法

### • m = 3, rank A = 2, 则 $\mathcal{R}(A)$ 可以用一张 平面表示

- 当x取遍 $\mathbb{R}^n$ 时,y = Ax就取遍整个 $\mathcal{R}(A)$
- LS问题等价于求 $y_{min} \in \mathcal{R}(A)$ , 使得

$$||b - y_{\min}||_2 = \min\{||b - y||_2, y \in \mathcal{R}(A)\}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初笔正交变换

Householder变换

• 注意到b有分解:  $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变的

Householder变换

- 注意到b有分解:  $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 当b y垂直于 $\mathcal{R}(A)$ 时, $||b y||_2$ 达到极小

### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换 Givens变换

- 注意到b有分解:  $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 当b-y垂直于 $\mathcal{R}(A)$ 时, $||b-y||_2$ 达到极小
- 这时 $y_{\min} = b_1$ ,然后利用 $Ax = y_{\min}$ 解 出x即得到最小二乘解

## 解的存在性定理

最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初笔正立变换

3, 4, 33, 2, 2, 2

Givens变换

正交变换法

### 定理

Ax = b对应的线性最小二乘问题的解总是 存在的,而且其解唯一当且仅当

$$\mathcal{N}(A) = \{0\}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

. . .

201-500

• 
$$\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初笔正交变换

Householder变

正交变换法

• 
$$\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

• 所以b具有唯一分解 $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初笔正立变换

Householder受社

E交变换法

- $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 所以b具有唯一分解 $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 从而对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_1 Ax \in \mathcal{R}(A)$ 且 与 $b_2$ 正交

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

-1.0

ハイエンズル

正交变换法

### • 从而有

$$||r(x)||_2^2 = ||b - Ax||_2^2 = ||(b_1 - Ax) + b_2||_2^2$$
  
=  $||b_1 - Ax||_2^2 + ||b_2||^2$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

....

初寺上父发换

r iousenoider x

Givens X (M)

### • 从而有

$$||r(x)||_2^2 = ||b - Ax||_2^2 = ||(b_1 - Ax) + b_2||_2^2$$
  
=  $||b_1 - Ax||_2^2 + ||b_2||^2$ 

• 所以 $\|r(x)\|_2^2$ 达到极小当且仅当 $\|b_1 - Ax\|_2^2$ 达到极小

### 最小二乘问题的求解

邓建村

### 最小二乘问题

初笔正态变换

Householder变换

Givens变换

### • 从而有

$$||r(x)||_2^2 = ||b - Ax||_2^2 = ||(b_1 - Ax) + b_2||_2^2$$
  
=  $||b_1 - Ax||_2^2 + ||b_2||^2$ 

- 所以 $\|r(x)\|_2^2$ 达到极小当且仅 当 $\|b_1 Ax\|_2^2$ 达到极小
- 由于 $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ , 所以 $\|b_1 Ax\|_2^2$ 达到极小当且仅当 $Ax = b_1$



最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

正态变换过

• 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{\rm LS}$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变护

Householder变换

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{\rm LS}$
- 根据前面的定理, $\chi_{LS} \neq \emptyset$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

Householder 3

E交变换法

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{\rm LS}$
- 根据前面的定理,  $\chi_{LS} \neq \emptyset$
- $\sharp \chi_{LS} = 1 \iff A$ 的列线性无关

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{\rm LS}$
- 根据前面的定理,  $\chi_{LS} \neq \emptyset$
- $\sharp \chi_{\mathrm{LS}} = 1 \iff A$ 的列线性无关
- $\chi_{LS}$ 中有且仅有一个解其2范数最小(为什么?),这称为最小2范数解,用 $x_{LS}$ 表示

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{LS}$
- 根据前面的定理,  $\chi_{LS} \neq \emptyset$
- $\sharp \chi_{\mathrm{LS}} = 1 \iff A$ 的列线性无关
- $\chi_{LS}$ 中有且仅有一个解其2范数最小(为什么?),这称为最小2范数解,用 $x_{LS}$ 表示
  - 点集的凸性以及范数的严格凸性

# 定理

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等止父父1

Householder部類

Givens变换

E交变换法

### 定理

 $x \in \chi_{LS}$  当且仅当

$$A^T A x = A^T b$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Ciuone William

• 
$$x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$$
,  $\sharp \vdash b_1 \in \mathcal{R}(A)$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笙正交变换

11 11 20240

Givens变换

• 
$$x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$$
,  $\not\exists \vdash b_1 \in \mathcal{R}(A)$ 

• 
$$r(x) = b - Ax = b - b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笙正态恋拚

Householder变

下亦亦描词

- $x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$ ,  $\not \exists + b_1 \in \mathcal{R}(A)$
- $r(x) = b Ax = b b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 意味着对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b^T A x = 0$ , 所以 $(b^T A)^T = A^T b$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笙正心恋拚

Householder变

- $x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$ ,  $\not\exists \vdash b_1 \in \mathcal{R}(A)$
- $r(x) = b Ax = b b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 意味着对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b^T A x = 0$ , 所以 $(b^T A)^T = A^T b$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量
- 从而 $A^T r(x) = A^T b_2 = 0$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笙正心恋拚

Householder变

正交变换污

- $x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$ ,  $\not \exists + b_1 \in \mathcal{R}(A)$
- $r(x) = b Ax = b b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 意味着对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b^T A x = 0$ , 所以 $(b^T A)^T = A^T b$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量
- 从而 $A^T r(x) = A^T b_2 = 0$



