

基于力学分析的波浪能装置优化设计

摘要

本文对波浪能装置的运动过程进行研究,分析垂荡和摇荡两种运动方式,综合考虑多种外力作用和初始条件,建立垂荡运动模型和摇荡运动模型,并应用于波浪能装置的优化设计,得到使装置输出功率最大时的最优阻尼系数。

为求解装置做垂荡运动时浮子和振子的垂向位移与速度,我们首先对浮子和振子进行受力分析,综合考虑波浪激励力,PTO 系统作用力和兴波阻尼力等多种外力作用,然后基于牛顿第二定律建立浮子和振子的动力学方程。再通过分析浮子和振子的初始运动状态,我们得到了微分方程的初始条件;结合动力学方程与初始条件,我们建立了浮子和振子的垂荡运动模型。该问题需要求解阻尼系数为常数,和阻尼系数为幂指数型函数两种情况下浮子和振子的垂向位移与速度,我们采用欧拉法求解,得到两种情况下浮子和振子的垂向位移与速度,并在论文中对部分结果进行了展示,具体结果数据以附件形式给出。

针对装置做垂荡运动时阻尼系数的优化问题,我们对阻尼系数为常数和阻尼系数为幂指数型函数两种情况分别建立了优化模型进行求解。我们以 PTO 系统的平均功率最大为优化目标,以垂荡运动模型和阻尼系数满足的条件为约束条件建立单目标优化模型。对于阻尼系数为常数时的优化模型,我们采用二分查找法进行求解,得到最大输出功率为 $245.527W$,对应的阻尼系数为 37538.147 ;采用混沌采样法求解阻尼系数为幂指数型函数的优化模型,得到最大输出功率为 $243.34W$,最优阻尼系数的比例系数为 100000 ,幂指数为 0.4163 。

为探究装置做摇荡运动时浮子和振子的位移与速度,我们将摇荡运动拆分为纵摇运动和垂荡运动分别进行讨论:首先引入双坐标系,求解出浮子和振子的转动惯量,然后基于刚体定轴转动定理建立角位移的二阶微分方程,并通过分析浮子和振子的初始运动状态与几何关系得到方程的初始条件与约束条件。最终结合第一问的垂荡运动模型,建立浮子和振子的摇荡运动模型。对于该模型,我们采用欧拉法求解,并在论文中对部分结果进行了展示。

在分析了浮子和振子的摇荡运动过程的基础上,我们进一步对装置做摇荡运动时的线性阻尼系数与旋转阻尼系数进行了优化。我们基于摇荡运动模型,建立以 PTO 系统输出功率最大为优化目标,以线性阻尼系数和旋转阻尼系数为优化参数的单目标优化模型。采用变步长搜索法求解该优化模型,得到波浪能装置做摇荡运动时的最大输出功率为 $295.1193W$,相应的直线阻尼系数和旋转阻尼系数分别为 56645.95 和 100000 。

最后我们对本文所建立模型进行了讨论和分析,综合评价模型,并提出了改进和推广的方向。

关键词: 欧拉法, 二分查找法, 混沌采样法, 变步长搜索, 波浪能装置

一 问题重述

1.1 问题背景

随着能源需求的增加与环境污染的加剧，可再生能源的开发与运用已成为当下热点。波浪能凭借其储备丰富、干净的特点，在众多可再生能源中脱颖而出。开发波浪能需要研究人员设计高效高功率的波浪能转化装置，下图为一种波浪能装置的示意图：

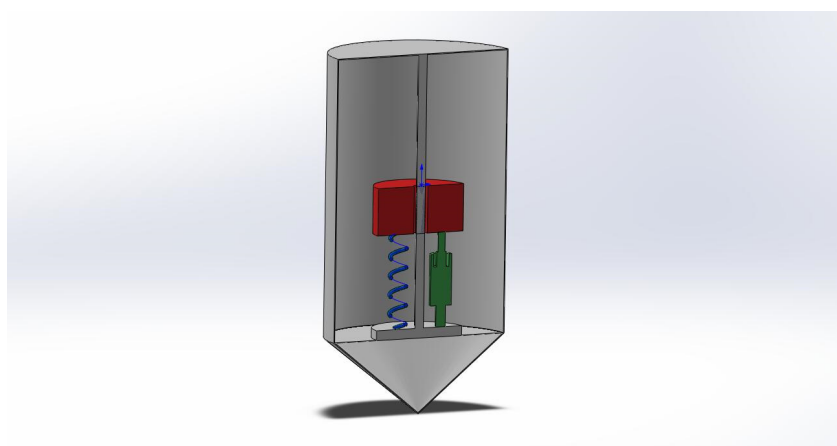


图 1 波浪能装置示意图

在图中弹簧的牵制作用下，振子与浮子在垂直方向上发生相对运动从而对阻尼器做功，并将做功作为能量输出。对于这类装置而言，阻尼器是能量转换的关键，选取合适的阻尼器，能够实现波浪能的最大化利用，而阻尼器能量转换能力的强弱又与阻尼系数密切相关。因此，如何求解出阻尼器的最理想阻尼系数，对于波浪能装置的研究与波浪能的开发都具有实际指导意义。

1.2 待解问题

根据问题背景，题目要求建立波浪能装置运动模型解决以下问题：

问题一：当波浪能装置在波浪激励力 $f \cos ut$ 下仅发生垂荡运动时，分别讨论：① 阻尼系数为 $10000 N \cdot s/m$ ② 阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比两种情况下浮子与振子的垂荡位移和速度；

问题二：在第一问模型的基础上，探究两种情况下波浪能装置的最大输出功率与最优阻尼系数；

问题三：当波浪能装置发生摇荡运动时，探究在直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数分别为 $10000 N \cdot s/m$ 和 $1000 N \cdot s \cdot m$ 的条件下，浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度；

问题四：考虑波浪能装置做摇荡运动，建立最优阻尼系数模型，计算最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

二 问题分析

2.1 问题一分析

问题一要求考虑波浪能装置只做垂荡运动的情况下，建立模型描述浮子和振

子的运动状态，并求出浮子和振子在给定周期内的垂荡位移和速度。

由于在只做垂荡运动的情况下，浮子和振子均只沿垂向运动，因此以水平面为基准平面，以运动方向为 z 轴建立坐标系，并通过对浮子和振子进行受力分析，综合考虑波浪对波浪能装置的作用以及浮子和振子对彼此的作用，建立一个基于牛顿第二定律的常微分方程组。由于微分方程组较为复杂，因此求解时采用数值解法，将方程进行差分离散化处理并用欧拉法进行求解，从而求出浮子与振子在给定时间周期内的位移与速度变化。

2.2 问题二分析

问题二仍考虑浮子在波浪中只做垂荡运动，要求在给定的两种情况下分别确定直线阻尼器的最优系数，使得 PTO 装置的平均输出功率最大。

问题二本质上为最优化问题，在问题一中建立模型的基础上，以直线阻尼器的阻尼系数为优化变量，建立以 PTO 装置平均输出功率最大为优化目标的单目标优化模型。第一种情况下，考虑到阻尼系数为常数且在给定区间内取值，我们首先用大步长遍历优化区间以探究平均功率的变化规律，发现平均功率随阻尼系数的变化函数是一个单峰上凸曲线，因此可以用二分法求解平均功率的最大值。在第二种情况下，阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，需要我们求解最优的比例系数和幂指数。由于优化空间较大，均匀遍历求解效率随求解空间纬度增大而快速降低，为避免均匀采样效率较低，因此采用混沌采样法进行搜索求解。

2.3 问题三分析

问题三中的 PTO 系统除了直线阻尼器，在转轴上还安装了旋转阻尼器和扭转弹簧，通过直线阻尼器和旋转阻尼器共同做功输出能量。同时，浮子除了垂荡以外还做摇荡运动。

考虑到本题中浮子和振子的运动状态更为复杂，为了便于描述系统的运动状态，我们在第一问建立的坐标系的基础上，以隔板中心为原点，中心与振子质心的连线方向为 z' 轴建立一个非惯性子坐标系，并在这两个坐标系下分别建立动力学方程与刚体力学方程，然后同样将微分方程组进行差分离散化之后用欧拉法进行数值求解，得到浮子和振子在给定时间周期内的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

2.4 问题四分析

问题四与问题二类似，同样是以阻尼系数为优化变量，对输出功率进行最优化求解的优化模型。不同的是，问题四是在问题三建立的模型的基础上，需要同时确定直线阻尼器和旋转阻尼器这两个物体的最优阻尼系数。

由于本题的求解区间较大且有两个变量，因此与问题二的第二类情况类似，我们同样采用变步长搜索法进行求解。首先以大步长分别遍历直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数，寻找到较优的取值区间，然后逐步缩小步长进行精确求解。

三 符号说明

符号	含义	单位
M	浮子质量	kg
m	振子质量	kg
K	弹簧刚度	N/m
ω	波浪频率	s^{-1}
B	垂荡兴波阻尼系数	$N \cdot s/m$
I	浮子的转动惯量	$kg \cdot m^2$

其余符号将在文中具体说明

四 基本假设

1. 不考虑风力和空气阻力对波浪能装置的影响；
2. 海水为无旋无粘的理想流体；
3. 忽略中轴、底座、隔层及 PTO 的质量和各种摩擦；
4. 浮子和振子为刚体，不发生形变；
5. 浮子和振子质量分布均匀且连续。

五 模型建立与求解

5.1 问题一求解

问题一需要建立波浪能装置的垂荡运动模型，求解浮子与振子的垂荡位移和速度。分析题目可知，该问题实际上是动力学问题，需要首先对浮子与振子进行受力分析，然后根据牛顿第二定律建立运动方程，再结合边界条件类型进行求解，得到其位移与速度。

5.1.1 浮子与振子的受力分析

分析到浮子和振子在垂直方向上存在相对位移，则不能将浮子与振子视为整体进行受力分析。下分别讨论两部分的受力情况：

对于做垂荡运动的浮子，其主要受到以下作用力^[1]：

1. **波浪的激励力 f_a** ：促使浮子在垂直方向上做受迫振动，方向与浮子振动方向相同；由题可知激励力公式为：

$$f_a = f \cos \omega t \quad (1)$$

其中 f 为激励力振幅， ω 为波浪频率，该表达式说明激励力具有周期性。

2. **兴波阻尼力 f_b** ：当浮子做垂荡运动时，兴起重力波而引起的阻力，用于阻碍浮子向上振动，方向与浮子振动方向相反；兴波阻尼力与浮子的速度成正比，方向相反，比例系数为兴波阻尼系数。则假设兴波阻尼系数为 B ，则 f_b 的表达式为：

$$f_b = B \frac{dz_1}{dt} \quad (2)$$

3. **静水恢复力 f_s** ：当浮子做垂向运动时，用于使浮子恢复到静止状态的作用力，其方向始终指向平衡位置，与浮子运动方向相反；静水恢复力实际为浮子所受重力与浮力的合力，假设浮子圆柱部分在水面以下的高度为 h_1 ，圆锥部分高度为 h_2 ，则结合浮力的计算公式有：

$$f_s = Mg - \rho g S \left(\frac{h_2}{3} + h_1 - z_1 \right) \quad (3)$$

式中， g 为重力加速度， ρ 为海水密度， S 为浮子的静水截面积，其计算公式将在后文中给出。

4. **PTO 系统对浮子产生的垂向负载 f_{PTO}** ：在 PTO 系统的牵拉作用下，浮子与振子之间发生相对运动，PTO 系统通过中轴底座对浮子产生垂向作用力；由于 PTO 系统由弹簧与阻尼器构成，则 f_{PTO} 应为弹簧弹力和阻尼器阻尼力的叠加。假设弹簧刚度为 K ，阻尼器的阻尼系数为 C ，弹簧的初始压缩量为 z_0 ，则当振子的相对位移为 z_2 时， f_{PTO} 为：

$$f_{PTO} = -K(z_2 - z_0) - C \frac{dz_2}{dt} \quad (4)$$

而对于做垂荡运动的振子，其所受外力为重力和 PTO 系统的垂向负载。下将对振子和浮子作用力进行计算，并根据牛顿第二定律建立其运动模型。由于不考虑振子与中轴的摩擦力，则振子仅受到重力与 PTO 系统的作用力。

