

Reducción a ecuaciones puras de las ecuaciones que dan las raíces Ω .

359.

Las investigaciones precedentes trataban del *descubrimiento* de ecuaciones auxiliares. Ahora explicaremos una propiedad muy notable concerniente a sus *soluciones*. Consta que todos los trabajos de los geómetras eminentes han fracasado en la búsqueda de una solución general de ecuaciones de grado mayor que cuatro, o (para definir lo que se desea más exactamente) de la REDUCCION DE ECUACIONES MIXTAS A ECUACIONES PURAS. Existe la pequeña duda de si este problema no solamente está más allá de las facultades del análisis contemporáneo sino que propone lo imposible (cf. lo que dijimos de este asunto en *Demonstr. nova etc.*, art. 9). No obstante es cierto que existen innumerables ecuaciones mixtas de todos los grados que admiten una reducción a ecuaciones puras, y esperamos que los geómetras encontrarán esto gratificante si demostramos que nuestras ecuaciones son siempre de esta clase. Pero a causa de la longitud de esta discusión, presentaremos aquí solamente los principios más importantes para demostrar que la reducción es posible; reservamos para otra ocasión una consideración más completa, la que el tema merece. Presentaremos primero algunas observaciones generales acerca de las raíces de la ecuación $x^e - 1 = 0$, la que también abarca el caso en que e es un número compuesto.

I. Estas raíces están dadas (como se sabe de los libros elementales) por $\cos \frac{kP}{e} + i \sin \frac{kP}{e}$, donde para k tomamos los e números $0, 1, 2, 3, \dots, e-1$ o cualesquiera otros que sean congruentes a éstos según el módulo e . Una raíz, para $k = 0$ o para cualquier k divisible por e será $= 1$. Para cualquier otro valor de k será una raíz que es diferente de 1.

II. Puesto que $(\cos \frac{kP}{e} + i \sin \frac{kP}{e})^\lambda = \cos \frac{\lambda kP}{e} + i \sin \frac{\lambda kP}{e}$, es claro que si R es una tal raíz correspondiente a un valor de k que es primo relativo a e , entonces en la progresión R, R^2, R^3 , etc., el e -ésimo término será $= 1$ y todos los valores antecedentes son diferentes de 1. Se sigue inmediatamente que todas las e cantidades $1, R, R^2, R^3, \dots, R^{e-1}$ son diferentes y, ya que todas ellas satisfacen la ecuación $x^e - 1 = 0$, ellas darán todas las raíces de esta ecuación.

III. Finalmente, bajo la misma suposición, la suma

$$1 + R^\lambda + R^{2\lambda} \dots + R^{\lambda(e-1)} = 0$$

para cualquier valor del entero λ no divisible por e . Por esto es $= \frac{1-R^{\lambda e}}{1-R^\lambda}$ y el numerador de esta fracción es $= 0$, pero el denominador no es $= 0$. Cuando λ es divisible por e , la suma obviamente $= e$.

360.

Sea n , como siempre, un número primo, g una raíz primitiva para el módulo n , y $n - 1$ el producto de tres enteros positivos α , β y γ . Por brevedad incluiremos en éste los casos en que α o $\gamma = 1$. Cuando $\gamma = 1$, reemplazamos las sumas $(\gamma, 1)$, (γ, g) , etc. por las raíces $[1]$, $[g]$, etc. Supongamos por lo tanto que todas las α sumas de $\beta\gamma$ términos $(\beta\gamma, 1)$, $(\beta\gamma, g)$, $(\beta\gamma, g^2)$ y $(\beta\gamma, g^{\alpha-1})$ son conocidas y que queremos encontrar las sumas de γ términos. Hemos reducido la operación anterior a una ecuación mixta de grado β . Ahora mostraremos como resolverla mediante una ecuación pura del mismo grado. Por brevedad en vez de las sumas

$$(\gamma, 1), (\gamma, g^\alpha), (\gamma, g^{2\alpha}), \dots (\gamma, g^{\alpha\beta-\alpha})$$

los cuales están contenidas en $(\beta, \gamma, 1)$, escribiremos $a, b, c, \dots m$ respectivamente. En vez de las sumas

$$(\gamma, g), (\gamma, g^{\alpha+1}), \dots (\gamma, g^{\alpha\beta-\alpha+1})$$

contenidas en $(\beta\gamma, g)$ escribiremos $a', b', \dots m'$. Y en vez de

$$(\gamma, g^2), (\gamma, g^{\alpha+2}), \dots (\gamma, g^{\alpha\beta-\alpha+2})$$

escribiremos $a'', b'', \dots m''$, etc. hasta que se llegue a aquéllas que están contenidas en $(\beta\gamma, g^{\alpha-1})$.

