Game Theory

Sora Maekawa

2025 年 12 月 10 日

まえがき

■本書の構成　以下のように議論が進む.

1. **第 1〜2 章: 合理的意思決定**
2. **第 3〜6 章: 完全情報に基づく静的ゲーム**
   被支配戦略, 支配戦略, 合理性の仮定, 合理性に関する共通知識を仮定した場合の帰結, ナッシュ均衡
3. **第 7〜11 章: 完全情報に基づく動的ゲーム**
   extensive-form ゲーム, 逐次合理性, 部分ゲーム完全均衡, 多段階・繰り返し・交渉ゲーム
4. **第 12〜14 章: 不完全情報に基づく静的ゲーム**
   ベイズゲーム, ベイズ・ナッシュ均衡, 逆選択, 陪審投票, オークション, メカニズムデザイン
5. **第 15〜18 章: 不完全情報の動的ゲーム**
   完全ベイズ均衡, 逐次均衡, シグナリングゲーム, 評判の発達, 情報伝達ゲーム

1　The Single-Person Decision Problem

■意思決定問題の構成要素　意思決定問題は, 3 つの特徴から構成される.

1. 行動 (Actions): プレイヤーが選択できるすべての選択肢
2. 結果 (Outcomes): いずれかの行動から生じる可能性のある結果
3. 選好 (Preferences): プレイヤーが起こり得る **結果の** 集合に対する順位付け

■合理性　完備かつ推移的な選好関係 (合理的選好関係) を前提とする.

■利得関数 (Payoff Function)　利得関数を用いて行動と結果を評価できる.

定義 1.1 利得関数

利得関数 $u : X \to \mathbb{R}$ は, 任意のペア $x, y \in X$ に対して, $u(x) \geq u(y)$ が $x \succsim y$ のときかつその場合に限り, 選好関係 $\succsim$ を表す.

表現定理は有限集合の場合についてのみ言及されている.

命題 1.1

結果の集合 X が有限である場合, X に対する任意の合理的な選好関係は利得関数で表せる.

■決定木　Figure 1.1 を見よ. 合理的な意思決定者は, 木を上から下まで見て, 各枝からの利得を考慮し, 最も高い利得を持つ枝を選択する. プレイヤーが選択を行うノードは **決定ノード** (decision node) と呼ばれ, ツリーの終端にある, 利得が付与されるノードは **終端ノード** (terminal nodes) と呼ばれる.

■ホモ・エコノミクス　結果の上 において利得関数で定義される, 幸福を最大化する行動をする点で合理的.

■合理的選択パラダイム　合理的選択理論は, 意思決定者が合理性に導かれて最善の行動を選択すると主張する. しかし, このパラダイムを採用することで, いくつかの暗黙の仮定を課していることに注意すべき.

仮定 合理的選択の仮定

プレイヤーは, 以下を知ることで, 意思決定問題を完全に理解する:

1. すべての可能な行動 A
2. すべての可能な結果 X
3. 各行動がどの結果をもたらすか
4. 結果に対する合理的な選好 (利得)

このパラダイムの運用には, 行動の中から選択する必要がある. しかし, 現状は結果の上で選好 (利得) が定義されている. ゆえに結果ではなく **行動に対する選好 (利得) を定義したい**. ここで, 行動と結果の間の一対一対応 (関数) は, 選好と利得を行動に対して定義できることを意味する:

定義 行動の上に定義された利得 $v(a)$

結果 $x(a)$ は行動 a からもたらされるものとする. 行動 a からの利得は $v(a) = u(x(a))$ で与えられる.

定義 1.2 合理的プレイヤー

行為に対する利得関数 $v(\cdot)$ を持つ意思決定問題に直面しているプレイヤーが合理的であるとは, そのプレイヤーが利得を最大化する行為 $a \in A$ を選択する場合を指す. つまり, $a^* \in A$ が選択されるのは, すべての $a \in A$ に対して $v(a^*) \geq v(a)$ のときかつその場合に限る.

定義 Homo economicus

合理的な選好を持ち, 意思決定問題のすべての側面を理解し, 常に可能な行動の集合から最大の利得をもたらす選択肢を選択するという点で合理的なプレイヤー

2　Introducing Uncertainty and Time

あとで

3 Preliminaries (Static Games of Complete Information)

我々の意思決定問題には 1 つの欠点がある. それは, 意思決定問題の世界が, 我々の幸福を決定づける結果が, 自身の行動の帰結と, 我々の制御を超えたランダム性で決まる世界であること. すなわち, 意思決定問題に対する現状の枠組みは, **我々の結果が他の意思決定者の選択に左右される場合には不十分** なのだ. したがって, 相互作用するプレイヤーが環境を理解し, 自分の行動が自分と対戦相手が直面する結果にどのように影響するか, そしてその結果が他のプレイヤーによってどのように評価されるかという戦略的状況を記述・分析するために, **意思決定問題の枠組みを修正する必要がある**.

■静的ゲーム 各プレイヤーが一度きりの独立した決定を同時に下し, 行動選択に応じた結果が実現される.

■完全情報ゲーム 大まかに言えば, すべてのプレイヤーがゲームをあらゆる点で理解していること:

定義 完全情報ゲーム

完全情報ゲームでは, 以下の 4 つの要素がゲームの全プレイヤー間で **共通認識** となっている必要がある.

1. 全プレイヤーの全ての可能な行動
2. 全ての可能な結果
3. 全プレイヤーの行動の各組み合わせがどの結果にどう影響するか
4. 各プレイヤーの結果に対する選好

■共通認識 完全情報ゲームの定義に利用した語を定義しておこう.

定義 3.1 共通認識

事象 E が共通知識であるとは:

1. 誰もが E を知っている場合
2. 誰もが, 「誰もが E を知っていること」を知っている場合
3. $\cdots$

と無限に繰り返される場合をいう.

各プレイヤーの推論能力を担保するための仮定だと思えばよい.

■正規形ゲーム ゲームを表現する最も一般的な方法の 1 つは, 以下の正規形ゲームによるもの.

大まかな定義 正規形ゲーム (normal-form game)

正規形ゲームは, 3 つの特徴で構成される

1. プレイヤーの集合
2. 各プレイヤーの行動の集合
3. 各プレイヤーの利得関数の集合. **プレイヤーが選択した行動の組み合わせごとに** 利得値を与える

意思決定問題の定義に似ているが, **プレイヤー間の相互作用** が導入されている点で異なる.

■戦略　戦略とは, 多くの場合特定の目標を達成するための **行動計画** と定義される. **Ch.6** までは, プレイヤーが決定論的な行動を選択する場合 (純粋戦略) のみを対象とする.

定義 3.2 純粋戦略

プレイヤー i の純粋戦略とは, **決定論的な行動計画** である. プレイヤー i のすべての純粋戦略の集合を S_i と表記する. 純粋戦略のプロファイル $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S_i \; \forall i = 1, 2, \ldots, n$ は, ゲームに参加する n 人のプレイヤー全員が選択する純粋戦略の特定の組み合わせを表す.

■正規形ゲームの正式な定義　語の定義が出来たところで, 今一度正規系ゲームを正式に定義しよう.

定義 3.3 正規形ゲーム

正規形ゲームは, 以下の 3 つの要素を含む:

1. 有限のプレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
2. 純粋戦略集合の集合 $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$
3. 選択された戦略の各組み合わせにそれぞれ利得値を割り当てる利得関数の集合 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, すなわち各 $i \in N$ についての関数 $v_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ の集合

正規形ゲームは以下のような 3 集合によって記される:

$$\left\langle N, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^{n} \right\rangle$$

■有限ゲーム　以下のように定義される.

定義 3.4 有限ゲーム

プレイヤー数が有限で, S_i での戦略の数が全プレイヤー $i \in N$ に対して有限なゲーム

■ゲームの行列表記　2 人制の有限ゲームは, 正規形ゲームのすべての関連情報を含む行列で表すことができる (**Ex. 囚人のジレンマ**). しかし, クールノー寡占と投票の例は行列で表現できない. 前者は有限ゲームではなく, 投票ゲームには 2 人以上のプレイヤーが参加する.

■均衡に関する仮定　解の概念に関するあらゆる予測 (均衡) は, **自己強制性** を持つ (self-enforcing) 必要がある. つまり, 戦略プロファイルが均衡となるためには, 他のプレイヤーがどのように選択を行うかを前提として, 各プレイヤーが自身の選択に満足することが必要になる.

