

跳台跳水的物理模型分析和体型修正

杨小龙¹, 沈蓉萍², 张紫茵²

(1. 中国科学院大学 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190)

(2. 西南石油大学 计算机科学学院, 四川 成都 610500)

摘 要: 通过建立 Euler-Poinsot 刚体运动模型, 模拟人体在跳台跳水时的运动情况. 并且在此基础上建立左右非对称和前后非对称的运动模型, 用于模拟复杂的转体跳水和屈体抱膝跳水. 运动刚体模型详述了旋运动的动力学原理并导出各物理参数之间定量关系, 能够求解模型得出运动员完成各个跳水动作的时间, 进而得出该时间与运动员体型(身高, 体重)之间的关系. 随后设置了体型扰动因子, 解析与身高、体重及体型扰动因子有关的体型校正系数, 求解了体型校正公式用于所有跳水动作难度系数的修正. 通过与现有的难度系数打分规则对比, 模型不仅真实有效, 还在部分动作上更具有公平性.

关键词: 刚体模型; 动量矩守恒; 动力学; 体型扰动因子

1 引言

国际泳联在跳水竞赛规则中规定了不同跳水动作的代码及其难度系数, 它们与跳水运动员的起跳方及空中动作有关. 起跳方式包括起跳时运动员正面朝向、翻腾方向, 空中动作包括翻腾及转体圈数、身体姿势等. 裁判员们评分时, 根据运动员完成动作的表现优劣及入水效果, 各自给出从 10 到 0 的动作评分, 然后按一定公式计算该运动员该动作的完成分, 此完成分乘以该动作的难度系数即为该运动员该动作的最终得分. 因此, 出于公平性考虑, 一个跳水动作的难度系数应充分反映该动作的真实难度. 但是, 有人说, 瘦小体型的运动员在做翻腾及转体动作时有体型优势, 应当设置体型系数予以校正^[1].

本文应用物理学方法, 建立模型描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型(身高, 体重)之间的关系. 我们假设人体在跳台跳水时不考虑空气阻力问题, 所以跳台跳水运动可以看作腾空运动. 根据运动本质, 跳台跳水动作可以视为刚体运动^[2]. 而跳水运动员的空翻转体运动可以看作是绕质心的运动, 这种运动规律必定遵循动量矩守恒定理^[3]. 首先根据动量矩定理定性解释旋运动的物理本质. 然后通过建立人体的刚体系模型来更加详细认识跳水时的刚体运动. 其次分析绕质心运动的动力学方程, 详述旋运动的动力学原理并导出各物理参数之间定量关系. 最后建立并求解模型得出运动员完成各个跳水动作的时间, 并且得出该时间与运动员体型(身高, 体重)之间的关系.

2 跳水的运动学模型

假设人体在跳台跳水时不考虑空气阻力问题, 所以跳台跳水运动可以看作腾空运动. 根

收稿日期: 2019-03-10

据运动本质,跳台跳水动作可以视为刚体运动.跳水运动员的空翻转体运动可以看作是绕质心的运动,这种运动规律必定遵循动量矩守恒定理.首先根据动量矩定理定性解释旋运动的物理本质,然后通过建立人体的刚体的转动模型.其次分析绕质心运动的动力学方程,详述旋运动的动力学原理并导出各物理参数之间定量关系.最后建立并求解模型得出运动员完成各个跳水动作的时间,并且得出该时间与运动员体型(身高,体重)之间的关系.

2.1 刚体欧拉运动

跳台跳水运动可以看作古典刚体欧拉力学问题^[4].首先,我们以刚体质心 O 为原点建立坐标系:刚体的中心主轴坐标系 (x, y, z) ,惯性空间中的平动坐标系 (a, b, c) , O_b 沿守恒的刚体绕质心的动量矩矢量方向为 \vec{I} .

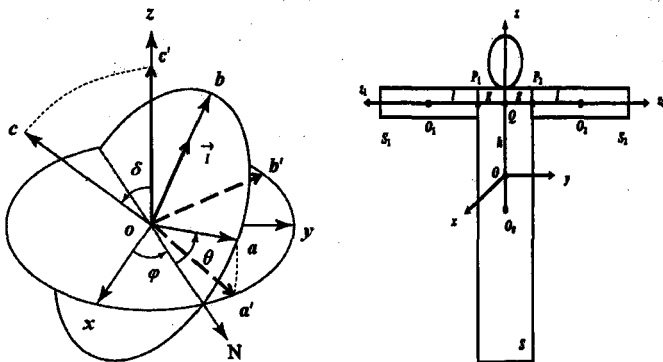


图1 空间坐标系的建立及基本的受力分析

如图1所示,假设 (a, b, c) 绕 O_b 转动 θ 角得到新的平动坐标系,然后绕新的 Oa 转动 δ 角后为 (a', b', c') ,此时 Oc' 与主轴 Oz 重合,再绕 Oc' 转动 φ 角后为 (x, y, z) .其中 θ, δ, φ 是 (x, y, z) 与 (a, b, c) 相对位置的角度坐标,与传统使用的欧拉角并不同.此时刚体的瞬时角速度 ω_t 向各个轴上的投影为 p, q, r ,其式子如式(1)所示

$$\begin{cases} p = \theta \cos \delta \sin \varphi + \delta \cos \varphi. \\ q = \theta \cos \delta \cos \varphi - \delta \sin \varphi. \\ r = \varphi - \theta \sin \delta. \end{cases} \quad (1)$$

