Se determina más exactamente la mitad de los caracteres que no pueden corresponder a ningún género.

263.

Ahora que hemos dado una nueva prueba del teorema fundamental, mostramos como distinguir a la mitad de los caracteres de un determinante no cuadrado dado que no puedan corresponder a ninguna de las formas propiamente primitivas (positivas). Podemos tratar esto más brevemente, dado que la base para nuestra discusión está ya contenida en los artículos 147–150. Sea e^2 el mayor cuadrado que divide al determinante dado D, y sea $D = D'e^2$, de tal modo que D' no incluye ningún factor cuadrado. Más aún, sean a, b, c, etc. todos los divisores impares primos de D'. De manera que D', excepto quizás por su signo, será un producto de estos números o el doble de este producto. Desígnese por Ω el conjunto de caracteres particulares Na, Nb, Nc, etc., tomado por sí mismo cuando $D' \equiv 1 \pmod{4}$; tomado junto con el carácter añadido 3, 4 cuando $D' \equiv 3$ y e es impar o $\equiv 2 \pmod{4}$; tomado junto con 3, 8 y 7, 8 cuando $D' \equiv 3$ y $e \equiv 0 \pmod{4}$; tomado ya sea junto con el carácter 3 *y* 5, 8 cuando $D' \equiv 2 \pmod{8}$ y e es impar, o bien con los dos caracteres 3, 8 y 5, 8 cuando e es par; finalmente tomado ya sea junto con el carácter 5 *y* 7, 8 cuando $D' \equiv 6 \pmod{8}$ y e es impar o con los dos caracteres 5, 8 y 7, 8 cuando e es par. Hecho esto, ningún género propiamente primitivo (positivo) de determinante D puede corresponder a ningún carácter completo que contenga un número impar de caracteres particulares Ω. En cada caso, los caracteres particulares, los cuales expresan una relación con aquellos divisores de D que no dividen a D', no contribuyen en nada a la posibilidad o imposibilidad de los géneros. A partir de la teoría de combinaciones, sin embargo, es fácil ver que, de esta manera, la mitad de todos los caracteres completos asignables están excluidos.

Demostramos esto de la siguiente manera. Por los principios de la sección previa, o por los teoremas que recién hemos demostrado en el artículo precedente, es claro que si p es un número primo (impar positivo) que no divide a D y que posee a uno de los caracteres rechazados correspondientes a éste, D' involucrará a un número impar de factores que son no residuos de p. De ahí que D' y D también serán no residuos de p. Más aún, el producto de números impares relativamente primos a D, ninguno de los cuales corresponde a alguno de los caracteres rechazados, no puede corresponder a un carácter cualquiera como tal. Y, recíprocamente, cualquier número impar positivo relativamente primo a D, que corresponda con uno de los caracteres rechazados, ciertamente implica algún factor primo de la misma calidad. Si, por este motivo, se da una forma propiamente primitiva (positiva) de determinante D

correspondiente a uno de los caracteres rechazados, D sería un no residuo de algún número impar positivo relativamente primo a éste y representable por tal forma. Pero esto es evidentemente inconsistente con el teorema del artículo 154.

Las clasificaciones en los artículos 231 y 232 dan buenos ejemplos de esto, y el lector puede aumentar su número a su gusto.

264.

De este modo, dado un determinante no cuadrado, todos los caracteres asignables estarán equitativamente distribuidos en dos tipos, P y Q, de tal manera que ninguna forma propiamente primitiva (positiva) puede corresponder a uno de los caracteres Q. En tanto para los caracteres P, de lo que sabemos hasta el momento, no hay nada que les impida el pertenecer a formas de esta especie. Se nota especialmente la siguiente proposición concerniente a estos tipos de caracteres, la cual puede ser fácilmente deducida a partir de los criterios concernientes a ellos. Si se compone un carácter de P con un carácter de Q (como en el artículo 246, si el carácter de Q también correspondiera a un género) se producirá un carácter de Q; pero si se componen dos caracteres de P o dos de Q, el carácter resultante pertenecerá a P. Con la ayuda de este teorema, se puede excluir también a la mitad de todos los caracteres asignables para géneros negativos e impropiamente primitivos de la siguiente manera.

I. Para un determinante negativo D, los géneros negativos serán contrarios a los géneros positivos en el sentido de que ninguno de los caracteres de P pertenecerá a un género negativo propiamente primitivo, pero todos esos géneros tendrán caracteres de Q. Pues cuando $D' \equiv 1 \pmod{4}$, $-D'$ será un número positivo de la forma $4n+3$, y así, entre los números a, b, c, etc. habrá un número impar de la forma $4n+3$ y -1 será un no residuo de cada uno de ellos. Se sigue en este caso que el carácter completo de la forma $(-1, 0, D)$ incluirá un número impar de caracteres particulares de Ω y así pertenecerá a Q; cuando $D' \equiv 3 \pmod{4}$, por una razón similar, entre los números a, b, c, etc. habrá, o bien ningún número de la forma $4n+3$, o bien dos o cuatro, etc. Y, dado que en este caso 3, 4 o 3, 8 o 7, 8 ocurrirán entre los caracteres particulares de la forma $(-1, 0, D)$, es claro que el carácter completo de esta forma también pertenecerá a Q. Se obtiene la misma conclusión con igual facilidad para los casos restantes de tal modo que la forma negativa $(-1, 0, D)$ siempre tendrá un carácter de Q. Pero dado que esta forma compuesta con cualquier otra forma negativa propiamente primitiva del mismo determinante producirá una forma positiva similar, es claro que ninguna forma propiamente primitiva negativa puede tener un carácter de P.

II. Se puede probar, de la misma manera, que los géneros impropiamente primitivos (positivos) tienen, ya sea, la misma propiedad o la opuesta de los géneros propiamente primitivos, dependiendo de si $D \equiv 1$ ó $\equiv 5 \pmod 8$. Pues en el primer caso también tendremos $D' \equiv 1 \pmod 8$, y se concluye que, entre los números a, b, c, etc., o bien no habrá números de la forma $8n+3$ y $8n+5$, o bien dos de ellos, o cuatro, etc. (esto es, el producto de cualquier número de enteros impares que incluya a un número impar de enteros de la forma $8n+3$ y $8n+5$, será siempre $\equiv 3$ o $\equiv 5 \pmod 8$), y el producto de todos los números a, b, c, etc. será igual a D' o a $-D'$): de este modo, el carácter completo de la forma $(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2})$ no involucrará a ningún carácter particular de Ω, o bien involucrará a dos o a cuatro, etc. y así pertenecerá a P. Ahora bien, dado que cualquier forma impropiamente primitiva (positiva) de determinante D puede ser considerada como si estuviera compuesta por $(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2})$ y por una forma propiamente primitiva (positiva) del mismo determinante, es obvio que ninguna forma impropiamente primitiva (positiva) puede tener a uno de los caracteres de Q en este caso. En el otro caso, cuando $D \equiv 5 \pmod 8$, sucede lo contrario, esto es D', el cual también será $\equiv 5$, ciertamente involucrará un número impar de factores de la forma $8n+3$ y $8n+5$. De este modo, el carácter de la forma $(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2})$, y también el carácter de cualquier forma impropiamente primitiva (positiva) de determinante D pertenecerá a Q y ningún género propiamente primitivo positivo puede tener a un carácter en P.

III. Finalmente, para un determinante negativo, los géneros negativos impropiamente primitivos son, de nuevo, contrarios a los géneros impropiamente primitivos. Ellos no pueden tener un carácter que pertenezca a P o a Q, dependiendo a si $D \equiv 1$ o $\equiv 5 \pmod 8$, o bien, dependiendo de si $-D$ es de la forma $8n+7$ u $8n+3$. Se deduce esto del hecho de que si componemos la forma $(-1,\ 0,\ D)$, cuyo carácter está en Q, con formas negativas impropiamente primitivas del mismo determinante, obtenemos formas positivas impropiamente primitivas. De este modo, cuando los caracteres de Q son excluidos de éstas, los caracteres de P deben también ser excluidos, y recíprocamente.

Un método especial para descomponer primos en dos cuadrados.

265.

Todo lo anterior está basado en las consideraciones de los artículos 257 y

258, concernientes al número de clases ambiguas. Hay muchas otras conclusiones muy dignas de atención, las cuales, para ser breve omitiremos, pero no podemos pasar sobre la siguiente, que es significativa por su elegancia. Para un determinante positivo p, que es un número primo de la forma $4n+1$, hemos mostrado que sólo hay una clase ambigua propiamente primitiva. Así pues, todas las formas ambiguas propiamente primitivas de este determinante serán propiamente equivalentes. Si, por este motivo, b es el entero positivo inmediatemente menor que $\sqrt{p}$ y $p-b^2=a'$, las formas $(1,\,b,\,-a')$, $(-1,\,b,\,a')$ serán propiamente equivalentes y, dado que ambas son formas reducidas, una estará contenida en el período de la otra. Si se asigna el índice 0 a la primera forma en su período, el índice de la última necesariamente será impar (dado que los primeros términos de estas dos formas tienen signos opuestos); supóngase, por tanto, que este índice es $=2m+1$. Es fácil ver que, si las formas de índices 1, 2, 3, etc. son respectivamente

$$(-a',\,b',\,a''),\qquad (a'',\,b'',\,-a'''),\qquad (-a''',\,b''',\,a''''),\qquad \text{etc.},$$

las siguientes formas corresponderán a los índices $2m$, $2m-1$, $2m-2$, $2m-3$, etc., respectivamente:

$$(a',\,b,\,-1),\qquad (-a'',\,b',\,a'),\qquad (a''',\,b'',\,-a''),\qquad (-a'''',\,b''',\,a'''),\qquad \text{etc.}$$