■解概念の評価基準　ゲームにおけるプレイヤーの行動を予測する理論を構築する際には, その理論の, 方法論的ツールとしての優位性を評価すべき. これには存在性, 一意性, 不変性 (Invariance) が有用. 一意性は, 非協力環境での戦略的相互作用の性質で成立が困難. 不変性とは, 解概念がゲーム構造の小変化への頑健性.

■結果・予測の評価基準　次に, 解概念が規定する予測の特性を評価したい. 我々はプレーヤーがパレート基準に従って行動し, パレート最適な結果を調整する方法を見つけることを期待する.

定義 3.5 パレート効率性

戦略プロファイル $s \in S$ が $s' \in S$ をパレート支配するとは, $v_i(s) \geq v_i(s')\ \forall i \in N$ かつ, 少なくとも 1 つの $i \in N$ について $v_i(s) > v_i(s')$ となる場合である. 戦略プロファイルがパレート最適であるとは, 他のどの戦略プロファイルによってもパレート支配されていないことを意味する.

パレート効率性は必ずしも達成されるとは限らない.

4 Rationality and Common Knowledge

合理性, 合理性に関する共通知識の仮定を課すことの, 解概念への含意について考察する.

■厳密支配戦略均衡 SDSE までの道筋を整理しよう.

定義 4.1 厳密被支配戦略

$s_i \in S$, $s' \in S$ をプレイヤー i の可能な戦略とする. s' が s によって厳密に支配されているとは:

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall\, s_{-i} \in S_{-i}$$

を指し, $s_i \succ_i s_i'$ と書く.

主張 4.1

合理的なプレイヤーは, 決して厳密に支配される戦略をとらない.

囚人のジレンマにおいては各プレイヤーにとって厳密に支配されない戦略は (F, F) 一つに定まる. つまり, 合理性だけで唯一の予測にたどり着けるわけだ. 被支配戦略を回避してたどり着く先として以下の戦略がある.

定義 4.2 厳密支配戦略

$s_i \in S$ が i にとって厳密に支配的な戦略であるとは:

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall\, s_i' \in S_i,\ s_i' \neq s_i, \text{ and } s_{-i} \in S_{-i}$$

定義 4.3 厳密支配戦略均衡 (Strict Dominant Strategy Equilibrium)

$s^D \in S$ は, $s_i^D \in S_i$ がすべての $i \in N$ に対して厳密支配戦略である場合, **厳密支配戦略均衡**.

均衡は, **戦略プロファイル**であり利得ベクトルではない.

命題 4.1 SDSE の一意性

ゲーム $\Gamma = \left\langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n \right\rangle$ が厳密支配戦略均衡 s^D を持つ場合, s^D は**唯一の**支配戦略均衡.

証明: **演習 4.1**

■SDSE の評価 SDSE は一意性を持つ一方で, 存在性の点でイマイチ. 男女の争いゲームなどでは実際に被支配戦略が存在しないために SDSE も存在しない. 不変性は満たす.

パレート効率性は満たされない (Ex. 囚人のジレンマ). パレート効率性の失敗は解概念としての失敗を意味せず, **他の強制メカニズムを作り出すことで利益を得られる** ことを意味する (Ex. マフィアの報復).

■弱支配戦略支配均衡 弱い不等号に SDSE を置き換えたもの. 一意性は保証しない (証明: **演習 4.2**).

■IESDS 厳密被支配戦略の繰り返し排除 (IESDS) について考慮する. 合理性は, プレイヤーが取りそうにない選択肢を排除するためには有用だった, ここでは更に **合理性の共通認識** を利用することによって更にこれを進めることが出来る. もしすべてのプレイヤーが, 各プレイヤーが決して厳密被支配戦略を取らないこと (合理性) を知っていれば, 彼らはこれらをお互い効果的に無視できる. 実質的にはゲームを小規模なものに段階的なものに制限していくことができ, この結果として支配戦略を見つけられうる. これが **IESDS** のプロセス. 具体的には以下のような流れ, S_i^k を k ラウンドの IESDS を生き残るプレイヤー i の戦略集合として:

1. 各 i について, 元々の戦略集合を $S_i^0 = S_i$ と定義し, $k = 0$ と設定する
2. Q. $s_i \in S_i^k$ という戦略が厳密に支配されているプレイヤーはいますか?
   はい: **ステップ 3** へ　いいえ: **ステップ 4** へ
3. すべてのプレイヤー $i \in N$ について, 厳密被支配戦略 $s_i \in S_i^k$ をすべて削除
   $k = k + 1$ と設定し, 削除された厳密被支配戦略を含まない戦略集合 S_i^k を持つ新しいゲームを定義
   ステップ 2 に戻る
4. S_i^k の残りの戦略は, 行動に対する合理的な予測

定義 4.4 繰り返し排除均衡 (Iterated-Elimination Equilibrium)

IESDS を生き残る任意の戦略プロファイル $s^{ES} = (s_1^{ES}, \ldots, s_n^{ES})$ を **繰り返し排除均衡** と呼ぶ.

■IESDS の評価 一意性は保証できないが存在性は保証される. パレート効率性は成立するとは限らない.

命題 4.2 SDSE と IESDS

$\Gamma = \left\langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n \right\rangle$ が厳密支配戦略均衡 s^D を持つ場合, s^D は唯一 IESDS を生き残る.

Proof. 定義より一ラウンド目で s^D のみが生き残る. □

■最適反応 別のアプローチとして, プレイヤーはどのような戦略を選択し, どのような条件下で選択する可能性があるのかを問うことができる. 対戦相手の戦略の組み合わせの中に, **選び取られた戦略 s_i がプレイヤー i にとって最良の選択となるようなものが存在するはず** だ, と考えるわけだ.

定義 4.5 最適反応

戦略 $s_i \in S_i$ は, 対戦相手の戦略 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対するプレイヤー i の最適反応で, 次の条件を満たす:

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall\, s_i' \in S_i$$

主張 4.2

対戦相手が何らかの戦略を実行すると **信じる** 合理的プレイヤーは, 常に s_{-i} への最適反応を選択する.

合理性とは, プレイヤーが対戦相手の行動について **どのような信念を持っているとしても, その信念を前提として** 自分にとって最善の行動を選択しなければならないことを意味する.

命題 4.3 厳密被支配戦略と最適反応

s_i が厳密被支配戦略ならば, どの $s_{-i} \in S_{-i}$ に対しても最適反応にはなり得ない.

命題 4.4 厳密支配戦略均衡と最適反応

有限正規形ゲームにおいて, s^* が厳格支配戦略均衡である, または IESDS を一意に生き残るならば, s_i^* は $s_{-i}^* \; \forall i \in N$ に対する最適反応である.

■信念 厳密支配戦略がない場合, 他者の戦略を考慮する必要があり, ここで信念の定義が必要となる.

定義 4.6 信念

プレイヤー i の信念とは, 対戦相手の戦略の可能なプロファイル $s_{-i} \in S_{-i}$ のこと.

定義 4.7 最適反応対応

プレイヤー i の最適反応対応は, 各 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して, 各戦略 $s_i \in BR_i(s_{-i})$ が s_{-i} に対する最適応答であるような部分集合 $BR_i(s_{-i}) \subset S_i$ を選択する.

■合理化可能性 (Rationalizability) IESDS と類似の繰り返しプロセスを用いて非合理的な行動を排除する別の推論方法を見る. 合理的なプレイヤーは相手のプロファイルに対して最適反応となる戦略のみを選択する.

定義 4.8

戦略 $s_i \in S_i$ は, $s_i \in BR_i(s_{-i})$ なる信念 $s_{-i} \in S_{-i}$ が存在しない場合, 決して最適反応でない.

以下消去して繰り返し. このプロセスを経て成立する戦略プロファイルの集合は, **合理化可能戦略**の集合である. $N = 2$ では, これら 2 つのプロセスは実際に **同じ結果をもたらす** (**Ch 6.3**). 評価上も IESDS と同じ.

5 Pinning Down Beliefs: Nash Equilibrium

例えば男女の争いには結局今までの三つの解概念は決着をつけられていない, 誤った信念を排除できないためである. そこで信念と行動を結びつけるという大胆な飛躍を行ったのがナッシュ均衡.

■ナッシュ均衡 ナッシュ均衡とは, **信念と行動プロファイルのシステム** で, **各プレイヤーが各々の信念に対する最適反応を行い, さらにプレイヤーが正しい信念を持っている状態** を指す. もう 1 つの一般的な定義手法は, 信念に言及せず, **「各プレイヤーが他の全プレイヤーの戦略に対する最適反応を選択する」戦略プロファイルとして定義する** こと. 正式には, 以下の式が成り立つ.