5.1.2 振子和浮子的垂荡运动模型

首先对波浪能装置结构进行抽象化处理，并按照下图所示建立垂直方向的一维坐标系：

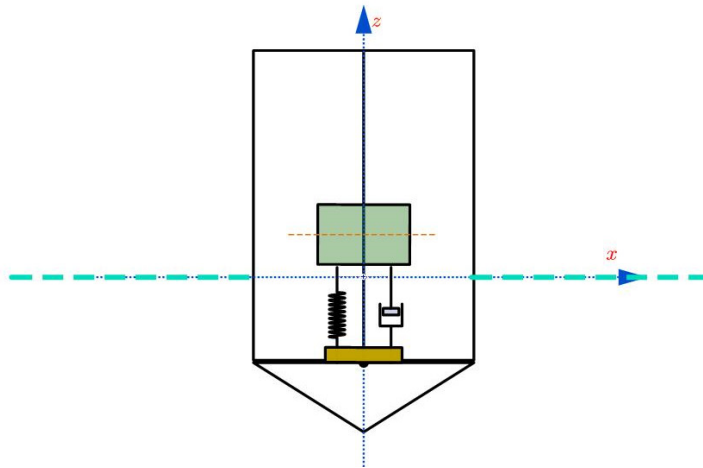


图2 波浪能装置结构抽象

如上图所示，以波浪能装置平衡位置的静水水面作为原点，垂直向上作为 z 轴正方向建立坐标系；以上图中 $+z$ 方向作为浮子运动的正方向，假设浮子质量为 M ，并以地面作为参考系，则当浮子发生正向垂向位移 z_1 时，基于受力分析与牛顿第二定律可得到浮子的动力学方程如下^[3]：

$$(M + A) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f_d - f_b - f_s - f_{PTO} \quad (5)$$

上式中， A 为浮子运动带动周围流体运动而产生的附加质量；

假设振子质量为 m ，则由振子受力平衡有：

$$Kz_0 = mg \quad (6)$$

而对于振子而言，其所处的浮子参考系相对地面为非惯性参考系，则为建立振子的动力学方程，需要先引入惯性力对振子加速度进行补偿^[3]，惯性力为：

$$-m \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad (7)$$

则根据牛顿第二定律可得：

$$m \left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 z_2}{dt^2} \right) = f_{PTO} - mg \quad (8)$$

其中 z_2 为振子相对于浮子的位移量，即振子在浮子参考系中发生的位移。下对方程（5）与方程（8）的初始条件与约束条件进行讨论：

1. 初始条件

在初始时刻，波浪能装置应处于静止状态，即浮子与振子的初始位移均为 0：

$$\begin{cases} z_1|_{t=0} = 0 \\ z_2|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

但初始时刻，浮子已受到波浪激励力的作用，获得瞬时速度，则由冲量定理^[3]可知：

$$(f_a - f_b - Mg - mg)dt|_{t=0} = M \frac{dz_1}{dt}|_{t=0} \quad (10)$$

而振子在惯性作用下运动状态不会立即发生改变，其初始速度为 0：

$$\frac{dz_2}{dt}|_{t=0} \quad (11)$$

2. 约束条件

假装置在静水中的吃水深度为 h ，则当装置处于静止状态时：

$$\left[(h - h_2)S + \frac{1}{3}Sh_2 \right] \rho g = (M + m)g \quad (12)$$

上式可求得 $h = 2.8$ 米，说明在静止时，装置下方圆锥部分被完全浸没在水中。

假设浮子的圆柱部分半径为 r ，则静水截面积 S 为：

$$S = \pi r^2 \quad (13)$$

为使浮子能够做稳定的周期性垂荡运动且不发生倾覆，则装置下方圆锥部分不能超出水面，即垂向位移 z_1 应当满足约束条件：

$$-3 + h - h_2 \leq z_1 \leq h - h_2 \quad (14)$$

经计算可得：

$$-1.8 \leq z_1 \leq 1.2$$

同理，振子沿中轴滑动时位移量应受到弹簧长度与中轴长度的约束，经计算有：

$$-0.8 \leq z_2 \leq 2.2$$

综合上述分析过程，可得到浮子与振子的垂荡运动模型如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{动力学方程: } \begin{cases} (M + A) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f_d - f_b - f_s - f_{PTO} \\ m \left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 z_2}{dt^2} \right) = f_{PTO} - mg \end{cases} \\ \text{初始条件: } \begin{cases} z_1|_{t=0} = 0, z_2|_{t=0} = 0 \\ (f_d - f_b - Mg - mg)dt|_{t=0} = M \frac{dz_1}{dt}|_{t=0} \\ \frac{dz_2}{dt}|_{t=0} = 0 \end{cases} \\ \text{受力计算式: } \begin{cases} f_d = f \cos \omega t \\ f_b = B \frac{dz_1}{dt} \\ f_s = Mg - \rho g S \left(\frac{h_2}{3} + h_1 - z_1 \right) \\ f_{PTO} = -K(z_2 - z_0) - C \frac{dz_2}{dt} \end{cases} \\ \text{约束条件: } \begin{cases} -1.8 \leq z_1 \leq 1.2 \\ -0.8 \leq z_2 \leq 2.2 \end{cases} \\ \text{其他条件: } S = \pi r^2 \end{array} \right. \quad (15)$$

该模型涉及二阶方程组的求解问题，且两个代求量之间相关联，求解解析解较为困难，因此我们采用数值解法求解^[3]。

5.1.3 垂荡运动模型求解

本文采用欧拉法求解该模型，算法描述如下：

算法 1：欧拉法

1. 选择步长 Δt ；
 2. 利用微分方程离散化差分求解初始 t_0 时刻的导数 k_0 ；
 3. 利用欧拉公式和 k_0 求解出 z_1 ： $z_1 = z_0 + k_0 \Delta t$ ；
 4. 重复步骤 2 和步骤 3，依次计算出 k_i 和 z_i 。
-

除静水截面积 S 需要根据已知条件单独计算之外，其余参量均由已知条件直接给出。而对于阻尼器的阻尼系数 C ，其取值包含以下两种情况：

1. 数值固定，为 $10000 N \cdot s/m$ ；
2. 数值与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，由题目条件可知：

$$C = 10000 \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^{0.5} \quad (16)$$

对两种情况分别求解，得到结果如下：

- 情况一， $C = 10000 N \cdot s/m$ ；

求解得到 $10s$ 、 $20s$ 、 $40s$ 、 $60s$ 、 $100s$ 时，浮子与振子的垂荡位移和速度如下表所示：

表 1 情况一部分结果展示表

时间	浮子		振子	
	垂荡位移(m)	速度(m/s)	垂荡位移(m)	速度(m/s)
10s	-0.191	-0.649	-0.212	-0.703
20s	-0.591	-0.246	-0.634	-0.278
40s	0.286	0.310	0.297	0.330
60s	-0.315	-0.480	-0.332	-0.516
100s	-0.0842	-0.604	-0.0847	-0.643

(数据保留 3 位有效数字)

表中振子的垂荡位移与速度为相对于地面坐标系的位移与速度；其余结果数据以附件 result1-1.xlsx 给出；作出浮子与振子的垂荡位移与速度曲线如下,为体现浮子与振子的相对运动，下图中振子位移与速度为振子相对于浮子的位移与速度：

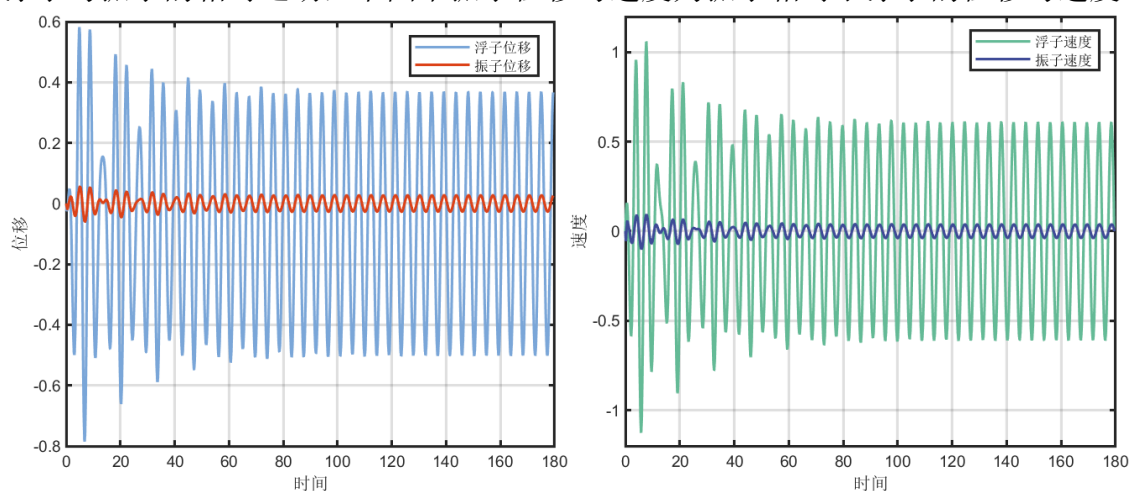


图 3 情况一计算结果

- 情况二， $C = 10000 \left| \frac{dx_2}{dt} \right|^{0.5}$ ；

求解得到 10s、20s、40s、60s、100s 时，浮子与振子的垂荡位移和速度如下表所示：

表 2 情况二部分结果展示表

时间	浮子		振子	
	垂荡位移(m)	速度(m/s)	垂荡位移(m)	速度(m/s)
10s	-0.206	-0.662	-0.235	-0.710
20s	-0.611	-0.260	-0.661	-0.283
40s	0.269	0.292	0.280	0.309
60s	-0.327	-0.492	-0.350	-0.527
100s	-0.0890	-0.610	-0.0941	-0.650

(数据保留 3 位有效数字)

表中振子的垂荡位移与速度为相对于地面坐标系的位移与速度；其余结果数据以附件 result1-2.xlsx 给出；作出浮子与振子的垂荡位移与速度曲线如下,为体现浮子与振子的相对运动，下图中振子位移与速度为振子相对于浮子的位移与速度：