Así, si la forma de índice m es $(A,\,B,\,C)$, $(-C,\,B,\,-A)$ será la misma y, por ende, $C=-A$ y $p=B^2+A^2$. Por esta razón, cualquier número primo de la forma $4n+1$ puede ser descompuesto en dos cuadrados (deducimos esta proposición a partir de principios enteramente diferentes en el artículo 182). Y podemos encontrar esta descomposición por un método muy simple y completamente uniforme; esto es, mediante el cómputo del período de la forma reducida cuyo determinante es aquel número primo y cuyo primer término es 1, hacia una forma cuyos términos exteriores son iguales en magnitud pero opuestos en signo. Entonces, p.ej., para $p=233$ tenemos $(1,\,15,\,-8)$, $(-8,\,9,\,19)$, $(19,\,10,\,-7)$, $(-7,\,11,\,16)$, $(16,\,5,\,-13)$, $(-13,\,8,\,13)$ y $233=64+169$. Es claro que A es necesariamente impar (dado que $(A,\,B,\,-A)$ debe ser una forma propiamente primitiva) y que B es par. Dado que, para el determinante positivo p, el cual es un número primo de la forma $4n+1$, sólo una clase ambigua está contenida en el orden impropiamente primitivo, es claro que, si g es el número impar inmediatamente menor que $\sqrt{p}$ y $p-g^2=4h$, las formas reducidas impropiamente primitivas $(2,\,g,\,-2h)$, $(-2,\,g,\,2h)$ serán propiamente equivalentes y, por tanto, una estará contenida en el período de la otra. Así pues, por un razonamiento similar, se concluye que se puede encontrar una forma en el período de la forma $(2, g, -2h)$, la cual tiene términos exteriores de igual magnitud y signo opuesto. De este modo, podemos descomponer el número p en dos cuadrados. Los términos exteriores de esta forma serán pares, el de la mitad será impar; y dado que se sabe que un número primo puede ser descompuesto en dos cuadrados de sólo una manera, la forma que encontramos por este método será $(B, \pm A, -B)$ o $(-B, \pm A, B)$. Por eso, en nuestro ejemplo para $p = 233$ tendremos $(2, 15, -4)$, $(-4, 13, 16)$, $(16, 3, -14)$, $(-14, 11, 8)$, $(8, 13, -8)$ y $233 = 169 + 64$, como arriba.

UNA DIGRESION CONTENIENDO UN ESTUDIO DE FORMAS TERNARIAS.

266.

Hasta aquí hemos restringido nuestra discusión a funciones de segundo grado con *dos* incógnitas y no había necesidad de darles a ellas un nombre especial. Pero, evidentemente, este tema es sólo una sección del tratado general concerniente a las *funciones algebraicas racionales enteras y homogéneas con varias incógnitas y de varios grados.* Tales funciones, según su exponente, pueden ser apropiadamente divididas en *formas de segundo, tercero, cuarto grado, etc.*, y, según su número de incógnitas, en *formas binarias, ternarias, cuaternarias, etc.* De este modo, las formas que hemos venido considerando pueden ser llamadas simplemente *formas binarias de segundo grado.* Pero las funciones como

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

(donde A, B, C, D, E y F son enteros) son llamadas *formas ternarias de segundo grado*, y así sucesivamente. Hemos dedicado la presente sección al tratamiento de formas binarias de segundo grado. Pero hay muchas verdades bellas concernientes a estas formas cuya fuente real se indaga en la teoría de formas ternarias de segundo grado. Haremos, por tanto, una breve digresión dentro de esta teoría y trataremos especialmente de aquellos elementos que son necesarios para completar la teoría de las forma binarias, esperando, gracias a esto, complacer a los geómetras quienes se desilusionarían si ignoramos esta parte o la tratáramos de una manera menos natural. Debemos, sin embargo, reservar un tratamiento más exacto de este importante tema para otra ocasión porque su utilidad sobradamente excede los límites de este trabajo y porque, con esa esperanza, seríamos capaces de enriquecer la discusión con un desarrollo más profundo más adelante. En este momento excluiremos completamente de la discusión a las formas cuaternarias, quinarias, etc. y a todas las formas de grados más altos*). Es suficiente dirigir este ancho campo a la atención de los geómetras. Hay material amplio para el ejercicio de su genio, y la Aritmética trascendental seguramente se beneficiará con sus esfuerzos.

267.

Será de gran ventaja para nuestro entendimiento establecer un orden fijo para los valores desconocidos de la forma ternaria, justo como lo hicimos para formas binarias, de tal manera que podamos distinguir las *incógnitas primera, segunda* y *tercera* entre sí. Al disponer las distintas partes de una forma siempre observaremos el siguiente orden; fijaremos, en primer lugar, el término que involucra el cuadrado de la primera incógnita, luego el término que involucra el cuadrado de la segunda incógnita, el cuadrado de la tercera incógnita, el doble producto de la segunda por la tercera, el doble producto de la primera por la tercera, y luego el doble producto de la primera por la segunda. Finalmente, llamamos a los enteros por los cuales estos cuadrados y doble productos están multiplicados, en el mismo orden, los *coeficientes primero, segundo, tercero, cuarto, quinto,* y *sexto.* De este modo,

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

será una forma ternaria correctamente ordenada. La primera incógnita es x, la segunda x', la tercera x''. El primer coeficiente es a etc., el cuarto es b etc. Pero, dado que contribuye mucho a la brevedad, si no es siempre necesario denotar las incógnitas de una forma ternaria por letras especiales, también designaremos tal forma por

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

Poniendo

$$\begin{aligned} b^2 - a'a'' &= A, & b'^2 - aa'' &= A', & b''^2 - aa' &= A'' \\ ab - b'b'' &= B, & a'b' - bb'' &= B', & a''b'' - bb' &= B'' \end{aligned}$$

*) Por esta razón, siempre que hablamos simplemente acerca de las formas binarias y ternarias, queremos decir formas binarias o ternarias de *segundo grado.*

obtendremos otra forma

$$\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix} \cdots \quad F$$

a la que llamamos la *adjunta* de la *forma*

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \cdots \quad f.$$

De nuevo, si denotamos por brevedad al número

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' \quad \text{por} \quad D,$$

tendremos

$$\begin{matrix} B^2 - A'A'' = aD, & B'^2 - AA'' = a'D, & B''^2 - AA' = a''D \\ AB - B'B'' = bD, & A'B' - BB'' = b'D, & A''B'' - BB' = b''D \end{matrix}$$

y es obvio que la adjunta de la forma F será la forma

$$\begin{pmatrix} aD, & a'D, & a''D \\ bD, & b'D, & b''D \end{pmatrix}.$$

Las propiedades de la forma ternaria f dependen, primero, de la naturaleza del número D. Lo llamaremos el *determinante* de esta forma. De la misma manera, el determinante de la forma F será $= D^2$, esto es, igual al cuadrado del determinante de la forma f, de la cual es adjunta.

Así, p.ej., la adjunta de la forma ternaria

$$\begin{pmatrix} 29, & 13, & 9 \\ 7, & -1, & 14 \end{pmatrix} \text{ es } \begin{pmatrix} -68, & -260, & -181 \\ 217, & -111, & 133 \end{pmatrix}$$

y el determinante de cada una es $= 1$.

Excluiremos enteramente de nuestra siguiente investigación a las formas ternarias de determinante 0. Mostraremos en otro momento, cuando tratemos más completamente la teoría de formas ternarias, que éstas son formas ternarias sólo en *apariencia*. Ellas son de hecho equivalentes a formas binarias.

268.

Si una forma ternaria f de determinante D y con incógnitas x, x', x'' (la primera $= x$ etc.) es transformada en una forma ternaria g de determinante E e incógnitas y, y', y'' por medio de una sustitución tal como ésta

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + \beta y' + \gamma y'' \\ x' &= \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y'' \\ x'' &= \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y'' \end{aligned}$$

donde los nueve coeficientes α, β, etc. son todos enteros, entonces por brevedad, ignoraremos las incógnitas y diremos simplemente que f es transformada en g por medio de la sustitución (S)

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

y que f *implica a* g o bien que g está *contenida* en f. A partir de esta suposición se seguirán seis ecuaciones para los seis coeficientes en g, pero es innecesario transcribirlas aquí. Y a partir de éstas, resultan las siguientes conclusiones:

I. Si por brevedad denotamos al número

$$\alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' \qquad \text{por } k$$

encontramos, luego del cálculo adecuado, que $E = k^2 D$. De este modo, D divide a E y el cociente es un cuadrado. Es claro que, con respecto a las transformaciones de formas ternarias, el número k es similar al número $\alpha\delta - \beta\gamma$ del artículo 157 con respecto a las transformaciones de formas binarias, a saber, la raíz cuadrada del cociente de los determinantes. Podemos conjeturar que, en este caso, una diferencia del signo de k indica una diferencia esencial entre transformaciones propias e impropias y sus implicaciones. Pero si examinamos la situación más de cerca, vemos que f es transformada en g por medio de esta sustitución también

$$\begin{matrix} -\alpha, & -\beta, & -\gamma \\ -\alpha', & -\beta', & -\gamma' \\ -\alpha'', & -\beta'', & -\gamma''. \end{matrix}$$

En la ecuación para k, poniendo $-\alpha$ por α, $-\beta$ por β, etc., obtendremos $-k$. De esta manera, esta sustitución sería similar a la sustitución S y cualquier forma ternaria que implique a otra de una manera, también implicaría la misma forma de la otra manera. Así que abandonaremos enteramente esta distinción, dado que no es de ningún uso para formas ternarias.