设 N, M, L 为刚体的中心主惯性矩,将沿着 b 轴的矢量 \vec{I} 向 (x, y, z) 的各轴投影,并分别用 N_p, M_q, L_r 来表示,得到动力学方程如下:

$$\begin{cases} \theta = \omega_0(1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi). \\ \delta = -\omega_0 \lambda \mu \cos \delta \cos \theta \sin \varphi. \\ \varphi = -\omega_0 \lambda \sin \delta (1 + \mu \sin^2 \theta). \end{cases} \quad (2)$$

其中:

$$\omega_0 = \frac{\vec{I}}{M}, \quad \lambda = \frac{M - L}{L}, \quad \mu = \frac{L(N - M)}{N(M - L)} \quad (3)$$

那么式(2)存在的特解为:

$$\theta = \omega_0 t, \quad \delta = \varphi = 0 \quad (4)$$

这就表示刚体绕主轴 Oy 以 ω_0 为角速度作匀速转动,同时旋转轴在惯性空间中指向不改变,这种情况称之为永久转动.

将式 (2) 中后两个子式相除就可以消去时间变量. 设 δ_0 为 δ 的初始值, $\varphi = 0$ 对应初始时间, 积分得出

$$\begin{cases} \cos \delta = \cos \delta_0 (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}. \\ \sin \delta = (\sin^2 \delta_0 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \text{Sign}(\sin \delta_0). \end{cases} \quad (5)$$

$\delta_0 > 0$, 将式 (5) 代入式 (2) 消去 δ , 可以得到 φ 的微分方程为:

$$\varphi' = -\omega_0 \lambda (\sin^2 \delta_0 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

分析式 (5) 可以得到如果 $\mu < 0$, 则 φ 的变化范围的限制为:

$$\sin^2 \varphi_0 \geq |\mu|^{-1} \sin^2 \delta_0 \quad (7)$$

这样就能保证 $\cos \delta$ 或 $\sin \delta$ 为实数. 当 $0 < \mu$, 或 $-1 < \mu < 0$ 且 $\sin^2 \delta_0 \geq |\mu|$, 则 φ 的变化范围不受任何限制. 可分以下 3 种情况讨论刚体转动情况:

1) 当 $\mu > 0$ 时, 此时 \vec{Y} 为中值, 此时刚体绕 y 轴的永久转动很不稳定. 因为 δ 起始的微小扰动 δ_0 都可以使 \vec{I} 显著偏离 y 轴, 并且沿着 z 轴的极迹作锥运动. 这是因为 \vec{I} 沿 z 轴有同方向的投影产生, 所以刚体绕 z 轴单方向旋转, 这是旋运动物理本质.

2) 当 $\mu < -1$ 时, 此时 \vec{Z} 为中值, 刚体绕 y 轴的永久转动稳定, 起始的微小扰动 δ_0 只能让 \vec{I} 在 y 轴附近作锥运动. 因为这时 \vec{I} 沿 z 轴的投影方向呈周期性改变, 所以刚体绕 z 轴的旋转方向交替变化, 因此 φ 角的变化范围受限^[5].

3) 当 $-1 < \mu < 0$ 时, 此时 \vec{X} 为中值, 如果 δ_0 足够大可以使极迹转变成绕 z 轴的封闭曲线, 此时刚体仍能够绕 z 轴单方向旋转.

2.2 转体运动的刚体模型

人体的学模型可以确定为刚体铰结成的刚体系. 本节中考虑跳水直体情形, 可以将模型简化为 S_0 (头、身躯、腿部)、 S_1 (左臂)、 S_2 (右臂) 组成的刚体系 (S), 如图 1 所示.

将 $S_i (i = 1, 2)$ 简化为图 1 中两侧的矩形, 设 O_0, M 分别为 S 的质心和质量, O_i, m 分别为 S_i 质心和质量, P_i 为 S_i 与 S_0 在肩部相联结的铰接点. 假设 P_1 与 P_2 的连线与过 O_n 指向头顶的纵轴 $O_0 Z_0$ 相交于 Q 点, 且 $O_0 Q = h$, $OP_i = g$, $O_i P_i = l$. 设 O 为 $O_0 Z_0$ 上与 O_0 距离为 $2mh_0/(M + 2m)$ 的确定点, 可证当 S_1, S_2 位于不同位置时, 系统的质心位于以 O 为中心, $2ml/(M + 2m)$ 为半径的球内. 通过计算可知此球面半径为 3cm 左右, 为了便于计算我们近似以 O 点作为 O 的质心位置.

因此, 如图 1 所示, 以 O 为原点建立 S_n 的形体轴坐标系 (x_0, y_0, z_0) : Oz_0 沿纵轴指向头顶, Oy_0 沿横轴指向左侧, Ox_0 指向腹部, $OQ = h = Mh_0/(M + 2m)$. 如果上下肢都保持在 $(y_0 Oz_0)$ 平面内, 则 (S) 近似为相对 $(y_0 Oz_0)$ 平面的面对称刚体; 如果上下肢保持左右对称位置, 则 (S) 是相对 $(x_0 Oz_0)$ 平面的面对称刚体. 本节讨论双腿并拢与 z_n 轴平行, 双臂在 $(y_0 Oz_0)$ 平面内左右对称的特殊情况. 这时 (S) 相对 $(y_0 Oz_0)$ 和 $(x_0 Oz_0)$ 两个平面都对称, (x_0, y_0, z_0) 与 (S) 的主轴坐标系 (x, y, z) 完全重合. 设 N_0, M_0, L_0 为 S_0 相对 O 点的主惯性矩, J 为 S_1 相对过 O_1 垂直于对称轴 $O_i Z_i$ 的主惯性矩. 表 1 给出了不同手臂位置时 (S) 的主惯性矩.