# 证明: 充分性

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变的

LI ------ b - Li --- 205 10

Givens李维

正交变换法

• 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $A^T A x = A^T b$ 

## 证明: 充分性

最小二乘问题的求解

邓建村

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

正交变换法

• 设
$$x \in \mathbb{R}^n$$
满足 $A^TAx = A^Tb$ 

• 则对 $\forall y \in \mathbb{R}^n$ ,

 $||b-Ax||_2^2$ 

$$||b - A(x + y)||_{2}^{2}$$

$$= ||b - Ax||_{2}^{2} - 2y^{T}A^{T}(b - Ax) + ||Ay||_{2}^{2}$$

$$= ||b - Ax||_{2}^{2} + ||Ay||_{2}^{2}$$

这就证明了 $x \in \chi_{LS}$ 



## 正则化方程组

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

V 4 11 ~ ~ ~ V

nouseholder x 5

正交变换法

•  $A^T A x = A^T b$ 称为LS问题的正则化方程 组或者法方程组

## 正则化方程组

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

油华正方亦協

四哥正文文区

Givens等級

正交变换剂

- $A^T A x = A^T b$ 称为LS问题的正则化方程 组或者法方程组
- 它一般是一个含有*n*个变量和*n*个方程 的线性方程组

## 正则化方程组

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初笔正态变换

70 号正文文区

Householder受打 Givens变换

正交变换剂

- $A^T A x = A^T b$ 称为LS问题的正则化方程 组或者法方程组
- 它一般是一个含有*n*个变量和*n*个方程 的线性方程组
- 如果A的列向量线性无关,那么A<sup>T</sup>A对 称正定,从而可以采用平方根法求解方 程组

## 正则化方法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

E交变换法

求解LS问题的最古老的算法:

• 计算
$$C = A^T A$$
,  $d = A^T b$ 

## 正则化方法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens夸棒

正交变换法

求解LS问题的最古老的算法:

- 计算 $C = A^T A$ ,  $d = A^T b$
- 用平方根法计算C的Cholesky分解:

$$C = LL^T$$

## 正则化方法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

### 求解LS问题的最古老的算法:

- 计算 $C = A^T A$ ,  $d = A^T b$
- 用平方根法计算C的Cholesky分解:  $C = LL^T$
- 求解三角方程组 $Ly = d \pi L^T x = y$

## 注解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

正交变换法

• 在 $A^TA$ 的计算中,如果不使用足够的精度,A中的一些精度可能会丢失

## 注解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder®

- 在 $A^TA$ 的计算中,如果不使用足够的精度,A中的一些精度可能会丢失
- 例:

$$A = \left(egin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \ arepsilon & 0 & 0 \ 0 & arepsilon & 0 \ 0 & 0 & arepsilon \end{array}
ight), A^{\mathcal{T}}A = \left(egin{array}{ccc} c & 1 & 1 \ 1 & c & 1 \ 1 & 1 & c \end{array}
ight)$$

其中
$$c = 1 + \varepsilon^2$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

N 4 11 X X X

Ciuone William

E交变换法

• 正则化方程组的解可以写 为 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变描

Givens变换

E交变换法

• 正则化方程组的解可以写 为 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ 

• 定义
$$A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态变换

四寸正文文区

Givens变换

正交变换法

• 正则化方程组的解可以写 为 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ 

- 定义 $A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T$
- 则LS问题的解可以写为 $x = A^{\dagger}b$

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

- 正则化方程组的解可以写 为 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$
- 定义 $A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T$
- 则LS问题的解可以写为 $x = A^{\dagger}b$
- n×m阶矩阵A<sup>†</sup>就
   是A的Moore-Penrose广义逆

# 回忆: Moore-Penrose广义逆

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 若 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足

$$AXA = A, XAX = X,$$
  
 $(AX)^T = AX, (XA)^T = XA$ 

则X就是A的Moore-Penrose广义逆

# 回忆: Moore-Penrose广义逆

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 若 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足

$$AXA = A, XAX = X,$$
  
 $(AX)^T = AX, (XA)^T = XA$ 

则X就是A的Moore-Penrose广义逆

通常记作A<sup>†</sup>



# 扰动对解的影响

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

正交变换法

• 设b有扰动 $\delta b$ , 且x和 $x + \delta x$ 分别是最小二乘问题

$$\min \|b - Ax\|_2$$
 $\min \|(b + \delta b) - Ax\|_2$ 

的解,即

$$x = A^{\dagger}b,$$
  
 $x + \delta x = A^{\dagger}(b + \delta b) = A^{\dagger}\tilde{b}$ 

其中
$$\tilde{b} = b + \delta b$$



# 定理

最小二乘问题的求解

邓建林

最小二乘问题

Householder帝操

Givens变换

正交变换法

### 定理

设 $b_1 \rightarrow \tilde{b}_1$ 分别是 $b \rightarrow \tilde{b}$ 在R(A)上的正交投影。 若 $b_1 \neq 0$ ,则

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \kappa_2(A) \frac{\|b_1 - \tilde{b}_1\|_2}{\|b_1\|_2}$$

其中
$$\kappa_2(A) = ||A||_2 ||A^{\dagger}||_2$$

注: *A*非方阵,其范数与方阵的算子范数定义相同,从而满足对向量乘法的相容性; *A*的2范数等于*A*的最大奇异值

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态变换

0. 4 ....

er 20160

正交变换法

• 设b在 $\mathcal{R}^{\perp}$ 上的正交投影为 $b_2$ ,则 $A^Tb_2=0$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正立变换

