

偏微分方程数值方法

抛物方程

目录

1	非线性抛物方程	1
2	具有间断系数的线性扩散方程	2

1 非线性抛物方程

以 $u_t = b(u)u_{xx}$ 为例，将系数冻结方法和差商离散技术相结合，可以建立相应的全显格式、全隐格式和 Crank-Nicolson(CN) 格式：

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n \\ v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu b(v_j^{n+1}) \delta_x^2 v_j^{n+1} \\ v_j^{n+1} &= v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left[b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(v_j^{n+1}) \delta_x^2 v_j^{n+1} \right] \end{aligned}$$

其中， $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ， $\delta_x^2 w_j = w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}$ 。注意：显式格式为了稳定性，需要 $\Delta t = O(\Delta x^2)$ ；隐式格式需要求解非线性方程组，需要使用相对合理的迭代近似求解。

局部线性化技术：将非线性差分格式近似的转化为线性差分格式。

- **时间延迟技术：**用 $b(v_j^n)$ 代替 $b(v_j^{n+1})$ 。

$$(CN) \Rightarrow v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left[b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^{n+1} \right] \quad (1)$$

格式有 (2, 1) 阶局部截断误差。

- **预估-矫正方法：**用两次局部线性化过程。

$$(CN) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{v}_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left[b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(v_j^n) \delta_x^2 \tilde{v}_j^{n+1} \right] \\ v_j^{n+1} = \tilde{v}_j^n + \frac{1}{2} \mu \left[b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(\tilde{v}_j^{n+1}) \delta_x^2 v_j^{n+1} \right] \end{cases} \quad (2)$$

格式有 (2, 2) 阶局部截断误差。

- **多步法：**利用已知时间层信息进行多项式外推，给出扩散系数的高阶外推。

$$(CN) \Rightarrow v_j^{n+1} = v_j^n + \mu b(v_j^{n+1/2}) \left[\delta_x^2 v_j^n + \delta_x^2 v_j^{n+1} \right] \quad (3)$$

其中， $v_j^{n+1/2} = \frac{3}{2} v_j^n - \frac{1}{2} v_j^{n-1}$ 。格式有 (2, 2) 阶局部截断误差。

- **Richtmyer 方法：**利用时间方向的 Taylor 展开公式，通过偏微分方程和已知时间层信息，高阶逼近差分方法的非线性部分。以多孔介质方程 $u_t = (u^m)_{xx}$ ， $m > 1$ ，为例：

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left[\delta_x^2 (v_j^n)^m + \delta_x^2 (v_j^{n+1})^m \right] \quad (CN) \Rightarrow$$

$$w_j = \mu \delta_x^2 (v_j^n)^m + \frac{1}{2} m \mu \delta_x^2 [(v_j^n)^{m-1} w_j] \quad (4)$$

其中, $w_j = v_j^{n+1} - v_j^n$ 。格式有 (2, 2) 阶局部截断误差。

2 具有间断系数的线性扩散方程

考虑方程

$$u_t = (a(x, t) u_x)_x, \quad a(x, t) = \begin{cases} a_L, & x < x_* \\ a_R, & x > x_* \end{cases} \quad a_L \neq a_R. \quad (5)$$

此时, 真解不再是 (整体) 古典解, 而是满足连接条件的分片古典解:

$$u(x_*^-, t) = u(x_*^+, t), \quad a_L u_x(x_*^-, t) = a_R u_x(x_*^+, t), \quad t > 0. \quad (6)$$

但是, $u_x(x_*^-, t) \neq u_x(x_*^+, t)$ 。

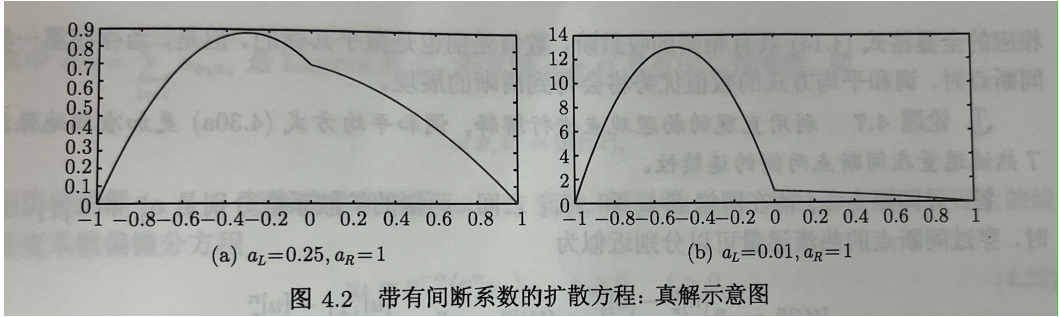


图 4.2 带有间断系数的扩散方程: 真解示意图

物理意义: 该方程可以用来描述不同导热系数的两个材料焊接在一起后的导热现象, 温度 u 和热流量 $W = a \cdot u_x$ 处处连续, 无论扩散系数是否存在间断。因此, 方程具有热量的局部守恒性质:

$$\begin{aligned} \int_{x_L}^{x_R} [u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)] dx &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} [a(x_R, t) u_x(x_R, t) - a(x_L, t) u_x(x_L, t)] dt \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} [W(x_R, t) - W(x_L, t)] dt, \quad \forall x_L < x_R. \end{aligned}$$

数值格式：积分差值方法

$$\Delta x \left[v_j^{n+1} - v_j^n \right] = \Delta t \left[\widehat{W}_{j+1/2}^n - \widehat{W}_{j-1/2}^n \right], \quad \text{with} \quad \widehat{W}_{j+1/2}^n = a_{j+1/2}^n \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x}. \quad (7)$$

可以数值保持热量的局部守恒性质，相应的数值解一定能收敛到真解。

- **算数平均方式：**

$$a_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (a_j^n + a_{j+1}^n)$$

- **调和平均方法：**

$$a_{j+1/2}^n = \left[\frac{\theta_{j+1/2}^n}{a_j^n} + \frac{1 - \theta_{j+1/2}^n}{a_{j+1}^n} \right]^{-1}$$

其中，

$$\theta_{j+1/2}^n = \begin{cases} (x_* - x_j) / \Delta x, & x_* \in [x_j, x_{j+1}], \\ 1/2, & \text{其他}. \end{cases}$$

- 当扩散系数的二阶导数连续有界时，调和平均方法和算数平均方法是非常相近的；但是，对于间断系数问题，调和平均方法能更加准确的保持热流通量在间断点两侧的连续性。

Homework: 假设守恒型扩散方程的扩散系数在 $x_* = 0$ 处间断，两侧取值分别为 $a_L = 4$, $a_R = 1$ 。考虑 Dirichlet 零边值问题。设真解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-4t} \sin(x), & x \in [-\pi, 0], \\ e^{-4t} \sin(2x), & x \in [0, \pi], \end{cases}$$

取网格剖分 $N = 21, 41, 81, 161, 321$ ，网格比 $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.1$ 。给出终止时刻 $T = 1$ 时两种格式的 L^2 误差、 L^∞ 误差和对应的精度阶，并进行分析。