II. Si denotamos por F y G las formas que son adjuntas a f y a g respectivamente, los coeficientes en F estarán determinados por los coeficientes en f, los coeficientes en G por los valores de los coeficientes de la forma g a partir de la ecuación que es proveida por la sustitución S. Si expresamos los coeficientes de la forma f por letras y comparamos los valores de los coeficientes de las formas F y G, es fácil ver que F implica a G y que es transformada en G por medio de la sustitución (S')

$$\begin{array}{ccc} \beta'\gamma''-\beta''\gamma', & \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha', & \alpha'\beta''-\alpha''\beta' \\ \beta''\gamma-\beta\gamma'', & \gamma''\alpha-\gamma\alpha'', & \alpha''\beta-\alpha\beta'' \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma, & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & \alpha\beta'-\alpha'\beta. \end{array}$$

Dado que el cálculo no presenta ninguna dificultad, no lo escribiremos.

III. Por medio de la sustitución (S'')

$$\begin{array}{ccc} \beta'\gamma''-\beta''\gamma', & \beta''\gamma-\beta\gamma'', & \beta\gamma'-\beta'\gamma \\ \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha', & \gamma''\alpha-\gamma\alpha'', & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha \\ \alpha'\beta''-\alpha''\beta', & \alpha''\beta-\alpha\beta'', & \alpha\beta'-\alpha'\beta. \end{array}$$

g será transformada en la misma forma que f por medio de la sustitución

$$\begin{array}{ccc} k, & 0, & 0 \\ 0, & k, & 0 \\ 0, & 0, & k \end{array}$$

Esta es la forma que surge de multiplicar cada uno de los coeficientes de la forma f por k^2. Designaremos esta forma por f'.

IV. Exactamente de la misma manera, probamos que, por medio de la sustitución (S''')

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{array}$$

la forma G será transformada en la forma que surge a partir de F, multiplicando cada coeficiente por k^2. Designaremos esta forma por F'.

Diremos que la sustitución S''' surge a partir de la *transposición* de la sustitución S, y, manifiestamente, obtendremos S de nuevo a partir de la transposición de la sustitución S'''; de la misma manera, cada una de las sustituciones S', S'' se produce de la transposición de la otra. Podemos llamar a la sustitución S' como la *adjunta* de la sustitución S, y la sustitución S'' será la adjunta de la sustitución S'''.

269.

Si la forma f implica a g y g también implica a f, entonces f y g se llaman formas *equivalentes*. En este caso D divide a E, pero E también divide a D y así $D = E$. En el sentido contrario, si la forma f implica a una forma g del mismo determinante, estas formas serán equivalentes. Pues (si usamos los mismos símbolos del artículo previo excepto por el caso cuando $D = 0$) tenemos $k = \pm 1$ y así la forma f', en la cual g es transformada por medio de la sustitución S'', es idéntica a f y f está contenida en g. Más aún, en este caso las formas F y G, las cuales son adjuntas a f y a g, serán equivalentes entre sí, y la última será transformada en la primera por medio de la sustitución S'''. Finalmente, en el sentido contrario, si *se supone* que las formas F y G son equivalentes y que la primera es transformada en la segunda por medio de la sustitución T, las formas f y g también serán equivalentes, y f será transformada en g por medio de la sustitución adjunta a T y g en f por medio de la sustitución que surge de la transposición de la sustitución T. Pues, por estas dos sustituciones, respectivamente, la forma adjunta a F será transformada en la forma adjunta a G y viceversa. Estas dos formas, sin embargo, vienen de f y de g al multiplicar todos los coeficientes por D; así que se concluye que f es transformada en g y g en f, respectivamente, por estas mismas sustituciones.

270.

Si la forma ternaria f implica a la forma ternaria f' y f' implica a la forma f'', entonces f también implicará a f''. Pues es fácil observar que si f es transformada en f' por medio de la sustitución

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \end{matrix}$$

y f' en f'' por medio de la sustitución

$$\begin{matrix} \delta, & \varepsilon, & \zeta \\ \delta', & \varepsilon', & \zeta' \\ \delta'', & \varepsilon'', & \zeta'', \end{matrix}$$

entonces f será transformada en f'' por medio de la sustitución

$$\begin{matrix} \alpha\delta+\beta\delta'+\gamma\delta'', & \alpha\varepsilon+\beta\varepsilon'+\gamma\varepsilon'', & \alpha\zeta+\beta\zeta'+\gamma\zeta'' \\ \alpha'\delta+\beta'\delta'+\gamma'\delta'', & \alpha'\varepsilon+\beta'\varepsilon'+\gamma'\varepsilon'', & \alpha'\zeta+\beta'\zeta'+\gamma'\zeta'' \\ \alpha''\delta+\beta''\delta'+\gamma''\delta'', & \alpha''\varepsilon+\beta''\varepsilon'+\gamma''\varepsilon'', & \alpha''\zeta+\beta''\zeta'+\gamma''\zeta''. \end{matrix}$$

Y en el caso donde f es equivalente a f' y f' a f'', la forma f también será equivalente a la forma f''. Es inmediatamente obvio cómo estos teoremas funcionan con una serie de varias formas.

271.

Es aparente, a partir de lo que hemos visto, que las formas ternarias, al igual que las binarias, pueden ser distribuidas en *clases*, asignando formas equivalentes a la misma clase y formas no-equivalentes a clases diferentes. Las formas con determinantes diferentes, ciertamente por lo anterior, pertenecerán a clases diferentes y, por tanto, habrá un número infinito de clases de formas ternarias. Las formas ternarias de un mismo determinante a veces producen un número grande de clases y a veces un número pequeño, pero es una propiedad importante de estas formas el que *todas las formas de un mismo determinante dado siempre constituyen un número finito de clases.* Antes de que discutamos este teorema importante en detalle, debemos explicar la siguiente diferencia esencial que se obtiene entre formas ternarias.

Ciertas formas ternarias están de tal manera construidas que pueden representar indistintamente números positivos y negativos, p.ej. la forma $x^2+y^2-z^2$. Se llamarán entonces *formas indefinidas.* Por otro lado, hay formas que no pueden representar a números negativos sino (excepto por el cero, el cual se obtiene haciendo cada incógnita $=0$) solamente números positivos, p.ej. $x^2+y^2+z^2$. Se llamarán *formas positivas.* Finalmente hay otras que no pueden representar números positivos, p.ej. $-x^2-y^2-z^2$. Estas serán llamadas *formas negativas.* Las formas positivas y negativas son ambas llamadas *formas definidas.* Ahora daremos un criterio general para determinar cómo distinguir estas propiedades de las formas.

Si se multiplica la forma ternaria

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

de determinante D por a, y si los coeficientes de la forma que es adjunta a f se denotan como en el artículo 267 por A, A', A'', B, B', B'', tenemos

$$(ax + b''x' + b'x'')^2 - A''x'^2 + 2Bx'x'' - A'x''^2 = g$$

y, multiplicando por A', obtenemos

$$A'(ax + b''x' + b'x'')^2 - (A'x'' - Bx')^2 + aDx'^2 = h.$$

Si ambos A' y aD son números negativos, todos los valores de h serán negativos, y evidentemente la forma f puede representar sólo números cuyo signo es opuesto al de aA', v.g., idénticos al signo de a u opuestos al signo de D. En este caso, f será una forma definida y será positiva o negativa, dependiendo de si a es positivo o negativo, o bien, según sea D negativo o positivo.

Pero si aD, A' son ambos positivos, o bien, uno es positivo y el otro negativo (ninguno $= 0$), h puede producir, ya sea, cantidades positivas o negativas mediante una escogencia adecuada de x, x' y x''. Así pues, en este caso f puede producir valores tanto del mismo signo como del signo opuesto a aA', y será una forma indefinida.

Para el caso donde $A' = 0$ pero a no es $= 0$, tenemos

$$g = (ax + b''x' + b'x'')^2 - x'(A''x' - 2Bx'').$$

Dándole a x' un valor arbitrario (diferente de 0) y tomando x'' de tal manera que $\frac{A''x'}{2B} - x''$ tenga el mismo signo que Bx' (esto puede lograrse dado que B no puede ser $= 0$ pues tendríamos $B^2 - A'A'' = aD = 0$, y $D = 0$, o sea el caso excluido), $x'(A''x' - 2Bx'')$ será una cantidad positiva, y luego x puede ser escogida para hacer de g una cantidad negativa. Manifiestamente todos estos valores pueden ser escogidos de tal manera que, si se desea, todos sean enteros. Finalmente, no importa qué valores sean dados a x' y a x'', x puede ser tomado tan grande como para hacer a g positiva. De modo que en este caso f será una forma indefinida.

Finalmente, si $a = 0$ resulta

$$f = a'x'^2 + 2bx'x'' + a''x''^2 + 2x(b''x' + b'x'').$$

Ahora, si tomamos x' y x'' arbitrariamente, pero de tal manera que $b''x' + b'x''$ no sea $= 0$ (obviamente esto puede hacerse a menos que ambos b' y b'' sean $= 0$; pero entonces tendríamos $D = 0$), es fácil ver que x puede ser escogido de tal modo que f tendrá tanto valores positivos como negativos. Y en este caso también f será una forma indefinida.

De la misma manera que determinamos la propiedad de la forma f a partir de los números aD y A', también pueden usarse aD y A'', de modo que la forma f sea definida si ambos aD y A'' son negativos; indefinida en todos los otros casos. Se puede, para el mismo propósito, considerar los números $a'D$ y A, o bien $a'D$ y A'', o bien $a''D$ y A, o finalmente $a''D$ y A'.