定義 5.1 ナッシュ均衡

$s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ を考える, 全ての $i \in N$ について s_i^* が s_{-i}^* の最適反応であるとき, 即ち:

$$v_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq v_i(s_i', s_{-i}^*) \quad \forall s_i' \in S_i,\, i \in N$$

のとき, この戦略プロファイルを **ナッシュ均衡** と呼ぶ.

■各解概念の関連性 厳密支配, IESDS, 合理化可能性, そしてナッシュ均衡の結果との関係は偶然ではない.

命題 5.1

戦略プロファイル $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ を考える. s^* が

1. 厳密支配戦略均衡
2. IESDS の唯一の生き残り
3. 唯一の合理化可能な戦略プロファイル

のいずれかである場合 s^* は **唯一のナッシュ均衡**

Proof. 本章末の **演習 5.1**. □

直感: 厳密な支配戦略均衡が存在すれば, それは IESDS と合理化可能性での唯一解となり, これは各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略に対して最適反応を行っていることを意味する. ナッシュ均衡の要件は:

1. 各プレイヤーは自身の信念に対して最適反応を行っている
2. プレイヤーの対戦相手に関する **信念は正しい**

最初の要件は **合理性** の直接的な帰結. 2 番目の要件は非常に厳しく, これまで検討してきた要件を大きく超える, 人々に自身の信念に基づいた合理的行動を求めることと, プレイヤーに対戦相手の行動を正しく予測することを求めることは全く別もの. ゲームの物理的構造を超えた何らかの推論を許容すれば可能かもしれない.
Ex.**「男女の戦い」ゲーム** アレックスが影響力のある人物だとする. 人々はアレックスに従っているようで, アレックスもそのことを知っている. この場合, クリスはアレックスがそれほど影響力があることを知っているので, アレックスがクリスにオペラに行くことを期待しているだろうと信じるはず. アレックスはクリスがアレックスがオペラに行くと信じているはずなので, クリスもオペラに行くだろうと信じるはず. この議論は **「自己成就的」な信念** についてのみ述べる. つまり, これらの信念が過去の経験や何らかの演繹的推論に基づいているなど, ある程度の重みを持っている場合, プレイヤーが期待する行動を支持するという意味で自己成就的になる. $(O, O), (F, F)$ **はナッシュ均衡**. ゲーム理論家として, 私たちは「これらの 2 つの結果のうちの 1 つが私たちの予測通りである」としか言わない. 求め方は一番よくやるあのやり方.

一般に, どのナッシュ均衡がより可能性の高い結果となるかを正確に予測するには, **社会規範や歴史的信念**など, プレイヤーが相互作用する環境の他の側面を考慮する必要があるかもしれない.

■ナッシュ均衡の評価 ナッシュ均衡が存在しない可能性のある価格競争ゲームもある (**Ch. 5.2.4**). だが一般的な条件下では, ゲームには少なくとも 1 つのナッシュ均衡が**存在する** (条件の詳細: **Ch 6.4**). IESDS や合理化可能性と同様に広く適用可能だが, **命題 5.1** が示唆するように, 通常はより洗練された予測につながる. 効率性はやはり満たされるとは限らない (Ex. 共有地の悲劇).

■例について クールノーゲームのように, 一方のプレイヤーの最適反応が他方のプレイヤーの選択において減少するゲームは, **戦略的代替物を伴うゲーム** と呼ばれる. ほかの例としては, 共有地の悲劇が挙げられる. 対照的に, ベルトランゲームのように, 一方のプレイヤーの最適反応が他方のプレイヤーの選択を増加させるゲームは, **戦略的補完を伴うゲーム** と呼ばれる.

5 章まとめ

- プレイヤーが相互に最善の対応を行っている戦略プロファイルは, ナッシュ均衡であり, この均衡概念は自己強制的である.
- ある戦略プロファイルが IESDS を唯一生き残るもの, または唯一合理化可能である場合, それはナッシュ均衡である (**命題 5.1**).
- ナッシュ均衡の戦略プロファイルは, IESDS を生き残り, 合理化可能である. 逆は成り立たない.

6 Mixed Strategies

プレイヤーが確率的戦略を選択する能力を考慮しなければ, 均衡予測が不可能なゲームが数多く存在するため, **混合戦略** が必要となってくる. 実際純粋戦略を考えれば, Matching Pennies やじゃんけんなどナッシュ均衡の存在しないゲームが見つかる.

■混合戦略 まず, 有限戦略集合 S_i でのランダムプレイから始める:

定義 6.1 混合戦略 (有限戦略集合)

$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\}$ を純粋戦略の有限集合とする. ΔS_i を S_i の単体 (Simplex), すなわち S_i 上のすべての確率分布の集合と定義する. プレイヤー i の **混合戦略** は元 $\sigma_i \in \Delta S_i$ であり, $\sigma_i = \{\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \ldots, \sigma_i(s_{im})\}$ は S_i 上の **確率分布** で, $\sigma_i(s_i)$ はプレイヤー i が s_i をプレイする確率.

Ex. Matching Pennies　各プレイヤーで $S_i = \{H, T\}$ であり, 単体は次のように表すことができる:

$$\Delta S_i = \{(\sigma_i(H), \sigma_i(T)) : \sigma_i(H), \sigma_i(T) \geq 0, \sigma_i(H) + \sigma_i(T) = 1\}$$

定義 6.2 台, Support (有限戦略集合)

混合戦略 $\sigma_i(\cdot)$ の下で, $s_i \in S_i$ が $\sigma_i(\cdot)$ の台に含まれるのは, $\sigma_i(s_i) > 0$ のときかつその場合に限る.

定義 6.3 混合戦略 (無限戦略集合)

プレイヤー i の純粋戦略集合を S_i とし, S_i を区間とする. **混合戦略** は **累積分布関数** $F_i : S_i \to [0, 1]$. ここで $F_i(x) = \Pr\{s_i \leq x\}$ である. $F_i(\cdot)$ が密度 $f_i(\cdot)$ で微分可能である場合, $f_i(s_i) > 0$ ならば, $s_i \in S_i$ は $F_i(\cdot)$ の台の上にあるという.

■混合戦略における信念 信念もより複雑に表現が可能になる.

定義 6.4 信念, belief

プレイヤー i の信念は, 対戦相手の戦略に関する確率分布 $\pi_i \in \Delta S_{-i}$ で与えられる. $\pi_i(s_{-i})$ は, プレイヤー i が, 対戦相手が $s_{-i} \in S_{-i}$ をプレイすることに割り当てる確率を表す.

つまり信念は, **対戦相手の戦略に関する確率分布** である. 混合戦略と同集合 ΔS_{-i} に内包されることに注意.

定義 6.5 期待利得, expected payoff (有限戦略集合)

プレイヤー i が純粋戦略 $s_i \in S_i$ を選び, 他のプレイヤーが混合戦略 $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ をプレイする場合のプレイヤー i の **期待利得** は次で与えられる.

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}).$$

同様に, プレイヤー i が混合戦略 $\sigma_i \in \Delta S_i$ を選び, 他のプレイヤーが混合戦略 $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ をプレイする場合の期待利得は次で与えられる.

$$v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \left(\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_i(s_i) \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}) \right).$$

定義 2.3 をそのまま応用した定義である. 無限戦略集合については **注 4** を参照.

定義 6.6 混合戦略ナッシュ均衡

混合戦略プロファイル $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ が **ナッシュ均衡** であるとは, 各プレイヤー $i \in N$ について, σ_i^* が σ_{-i}^* に対する最適反応であること. つまり任意の $\sigma_i \in \Delta S_i$ で次が成り立つ:

$$v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*).$$

σ_{-i}^* は, プレイヤー i の対戦相手についての信念 π_i とも捉えることができ, これはプレイヤー i が対戦相手の行動について不確実だとの考えを捉えている.

命題 6.1 均衡における台上の純粋戦略の利得

もし σ^* がナッシュ均衡であり, かつ $s_i, s_i' \in S_i$ の両方が σ_i^* の台に含まれるならば,

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(s_i', \sigma_{-i}^*) = v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*).$$

すなわち, 均衡においてプレイヤーが正の確率で用いるすべての純粋戦略は, 同じ期待利得を与える.

