283.

A partir de estos principios se deduce el siguiente método para encontrar todas las representaciones propias de la forma binaria

$$\varphi = pt^2 + 2qtu + ru^2$$

de determinante D por la forma ternaria f de determinante Δ.

I. Se buscan todas los valores diferentes (i.e. no equivalentes) de la expresión $\sqrt{\Delta(p, -q, r)}$ (mod. D). Para el caso en el cual φ es una forma primitiva y Δ y D primos relativos, la solución fue dada en el art. 233, y los casos restantes se pueden reducir facilmente a éste. Para abreviar no daremos una explicación más completa. Simplemente indicaremos que siempre que Δ y D sean primos relativos, la expresión $\Delta(p, -q, r)$ no puede ser un residuo cuadrático de D a menos que φ sea una forma primitiva. En efecto, suponiendo

$$\Delta p = B^2 - DA', \quad -\Delta q = BB' - DB'', \quad \Delta r = B'^2 - DA$$

entonces

$$(DB'' - \Delta q)^2 = (DA' + \Delta p)(DA + \Delta r)$$

y manipulando y sustituyendo D por $q^2 - pr$ tenemos

$$(q^2 - pr)(B''^2 - AA') - \Delta(Ap + 2B''q + A'r) + \Delta^2 = 0$$

y es fácil concluir que si p, q y r, tienen un divisor común, también éste será un factor de Δ^2; por consiguiente Δ y D no podrían ser primos relativos. Por lo tanto p, q y r no pueden tener un divisor común y φ es una forma primitiva.

II. Designemos el número de estos valores por m y supongamos que entre ellos hay n que son opuestos a sí mismos (fijando $n = 0$ cuando no los hay). Entonces es claro que los restantes $m - n$ valores estarán compuestos por parejas que son opuestas entre sí (puesto que hemos supuesto que se incluyen todos los valores); ahora, si de cada par de valores opuestos rechazamos un valor arbitrariamente, nos quedarán $\frac{1}{2}(m+n)$ valores en total. Así pues por ejemplo, tenemos ocho valores de la expresión $\sqrt{-1(19, -3, 41)}$ (mod. 770), a saber, $(39, 237)$, $(171, -27)$, $(269, -83)$, $(291, -127)$, $(-39, -237)$, $(-171, 27)$, $(-269, 83)$ y $(-291, 127)$. Rechazamos los cuatro últimos como opuestos a los primeros. Pero es evidente que si (B, B') es un valor que es opuesto a sí mismo, $2B$, $2B'$ y también $2\Delta p$, $2\Delta q$ y $2\Delta r$ serán divisibles por D; y por lo tanto, si Δ y D son primos relativos, $2p$, $2q$ y $2r$, también serán divisibles por D. Según I, en este caso p, q y r no pueden tener un divisor común, entonces 2 debe ser divisible por D. Esto no puede ocurrir a menos que D sea $= \pm 1$ o $= \pm 2$. Así pues, para todos los valores de D mayores que 2, siempre resulta $n = 0$ si Δ y D son primos relativos.

III. Al ver esto, es evidente que cualquier representación propia de la forma φ por f debe pertenecer a uno y sólo uno de los valores restantes. Deberíamos, por lo tanto, revisar cada uno de estos valores en orden para encontrar la representación que pertenece a cada uno. Para poder encontrar la representación correspondiente a un valor *dado* (B, B') debemos determinar primero la forma ternaria $g = \begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ cuyo determinante $= \Delta$ y en la cual $a = p$, $b'' = q$, $a' = r$, $ab - b'b'' = B$, $a'b' - bb'' = B'$; los valores a'', b y b' se pueden encontrar con la ayuda de la ecuación del artículo 276.II. A partir de éstos es fácil ver que cuando Δ y D son primos relativos, b, b' y a'' deben ser enteros (puesto que estos tres números dan valores enteros cuando son multiplicados por D y luego por Δ). Ahora, si alguno de los coeficientes b, b' y a'' es una fracción o las formas f y g no son equivalentes, no habrá ninguna representación de la forma φ por f perteneciente a (B, B'); pero si b, b' y a'' son enteros y las formas f y g son equivalentes, entonces, cualquier transformación de f en g, por ejemplo

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

producirá tal representación, a saber,

$$x = \alpha t + \beta u, \quad x' = \alpha' t + \beta' u, \quad x'' = \alpha'' t + \beta'' u$$

Es claro que no puede existir ninguna representación de este tipo que no se pueda deducir de alguna transformación. Entonces aquella parte del segundo problema que se refiere a la representación *propia* se reduce al tercer problema.