I. Sea R una raíz arbitraria de la ecuación $x^\beta - 1 = 0$ y supongamos que la potencia de grado β de la función

$$t = a + Rb + R^2c + \dots + R^{\beta-1}m$$

es, de acuerdo con las reglas del artículo 345,

$$\begin{aligned} &N + Aa + Bb + Cc \dots + Mm \\ &+ A'a' + B'b' + C'c' \dots + M'm' \\ &+ A''a'' + B''b'' + C''c'' \dots + M''m'' \\ &+ \text{etc.} \end{aligned} = T$$

donde todos los coeficientes N, A, B, A' , etc. son funciones racionales enteras de R . Supónganse también que las β -ésimas potencias de las otras dos funciones

$$u = R^\beta a + Rb + R^2c \dots + R^{\beta-1}m \quad \text{y} \quad u' = b + Rc + R^2d \dots + R^{\beta-2}m + R^{\beta-1}a$$

se hacen respectivamente U y U' . Es fácil ver del artículo 350 que, puesto que u' resulta de reemplazar las sumas $a, b, c, \dots m$ con $b, c, d, \dots a$, tenemos

$$\begin{aligned} U' = & N + Ab + Bc + Cd \dots + Ma \\ & + A'b' + B'c' + C'd' \dots + M'a' \\ & + A''b'' + B''c'' + C''d'' \dots + M''a'' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

También es claro que $u = Ru'$ y luego $U = R^\beta U'$. Ya que $R^\beta = 1$, los coeficientes correspondientes en U y U' serán iguales. Finalmente, ya que t y u difieren solamente en cuanto a que a se multiplica por la unidad en t y por R^β en u , todos los coeficientes correspondientes (i.e., aquéllos que multiplican las mismas sumas) en T y en U , serán iguales, y así también los coeficientes correspondientes en T y en U' . Por lo tanto $A = B = C$ etc. $= M$; $A' = B' = C'$ etc.; $A'' = B'' = C''$ etc.; en T se reduce a una forma como

$$N + A(\beta\gamma, 1) + A'(\beta\gamma, g) + A''(\beta\gamma, g^2) + \text{etc.}$$

donde los coeficientes individuales N, A, A' , etc. son de la forma

$$pR^{\beta-1} + p'R^{\beta-2} + p''R^{\beta-3} + \text{etc.}$$

de tal forma que p, p', p'' , etc. son enteros dados.

II. Si se toma por R una raíz determinada de la ecuación $x^\beta - 1 = 0$ (suponemos que ya tenemos sus soluciones) de tal manera que ninguna potencia menor que la β -ésima potencia es igual a la unidad, T también será una cantidad determinada, y de esto es posible derivar t mediante la ecuación pura $t^\beta - T = 0$. Pero, puesto que esta ecuación tiene β raíces que son $t, Rt, R^2t, \dots R^{\beta-1}t$, puede existir una duda sobre cual de las raíces debe ser escogida. Sin embargo, esto es arbitrario como se mostrará. Recuérdese que, después de que todas las sumas de $\beta\gamma$ términos están determinadas, la raíz [1] se define como cualquiera de las $\beta\gamma$ raíces contenidas en $(\beta\gamma, 1)$, que luego debe ser denotada por este símbolo. Así es completamente arbitrario cual de las β sumas que conforman $(\beta\gamma, 1)$ queremos designar por a . Si después de que una de estas sumas se expresa por a , se supone que $t = \mathfrak{T}$, es fácil ver que la suma que se designaba por b puede ser cambiada a a y lo que anteriormente fue $c, d, \dots a, b$ ahora se convierte en $b, c, \dots m, a$, y el valor de t es ahora $= \frac{\mathfrak{T}}{R} = \mathfrak{T}R^{\beta-1}$.

Similarmente, si conviene hacer a igual a la suma que en un principio fue c , el valor de t se convierte en $\mathfrak{T}R^{\beta-2}$ y así sucesivamente. Así, t puede considerarse igual a cualquiera de las cantidades \mathfrak{T} , $\mathfrak{T}R^{\beta-1}$, $\mathfrak{T}R^{\beta-2}$, etc., i.e., a cualquier raíz de la ecuación $x^\beta - T = 0$, de acuerdo con que una u otra de las sumas en $(\beta\gamma, 1)$ sea expresada por $(\gamma, 1)$. *Q. E. D.*

III. Después de que la cantidad t ha sido determinada de esta forma, hay que determinar las otras $\beta - 1$ que resultan de t sustituyendo R sucesivamente por $R^2, R^3, R^4, \dots, R^\beta$, esto es

$$t' = a + R^2b + R^4c \dots + R^{2\beta-2}m, \quad t'' = a + R^3b + R^6c \dots + R^{3\beta-3}m, \quad \text{etc.}$$

La última de éstas ya se conoce, porque ella evidentemente $= a + b + c \dots + m = (\beta\gamma, 1)$; las otras pueden encontrarse de la siguiente forma. Por los preceptos del artículo 345 se puede encontrar el producto $t^{\beta-2}t'$ tal como t^β en I. Entonces usamos un método tal como el precedente para mostrar que de esto, se puede reducir a una forma

$$\mathfrak{N} + \mathfrak{A}(\beta\gamma, 1) + \mathfrak{A}'(\beta\gamma, g) + \mathfrak{A}''(\beta\gamma, g^2) \text{ etc.} = T'$$

donde $\mathfrak{N}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$, etc. son funciones racionales enteras de R y así T' es una cantidad conocida y $t' = \frac{T't^2}{T}$. Exactamente de la misma manera se encuentra T'' por el cálculo del producto $t^{\beta-3}t''$. Esta expresión tendrá una forma similar y puesto que su valor es conocido se deriva la ecuación $t'' = \frac{T''t^3}{T}$. Entonces t''' puede ser encontrado de la ecuación $t''' = \frac{T'''t^4}{T}$ donde T''' es asimismo una cantidad conocida, etc.

Este método no sería aplicable si fuera $t = 0$, porque entonces $T = T' = T''$ etc. $= 0$. Pero se puede mostrar que esto es imposible, aunque la demostración es tan larga que es necesario omitirla aquí. También existen algunos artificios especiales para convertir las fracciones $\frac{T'}{T}, \frac{T''}{T}$, etc. en funciones racionales *enteras* de R y algunos métodos más cortos, en el caso donde $\alpha = 1$, para encontrar los valores de $t', t'',$ etc., pero no los consideramos aquí.