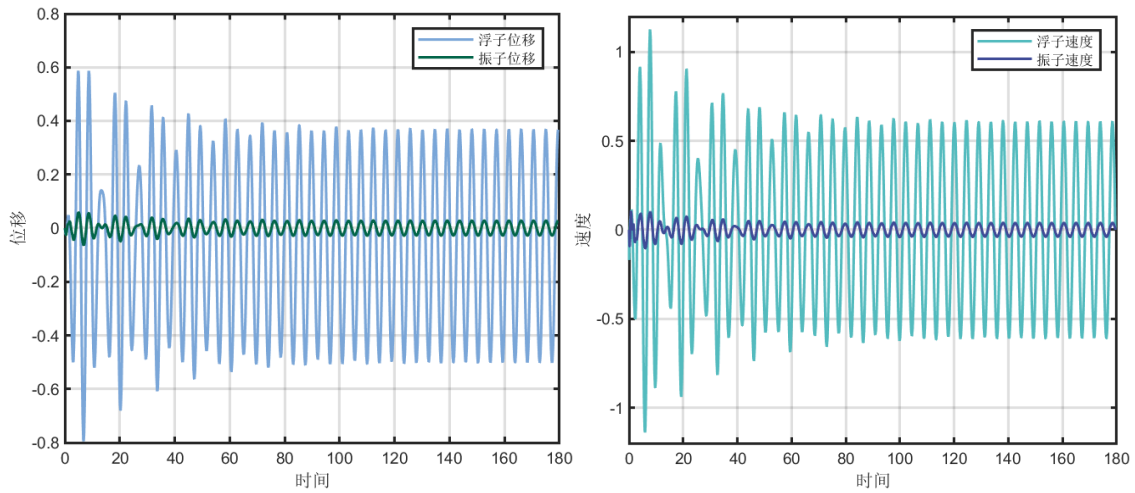


图 4 情况二计算结果

图 3 与图 4 结果说明，对于两种阻尼系数情况，浮子和振子均能够在外力作用下达到稳定状态，做周期性的稳态运动，且周期相同。对比两种情况下的垂向位移和速度，得到曲线：

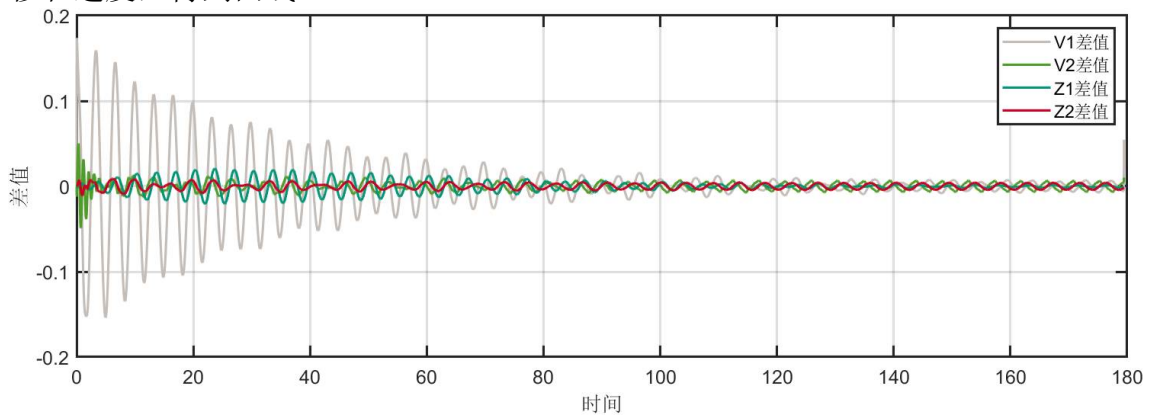


图 5 两种情况的比较曲线

图中 v_1, v_2 为浮子速度于振子相对于浮子的速度；由上图中比较曲线可知，对于两种情况下相关物理量的差值也具有周期性的特点，且最终均能趋于稳定状态，说明系统稳定。

5.2 垂荡运动条件下的最优阻尼系数探究

第一问求解了两种阻尼系数情况下振子与浮子的垂荡位移和速度，但在实际研发过程中，装置的输出功率才是最应当被关注的问题；由于材料和器件种类的多样性，阻尼器的阻尼系数往往是在大面积的范围内取值，进而影响 PTO 系统的输出功率。因此需要建立优化模型对阻尼系数进行优化，求解出使输出功率达到最大的阻尼系数。

该问题的阻尼系数也包含常数和幂指数型函数两种情况，下文将针对两种情况分别建立优化模型并求解。

5.2.1 情况一：阻尼系数为常数

在该情况下，阻尼系数为 $[0, 100000]$ 以内的常数，而我们需要寻找出最理想的常数值使 PTO 系统的平均输出功率最大。由于 PTO 系统是通过浮子和振子发生相对位移迫使阻尼器做功输出能量，则 PTO 系统的输出功率 P 为：

$$P = C \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^2 \quad (17)$$

假设题目所给的全时间区间为 T ，可得 PTO 系统的平均输出功率^[4]：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T C \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^2 dt \quad (18)$$

优化目标：实际制造波浪能装置时，希望能够使波浪能利用实现最大化，即 PTO 系统的平均输出功率最大：

$$\max \{ \bar{P} \} \quad (19)$$

约束条件：

1. 浮子与振子的运动应当满足第一问的垂荡运动模型；
2. 阻尼系数应当满足题目所给的取值范围，即：

$$0 \leq C \leq 100000 \quad (20)$$

综上所述，建立单目标优化模型如下：

$$\begin{aligned} (\hat{C}) = \arg \max & \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T C \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^2 dt \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{动力学方程: } \begin{cases} (M + A) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f_d - f_b - f_s - f_{PTO} \\ m \left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 z_2}{dt^2} \right) = f_{PTO} - mg \end{cases} \\ \text{初始条件: } \begin{cases} z_1|_{t=0} = 0, z_2|_{t=0} = 0 \\ (f_d - f_b - Mg - mg) dt|_{t=0} = M \frac{dz_1}{dt}|_{t=0} \\ \frac{dz_2}{dt}|_{t=0} = 0 \end{cases} \\ \text{受力计算式: } \begin{cases} f_d = f \cos \omega t \\ f_b = B \frac{dz_1}{dt} \\ f_s = Mg - \rho g S \left(\frac{h_2}{3} + h_1 - z_1 \right) \\ f_{PTO} = -K(z_2 - z_0) - C \frac{dz_2}{dt} \end{cases} \\ \text{约束条件: } \begin{cases} 0 \leq C \leq 100000 \\ -1.8 \leq z_1 \leq 1.2 \\ -0.8 \leq z_2 \leq 2.2 \end{cases} \\ \text{其他条件: } S = \pi r^2 \end{array} \right. \quad (21) \end{aligned}$$

该优化模型的求解较为复杂，我们先采用大步长对阻尼系数进行遍历，作出平均功率于阻尼系数的关系曲线，如下图所示：

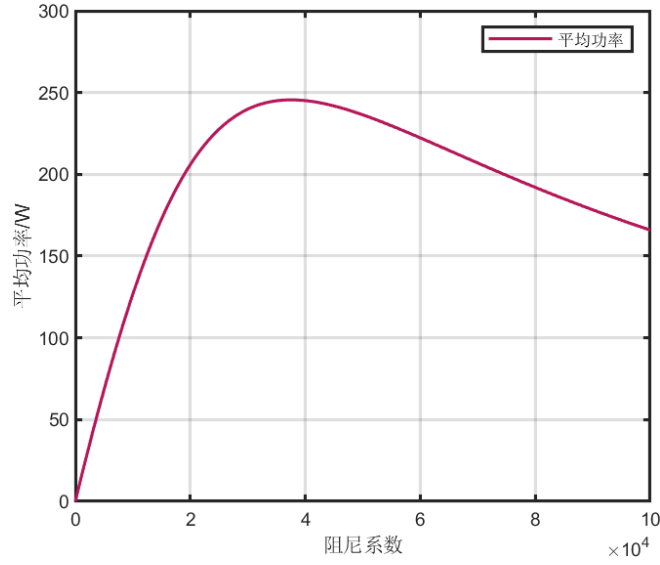


图 6 平均功率-阻尼系数曲线

由图可知，平均功率于阻尼系数的关系函数为单峰函数，则可采用二分法求解上述优化模型，其算法描述如下：

算法 2：二分查找法

1. 选取边界值。根据题目要求，选取 0 和 100000 作为二分查找的左右端点；
2. 计算二分查找区间的中点坐标附近的梯度值；
3. 若梯度值 > 0 ，则将二分查找区间的当前中点设为左端点，并重复步骤 2；
4. 若梯度值 < 0 ，则将二分查找区间的当前中点设为右端点，并重复步骤 2；
5. 若梯度值的绝对值小于机器精度 ϵ ，则取当前中点为待求量的极大值点，并结束程序。

将附件中的物理参数与几何参数代入上述优化模型中进行求解，求得最大平均输出功率与相应的阻尼系数结果如下表所示（数据保留三位小数）：

表 3 情况一最优阻尼系数结果表

阻尼系数条件	最大输出功率	最优阻尼系数
$[0, 100000]$	245.527W	37538.147

5.2.2 情况二：阻尼系数为幂指数型函数

在这种情况下，阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，假设比例系数为 α ，幂指数为 β ，则根据题目条件可知：

$$C = \alpha \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^\beta \quad (22)$$

由题目条件可知， α 和 β 分别满足：

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 100000 \\ 0 \leq \beta \leq 1 \end{cases} \quad (23)$$

则可建立以 PTO 系统的平均输出功率最大为优化目标，阻尼系数为优化参数的单目标优化模型：

$$\begin{aligned}
(\hat{C}) &= \arg \max \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T C \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^2 dt \right\} \\
\left\{ \begin{array}{l}
C = \alpha \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^\beta \\
\text{动力学方程: } \begin{cases} (M + A) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f_d - f_b - f_s - f_{PTO} \\ m \left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 z_2}{dt^2} \right) = + f_{PTO} - mg \end{cases} \\
\text{初始条件: } \begin{cases} z_1|_{t=0} = 0, z_2|_{t=0} = 0 \\ (f_d - f_b - Mg - mg) dt|_{t=0} = M \frac{dz_1}{dt}|_{t=0} \\ \frac{dz_2}{dt}|_{t=0} = 0 \end{cases} \\
\text{受力计算式: } \begin{cases} f_d = f \cos \omega t \\ f_b = B \frac{dz_1}{dt} \\ f_s = Mg - \rho g S \left(\frac{h_2}{3} + h_1 - z_1 \right) \\ f_{PTO} = -K(z_2 - z_0) - C \frac{dz_2}{dt} \end{cases} \\
\text{约束条件: } \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 100000 \\ 0 \leq \beta \leq 1 \\ -1.8 \leq z_1 \leq 1.2 \\ -0.8 \leq z_2 \leq 2.2 \end{cases} \\
\text{其他条件: } S = \pi r^2
\end{array} \right. \quad (24)
\end{aligned}$$