IV. Ahora, transformaciones diferentes de la forma f en la forma g siempre producen representaciones distintas, con la única excepción del caso en el cual el valor (B, B') es opuesto a sí mismo. En este caso dos transformaciones dan una sola representación. En efecto, suponga que f también se transforma en g mediante la sustitución

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \delta \\ \alpha', & \beta', & \delta' \\ \alpha'', & \beta'', & \delta'' \end{matrix}$$

(que da la misma representación que la anterior) y sean k, $\mathfrak{k}$, ζ y η los mismos números que en II del artículo anterior. Tendremos

$$B = k\mathfrak{k}B + \eta\mathfrak{k}D, \quad B' = k\mathfrak{k}B' + \zeta\mathfrak{k}D$$

Si se supone que ambas k, $\mathfrak{k} = +1$ ó $= -1$, encontramos (ya que hemos excluido el caso de $D = 0$) que $\zeta = 0$, $\eta = 0$ y se sigue que $\delta = \gamma$, $\delta' = \gamma'$, $\delta'' = \gamma''$; estas dos transformaciones pueden ser diferentes sólo cuando uno de los números k o $\mathfrak{k}$ es $+1$ y el otro -1; entonces tenemos $B \equiv -B$, $B' \equiv -B' \pmod{D}$ o el valor de (B, B') es opuesto a sí mismo.

V. A partir de lo dicho anteriormente (art. 271) sobre los criterios para formas definidas e indefinidas, se sigue fácilmente que si Δ es positivo, D es negativo, y φ es una forma negativa, g será una forma negativa definida, pero si Δ es positivo y D es positivo (o bien D es negativo y φ una forma positiva), g será una forma indefinida. Ahora, puesto que f y g definitivamente no pueden ser equivalentes, a menos que sean similares en cuanto a esto, es claro que formas binarias con determinantes positivos y formas positivas no pueden ser representadas propiamente por una forma ternaria negativa, y que formas binarias negativas no pueden representarse por formas ternarias indefinidas con determinante positivo; pero una forma ternaria del primer tipo puede representar una forma del segundo tipo, y una forma ternaria del segundo tipo puede representar una forma del primer tipo únicamente. Similarmente, concluimos que una forma ternaria definida (i.e. positiva) con determinante negativo puede representar únicamente formas binarias positivas, y que una forma ternaria indefinida con determinante negativo solamente puede representar formas binarias negativas y formas con determinante positivo.

284.

Representaciones *impropias* de la forma binaria φ con determinante D por la forma ternaria f, cuya adjunta es F, son aquéllas de las cuales deducimos representaciones impropias del número D por la forma F. Por lo tanto, es claro que φ no se puede representar impropiamente por f a menos que D tenga factores cuadrados. Supongamos que todos los cuadrados (excepto 1) que son divisores de D son e^2, e'^2, e''^2, etc. (el número de ellos es finito ya que hemos excluido la posibilidad de tener $D = 0$). Toda representación impropia de la forma φ por f dará una representación del número D por F, en la cual los valores de las incógnitas tendrán alguno de los números e, e', e'', etc. como máximo común divisor. Por esta razón decimos simplemente que una representación impropia de la forma φ *pertenece* al divisor cuadrado e^2, o e'^2, o e''^2, etc. Ahora se utilizan las reglas siguientes para encontrar todas las representaciones de la forma φ que pertenecen al mismo divisor *dado* e^2 (supondremos que su raíz cuadrada e se toma positivamente). Para abreviar daremos una demostración sintética, pero será fácil reconstruir el análisis que produce los resultados.

