## PREFACIO.

Las investigaciones contenidas en este volumen pertenecen a la parte de la Matemática que trata de los números enteros, y a veces de las fracciones pero nunca de los irracionales. El análisis llamado indeterminado o Diofántico que muestra la forma de seleccionar de entre las infinitas soluciones de un problema indeterminado aquéllas que son enteras o al menos racionales (usualmente con la condición adicional que deben ser positivas) no es la disciplina a la cual nos referimos, sino más bien a una parte verdaderamente especial, relacionada con ella en términos generales como se relaciona el arte de reducir y resolver ecuaciones (Algebra) con el Análisis general. Tal como incluimos bajo el título *Análisis* todas las discusiones que involucran cantidades, así los enteros (y las fracciones en tanto que están determinadas por enteros) constituyen el objeto propio de la ARITMETICA. Sin embargo, lo que comúnmente es llamado Aritmética, escasamente se extiende más allá del arte de enumerar y calcular (i.e., expresar los números mediante símbolos idóneos, por ejemplo, por una representación decimal, y llevar a cabo operaciones aritméticas). A menudo incluye algunos temas que realmente no pertenecen a la Aritmética (como la teoría de logaritmos) y otros que no son propios de los enteros sino comunes a todas las cantidades. Se ve como resultado que se debe dividir la Aritmética en dos partes: la Aritmética Elemental y la Aritmética Superior. La segunda incluye todas las investigaciones generales acerca de las propiedades especiales de los enteros, y es la única que tratamos en este volumen.

Incluidos bajo el título Aritmética Superior están aquellos tópicos que Euclides trató en Libros VII y siguientes de los Elementos con la elegancia y el rigor habitual entre los antiguos, pero están limitados a los rudimentos de la ciencia. La célebre obra de Diofanto, dedicada totalmente a problemas indeterminados contiene muchos resultados que provocan una apreciación más allá de lo ordinario por la ingeniosidad y habilidad del autor, a causa de las dificultades que enfrentó y los sutiles artificios que usó, especialmente si consideramos las pocas herramientas que pudo usar. Sin embargo, demandan una cierta destreza y una manipulación hábil más que principios profundos, y dado que las cuestiones son muy especializadas y rara vez conducen a conclusiones más generales, se ve que el libro de Diofanto marca una época en la historia de las Matemáticas, más debido a que presenta los primeros trazos del arte característico del Algebra que a causa de que haya enriquecido la Aritmética Superior con nuevos descubrimientos. Se debe mucho más a los autores modernos, de los cuales aquellos pocos hombres de gloria inmortal, P. DE FERMAT, L. EULER, L. LAGRANGE, A. M. LEGENDRE (y otros pocos) abrieron la entrada al santuario de esta ciencia divina y revelaron abundantes riquezas dentro de él. No haremos aquí un recuento de los descubrimientos individuales de estos geómetras puesto que se pueden encontrar en el Prefacio del Apéndice que Lagrange agregó al Algebra de Euler y en el reciente volumen de Legendre (que citaremos luego). También citaremos muchos de ellos en el lugar apropiado dentro de estas Disquisiciones.