由于该模型需要对比例系数和幂指数两个参数同时优化，求解的关键在于如何合理的遍历求解区间，寻找出结果较优的参数值。常用的方法是采用固定的步长均匀遍历求解区间，该方法的问题在于时间复杂度会随着求解维度的增加而指数上升，导致求解效率的下降。为了解决这个问题，我们引入混沌迭代采样法^[5]，该方法通过产生混沌序列的方法实现了近似了遍历。首先我们需要通过迭代生成混沌序列，给定 β 的初始值 $\beta_1 \in (0, 1)$ ，并生成 $[0, 1]$ 以内的长度为 G 的混沌序列 $\{\beta_k\}_{k=1}^G$ ： $\beta_{k+1} = 4\beta_k(1 - \beta_k)$ 。对于该序列，通过线性变换后可将其映射到区间 (a, b) 的混沌序列 $\{y_k\}_{k=1}^G$ ，其中： $y_k = (b - a)x_k + a$ ，则可生成 G 种 β 的混沌采样结果。理论上 G 的取值越大结果越好，但为了兼顾计算量，我们采用如下解决方法求解最优系数。算法描述如下：

算法 3：混沌采样法

1. 给定初始 $G_0 = g_0$ ，计算出最优平均输出功率 P_0 ；
 2. 令 $G_1 = G_0 + d$ ，计算出对应最优功率 P_1 ，并计算 P_0 和 P_1 的相对误差；
 3. 若相对误差小于1%，则输出 2.中对应参数为最优参数；
 4. 若相对误差大于1%，则令 $G_0 = G_1$ ，然后回到 1.
-

将附件中的物理参数与几何参数代入上述优化模型中进行求解，平均输出功率与比例系数和幂指数的关系如下图：

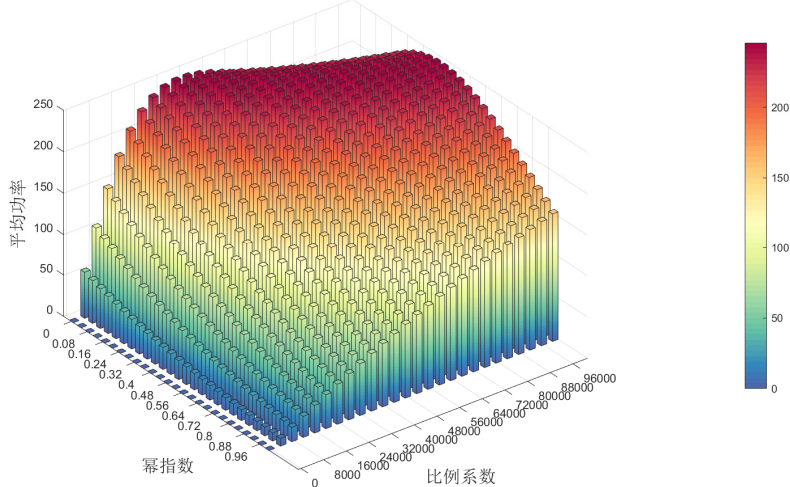


图 7 平均功率与比例系数和幂指数的关系

求得结果如下表所示，表中“最大输出功率”为保留一位小数后的结果：

表 4 情况二最优阻尼系数结果表

阻尼系数条件	最大输出功率	最优阻尼系数
幂指数型函数	243.34W	比例系数：100000 幂指数：0.4163

5.3 摇荡运动模型的建立与求解

如果振子与浮子通过转轴架（包含旋转中轴和扭转弹簧等结构）连接，当浮子在波浪激励力和激励力矩作用下做摇荡运动时，振子也将在扭转弹簧和旋转阻尼器作用下通过中轴做摇荡运动。

为探究振子和浮子做摇荡运动的运动状态，我们需要在垂荡运动模型的基础上建立摇荡运动模型并求解。摇荡运动可视为垂荡运动与纵摇运动（转动）的叠加，我们首先分析系统的转动问题，然后再综合讨论垂荡运动和转动。

5.3.1 求解质心

做摇荡运动的振子与浮子的简化剖面结构如下：

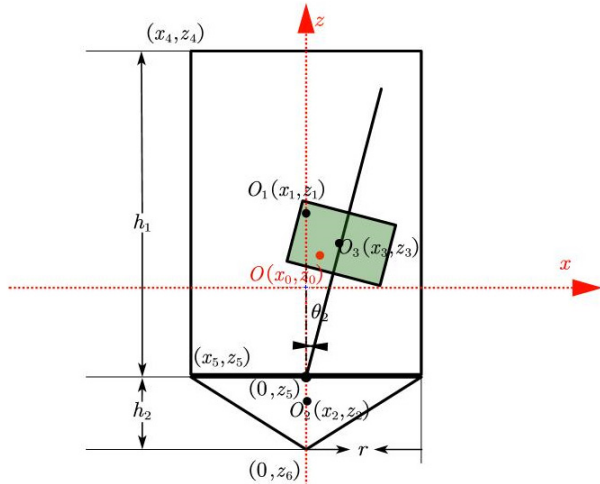


图 8 装置剖面结构简化

仍以静水平面为原点，建立上图所示的二维坐标系，部分坐标点已于图中标出。由于波浪能装置系统是绕过系统质心，垂直于 $z-x$ 平面的转轴转动，因此分析转动过程需要首先求解出系统的质心。受振子做摇荡运动影响，直接求解整个波浪能装置的质心较为困难；基于**假设 3**，我们将波浪能装置拆分为圆柱部分，圆锥部分和振子三部分，并分别计算各部分的质心，然后再计算整体质心。

1. 圆柱外壳质心 $O_1(x_1, z_1)$

基于**假设 5**由对称性可知，圆柱部分的质心为圆柱的中心：

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ z_1 &= \frac{z_4 + z_5}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

2. 圆锥外壳质心 $O_2(x_2, z_2)$

圆锥质心到顶点和隔板中心 $(0, z_5)$ 的距离应为 2: 1，则质心为：

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ z_2 &= \frac{2}{3}z_5 + \frac{1}{3}z_6 \end{aligned} \quad (26)$$

3. 振子质心 $O_3(x_3, z_3)$

假设振子质心与隔板中心点的矢径长度为 R ，矢径与 z 轴夹角为 θ_2 ，则由几何关系可得质心为：

$$\begin{aligned} x_3 &= R \cos \theta_2 + z_5 \\ z_3 &= R \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (27)$$

4. 波浪能装置系统质心 $O(x_0, z_0)$

假设圆柱部分质量为 M_1 ，圆锥部分质量为 M_2 ，由于浮子外壳质量分布均匀，则有：

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2\pi r h_1}{2\pi r h_1 + \pi r \sqrt{r^2 + h_2^2}} M \\ M_2 &= \frac{\pi r \sqrt{r^2 + h_2^2}}{2\pi r h_1 + \pi r \sqrt{r^2 + h_2^2}} M \end{aligned} \quad (28)$$

则由质心计算公式可得波浪能装置系统的质心^[3]为：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + m x_3}{M_1 + M_2 + m} \\ z_0 &= \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + m z_3}{M_1 + M_2 + m} \end{aligned} \quad (29)$$

5.3.2 摇荡运动模型建立

分析到振子是绕过隔板中心 $(0, z_5)$ 的轴转动，与浮子绕装置系统质心轴转动不同，因此需要单独计算浮子和振子的转动惯量，分别建立纵摇运动方程。

我们首先计算浮子的转动惯量 I ，转动惯量仍按照图 4 坐标系进行计算。

1. 圆柱外壳的转动惯量 I_1'

由于浮子外壳质量均匀且连续分布，则由连续物体的转动惯量公式^[3]可得：

$$I'_1 = \frac{M_1}{2\pi r h_1} \int_{z_5}^{z_4} dz \int_{-r}^r r^2 - x^2 + (z - z_0)^2 dx \quad (30)$$

2. 圆锥外壳的转动惯量 I'_2

同理可得圆锥外壳的转动惯量为：

$$I'_2 = \frac{M_2}{\pi r \sqrt{r^2 + h_2^2}} \int_{z_5}^{z_6} dz \int_{-r}^r \left(\frac{z - z_6}{z_5 - z_6} \right)^2 x_5^2 - x^2 + (z - z_0)^2 dx \quad (31)$$

则由平行轴定理可得浮子绕整体质心轴的转动惯量 I 为：

$$I = I'_1 + I'_2 + Mx_0^2 \quad (32)$$

由于振子在图 4 坐标系中绕过隔板中心 $(0, z_5)$ 的轴转动，在该坐标系下直接计算其转动惯量十分困难，为简化计算以及后续模型的建立，我们在图 4 坐标系的基础上建立下图所示的双坐标系：

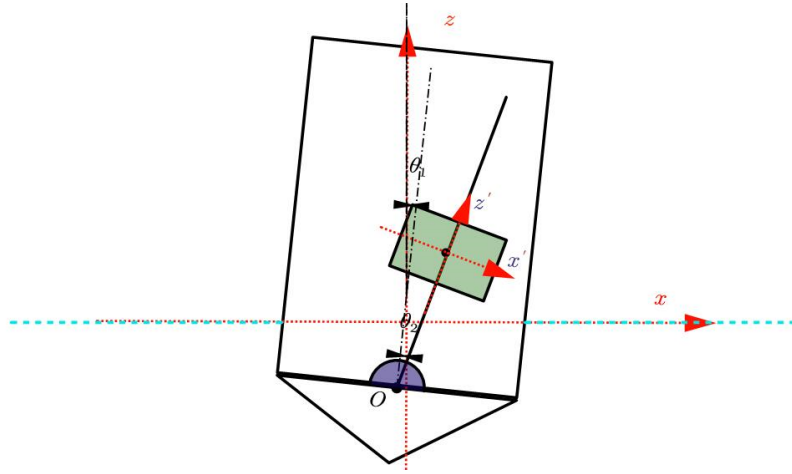


图 9 摇荡运动的双坐标系

上图中， xoz 坐标系与图 4 中坐标系相同，而 $x'o'z'$ 坐标系是以振子质心与隔板中心点的矢径方向为 z' 轴建立的。在 $x'o'z'$ 坐标系下，隔板中心的坐标为 $(0, z'_5)$ ，假设振子的半径为 r' ，则可得在 $x'o'z'$ 坐标系下的振子的转动惯量 i 为：

$$i = \frac{m}{\pi r'^2 (z'_1 - z'_2)} \int_0^{r'} dr \int_{z'_2}^{z'_1} dz \int_{-r}^r r^2 - x^2 + (z - z'_0)^2 dx \quad (33)$$

式中， z'_1, z'_2 为 $x'o'z'$ 坐标系下的振子上下表面的坐标。

由刚体定轴转动定理可知：刚体所受合外力矩等于转动惯量乘以角加速度。对于浮子而言，其所受合外力矩为波浪激励力矩，静水恢复力矩，PTO 系统作用力矩和兴波阻尼力矩的叠加。定义顺时针方向为角位移正方向，假设浮子的角位移为 θ_1 ，则可根据刚体定轴转动定理^[3]得到如下方程：

$$(I + E) \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = M_d - M_b - M_h - M_{PTO} \quad (34)$$