A raíz de todo esto se sigue que, en una forma definida, los seis números A, A', A'', aD, $a'D$ y $a''D$ son todos negativos. Para la forma positiva, a, a' y a'' serán positivos y D negativo; para la forma negativa, a, a' y a'' serán negativos y D positivo. De ahí que todas las formas ternarias con un determinante positivo dado pueden ser distribuidas en formas negativas y formas indefinidas; todas aquéllas con un determinante negativo, en formas positivas y formas indefinidas; y no hay formas positivas con un determinante positivo ni formas negativas con un determinante negativo. Y es fácil ver que la adjunta de una forma definida es siempre definida y *negativa*, y la adjunta de una forma indefinida es siempre indefinida.

Dado que todos los números que son representables por una forma ternaria dada pueden también ser representados por todas las formas que son equivalentes a ella, las formas ternarias de la misma clase son todas indefinidas o todas positivas o todas negativas. Así es legítimo transferir estas designaciones también a clases enteras.

272.

Trataremos el teorema propuesto en el artículo previo, el cual dice que todas las formas ternarias de un determinante dado pueden ser distribuidas en un número *finito* de clases, por un método análogo al que usamos en el caso de las formas binarias. Primero mostraremos cómo cada forma ternaria puede ser reducida a una forma más simple y luego mostraremos que el número de las formas más simples (que resulta de tales reducciones) es finito para un determinante dado. Supongamos, en general, que la forma dada es la forma ternaria $f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ de determinante D (diferente de cero) y que es transformada en la forma equivalente $g = \begin{pmatrix} m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix}$ por medio de la sustitución (S):

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma''. \end{matrix}$$

Nos resta determinar α, β, γ, etc. de tal modo que g sea más simple que f. Sean $\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} M, & M', & M'' \\ N, & N', & N'' \end{pmatrix}$ las formas adjuntas a f y g respectivamente, y designémoslas por F y G. Entonces, por el artículo 269, F será transformada en G por medio de una sustitución que es adjunta a S, y G será transformada en F por medio de una sustitución derivada de la transposición de S. El número

$$\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma - \alpha\beta''\gamma' - \alpha'\beta\gamma''$$

debe ser $= +1$ o bien $= -1$. Le denotaremos por k. Observamos lo siguiente:

I. Si tenemos $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$, $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 1$ entonces

$$m = a\alpha^2 + 2b'\alpha\alpha' + a'\alpha'^2, \qquad m' = a\beta^2 + 2b''\beta\beta' + a'\beta'^2, \quad m'' = a''$$
$$n = b\beta' + b'\beta, \quad n' = b\alpha' + b'\alpha, \quad n'' = a\alpha\beta + b''(\alpha\beta' + \beta\alpha') + a'\alpha'\beta'$$

Además $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ debe ser $= +1$ o bien $= -1$. Por tanto, es evidente que la forma binaria $(a,\, b'',\, a')$, cuyo determinante es A'', será transformada por medio de la sustitución α, β, α', β' en la forma binaria $(m,\, n'',\, m')$ de determinante M'' y, dado que $\alpha\beta' - \beta\alpha' = \pm 1$, ellas serán equivalentes y, por ende, $M'' = A''$. Esto también puede ser confirmado directamente. A menos que, por esta razón, $(a,\, b'',\, a')$ ya sea la forma más simple en esta clase, podemos determinar α, β, α', β' de tal manera que $(m,\, n'',\, m')$ sea una forma más simple. A partir de la teoría de la equivalencia de formas binarias, es fácil concluir que esto puede hacerse de tal modo que m no sea mayor que $\sqrt{-\frac{4}{3}A''}$ si A'' es negativo, o bien, no mayor que $\sqrt{A''}$ cuando A'' es positivo o de tal manera que $m = 0$ cuando $A'' = 0$. Por ello, en todos los casos el valor (absoluto) de m puede hacerse menor o igual a $\sqrt{\pm\frac{4}{3}A''}$. De esta manera, la forma f es reducida a otra con un primer coeficiente menor, si esto es posible. Y la forma que es adjunta a ésta tiene el mismo tercer coeficiente que la forma F que es adjunta a f. Esta es la *primera reducción.*

II. Pero si $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$, resulta $k = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \pm 1$; así que la sustitución que es adjunta a S será

$$\begin{matrix} \pm 1, & 0, & 0 \\ 0, & \gamma'', & -\beta'' \\ 0, & -\gamma', & \beta' \end{matrix}$$

y por esta sustitución F será transformada en G y tendremos

$$\begin{aligned} m =& a, \quad n' = b'\gamma'' + b''\gamma', \quad n'' = b'\beta'' + b''\beta' \\ m' =& a'\beta'^2 + 2b\beta'\beta'' + a''\beta''^2 \\ m'' =& a'\gamma'^2 + 2b\gamma'\gamma'' + a''\gamma''^2 \\ n =& a'\beta'\gamma' + b(\beta'\gamma'' + \gamma'\beta'') + a''\beta''\gamma'' \\ M' =& A'\gamma''^2 - 2B\gamma'\gamma'' + A''\gamma'^2 \\ N =& -A'\beta''\gamma'' + B(\beta'\gamma'' + \gamma'\beta'') - A''\beta'\gamma' \\ M'' =& A'\beta''^2 - 2B\beta'\beta'' + A''\beta'^2 \end{aligned}$$

De este modo, es claro que la forma binaria (A'', B, A'), cuyo determinante es Da, será transformada por medio de la sustitución β', $-\gamma'$, $-\beta''$, γ'' en la forma (M'', N, M') de determinante Dm, y por tanto (dado que $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = \pm 1$, o bien, dado que $Da = Dm$) es equivalente a ella. A menos que, por esta razón, (A'', B, A') ya sea la forma más simple de su clase, los coeficientes β', γ', β'', γ'' pueden ser determinados de tal manera que (M'', N, M') es más simple. Y esto puede lograrse de tal modo que, sin distingo de signo, M'' no es mayor que $\sqrt{\pm\frac{4}{3}Da}$. De este manera, la forma f es reducida a otra con el mismo primer coeficiente. Pero la forma que es adjunta a ésta tendrá, si es posible, un menor tercer coeficiente que la forma F, la cual es adjunta a f. Esta es la *segunda reducción.*

III. Ahora bien, si ni la primera ni la segunda reducción es aplicable a la forma ternaria f, es decir, si f no puede ser transformada por ninguna de ellas hacia una forma más simple; entonces necesariamente a^2 será $<$ o $= \frac{4}{3}A''$, y A''^2 será, o bien $<$ o $= \frac{4}{3}aD$, sin distingo de signo. Así, a^4 será $<$ o $= \frac{16}{9}A''^2$, de modo que a^4 será $<$ o $= \frac{64}{27}aD$, a^3 $<$ o $= \frac{64}{27}D$, y a $<$ o $= \frac{4}{3}\sqrt[3]{D}$; y, de nuevo, A''^2 será $<$ o $= \frac{16}{9}\sqrt[3]{D^4}$ y A'' $<$ o $= \frac{4}{3}\sqrt[3]{D^2}$. De ahí que, toda vez que a o A'' exceda estos límites, una u otra de las reducciones previas necesariamente se aplica a la forma f. Pero esta conclusión no puede ser invertida, dado que a menudo ocurre que el primer coeficiente y el tercer coeficiente de la forma adjunta de una forma ternaria están ya por debajo de esos límites; sin embargo puede hacerse más simple por una u otra de las reducciones.

IV. Si ahora aplicamos alternativamente la primera y segunda reducción a una forma ternaria dada de determinante D, es decir, si aplicamos la primera o la segunda, entonces al resultado le aplicamos la segunda o la primera, y al resultado de esto de nuevo la primera o la segunda, etc., es claro que eventualmente arribaremos a una forma a la cual ninguna puede ser aplicada. Pues la magnitud absoluta de los primeros coeficientes de las formas en sí, y de los terceros coeficientes de las formas adjuntas se mantienen igual y luego decrecen de modo que la progresión eventualmente parará; de otro modo, tendríamos dos series infinitas de números continuamente decrecientes. Tenemos por tanto este notable teorema: *Cualquier forma ternaria de determinante D puede ser reducida a una forma equivalente con la propiedad de que su primer coeficiente no sea mayor que $\frac{4}{3}\sqrt[3]{D}$ y que el tercer coeficiente de la forma adjunta no sea mayor que $\frac{4}{3}\sqrt[3]{D^2}$, sin distinción de signo, siempre y cuando la forma propuesta no tenga ya estas propiedades.* En lugar del primer coeficiente de la forma f y del tercer coeficiente de la forma adjunta, podríamos haber considerado exactamente de la misma manera o el primer coeficiente de la forma y el segundo de su adjunta; o el segundo de la forma y el primero o tercero de su adjunta; o el tercero de la forma y el primero o segundo de su adjunta. Eventualmente llegaremos a la misma conclusión; pero es más ventajoso usar un método consistente de modo que las operaciones involucradas pueden ser reducidas hacia un algoritmo fijo. Observamos finalmente que si hubiéramos separado las formas en definidas e indefinidas, habríamos fijado límites inferiores para los dos coeficientes que hemos estado tratando; pero esto no es necesario para nuestros propósitos.

273.

Estos ejemplos ilustran los principios previos.