混合戦略ナッシュ均衡を見つける際には同じ期待利得を与える純粋戦略を見つければよいことが分かった. 実際には線形計画問題としてコンピュータでの解法が主となる.

Ex. Matching Pennies　$(p, q) = (1/2, 1/2)$ において H, T の選択は実際に無差別になっており, 混合戦略をお互いに選び取ることから混合戦略ナッシュ均衡であることが確認できる. **Figure 6.3** 参照.

Ex. **じゃんけん**　**主張 6.1, 6.2** と前の分析から混合戦略以外を排除し, 一意性を無差別条件から示している.

■index theorem　ゲームには通常, 奇数個の均衡が存在する.

■**混合戦略の解概念**　純粋戦略の場合と同様に, 混合戦略でも今まで導入してきた解概念が定義できる.

定義 6.7 混合戦略による厳密支配

プレイヤー i の可能な戦略として $\sigma_i \in \Delta S_i$ および $s_i' \in S_i$ を考える. もしすべての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$v_i(\sigma_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i})$$

が成り立つならば, 戦略 s_i' は混合戦略 σ_i によって **厳密に支配 (strictly dominated)** されるという.

定義 6.8 最適反応でない戦略

プレイヤー i の混合戦略 $\sigma_i \in \Delta S_i$ が, いかなる信念 $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ に対しても $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$ を満たさない場合, σ_i は **最適反応でない (never a best response)** という.

Ex. p.115 IESDS の混合戦略版を考え, 純粋戦略版では排除できなかった戦略を排除できている. $(0, 1/2, 1/2)$ のような混合戦略を挙げているが, $\varepsilon > 0$ 動かしても新たな混合戦略が成立する.

事実

もし戦略 σ_i が厳密に支配されているならば, それは決して最適反応にはならない.

合理化可能な戦略集合は, IESDS を生き残る戦略集合よりも大きくないことを意味する. 更に次も成り立つ.

命題 6.2 二人ゲームにおける同値性

任意の二人ゲームにおいて, 戦略 σ_i が厳密支配されていることと, それが最適反応でないことは **同値**.

Proof. Fudenberg and Tirole (1991) の第 2 章, Bernheim (1984), Pearce (1984) □

つまり, 2 人ゲームにおいて, IESDS を生き残る戦略の集合は, 合理化可能戦略の集合と**同じ**.

■存在定理 Nash は解概念が存在する非常に一般的な条件を示した.

ナッシュの存在定理 (Nash's Existence Theorem)

戦略集合 S_i が有限である任意の n 人正規形ゲームには, 最低一つの **混合戦略ナッシュ均衡** が存在する.

数学的には **不動点定理** に依拠する. 最も基本的な不動点定理は以下.

ブラウワーの不動点定理 (Brouwer's Fixed-Point Theorem)

連続関数 $f(x) : [0,1] \to [0,1]$ に対して, 少なくとも 1 つの $x^* \in [0,1]$ が存在し, $f(x^*) = x^*$ を満たす.

連続関数であれば, 45 度線を超える際交差しなければいけないため, **Figure 6.5** を見よ. ナッシュが示したのは, すべてのプレイヤーの最適反応対応を同時に用いる写像において連続性のようなものが満たされ, **各プレイヤーの戦略自体がこの戦略プロファイルに対する最適反応となるような混合戦略プロファイル (混合戦略ナッシュ均衡)** が少なくとも 1 つ存在しなければならないこと. これを主張するために記法を導入する.

定義 6.9 最適反応対応 (best-response correspondence)

最適反応対応の集合を

$$BR \equiv BR_1 \times BR_2 \times \cdots \times BR_n$$

と定義する. これは混合戦略プロファイルの集合 $\Delta S = \Delta S_1 \times \cdots \times \Delta S_n$ をそれ自身に写す対応であり,

$$BR : \Delta S \rightrightarrows \Delta S$$

によって, 各 $\sigma \in \Delta S$ を部分集合 $BR(\sigma') \subset \Delta S$ に写す.

Ex. **2 人ゲーム** (p.119) プレイヤーの混合戦略は $p, q \in [0,1]$ を選ぶことだった. ここで, 最適反応対応は $BR : [0,1]^2 \rightrightarrows [0,1]^2$ で, $(p,q) \in [0,1]^2$ から $BR(q,p) = (BR_2(p), BR_1(q))$ への対応である. 三つのナッシュ均衡は最適反応対応によって自分自身の最適対応に属する, 不動点である.

事実

混合戦略プロファイル $\sigma^* \in \Delta S$ は, **最適反応対応の不動点** ($\sigma^* \in BR(\sigma^*)$) に限りナッシュ均衡となる.

ナッシュ均衡の定義から直接導かれる. ナッシュが解明したのは, **最適反応の集合を考えたとき, それが不動点を持つことが証明できれば, 直ちにナッシュ均衡が存在するということ**. ナッシュはさらに, 各プレイヤーの戦略集合が有限であるゲームでは, 次の定理を適用できることを示した.

定理 6.1 カクタニの不動点定理 (Kakutani's Fixed-Point Theorem)

対応 $C : X \rightrightarrows X$ が次の 4 条件を満たすとき, 少なくとも 1 つの不動点 $x \in C(x)$ が存在する:

1. X は $\mathbb{R}^n$ の非空・コンパクト・凸部分集合である.
2. 任意の $x \in X$ に対して $C(x)$ は非空である.
3. 任意の $x \in X$ に対して $C(x)$ は凸集合である.
4. C は閉グラフをもつ.

この定理はブラウワーの結果を一般化し, ナッシュ均衡の存在をより一般的な対応の枠組みで保証する.

定義 閉グラフ

対応 $C : X \rightrightarrows X$ の **グラフ (graph)** は次の集合で定義される:

$$\mathrm{Graph}(C) = \{(x, y) \mid x \in X,\, y \in C(x)\}.$$

C が **閉グラフ** をもつとは, このグラフが閉集合であること, すなわち次の条件が成り立つことをいう:
任意の列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $x_n \in X$ かつ $y_n \in C(x_n)$ がすべての n で成り立ち,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$$

となるとき, $x^* \in X$ かつ $y^* \in C(x^*)$ が成立する.

Figure 6.7 を見ればイメージは明らか. 任意の連続関数のグラフは閉グラフとなる.

6 章まとめ

- 混合戦略を許容することで, プレイヤーの選択と, 他者に対する信念の内容が豊かになる
- プレイヤーの利害が対立するゲームでは, 混合戦略均衡は存在する (× 純粋戦略)
- 混合戦略を許容することで, IESDS の有効性と合理化可能性が高まる
- ナッシュは, 有限ゲームでは常に少なくとも 1 つのナッシュ均衡が存在することを証明した

7 Preliminaries (Dynamic Games of Complete Information)

正規形は単純で汎用的だが, その欠点の一つは **時間の経過とともに展開するゲームを捉えることができないこと**. 本章では, sequential な戦略的状況を正式に表現し, 戦略的推論を新表現に適用するための枠組みを示す. さらに, **sequential rationality** という重要な考え方を捉えた解概念を導入する. 先に手番を取ったプレイヤーは, 後手プレイヤーの合理性を考慮に入れる (類似: backward induction, **Ch 2.4.1**).

■展開形ゲーム　Normal form と同様に, 展開形式ゲームの表現には 2 つの要素が必要である:

- プレイヤーの集合 N
- 結果の関数としてのプレイヤーの利得 $\{v_i(\cdot)\}_{i\in N}$

Ex. **男女の戦い**　extensive-form では, プレイヤーの集合は依然として $N = 1, 2$ (Alex は 1, Chris は 2) で, 結果に対する彼らの利得は前述と同様:

$$v_1(O,O) = v_2(F,F) = 2,\ v_1(F,F) = v_2(O,O) = 1,\ v_i(O,F) = v_i(F,O) = 0 \quad i \in \{1,2\}$$

sequential game では, 純粋戦略集合という単純化された概念を, より複雑な行動の構成へと拡張する必要がある. これは, 行動の 2 つの部分: **プレイヤーが何ができるか・いつそれができるか** を導入して達成できる.

Ex. **男女の戦い** (Contd.)　プレイヤーが normal-form と同様に (O,F) を選択できること, **プレイヤー 1 が最初に動き, プレイヤー 1 の選択を知った後で初めてプレイヤー 2 が動くこと** を両者明示する必要がある.