由于人直体时的 μ 大于零, 微小扰动 δ_0 能显著改变运动状态, 从而引起绕纵轴的单方向旋转, 此即旋运动的物理本质^[6]. 定义 Oz_0 和 Oy^* 为转体轴和空翻轴. Oz_0 为纵轴, Oy^* 为人体横断平面 $(x_0 Oy_0)$ 与惯性坐标系平面 (bOz) 的交线. 空翻轴 Oy^* 垂直于纵轴但不随体

运动改变方位. 令 \$(S)\$ 的瞬时角速度 \$\omega\$ 沿 \$Oy^*\$ 和 \$Oz_0\$ 的投影为空翻速度 \$\Psi\$ 和转体速度 \$\Phi\$, \$\Psi'\$ 和 \$\Phi'\$ 定义为空翻角和转体角:

$$\Psi = \theta \cos \delta, \quad \Phi = \varphi - \theta \sin \delta \quad (8)$$

将式 (2) 与式 (5) 带入式 (8), 得到

$$\Psi = \omega_0 \cos \delta_0 (1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi) (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\Phi = -\omega_0 (1 + \lambda) (\sin^2 \delta_0 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

将上两式与式 (6) 相除消去时间变量后对 \$\varphi\$ 自 0 至 \$2\pi\$ 积分, 得到 \$\varphi\$ 每变化一周的空翻角与转体角增量:

$$\Delta \Psi' = -\frac{\cos \delta_0}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi) d\varphi}{(1 + \mu \sin^2 \varphi) (\sin^2 \delta_0 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

$$\Delta \Phi' = \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \mu \sin^2 \varphi} \quad (12)$$

定义转体系数 \$n\$ 为每空翻一周的转体周数.

$$n = \frac{|\Delta \Psi'|}{|\Delta \Phi'|} \quad (13)$$

表 1 不同手臂位置时 \$(S)\$ 的主惯性矩

手臂位置	N	M	L	
双臂平举	$N_0 + 2J + 2m[(l + g)^2 + h^2]$	$M_0 + 2mh^2$	$L_0 + 2J + 2m(l + g)^2$	
双臂下垂	$N_0 + 2J + 2m[(h - l)^2 + g^2]$	$M_0 + 2J + 2m(h - l)^2$		
双臂上举	$N_0 + 2J + 2m[(h + l)^2 + g^2]$	$M_0 + 2J + 2m(h + J)^2$		
右臂上举			$L_0 + 2mg^2$	
左臂下垂	$N_0 + 2J + 2m(h^2 + l^2 + g^2)$	$M_0 + 2J + 2m(h^2 + l^2)$		
右臂下垂				
左臂上举				

2.3 刚体左右非对称情形

如果在臂立跳水时, 可能存在双腿直体姿势, 但双臂在 \$(yOz)\$ 平面但以 \$z\$ 轴非对称. 如图 2 所示的左图所示, 这是一个人体单臂立的刚体示意图和 2.2 节相同, 把人体分成 \$S_0\$、\$S_1\$ 和 \$S_2\$ 三个部分.

由于 \$S_1\$ 和 \$S_2\$ 在同一平面内不对称, 那么在图 2 中, 此时 \$(S)\$ 的中心主轴坐标系 \$(x, y, z)\$ 相对直体坐标系 \$(x_0, y_0, z_0)\$ 绕 \$Ox_0\$ 偏移角度为 \$\vartheta\$ 时有:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2K}{L-M} \right) \quad (14)$$

式 (14) 中, \$M\$、\$L\$ 是表 (1) 中 \$(S)\$ 相对于 \$(x_0, y_0, z_0)\$ 的惯性参数 [7]. \$K\$ 是 \$(S)\$ 相对 \$Ox_0\$ 的惯性积, 只有在左臂上举和右臂下垂时有值, 且为 \$-2mal\$, 其余时候均为 0. 可以看出 \$(L-M) \gg K\$, 式 (14) 可以近似为 \$\vartheta = K/(L-M)\$.

