有限元方法 2021 秋（9 月 15 日作业）

金晨浩 SA21001033

1. **考虑边值问题**

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

写出其变分弱形式。

解. 令 $V = \{v \in L^2(0,1) : v' \in L^2(0,1), v(0) = 0\}$，或直接写为 $V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$。

$\forall v \in V,\ \int_0^1 fv\,dx = \int_0^1 -u''v\,dx = \int_0^1 u'v'\,dx - u'v\big|_0^1 = \int_0^1 u'v'\,dx \Rightarrow$ 变分弱形式如下：

求解 $u \in V$ s.t. $a(u,v) = F(v),\ \forall v \in V$ 。其中 $a(u,v) := \int_0^1 u'v'\,dx,\ F(v) = \int_0^1 fv\,dx,\quad u, v \in V$。 □

Remark：(1). 本题的变分空间不需要、也不能限制 $v'(1) = 0$。限制边界的目的在于让变分过程中出现的边界项变为已知量（或消失）。本题边界项是 $u'v$，没有出现测试函数 v 导数的信息，且 $(u'v)|_{x=1} = 0$。不过，有的变分问题例如双调和方程，测试函数可能会对导数在边界有约束。

(2). 遇到非齐次边界，例如 $u(0) = a,\ u'(1) = b$，减去一个线性函数将其化成齐次的即可。

---

2. **写出分片二次有限元空间** $V_h = \{v \in C^0(0,1) : v|_{I_j} \in P^2,\ v(0) = v(1) = 0\}$ **的一组基并证明。**

证明. 将 [0,1] 区间 N 等分：$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1,\quad$ 记 $h = \frac{1}{N},\ x_j = jh,\ I_j = (x_{j-1}, x_j)$。
构造 Lagrange 基函数如下：

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{(2x-x_j-x_{j-1})(x-x_{j-1})}{h^2},\ x \in (x_{j-1}, x_j) \\ \frac{(2x-x_j-x_{j+1})(x-x_{j+1})}{h^2},\ x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, \quad x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}) \end{cases}, \quad j = 1, \cdots, N-1.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{4(x-x_i)(x_{i+1}-x)}{h^2}, \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, \quad x \notin (x_i, x_{i+1}) \end{cases}, \quad i = 0, \cdots, N-1.$$

Claim：$\{\varphi_j\}_{j=1}^{N-1} \cup \{\psi_{i+\frac{1}{2}}\}_{i=0}^{N-1}$ 构成 V_h 的一组基。

（线性无关）设 $f := \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \varphi_j + \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i \psi_{i+\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow f(x_j) = \lambda_j = 0,\ f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \mu_i = 0 \Rightarrow$ 系数均为 0。

（张成 V_h）$\forall f \in V_h$，考察 $g := f - f_I$，$f_I = \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j)\varphi_j + \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})\psi_{i+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow g$ 在每个区间 I_j 上均有 $x_j, x_{j+1}, x_{j+\frac{1}{2}}$ 三个零点，因此 $g|_{I_j} = 0,\ \forall j \Rightarrow g \equiv 0$。 □

Remark：(1). 无论编程还是笔头，都务必注意下标！注意下标！注意下标！

(2). 基函数选取不唯一，在经典有限元里，Lagrange 基函数是最常用的。齐次 Dirichlet 问题、空间 N 等分时，P^k 经典有限元空间的维数是 $kN-1$。构造过程如下。

将每个区间 I_j 进行 k 等分，记 $x_{j,s} = x_j + \frac{sh}{k}$，$s = 0, \cdots, k$。注意到 $x_{j,0} = x_j$，$x_{j,k} = x_{j+1}$。定义 $l_j^s(x) := \prod_{0 \le t \le k,\ t \ne s} \frac{x - x_{j,t}}{x_{j,s} - x_{j,t}}$，在区间 I_j 外取值为零。l_j^s 满足：

$$l_j^s(x_{j,t}) = \begin{cases} 1, & s = t, \\ 0, & s \ne t. \end{cases}$$

我们定义 V_h^k 的基函数如下：

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} l_j^k(x), & x \in (x_{j-1}, x_j), \\ l_{j+1}^0(x), & x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0, & x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}). \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, N-1;$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}^s(x) = \begin{cases} l_i^s(x), & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_i, x_{i+1}). \end{cases} \qquad i = 0, \cdots, N-1, \quad s = 1, \cdots, k-1.$$

$\{\varphi_j\}_{j=1}^{N-1} \cup (\bigcup_{s=1}^{k-1} \{\psi_{i+\frac{1}{2}}^s\}_{i=0}^{N-1})$ 构成 V_h^k 一组基，证明过程同前。

(3). 选取 Lagrange 基函数的好处：

- 验证它是一组基的过程很容易；
- 任意光滑函数 f，$f_I := \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j)\varphi_j + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{s=1}^{k-1} f(x_{i,s})\psi_{i+\frac{1}{2}}^s$ 给出了 f 的 k 次多项式插值。对于时间依赖问题，例如 $u_t = u_{xx}$，第一步需要对 u 在 $t=0$ 时刻的初值进行离散。插值函数虽然不总是最佳逼近，但能保证误差收敛阶（见数值分析多项式插值定理）。