Primero encuentre todas la formas binarias de determinante $\frac{D}{e^2}$ que se transforman en φ mediante una sustitución propia como $T = \chi t + \lambda u$, $U = \mu u$, donde T y U son incógnitas de tal forma; t y u incógnitas de la forma φ; χ y μ enteros positivos (cuyo producto es por lo tanto $= e$); λ un entero positivo menor que μ (puede ser cero). Estas formas, con las transformaciones correspondientes, se pueden encontrar como sigue.

Sea χ igual, sucesivamente, a cada uno de los divisores de e tomados positivamente (incluyendo a 1 y a e) y sea $\mu = \frac{e}{\chi}$; para cada uno de los valores enteros χ y μ, asigne a λ todos los valores enteros desde cero hasta $\mu - 1$, y de seguro tendremos todas las transformaciones. Ahora podemos encontrar la forma que se transforma en φ mediante una sustitución $T = \chi t + \lambda u$, $U = \mu u$, investigando la forma en la cual se transforma φ mediante la sustitución $t = \frac{1}{\chi}T - \frac{\lambda}{e}U$, $u = \frac{1}{\mu}U$; así se obtendrán las formas correspondientes a cada una de las transformaciones; pero sólo aquellas formas en las cuales los tres coeficientes son enteros*) deben ser retenidas.

Segundo, supongamos que Φ es una de las formas que se transforma en φ mediante la sustitución $T = \chi t + \lambda u$, $U = \mu u$; se investigan todas las representaciones *propias* de la forma Φ por f (si existe alguna) y se exhiben en general por la fórmula:

$$x = \mathfrak{A}T + \mathfrak{B}U, \quad x' = \mathfrak{A}'T + \mathfrak{B}'U, \quad x'' = \mathfrak{A}''T + \mathfrak{B}''U \qquad (\mathfrak{R})$$

De cada uno de los $(\mathfrak{R})$ se deduce una representación

$$x = \alpha t + \beta u, \quad x' = \alpha' t + \beta' u, \quad x'' = \alpha'' t + \beta'' u \qquad (\rho)$$

*) Si pudiéramos tratar más ampliamente este problema, podríamos abreviar, en gran medida, la solución. Es inmediatamente obvio que para χ necesitamos considerar solamente aquellos divisores de e cuyos cuadrados dividen el primer coeficiente de la forma φ. Reservaremos para una ocasión más apropiada un estudio más profundo de éste problema. Note que podemos deducir de él soluciones más sencillas de los problemas de los artículos 213 y 214.

mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\alpha = \chi\mathfrak{A}, &&\alpha' = \chi\mathfrak{A}', &&\alpha'' = \chi\mathfrak{A}''\\
&\beta = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}, &&\beta' = \lambda\mathfrak{A}' + \mu\mathfrak{B}', &&\beta'' = \lambda\mathfrak{A}'' + \mu\mathfrak{B}''
\end{aligned} \tag{R}$$

Al tratar de la misma manera todas las otras formas que encontramos mediante la primera regla (si hay varias), otras representaciones serán obtenidas a partir de cada representación propia de cada forma. De esta manera obtendremos todas las representaciones de la forma φ que pertenecen al divisor e^2 y cada una sólo una vez.

Demostración. I. Es tan obvio que la forma ternaria f se transforma en φ por cada sustitución (ρ) que no necesita de una explicación adicional; que cada representación (ρ) es impropia y pertenece al divisor e^2 es claro en vista de que los números $\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$, $\alpha''\beta - \alpha\beta''$, $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ son $= e(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}')$, $e(\mathfrak{A}''\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}'')$, $e(\mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B})$ respectivamente y su máximo común divisor será e (puesto que $(\mathfrak{R})$ es una representación propia).