仍然将 \$Oz_0\$ 为转体轴, 但不与中心主轴 \$Oz\$ 重合. 如图 2, 空翻轴定义为平面 \$(x_0Oy_0)\$ 与平面 \$bOz\$ 的交线 \$Oy^*\$. 那么应重新定义转体角速度 \$\omega_1\$, 根据 \$\omega_1\$ 沿 \$Oy_*\$ 和 \$Oz_0\$ 的投影, 得出:

$$\Psi = [\theta \cos \delta \cos \vartheta - (\varphi - \theta \sin \delta) \sin \delta \cos \vartheta] \cdot (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$\Phi = (\varphi - \theta \sin \delta) \cos \vartheta + (\theta \cos \delta \cos \theta - \delta \sin \varphi) \sin \vartheta \quad (16)$$

其中 θ, δ, φ 是 (x, y, z) 与 (a, b, c) 相对位置的角度坐标. 设初始化时 S 的动量矩 \vec{I} 沿 y_0 轴, 此时令 $\delta_0 = \vartheta$, 并且将式 (2) 的前两个子式、式 (5) 以及式 (6) 代入式 (15)(16) 得出:

$$\Psi = \frac{\omega_0 [(1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi) \cos^2 \vartheta + (1 + \lambda)(\mu \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta)^{1/2} \sin \varphi \sin \vartheta]}{(1 + \mu \sin^2 \varphi)^{1/2} (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta)^{1/2}} \quad (17)$$

$$\Phi = -\frac{\omega_0 \cos \vartheta [(1 + \lambda)(\mu \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \sin \vartheta \sin \varphi]^{1/2}}{(1 + \mu \sin^2 \varphi)} \quad (18)$$

经过与 2.2 节类似变换后得:

$$\Delta \Psi' = -\frac{\cos^2 \vartheta}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi)}{(1 + \mu \sin^2 \varphi)(\mu \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta)^{1/2} (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta)^{1/2}} d\varphi \quad (19)$$

$$\Delta \Phi' = \frac{(1 + \lambda) \cos \vartheta}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \mu \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (20)$$

然后将式 (19) 和式 (20) 代入式 (13) 就可以得到转体系数 n .

2.4 刚体前后非对称情形

在本节中, 我们将第三部分中的空翻模型拓展为包含屈体姿势的前后非对称模型. 与之前对人体划分不同, 在本节中我们将躯干与双腿分开. 如双臂下垂, 双腿停止向前收起呈屈体姿势, 则 (S) 只相对 $(x_0 O z_0)$ 平面对称但前后不对称.

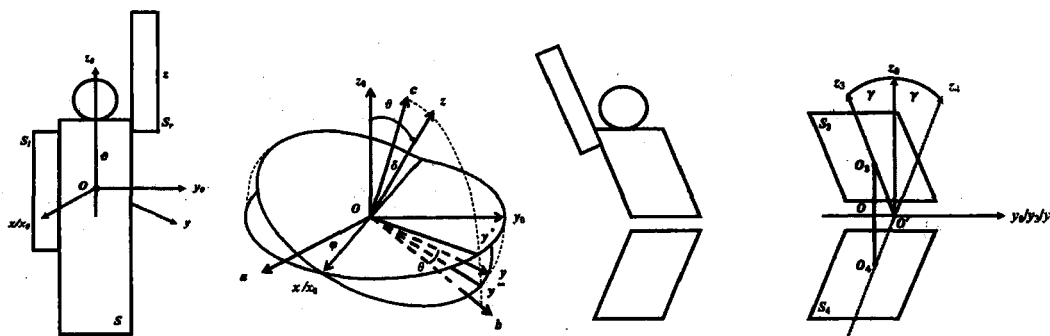


图 2 左右非对称运动的力学模型和受力分析 图 3 前后非对称运动的力学模型和受力分析

因此我们将人体的力学模型 (S) 改为由 S_3 (头, 躯干, 双臂) 和 S_4 (双腿) 两个刚体组成, 如图 3 所示. S_3 和 S_4 在腰部可绕横轴相对转动, 但在运动过程中保持固定而合为一个刚体^[8]. 以质心 O_0 为原点建立 S_i 的形体轴坐标系 (x_i, y_i, z_i) , 其中 $(i = 3, 4)$, $O_i y_i$ 沿横轴, $O_i z_i$ 沿各自的纵轴指向头顶 $(i = 3)$ 或从足底指向腰部 $(i = 4)$ 并相交于 O' 点.

如图 4, 再建立原点不确定的 (x_0, y_0, z_0) 坐标系, 其中 y_0 仍沿横轴, z_0 轴平行于 z_3 轴与 z_4 轴的平分角线方向, γ 为 z_0 轴与 z_4 轴的夹角. 设 m_i 为 S_i 的质量, $m = m_3 + m_4$ 为 (S) 的质量, l_i 为 O_i 至 O' 点的距离, (S) 的质心 O 相对 O_i 的矢径 ρ_i 在原点为 O_i 的 (x_0, y_0, z_0) 中投影为

$$\begin{cases} x_i = (-1)^i [-(m_i/m)] (l_3 - l_4) \sin \gamma. \\ y_i = 0. \\ z_i = (-1)^i [-(m_i/m)] (l_3 + l_4) \cos \gamma. \end{cases} \quad (21)$$

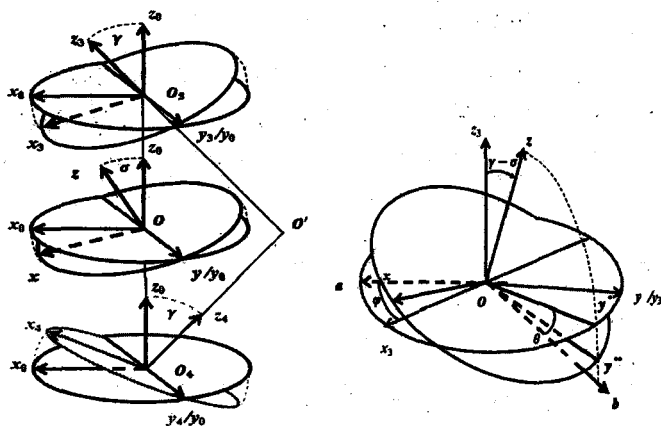


图4 复杂运动模型的动力学分析

设 N_i, M_i, L_i 为 S_i 的中心主惯性矩, 则 S_i 相对 O_i 点对 (x_0, y_0, z_0) 的惯性张量各分量为

$$\begin{aligned} N_i &= N_i \cos^2 \gamma + L_i \sin^2 \gamma, M_i = M_i L_i = N_i \sin^2 \gamma + L_i \cos^2 \gamma, \\ K_i &= 0, E_i = (-1)^{i-1} (N_i - L_i) \cos \gamma \sin \gamma, F_i = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