IV. Finalmente, una vez encontrados $t, t', t'',$ etc., observando III del artículo precedente, resulta inmediatamente que $t + t' + t'' + \text{etc.} = \beta a$. Esto da el valor de a y de esto, por el artículo 346, se pueden derivar los valores de todas las restantes sumas de γ términos. Los valores de b, c, d , etc. también pueden ser encontrados, como lo mostrará una pequeña investigación, de las ecuaciones siguientes:

$$\beta b = R^{\beta-1}t + R^{\beta-2}t' + R^{\beta-3}t'' + \text{etc.}$$

$$\beta c = R^{2\beta-2}t + R^{2\beta-4}t' + R^{2\beta-6}t'' + \text{etc.}$$

$$\beta d = R^{3\beta-3}t + R^{3\beta-6}t' + R^{3\beta-9}t'' + \text{etc., etc.}$$

Entre el gran número de observaciones que podemos hacer concernientes a la discusión precedente enfatizamos solamente una. Con respecto a la solución de la ecuación pura $x^\beta - T = 0$, es claro que en muchos casos T tiene el valor imaginario $P + iQ$, así la solución depende en parte de la división de un ángulo (cuya tangente $= \frac{Q}{P}$), en parte de la división de una razón (uno a $\sqrt{P^2 + Q^2}$) en β partes. Es notable (no proseguiremos con este tema aquí) que el valor de $\sqrt[\beta]{P^2 + Q^2}$ siempre puede ser expresado *racionalmente* mediante cantidades ya conocidas. Así, excepto por la extracción de una raíz cuadrada, la *única* cosa que se requiere para una solución es la división del ángulo, e.g., para $\beta = 3$ solamente la trisección de un ángulo.

Finalmente, puesto que nada nos impide hacer $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ y de este modo $\beta = n - 1$, es evidente que la solución de la ecuación $x^n - 1 = 0$ puede ser reducida inmediatamente a la solución de una ecuación pura $x^{n-1} - T = 0$ de grado $n - 1$. Aquí T se determinará por las raíces de la ecuación $x^{n-1} - 1 = 0$. Como un resultado, la división del círculo completo en n partes requiere, 1º, la división del círculo completo en $n - 1$ partes; 2º, la división de otro arco en $n - 1$ partes, el cual puede ser construido tan pronto como la primera división esté hecha; 3º, la extracción de una raíz cuadrada y se puede mostrar que siempre es \sqrt{n} .

Aplicación de lo anterior a funciones trigonométricas.

Método para encontrar los ángulos de raíces particulares en Ω .

361.

Falta examinar más de cerca la conexión entre las raíces Ω y las funciones trigonométricas de los ángulos $\frac{P}{n}, \frac{2P}{n}, \frac{3P}{n}, \dots, \frac{(n-1)P}{n}$. El método usado para encontrar las raíces de Ω (a menos que consultemos tablas de senos, pero esto sería menos directo) deja incierto *cuales* raíces corresponden a los ángulos *individuales*; i.e., cuál raíz $= \cos \frac{P}{n} + i \sin \frac{P}{n}$, cual $= \cos \frac{2P}{n} + i \sin \frac{2P}{n}$, etc. Pero esta incertidumbre se puede eliminar fácilmente reflexionando que los cosenos de los ángulos $\frac{P}{n}, \frac{2P}{n}, \frac{3P}{n}, \dots, \frac{(n-1)P}{2n}$ están decreciendo continuamente (tomando en cuenta los signos) y que los senos son positivos. Por otro lado los ángulos $\frac{(n-1)P}{n}, \frac{(n-2)P}{n}, \frac{(n-3)P}{n}, \dots, \frac{(n+1)P}{2n}$ tienen los mismos cosenos que los de antes, pero los senos son negativos, aunque tienen los mismos valores absolutos. Por lo tanto, de las raíces Ω , las dos que tienen la mayor parte real (son iguales una a la otra) corresponden a los ángulos $\frac{P}{n}, \frac{(n-1)P}{n}$. La primera tiene positivo el coeficiente de i , la segunda lo tiene negativo. De las $n - 3$ raíces restantes, aquéllas que tienen la mayor parte real corresponden a los ángulos

$\frac{2P}{n}$, $\frac{(n-2)P}{n}$, y así sucesivamente. En tanto que se conozca la raíz correspondiente al ángulo $\frac{P}{n}$, las correspondientes a los restantes ángulos se pueden determinar a partir de ella porque, si suponemos que es $[\lambda]$, las raíces $[2\lambda]$, $[3\lambda]$, $[4\lambda]$, etc. corresponderán a los ángulos $\frac{2P}{n}$, $\frac{3P}{n}$, $\frac{4P}{n}$, etc. Así en el ejemplo del artículo 353 vemos que la raíz correspondiente al ángulo $\frac{1}{19}P$ debe ser $[11]$ y $[8]$ la del ángulo $\frac{18}{19}P$. Similarmente las raíces $[3]$, $[16]$, $[14]$, $[5]$, etc. corresponderán a los ángulos $\frac{2}{19}P$, $\frac{17}{19}P$, $\frac{3}{19}P$, $\frac{16}{19}P$, etc. En el ejemplo del artículo 354 la raíz $[1]$ corresponderá al ángulo $\frac{1}{17}P$, $[2]$ al ángulo $\frac{2}{17}P$, etc. De esta forma los cosenos y senos de los ángulos $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, etc. serán completamente determinados.