Ejemplo 1. Sea $f = \begin{pmatrix} 19, & 21, & 50 \\ 15, & 28, & 1 \end{pmatrix}$, luego $F = \begin{pmatrix} -825, & -166, & -398 \\ 257, & 573, & -370 \end{pmatrix}$ y $D = -1$. Dado que $(19, 1, 21)$ es una forma binaria reducida y no hay otra equivalente a ella que tenga su primer término menor que 19, la primera reducción no es aplicable aquí; la forma binaria $(A'', B, A') = (-398, 257, -166)$, por la teoría de la equivalencia de formas binarias, puede ser transformada en una equivalente más simple $(-2, 1, 10)$ por medio de la sustitución 2, 7, 3, 11. Entonces, haciendo

$\beta' = 2$, $\gamma' = -7$, $\beta'' = -3$, $\gamma'' = 11$ y aplicando la sustitución

$$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & -7 \\ 0, & -3, & 11 \end{Bmatrix}$$

a la forma f, ésta será transformada en $\begin{pmatrix} 19, & 354, & 4769 \\ -1299, & 301, & -82 \end{pmatrix} \ldots f'$. El tercer coeficiente de la forma adjunta es -2, y en este aspecto, f' es más simple que f.

La primera reducción puede ser aplicada a la forma f'. Esto es, dado que la forma binaria $(19, -82, 354)$ es transformada en $(1, 0, 2)$ por medio de la sustitución $13, 4, 3, 1$, la sustitución

$$\begin{Bmatrix} 13, & 4, & 0 \\ 3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$$

puede ser aplicada a la forma f' y será transformada en $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 4769 \\ -95, & 16, & 0 \end{pmatrix} \ldots f''$.

Puede aplicarse nuevamente la segunda reducción a la forma f'', cuya adjunta es $\begin{pmatrix} -513, & -4513, & -2 \\ -95, & 32, & 1520 \end{pmatrix}$. Esto es $(-2, -95, -4513)$ será transformada en $(-1, 1, -2)$ por medio de la sustitución $47, 1, -1, 0$; así que la sustitución

$$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 47, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \end{Bmatrix}$$

puede ser aplicada a f'' y será transformada en $\begin{pmatrix} 1, & 257, & 2 \\ 1, & 0, & 16 \end{pmatrix} \ldots f'''$. El primer coeficiente de esta forma no puede ser reducido más de esto por medio de la primera reducción, ni puede ser el tercer coeficiente de la adjunta reducido más por medio de la segunda reducción.

Ejemplo 2. Sea $f = \begin{pmatrix} 10, & 26, & 2 \\ 7, & 0, & 4 \end{pmatrix}$, cuya adjunta es $\begin{pmatrix} -3, & -20, & -244 \\ 70, & -28, & 8 \end{pmatrix}$ y cuyo determinante es $= 2$. Aplicando alternativamente la segunda y la primera reducción

por la sustitución	transformamos a	en
$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 4, & -1 \end{Bmatrix}$	f	$\begin{pmatrix} 10, & 2, & 2 \\ -1, & 0, & -4 \end{pmatrix} = f'$
$\begin{Bmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & -2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$	f'	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 2 \\ 2, & -1, & 0 \end{pmatrix} = f''$
$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 2, & -1 \end{Bmatrix}$	f''	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 2 \\ -2, & 1, & -2 \end{pmatrix} = f'''$
$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$	f'''	$\begin{pmatrix} 0, & 2, & 2 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix} = f''''$

La forma f'''' no puede ser reducida más por medio de la primera o de la segunda reducción.

274.

Cuando se trata de una forma ternaria, donde su primer coeficiente y el tercer coeficiente de la forma adjunta han sido reducidos lo más posible por medio de los métodos precedentes, el siguiente método suministrará una reducción adicional.

Usando la misma notación que en el artículo 272 y haciendo $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$, $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 1$, a saber, usando la sustitución

$$\begin{matrix} 1, & \beta, & \gamma \\ 0, & 1, & \gamma' \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}$$

tendremos

$$m = a, \quad m' = a' + 2b''\beta + a\beta^2, \quad m'' = a'' + 2b\gamma' + 2b'\gamma + a\gamma^2 + 2b''\gamma\gamma' + a'\gamma'^2$$
$$n = b + a'\gamma' + b'\beta + b''(\gamma + \beta\gamma') + a\beta\gamma, \quad n' = b' + a\gamma + b''\gamma', \quad n'' = b'' + a\beta$$

y luego

$$M'' = A'', \quad N = B - A''\gamma', \quad N' = B' - N\beta - A''\gamma.$$

Tal transformación no cambia los coeficientes a y A'', los cuales fueron disminuidos por las reducciones anteriores. Resta, por tanto, encontrar una determinación adecuada de β, γ y γ' de tal modo que los coeficientes restantes sean disminuidos. Observamos primero que si $A'' = 0$ podemos suponer también que $a = 0$, pues si a no fuera $= 0$, la primera reducción sería aplicable una vez más, dado que cualquier forma binaria de determinante 0 es equivalente a una forma como $(0,\, 0,\, h)$ y su primer término es $= 0$ (véase art. 215). Por una razón completamente similar, es legítimo suponer que A'' también sería $= 0$ si $a = 0$, y por tanto, ya sea, ambos o ninguno de los números a y A'' serán 0.

En el segundo caso, β, γ y γ' pueden ser determinados de tal modo que, sin distinción de signo, n'', N, N' no son mayores que $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}A''$, $\frac{1}{2}A''$ respectivamente. De manera que en el primer ejemplo del artículo previo la última forma $\begin{pmatrix} 1, & 257, & 2 \\ 1, & 0, & 16 \end{pmatrix}$, cuya adjunta es $\begin{pmatrix} -513, & -2, & -1 \\ 1, & -16, & 32 \end{pmatrix}$ será transformada por medio de la sustitución

$$\begin{Bmatrix} 1, & -16, & 16 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$$

en la forma $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \ldots f'''''$, cuya adjunta es $\begin{pmatrix} -1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.

En el caso donde $a = A'' = 0$ y, por tanto, también $b'' = 0$ tendremos

$$m = 0, \quad m' = a', \quad m'' = a'' + 2b\gamma' + 2b'\gamma + a'\gamma'^2$$
$$n = b + a'\gamma' + b'\beta, \quad n' = b', \quad n'' = 0$$

y luego

$$D = a'b'^2 = m'n'^2$$

Es fácil ver que β y γ' pueden ser determinados de tal manera que n será igual al residuo absolutamente mínimo de b relativo al módulo que sea el máximo común divisor de a' y b'; a saber, de tal modo que n no sea mayor que la mitad de su divisor, sin considerar el signo, y n será 0 toda vez que a' y b' sean relativamente primos. Si β y γ' son determinados de esta manera, el valor de γ puede ser tomado tal que m'' no sea mayor que b' sin importar el signo. Esto, por supuesto, sería imposible si $b' = 0$, pero entonces D sería 0, el cual es el caso excluido. Así que para la última forma en el segundo ejemplo del artículo previo, $n = -2 - \beta + 2\gamma'$, y poniendo $\beta = -2$, $\gamma' = 0$, tendremos $n = 0$; más aún $m'' = 2 - 2\gamma$, y poniendo $\gamma = 1$ entonces $m'' = 0$. Así tenemos la sustitución

$$\begin{Bmatrix} 1, & -2, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$$

mediante la cual aquella forma será transformada en $\begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix} \ldots f'''''$.

275.

Si se tiene una serie de formas ternarias equivalentes f, f', f'', f''', etc. y las transformaciones de cada una de estas formas en su sucesor: entonces, a partir de la transformación de la forma f en f' y de la forma f' en f'', por el artículo 270 podemos deducir una transformación de la forma f en f''; a partir de esto y de la transformación de la forma f'' en f''' resultará una transformación de la forma f en f''', etc. y por medio de este proceso se puede encontrar la transformación de la forma f en cualquier otra forma de la serie. Y dado que, a partir de la transformación de la forma f en cualquier otra forma equivalente g se puede deducir una transformación de la forma g en f (S'' a partir de S, art. 268, 269), se puede, de esta manera, producir una transformación de cualquiera de la serie f', f'', etc. en la primera forma f. Así para las formas del primer ejemplo del artículo previo encontramos las sustituciones

$$\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 13, & 4, & 0 & 13, & 188, & -4 & 13, & -20, & 16 \\ 6, & 2, & -7 & 6, & 87, & -2 & 6, & -9, & 7 \\ -9, & -3, & 11 & -9, & -130, & 3 & -9, & 14, & -11 \end{array}$$

por medio de la cual f será transformada en f'', f''', f'''' respectivamente y, a partir de la última sustitución, podemos derivar

$$\begin{Bmatrix} 1, & 4, & 4 \\ 3, & 1, & 5 \\ 3, & -2, & 3 \end{Bmatrix}$$

mediante la cual f''' se transformará en f. Similarmente, tenemos las siguientes sustituciones para el ejemplo 2 del artículo anterior.

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1, & -1, & 1 & 2, & -3, & -1 \\ -3, & 4, & -3 & 3, & 1, & 0 \\ 10, & -14, & 11 & 2, & 4, & 1 \end{array}$$

mediante las cuales la forma $\binom{10,\ 26,\ 2}{7,\ \ 0,\ 4}$ se transforma en $\binom{0,\ \ \ 2,\ 0}{0,\ -1,\ 0}$ y vice versa.

276.

Teorema. *El número de clases entre las cuales se distribuyen todas las formas ternarias de un determinante dado es siempre finito.*

Demostración. I. El número de todas las formas $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ de un determinante dado D en las cuales $a = 0$, $b'' = 0$, b no es mayor que la mitad del valor del máximo común divisor de a' y b', y a'' no es mayor que b', es obviamente finito. Pues, como debemos tener $a'b'^2 = D$, los únicos valores posibles de b' son $+1$, -1, y las raíces de cuadrados que son divisores de D (si hay otros diferentes de 1) tomadas positiva y negativamente. El número de ellos es finito. Para cada uno de los valores de b', sin embargo, el valor de a' es dado, y por lo tanto el número de valores de b y de a'' es finito.

