有限元方法 2021 秋（11 月 15、17 日作业）

金晨浩 SA21001033

1. **单连通域上的三角剖分满足：$T+N-E=1$，T,N,E 分别表示三角形、顶点、棱的个数。**

证明. 对三角形的个数 T 进行归纳。$T=1$ 平凡。假设当任意的单连通域上的三角剖分包含的三角形个数为 $T=T_0\geq 1$ 时，总有 $T_0+N-E=1$，那么对任意的单连通域，当三角剖分包含 T_0+1 个三角形时，任取其中某个三角形 $\mathcal{T}_{ex}$ 使得去掉 $\mathcal{T}_{ex}$ 后剩下 T_0 个三角形 $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^{T_0}$ 可以拼成一个单连通域。设 $\mathcal{T}_{ex}$ 与 $\{\mathcal{T}_i\}$ 中有公共边的三角形个数为 k，则 $k=1$ 或 2。

当 $k=1$ 时，$\{\mathcal{T}_i\}$ 包含三角形、顶点、棱个数分别为 $T_0,N-1,E-2$。由归纳假设 $T_0+(N-1)-(E-2)=1$，即 $T+N-E=T_0+1+N-E=1$；

当 $k=2$ 时，$\{\mathcal{T}_i\}$ 包含三角形、顶点、棱个数分别为 $T_0,N,E-1$。由归纳假设 $T_0+N-(E-1)=1$，即 $T+N-E=T_0+1+N-E=1$。

所以当 $T=T_0+1$ 时结论仍成立，由归纳假设即证。 □

> Remark: 如果区域多连通，比如某个区域中间挖去一个三角形的洞，那么结论不成立。顺带，证明方法不唯一。（不用数学归纳法也可以证，考虑三角形内角和）

2. **考虑三次 Lagrange 元和 Hermite 元。给定单连通域上的三角剖分，三角形、顶点、棱的个数分别为 T,N,E。求解两种有限元的全局自由度（degree of freedom, DOF）并比较哪个更小。**

证明. k 次 Lagrange 元：3 个顶点估计，$3(k-1)$ 个棱估计，$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ 内部估计。

k 次 Hermite 估计 $(k\geq 3)$：3 个顶点估计，6 个顶点方向导，$3(k-3)$ 个棱估计，$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ 内部估计。

所以 3 次 Lagrange 三角元全局自由度为 $T+N+2E$，3 次 Hermite 三角元全局自由度为 $T+3N$。所以 $\mathrm{dof(Hermite)}-\mathrm{dof(Lagrange)}=2(E-N)=2(1-T)<0$，Hermite 元自由度更低。 □