*Se derivan tangentes, cotangentes, secantes y cosecantes
a partir de senos y cosenos sin división.*

362.

Con respecto a los restantes funciones trigonométricas de estos ángulos, pudieron, por supuesto, derivarse de los cosenos y senos correspondientes mediante métodos ordinarios bien conocidos. Así secantes y tangentes se pueden encontrar dividiendo respectivamente la unidad y el seno por el coseno; cosecantes y cotangentes dividiendo la unidad y el coseno por el seno. Pero a menudo será mucho más útil obtener las mismas cantidades con la ayuda de las siguientes fórmulas, usando sólo adición y ninguna división. Sea ω uno cualquiera de los ángulos $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, \dots , $\frac{(n-1)P}{n}$ y sea $\cos \omega + i \sin \omega = R$, de modo que R será una de las raíces Ω , entonces

$$\cos \omega = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) = \frac{1 + R^2}{2R}, \quad \sin \omega = \frac{1}{2i}\left(R - \frac{1}{R}\right) = \frac{i(1 - R^2)}{2R}$$

y de esto

$$\sec \omega = \frac{2R}{1 + R^2}, \quad \tan \omega = \frac{i(1 - R^2)}{1 + R^2}, \quad \csc \omega = \frac{2Ri}{R^2 - 1}, \quad \cot \omega = \frac{i(R^2 + 1)}{R^2 - 1}$$

Ahora mostraremos como transformar los numeradores de estas cuatro fracciones de modo que sean divisibles por los denominadores.

I. Ya que $R = R^{n+1} = R^{2n+1}$ tenemos $2R = R + R^{2n+1}$. Esta expresión es divisible por $1 + R^2$ pues n es un número impar. Así tenemos

$$\sec \omega = R - R^3 + R^5 - R^7 \dots + R^{2n-1}$$

y así (puesto que $\sin \omega = -\sin(2n-1)\omega$, $\sin 3\omega = -\sin(2n-3)\omega$ etc. tenemos $\sin \omega - \sin 3\omega + \sin 5\omega \cdots + \sin(2n-1)\omega = 0$)

$$\sec \omega = \cos \omega - \cos 3\omega + \cos 5\omega \cdots + \cos(2n-1)\omega$$

o finalmente (ya que $\cos \omega = \cos(2n-1)\omega$, $\cos 3\omega = \cos(2n-3)\omega$, etc.)

$$= 2(\cos \omega - \cos 3\omega + \cos 5\omega \cdots \mp \cos(n-2)\omega) \pm \cos n\omega$$

los signos superiores o inferiores se tomarán de acuerdo con que n sea de la forma $4k+1$ o $4k+3$. Obviamente esta fórmula también se puede expresar como

$$\sec \omega = \pm(1 - 2\cos 2\omega + 2\cos 4\omega \cdots \pm 2\cos(n-1)\omega)$$

II. Similarmente, sustituyendo $1 - R^2$ por $1 - R^{2n+2}$ resulta

$$\tan \omega = i(1 - R^2 + R^4 - R^6 \cdots - R^{2n})$$

o (ya que $1 - R^{2n} = 0$, $R^2 - R^{2n-2} = 2i \sin 2\omega$, $R^4 - R^{2n-4} = 2i \sin 4\omega$, etc.)

$$\tan \omega = 2(\sin 2\omega - \sin 4\omega + \sin 6\omega \cdots \mp \sin(n-1)\omega)$$

III. Puesto que $1 + R^2 + R^4 \cdots + R^{2n-2} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} n &= n - 1 - R^2 - R^4 \cdots - R^{2n-2} \\ &= (1-1) + (1-R^2) + (1-R^4) \cdots + (1-R^{2n-2}) \end{aligned}$$

y cada uno de sus términos es divisible por $1 - R^2$. Así

$$\begin{aligned} \frac{n}{1-R^2} &= 1 + (1+R^2) + (1+R^2+R^4) \cdots + (1+R^2+R^4 \cdots + R^{2n-4}) \\ &= (n-1) + (n-2)R^2 + (n-3)R^4 \cdots + R^{2n-4} \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 y restando la cantidad

$$0 = (n-1)(1+R^2+R^4 \cdots + R^{2n-2})$$

y asimismo multiplicando por R tenemos

$$\frac{2nR}{1-R^2} = (n-1)R + (n-3)R^3 + (n-5)R^5 \cdots - (n-3)R^{2n-3} - (n-1)R^{2n-1}$$

y de esto inmediatamente obtenemos

$$\begin{aligned}\csc \omega &= \frac{1}{n} \left((n-1) \sen \omega + (n-3) \sen 3\omega \cdots - (n-1) \sen(2n-1)\omega \right) \\ &= \frac{2}{n} \left((n-1) \sen \omega + (n-3) \sen 3\omega + \text{etc.} + 2 \sen(n-2)\omega \right)\end{aligned}$$

Esta fórmula puede ser expresada también como

$$\csc \omega = -\frac{2}{n} \left(2 \sen 2\omega + 4 \sen 4\omega + 6 \sen 6\omega \cdots + (n-1) \sen(n-1)\omega \right)$$

IV. Multiplicando el valor de $\frac{n}{1-R^2}$, dado antes, por $1+R^2$ y restando la cantidad

$$0 = (n-1)(1+R^2+R^4 \cdots + R^{2n-2})$$

tenemos

$$\frac{n(1+R^2)}{1-R^2} = (n-2)R^2 + (n-4)R^4 + (n-6)R^6 \cdots - (n-2)R^{2n-2}$$

y de esto sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned}\cot \omega &= \frac{1}{n} \left((n-2) \sen 2\omega + (n-4) \sen 4\omega + (n-6) \sen 6\omega \cdots - (n-2) \sen(n-2)\omega \right) \\ &= \frac{2}{n} \left((n-2) \sen 2\omega + (n-4) \sen 4\omega \cdots + 3 \sen(n-3)\omega + \sen(n-1)\omega \right)\end{aligned}$$

y esta fórmula también se puede expresar como

$$\cot \omega = -\frac{2}{n} \left(\sen \omega + 3 \sen 3\omega \cdots + (n-2) \sen(n-2)\omega \right)$$

Método de reducir sucesivamente las ecuaciones para funciones trigonométricas.