II. Mostraremos que a partir de cualquier representación (ρ) de la forma φ se puede encontrar una representación propia de una forma de determinante $\frac{D}{e^2}$ contenida entre las formas encontradas mediante la primera regla; eso es, a partir de los valores dados α, α', α'', β, β' y β'' podemos deducir valores enteros χ, λ y μ con las condiciones prescritas, tanto como los valores de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ y $\mathfrak{B}''$ que satisfacen unívocamente a las ecuaciones (R). Es inmediatamente claro de las tres primeras ecuaciones de (R) que para χ debemos tomar el máximo común divisor de α, α' y α'' con signo positivo (ya que $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}''\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B''$ y $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ no tienen un divisor común, y $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{A}''$ tampoco); por lo tanto están determinados $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ y $\mu = \frac{e}{\chi}$ (es fácil ver que necesariamente serán enteros). Supongamos que los tres enteros $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{a}''$ hacen $\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{a}'\mathfrak{A}' + \mathfrak{a}''\mathfrak{A}'' = 1$ y para abreviar escribamos k para $\mathfrak{a}\mathfrak{B} + \mathfrak{a}'\mathfrak{B}' + \mathfrak{a}''\mathfrak{B}''$. Entonces a partir de las últimas tres ecuaciones (R) se sigue que $\mathfrak{a}\beta + \mathfrak{a}'\beta' + \mathfrak{a}''\beta'' = \lambda + \mu k$ y de esto es inmediatamente evidente que se da sólo un valor de λ entre los límites de 0 y $\mu - 1$. Cuando hemos hecho esto, los valores de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ y $\mathfrak{B}''$ también se habrán determinado, así que resta sólo mostrar que siempre serán enteros. Ahora tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} = \frac{1}{\mu}(\beta - \lambda\mathfrak{A}) &= \frac{1}{\mu}\Big(\beta(1 - \mathfrak{a}\mathfrak{A}) - \mathfrak{A}(\mathfrak{a}'\beta' + \mathfrak{a}''\beta'')\Big) + \mathfrak{A}k\\
&= \frac{1}{\mu}\Big(\mathfrak{a}''(\mathfrak{A}''\beta - \mathfrak{A}\beta'') - \mathfrak{a}'(\mathfrak{A}\beta' - \mathfrak{A}'\beta)\Big) + \mathfrak{A}k\\
&= \frac{1}{e}\Big(\mathfrak{a}''(\alpha''\beta - \alpha\beta'') - \mathfrak{a}'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\Big) + \mathfrak{A}k
\end{aligned}$$

Es claro que $\mathfrak{B}$ es un entero, y de la misma manera podemos mostrar que $\mathfrak{B}'$ y $\mathfrak{B}''$ son enteros. De estos argumentos vemos que no puede haber ninguna representación impropia de la forma φ por f que pertenezca al divisor e^2 que no se pueda obtener unívocamente por el método que hemos utilizado.

Si tratamos los restantes divisores cuadrados de D de la misma manera y desarrollamos las representaciones pertenecientes a cada uno de ellos, tendremos todas las representaciones impropias de la forma φ por f.

A partir de esta solución es fácil deducir que el teorema enunciado al final del artículo anterior para las representaciones propias también se aplica a las representaciones impropias; eso es, en general ninguna forma binaria positiva con determinante negativo puede ser representada por una forma ternaria negativa, etc. Pues, si φ fuera una forma binaria tal que de acuerdo con el teorema no pudiera ser representada propiamente por f, entonces todas las formas con determinante $\frac{D}{e^2}$, $\frac{D}{e'^2}$ etc. que φ implica, tampoco podrían ser representadas propiamente por f. La razón es que todas estas formas tienen determinante del mismo signo que φ, y cuando estos determinantes son negativos, todas las formas serán positivas o negativas según φ pertenezca a formas positivas o negativas.

285.

Podemos dar aquí sólo algunos detalles respecto al tercer problema (al cual hemos reducido los dos primeros); o sea respecto a la manera de juzgar si dos formas ternarias dadas del mismo determinante son o no equivalentes y, si lo son, de que manera encontrar todas las transformaciones de una en la otra. La razón es que la solución completa, tal como las obtenidas para problemas análogos de formas binarias, presentaría mayores dificultades aquí. Por lo tanto limitaremos nuestra discusión a algunos casos particulares pertinentes a esta divagación.