II. Suponga que a no es $= 0$ ni mayor que $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\pm D}$; que $b''^2 - aa' = A''$ y que no es $= 0$ ni mayor que $\frac{4}{3}\sqrt[3]{D^2}$; que b'' no es mayor que $\frac{1}{2}a$; que $ab - b'b'' = B$ y $a'b' - bb'' = B'$ y que ninguno es mayor que $\frac{1}{2}A''$. En este caso un argumento similar al anterior muestra que el número de todas las formas $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ de determinante D es finito. Pues el número de todas las combinaciones de los valores de a, b'', A'', B y B' será finito, y cuando se han determinado, los coeficientes restantes de la forma, a saber, a', b, b', a'' y los coeficientes de la forma adjunta

$$b^2 - a'a'' = A, \quad b'^2 - aa'' = A', \quad a''b'' - bb' = B''$$

estarán determinados por las siguientes ecuaciones:

$$a' = \frac{b''^2 - A''}{a}, \quad A' = \frac{B^2 - aD}{A''}, \quad A = \frac{B'^2 - a'D}{A''}, \quad B'' = \frac{BB' + b''D}{A''}$$

$$b = \frac{AB - B'B''}{D} = -\frac{Ba' + B'b''}{A''}, \quad b' = \frac{A'B' - BB''}{D} = -\frac{Bb'' + B'a}{A''}$$

$$a'' = \frac{b'^2 - A'}{a} = \frac{b^2 - A}{a'} = \frac{bb' + B''}{b''}$$

Ahora, cuando se han obtenido todas las formas, si escogemos de todas las combinaciones, los valores de a, b'', A'', B y B' que hacen que a', a'', b y b'' sean enteros, habrá un número finito de ellos.

III. Por lo tanto, todas las formas en I y II constituyen un número finito de clases, y si algunas formas son equivalentes resultarán menos clases que formas. Por las investigaciones anteriores, cualquier forma ternaria de determinante D es necesariamente equivalente a alguna de estas formas, i.e., pertenece a alguna de las clases definidas por éstas, o sea, estas clases incluirán todas las formas de determinante D, i.e., todas las formas ternarias de determinante D estarán distribuidas entre un número finito de clases. *Q. E. D.*

277.

Las reglas para generar todas las formas en I y II del artículo anterior siguen en forma natural de su definición; por lo tanto basta con dar algunos ejemplos. Para $D = 1$, las reglas I generan las siguientes seis (tomando uno de los signos dobles a la vez):

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, 0 \\ 0, \pm 1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0, & 1, \pm 1 \\ 0, \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$$

Para las formas II, a y A'' pueden asumir únicamente los valores $+1$ y -1, y por lo tanto para cada una de las combinaciones resultantes b'', B y B' deben ser $= 0$ y obtenemos las formas

$$\begin{pmatrix} 1, -1, 1 \\ 0, \quad 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, 1, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, 1, -1 \\ 0, 0, \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, -1, -1 \\ 0, \quad 0, \quad 0 \end{pmatrix}$$

Similarmente para $D = -1$ obtenemos seis formas I y cuatro formas II:

$$\begin{pmatrix} 0, -1, 0 \\ 0, \pm 1, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, -1, \pm 1 \\ 0, \pm 1, \quad 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1, -1, -1 \\ 0, \quad 0, \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, 1, -1 \\ 0, 0, \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, -1, 1 \\ 0, \quad 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, 1, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$$

Para $D = 2$ tenemos las seis formas I:

$$\begin{pmatrix} 0, & 2, 0 \\ 0, \pm 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 2, \pm 1 \\ 0, \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$$

y las ocho formas II:

$$\begin{pmatrix} 1, -1, 2 \\ 0, \quad 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, 1, 2 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, 1, -2 \\ 0, 0, \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, -1, -2 \\ 0, \quad 0, \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, -2, 1 \\ 0, \quad 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, 2, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, 2, -1 \\ 0, 0, \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, -2, -1 \\ 0, \quad 0, \quad 0 \end{pmatrix}$$

Pero el número de clases de formas en estos tres casos es mucho menor que el número de formas. Es fácil confirmar que

I. La forma $\begin{pmatrix}0,1,0\\0,1,0\end{pmatrix}$ se transforma en

$$\begin{pmatrix}0, & 1,0\\0, & -1,0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0, & 1,1\\0, & \pm1,0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0, & 1,-1\\0, & \pm1, \quad 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1,1,-1\\0,0, \quad 0\end{pmatrix}$$

respectivamente mediante las sustituciones

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1,0,\ \ 0 & 0,0,\ \ 1 & 0,\ \ 0,\ \ 1 & 1,\ \ 0,-1\\ 0,1,\ \ 0 & 0,1,-1 & 0,\ \ 1,\ \ 1 & 1,\ \ 1,-1\\ 0,0,-1 & \pm1,1,\ \ 0 & \pm1,-1,-1 & 0,-1,\ \ 1 \end{array}$$

y que la forma $\begin{pmatrix}1,1,-1\\0,0,\quad 0\end{pmatrix}$ se transforma en $\begin{pmatrix}1,-1,1\\0,\quad 0,0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1,1,1\\0,0,0\end{pmatrix}$ por una permutación simple de las incógnitas. Entonces, las diez formas ternarias del determinante 1 se reducen a estas dos: $\begin{pmatrix}0,1,0\\0,1,0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1,-1,-1\\0,\quad 0,\quad 0\end{pmatrix}$; para la primera, si lo prefiere, se puede tomar $\begin{pmatrix}1,0,0\\1,0,0\end{pmatrix}$. Y puesto que la primera forma es indefinida y la segunda definida, es claro que cualquier forma ternaria indefinida de determinante 1 es equivalente a la forma x^2+2yz y cualquier forma definida es equivalente a $-x^2-y^2-z^2$.

II. De manera similar encontramos que cualquier forma ternaria indefinida de determinante -1 es equivalente a la forma $-x^2+2yz$ y cualquier forma definida a $x^2+y^2+z^2$.

III. Para el determinante 2, la segunda, sexta y sétima de las ocho formas (II) pueden rechazarse inmediatamente porque pueden obtenerse a partir de la primera por una permutación simple de las incógnitas. Similarmente, la quinta se puede obtener a partir de la tercera y la octava a partir de la cuarta. Las tres formas restantes, junto con las seis formas I generarán tres clases; es decir $\begin{pmatrix}0,2,0\\0,1,0\end{pmatrix}$ se transformará en $\begin{pmatrix}0,\quad 2,0\\0,-1,0\end{pmatrix}$ mediante la sustitución

$$\left\{\begin{matrix}1, & 0, & 0\\0, & 1, & 0\\0, & 0, & -1\end{matrix}\right\}$$

y la forma $\begin{pmatrix}1,1,-2\\0,0,\quad 0\end{pmatrix}$ se transforma en

$$\begin{pmatrix}0,2,1\\0,1,0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0, & 2,1\\0, & -1,0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0,2,-1\\0,1,\quad 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0, & 2,-1\\0, & -1,\quad 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1,-1,2\\0,\quad 0,0\end{pmatrix}$$

respectivamente mediante las sustituciones

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1,0,1 & 1,0,-1 & 1,0,\ \ 0 & 1,0,0 & 1,0,0 \\ 1,2,0 & 1,2,\ \ 0 & 1,2,-1 & 1,2,1 & 0,1,2 \\ 1,1,0 & 1,1,\ \ 0 & 1,1,-1 & 1,1,1 & 0,1,1 \end{array}$$

Por lo tanto, cualquier forma ternaria de determinante 2 es reducible a una de las siguientes tres formas

$$\begin{pmatrix} 0,2,0 \\ 0,1,0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1,1,-2 \\ 0,0,\ \ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1,-1,-2 \\ 0,\ \ 0,\ \ 0 \end{pmatrix}$$

y, si lo prefiere, $\binom{2,0,0}{1,0,0}$ puede reemplazar la primera. Claramente cualquier forma ternaria definida será necesariamente equivalente a la tercera $-x^2 - y^2 - 2z^2$, puesto que las dos primeras son indefinidas. Y una forma indefinida será equivalente a la primera o segunda; a la primera, $2x^2 + 2yz$ si sus tres primeros coeficientes son todos pares (obviamente tal forma se transformará en una forma similar mediante cualquier sustitución y por lo tanto no puede ser equivalente a la segunda forma); a la segunda forma $x^2 + y^2 - 2z^2$, si sus tres primeros coeficientes no son todos pares, sino que uno, dos o todos son impares (pues la primera forma $2x^2 + 2yz$, no se puede transformar en ésta).

Según este argumento, pudimos haber predicho a priori en los ejemplos del artículo 273, 274 que la forma definida $\binom{19,21,50}{15,28,\ 1}$ de determinante -1 se reduciría a $x^2 + y^2 + z^2$ y que la forma indefinida $\binom{10,26,2}{7,\ 0,4}$ de determinante 2 se reduciría a $2x^2 - 2yz$ o (lo que es lo mismo) a $2x^2 + 2yz$.

278.

Si las incógnitas de una forma ternaria son x, x' y x'', la forma *representará* números dando valores determinados a x, x' y x'' y representará formas binarias mediante las sustituciones

$$x = mt + nu, \quad x' = m't + n'u, \quad x'' = m''t + n''u$$

donde m, n, m', etc. son números a determinar y t y u las incógnitas de la forma binaria. Ahora, para completar la teoría de formas ternarias necesitamos una solución de los siguientes problemas. I. Encontrar todas las representaciones de un número dado por una forma ternaria dada. II. Encontrar todas las representaciones de una forma binaria dada por una forma ternaria dada. III. Juzgar si dos formas ternarias dadas del mismo determinante son equivalentes, y si lo son, encontrar todas las transformaciones de una en la otra. IV. Juzgar si una forma ternaria dada implica otra forma ternaria dada de determinante mayor, y si lo hace, asignar toda transformación de la primera en la segunda. Puesto que estos problemas son más complicados que los problemas análogos para formas binarias, los trataremos con más detalle en otra ocasión. Por el momento, restringiremos nuestra investigación a mostrar cómo el primer problema puede reducirse al segundo y el segundo al tercero. Mostraremos cómo resolver el tercer problema para casos muy simples que son particularmente ilustrativos del teorema de formas binarias, y excluiremos el cuarto problema del todo.