上式中， E 为纵摇附加转动惯量，其数值已由题目给出； M_d, M_b, M_h, M_{PTO} 分别代表波浪激励力矩，兴波阻尼力矩，静水恢复力矩和 PTO 系统作用力矩。假设波浪激励力矩的振幅为 L ，则由题目条件可知：

$$M_d = L \cos \omega t \quad (35)$$

兴波阻尼力矩等于纵摇兴波阻尼系数乘以浮子的角速度,假设纵摇兴波阻尼系数为 B' ,则:

$$M_b = B' \frac{d\theta_1}{dt} \quad (36)$$

而静水恢复力矩等于静水恢复力矩系数 J 乘以浮子角位移:

$$M_h = J\theta_1 \quad (37)$$

当振子在浮子内部做纵摇运动(转动)时,其转轴与振子质心不重合,则其受到合外力矩应包含 PTO 系统作用力矩和重力力矩。假设振子相对于浮子的角位移为 θ_2 ,引入惯性角加速度可得^[3]:

$$i\left(\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \cos \theta_2\right) = M_{PTO} - mg \sin(\theta_1 + \theta_2)R \quad (38)$$

由题目条件可知,PTO 系统作用力矩为扭转弹簧和旋转阻尼器的扭矩之和,且扭转弹簧的扭矩等于相对角位移 θ_2 乘以扭转弹簧的刚度,旋转阻尼器的扭矩等于旋转阻尼系数乘以角速度。假设扭转弹簧的刚度为 K' ,旋转阻尼器的阻尼系数为 C' ,则可得:

$$M_{PTO} = -K'\theta_2 - C' \frac{d\theta_2}{dt} \quad (39)$$

下讨论纵摇运动的初始条件与角位移的约束条件:

1. 初始条件

初始时刻浮子与振子均处于静止状态,角位移均为 0:

$$\begin{cases} \theta_1|_{t=0} = 0 \\ \theta_2|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

浮子已受到波浪激励力矩,则根据冲量矩定理有^[3]:

$$(M_d - M_b)dt|_{t=0} = I \frac{d\theta_1}{dt}|_{t=0} \quad (41)$$

而振子在惯性作用下运动状态不会立即发生改变,其初始角速度为 0:

$$\frac{d\theta_2}{dt} = 0 \quad (42)$$

2. 约束条件

为确保浮子和振子能够做稳定的纵摇运动,则需要设定约束条件:

- 1) 浮子下方圆锥部分不露出水面;
- 2) 振子纵摇过程中不会与浮子内壁接触;

经几何计算,可得约束条件的数值形式:

$$\begin{cases} |\theta_1| < \arctan 1.5 \\ |\theta_2| < \arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad (43)$$

由运动的合成可知,将浮子与振子垂荡运动和纵摇运动叠加可得到浮子与振子的摇荡运动;结合前文建立的垂荡运动模型,可得到浮子与振子的摇荡运动模型如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{动力学方程:} \left\{ \begin{array}{l} (M+A) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f_d - f_b - f_s - f_{PTO} \cos \theta_2 \\ (I+E) \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = M_d - M_b - M_h - M_{PTO} \\ m \left(\frac{d^2 z_2}{dt^2} + \frac{d^2 z_1}{dt^2} \cos \theta_2 \right) = f_{PTO} - mg \cos(\theta_1 + \theta_2) + m \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 R \\ i \left(\frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \cos \theta_2 \right) = M_{PTO} - mg \sin(\theta_1 + \theta_2) R \end{array} \right. \\ \text{初始条件:} \left\{ \begin{array}{l} z_1|_{t=0} = 0, z_2|_{t=0} = 0 \\ (f_d - f_b - Mg - mg) dt|_{t=0} = M \frac{dz_1}{dt}|_{t=0}, \quad \frac{dz_2}{dt} = 0 \\ \theta_1|_{t=0} = 0, \theta_2|_{t=0} = 0 \\ (M_d - M_b) dt|_{t=0} = I \frac{d\theta_1}{dt}|_{t=0}, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = 0 \end{array} \right. \\ \text{约束条件:} \left\{ \begin{array}{l} -1.8 \leq z_1 \leq 1.2 \\ -0.8 \leq z_2 \leq 2.2 \\ |\theta_1| < \arctan 1.5 \\ |\theta_2| < \arctan \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \end{array} \right. \\ \text{其他条件:} \left\{ \begin{array}{l} S = \pi r^2 \\ R = 0.202 + 0.25 + z_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (44)$$

该模型在垂荡运动模型的基础上增加了浮子和振子的纵摇运动，使得模型求解难度增大，但由于方程形式和初始条件类型与垂荡运动模型相同，因此我们仍采用数值方法求解^[4]。

5.3.3 摇荡运动模型求解

代入附件中的物理参数和几何参数，求解得到 10s、20s、40s、60s、100s 时，浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度如下表所示：

表 5 浮子与振子的垂荡位移与速度表

时间	浮子		振子	
	垂荡位移(m)	速度(m/s)	垂荡位移(m)	速度(m/s)
10s	0.248	0.656	0.0149	0.0963
20s	0.624	0.352	0.0688	0.0874
40s	0.257	-1.37	0.0556	-0.153
60s	-0.621	-0.176	-0.0751	-0.0638
100s	0.475	-0.727	0.0728	-0.0577

(数据结果保留三位有效数字)

表 6 浮子与振子的纵摇角位移与角速度表

时间	浮子		振子	
	纵摇角位移	角速度(s^{-1})	纵摇角位移	角速度(s^{-1})
10s	-0.0263	0.114	0.000875	-0.00372
20s	0.00315	0.0912	0.0000514	-0.00317
40s	0.0394	-0.0663	-0.00138	0.00256
60s	-0.0475	-0.0440	0.00128	0.000991
100s	0.0464	-0.0212	-0.00161	0.000849

(数据结果保留三位有效数字)

表 5 与表 6 中振子的物理量均为相对于浮子的物理量；前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2s 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度结果以附件 result3.xlsx 给出。作出浮子和振子相关物理量的曲线如下图：

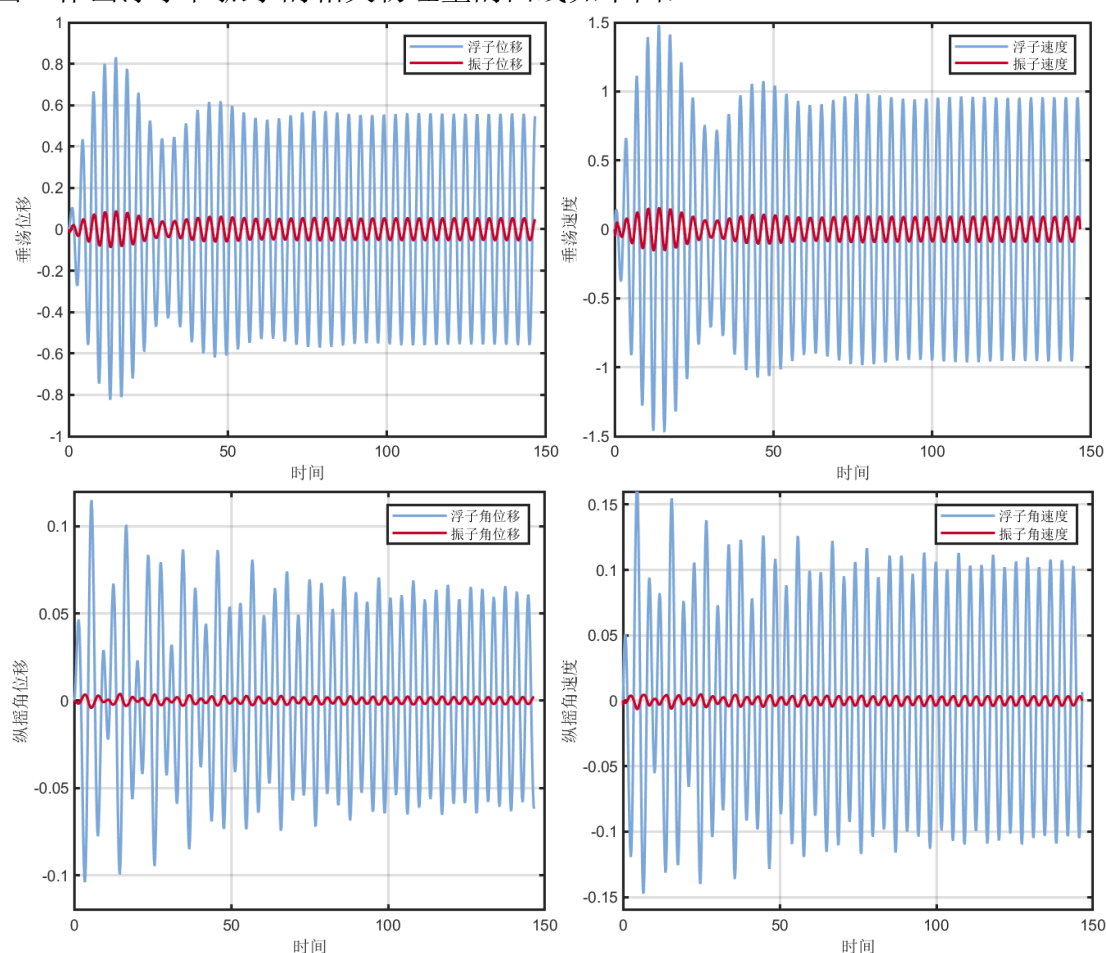


图 10 浮子和振子摇荡运动物理量对比

上图结果说明，浮子于振子的摇荡运动也具有周期性稳态的特点。

5.4 摇荡运动条件下的最优阻尼系数探究

为确保波浪能装置能够在发生摇荡运动时具有较高的输出功率，我们需要建

立数学模型探究旋转阻尼器与和直线阻尼器的最优阻尼系数。

5.4.1 优化模型建立

当波浪能装置同时做垂荡和纵摇运动时，PTO 系统的输出功率为直线阻尼器与旋转阻尼器的输出功率之和。该情况下 PTO 系统的平均输出功率为：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T C \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^2 + M_{PTO} \theta_2 dt \quad (45)$$

优化目标：

该优化问题的优化目标仍是 PTO 系统的平均输出功率最大，即：

$$\max \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T C \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^2 + M_{PTO} \theta_2 dt \right\} \quad (46)$$

约束条件：

1. 直线阻尼器的阻尼系数 C 和旋转阻尼器的阻尼系数 C' 均为区间 $[0, 100000]$ 内的常数；
2. 浮子和振子的运动应当满足第三问的摇荡运动模型。

则可得到以 PTO 系统的平均输出功率最大为目标，直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数为优化参数的单目标优化模型如下：

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}, \hat{C}' \rangle &= \arg \max \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T C \left| \frac{dz_2}{dt} \right|^2 + M_{PTO} \theta_2 dt \right\} \\ s.t. &\begin{cases} 0 \leq C \leq 100000 \\ 0 \leq C' \leq 100000 \end{cases} \end{aligned} \quad (47)$$