Householder变换

Givens变换

E交变换法

- 设b在 $\mathcal{R}^{\perp}$ 上的正交投影为 $b_2$ ,则 $A^T b_2 = 0$
- 由 $b = b_1 + b_2$ 可有

$$A^{\dagger}b = A^{\dagger}b_1 + A^{\dagger}b_2$$
  
=  $A^{\dagger}b_1 + (A^TA)^{-1}A^Tb_2 = A^{\dagger}b_1$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens受快

• 设b在 $\mathcal{R}^{\perp}$ 上的正交投影为 $b_2$ ,则 $A^Tb_2=0$ 

• 由 $b = b_1 + b_2$ 可有

$$A^{\dagger}b = A^{\dagger}b_1 + A^{\dagger}b_2$$
  
=  $A^{\dagger}b_1 + (A^TA)^{-1}A^Tb_2 = A^{\dagger}b_1$ 

• 同理 $A^{\dagger}\tilde{b} = A^{\dagger}\tilde{b}_1$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

加马亚文文章

Givens李維

正交变换法

### 所以

$$\|\delta x\|_2 = \|A^{\dagger}b - A^{\dagger}\tilde{b}\|_2 = \|A^{\dagger}(b_1 - \tilde{b}_1)\|_2$$
  
 $\leq \|A^{\dagger}\|_2 \|b_1 - \tilde{b}_1\|_2$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

......

Givens李維

正交变换法

### • 所以

$$\|\delta x\|_2 = \|A^{\dagger}b - A^{\dagger}\tilde{b}\|_2 = \|A^{\dagger}(b_1 - \tilde{b}_1)\|_2$$
  
 $\leq \|A^{\dagger}\|_2 \|b_1 - \tilde{b}_1\|_2$ 

•  $\triangle Ax = b_1 + \|b_1\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

### • 所以

$$\|\delta x\|_2 = \|A^{\dagger}b - A^{\dagger}\tilde{b}\|_2 = \|A^{\dagger}(b_1 - \tilde{b}_1)\|_2$$
  
 $\leq \|A^{\dagger}\|_2 \|b_1 - \tilde{b}_1\|_2$ 

- $\triangle Ax = b_1 + \|b_1\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2$
- 根据上述两式立得结论

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Tiousenoider X :

正交变换法

• 若b有变化,只有它在 $\mathcal{R}(A)$ 上的投影 对x的相对误差产生影响

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

- 若*b*有变化,只有它在*R*(*A*)上的投影 对*x*的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$ 的大小

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

Givens变换

- 若*b*有变化,只有它在*R*(*A*)上的投影 对*x*的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$ 的大小
- 我们称 $\kappa_2(A)$ 为LS问题的条件数

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

Givens变换

- 若*b*有变化,只有它在*R*(*A*)上的投影 对*x*的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$ 的大小
- 我们称 $\kappa_2(A)$ 为LS问题的条件数
- 若 $\kappa_2(A)$ 很大,则称LS问题是病态的; 否则称为良态的

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

正交变换》

- 若*b*有变化,只有它在*R*(*A*)上的投影 对*x*的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$ 的大小
- 我们称 $\kappa_2(A)$ 为LS问题的条件数
- 若 $\kappa_2(A)$ 很大,则称LS问题是病态的; 否则称为良态的
- 同时考虑A和b的扰动对解的影响就非常复杂,我们在此不讨论

# 条件数

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

正交变换法

### 定理

设A的列向量线性无关,则

$$\kappa_2(A)^2 = \kappa_2(A^T A)$$

证明:

• 根据定义,我们有

$$||A||_2^2 = ||A^T A||_2,$$
  
 $||A^{\dagger}||_2^2 = ||A^{\dagger} (A^{\dagger})^T ||_2 = ||(A^T A)^{-1}||_2$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

77 17 111 111

Givens李維

正态变换法

### • 于是我们得到

$$\kappa_2(A)^2 = ||A||_2^2 ||A^{\dagger}||_2^2$$

$$= ||A^T A||_2 ||(A^T A)^{-1}||_2$$

$$= \kappa_2(A^T A)$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变护

Givens变换

正交变换剂

最小二乘问题在化为正则化方程组后,条件数是原来的平方

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变

Householder变 Givens变换

正交变换注

- 最小二乘问题在化为正则化方程组后,条件数是原来的平方
- 这就使得求解过程增加了对舍入误差的 敏感性

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变排 Householder变换

Givens变换 下交变换》

- 最小二乘问题在化为正则化方程组后,条件数是原来的平方
- 这就使得求解过程增加了对舍入误差的 敏感性
- 在使用正则化方法时,一定要注意这一点

最小二乘问题的求解

小连位

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变

正交变换剂

为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换

最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变拉

Givens变换

为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换

• 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数

最小二乘问题的求解 邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变 Givens变换

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换

最小二乘问题的求解

具本一系細胞

初等正交变换

Householder变 Givens变换

Tide ale 4/2.