363.

Suponiendo otra vez que $n-1 = ef$, la función X puede ser resuelta en e factores de grado f en tanto que se sepan los valores de todas las e sumas de f términos (art. 338). De la misma manera, suponiendo que $Z = 0$ es una ecuación de grado $n-1$ cuyas raíces son los senos o cualquiera otra función trigonométrica de los

ángulos $\frac{P}{n}, \frac{2P}{n} \dots \frac{(n-1)P}{n}$, la función Z se puede resolver en e factores de grado f de la siguiente forma.

Sea Ω el conjunto de los e períodos de f términos $(f, 1) = P, P', P'', \text{ etc.}$. Sea P el período de las raíces $[1], [a], [b], [c], \text{ etc.}$; P' el de las raíces $[a'], [b'], [c'], \text{ etc.}$; P'' el de las raíces $[a''], [b''], [c''], \text{ etc.}$. Sea el ángulo ω correspondiente a la raíz $[1]$, y así los ángulos $a\omega, b\omega, \text{ etc.}$ a las raíces $[a], [b], \text{ etc.}$; los ángulos $a'\omega, b'\omega, \text{ etc.}$ a las raíces $[a'], [b'], \text{ etc.}$; los ángulos $a''\omega, b''\omega, \text{ etc.}$ a las raíces $[a''], [b''], \text{ etc.}$. Es fácil ver que todos estos ángulos tomados juntos coinciden, con respecto a sus funciones trigonométricas*), con los ángulos $\frac{P}{n}, \frac{2P}{n}, \frac{3P}{n}, \dots \frac{(n-1)P}{n}$. Ahora si se denota la función que se trata por el carácter φ prefijado al ángulo, y si Y es el producto de los e factores

$$x - \varphi\omega, \quad x - \varphi a\omega, \quad x - \varphi b\omega \text{ etc.}$$

y el producto de los factores $x - \varphi a'\omega, x - \varphi b'\omega, \text{ etc.} = Y'$, el producto de $x - \varphi a''\omega, x - \varphi b''\omega, \text{ etc.} = Y''$ etc.: entonces necesariamente el producto $YY'Y'' \dots = Z$. Resta ahora mostrar que todos los coeficientes en las funciones $Y, Y', Y'', \text{ etc.}$ pueden ser reducidos a la forma

$$A + B(f, 1) + C(f, g) + D(f, g^2) \dots + L(f, g^{e-1})$$

Hecho esto, evidentemente todos ellos serán conocidos en tanto se conozcan los valores de todas las sumas de f términos: mostramos esto de la siguiente forma.

Tal como $\cos \omega = \frac{1}{2}[1] + \frac{1}{2}[1]^{n-1}$, $\sin \omega = -\frac{1}{2}i[1] + \frac{1}{2}i[1]^{n-1}$ así por el artículo precedente todas las restantes funciones trigonométricas del ángulo ω se pueden reducir a la forma $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}[1] + \mathfrak{C}[1]^2 + \mathfrak{D}[1]^3 + \text{ etc.}$ y no es difícil ver que la función del ángulo $k\omega$ se hace $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}[k] + \mathfrak{C}[k]^2 + \mathfrak{D}[k]^3 + \text{ etc.}$ donde k es cualquier entero. Ahora, puesto que los coeficientes individuales en Y son funciones racionales enteras invariables de $\varphi\omega, \varphi a\omega, \varphi b\omega, \text{ etc.}$, si se sustituyen sus valores por estas cantidades, sus coeficientes individuales se convertirán en funciones racionales enteras invariables de $[1], [a], [b], \text{ etc.}$ Por lo tanto, por el artículo 347, ellas se reducirán a la forma $A + B(f, 1) + C(f, g) + \text{ etc.}$ Los coeficientes en $Y', Y'', \text{ etc.}$ también pueden ser reducidos a formas similares. *Q. E. D.*

*) Dos ángulos coinciden en este aspecto si su diferencia es igual a la circunferencia o a un múltiplo de ella. Podemos decir que son *congruentes según la circunferencia* si queremos usar el término congruencia en un sentido extendido

364.

Agregamos unas pocas observaciones acerca del problema del artículo precedente.

I. Los coeficientes individuales en Y' son funciones de raíces contenidas en el período $P' = (f, a')$ tal como las funciones de las raíces en P dan los coeficientes correspondientes en Y . Es claro del artículo 347, por lo tanto, que se puede derivar Y' de Y , sustituyendo en todo lugar en Y las cantidades $(f, 1)$, (f, g) , (f, g^2) , etc. por (f, a') , $(f, a'g)$, $(f, a'g^2)$, etc. respectivamente. Igualmente Y'' puede ser derivado de Y , sustituyendo en todo lugar en Y las cantidades $(f, 1)$, (f, g) , (f, g^2) , etc. por (f, a'') , $(f, a''g)$, $(f, a''g^2)$, etc. respectivamente, etc. Por consiguiente, en tanto que se tenga la función Y , las restantes Y' , Y'' , etc. siguen fácilmente.