5.4.2 优化模型求解

如果直接以小步长进行遍历搜索，时间复杂度较高且求解时间较长，因此我们对两个阻尼系数与 PTO 系统平均输出功率的内在联系进行探究，尝试通过一些粗略的搜索以分析两个参数各自对优化目标的影响，希望减小搜索的空间以降低时间复杂度，提高求解效率。经计算可得固定直线阻尼系数时，旋转阻尼系数对平均输出功率的影响程度如下图：

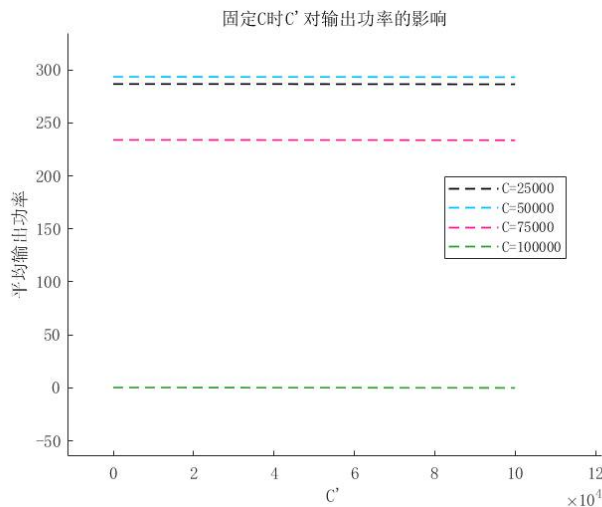


图 11 阻尼系数对平均输出功率的影响程度

上图说明，旋转阻尼系数对平均输出功率影响较低，因此求解优化模型时，可先将旋转阻尼系数固定，单独对直线阻尼系数采用变步长搜索算法求解，算法描述如下：

算法 4：变步长遍历搜索法

1. 设置大步长 $\Delta t_1 = 1000$ ，在给定 C 的区间 $[0, 10000]$ 内进行初步搜索；
2. 基于已建立的模型，搜索范围内对平均输出功率求解，找到相对较优的 C 的子区间；
3. 将该组子区间作为新的搜索区间，并在该区间内设置小步长 Δt_2 ；
4. 在新搜索范围内用小步长 Δt_2 对目标函数进行求解，得到更为精确的 C 的子区间，重复操作直到精度达到要求，结束程序。

采用以上算法求解得到最优的 C 值，然后对于该 C 值，我们同样可以采用变步长搜索算法求解得到该情况下最优的 C' 值，最终求解结果和对应的输出功率如下表所示：

表 7 摇荡运动下的最优阻尼系数结果表

运动状态	直线阻尼系数	旋转阻尼系数	最大输出功率
摇荡运动	56645.95	100000	295.1193 W

六 灵敏度分析

文章采用欧拉法求解垂荡运动模型时涉及迭代步长的选取问题，取迭代步长为 0.005，0.01，0.02 和 0.035，分别得到当阻尼系数为 $10000 N \cdot s/m$ 的位移结果为：

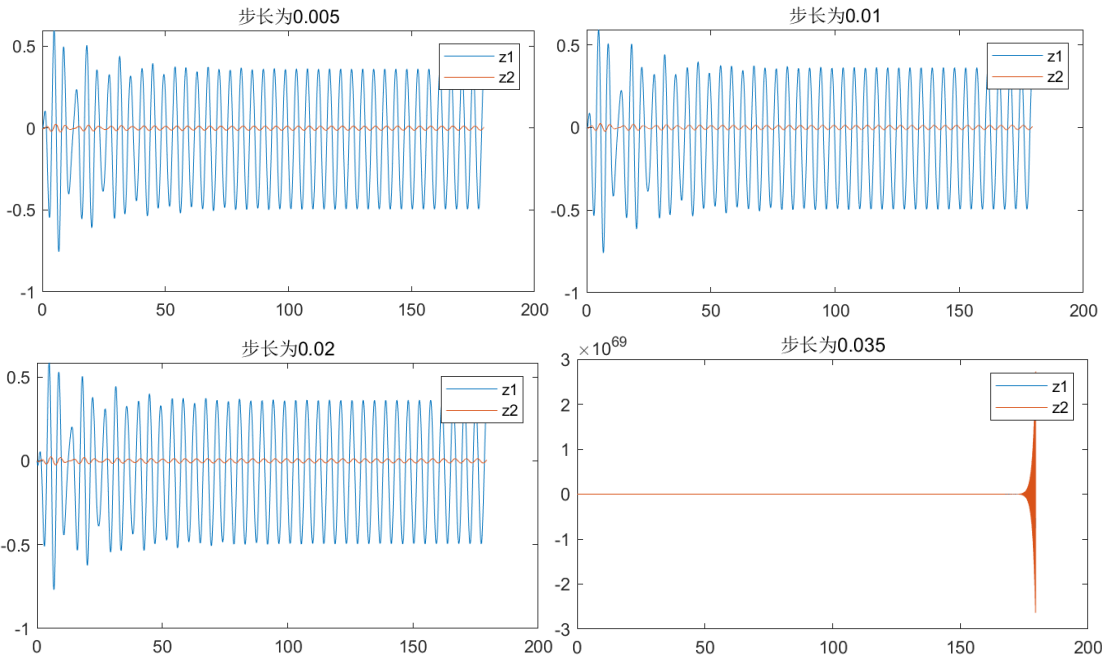


图 12 不同步长对位移结果的影响

经验发现，位移结果对迭代步长较为敏感，迭代步长越短，位移计算结果更接近真实情况，因此本文求解垂荡运动模型时，选择迭代步长为 0.02 以兼顾计算效

率与实际结果的符合程度。

七 模型评价

7.1 模型优点

1、模型综合考虑了波浪能系统所受外力，建立了垂荡运动模型，并通过欧拉法进行求解；

2、在建立摇荡运动模型时，采用双坐标系的思想，简化了振子转动惯量的计算与模型建立的过程；

3、模型考虑因素较为全面，具有完备性；

7.2 模型缺点

1、采用变步长搜索的方法求解效率和结果的精度较低；

2、模型考虑的因素较繁琐，求解难度较大；

7.3 改进方向

1、简化模型，降低求解难度；

2、减小方程迭代步长，使模型求解更加精确；

3、对于垂荡运动模型和摇荡运动模型可采用改进欧拉法或龙格—库塔法求解；

八 结论

本文对波浪能装置做垂荡运动与摇荡运动两种情况进行了力学分析，基于牛顿第二定律和刚体定轴转动定理分别建立了垂荡运动模型和摇荡运动模型，并采用欧拉法对模型进行了求解；本文还在模型基础上对阻尼系数进行了优化，求解出时系统输出功率达到最大的最优阻尼系数。得到结论如下：

当波浪能装置仅做垂荡运动时，浮子和振子均能在合外力作用下达到稳态，做稳定的周期性振动，PTO 系统的输出功率也具有周期性稳态的特点。若阻尼系数为常数，则当阻尼系数为 37538.147 时，PTO 系统的输出功率达到最大，为 245.527W；若阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，则当幂指数为 1，比例系数为 100000 时，PTO 系统的输出功率最大为 1215.4W；

当波浪能装置同时做垂荡和纵摇运动，浮子和振子也能在合外力作用下达达到稳态，做周期性的垂荡和纵摇运动。且当直线阻尼器的阻尼系数为 56645.95，旋转阻尼系数为 100000 时，PTO 系统的输出功率达到最大，为 295.1193W。

希望本文采用的方法与计算结果能够对波浪能装置的研究与开发起具有一定的指导意义。

九 参考文献

- [1] 马哲. 振荡浮子式波浪发电装置的水动力学特性研究[D]. 中国海洋大学, 2013.
- [2] 王淑婧. 振荡浮子式波浪能发电装置的设计及功率计算分析[D]. 中国海洋大学, 2013.
- [3] 滕保华, 廖旭. 大学物理学. 上册[M]. 科学出版社, 2010.
- [4] 李荣华. 微分方程数值解法(第三版)[M]. 高等教育出版社, 2010.
- [5] 沈继红, 蔡志杰, 李晓乐. 炉温曲线的数学模型及求解[J]. 数学建模及其应用, 2021, 10(01):62-72. DOI:10.19943/j.2095-3070.jmmia.2021.01.08.

十 附件清单

- 1. 问题一求解结果 result1-1.xlsx 和 result1-2.xlsx (Excel 文件)
- 2. 问题三求解结果 result3.xlsx (Excel 文件)
- 3. 问题一、二模型程序 model1_calcu.m (matlab 程序)
- 4. 问题三、四模型程序 model2_calci.m (matlab 程序)
- 5. 问题一结果输出程序 prob1_output.m (matlab 程序)
- 6. 问题二求解程序 prob2_1.m、prob2_2.m (matlab 程序)
- 7. 问题三结果输出程序 prob3_output.m (matlab 程序)
- 8. 问题四求解程序 prob4_search.m (matlab 程序)
- 9. 常量数据处理程序 Constant.m (matlab 程序)
- 10. 问题四中间数据文件 Data4.m (matlab 程序)

附录

常量函数 Constant.m:

```
1.  classdef Constant
2.      properties(Constant)
3.          M_floater = 4866;% 浮子质量 (kg)
4.          R_floater = 1;% 浮子底半径 (m)
5.          H1_floater = 3;% 浮子圆柱部分高度 (m)
6.          H2_floater = 0.8;% 浮子圆锥部分高度 (m)
7.          M_ocillator = 2433;% 振子质量 (kg)
8.          R_ocillator = 0.5;% 振子半径 (m)
9.          H_ocillator = 0.5;% 振子高度 (m)
10.         rho = 1025;% 海水的密度 (kg/m3)
11.         g = 9.8;% 重力加速度 (m/s2)
12.         K1 = 80000;% 弹簧刚度 (N/m)
13.         L_spring = 0.5;% 弹簧原长 (m)
14.         K2 = 250000;% 扭转弹簧刚度 (N·m)
15.         water_moment_coe = 8890.7;% 静水恢复力矩系数 (N·m)
16.     end
17.     methods(Static)
18.         function [wave_freq,heave_addedmass,surge_inertia,...
19.             K_heave,K_pitch,F_heave,F_pitch]=get_prob1()
20.             wave_freq = 1.4005;% 入射波浪频率 (s-1)
21.             heave_addedmass = 1335.535;% 垂荡附加质量 (kg)
22.             surge_inertia = 6779.315;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
23.             K_heave = 656.3616;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
24.             K_pitch = 151.4388;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
25.             F_heave = 6250;% 垂荡激励力振幅 (N)
26.             F_pitch = 1230;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)
27.         end
28.         function [wave_freq,heave_addedmass,surge_inertia,...
29.             K_heave,K_pitch,F_heave,F_pitch]=get_prob2()
30.             wave_freq = 2.2143;% 入射波浪频率 (s-1)
31.             heave_addedmass = 1165.992;% 垂荡附加质量 (kg)
32.             surge_inertia = 7131.29;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
33.             K_heave = 167.8395;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
34.             K_pitch = 2992.724;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
35.             F_heave = 4890;% 垂荡激励力振幅 (N)
36.             F_pitch = 2560;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)
37.         end
38.         function [wave_freq,heave_addedmass,surge_inertia,...
39.             K_heave,K_pitch,F_heave,F_pitch]=get_prob3()
40.             wave_freq = 1.7152;% 入射波浪频率 (s-1)
```

```

41.         heave_addedmass = 1028.876;% 垂荡附加质量 (kg)
42.         surge_inertia = 7001.914;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
43.         K_heave = 683.4558;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
44.         K_pitch = 654.3383;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
45.         F_heave = 3640;% 垂荡激励力振幅 (N)
46.         F_pitch = 1690;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)
47.     end
48.     function [wave_freq,heave_addedmass,surge_inertia,...
49.         K_heave,K_pitch,F_heave,F_pitch]=get_prob4()
50.         wave_freq = 1.9806;% 入射波浪频率 (s-1)
51.         heave_addedmass = 1091.099;% 垂荡附加质量 (kg)
52.         surge_inertia = 7142.493;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
53.         K_heave = 528.5018;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
54.         K_pitch = 1655.909;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
55.         F_heave = 1760;% 垂荡激励力振幅 (N)
56.         F_pitch = 2140;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)
57.     end
58. end
59. end