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换
- 第二种是Givens变换

最小二乘问题的求解

Blasho

初等正交变换

Householder变换

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换
- 第二种是Givens变换
- 它们是数值线性代数中许多重要算法的基础

最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题 初等正交变换

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换
- 第二种是Givens变换
- 它们是数值线性代数中许多重要算法的基础
  - 例:在计算矩阵特征值和特征向量的QR方法中,就大量应用上述两种变换



# 回忆:初等变换

最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变换

应用Gauss变换可以把一个矩阵约化为 上三角形式

### 回忆:初等变换

最小二乘问题的求解 Householder变换

- 应用Gauss变换可以把一个矩阵约化为 上三角形式
- 这是基于事实:对任意向量x.可以构 造一个初等下三角阵L, 使得 $Lx = \alpha e_1$

## 回忆:初等变换

最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变换

- 应用Gauss变换可以把一个矩阵约化为 上三角形式
- 这是基于事实:对任意向量x,可以构造一个初等下三角阵L,使得 $Lx = \alpha e_1$
- 本节我们讨论如何求一个初等正交矩阵,使其具有L同样的功能

# 镜像对称向量的计算

最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变象

 在ℝ"中给定一个向量x和一张单位法向 量为w的超平面π,那么x关于π的镜像 对称向量是什么?

# 镜像对称向量的计算

最小二乘问题的求解 邓建松

最小二乘问题

初等正交变热

Householder变换

Givens变换

\_\_\_\_\_\_

- 在ℝ"中给定一个向量x和一张单位法向 量为w的超平面π,那么x关于π的镜像 对称向量是什么?
- 显然x在单位法向量上的投影向量为 $(x \cdot w)w = ww^T x$

# 镜像对称向量的计算

最小二乘问题的求解

初等正交变热

Householder变换

Givens X 190

- 在ℝ"中给定一个向量x和一张单位法向量为w的超平面π,那么x关于π的镜像对称向量是什么?
- 显然x在单位法向量上的投影向量为 $(x \cdot w)w = ww^T x$
- 所以对称向量是

$$x - 2ww^T x = (I - 2ww^T)x$$



# Householder变换

最小二乘问题的求解

邓建枢

最小二乘问题

初笔正ক变描

Householder变换

Givens李維

正心变换注

• 设 $w \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|w\|_2 = 1$ . 定义 $n \times n$ 矩阵

$$H = I - 2ww^T$$

其称为Householder变换

### Householder变换

最小二乘问题的求解

邓建枢

最小二乘问题

Householder变换

OIV CITY CITY

正交变换法

• 设 $w \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|w\|_2 = 1$ . 定义 $n \times n$ 矩阵

$$H = I - 2ww^T$$

其称为Householder变换

• 也称为初等反射矩阵或镜像矩阵

### Householder变换

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

VI (1 11 / / / / /

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 设 $w \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|w\|_2 = 1$ . 定义 $n \times n$ 矩阵

$$H = I - 2ww^T$$

其称为Householder变换

- 也称为初等反射矩阵或镜像矩阵
- 这一变换最早是由A.C. Aitken在1932年提出, 后由数值分析专家Alston S. Householder在1958年应用到数值线性代数中

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

• 对称性:  $H^T = H$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态恋描

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 对称性:  $H^T = H$ 

• 正交性:  $H^TH = I$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Mouseholder変換

Givens变换

正交变换法

• 对称性:  $H^T = H$ 

• 正交性:  $H^TH = I$ 

• 对合性:  $H^2 = I$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变的

Householder变换

• 对称性:  $H^T = H$ 

• 正交性:  $H^TH = I$ 

对合性: H<sup>2</sup> = I

● 反射性:  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , Hx是x关于w的垂 直超平面 $\mathrm{span}\{w\}^\perp$ 的镜像反射

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

riousenoider x

Givens受制

E交变换法

• 第一条显然

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变的

Householder变换

Givens变换

- 第一条显然
- 后两条可由第一条导出。事实上,

$$H^{T}H = H^{2} = (I - 2ww^{T})(I - 2ww^{T})$$
  
=  $I - 4ww^{T} + 4ww^{T}ww^{T} = I$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

Givens变技

正交变换法

• 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 写为 $x = u + \alpha w$ , 其中 $u \in \text{span}\{w\}^{\perp}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正心变换》

- 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 写为 $x = u + \alpha w$ , 其中 $u \in \text{span}\{w\}^{\perp}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
- 由 $u^T w = 0$ ,  $w^T w = 1$ 可得

$$Hx = (I - 2ww^{T})(u + \alpha w)$$
$$= u + \alpha w - 2ww^{T}u - 2\alpha ww^{T}w$$
$$= u - \alpha w$$

# 定理

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变挑

Householder变换

Givens变换

E交变换法

#### 定理

设 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ,可以构造单位向量 $w \in \mathbb{R}^n$ 使得Householder变换H满足

$$Hx = \alpha e_1$$

其中
$$\alpha = \pm ||x||_2$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

Householder变换

-0.47

\_ . . . . . . . . . .

#### • 注意到

$$Hx = (I - 2ww^T)x = x - 2(w^Tx)w$$

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态变换

Householder变换

C:......255%

• 注意到

$$Hx = (I - 2ww^{T})x = x - 2(w^{T}x)w$$

• 为使 $Hx = \alpha e_1$ , 则w应取为

$$w = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|_2}$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