II. Suponiendo

$$Y = x^f - \alpha x^{f-1} + \beta x^{f-2} - \text{etc.}$$

los coeficientes α , β , etc. son respectivamente la suma de las raíces de la ecuación $Y = 0$, i.e., de las cantidades $\varphi\omega$, $\varphi a\omega$, $\varphi b\omega$, etc., la suma de sus productos tomados dos a dos, etc. Pero a menudo estos coeficientes se encontrarán mucho más cómodamente por un método similar al del artículo 349, esto es, calculando la suma de las raíces $\varphi\omega$, $\varphi a\omega$, $\varphi b\omega$, etc., la suma de sus cuadrados, cubos, etc. y deduciendo de esto por el teorema de Newton esos coeficientes. Siempre que φ designe la tangente, secante, cotangente o cosecante se dan aún otros métodos de abreviación del proceso, pero no podemos considerarlos aquí.

III. El caso donde f es un número par merece consideración especial porque entonces cada uno de los períodos P , P' , P'' , etc. estará compuesto de $\frac{1}{2}f$ períodos de dos términos. Si P consiste de los períodos $(2, 1)$, $(2, \mathfrak{a})$, $(2, \mathfrak{b})$, $(2, \mathfrak{c})$, etc., entonces los números 1 , \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} , etc. y $n-1$, $n-\mathfrak{a}$, $n-\mathfrak{b}$, $n-\mathfrak{c}$, etc. tomados en conjunto coincidirán con los números 1 , a , b , c , etc. o al menos (esto viene a ser la misma cosa) serán congruentes a ellos según el módulo n . Pero $\varphi(n-1)\omega = \pm\varphi\omega$, $\varphi(n-\mathfrak{a})\omega = \pm\varphi a\omega$ etc., donde los signos superiores son tomados cuando φ designa el coseno o la secante, los inferiores cuando φ designa el seno, la tangente, la cotangente o la cosecante. Se sigue de esto que en los dos primeros casos, los factores que componen Y serán iguales dos a dos, y así Y es un cuadrado y será $= y^2$ si y se pone igual al producto de

$$x - \varphi\omega, \quad x - \varphi a\omega, \quad x - \varphi b\omega \text{ etc.}$$

En los mismos casos, las funciones restantes Y' , Y'' , etc. serán cuadrados, y suponiendo que P' está compuesto de $(2, \mathfrak{a}')$, $(2, \mathfrak{b}')$, $(2, \mathfrak{c}')$, etc.; P'' de $(2, \mathfrak{a}'')$, $(2, \mathfrak{b}'')$, $(2, \mathfrak{c}'')$, etc., etc., el producto de $x - \varphi \mathfrak{a}' \omega$, $x - \varphi \mathfrak{b}' \omega$, $x - \varphi \mathfrak{c}' \omega$, etc. = y' , el producto de $x - \varphi \mathfrak{a}'' \omega$, $x - \varphi \mathfrak{b}'' \omega$, etc. = y'' , etc., entonces $Y' = y'^2$, $Y'' = y''^2$, etc.; y la función Z también será un cuadrado (cf. antes, art. 337) y sus raíces serán iguales al producto de y , y' , y'' , etc. Pero claramente y' , y'' , etc. pueden ser derivadas de y tal como dijimos en I que Y' , Y'' son derivadas de Y . Luego, los coeficientes individuales en y también pueden ser reducidos a la forma

$$A + B(f, 1) + C(f, g) + \text{etc.}$$

porque las sumas de las potencias individuales de las raíces de la ecuación $y = 0$ son iguales a la mitad de las sumas de las potencias de las raíces de la ecuación $y = 0$ y así son reducibles a una forma tal. En los cuatro casos posteriores sin embargo, Y será el producto de los factores

$$x^2 - (\varphi \omega)^2, x^2 - (\varphi \mathfrak{a} \omega)^2, x^2 - (\varphi \mathfrak{b} \omega)^2 \text{ etc.}$$

y así de la forma

$$x^f - \lambda x^{f-2} + \mu x^{f-4} - \text{etc.}$$

Es claro que los coeficientes λ , μ , etc. pueden ser deducidos de las sumas de cuadrados, bicuadrados, etc. de las raíces $\varphi \omega$, $\varphi \mathfrak{a} \omega$, $\varphi \mathfrak{b} \omega$, etc. La misma cosa es cierta para las funciones Y' , Y'' , etc.