El propósito de este volumen, cuya publicación prometí hace cinco años, es divulgar mis investigaciones en la Aritmética Superior, tanto las iniciadas por aquellos días como las posteriores. Para que nadie se sorprenda porque comienzo casi desde el principio y trato nuevamente muchos resultados que ya han sido estudiados activamente por otros, debo explicar que cuando primero me encaminé a este tipo de investigaciones, a principios de 1795, no estaba al tanto de los modernos descubrimientos en el campo y no tenía los medios para descubrirlos. En efecto, ocupado en otro trabajo, me encontré con un extraordinario resultado aritmético (si no me equivoco, fue el teorema del artículo 108); puesto que lo consideré bellísimo en sí mismo y en vista de que sospeché su conexión con resultados aún más profundos, concentré en él todos mis esfuerzos, con el fin de entender los principios de los que dependía y para obtener una prueba rigurosa. Cuando tuve éxito en esto, me atrajeron tanto estos asuntos que no pude dejarlos. Así, mientras un resultado conducía a otro, había completado la mayor parte de lo que se presenta en las cuatro primeras secciones de esta obra antes que entrara en contacto con trabajos similares de otros geómetras. Una vez que estuve en capacidad de estudiar los escritos de estos hombres de genio, reconocí que la mayor parte de mis meditaciones habían sido agotadas en materias ya bien desarrolladas. Pero esto sólo me estimuló un mayor interés, y caminando sobre sus pasos intenté extender la Aritmética más allá, logrando resultados que están incorporados en las secciones V, VI y VII. Después comencé a considerar la publicación de los frutos de mis investigaciones y me dejé persuadir de no omitir ninguno de los primeros resultados, porque en ese momento no había ningún libro que pusiera juntos los trabajos de otros geómetras, dispersos como estaban dentro de los Comentarios de las Academias eruditas. Por otra parte, muchos de los resultados eran nuevos, la mayoría fueron tratados por nuevos métodos y los últimos resultados estaban tan ligados con los viejos que no podían explicarse sin repetir desde el inicio.

En el ínterin apareció un trabajo sobresaliente de un hombre a quien la Aritmética Superior ya debe mucho, "Essai d'une théorie des nombres" (Paris, año VI) de Legendre, donde él reune y sistematiza no solamente todo lo que había sido descubierto hasta esa fecha sino también muchos nuevos resultados propios. Ya que ese libro llegó a mis manos después de que gran parte de mi trabajo estaba levantado, no pude referirme a él en secciones análogas de mi libro. Sin embargo, me sentí obligado a agregar Notas Adicionales en algunos pasajes y confío que este comprensivo e ilustre hombre no se ofenderá.

La publicación de mi trabajo se vio estorbada por muchos obstáculos a lo largo de un período de cuatro años. Durante este tiempo no sólo continué investigaciones que ya había emprendido y aplazado para una fecha posterior de modo que el libro no fuera demasiado extenso, sino también acometí nuevas investigaciones. De modo semejante, muchos asuntos que asumí sólo a la ligera, porque un tratamiento más detallado parecía menos necesario (e.g., los contenidos de los artículos 37, 82 y siguientes, y otros), han sido desarrollados en mayor grado y han conducido a resultados más generales que parecen dignos de publicación (véase la Nota Adicional en artículo 306). Finalmente, ya que el libro se hizo mucho más extenso de lo que yo esperaba, debido al tamaño de la Sección V, acorté mucho de lo que primeramente intenté hacer y, en particular, omití toda la Sección *ocho* (aún cuando en ocasiones me refiero a ella en el presente trabajo; iba a contener un tratamiento general de las congruencias algebraicas de rango arbitrario). Todas estas cosas, que llenarían fácilmente un libro del tamaño de éste, se publicarán en la primera oportunidad.

En varias cuestiones difíciles he usado pruebas sintéticas y he suprimido el análisis que conduce a los resultados. Esto fue necesario por brevedad, una consideración que hubo que tener en cuenta tanto como fuera posible.

La teoría de la división de un círculo o de polígonos regulares, tratada en la Sección VII, *en sí misma* no pertenece a la Aritmética, pero los *principios* involucrados dependen exclusivamente de la Aritmética Superior. Los geómetras pueden sorprenderse de este hecho en sí, tanto como espero que estarán complacidos con los nuevos resultados que se derivan de este tratamiento.

Estas son las cosas acerca de las cuales quería prevenir al lector. No me corresponde a mí juzgar el trabajo mismo. Mi mayor esperanza es que él complazca a aquéllos que se interesan en el desarrollo de las ciencias, ya sea suministrando soluciones que ellos buscaban o abriendo el camino para nuevas investigaciones.