计算 S_{10} 相对 O 点对 (x_0, y_0, z_0) 的惯性张量并相加得到 (S) 的总惯性张量.

$$\begin{cases} N_0 = [(A_3 + A_4 + \mu(l_3 + l_4)^2 \cos^2 \gamma + (C_3 + C_4) \sin^2 \gamma]. \\ M_0 = (B_3 + B_4 + \mu(l_3 + l_4 + 2l_3 l_4) \cos 2\gamma. \\ L_0 = [(A_3 + A_4 + \mu(l_3 - l_4)^2 \sin^2 \gamma + (C_3 + C_4) \cos^2 \gamma]. \\ E_0 = [(A_3 - C_3 - A_4 + C_4 + \mu(l_3^2 - l_4^2) \sin \gamma \cos \gamma]. \\ K_0 = F_0 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

其中 $\mu = m_3 m_4 / m$, 设 (x, y, z) 为以 O 为原点的 (S) 中心主轴坐标系, 它相对 (x_0, y_0, z_0) 绕 Oy_0 转过 σ 角

$$\sigma = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{2E_0}{N_0 - L_0}\right) \quad (24)$$

(S) 的中心主惯性矩为

$$\begin{cases} N = N_0 \cos^2 \sigma + \cos \sigma \sin^2 \sigma + E_0 \sin 2\sigma. \\ M = M_0. \\ L = N_0 \sin^2 \sigma + \cos \sigma \cos^2 \sigma - E_0 \sin 2\sigma. \end{cases} \quad (25)$$

如图4所示, 将 (x_3, y_3, z_3) 的原点移至 O , 定义 Oz_3 为轴体轴, S_3 的横断面 $(x_3 Oy_3)$ 与 (bOz) 平面的交线 Oy^* 为空翻轴, 得到

$$\Psi = [\theta \cos \delta \cos(\gamma - \sigma) - (\varphi - \theta \sin \delta) \sin(\gamma - \sigma) \sin \varphi] \times [1 - \sin^2(\gamma - \sigma) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$\Phi = (\varphi - \theta \sin \delta) \cos(\gamma - \sigma) + (\varphi \cos \gamma \sin \sigma + \delta \sin \varphi) \sin(\gamma - \sigma) \quad (27)$$

经过与第三节类似的变换, 积分得到

$$\begin{aligned} \Delta \Psi' &= -\frac{\cos \delta_0 \cos(\gamma - \sigma)}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi) d\varphi}{(1 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} ((\sin^2 \delta_0 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}) [1 - \sin^2(\gamma - \sigma) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad (28) \end{aligned}$$

$$\Delta \Phi' = \frac{(1 + \lambda \cos(\gamma - \sigma))}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \sin \varphi^2} \quad (29)$$

将上面两式带入式 (13) 即得到转体系数 n .

2.5 动力学参数的推导关系

由以上的刚体系分析可得, 通过不同的跳水动作可以得到不同的空翻角 Ψ' 和转体角 Φ' . 而根据空翻角增量 $\Delta\Psi'$ 与转体角增量 $\Delta\Phi'$ 可以得出每空翻一周的转体系数 $n^{[9]}$.

在 2.2 节中, 分析了跳水运动员在直体姿势跳水时的运动情况. 在直体且沿人体纵轴对称的姿势跳水时, 根据刚体动力学, 我们解出了在这种情况下下的转体周数 n , 详细过程 2.2 节. 令空翻角增量 $\Delta\Psi'$ 与转体角增量 $\Delta\Phi'$ 均为 2π , 转动一周时间为 T . 联立式 (6) 有:

$$\begin{cases} \text{式(6)} \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{cases} \quad (30)$$

可得:

$$T = \frac{\cos \delta_0}{\lambda^2} (1 - \lambda\mu \sin^2 \phi) \quad (31)$$

此时联立式 (2) 有:

$$T_\Psi = \frac{\cos \delta \cdot (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2} (1 - \lambda\mu \sin^2 \delta) \quad (32)$$

$$T_\Phi = \frac{1 + \lambda}{\lambda(1 + \mu \sin^2 \varphi)} \quad (33)$$

从上面两式就是在采用直体且对称动作跳水时, T_Ψ 和 T_Φ 为空翻角和转体角对跳水完成时间的影响. 再根据式 (3) 以及表 1 中对应的中心主惯性矩, 就可以得出在这种情况下, 完成各个跳水动作的时间对运动员体型 (身高、体重) 之间的关系.