一般に, 連続的なプレイを捉えるには 2 つの要素が必要:

- 動きの順序
- プレイヤーが行動できる場合の行動

自分の番になったときに, プレイヤーがゲームの履歴について持っている知識を記述できる必要がある. 重要なのは **プレイヤーが選択を行うときに何を知っているか**.

Ex. **男女の戦い** (Contd.)　クリスが, アレックスの選択を意思決定時に知っているかがモデル選択には重要.

ゲームにおいて情報と知識がどう展開するかを表現するため, 次の要素を記述に追加する:

- プレイヤーが行動できるときに持っている知識

Ex. **男女の戦い** (Contd.)　行動順以上のことを伝える方法が必要. 「クリスはアレックスの後に移動するが, アレックスが何をしたか知っている・知らない」を区別する必要がある.

最後に, ゲームの進行中に何らかのランダムなイベントが発生する可能性を考慮する必要がある. 一人の意思決定問題を扱う際に, ランダムな事象を考慮に入れたことを想起せよ.

Ex. **不確実な成功をもたらす R&D プロジェクト**　不確実な成功をもたらす R&D プロジェクトに着手するかどうかを選択する企業を考える (**Ch 2**). 最初の企業の R&D プロジェクトの結果に基づいて競争戦略を調整するかどうかを選択できる別の企業を追加し, 一人の企業の環境を豊かにすることができる. 実際, この 2 番目の企業は, 最初の企業の R&D プロジェクトがどう展開するかを待つことで利益を得る可能性がある.

結果の不確実性から, モデル化には, これらのランダムな事象を捉えるべき. **Ch 2** と同様に, ゲームにおいて何らかの不確実性が解決される段階は, **状態の移行 (moves of nature)** と呼ばれる. 状態は, 事前に決定された確率的戦略を持つ非戦略的プレーヤーと考えるとよい.

Ex. **不確実な成功をもたらす R&D プロジェクト** (Condt.)　R&D では, 状態が行動を選択する場合, ゲームに対して固定かつ **外生的な確率分布** に従って, プロジェクトの成功・失敗を選択する.

「外生的」とは, 状態選択の所定の確率分布が, 戦略的プレイヤーの選択に依存しないこと. したがって, 6 番目の要素は, 状態を次のように表す:

- 外生的事象における確率分布

これらの状況を, 既成の方法・概念で分析するため, 次の要件を追加する:

- 以上で表される展開型ゲームの構造は, すべてのプレイヤーに共通認識

まとめ: extensive-form game の記述

1. プレイヤーの集合 N
2. 結果の関数としてのプレイヤーの利得 $\{v_i(\cdot)\}_{i\in N}$
3. 動きの順序
4. プレイヤーが動ける場合の行動
5. プレイヤーが移動できるときに持っている知識
6. 外生的事象における確率分布
7. 以上で表される展開型ゲームの構造は, すべてのプレイヤーに共通認識

1 ∼ 7 の構成要素を全てまとめるために, どのような表記を用いるべきだろうか? そのために, 意思決定ツリーの概念を利用・拡張して, 多人数参加型の戦略状況を捉えられるようにする.

定義 7.1 ゲーム木 (Game Tree)

ゲーム木はノードの集合 $x \in X$ と先行関係 $x > x'$ (「x が x' に先行する」) からなる. 各ノードは唯一つの先行ノード (predecessor) をもつ. 先行関係は次を満たす:

- **推移性**: $x > x'$, $x' > x'' \Rightarrow x > x''$.
- **反対称性**: $x > x' \Rightarrow \neg(x' > x)$.
- **不完備性**: 任意の対 x, y が順序付けられるとは限らない.

ノード x_0 を根 (root) と呼び, 任意の $x \in X$ に先行する. 他ノードを先行しないノードを終端ノード (terminal nodes) といい, 集合 $Z \subset X$ で表す. 各終端ノードに最終帰結 (payoff) が割り当てる. 終端でない任意のノード x は, あるプレイヤー $i(x)$ (行動集合 $A_{i(x)}$ を持つ) か状態に割り当てる.

プレイヤーの行動と知る情報を無視して, ゲームツリーの「物理的な」構造を形式的に捉えている.

Ex. **ダミープレイヤーのいるゲーム木　Figure 7.3** を見よ. $N = \{1, 2, 3, 4\}$ で 3 はダミープレイヤー. 終端ノードは $Z = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ で, 利得は $v_i : Z \to \mathbb{R}$ で定義される. 例えば x_5 では, $(v_2(x_5), v_4(x_5)) = (7, -5)$. 行動集合は $A_1(x_0) = \{x_1, x_4\}$, $A_2(x_1) = \{x_2, x_3\}$, $A_4(x_2) = \{x_5, x_6\}$, $A_4(x_3) = \{x_7, x_8\}$.

定義 7.2 情報集合 (Information Sets)

各プレイヤー i は, 自身が行動するノードを以下の特性で分割する, 情報集合族 $\mathcal{H}_i$ をもつ:

1. h_i が単一集合 (singleton) ならば, そのノードにいることがプレイヤー i に知られている.
2. $x \neq x'$ で $x, x' \in h_i$ のとき, プレイヤー i は自分が x, x' のどちらにいるかを区別できない.
3. $x \neq x'$ で $x, x' \in h_i$ のとき, その情報集合で利用可能な行動は同一: $A_i(x) = A_i(x')$.

Ex. **同時行動の男女の争いゲーム　Figure 7.4** の左が, 展開形表現を用いて描写する一般的な方法. プレイヤー 1 は行動集合 $A_1 = \{O, F\}$ から選択し, プレイヤー 2 は $A_2 = \{o, f\}$ から選択するが, プレイヤー 1 の

選択は考慮されない. プレイヤー 2 は x_1, x_2 を区別できないため, 情報集合は $h_2 = \{x_1, x_2\}$.

定義 7.3 完全/不完全情報ゲーム

- **完全情報ゲーム**: すべての情報集合が単一集合であり, かつ状態の移行が存在しないゲーム.
- **不完全情報ゲーム**: いずれかの情報集合が複数ノードを含むか, 状態の移行が存在するゲーム.

不完全情報ゲームは, プレイヤーが自然の行為について抱く可能性のある不確実性を捉えるのにも役立つ.

Ex. **カードゲーム** **Figure 7.6** の特に左側を見よ. キングとエースだけが同数入った大きなデッキがあり, プレイヤー 1 はそこからカードを見ずに 1 枚引く, キングが出るのは状態の移行と考えられる. ゆえに 1 は状態の後に動き, 状態がどちらを選んだのかは分からない. カードを引いた後, プレイヤー 1 はコール (C) かフォールド (F) を選択する. 右側は順番が逆だが, 戦略的には同等.

状態の選択に関する不確実性, すなわち **外生的不確実性** は, 個人意思決定問題の核心. 一方で他者選択に関する不確実性, すなわち **内生的不確実性** は, 同時ゲームの核心. しかし, どちらの状況にも共通し, **あるプレイヤーが知らない出来事は, ゲームにおける自分の位置に関する不確実性によって捉えられる**. どちらの場合でも, 状況の分析には, 状態・他者の観察されていない行動についての信念を形成する必要がある.

■戦略とナッシュ均衡 展開形における純粋戦略は, プレイヤーの任意の情報集合に対する完備な行動計画である. すなわち, **任意の情報集合でどの純粋行動を取るかを指定する写像 (× 行動)**. $A_i(h_i)$ をプレイヤー i が h_i で実行できる行動 (の集合) とし, A_i をプレイヤー i の全行動集合とする: $A_i = \bigcup_{h_i \in H_i} A_i(h_i)$.

定義 7.4 純粋戦略 (展開形)

プレイヤー i の純粋戦略は**写像** $s_i : \mathcal{H}_i \to A_i$ で, 任意の情報集合 $h_i \in \mathcal{H}_i$ に対して $s_i(h_i) \in A_i(h_i)$ を割り当てる. 全ての純粋戦略の集合を S_i と表す.

Ex. **逐次行動の男女の争いゲーム** プレイヤー 1 の各選択に対してプレイヤー 2 が何を選択するかを指示する戦略を考える必要がある. プレイヤー 2 の純粋戦略集合は次の通り:

$$S_2 = \{oo, of, fo, ff\}$$

ここで, 純粋戦略 ab は, 「プレイヤー 1 が O をプレイする場合は a を, F をプレイする場合は b をプレイする写像」の省略形. 「O なら o, F なら f」ならば $of \in S_2$. プレイヤー 1 の純粋戦略集合は $S_1 = \{O, F\}$.