```

问题一程序 prob1_output.m:

```

1. clear
2. clc
3. %% 问题 1-1 测试直线阻尼器阻尼系数
4. [~,Pm,x1,x2,v1,~,Tn] = model1_calc(10000,1);
5. % figure;
6. % plot(t,x1,t,x2);
7. % figure
8. % plot(P)
9. % title('阻尼系数为 100 时浮子和振子的位移')
10. % set(gca, 'FontName', '宋体', 'FontSize',14,'Xlim',[0 185])
11. % legend('x_1','x_2')
12. x2 = x2+x1;
13.
14. dt = 0.2;
15. ddt = 0.001;
16. Tline = 0:dt:Tn;
17. step = dt/ddt;
18. v2 = diff(x2)/ddt;
19. v2 = [0,v2];
20.
21. x1 = x1(1:step:end);
22. x2 = x2(1:step:end);

```



```

23. v1 = v1(1:step:end);
24. v2 = v2(1:step:end);
25.
26. result_output(Tline,x1,x2,v1,v2,'result1-1.xlsx');
27.
28. [~,~,nx1,nx2,nv1,~,Tn] = simulate_calc(10000,0.5);
29.
30. nx2 = nx2+nx1;
31. nv2 = diff(nx2)/ddt;
32. nv2 = [0,nv2];
33.
34. nx1 = nx1(1:step:end);
35. nx2 = nx2(1:step:end);
36. nv1 = nv1(1:step:end);
37. nv2 = nv2(1:step:end);
38. result_output(Tline,nx1,nx2,nv1,nv2,'result1-2.xlsx');
39.
40. function result_output(Tline,x1,x2,v1,v2,filename)
41.
42. if exist(filename,'file')
43.     delete(filename);
44. end
45. copyfile('数据/result1-1.xlsx',filename);
46.
47. T = table(Tline,'x1',v1,'x2',v2);
48.
49. disp(head(T));
50. range1 = 'A3:E'+string(height(T)+2);
51. writetable(T,filename,'Range',range1,'WriteVariableNames',false);
52.
53. End

```

问题一函数 model1_calc.m:

```

1. function [P,Pm,x1,x2,dx1,dx2,Tn] = model1_calc(C_value,r_value)
2. %
3. % C_value 为常数比例系数， r_value 为幂指数
4. %
5. %% 所需变量初始化
6. % [omega,A,~,B,~,F_heave,~]=Constant.get_prob1();% 获取第一问所需常量系数
7. [omega,A,~,B,~,F_heave,~]=Constant.get_prob2();% 获取第二问所需常量系数
8. M = Constant.M_floater;
9. m = Constant.M_ocillator;
10. rho = Constant.rho;

```

```

11. R = Constant.R_floater;
12. S = pi*R^2;
13. K = Constant.K1;
14. g = Constant.g;
15.
16. T = 2*pi/omega;% 一个波浪周期时间长度
17. Tn = 40*T;% 第一问第一小问需求解前 40 个周期内浮子和振子垂荡位移和速度
18.
19. % tspan=[0 Tn];
20.
21. dt = 0.001;
22. Len = floor(Tn/dt);
23. x1 = zeros(1,Len);
24. x2 = zeros(1,Len);
25. dx1 = zeros(1,Len); ddx1 = zeros(1,Len);
26. dx2 = zeros(1,Len); ddx2 = zeros(1,Len);
27. P = zeros(1,Len);P(1)=0;
28. x1_start=0;
29. % x1_end=(F_heave*cos(omega*dt)*dt^2-M*g*dt^2)/(M+B*dt)+x1_start;
30. x1_end=(F_heave*dt^2-(M+m)*g*dt^2)/(M+B*dt)+x1_start;
31. x1(1:2) = [x1_start,x1_end];
32. x2(1:2) = 0;
33.
34. C = C_value;% 直线阻尼器阻尼系数与相对速度幂所成比例 N*s/m
35. r = r_value;% 与相对速度绝对值所成幂指数比例
36. z0 = 0.298;
37. tic
38. i = 2;
39. for t = 2*dt:dt:Tn
40.     fd = F_heave*cos(omega*t);% 波浪激励力
41.
42.     x1(i+1) = 1/(M+A)*(dt^2*fd-dt*B*(x1(i)-x1(i-1))+dt^2*K*(x2(i)-z0)...
43.         -dt^2*g*(rho*S*(x1(i)-2.266667)+M))...
44.         +C*abs((x2(i)-x2(i-1))/dt)^r*dt*(x2(i)-x2(i-1)))+2*x1(i)-x1(i-1);
45.     x2(i+1) = -(dt^2*K/m)*(x2(i)-z0)-C/m*abs((x2(i)-x2(i-1))/dt)^r*dt*(x2(i)-x2(i-1))...
46.         +2*x2(i)-x2(i-1)-x1(i+1)+2*x1(i)-x1(i-1)-g*dt^2;
47.
48.     dx1(i) = (x1(i)-x1(i-1))/dt;
49.     ddx1(i) = (x1(i+1)-2*x1(i)+x1(i-1))/dt^2;
50.     dx2(i) = (x2(i)-x2(i-1))/dt;
51.     ddx2(i) = (x2(i+1)-2*x2(i)+x2(i-1))/dt^2;
52.     P(i-1)=C.*(dx2(i).^2);
53.     i = i+1;
54. end

```

```

55. toc
56. % 计算平均功率
57. Pm = mean(P);
58. end
59. % figure
60. % subplot(2,1,1)
61. % plot(t,dx1,t,ddx1)
62. % subplot(2,1,2)
63. % plot(t,dx2,t,ddx2)

```

问题二第一小问程序 prob2_1.m:

```

1. clear
2. clc
3. left = 0; right = 100000;
4. res = [];
5. %%% 二分搜索,
6. % 以中点附近梯度变化为依据缩小小区间 diff(f)/h
7. while abs(left-right) > eps
8. % [Pleft,~,~,~] = simulate_calc(left,0);
9. % [Pright,~,~,~] = simulate_calc(right,0);
10. mid = (right-left)/2+left;
11. % sigma = 3;
12. % Plen = length(mid-sigma:mid+sigma);
13. Pw = zeros(1,3);
14. jj = 1;
15. for ii = mid-1:mid+1
16. [~,Pw(jj),~,~,~] = model1_calc(ii,0);
17. jj = jj+1;
18. end
19. res = [Pw(2);res];
20. dPw = diff(Pw);
21. if dPw(1)>0 && dPw(2)<0
22. break
23. end
24. if abs(mean(dPw))<eps
25. break
26. end
27.
28. signP = sign(dPw);
29. pos = signP > 0;
30. pos = all(pos,2);
31. neg = signP < 0;
32. neg = all(neg,2);

```

```

33.
34.     if pos
35.         left = mid;
36.     elseif neg
37.         right = mid;
38.     end
39. end

```

问题二第二小问程序 prob2_2.m:

```

1.  %% “混沌采样”法求解
2.  % 初值  $x_1 \in (0,1)$  后可以生成  $(0,1)$  之间的一个混沌序列  $\{x_k\}_{Mk=1}^{Mk=1}$   $x(k+1)=4*xk(1-xk)$ 
3.  % 在得到一个长度为 M 的混沌序列 后，经过简单的线性变换后可将其映射到区间(a,b)
4.  %  $y_k=(b-a)*x_k+a$ 
5.  clear
6.  clc
7.  rng('default')
8.  M0 = 3500;
9.  xk = zeros(1,M0);
10. xk(1) = rand;
11. assert(~(xk(1)==0.25||xk(1)==0.5||xk(1)==0.75))
12. for i = 1:M0-1
13.     xk(i+1) = 4*xk(i)*(1-xk(i));
14. end
15. yk = 100000*xk;
16. res = zeros(1,M0);
17. tic
18. for ii = 1:M0
19.     k = yk(ii);
20.     r = xk(ii);
21.     [~,Pm,x1,x2,Tn] = model1_calc(k,r);
22.     res(ii) = Pm;
23. end
24. toc
25. plot(res)
26. % save chaotic_sampling.mat xk yk res
27. [sorted_res,index] = sort(res);
28. plot(sorted_res)
29. maxInd = index(end-10:end);
30. maxRes = res(maxInd);
31. r_max = xk(maxInd);
32. C_max = yk(maxInd);
33.
34. %% 变步长法搜索验证

```

```

35. % [0 100000]取步长 200 [0 1]取步长 0.1
36. % clear
37. % clc
38. % Len1 = length(0:1000:100000);
39. % Len2 = length(0:0.01:1);
40. % Len = Len1*Len2;
41. % Data = zeros(1,Len);
42. % num = 1;
43. % for i2 = 100000:-1000:0
44. %     tic
45. %     for j2 = 1:-0.01:0
46. %         k = i2;
47. %         r = j2;
48. %         [~,Pm,x1,x2,Tn] = simulate_calc(k,r);
49. %         Data(num) = Pm;
50. %         num = num+1;
51. %     end
52. %     toc
53. % end
54. % bar3(Data)

```

问题三程序 prob3_output.m:

```

1. clear
2. clc
3. % 浮子与振子前四十个波浪周期内时间间隔为 0.2s 的
4. % 垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度
5. C_value = 10000; C1_value = 1000;
6. [Pm,z1,z2,v1,v2,sita1,sita2,omega1,omega2,Tn]...
7.     = model2_simulate(C_value,C1_value);
8. dt = 0.2;
9. ddt = 0.001;
10. Tline = 0:dt:Tn;
11. step = dt/ddt;
12.
13. z1 = z1(1:step:end);
14. z2 = z2(1:step:end);
15. v1 = v1(1:step:end);
16. v2 = v2(1:step:end);
17. sita1 = sita1(1:step:end);
18. sita2 = sita2(1:step:end);
19. omega1 = omega1(1:step:end);
20. omega2 = omega2(1:step:end);
21. output(Tline,z1,z2,v1,v2,sita1,sita2,omega1,omega2);