在 2.3 节中, 分析了跳水运动员在臂立姿势跳水时的运动情况. 在臂立且沿人体左右非对称的姿势跳水时, 根据刚体动力学, 我们解出了在这种情况下下的转体周数 n , 详细过程见 2.3 节. 与上述类似解法可以得出采用臂立且人体沿中轴非对称动作跳水时, T_Ψ 和 T_Φ 为空翻角和转体角对跳水完成时间的影响如下:

$$T_\Psi = \frac{\cos^2 \vartheta (1 - \lambda\mu \sin^2 \varphi)}{\lambda^2 (1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi)} \quad (34)$$

$$T_\Phi = \frac{(1 + \lambda) \cos \vartheta}{\lambda(1 + \mu \sin^2 \varphi)} \quad (35)$$

再根据式 (3) 以及表 1 中对应的中心主惯性矩, 就可以得出在这种情况下, 完成各个跳水动作的时间对运动员体型 (身高、体重) 之间的关系.

在 2.4 节中, 分析了跳水运动员在屈体或抱膝姿势跳水时的运动情况. 在屈体或抱膝且沿人体前后非对称的姿势跳水时, 根据刚体动力学, 我们解出了在这种情况下下的转体周数 n , 详细过程见 2.4 节. 与上述类似解法可以得出采用屈体或抱膝且沿人体前后非对称动作跳水时, T_Ψ 和 T_Φ 为空翻角和转体角对跳水完成时间的影响如下:

$$T_\Psi = \frac{\cos \delta_0 \cos(\gamma - \sigma) (1 - \lambda\mu \sin^2 \varphi)}{\lambda^2 [1 - \sin^2(\gamma - \sigma) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} \quad (36)$$

$$T_\Phi = \frac{1 + \lambda \cos(\gamma - \sigma)}{\lambda(1 + \mu \sin^2 \varphi)} \quad (37)$$

再根据式 (3) 以及表 1 中对应的中心主惯性矩, 就可以得出在这种情况下, 完成各个跳水动作的时间对运动员体型 (身高、体重) 之间的关系.

3 体型校正系数

本文中首先需要定量判断是否有必要设置体型校正系数, 然后考虑怎样设置体型校正系数. 由前文, 我们得出了翻转时间与体型的关系, 根据附件一得出翻转时间并不与难度系数呈线性关系. 例如转体时间大于翻腾时间, 但翻腾难度系数分值高于转体. 因此, 我们无法直接利用翻转时间与难度系数的关系来推导体型与难度系数关系. 在本节中, 我们定义新的变量: 体型扰动因子, 来表示体型因素的不同动作的影响程度. 体型扰动因子与动作完成时间的标准差正相关, 即当不同体型在该动作上的差异越大, 体型扰动因子越大. 其次, 我们设置了与身高、体重及体型扰动因子有关的体型校正系数, 通过校正系数的计算, 我们找到了体型扰动因子的临界值. 当体型扰动因子超过临界值时, 体型参数对难度系数的影响明显增加, 即此时明显受体型因素的扰动.

3.1 模型参数的分析

通过前文模型的建立, 我们可以得出跳水动作完成的时间与运动员体型 (身高、体重) 有关系. 因此我们根据模型来进行仔细的分析.

首先, 我们假定运动员体重 $M = 65\text{kg}$, 代入不同身高得出完成跳水动作的时间如图 5 上部分所示.