Ejemplo. I. Sea $n = 17$, $f = 8$ y φ el coseno. Entonces resulta

$$Z = (x^8 + \frac{1}{2}x^7 - \frac{7}{4}x^6 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{15}{16}x^4 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{5}{32}x^2 - \frac{1}{32}x + \frac{1}{256})^2$$

y así \sqrt{Z} será resuelta en dos factores y , y' de grado cuatro. El período $P = (8, 1)$ consiste de $(2, 1)$, $(2, 9)$, $(2, 13)$ y $(2, 15)$; así y será un producto de los factores

$$x - \varphi \omega, \quad x - \varphi 9\omega, \quad x - \varphi 13\omega, \quad x - \varphi 15\omega$$

Sustituyendo $\varphi k \omega$ por $\frac{1}{2}[k] + \frac{1}{2}[n - k]$ se encuentra que

$$\begin{aligned} \varphi \omega + \varphi 9\omega + \varphi 13\omega + \varphi 15\omega &= \frac{1}{2}(8, 1) \\ (\varphi \omega)^2 + (\varphi 9\omega)^2 + (\varphi 13\omega)^2 + (\varphi 15\omega)^2 &= 2 + \frac{1}{4}(8, 1) \end{aligned}$$

Asimismo la suma de los cubos es $= \frac{3}{8}(8, 1) + \frac{1}{8}(8, 3)$ y la suma de los bicuadrados es $= 1\frac{1}{2} + \frac{5}{16}(8, 1)$. Así por el teorema de Newton los coeficientes en y serán

$$y = x^4 - \frac{1}{2}(8, 1)x^3 + \frac{1}{4}((8, 1) + 2(8, 3))x^2 - \frac{1}{8}((8, 1) + 3(8, 3))x + \frac{1}{16}((8, 1) + (8, 3))$$

e y' es derivado de y intercambiando $(8, 1)$ y $(8, 3)$. Por lo tanto sustituyendo $(8, 1)$ y $(8, 3)$ por los valores $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ y $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$, obtenemos

$$\begin{aligned} y &= x^4 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)x^3 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\sqrt{17}\right)x - \frac{1}{16} \\ y' &= x^4 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)x^3 - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{17}\right)x - \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Similarmente \sqrt{Z} se puede resolver en cuatro factores de grado dos. El primero será $(x - \varphi\omega)(x - \varphi 13\omega)$, el segundo $(x - \varphi 9\omega)(x - \varphi 15\omega)$, el tercero $(x - \varphi 3\omega)(x - \varphi 5\omega)$, el cuarto $(x - \varphi 10\omega)(x - \varphi 11\omega)$, y todos los coeficientes en estos factores pueden ser expresados en términos de las cuatro sumas $(4, 1)$, $(4, 9)$, $(4, 3)$ y $(4, 10)$. Evidentemente el producto del primer factor por el segundo factor será y , el producto del tercero por el cuarto será y' .

Ejemplo. II. Si, con todo lo demás igual, se supone que φ representa el seno, de modo que

$$Z = x^{16} - \frac{17}{4}x^{14} + \frac{119}{16}x^{12} - \frac{221}{32}x^{10} + \frac{935}{256}x^8 - \frac{561}{512}x^6 + \frac{357}{2048}x^4 - \frac{51}{4096}x^2 + \frac{17}{65536}$$

ha de ser resuelto en dos factores y e y' de grado 8, entonces y será un producto de cuatro factores cuadrados

$$x^2 - (\varphi\omega)^2, \quad x^2 - (\varphi 9\omega)^2, \quad x^2 - (\varphi 13\omega)^2, \quad x^2 - (\varphi 15\omega)^2$$

Ahora, ya que $\varphi k\omega = -\frac{1}{2}i[k] + \frac{1}{2}i[n - k]$, resulta

$$(\varphi k\omega)^2 = -\frac{1}{4}[2k] + \frac{1}{2}[n] - \frac{1}{4}[2n - 2k] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}[2k] - \frac{1}{4}[2n - 2k]$$

Así, la suma de los cuadrados de las raíces $\varphi\omega$, $\varphi 9\omega$, $\varphi 13\omega$, $\varphi 15\omega$ será $2 - \frac{1}{4}(8, 1)$, la suma de sus cuartas potencias $= \frac{3}{2} - \frac{3}{16}(8, 1)$, la suma de sus sextas potencias

$= \frac{5}{4} - \frac{9}{64}(8, 1) - \frac{1}{64}(8, 3)$, la suma de sus octavas potencias $\frac{35}{32} - \frac{27}{256}(8, 1) - \frac{1}{32}(8, 3)$. Por lo tanto

$$y = x^8 - \left(2 - \frac{1}{4}(8, 1)\right)x^6 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{16}(8, 1) + \frac{1}{8}(8, 3)\right)x^4 \\ - \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{64}(8, 1) + \frac{5}{64}(8, 3)\right)x^2 + \frac{1}{16} - \frac{5}{256}(8, 1) + \frac{3}{256}(8, 3)$$

e y' es determinado a partir de y intercambiando $(8, 1)$ y $(8, 3)$, así, sustituyendo los valores de estas sumas obtenemos

$$y = x^8 - \left(\frac{17}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17}\right)x^6 + \left(\frac{51}{32} - \frac{7}{32}\sqrt{17}\right)x^4 - \left(\frac{17}{32} - \frac{7}{64}\sqrt{17}\right)x^2 + \frac{17}{256} - \frac{1}{64}\sqrt{17} \\ y' = x^8 - \left(\frac{17}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}\right)x^6 + \left(\frac{51}{32} + \frac{7}{32}\sqrt{17}\right)x^4 - \left(\frac{17}{32} + \frac{7}{64}\sqrt{17}\right)x^2 + \frac{17}{256} + \frac{1}{64}\sqrt{17}$$

Así Z puede ser resuelto en cuatro factores cuyos coeficientes se pueden expresar por sumas de cuatro términos. El producto de dos de ellos será y , el producto de los otros dos será y' .

*Secciones del círculo que pueden realizarse por ecuaciones cuadráticas
o sea por construcciones geométricas.*

365.