正交变换流

• 注意到

$$Hx = (I - 2ww^{T})x = x - 2(w^{T}x)w$$

• 为使 $Hx = \alpha e_1$ ,则w应取为

$$w = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|_2}$$

• 当 $\alpha = \pm ||x||_2$ 时,可以直接验证如此定义的w满足定理的要求

# 验证

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变挑

Householder®

Givens变扬

正交变换法

# 验证

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

• 
$$\alpha^2 = x^T x$$

• 分母为

$$||x - \alpha e_1||_2^2$$

$$= x^T x - 2\alpha x^T e_1 + \alpha^2$$

$$= 2(x^T x - \alpha x^T e_1)$$

### 验证

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 
$$\alpha^2 = x^T x$$

• 分母为

$$||x - \alpha e_1||_2^2$$

$$= x^T x - 2\alpha x^T e_1 + \alpha^2$$

$$= 2(x^T x - \alpha x^T e_1)$$

• 分母即为 $2(x^T - \alpha e_1^T)x$ , 由此易得

$$2(w^Tx)w = x - \alpha e_1$$

```
最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变换
```

• 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbf{R}^n \ (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零

```
最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变换
```

- 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbf{R}^n \ (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零
- 证明步骤同时告诉我们w的构造方法如下:

```
最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变换
```

- 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbf{R}^n \ (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零
- 证明步骤同时告诉我们w的构造方法如下:
  - 计算 $v = x \pm ||x||_2 e_1$

最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变换

- 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbf{R}^n \ (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零
- 证明步骤同时告诉我们w的构造方法如下:
  - 计算 $v = x \pm ||x||_2 e_1$
  - 计算 $w = v/\|v\|_2$

# 符号的选择

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变热

Householder变换

Circone 海绵

正交变换法

• 为了使变换后得到的 $\alpha$ 为正数,我们应 取 $v = x - ||x||_2 e_1$ 

# 符号的选择

最小二乘问题的求解

Householder变换

- 为了使变换后得到的α为正数,我们应
- 问题: 如果x是一个很接近于e<sub>1</sub>的向量,计 从而严重地损失有效数字

# 符号的选择

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变的

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- 为了使变换后得到的 $\alpha$ 为正数,我们应取 $v = x ||x||_2 e_1$
- 问题:如果x是一个很接近于 $e_1$ 的向量,计算 $v_1 = x_1 ||x||_2$ 时会出现两个相近的数相减,从而严重地损失有效数字
- 变形以避免这一问题:  $(x_1 > 0)$

$$v_1 = x_1 - \|x\|_2 = \frac{x_1^2 - \|x\|_2^2}{x_1 + \|x\|_2} = \frac{-(x_2^2 + \dots + x_n^2)}{x_1 + \|x\|_2}$$

## w不需要计算

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

4m /// → → → → +//.

Householder变换

● 由于

$$H = I - 2ww^T = I - \frac{2}{v^T v}vv^T = I - 2\beta vv^T$$

其中 $\beta = 2/(v^T v)$ , 因此我们不必求出w,而只需求出 $\beta n v$ , 从而避免了开方运算

## w不需要计算

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初笔正态变换

Householder变换

Givens变换

正交变换》

#### • 由于

$$H = I - 2ww^T = I - \frac{2}{v^T v}vv^T = I - 2\beta vv^T$$
  
其中 $\beta = 2/(v^T v)$ , 因此我们不必求出 $w$ , 而只需求出 $\beta$ 和 $v$ , 从而避免了开方运算

在实际计算时,可以把v规范化为第一个分量为1(第一个分量原值肯定不为零),这样可以恰好把v的后n-1分量放在x的后n-1个化为零的分量位置上

### 下溢和上溢

最小二乘问题的求解

ル 建松

最小二乘问题

初等止父发:

Householder变换

. . .

正交变换法

• 当下溢发生时,计算机有可能把结果置为零,这可能会出现 $v^Tv$ 为零的情形

#### 下溢和上溢

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- 当下溢发生时,计算机有可能把结果置为零, 这可能会出现*v*<sup>T</sup>*v*为零的情形
- 如果x的分量太大,那么该分量平方时,会出现上溢

#### 下溢和上溢

最小二乘问题的求解

か 建松

最小二乘问是

初等正交变的

Householder变换

Givens变换

- 当下溢发生时,计算机有可能把结果置为零, 这可能会出现*v*<sup>T</sup>*v*为零的情形
- 如果x的分量太大,那么该分量平方时,会出现上溢
- 由于 $\forall \alpha$ ,  $\alpha v$ 和v的单位化向量相同,因此为了避免溢出现象的出现,我们可以用 $x/||x||_{\infty}$ 代替x来构造v, 这相当于在原来的v之前乘了常数 $1/||x||_{\infty}$

# 化其它元素为零

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变:

Householder变换

. . .

正交变换法

• Householder变换结果的形式并不需要局限于 $\alpha e_1$ 

# 化其它元素为零

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态变描

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- Householder变换结果的形式并不需要局限于 $\alpha e_1$
- 它可以把向量中任何若干相邻的元素化为零

# 化其它元素为零

最小二乘问题的求解

. . . . . . .

最小二乘问题

初等正交变挑

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- Householder变换结果的形式并不需要局限于 $\alpha e_1$
- 它可以把向量中任何若干相邻的元素化为零
- 例如,欲在 $x \in \mathbb{R}^n$ 中从k + 1至j位置引入零元素,只要定义

$$v = (0, ..., 0, x_k - \alpha, x_{k+1}, ..., x_j, 0, ..., 0)$$

即可,其中
$$\alpha^2 = \sum_{i=k}^{j} x_i^2$$

### HA的计算

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法HA

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$
  
其中 $w = \beta A^T v$ 

### HA的计算

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法*HA* 

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$
  
其中 $w = \beta A^T v$ 

• 计算w的一个元素需要n + (n-1) + 1 = 2n次运算,从而计算w需要2mn次运算

## HA的计算

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法*HA* 

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$
  
其中 $w = \beta A^T v$ 

- 计算w的一个元素需要n + (n-1) + 1 = 2n次运算; 从而计算w需要2mn次运算
- 计算 $A vw^T$ 的一个元素需要两次运算

### HA的计算

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正态亦描》

• 应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法*HA* 

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$
  
其中 $w = \beta A^T v$ 

- 计算w的一个元素需要n + (n-1) + 1 = 2n次运算: 从而计算w需要2mn次运算
- 计算 $A vw^T$ 的一个元素需要两次运算
- 所以计算HA的总运算量为4mn



