

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN  
MARCOS  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Escuela Profesional de Matemática  
Introducción a la Geometría Diferencial  
Examen Final      28 Jun 2018**

1. (a) Hallar la ecuación de la evolvente de la curva descrita por  $\overline{R}(\lambda) = (a \cos \lambda, a \sin \lambda, b \lambda)$ , a y b constantes. (3 ptos)  
(b) Demostrar la siguiente propiedad de las curvas de Bertrand: El producto de las torsiones de las curvas  $\Gamma$  y  $\Gamma^*$  en puntos correspondientes es constante. (3 ptos)  
(c) Demostrar que el plano osculador tiene una curva, en P, un contacto de tercer orden, por lo menos si y solamente si la curvatura o la torsión se anulan en P. (3 ptos)
2. Se considera una circunferencia de radio  $2a$  y centro en el punto F1 y el punto F2 en el interior de esta circunferencia, que se encuentra a la distancia  $2c$  respecto al centro. El punto arbitrario A de la circunferencia se une con el punto F2 mediante un segmento, y a través de la mitad de éste se traza una perpendicular L. Hallar la envolvente de la familia de semejantes perpendiculares. (5 ptos)
3. Demostrar: En el espacio  $\mathbb{R}^3$ , la gráfica de una ecuación en dos de las tres variables  $x, y, z$  es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje asociado con la variable faltante, y cuya directriz es una curva en el plano asociado con las dos variables que aparecen en la ecuación. (4 ptos)
4. Se considera la superficie de ecuaciones paramétricas  $x = u + v, y = u - v, z = 4uv$ , para  $-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty$ .
  - (a) Efectuar el cambio de parámetros dado por  $u = \frac{\alpha(\cosh \beta + \sinh \beta)}{2}, v = \frac{\alpha(\cosh \beta - \sinh \beta)}{2}$
  - (b) ¿Conserva el cambio de parámetros el carácter de los puntos de la superficie? (2 ptos)