I. Para el determinante $+1$ mostramos anteriormente que todas las formas ternarias están repartidas en dos clases, una que contiene todas las formas indefinidas, la otra que contiene todas las formas definidas (negativas). Inmediatamente se concluye que dos formas ternarias cualesquiera de determinante 1 son equivalentes si ambas son definidas o ambas indefinidas; si una es definida y la otra indefinida, no son equivalentes (es claro que la última parte de la proposición es válida para el caso general de formas de cualquier determinante). Similarmente, dos formas cualesquiera con determinante -1 son ciertamente equivalentes si ambas son definidas o ambas indefinidas. Dos formas definidas con determinante 2 son siempre equivalentes; dos formas indefinidas no son equivalentes si en una los tres primeros coeficientes son todos pares y en la otra no son todos pares; en los casos restantes (los tres primeros coeficientes de ambas formas son todos pares o alguno de los tres primeros coeficientes de ambas formas es impar) las formas serán equivalentes. Podríamos mostrar muchas más proposiciones de este carácter especial si se hubieran desarrollado más ejemplos anteriormente (art. 277).

II. Para todos estos casos se puede encontrar una transformación de una de las formas ternarias equivalentes f y f' en la otra. Pues en todos los casos, en cualquier clase de forma ternaria hemos encontrado un número suficientemente pequeño de formas tales que cualquier forma de la misma clase pueda ser reducida por métodos uniformes a una de ellas; y también hemos mostrado cómo reducirlas todas a una sola forma. Sea F esta forma de la misma clase que f y f'; por los métodos dados anteriormente se puede encontrar transformaciones de las formas f y f' en F y de la forma F en f y f'. Entonces por el artículo 270 pueden deducirse las transformaciones de la forma f en f' y de la forma f' en f.

III. Entonces solamente queda demostrar cómo obtener todas las posibles transformaciones a partir de una transformación de una forma ternaria f en otra f'. Este problema depende de un problema más sencillo, el de encontrar todas las transformaciones de la forma ternaria f en sí misma. Pues si f se transforma en sí misma por varias sustituciones (τ), (τ'), (τ''), etc. y si se transforma en f' mediante la sustitución (t), es claro que se combina la transformación (t) con (τ), (τ'), (τ''), etc. de acuerdo con la norma del artículo 270 para producir transformaciones, cada una de las cuales llevará f hacia f'. Mediante cálculos adicionales, es fácil probar que cualquier transformación de la forma f en f' puede deducirse de esta manera, combinando una transformación dada (t) de f en f' junto con una (y *sólo* una) transformación de la forma f en sí misma. Así a partir de la combinación de una transformación dada de f en f' con *todas* las transformaciones de f en sí misma, se obtienen *todas* las transformaciones de la forma f en f', cada una de ellas sólo una vez.

Restringiremos nuestra investigación de todas las transformaciones de la forma f en sí misma al caso donde f es una forma definida cuyo 4^o, 5^o y 6^o coeficientes son todos $= 0$*). Por lo tanto sea $f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, y represéntense las sustituciones

*) Los otros casos en los que f es una forma definida se pueden reducir a éste; pero si f es una forma indefinida, debe usarse un método completamente diferente y el número de transformaciones será infinito.

mediante las cuales f es transformada en sí misma por

$$\begin{array}{lll} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}$$

así que las siguientes ecuaciones se cumplen

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + a'\alpha'^2 + a''\alpha''^2 &= a \\ a\beta^2 + a'\beta'^2 + a''\beta''^2 &= a' \\ a\gamma^2 + a'\gamma'^2 + a''\gamma''^2 &= a'' \\ a\alpha\beta + a'\alpha'\beta' + a''\alpha''\beta'' &= 0 \\ a\alpha\gamma + a'\alpha'\gamma' + a''\alpha''\gamma'' &= 0 \\ a\beta\gamma + a'\beta'\gamma' + a''\beta''\gamma'' &= 0 \end{aligned} \tag{Ω}$$

Ahora deben distinguirse tres casos:

I. Cuando a, a' y a'' (que tienen el mismo signo) son todos diferentes, supongamos que $a < a'$ y $a' < a''$ (si hay un orden diferente de magnitud, las mismas conclusiones resultarán de manera similar). Entonces la primera ecuación en (Ω) evidentemente requiere que $\alpha' = \alpha'' = 0$, por lo tanto $\alpha = \pm 1$; entonces por las ecuaciones 4 y 5 resulta $\beta = 0$, $\gamma = 0$; similarmente de la ecuación 2 tenemos $\beta'' = 0$ y por lo tanto $\beta' = \pm 1$; ahora a partir de la ecuación 6, $\gamma' = 0$ y de la 3, $\gamma'' = \pm 1$ así pues (debido a la ambigüedad independiente de los signos) habrá en total 8 transformaciones.