# Givens变换

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

加马亚文文

Householder 1888

Givens变换

正交变换法

• Householder变换把一个向量中许多分量化为零

### Givens变换

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

- Householder变换把一个向量中许多分量化为零
- Givens变换则只是把向量中一个分量化为零

$$G(i, k, \theta) = I + s(e_i e_k^T - e_k e_i^T) + (c - 1)(e_i e_i^T + e_k e_k^T)$$

其中
$$c = \cos \theta$$
,  $s = \sin \theta$ 

### Givens变换

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- Householder变换把一个向量中许多分量化为零
- Givens变换则只是把向量中一个分量化为零

$$G(i, k, \theta) = I + s(e_i e_k^T - e_k e_i^T) + (c - 1)(e_i e_i^T + e_k e_k^T)$$

其中
$$c = \cos \theta$$
,  $s = \sin \theta$ 

• 这一变换是由Wallace Givens于上世纪五十年代 引入到数值分析领域,也称为Jacobi变 换(C.G.J. Jacobi, 1804–1851)

# $G(i, k, \theta)$ 的结构

最小二乘问题的求解

邓建松

最小一乘问题

初笔正立变换

Givens变换

T 32 30 46 34

### 置零时的取值

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初寺正文文俠

Givens变换

正交变换法

• 取 $x \in \mathbb{R}$ ,  $y = G(i, k, \theta)x$ , 则

$$y_i = cx_i + sx_k, y_k = -sx_i + cx_k, y_j = x_j, j \neq i,$$

### 置零时的取值

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

.........

Givens变换

• 取 $x \in \mathbb{R}$ ,  $y = G(i, k, \theta)x$ , 则

$$y_i = cx_i + sx_k, y_k = -sx_i + cx_k, y_j = x_j, j \neq i,$$

• 若要 $y_k = 0$ , 只要取

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}, s = \frac{x_k}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}$$

就有
$$y_i = \sqrt{x_i^2 + x_k^2}, y_k = 0$$



### 旋转

最小二乘问题的求解 邓建松

初等正交变换

Householder变物

正交变换法

• 从几何上看, $G(i, k, \theta)$ x是在(i, k)坐标 平面内将x按顺时针方向旋转 $\theta$ 角

### 旋转

最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题 初等正交变换 Householder变羡

Givens夸换

- 从几何上看, $G(i, k, \theta)$ x是在(i, k)坐标 平面内将x按顺时针方向旋转 $\theta$ 角
- 所以Givens变换也称为平面旋转变换

### 旋转

最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
初等正交变换
Householder变换

Givens夸换

- 从几何上看, $G(i, k, \theta)$ x是在(i, k)坐标 平面内将x按顺时针方向旋转 $\theta$ 角
- 所以Givens变换也称为平面旋转变换
- Givens变换左(或右)乘矩阵A,则它只改变A的第i,k行(或列),其余元素保持不变

### 溢出的避免

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

D 4 11 / //

Givens变换

正态态描述

• 利用*c*, *s*的定义进行计算,有可能发生 溢出

## 溢出的避免

最小二乘问题的求解

か 建松

最小二乘问题

初等正交变换

11 12 20240

Givens变换

- 利用*c*, *s*的定义进行计算,有可能发生 溢出
- 为了防止溢出,在实现时可以采用一些 小技巧,见书上算法中的描述

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

.....

正交变换法

• 本节讨论LS问题求解的新方法

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

加斗正文文:

Householder变数

- 本节讨论LS问题求解的新方法
- 由于2范数具有正交不变性,所以对任意正交 矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,

$$||Ax - b||_2 = ||Q^T(Ax - b)||_2$$

### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初寻正义文1

Householder变换

正交变换法

- 本节讨论LS问题求解的新方法
- 由于2范数具有正交不变性,所以对任意正交 矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,

$$||Ax - b||_2 = ||Q^T (Ax - b)||_2$$

• 从而LS问题 $\min \|Q^T Ax - Q^T b\|_2$ 就等价于原问题 $\min \|Ax - b\|_2$ 

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

忉寺正文文1

Householder变换

- 本节讨论LS问题求解的新方法
- 由于2范数具有正交不变性,所以对任意正交 矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,

$$||Ax - b||_2 = ||Q^T (Ax - b)||_2$$

- 从而LS问题 $\min \|Q^T Ax Q^T b\|_2$ 就等价于原问题 $\min \|Ax b\|_2$
- 期望通过适当选取正交矩阵Q, 使原问题转化为 较容易求解的LS问题。这就是正交变换法的基 本思想



# QR分解定理

最小二乘问题的求解

**是**小一乖问期

初笙正心恋拍

忉寺正文文孙

Givens变换

正交变换法

### 定理

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \ge n$ ), 则A有QR分解

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是正交矩阵, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是具有非负对角元的上三角阵;而且 3m = n且A非奇异时,上述分解是唯一的

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态变换

Tiouselloidel X :