```

```

22.
23. function output(Tline,z1,z2,v1,v2,sita1,sita2,omega1,omega2)
24.
25. if exist('result3.xlsx','file')
26.     delete('result3.xlsx');
27. end
28. copyfile('数据/result3.xlsx','result3.xlsx');
29.
30. T = table(Tline',z1',v1',sita1',omega1', z2',v2', sita2',omega2');
31.
32. disp(head(T));
33. range1 = 'A3:I'+string(height(T)+2);
34. writetable(T,'result3.xlsx','Range',range1,'WriteVariableNames',false);
35. end

```

问题三函数 model2_calc.m:

```

1. function [Pm,z1,z2,dz1,dz2,sita1,sita2,dsita1,dsita2,Tn]...
2.     = model2_calc(C_value,C1_value)
3. %% 所需变量初始化
4. % [omega,A,E,B,B1,F_heave,F_surge]=Constant.get_prob3();% 获取第三问所需常量系数
5. [omega,A,E,B,B1,F_heave,F_surge]=Constant.get_prob4();% 获取第四问所需常量系数
6. M = Constant.M_floater;
7. m = Constant.M_ocillator;
8. rho = Constant.rho;
9. R = Constant.R_floater;
10. S = pi*R^2;
11. K1 = Constant.K1;
12. K2 = Constant.K2;
13. g = Constant.g;
14. J = Constant.water_moment_coe;
15. I = 8171.17;%浮子转动惯量
16. z0 = 0.298;
17.
18. T = 2*pi/omega;% 一个波浪周期时间长度
19. Tn = 40*T;% 第一问需求解前 40 个周期内浮子和振子垂荡位移和速度
20. % dt = 0.2;% 时间间隔 0.2s
21.
22. tspan=[0 Tn];
23.
24. dt = 0.001;
25. Len =floor(Tn/dt);
26. z1 = zeros(1,Len);
27. z2 = zeros(1,Len);

```

```

28. sita1 = zeros(1,Len);
29. sita2 = zeros(1,Len);
30.
31. fb = zeros(1,Len+1);fr = zeros(1,Len+1);fpto = zeros(1,Len+1);
32. Mb = zeros(1,Len+1);Mh = zeros(1,Len+1);Mpto = zeros(1,Len+1);
33. dz1 = zeros(1,Len+1);dz2 = zeros(1,Len+1);dsita1 = zeros(1,Len+1);dsita2 = zeros(1,Len+1);
34. % fb = zeros(1,Len+1);fr = zeros(1,Len+1);fpto = zeros(1,Len+1);fdp = zeros(1,Len+1);
35. % dx1 = zeros(1,Len+1); dx2 = zeros(1,Len+1);ddx1 = zeros(1,Len+1);ddx2 = zeros(1,Len+1);
36. P = zeros(1,Len+1);
37. % dp = zeros(1,Len+1);
38. z1_start=0;
39. z1_end=(F_heave*cos(omega*dt)*dt^2-M*g*dt^2)/(M+B*dt)+z1_start;
40. sita1_start=0;
41. sita1_end=(F_surge*cos(omega*dt)*dt^2)/(I+B1*dt)+sita1_start;
42. z1(1:2) = [z1_start,z1_end];
43. z2(1:2) = 0;
44. sita1(1:2) = [sita1_start,sita1_end];
45. sita2(1:2) = 0;
46. C = C_value;% 直线阻尼器阻尼系数 N*s/m
47. C1 = C1_value;% 旋转阻尼器阻尼系数
48. tic
49. j = 2;
50. for t = 2*dt:dt:Tn
51.     fd = F_heave*cos(omega*t);% 波浪激励力
52.     Md = F_surge*cos(omega*t);% 波浪激励力矩
53.     L=0.202+0.25+z2(j);
54.
55.     i=204.15+2433*L^2;%振子转动惯量
56.
57.     % x1(i+1) = 1/(M+A)*(dt^2*fd-dt*B*(x2(i)-x2(i-1))-rho*g*S*dt^2*(x1(i-1)-2.2)+...
58.     % -dt^2*M*g+dt^2*K*(x2(i-1)-0.298)+C*dt*(x2(i)-x2(i-1)))+2*x1(i)-x1(i-1);
59.     % x2(i+1) = -(dt^2*K/m)*(x2(i-1)-0.298)+(-C*dt/m+2)*x2(i)+C*dt/m*x2(i-1)...
60.     % -x1(i+1)+2*x1(i)-x1(i-1)-dt^2*g-x2(i-1);
61.     % dx1(i) = (x1(i)-x1(i-1))/dt;
62.     % dx2(i) = (x2(i)-x2(i-1))/dt;
63.     % ddx1(i)=(x1(i+1)-2*x1(i)+x1(i-1))./dt.^2;
64.     % ddx2(i)=(x2(i+1)-2*x2(i)+x2(i-1))./dt.^2;
65.     % fb(i)=B*(x2(i)-x2(i-1))./dt;
66.     % fr(i)=-rho*g*S*(x1(i-1)-2.2);
67.     % fpto(i)=-K*(x2(i-1)-0.298)-C./dt*(x2(i)-x2(i-1));
68.     % fdp(i)=-C./dt*(x2(i)-x2(i-1));
69.     % P(i)=C.*(dx2(i).^2);
70.     % dp(i)=(P(i)-P(i-1))/dt;
71.     z1(j+1)=1/(M+A)*(fd*dt^2-B*(z1(j)-z1(j-1))*dt-rho*g*S*dt^2*(z1(j)-2.26667)-M*g*dt^2+...

```

```

72.         (K1*dt^2*(z2(j)-z0)+C*(z2(j)-z2(j-1))*dt)*cos(sita2(j))+2*z1(j)-z1(j-1);
73.     sita1(j+1)=1/(I+E)*(Md*dt^2-B1*(sita1(j)-sita1(j-1))*dt-J*sita1(j)*dt^2+K2*sita2(j)*dt^2+...
74.         C1*(sita2(j)-sita2(j-1))*dt)+2*sita1(j)-sita1(j-1);
75.     z2(j+1)=1/m*(-K1*dt^2*(z2(j)-z0)-C*dt*(z2(j)-z2(j-1))-m*g*cos(sita1(j)+sita2(j))*dt^2+...
76.         m*(sita2(j)-sita2(j-1))^2*L)-(z1(j+1)-2*z1(j)+z1(j-1))*cos(sita2(j))+2*z2(j)-z2(j-1);
77.     sita2(j+1)=1/i*(-K2*dt^2*sita2(j)-C1*(sita2(j)-sita2(j-1))*dt-m*g*dt^2*sin(sita1(j)+sita2(j))*L)-...
78.         (sita1(j+1)-2*sita1(j)+sita1(j-1))*cos(sita2(j))+2*sita2(j)-sita2(j-1);
79.
80.     fb(j)=B*(z2(j)-z2(j-1))./dt;
81.     fr(j)=-rho*g*S*(z1(j-1)-2.2);
82.     fpto(j)=-K1*(z2(j-1)-0.298)-C./dt*(z2(j)-z2(j-1));
83.     Mb(j)=B1*(sita2(j)-sita2(j-1))/dt;
84.     Mh(j)=J*sita1(j);
85.     Mpto(j)=-K2*sita2(j)-C1./dt*(sita2(j)-sita2(j-1));
86.
87.     dz1(j)=(z1(j)-z1(j-1))/dt;
88.     dz2(j)=(z2(j)-z2(j-1))/dt;
89.     dsita1(j)=(sita1(j)-sita1(j-1))/dt;
90.     dsita2(j)=(sita2(j)-sita2(j-1))/dt;
91.
92.     P(j)=C.*(dz2(j).^2)+C1*dsita2(j)^2;
93.
94.     j = j+1;
95. end
96. toc
97. Pm = mean(P);
98.
99. % t = 0:dt:Tn;
100. % figure
101. % subplot(2,1,1)
102. % plot(t,z1,t,z2);
103. % legend('z1','z2')
104. % subplot(2,1,2)
105. % plot(t,sita1,t,sita2);
106. % legend('sita1','sita2')
107. % figure
108. % subplot(2,1,1)
109. % plot(t,fb,t,fr,t,fpto);
110. % legend('fb','fr','fpto')
111. % subplot(2,1,2)
112. % plot(t,Mb,t,Mh,t,Mpto);
113. % legend('Mb','Mh','Mpto')
114. % figure
115. % subplot(2,1,1)

```



```

116. % plot(t,dz1,t,dz2);
117. % legend('dz1','dz2')
118. % subplot(2,1,2)
119. % plot(t,dsita1,t,dsita2);
120. % legend('dsita1','dsita2')
121. % figure
122. % plot(t,P);
123. % legend('P')
124. % title('步长为 0.001')
125. % subplot(3,1,2)
126. % plot(t,fb,t,fr,t,fpto,t,fdp);
127. % legend('fb','fr','fpto','fdp')
128. % subplot(3,1,3)
129. % plot(t,dx1,t,dx2,t,ddx1,t,ddx2);
130. % legend('dx1','dx2','ddx1','ddx2')
131. % P_mean=mean(P(300000:358911));
132. % figure
133. % plot(t,P);
134. % legend('P')
135. % figure
136. % subplot(2,1,1)
137. % plot(t,dx1,t,ddx1)
138. % subplot(2,1,2)
139. % plot(t,dx2,t,ddx2)

```

问题四程序 prob4_search.m:

```

1.  clear
2.  clc
3.  %% 搜索最大输出功率和相应的最优阻尼系数
4.  % 直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均为常量的情况 均在[0,100000]内取值
5.  % 分别探究两个阻尼系数对优化目标的影响
6.  Len1 = length(0:2500:100000);
7.  Len2 = length(0:2500:100000);
8.  Len = Len1*Len2;
9.  Data = zeros(Len1,Len2);
10. row = 1;
11. for i2 = 100000:-2500:0
12.     tic
13.     num = 1;
14.     for j2 = 100000:-2500:0
15.         C = i2;
16.         C1 = j2;      Pm = model2_simulate(C,C1);
17.         Data(row,num) = Pm;

```

```

18.         num = num+1;
19.     end
20.     row = row+1;
21.     toc
22. end
23. save Data4.mat Data
24. bar3(Data)% 三维立方图
25.
26. for i = 1:10:Len1
27.     plot(Data(i,:));
28.     hold all
29. end
30. dData = Data(10:10:Len1,:);
31.
32. for j = 1:10:Len1
33.     plot(Data(:,j));
34.     hold all
35. end
36. jData = Data(:,10:10:Len2);
37.
38. % 固定旋转阻尼系数后对直线阻尼系数进行搜索求解
39. % left = 0; right = 100000;
40. C = 56645.95;
41. len = length(100000:-100:0);
42. res = zeros(1,len);
43. num = 1;
44. for i2 = 100000:-100:0
45.     tic
46.     C1 = i2;
47.     Pm = model2_simulate(C,C1);
48.     res(num) = Pm;
49.     num = num+1;
50.     toc
51. end
52. plot(res)

```