偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2019-09

1 偏微分方程的初边值问题

本章介绍偏微分方程的初边值问题的有限差分方法的构造（包括边界条件的处理），及其基本概念和理论，以及边界条件的近似

1.1 边界条件的处理

1.2 人工边界

1.3 初边值问题的有限差分方法的基本概念和理论

本节的内容适用于相应的高维问题

1. 收敛性：

2. 截断误差、相容性

   截断误差：与差分方程$Lv_j^n = g_j^n$（包括边界条件的近似）等价的微分方程，与源方程$\mathcal{L}u = g$之差

   Definition 1.1 对于满足$\mathcal{L}u = g$的任意光滑函数$u(x,t)$，$T_j^n = Lu_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j,t_n) - g(x_j,t_n))$称为该差分方法$Lv_j^n = g_j^n$（包括边界条件的近似）在$(x_j,t_n)$处（包括区域内部和边界）的（局部）截断误差。

   注意：区域内部的截断误差可以与边界上的截断误差不一样

   Definition 1.2 若差分方法（区域内部的*PDE*的有限差分近似，以及边界条件的数值近似）的截断误差$T_j^n = O((\Delta x)^p)+((\Delta t)^q)$（包括区域内部和边界，且$p,q$ 取区域内部和边界上的最小值）则称

为该差分方法的（局部）截断误差对时间是 p 阶、对空间是 q 阶的，且该差分方法对时间是 p 阶、对空间是 q 阶精度。

相容性：反映源方程的初边值问题与差分方法（包括差分方程和初边值条件的近似）之间的关系

Definition 1.3 当 $\Delta x,\ \Delta t\to 0$，$(j\Delta x, n\Delta t)\to(x^*,t^*)$ 时，若差分方法 $Lv_j^n=g_j^n$（包括边界，以及可能的人工边界的数值处理）的截断误差 $T_j^n\to 0$，则称为该差分方法在 (x^*,t^*) 点与相应的源方程 $\mathcal{L}u=g$ 的初边值问题是（无条件）逐点相容的。

Definition 1.4 若 $\forall k\to\infty$ 时，$\Delta x^k\to 0$ 的均匀剖分序列 $\{\Delta x^k\}_{k=1}^{\infty}$，当 $\forall k\to\infty$ 时，$\Delta t\to 0$，$(n+1)\Delta t\to t$，源*PDE*初边值问题的解 U 满足：

$U^{n+1}=Q\cdot U^n+\Delta t\cdot G^n+\Delta t\cdot T^n$，

且 $||T^n||_k\to 0$；则称差分方法 $V^{n+1}=Q\cdot V^n+\Delta t\cdot G^n$ 与相应的源*PDE*初边值问题关于模 $||\cdot||_k$ 是（无条件）相容的。

若 $||T^n||_k=O((\Delta x)^p+(\Delta t)^q)$，则称该差分方法按模 $||\cdot||_k$ 具有 (p,q) 阶精度。

Example 1.1 讨论

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & x\in(0,1),\ t>0\\ u(x,0)=f(x), & x\in[0,1]\\ u_x(0,t)=0,\ u(1,t)=0 & t\geq 0\end{cases}$$

的差分方法*:*

$$\begin{cases} v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta t}{(\Delta x^k)^2}(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n); & j=1,\cdots,n_x^k-1\\ v_j^0=f(x_j), & j=0,\cdots,n_x^k\\ v_0^{n+1}=(1-2\sigma)v_0^n+2\sigma v_1^n,\ v_{n_x^k}^{n+1}=0, & n=0,\cdots\end{cases}$$

的相容性。

Example 1.2 对于上例用 $v_0^{n+1} = v_1^{n+1}$ 近似 $u_x(0,t) = 0$，且剖分使得 $x_0 = 0$

（*P73 HW 2.3.6*）

补充作业： 将上例中的剖分用 $v_0^{n+1} = v_1^{n+1}$ 近似 $u_x(0,t) = 0$，且剖分使得 $x_{\frac{1}{2}} = 0$；试分别分析其逐点相容性和按最大模相容性

作业：（第二本参考书）：P72-73: HW2.3.5 (c)

3. 稳定性：

Definition 1.5 对于$\mathcal{L}u=g$的二层格式（包括数值边界）：$V^{n+1}=Q\cdot V^n,\ n\geq 1$，$V^n=(v_0^n,\cdots,v_{n_x-1}^n)$，$G^n=(g_0^n,\cdots,g_{n_x-1}^n)$。若$\forall k\to\infty$时，$\Delta x^k\to 0$ 的均匀剖分序列$\{\Delta x^k\}_{k=1}^{\infty}$，当$\forall k\to\infty$时，$\Delta t\to 0$，$(n+1)\Delta t\to t$，有：
$||V^{n+1}||_k\leq Ke^{\beta t}||V0||_k$，
则称该差分格式关于模$||\cdot||_k$是（无条件）稳定的。

Example 1.3

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x), & x\in[0,1] \\ u(0,t)=u(1,t)=0 & t\geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$:

$$\begin{cases} v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta t}{(\Delta x^k)^2}(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n); & j=1,\cdots,n_x^k-1 \\ v_j^0=f(x_j), & j=0,\cdots,n_x^k \\ v_0^{n+1}=v_{n_x^k}^{n+1}=0, & n=0,\cdots \end{cases}$$

试证：当$0\leq\sigma=\frac{\Delta t}{(\Delta x^k)^2}\leq\frac{1}{2}$时，该方法是按$||\cdot||_{\infty,k}$模（即最大模）稳定的

Theorem 1.1 对于$\mathcal{L}u=g$的二层格式（包括数值边界）：$V^{n+1}=Q\cdot V^n,\ n\geq 1$，它关于$||\cdot||_k$ 模是稳定的充分必要条件：存在常数：$\Delta x_0^k>0,\ \Delta t_0>0,\ K\geq 0,\ \beta\geq 0$，使得：$\forall 0<\Delta x^k\leq\Delta x_0^k,\ 0<\Delta t\leq\Delta t_0,\ t=(n+1)\Delta t$有：

$$||Q^{n+1}||_k\leq Ke^{\beta t}$$

Q的谱半径为$\sigma(Q)=\max_j|\lambda_j(Q)|$，且$\sigma(Q)\leq||Q||_2$

Theorem 1.2 对于$\mathcal{L}u=g$的二层格式（包括数值边界）：$V^{n+1}=Q\cdot V^n$, $n\geq 1$，它关于$||\cdot||_{2,\Delta x^k,k}$模是稳定的必要条件：存在：$c\geq 0$，使得：

$$\sigma(Q)\leq 1+c\Delta t$$

若Q是对称的，或者存在可逆矩阵S使得Q相似与一个对称矩阵（SQS^{-1}是对称矩阵）且S和S^{-1}一致有界；则上述条件是充分必要条件

4. Lax定理：

Theorem 1.3 （*Lax*定理）：对于一个适定的线性偏微分方程初值问题的二层差分格式，若其按序列模$||\cdot||_k$是(p,q)阶精度的（$p>0$，$q>0$），且它关于$||\cdot||_k$模是稳定的，则它是关于$||\cdot||_k$模(p,q)阶收敛的。

作业：（第二本参考书）：P78: HW2.4.2（按最大模）