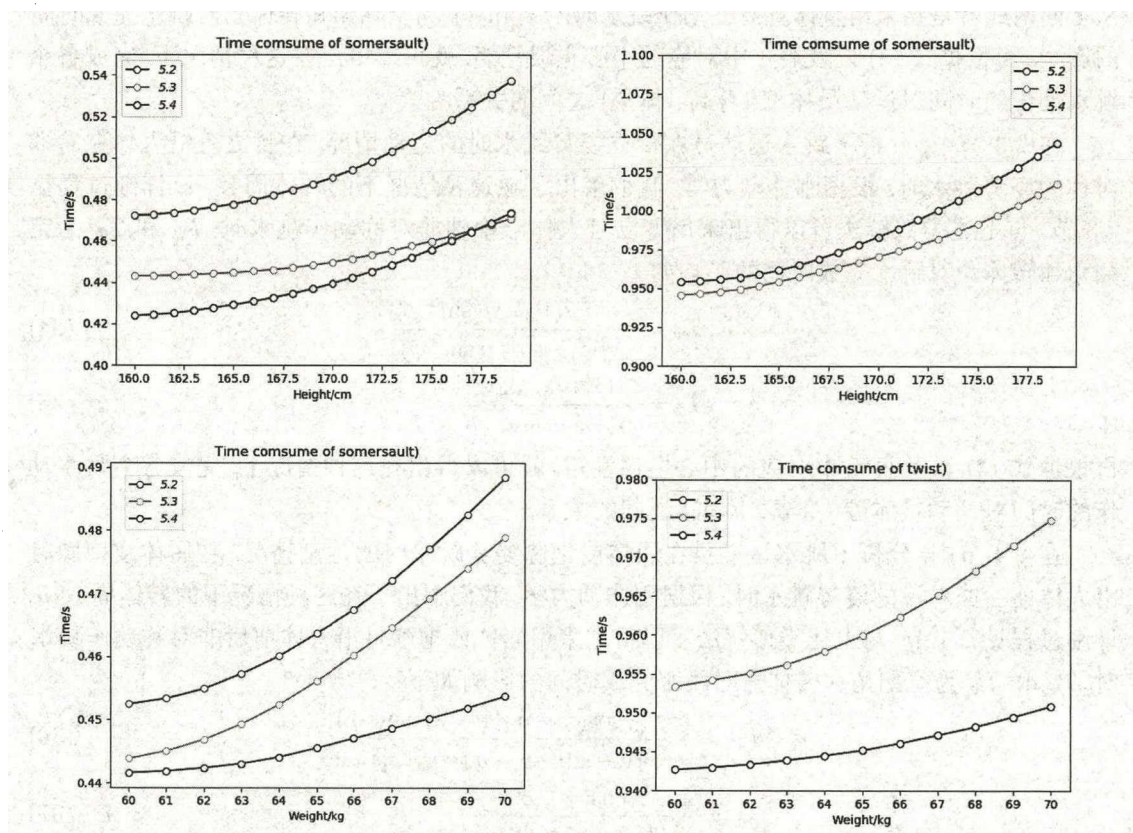


图 5 不同体态动作用时分析. 从左到右, 从上到下分别为: 身高对翻腾一周用时的影响, 身高对转体一周用时的影响, 体重对翻腾一周用时的影响, 体重对转体一周用时的影响

图5左上中 x 轴为身高, y 轴为完成翻腾一周需要的时间. 从纵向上来看, 当运动员的身高一致时, 模型一、模型二和模型三完成翻腾一周的动作所用时间依次减少. 从横向上来看, 运动员身高越高, 其跳水时翻腾一周所用的时间越长.

图5右上中 x 轴为身高, y 轴为完成转体一周需要的时间. 该图中没有模型一的线条, 因为模型一不涉及转体. 从纵向上来看, 当运动员身高一致时, 模型三完成转体一周的动作所用时间比模型二多. 从横向上来看, 运动员身高越高, 其跳水时转体一周所用的时间越长.

然后, 我们假定运动员的身高 $H = 165\text{cm}$, 代入不同体重得出完成跳水动作的时间如图5下部分所示.

图5左下中 x 轴为体重, y 轴为完成翻腾一周需要的时间. 从纵向上来看, 当运动员的体重一致时, 模型一、模型二和模型三完成翻腾一周的动作所用时间依次减少. 从横向上来看, 运动员体重越大, 完成翻腾一周的动作所用时间约长.

图5右下中 x 轴为体重, y 轴为完成转体一周需要的时间. 从纵向上来看, 当运动员体重一致时, 模型二完成转体一周的动作所用时间比模型三长. 从横向上来看, 运动员体重越大, 其跳水时转体一周所用的时间越长.

通过对体型参数的定性分析, 我们可以确定需要设置体型校正系数.

3.2 体型扰动因子的引入

通过图可得出, 体型较瘦小的跳水运动员在完成翻转运动时所需时间较少, 因此能够更完成翻转圈数较多的动作, 同时在完成同样动作时, 有更富余的时间来调整入水姿势. 对于不同动作, 例如 203B 与 205B, 由于翻转圈数较少, 即使不同体型的运动员也能在规定时间内完成; 而对于如 5253B, 5255B 类的动作, 体型高大的运动员往往不能在空中完成动作, 因为其完成动作的时间可能大于其从起跳到入水的时间. 因此, 我们首先分析体型对于动作影响因素的大小, 来确定是否需要对该动作进行校正. 根据以上分析可以得到, 不同动作应该具有不同的体型影响因素. 在本节中, 我们将该体型影响因素定义为体型扰动因子 κ , 通过第二问中模型计算所得的动作完成时间来计算 κ 的值, 同时设定 κ 的临界值判断动作是否需要矫正. 假设运动员起跳初始速度为 v_0 , 运动员身高为 H , 重力加速度为 g , 完整跳水过程所需时间为 t_a , 即从起跳到入水时间, 即

$$t_a = \frac{v_0}{g} + \sqrt{2 \frac{10 + H}{g}} \quad (38)$$

完成动作 i 时间为 t_i , 完成动作至身体接触水面时间为 t_d , 有

$$t_d = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (39)$$

我们将运动员可做动作时间定义为自由时间 t_f , 那么

$$t_f = t_s - t_d = \frac{v_0}{g} + \sqrt{2 \frac{10 + H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (40)$$

如果一位体型较为庞大的运动员选择一个难度系数很低并能保证完成的跳水动作, 例如 401C. 如果只是简单的设置体型校正系数, 可能会使得该动作对该运动员的难度系数很高, 从而导致其成绩突出的情况出现. 因此我们设置体型扰动因子 κ 来避免这种情况出现.

对大多数运动员来说, 动作时间 t_i 在自由时间 t_f 内占比越低, 表明该运动员有富余时间可以调整入水姿势, 使得表现分更高. 假设共有运动员体型 m 类, 不同体型运动员完成动作

i 的时间为 t_{ij}^i , 自由时间为 t_{ij}^f , κ 因此定义为:

$$\kappa = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^m (t_{ij}^i - t_{ij+1}^i)^2}}{\sum_{j=1}^m t_{ij}^f} \quad (41)$$

式 (41) 实际反应了每个动作中体型的影响程度. 式 (41) 的上部分表示完成动作时间的标准差, 即不同体型的人完成同一跳水动作所需的时间差异. 标准差越大, 表示该动作对不同体型的人区分度越大. 下部分表示不同体型的人跳水时的平均自由时间.