一般に, i が $k > 1$ の情報集合を持ち, 情報集合ごとの行動が $m_1, \ldots, m_k$ 個, $|S_i|$ を S_i の要素数とすると:

$$|Si| = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k.$$

定義 7.5 混合戦略 (展開形)

プレイヤー i の混合戦略は, 彼の純粋戦略集合 S_i に対する確率分布.

ゲームの展開に応じプレイヤーがランダムに行動する戦略を可能にするため, 以下の新しい概念を定義する.

定義 7.6 行動戦略 (Behavioral strategy)

行動戦略は各情報集合 h_i ごとに独立な $A_i(h_i)$ 上の確率分布を与える戦略である. 正式には $\sigma_i : \mathcal{H}_i \to \Delta A_i(h_i)$ と表され, $\sigma_i(a_i(h_i))$ は情報集合 h_i において行動 $a_i(h_i) \in A_i(h_i)$ を選ぶ確率を表す.

プレイヤーは, **プレイのたびに**, 自身の行動を混合する. これは, プレイ前に戦略を混合し, その後は選択され

た純粋戦略に忠実であり続ける混合戦略とは異なる．可能な行動を完全に記述するためには, 以下の条件の下では, 混合戦略か行動戦略 **どちらか一方だけで十分**.

定義 7.7 完全記憶 (Perfect recall)

あるゲームが **完全記憶** とは, いかなるプレイヤーも以前に知っていた情報を忘れることがないこと.

完全想起ゲームで, Kuhn (1953) は, 混合戦略と行動戦略が等価であることを証明した.

■展開形ゲームの正規形表現　任意の展開形ゲームは, 展開形純粋戦略の集合を正規形式の純粋戦略の集合として使用することで, 正規形式ゲームに変換できる. 元の拡張形式ゲームにおける 4 つの利得は, 正規形ゲームに直すとそれぞれ 2 回繰り返される．すべての展開形式ゲームにはそれを表す一意の正規形があるが, 逆は成り立たない (ex. **Figure 7.12**). ナッシュ均衡の概念は本質的に静的ゆえ, **正規形表現は, ゲームのすべてのナッシュ均衡を見つけるのに十分**.

Ex. **逐次版男女の争いゲーム**　$S_1 = \{O, F\}, S_2 = \{oo, of, fo, ff\}$ を戦略に利用．利得関数は 2 回ずつ利用.

■ナッシュ均衡と均衡経路　ナッシュ均衡の概念を用いて, 展開形ゲームにおける均衡予測を分析する準備が整った．2 人有限戦略ゲームならば, いつものナッシュ均衡の求め方を適応することで確認ができる．展開形では, 根から各終端ノードへの経路が一意より, 全結果は一意のプレイ経路に関連付けられ, また, プレイヤーはナッシュ均衡でプレイする．故に以下が有用となる:

定義 7.8 均衡経路と非均衡経路

行動戦略のナッシュ均衡プロファイル $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ を考える.

- ある情報集合が **均衡経路上** とは, σ^* の下で正の確率で到達されることをいう.
- ある情報集合が **均衡経路外** とは, σ^* の下で決して到達されないことをいう.

この定義で, ナッシュ均衡予測を自己強制的にする力を再解釈できる．つまり, 均衡下で, **プレイヤーは他者の均衡経路内外での行動についての信念に基づき, 均衡経路を進むことを選択する.**

Ex. **逐次版男女の争いゲーム　Figure 7.13** を見よ．ナッシュ均衡 (F, ff) は, プレイヤー 1 が均衡経路から逸脱して O をプレイすれば, プレイヤー 2 が情報集合 x_1 下で f をプレイし続けるため, 0 を受け取るという正しい信念によって支えられている．1 に逸脱する意思がない理由は, 2 が情報集合 x_1 で f を選択すると信じているため．しかし, O の後に f を選択することは, ゲームの利得を考慮するとプレイヤー 2 にとって **非合理的** で, この「脅威」はやや信じ難いものであることを示唆する.

この議論は, 正規形表現の弱点, すなわちすべての選択を「一度限りの」同時選択として扱い, **信念が決して揺るがない** という弱点を明らかにしている (**Ch 8**).

7 章まとめ

- プレイヤーの集合, 可能な行動, 結果から得られる利得に加え, 展開形表現は, 行動順序, 各人が自分の番に何を知っているかを捉える. ゲームの木は, 展開形ゲームを記述するために有用.
- プレイヤーがゲームの木内の 2 つ以上のノードを区別できない場合, それらは同じ情報集合に属する. 各人の情報集合を正しく指定するように注意する必要がある.
- 完全情報ゲームでは, 全員は自分の番になる前に何が起こったかを正確に知っているため, 各情報集合は単一集合. さもなくば, プレイヤーは不完全情報ゲームをプレイしている.
- 純粋戦略は, プレイヤーの各情報集合での決定論的な行動計画を定義する. 混合戦略は純粋戦略上の確率分布であり, 行動戦略は全情報集合における行動上の確率分布の計画.
- すべての展開形ゲームには固有の正規形式表現があるが, その逆は必ずしも真ではない.

8 Credibility and Sequential Rationality

Ch.7 で考察した展開形におけるナッシュ均衡は, **均衡経路外にいるプレイヤーの信念** や, そのような信念をどのように考慮すべきかについては, 何ら制約を課していなかった. これが今回の **Figure 8.1** におけるナッシュ均衡の一つ (E, e) に対する,「P を出せば e を出す」との脅しによる存在保障や, 男女の争いゲームにおける (O, oo) などの不合理な脅しの存在・不具合を生んでいたため修正が必要である.

■逐次合理性と部分ゲーム完全均衡 展開形ゲームでは, **プレイヤーがどの情報集合でも合理的に行動する** ことを要求するために, **逐次合理性 (sequential rationality)** と **部分ゲーム完全均衡 (subgame-perfect equilibrium)** が導入される. これは, 単なるナッシュ均衡よりも強い合理性概念である.

定義 8.1 逐次合理性 (Sequential rationality)

他者戦略が $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ で与えられたとき, プレイヤー i の戦略 σ_i が **逐次合理的** であるとは, 各情報集合において σ_i が σ_{-i} に対する最適反応である場合をいう.

backward induction を完全情報有限ゲームに適用すると, 各人の逐次合理的な戦略が規定される.

命題 8.1 完全情報ゲームの後ろ向き推論解

有限の完全情報ゲームには, 逐次合理的な後ろ向き推論 (backward induction) による解が存在し, どのプレイヤーに対しても同じ利得を与える終端ノードが二つと存在しない場合, その解は一意である.

後ろ向き推論の構築により, 各プレイヤーは必然的に, 後続のプレイヤーの行動に対して最適反応をとる (最適反応はあらゆる情報セットに対して構築される).

系 8.1 完全情報ゲームの逐次合理的ナッシュ均衡の存在

有限の完全情報ゲームは, 少なくとも 1 つの純粋戦略の **逐次合理的ナッシュ均衡 (sequentially rational Nash equilibrium)** をもち, 各人の終端ノードの利得がすべて異なる場合, 均衡は一意.

後ろ向き推論は, 完全情報有限ゲームにおいて順次合理的なナッシュ均衡を見つけるための有用な方法である. 次に目標となるのは, 逐次合理性の概念を **不完全情報ゲーム** や **無限の手順を持つゲーム** (**Ch.10,11**) に拡張する自然な方法を見つけること. 先ずは不完全情報ゲームについて考えよう.

定義 8.2 部分ゲーム (Subgame)

展開形ゲーム Γ の **部分ゲーム (proper subgame)** G とは, 単一のノードとそのすべての後続ノードから構成される部分構造であり, もし $x \in G$ かつ $x' \in h(x)$ (x' が x と同じ情報集合に属する) ならば, $x' \in G$. 部分ゲーム G 自体が独立したゲーム木をなし, Γ から情報集合と利得構造を継承する.

Figure 8.4, **Figure 8.5** のように, その定義から, 情報集合が存在する場合, ゲームはその集合に先行するノード以上に小さな部分ゲームに分解することが出来ないことに注意せよ. 後ろ向き推論は不完全情報があるゲームの終盤には適用できないが, 分解できるサブゲームに焦点を絞り, ここで合理的なプレイを要求することは可能で, この「終盤」での合理的なプレイを用いて後ろ向き推論をすれば逐次合理性を適用できる.