正交变换法

• 对n进行数学归纳法

最小二乘问题的求解

**ル**建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder3 Givens变换

- 对n进行数学归纳法
- 当n = 1时这就是前一节关于Householder变换的定理

### 最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变换 Householder变换

- 对n进行数学归纳法
- 当n = 1时这就是前一节关于Householder变换的定理
- 假设已经证明了定理对所有  $\text{的}_{p} \times (n-1)$ 矩阵成立, $p \ge n-1$

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

- 对n进行数学归纳法
- 当n = 1时这就是前一节关于Householder变换的定理
- 假设已经证明了定理对所有  $\text{的} p \times (n-1)$ 矩阵成立, $p \ge n-1$
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的第一列是 $a_1$

**最小二乘问题的求解** 邓建松 最小二乘问题

初等正交变换

Mourobaldor部類

Givens变换

正交变换法

• 由Householder变换定理,存在正交矩阵 $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $Q_1^T a_1 = \|a_1\|_2 e_1$ 

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初笔正交变描

Householder变换

Givens变换

- 由Householder变换定理,存在正交矩阵 $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $Q_1^T a_1 = \|a_1\|_2 e_1$
- 于是我们有

$$Q_1^T A = \left(\begin{array}{cc} \|a_1\|_2 & v^T \\ 0 & A_1 \end{array}\right)$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 对 $(m-1) \times (n-1)$ 阶矩阵 $A_1$ 应用归纳 假设,有

$$A_1 = Q_2 \left( \begin{array}{c} R_2 \\ 0 \end{array} \right)$$

其中 $Q_2$ 是 $(m-1) \times (m-1)$ 阶正交矩阵, $R_2$ 是具有非负对角元的 $(n-1) \times (n-1)$ 上三角阵

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笙正な恋描

Givens变换

正交变换法

### 令

$$Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 & v^T \\ 0 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则Q和R满足定理的要求。存在性得证

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正立变数

. . .

正交变换法

● 设*m* = *n*, *A*非奇异

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换 Givens变换

- 设*m* = *n*, *A*非奇异
- 设 $A = QR = \tilde{Q}\tilde{R}$ , 其中 $Q, \tilde{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是 正交矩阵, $R, \tilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是具有非负对 角元的上三角阵

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变换 Householder变换 Givens变换

- 设*m* = *n*, *A*非奇异
- 设 $A = QR = \tilde{Q}\tilde{R}$ , 其中 $Q, \tilde{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是 正交矩阵, $R, \tilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是具有非负对 角元的上三角阵
- A非奇异,所以R,  $\tilde{R}$ 的对角元均为正数, 所以

$$\tilde{Q}^T Q = \tilde{R} R^{-1}$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小一乘问题

初笙正な恋描

Householder变物

er strik

正交变换法

• 上式左边是正交矩阵

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

77.4.11人人人)

Civone ##

- 上式左边是正交矩阵
- 上式右边是对角元均为正数的上三角阵

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

VI (1 11 / XXV

Householder3

- 上式左边是正交矩阵
- 上式右边是对角元均为正数的上三角阵
- 所以两边只能是单位阵,从而必有 $Q = \tilde{Q}, R = \tilde{R}$

### LS问题的正交变换法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初笔正交变制

Givens等指

正交变换法

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ 有线性无关的列, $b \in \mathbb{R}^m$ 

### LS问题的正交变换法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换 Givens变换

- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ 有线性无关的列, $b \in \mathbb{R}^m$
- A有QR分解,并且把Q分块 为 $Q = (Q_1, Q_2)$ ,其中 $Q_1$ 有n列

### LS问题的正交变换法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变换 Householder变换 Givens变换

- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ 有线性无关的列, $b \in \mathbb{R}^m$
- A有QR分解,并且把Q分块 为 $Q = (Q_1, Q_2)$ , 其中 $Q_1$ 有n列
- 💠

$$Q^{\mathsf{T}}b = \left(egin{array}{c} Q_1^{\mathsf{T}} \ Q_2^{\mathsf{T}} \end{array}
ight)b = \left(egin{array}{c} c_1 \ c_2 \end{array}
ight)$$

正交变换法

### 那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
  
=  $||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 

Householder变换

正交变换法

### 那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
  
=  $||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 

• x是原LS问题的解当且仅 当x是 $Rx = c_1$ 的解

正交变换法

### • 那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
  
=  $||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 

- x是原LS问题的解当且仅 当x是 $Rx = c_1$ 的解
- LS问题的求解转化为很容易求解的上 三角方程组求解

正交变换法

### • 那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
  
=  $||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 

- x是原LS问题的解当且仅 当x是 $Rx = c_1$ 的解
- LS问题的求解转化为很容易求解的上 三角方程组求解
- 问题的关键是如何实现QR分解

## QR分解的Householder方法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小一乘问题

油学 正な水塩

いみエススル

Civone 添添

正交变换法

用Householder方法计算QR分解与不选主元的Gauss消去法非常类似

## QR分解的Householder方法

最小二乘问题的求解

小连位

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

正交变换法

- 用Householder方法计算QR分解与不选主元的Gauss消去法非常类似
- 对一般矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,假设我们已进行了k-1步,得到了Householder变换 $H_1, \ldots, H_{k-1}$ ,使得

$$A_k = H_{k-1} \cdots H_1 A = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11}^{(k)}$ 是k-1阶上三角阵

# 第k步

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

. . .