Así, si n es un número primo, por la discusión precedente hemos reducido la división del círculo en n partes a la solución de tantas ecuaciones como factores haya en el número $n-1$. El grado de la ecuación se determina por el tamaño de los factores. Por lo tanto, siempre que $n-1$ es una potencia del número 2, lo que ocurre cuando el valor de n es 3, 5, 17, 257, 65537, etc., la división del círculo se reduce a ecuaciones cuadráticas únicamente, y las funciones trigonométricas de los ángulos $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, etc. pueden ser expresadas por raíces cuadradas que son más o menos complicadas (de acuerdo con el tamaño de n). Así, en estos casos la división del círculo en n partes o la inscripción de un polígono regular de n lados puede ser efectuada por construcciones geométricas. Así, e.g., para $n = 17$, por los artículos 354 y 361 se deriva la siguiente expresión para el coseno del ángulo $\frac{1}{17}P$:

$$-\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

El coseno de múltiplos de este ángulo tendrá una forma similar, pero el seno tendrá un signo radical más. Ciertamente es asombroso que aunque la divisibilidad geométrica del círculo en tres y cinco partes fue conocida ya en los tiempos de Euclides, nada fue agregado a este descubrimiento durante 2000 años. Todos los geómetras han asegurado que, excepto por aquellas secciones y las que se derivan directamente de ellas, esto es, división en 15 , $3 \cdot 2^\mu$, $5 \cdot 2^\mu$, y 2^μ partes, no existen otras que puedan ser efectuadas por construcciones geométricas. Es fácil mostrar que si el número primo n es $= 2^m + 1$, el exponente m no puede tener otros factores primos excepto 2 , y así es igual a 1 o 2 o una potencia mayor del número 2 . Pues si m fuera divisible por algún número impar ζ (mayor que la unidad) de modo que $m = \zeta\eta$, entonces $2^m + 1$ sería divisible por $2^\eta + 1$ y así necesariamente compuesto. Todos los valores de n , que pueden ser reducidos a ecuaciones cuadráticas están, por consiguiente, contenidos en la forma $2^{2^\nu} + 1$. Así, los cinco números 3 , 5 , 17 , 257 , 65537 resultan de hacer $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ o $m = 1, 2, 4, 8, 16$. Pero la división geométrica del círculo no puede ser efectuada para *todos* los números contenidos en la fórmula sino solamente para aquéllos que son primos. Fermat fue engañado por su inducción y afirmó que todos los números contenidos en esa forma son necesariamente primos, pero el distinguido Euler notó primero que esta regla es errónea para $\nu = 5$ o sea $m = 32$, puesto que el número $2^{32} + 1 = 4294967297$ contiene el factor 641 .

Siempre que $n - 1$ contenga otros factores primos distintos de 2 , somos llevados a ecuaciones de mayor grado, a saber, a una o más ecuaciones cúbicas cuando 3 aparece una o varias veces entre los factores primos de $n - 1$, a ecuaciones de quinto grado cuando $n - 1$ es divisible por 5 , etc., **PODEMOS PROBAR CON TODO RIGOR QUE ESTAS ECUACIONES DE MAYOR GRADO NO PUEDEN SER ELUDIDAS DE NINGUNA FORMA NI PUEDEN SER REDUCIDAS A ECUACIONES DE MENOR GRADO.** Los límites del presente trabajo excluyen aquí esta demostración, pero emitimos esta advertencia no sea que alguien intente llevar a cabo otras construcciones geométricas que no son las sugeridas por nuestra teoría (e.g., secciones en 7 , 11 , 13 , 19 , etc. partes) y así gaste su tiempo inútilmente.

366.

Si un círculo ha de ser cortado en a^α partes, donde a es un número primo, evidentemente esto puede ser hecho geométricamente cuando $a = 2$ pero no para cualquier otro valor de a si $\alpha > 1$, pues entonces además de las ecuaciones requeridas para la división en a partes, será necesario resolver otras $\alpha - 1$ de grado a , y éstas

no pueden ser evitadas ni reducidas de ninguna manera. Por lo tanto, en general, el grado de las ecuaciones necesarias se puede encontrar de los factores primos del número $(a - 1)a^{\alpha-1}$ (incluyendo también el caso en que $\alpha = 1$).

Finalmente si el círculo ha de ser cortado en $N = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \dots$ partes, donde a , b , c , etc. son números primos diferentes, es suficiente hacer divisiones en a^{α} , b^{β} , c^{γ} , etc. partes (art. 336). Así, a fin de conocer el grado de las ecuaciones necesarias para este propósito, es necesario considerar los factores primos de los números

$$(a - 1)a^{\alpha-1}, \quad (b - 1)b^{\beta-1}, \quad (c - 1)c^{\gamma-1}, \text{ etc.}$$

o, lo que viene a ser la misma cosa, los factores de su producto. Se observa que este producto indica el número de enteros primos relativos a N y menores que él (art. 38). Geométricamente, por lo tanto, esta división puede ser realizada solamente cuando este número es una potencia de 2. Pero cuando los factores incluyen números primos diferentes de 2, digamos p , p' , etc., entonces las ecuaciones de grados p , p' , etc. no pueden ser evitadas. En general, por lo tanto, a fin de poder dividir geométricamente el círculo en N partes, N debe ser 2 o una potencia más alta de 2, o un número primo de la forma $2^m + 1$, o el producto de varios números primos de esta forma, o el producto de uno o varios de tales números primos por 2 o por una potencia más alta de 2. En resumen, se requiere que N no incluya factores primos impares que no sean de la forma $2^m + 1$ ni algún factor primo de la forma $2^m + 1$ más que una vez. Los siguientes son los 38 valores de N abajo de 300:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.