定義 8.3 部分ゲーム完全均衡 (Subgame-Perfect Nash Equilibrium)

n 人の展開形ゲーム Γ において, 行動戦略プロファイル

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

が **部分ゲーム完全ナッシュ均衡 (subgame-perfect Nash equilibrium)** であるとは, 任意の部分ゲーム G に対して, σ^* を G に制限した戦略プロファイルが G **のナッシュ均衡となる** 場合をいう.

サブゲーム完全性は, ナッシュ均衡戦略プロファイルが均衡経路外においても相互の最適反応から構成されることを要求する. 定義より, すべてのサブゲーム完全均衡はナッシュ均衡である. 逆は成り立たず, この均衡概念はナッシュ均衡より洗練された行動予測をもたらす.

事実

有限完全情報ゲームで, 部分ゲーム完全均衡の集合は, 後ろ向き推論によるナッシュ均衡の集合と同一

8 章まとめ

- 展開形ゲームには, 逐次合理的でないナッシュ均衡が存在しうるが, 逐次合理性が期待される.
- (有限の) 完全情報ゲームでは, 後ろ向き推論によって逐次合理的なナッシュ均衡が導かれる.
- 終端ノードで同一利得を与えるものが存在しない場合, 均衡は一意となる.
- 部分ゲーム完全均衡は, 後ろ向き推論を不完全情報ゲームに一般化した概念である.
- **いかなるゲームにおいても, 少なくとも 1 つのナッシュ均衡が部分ゲーム完全均衡となる.**

9 Multistage Game

これまでに分析された展開形ゲームは, 終端ノードに到達するまで利得の実現が遅延される (grand game) という特徴があった. 実際には, 時間の経過に伴う動的なプレイはより複雑でモデル化を改める必要性がある.

問い.

プレイヤーが合理的で将来を見据えていれば, 一連のゲームを一つの壮大なゲームと見なすべきか?
壮大なゲームと見なすなら, 後の段階での彼らの行動は, 前の段階の結果に依存すると予想すべきか?

後者に関しては特に, プレイヤーは各ステージゲームにおいてナッシュ均衡となる一連の行動プロファイルを実行するのか, 将来を見越して初期のステージでは必ずしもナッシュ均衡とは整合しない行動を行うのかが問題である. この章では, **多段階ゲームを拡張型ゲームとしてモデル化し**, 疑問に答える:

回答.

プレイヤーは将来のゲームを予測し, より豊かな環境を作り出すためにそれを利用すべきである.
プレイヤーは将来のプレイを利用し, 初期の行動を制約するインセンティブを生み出すことで利益を得る.

プレイヤーが過去の結果に基づいて将来の行動を条件付けることができる場合, より豊富な自己強化的な結果のセットにつながる可能性がある.

■準備　多段階ゲームを以下のように定義する.

定義: 多段階ゲーム

- 多段階ゲームは, **正規形ステージゲームの有限列** である (無限にも拡張可能).
- **ステージゲーム** は, 完備だが不完全情報の, 独立かつ well-defined なゲーム (**同時行動ゲーム**).
- 各ステージゲームは同じプレイヤーによって順次プレイされる.
- 一連のゲームからの総利得は, 結果の順序を用いて評価される.
- 各ゲームは異なる期間にプレイされる.
- 各ステージの完了後, 全員がその結果を観察し, この情報構造は共通知識と仮定する.

最終的な利得が分かっていれば十分で, **Figure 9.1** の展開形ゲームはこれを踏まえて最後のゲームの終端ノードにしか利得を記載していない. また, ゲーム後の結果の共通認識が仮定されていることを受けて, 二段階目の情報集合は, 一段階目のゲームと同じく終点の 4 つあることを確認せよ.
Ex. **囚人=復讐ゲームの純粋戦略プロファイル**　i の戦略は $s_i = (s_i^1, s_i^2(Mm), s_i^2(Mf), s_i^2(Fm), s_i^2(Ff))$. それぞれが 2 値をとるため, 戦略プロファイル $s = (s_1, s_2)$ の組み合わせは $2^5 \times 2^5 = 1024$ 通りある.

■一般多段階ゲームでの純粋戦略プロファイル　i の戦略は $S_i = (s_i^1, s_i^2(h_1), \ldots, s_i^t(h_{t-1}), \ldots, s_i^T(h_{T-1}))$. ここで戦略 $s_i^t(h_{t-1})$ は $t-1$ 期までの結果 h_{t-1} を受けた t 段階目の行動である. ここで, h_{t-1} は, 可能な履歴すべての集合 $\mathcal{H}_{t-1}$ から取り出した特定の履歴だと考えることが出来る.
Ex. **一連の市場での n 社価格選択ゲーム**　t 期における企業 i の戦略は価格 $p_i^t(h_{t-1})$ で, 履歴は:

$$h_{t-1} = ((p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1), (p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2), \ldots, (p_1^{t-1}, p_2^{t-1}, \ldots, p_n^{t-1}))$$

■一般多段階ゲームでの混合戦略プロファイル　i の混合戦略も同様に定義できる:

$$\sigma_i = \{\sigma_i^1, \sigma_i^2(h_1), \ldots, \sigma_i^t(h_{t-1}), \ldots, \sigma_i^T(h_{T-1})\}$$

■多段階ゲームにおけるナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡　多段階ゲームは, 複数のステージゲームが順に行われる **本質的に動的な** 枠組みであり, 各ステージでの戦略的相互作用が後続の行動に影響を与える. 以下では, このようなゲームにおけるナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡 (SPE) の関係を示す.

命題 9.1 多段階ゲームにおける SPE の存在

T 期の多段階ゲームを考える. 各ステージ t において σ^{t*} をそのステージゲームのナッシュ均衡戦略プロファイルとする. このとき, 次を満たす部分ゲーム完全均衡が存在する:

$$(\sigma^{1*}, \sigma^{2*}, \dots, \sigma^{T*})$$

により生成される経路が, 多段階ゲーム全体の均衡経路と一致する.

無条件戦略を考えることによって, ステージ間のつながりを排除して考慮することが可能になる.

Ex. **囚人=復讐ゲームの純粋戦略プロファイル**　復讐ゲームには 2 つの純粋戦略と 1 つの混合戦略があるため, 合計で 3 つの SPE を **命題 9.1** によって見つけることが出来る.

■条件付け戦略と SPE　プレイヤーが過去のプレイに基づいて将来のプレイを逐次合理的に条件付けるならば, 初期のステージゲームにおいてナッシュ均衡ではない行動を, 初期のステージで支持できる. だがこれは後の期間のステージゲームの一部に複数のナッシュ均衡が存在する場合にのみ可能となる. この要件を理解するための第一歩として, 以下の命題を容易に確立できる.

命題 9.2 最終ステージにおけるナッシュ均衡性

もし σ^* がステージゲーム $G_1, G_2, \dots, G_T$ からなる多段階ゲームのナッシュ均衡であるならば, その最終期 T における制限 $\sigma^*|_{G_T}$ は G_T のナッシュ均衡でなければならない.

この洞察は, もう一つの重要な事実を示唆する.

命題 9.3 一意なステージ均衡をもつ多段階ゲーム

有限の多段階ゲームが, 各ステージゲームにおいて一意のナッシュ均衡をもつとき, その多段階ゲーム全体も一意の部分ゲーム完全均衡をもつ.

各ステージでのナッシュ均衡行動を逐次的に結合した戦略が, ゲーム全体の均衡を形成することに加えて, 各期での均衡が一意であれば, 全体としても一意の均衡経路が定まることが分かった.

Ex. **囚人=復讐ゲームにおけるナッシュ均衡からの逸脱**　一段階目単独ではナッシュ均衡になり得ない, (M, m) が選び取られる可能性について次の戦略プロファイルを用いて考えよう:

$$s_1^* = (s_1^1, s_1^2(Mm), s_1^2(Mf), s_1^2(Fm), s_1^2(Ff)) = (M, L, G, G, G)$$
$$s_2^* = (s_2^1, s_2^2(Mm), s_2^2(Mf), s_2^2(Fm), s_2^2(Ff)) = (m, l, g, g, g)$$

この戦略ペアが部分ゲーム完全均衡であるかどうかを確認しよう. 第二段階はナッシュ均衡であるため, あとは第一段階で mum からの逸脱の誘因がないことを示せば十分である. プレイヤー 1 について考えると:

$$v_1(M, s_2) = 4 + 0 \times \delta, \qquad v_1(F, s_2) = 5 + (-3) \times \delta$$

であるから, M が最善の応答となるのは,

$$\delta \geq \frac{1}{3}$$

の場合ゆえ, **割引率が小さすぎなければ, (M, m) はナッシュ均衡ではないにもかかわらず, 第一段階のゲームにおいてその行動を支持することができる**.