.....

$$\bullet \quad \mathop{\not:}\nolimits \mathcal{L}A_{22}^{(k)} = (u_k, \ldots, u_n)$$

# 第k步

#### 最小二乘问题的求解

**邓建松** 

最小二乘问题

初等正交变换

Givens零棒

正交变换法

• 在第k步中,先确定Householder变换:

$$\tilde{H}_k = I_{m-k+1} - \beta_k v_k v_k^T \in \mathbb{R}^{(m-k+1)\times(m-k+1)}$$

使得
$$\tilde{H}_k u_k = r_{kk} e_1$$
, 其中 $r_{kk} \geqslant 0$ 

# 第k步

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 在第k步中,先确定Householder变换:

$$\tilde{H}_k = I_{m-k+1} - \beta_k v_k v_k^T \in \mathbb{R}^{(m-k+1)\times(m-k+1)}$$

使得
$$\tilde{H}_k u_k = r_{kk} e_1$$
, 其中 $r_{kk} \geqslant 0$ 

● 然后计算*H̃<sub>k</sub>A*<sup>(k)</sup>

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

11 1 11 20240

正交变换法

最小二乘问题

初等正交变的

Householder变换 Givens变换

正交变换法

• 
$$\diamondsuit H_k = \operatorname{diag}(I_{k-1}, \tilde{H}_k)$$

• 则我们有

$$A_{k+1} = H_k A_k = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & \tilde{H}_k A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ 0 & A_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11}^{(k+1)}$ 是上三角阵

### 最小二乘问题的求解 邓建松

最小二乘问题

初等正交变扬

Householder变换

正交变换法

• 如此从k = 1出发,对A依次进行n次Householder变换,我们就可以将A约化为上三角阵

- 如此从*k* = 1出发,对*A*依次进 行*n*次Householder变换,我们就可以 将*A*约化为上三角阵
- $idR = A_{11}^{(n)}, \ Q = H_1 \cdots H_n, \ 则有$

$$A = Q \left( \begin{array}{c} R \\ 0 \end{array} \right)$$

- 如此从*k* = 1出发,对*A*依次进 行*n*次Householder变换,我们就可以 将*A*约化为上三角阵
- $idR = A_{11}^{(n)}, \ Q = H_1 \cdots H_n, \ 则有$

$$A = Q \left( \begin{array}{c} R \\ 0 \end{array} \right)$$

• 如此得到的上三角阵*R*的对角元都是非 负的



最小二乘问题的求解

か 建松

最小二乘问题

初笔正交变的

正交变换法

• 可以在A中存放Q与R

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder恋婚

Givens受换 正交变换法

- 可以在A中存放Q与R
- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$

最小二乘问题的求解

BI\_\_£NE

取小—来问起

初等正交变换

Householder受换

- 可以在A中存放Q与R
- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$
- 对于每个 $H_k$ , 我们只需要保存 $v_k$ 和 $\beta_k$

最小二乘问题的求解 邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

正交变换法

● 可以在A中存放Q与R

- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$
- 对于每个 $H_k$ ,我们只需要保存 $v_k$ 和 $\beta_k$
- $v_k = (1, *, ..., *)$ ,可把除首位的1外的元素存放在A的对角元以下位置上

**最小二乘问题的求解** 邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

- 可以在A中存放Q与R
- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$
- 对于每个 $H_k$ , 我们只需要保存 $v_k$ 和 $\beta_k$
- $v_k = (1, *, ..., *)$ , 可把除首位的1外的元素存放在A的对角元以下位置上
- β<sub>k</sub>存放在单独一个向量中

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变制

............

---

正交变换法

● 算法的运算量为2n²(m - n/3)

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正交变换

Givens变换

- 算法的运算量为 $2n^2(m-n/3)$ 
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半

最小二乘问题的求解

**邓建松** 

最小二乘问题

**初寺上父安**#

Householder变

- 算法的运算量为 $2n^2(m-n/3)$ 
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好

最小二乘问题的求解

A DE TA

最小二乘问题

初等正交变的

.....

Givens变换

- 算法的运算量为2n²(m n/3)
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好
  - 对于正交阵,相互累积相乘时,结果矩阵 的元素仍是有界的

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变挑

Householder变换

Givens受损

- 算法的运算量为2n²(m n/3)
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好
  - 对于正交阵,相互累积相乘时,结果矩阵 的元素仍是有界的
- 利用这一算法求解LS问题所得到的计算解通常 要比正则化方法精确得多

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

- 算法的运算量为2n²(m n/3)
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好
  - 对于正交阵,相互累积相乘时,结果矩阵 的元素仍是有界的
- 利用这一算法求解LS问题所得到的计算解通常 要比正则化方法精确得多
- 当然付出的代价也是不容忽视的: *m* ≫ *n*时



最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

Givens受换

正交变换法

也可以利用Givens变换或者Gram-Schimidt正交 化实现QR分解

最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

- 也可以利用Givens变换或者Gram-Schimidt正交 化实现QR分解
- 通常Givens变换来实现QR分解的运算量大约 是Householder方法的两倍。但如果A稀疏,则 使用Givens变换可能会比较有效

**最小二乘问题的求解** 邓建松

最小二乘问是

初等正交变换

11 11 20 40

Givens变换

- 也可以利用Givens变换或者Gram-Schimidt正交 化实现QR分解
- 通常Givens变换来实现QR分解的运算量大约 是Householder方法的两倍。但如果A稀疏,则 使用Givens变换可能会比较有效
- 也可以用QR分解进行特征值求解或者解线性方程组,对病态方程组可能有效,但运算量大得多