279.

Lema: *Dados tres enteros cualesquiera a, a' y a'' (no todos $= 0$), encontrar otros seis B, B', B'', C, C' y C'' tales que*

$$B'C'' - B''C' = a, \quad B''C - BC'' = a', \quad BC' - B'C = a''$$

Solución. Sea α el máximo común divisor de a, a' y a'' y escoja los enteros A, A' y A'' tales que

$$Aa + A'a' + A''a'' = \alpha$$

Ahora escoja arbitrariamente tres enteros $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ y $\mathfrak{C}''$ con la única restricción de que los tres números $\mathfrak{C}'A'' - \mathfrak{C}''A'$, $\mathfrak{C}''A - \mathfrak{C}A''$ y $\mathfrak{C}A' - \mathfrak{C}'A$ no son todos $= 0$. Designaremos estos números por b, b' y b'' respectivamente y su máximo común divisor por β. Entonces, si se pone

$$a'b'' - a''b' = \alpha\beta C, \quad a''b - ab'' = \alpha\beta C', \quad ab' - a'b = \alpha\beta C''$$

es claro que C, C' y C'' son enteros. Finalmente si escogemos enteros $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ y $\mathfrak{B}''$ tales que

$$\mathfrak{B}b + \mathfrak{B}'b' + \mathfrak{B}''b'' = \beta$$

poniendo

$$\mathfrak{B}a + \mathfrak{B}'a' + \mathfrak{B}''a'' = h$$

y fijando

$$B = \alpha\mathfrak{B} - hA, \quad B' = \alpha\mathfrak{B}' - hA', \quad B'' = \alpha\mathfrak{B}'' - hA''$$

los valores de B, B', B'', C, C' y C'' satisfarán las ecuaciones dadas.

En efecto, se encuentra que

$$aB + a'B' + a''B'' = 0$$
$$bA + b'A' + b''A'' = 0 \quad \text{y por lo tanto} \quad bB + b'B' + b''B'' = \alpha\beta$$

Ahora, a partir de los valores de C' y C'' tenemos

$$\begin{aligned}\alpha\beta(B'C'' - B''C') &= ab'B' - a'bB' - a''bB'' + ab''B'' \\ &= a(bB + b'B' + b''B'') - b(aB + a'B' + a''B'') = \alpha\beta a\end{aligned}$$

y así $B'C'' - B''C' = a$; similarmente encontramos que $B''C - BC'' = a'$ y $BC' - B'C = a''$. *Q. E. F.* Pero debemos omitir aquí el análisis mediante el cual encontramos esta solución y el método para encontrar todas las demás a partir de una de ellas.

280.

Supongamos que la forma binaria

$$at^2 + 2btu + cu^2 \dots \varphi$$

cuyo determinante $= D$ es representada por la forma ternaria f con incógnitas x, x' y x'', poniendo

$$x = mt + nu, \quad x' = m't + n'u, \quad x'' = m''t + n''u$$

y que la adjunta de f es la forma F con incógnitas X, X' y X''. Entonces, es fácil confirmar, mediante cálculos, (designando los coeficientes de f y F por letras) o por deducción a partir del artículo 268.II, que el número D es representable por F poniendo

$$X = m'n'' - m''n', \quad X' = m''n - mn'', \quad X'' = mn' - m'n$$

Se puede decir que esta representación del número D es la *adjunta* de la representación de la forma φ por f. Si los valores de X, X' y X'' no tienen un divisor común, para abreviar llamaremos *propia* esta representación de D, de otra manera, será *impropia* y también daremos estas mismas designaciones a la representación de la forma φ por f a la cual la representación de D es adjunta. Ahora, el descubrimiento de todas las representaciones propias del número D por la forma F se basa en las siguientes consideraciones:

I. No hay ninguna representación de D por la forma F que no se pueda deducir de alguna representación de una forma de determinante D por la forma f, i.e. que es adjunta a tal representación.

En efecto, sea $X = L$, $X' = L'$, $X'' = L''$ una representación cualquiera de D por F; por el lema del artículo anterior escoja m, m', m'', n, n' y n'' tales que

$$m'n'' - m''n' = L, \quad m''n - mn'' = L', \quad mn' - m'n = L''$$

y transforme f en la forma binaria $\varphi = at^2 + 2btu + cu^2$ por la sustitución

$$x = mt + nu, \quad x' = m't + n'u, \quad x'' = m''t + n''u$$

Es fácil ver que D será el determinante de la forma φ y que la representación de D por F será la adjunta de la representación de φ por f.

Ejemplo. Sea $f = x^2 + x'^2 + x''^2$ y $F = -X^2 - X'^2 - X''^2$; $D = -209$; su representación por F será $X = 1$, $X' = 8$, $X'' = 12$; y encontramos que los valores de m, m', m'', n, n' y n'' son -20, 1, 1, -12, 0 y 1 respectivamente y $\varphi = 402t^2 + 482tu + 145u^2$.

II. Si φ y χ son formas binarias propiamente equivalentes, cualquier representación de D por F que es la adjunta de una representación de φ por f será también adjunta a una representación de la forma χ por f.

Sean p y q las incógnitas de la forma χ; transforme φ en χ mediante la sustitución propia $t = \alpha p + \beta q$, $u = \gamma p + \delta q$ y sea

$$x = mt + nu, \quad x' = m't + n'u, \quad x'' = m''t + n''u \ldots (R)$$

alguna representación de la forma φ por f. Entonces si se pone

$$\alpha m + \gamma n = g, \quad \alpha m' + \gamma n' = g', \quad \alpha m'' + \gamma n'' = g''$$
$$\beta m + \delta n = h, \quad \beta m' + \delta n' = h', \quad \beta m'' + \delta n'' = h''$$

la forma χ estará representada por f fijando

$$x = gp + hq, \quad x' = g'p + h'q, \quad x'' = g''p + h''q \ldots (R')$$

y mediante cálculos (puesto que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) encontramos

$$g'h'' - g''h' = m'n'' - m''n', \quad g''h - gh'' = m''n - mn'', \quad gh' - g'h = mn' - m'n$$

i.e. la misma representación de D por F es adjunta a las representaciones R y R'.

En el ejemplo anterior la forma φ es equivalente a $\chi = 13p^2 - 10pq + 18q^2$ y se transforma en ella mediante la sustitución propia $t = -3p + q$, $u = 5p - 2q$; y la representación de la forma χ por f es: $x = 4q$, $x' = -3p + q$, $x'' = 2p - q$. A partir de esto deducimos la misma representación del número -209 que teníamos antes.

III. Finalmente, si dos formas binarias φ y χ de determinante D cuyas incógnitas son t, u; p, q, se pueden representar por f y si la misma representación propia de D por F es adjunta a la representación de cada una de éstas, las dos formas deben ser propiamente equivalentes. Supongamos que φ se representa por f poniendo

$$x = mt + nu, \quad x' = m't + n'u, \quad x'' = m''t + n''u$$

y que χ se representa por f fijando

$$x = gp + hq, \quad x' = g'p + h'q, \quad x'' = g''p + h''q$$

y que

$$\begin{gathered} m'n'' - m''n' = g'h'' - g''h' = L \\ m''n - mn'' = g''h - gh'' = L' \\ mn' - m'n = gh' - g'h = L'' \end{gathered}$$

Ahora escoja los enteros l, l' y l'' tales que $Ll + L'l' + L''l'' = 1$ y sea

$$\begin{gathered} n'l'' - n''l' = M, \quad n''l - nl'' = M', \quad nl' - n'l = M'' \\ l'm'' - l''m' = N, \quad l''m - lm'' = N', \quad lm' - l'm = N'' \end{gathered}$$

y finalmente, sea

$$\begin{gathered} gM + g'M' + g''M'' = \alpha, \quad hM + h'M' + h''M'' = \beta \\ gN + g'N' + g''N'' = \gamma, \quad hN + h'N' + h''N'' = \delta \end{gathered}$$

A partir de esto es fácil deducir

$$\alpha m + \gamma n = g - l(gL + g'L' + g''L'') = g$$
$$\beta m + \delta n = h - l(hL + h'L' + h''L'') = h$$

y similarmente

$$\alpha m' + \gamma n' = g', \quad \beta m' + \delta n' = h', \quad \alpha m'' + \gamma n'' = g'', \quad \beta m'' + \delta n'' = h''$$

A partir de esto es claro que $mt+nu$, $m't+n'u$, $m''t+n''u$ se transformará en $gp+hq$, $g'p + h'q$, $g''p + h''q$, respectivamente, mediante la sustitución

$$t = \alpha p + \beta q, \quad u = \gamma p + \delta q \ldots (S)$$

y mediante la sustitución S, φ se transformará en la misma forma que f poniendo

$$x = gp + hq, \quad x' = g'p + h'q, \quad x'' = g''p + h''q$$

es decir, en χ a la cual debe, por lo tanto, ser equivalente. Finalmente, mediante las sustituciones adecuadas se encuentra que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (Ll + L'l' + L''l'')^2 = 1$$

Por lo tanto, la sustitución S es propia y las formas φ y χ son propiamente equivalentes.