II. Cuando dos de los números a, a' y a'' son iguales e.g., $a' = a''$ y el tercero diferente, supongamos:

Primero que $a < a'$. Entonces de la misma manera que en el caso anterior tendremos que $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$, $\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; y a partir de las ecuaciones 2, 3 y 6 es fácil deducir que o $\beta' = \pm 1$, $\gamma' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = \pm 1$ ó $\beta' = 0$, $\gamma' = \pm 1$, $\beta'' = \pm 1$, $\gamma'' = 0$.

Pero si, *en segundo lugar*, $a > a'$, se obtienen las mismas conclusiones de esta manera; a partir de las ecuaciones 2 y 3 resulta necesariamente $\beta = 0$, $\gamma = 0$ y además tenemos $\beta' = \pm 1$, $\gamma' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = \pm 1$ o $\beta' = 0$, $\gamma' = \pm 1$, $\beta'' = \pm 1$, $\gamma'' = 0$; en cualquier caso, a partir de las ecuaciones 4 y 5 tendremos $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$ y a partir de la 1, $\alpha = \pm 1$. Y así para cada caso habrá 16 transformaciones diferentes. Los dos restantes casos donde $a = a''$ o $a = a'$ se pueden resolver de manera totalmente similar. En el primer caso necesitamos simplemente intercambiar los caracteres α, α', α'' con β, β', β'' respectivamente; en el segundo caso se tienen que intercambiar con γ, γ', γ'' respectivamente.

III. Cuando todos los a, a' y a'' son iguales, las ecuaciones 1, 2 y 3 requieren que en cada uno de los tres triples α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' dos de los números sean $= 0$, y el tercero $= \pm 1$. Mediante las ecuaciones 4, 5 y 6 es fácil ver que sólo uno de los tres números α, β y γ puede ser $= \pm 1$. Lo mismo es cierto de los conjuntos α', β', γ' y α'', β'', γ''. Por lo tanto sólo hay seis posibles combinaciones:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l|}
\alpha & \alpha & \alpha' & \alpha' & \alpha'' & \alpha'' & = \pm 1 \\
\beta' & \beta'' & \beta & \beta'' & \beta & \beta' & = \pm 1 \\
\gamma'' & \gamma' & \gamma'' & \gamma & \gamma' & \gamma & = \pm 1
\end{array} \qquad \text{Los restantes seis coeficientes serán } = 0$$

y, por causa de la ambigüedad de signos, hay un total de 48 transformaciones. La misma tabla también incluye los casos anteriores, pero solamente se debe tomar la primera columna cuando a, a' y a'' son todos diferentes; la primera y segunda cuando $a' = a''$; la primera y tercera cuando $a = a'$; la primera y sexta cuando $a = a''$.

En resumen, si la forma $f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2$ se transforma en una forma equivalente f' mediante la sustitución

$$x = \delta y + \varepsilon y' + \zeta y'', \quad x' = \delta' y + \varepsilon' y' + \zeta' y'', \quad x'' = \delta'' y + \varepsilon'' y' + \zeta'' y''$$

toda transformación de la forma f en f' estará comprendida en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l}
x & x' & x' & x' & x'' & x'' & = \pm(\delta y + \varepsilon y' + \zeta y'') \\
x' & x'' & x & x'' & x & x' & = \pm(\delta' y + \varepsilon' y' + \zeta' y'') \\
x'' & x' & x'' & x & x' & x & = \pm(\delta'' y + \varepsilon'' y' + \zeta'' y'')
\end{array}$$

con esta diferencia: que las seis columnas serán utilizadas en su totalidad cuando $a = a' = a''$; las columnas 1 y 2 cuando $a' = a''$ con a distinto; 1 y 3 cuando $a = a'$; 1 y 6 cuando $a = a''$; y la primera sola cuando a, a' y a'' son todos diferentes. En el primer caso, el número de transformaciones será 48, en el segundo, tercero y cuarto 16, y en el quinto 8.