3.3 校正系数的模型

在考虑对体型校正系数进行建模时, 应同时考虑运动员身高、体重以及体型扰动因子的影响. 我们的认为如果体型校正系数仅涉及身高、体重, 那么考虑特殊情况如身高、体重特大的情况下, 难度系数会出现不正常增长. 因此, 我们引入上文所计算的扰动因子, 来限制身高、体重对难度系数的影响.

假设身高的影响因子为 a , 体重的影响因子为 b , 体型校正系数计算公式如下:

$$\Delta D = (a \frac{H}{170} + b \frac{m}{60}) * \exp(60\kappa) \quad (42)$$

上式中, 身高、体重的影响因子 a 、 b 通过拟合得出 $a = 0.00065$ 、 $b = 0.00035$. 我们将身高 170cm、体重 60kg 看作跳水运动员的标准体型. 如图 6 所示, 横坐标为体型扰动因子 κ , 纵坐标为标准体型带入体型校正系数计算公式中所得体型校正系数.

由图看出, 当 κ 大于等于 0.08 时, 体型校正系数的大于 0.1, 即体型对难度系数影响较为明显. 因此, 我们将 0.08 设为体型扰动因子 κ 临界值, 表列出了 κ 大于 0.8 的动作. 当体型扰动因子 $\kappa > 0.08$ 时, 可认为体型对该动作完成具有较大影响, 因此此类动作需要进行体型系数校正. 通过计算 κ 我们发现很多动作都需要进行体型系数校正, 部分跳水动作如表 2 所示.

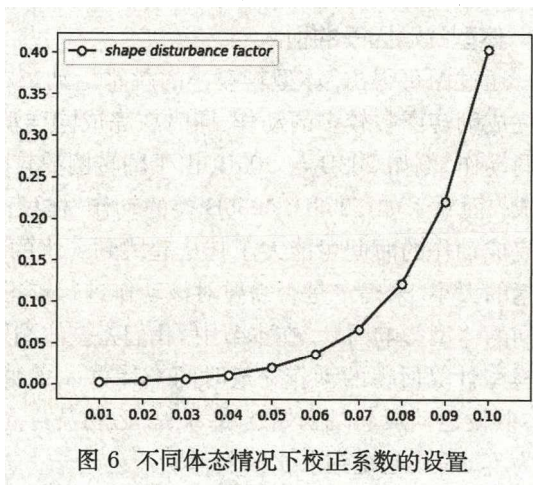


图 6 不同体态情况下校正系数的设置

表 2 部分跳水动作代码的体型扰动因子

跳水动作代码	体型扰动因子	跳水动作代码	体型扰动因子
5156B	0.091	5355C	0.081
5255B	0.081	5275C	0.092
5156C	0.091	5257C	0.102
5375C	0.092	5275B	0.092
5255C	0.081	5257B	0.102

参考文献

- [1] 第 15 届“华为杯”中国研究生数学建模竞赛 A 题. <https://cpipc.chinadegrees.cn/cw/hp/4>.

- [2] 徐家荣. 空中转体的力学原理 [J]. 物理教学, 1987(9)
- [3] Tong W, Dullin H R. A New Twisting Somersault:513XD[J]. Journal of Nonlinear Science, 2017, 27(6): 2037-2061.
- [4] Bharadwaj S, Duignan N, Dullin H R, et al. The diver with a rotor[J]. Indagationes Mathematicae, 2015.
- [5] Dullin H R, Tong W. Twisting somersault[J]. Physics, 2016.
- [6] Hanavan J E. A Mathematical model of the human body. amrltr-64-102.[J]. AMRL-TR, 1964, 18:1-149.
- [7] 钱雄平, 肖文龙, 徐建成, 等. 跳水空翻运动的半逆解模型 [J]. 生物数学学报, 1998, 13(4): 493-496.
- [8] 关汝华, 李润, 于立然. Optimization of the take-off movement of ski jumping with the method of mathematical programming[J]. 应用数学和力学 (英文版), 1992, 13(7): 669-674
- [9] Frohlich C. The physics of somersaulting and twisting[J]. Scientific American, 1980, 242(3): 154.

Physical Model Analysis and Body Shape Modification of Platform Diving

YANG Xiao-long¹, SHEN Rong-ping², ZHANG Zi-yin²

(1. University of CAS & Academy of Mathematics and Systems Science, Beijing 100190, China)

(2. School of Computer Science, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

Abstract: In this paper, Euler-Poinsot rigid body motion model is established to simulate the movement of human body in platform diving. On the basis of this, the left-right asymmetric and the forward-backward asymmetric motion models are also established, which can be used to simulate the complex twisting diving and tuck position diving. Our rigid body model details the dynamic principle of rotational motion and derives the quantitative relationship between each physical parameter. It can solve the model to obtain the time when athletes complete each diving action, and then obtain the relationship between this time and athletes' body shape (height, weight). Furthermore, the body shape disturbance factor was set up to analyze the body shape correction coefficient related to the height, weight and body shape disturbance factor, and the body shape correction formula was solved for correcting the difficulty coefficient of all diving actions. Compared with the existing scoring rules of diving difficulty coefficient, our model is not only credible and effective, but also more fair in some actions.

Keywords: rigid model; moment of momentum; dynamics; somatotype disturbance factor