Como resultado de estas observaciones se derivan las siguientes reglas para encontrar toda representación propia de D por F: Encontrar todas las clases de formas binarias de determinante D y de ellas seleccionar una forma arbitraria; encontrar todas las representaciones propias de cada una de estas formas por f (desechando cualquiera que no se puede representar por f) y de cada una de estas representaciones, deducir representaciones del número D por F. Mediante I y II es claro que de esta manera se obtienen todas las representaciones propias posibles y que, por lo tanto, la solución es completa; mediante III es claro que transformaciones de formas de diferentes clases producen representaciones diferentes.

281.

La investigación de representaciones *impropias* de un número dado D por la forma F puede reducirse fácilmente al caso anterior. Es evidente que si D no es divisible por ningún cuadrado (excepto 1), no habrá ninguna representación de este tipo; pero si λ^2, μ^2, ν^2, etc. son divisores cuadrados de D, todas las representaciones impropias de D por F pueden encontrarse si primero encontramos todas las representaciones propias de los números $\frac{D}{\lambda^2}$, $\frac{D}{\mu^2}$, $\frac{D}{\nu^2}$, etc. por esta misma forma y se multiplican los valores de las incógnitas por λ, μ, ν, etc. respectivamente.

Por lo tanto, el poder encontrar todas las posibles representaciones de un número dado por una forma ternaria dada, *la cual es adjunta a otra forma ternaria*, depende del segundo problema. Y aunque a primera vista esto parece ser un caso muy particular, los demás casos se pueden reducir a éste como sigue. Sea D el número que se quiere representar por la forma $\begin{pmatrix} g, g', g'' \\ h, h', h'' \end{pmatrix}$ de determinante Δ, cuya adjunta es la forma $\begin{pmatrix} G, G', G'' \\ H, H', H'' \end{pmatrix} = f$. Entonces la adjunta de f será $\begin{pmatrix} \Delta g, \Delta g', \Delta g'' \\ \Delta h, \Delta h', \Delta h'' \end{pmatrix} = F$, y es claro que las representaciones del número ΔD por F (esta investigación depende de la anterior) serán idénticas a las representaciones del número D por la forma propuesta. Pero, cuando todos los coeficientes de la forma f tienen un divisor común μ, es evidente que todos los coeficientes de la forma F serán divisibles por μ^2 y así ΔD también debe ser divisible por μ^2 (de otra manera, no habrían representaciones); y representaciones del número D por la forma propuesta coincidirán con representaciones del número $\frac{\Delta D}{\mu^2}$ por la forma que resulta de dividir cada uno de los coeficientes de F por μ^2, y esta forma será adjunta a la forma que resulta de dividir cada coeficiente por μ.

Observamos, finalmente, que la solución del primer problema no es aplicable en el caso donde $D = 0$; pues en este caso, las formas binarias del determinante D no están distribuidas entre un número finito de clases; resolveremos posteriormente este caso, utilizando principios diferentes.

282.

La investigación de las representaciones de una forma binaria dada de determinante distinto de 0*) por una forma ternaria, depende de las siguientes

*) Para abreviar omitiremos un tratamiento del caso en el cual el determinante sea cero, puesto que requiere un método un poco distinto.

observaciones.

I. De cualquier representación propia de una forma binaria $(p, q, r) = \varphi$ de determinante D por la forma ternaria f de determinante Δ se pueden deducir enteros B y B' tales que

$$B^2 \equiv \Delta p, \qquad BB' \equiv -\Delta q, \qquad B'^2 \equiv \Delta r \pmod{D}$$

i.e. un valor de la expresión $\sqrt{\Delta(p, -q, r)}$ (mod. D). Tómese la siguiente representación propia de la forma φ por f

$$x = \alpha t + \beta u, \qquad x' = \alpha' t + \beta' u, \qquad x'' = \alpha'' t + \beta'' u$$

(donde x, x' y x''; t y u designan las incógnitas de las formas f y φ); escoja enteros γ, γ' y γ'' tales que

$$(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\gamma + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')\gamma' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\gamma'' = k$$

con $k = +1$ o $= -1$. Transforme f mediante la sustitución

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

en la forma $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = g$, cuya adjunta es $\begin{pmatrix} A, A', A'' \\ B, B', B'' \end{pmatrix} = G$. Entonces, claramente resulta $a = p$, $b'' = q$, $a' = r$, $A'' = D$, y Δ el determinante de la forma g; por lo tanto

$$B^2 = \Delta p + A'D, \quad BB' = -\Delta q + B''D, \quad B'^2 = \Delta r + AD$$

Entonces, por ejemplo, la forma $19t^2 + 6tu + 41u^2$ es representada por $x^2 + x'^2 + x''^2$ poniendo $x = 3t + 5u$, $x' = 3t - 4u$, $x'' = t$; y fijando $\gamma = -1$, $\gamma' = 1$, $\gamma'' = 0$, tendremos $B = -171$, $B' = 27$ o sea $(-171, 27)$ como un valor de la expresión $\sqrt{-1(19, -3, 41)}$ (mod. 770).

Se sigue de esto que si $\Delta(p, -q, r)$ no es un residuo cuadrático de D, φ no podrá representarse propiamente por ninguna forma ternaria de determinante Δ; entonces, en el caso donde Δ y D son primos relativos, Δ tendrá que ser el número característico de la forma φ.

II. Puesto que γ, γ' y γ'' pueden determinarse de una infinidad de maneras diferentes, resultarán diferentes valores de B y B'. Veamos que relación tendrán entre sí. Suponga que también hemos escogido δ, δ' y δ'', tales que

$$(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\delta + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')\delta' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\delta'' = \mathfrak{k}$$

se hace $= +1$ o -1 y que la forma f se transforma mediante la sustitución

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \delta \\ \alpha', & \beta', & \delta' \\ \alpha'', & \beta'', & \delta'' \end{array}$$

en $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'' \\ \mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' \end{pmatrix} = \mathfrak{g}$ con adjunta $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'' \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \end{pmatrix} = \mathfrak{G}$. Entonces g y $\mathfrak{g}$ serán equivalentes y así también G y $\mathfrak{G}$, y por una aplicación de los principios dados en los artículos 269 y 270*) encontraremos que si se fijan

$$(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\delta + (\beta''\gamma - \beta\gamma'')\delta' + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)\delta'' = \zeta$$
$$(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')\delta + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')\delta' + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\delta'' = \eta$$

la forma $\mathfrak{G}$ se transformará en G mediante la sustitución

$$\begin{array}{ccc} k, & 0, & 0 \\ 0, & k, & 0 \\ \zeta, & \eta, & \mathfrak{k} \end{array}$$

Entonces resulta

$$B = \eta\mathfrak{k}D + \mathfrak{k}k\mathfrak{B}, \quad B' = \zeta\mathfrak{k}D + \mathfrak{k}k\mathfrak{B}'$$

y así, puesto que $\mathfrak{k}k = \pm 1$, tendremos $B \equiv \mathfrak{B}$, $B' \equiv \mathfrak{B}'$ o $B \equiv -\mathfrak{B}$, $B' \equiv -\mathfrak{B}'$ (mod. D). En el primer caso diremos que los valores (B, B') y $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ son equivalentes, en el segundo caso, que son opuestos; y diremos que las representaciones de la forma φ *pertenecen* a cualquiera de los valores de la expresión $\sqrt{\Delta(p, -q, r)}$ (mod. D) que puede deducirse mediante el método de I. Así pues, todos los valores a los cuales les corresponde la misma representación, serán equivalentes u opuestos.

*) Obtenemos la transformación de la forma g en la forma f a partir de la transformación de la forma f en la forma g; a partir de esto y de la transformación de la forma f en la forma $\mathfrak{g}$ obtenemos la transformación de la forma g en la forma $\mathfrak{g}$; y a partir de ésta, por transposición, la transformación de $\mathfrak{G}$ en G.

III. En cambio, como en I, si $x = \alpha t + \beta u$ etc. es una representación de la forma φ por f, y si esta representación pertenece al valor (B, B') del cual se deduce mediante la transformación

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

la misma representación también pertenecerá a cualquier otro valor $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ que le es equivalente u opuesto; i.e., en lugar de γ, γ' y γ'' podemos tomar otros enteros δ, δ' y δ'' para los cuales la ecuación

$$(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\delta + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')\delta' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\delta'' = \pm 1 \qquad (\Omega)$$

tiene lugar y se escogieran tales que, si f se transforma en su forma adjunta mediante la sustitución (S):

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \delta \\ \alpha', & \beta', & \delta' \\ \alpha'', & \beta'', & \delta'' \end{matrix}$$

el cuarto y quinto coeficiente de la forma adjunta serán respectivamente $= \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$. En efecto, sea

$$\pm B = \mathfrak{B} + \eta D, \quad \pm B' = \mathfrak{B}' + \zeta D$$

(aquí y más adelante tomaremos el signo superior e inferior según los valores de (B, B') y $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ sean equivalentes u opuestos); ζ y η serán enteros y mediante la sustitución

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \zeta \\ 0, & 1, & \eta \\ 0, & 0, & \pm 1 \end{matrix}$$

g se transformará en una forma $\mathfrak{g}$ con determinante Δ. Es fácil ver que los coeficientes 4 y 5 de la forma adjunta serán $= \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ respectivamente. Sin embargo, si fijamos

$$\alpha\zeta + \beta\eta \pm \gamma = \delta, \quad \alpha'\zeta + \beta'\eta \pm \gamma' = \delta', \quad \alpha''\zeta + \beta''\eta \pm \gamma'' = \delta''$$

no es difícil ver que f se transformará en $\mathfrak{g}$ mediante la sustitución (S) y que la ecuación (Ω) será satisfecha. *Q. E. D.*