■逸脱の要件　要件は以下の通りである.

1. 第二段階には, 複数の異なる均衡が存在する必要がある
2. 割引率は, その均衡間の利得の差が, 第一段階での行動に影響を与えるため, 十分大きい必要がある

多段階囚人=復讐ゲームは, 多段階ゲームの美味しい部分をほぼとらえきっている. 次節の定理は, **どの戦略が SPE の一部か否か** の証明に役立つ. 要約すると, 戦略プロファイル $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ が多段階ゲーム (任意の有限展開形) で SPE かどうかを確認するには, σ_{-i}^* が与えられたとき, 全プレイヤー i で, 逸脱を望むような情報セットを持たないことを示すだけでよい. さらにこの結果が有用なことが証明される (**Ch 10**).

■一段階偏差原理　戦略 σ_i は各情報集合 h_i に行動 $A_i(h_i)$ に関する確率分布を割り当て, 任意の情報集合 h_i から開始して, 戦略プロファイル (σ_i, σ_{-i}) はプレイパスと終端ノードに関する確率分布が定まる. したがって, σ_{-i} は固定されているとみなし, 全情報集合 h_i を σ_{-i} で定められるシングルプレイヤー決定木のノードとして扱うと, $v_i(\sigma_{-i}, h_i)$ を, h_i 以降でプレイヤー i が σ_{-i} をプレイした場合の期待利得と定義できる. 戦略 σ_i が最適であるとは, $v_i(\sigma_i', h_i) > v_i(\sigma_i, h_i)$ となる (σ_i', h_i) が存在しないことを意味する.

戦略 σ_i が与えられたとき, 戦略 σ_i^{a,h_i} を, h_i を除くすべての点で σ_i と同一である戦略と定義する. そして, h_i においては, σ_i の規定された行動を行動 $a \in A_i(h_i)$ に置き換える. 以下の定義を導入する.

定義 9.1 一段階改良不可能戦略 (One-stage unimprovable strategy)

他のプレイヤーの戦略 $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ が与えられているとき, プレイヤー i の戦略 σ_i が **一段階改良不可能** であるとは, どの情報集合 h_i , 行動 $a \in A_i(h_i)$, およびそれに対応する戦略 σ_i^{a,h_i} に対しても:

$$v_i(\sigma_i^{a,h_i}, h_i) > v_i(\sigma_i, h_i)$$

を満たすような組が存在しないことをいう.

最適戦略は一段階改良不可能である. 逆に, 一段階改良不可能な戦略の最適性を次の定理が述べる.

定理 9.1 一段階改良不可能と最適性

もし戦略 σ_i が一段階改良不可能であれば, それは最適である.

Proof. 背理法を用いる. σ_i が一段階改良不可能であるにもかかわらず最適でないと仮定すると, ある戦略 σ_i' と情報集合 h_i^1 が存在し,

$$v_i(\sigma_i', h_i^1) > v_i(\sigma_i, h_i^1)$$

となる. これは, i のいくつかの情報集合を通る有限の経路に沿って, σ_i よりも高い利得が得られることを意味する. この経路上の情報集合を $h_i^1, h_i^2, \ldots, h_i^n$ とし, これに対応する一連の部分的偏差戦略 σ_i^t を構成することで, 帰納法により次が導かれる:

$$v_i(\sigma_i^1, h_i^1) > v_i(\sigma_i, h_i^1).$$

しかし, σ_i^1 は σ_i に対する一段階偏差であるため, これは一段階改良不可能という仮定と矛盾する. したがって, 一段階改良不可能な戦略は必ず最適である. □

直感はそれほど難しくない. もし戦略 σ_i が σ_{-i} に対する最善の対応でなかったら, 有限ゲームを考えると,

σ_i を改善するための逸脱は有限の数しか存在しない. その逸脱をシーケンス内で「最後」に探すことができ, その情報セット (それがシングルトンでない場合は, その直前の可能な限り最も近いルート) から始まるサブゲームに着目すると, そのサブゲームにおいてプレイヤー i は一段階偏差を持ち, それで better off される.

9 章まとめ

- 多段階ゲームは, 複数の正規形ステージゲームが時系列で行われ, 各期で利得が得られる枠組み.
- 将来利得は割引され, プレイヤーの discount factor が長期的誘因の効果を左右する.
- 各ステージゲームのナッシュ均衡行動列は, 割引率に依らず, ゲーム全体での SPE となる.
- 将来のステージでの脅し・約束を通じ, 短期的には自己実現しない行動を誘発できる.
- SPE として支持可能な結果の集合は, 割引率に依存して変化する.

10 Repeated Games

多段階ゲームの特殊ケースとして, 繰り返しゲーム (各段階で同じステージゲームがプレイされる多段階ゲーム) が長年にわたり大きな注目を集めてきた. これらのゲームは, 主に 2 つの理由で研究されてきた:

1. 繰り返しゲームが多くの現実的な状況を捉えているように見えること
   (a) 長期間にわたって同じ市場で競争する企業
   (b) 議会の会期ごとに利益誘導交渉を行う政治家
   (c) 日々共同作業を行うチーム生産ラインの労働者
2. 分析をある程度単純かつ簡潔にする非常に便利な数学的構造が得られること

本章では, 繰り返しゲームの分析の概要を示し, 報酬と罰の戦略で可能なことの極限のいくつかを示す.

■有限繰り返しゲーム　繰り返しゲームは, ある基礎となるステージゲーム (stage-game) G が複数回 (有限または無限に) 連続してプレイされる枠組みである. 各プレイヤーは各ステージで利得を得て, 将来の利得は割引率 δ により現在価値化される.

定義 10.1 有限繰り返しゲーム (Finitely repeated game)

ステージゲーム G が T 期間連続してプレイされるとき, これを有限繰り返しゲーム $G(T, \delta)$ と呼ぶ. ここで δ は共通の割引率 (discount factor) である.

Ex. **二段階繰り返しゲーム　p.191** の行列を見よ. 割引率 δ の二段階繰り返しゲームを考える. 行列が示すように, 純粋戦略ナッシュ均衡は 2 つ存在し, $(R, r) \succ_P (F, f)$. さらに十分高い割引率があれば, ナッシュ均衡ではない一段階行動をサポートする SPE を見つけられる可能性を意味している. 割引率 $\delta \geq 1/2$ の場合, 以下の戦略がゲーム全体の SPE を構成する:

- **プレイヤー 1**: ステージ 1 で M をプレイする. ステージ 2 では, ステージ 1 で (M, m) がプレイされた場合は R をプレイし, ステージ 1 で (M, m) 以外がプレイされた場合は F をプレイする.
- **プレイヤー 2**: ステージ 1 で m をプレイする. ステージ 2 では, ステージ 1 で (M, m) がプレイされた場合は r をプレイし, ステージ 1 で (M, m) 以外がプレイされた場合は f をプレイする.

■有限繰り返しゲームの一意性　有限繰り返しゲームは多段階ゲームの特殊ケースゆえ, ステージゲームの非ナッシュ均衡行動を初期段階で行うには, 多重継続ナッシュ均衡 (multiple continuation Nash equilibria) が必要. これは直ちに次の結果を示唆するが, これは多段階ゲームについて述べた **命題 9.3** の特殊ケース.

命題 10.1 有限繰り返しゲームの一意性

G が一意のナッシュ均衡をもつならば, 有限繰り返しゲーム $G(T, \delta)$ は一意の SPE をもつ.

これは, 囚人のジレンマのような有限繰り返しゲームや **Ch 5.2** で分析した同時着手市場ゲーム (クールノー・ベルトラン競争) のいずれかに当てはまる. 有限繰り返しゲームとして T 回連続してプレイすると, **各ステージで静的非協力ナッシュ均衡プレイの繰り返しである, 唯一の SPE が存在する**. この結果は信頼性と逐次合理性の本質から導かれます.

Ex. **$T = 500$ の繰り返し囚人のジレンマゲーム**　**命題 10.1** での解明プロセスは, この有限繰り返し囚人のジレンマにも適用される. なぜなら, $T = 500$ が周知の事実であるため. 最終段階のゲームでは唯一のナッシュ均衡である (F, f) のみとなる. 問題は, **Ch 9** と同様の議論により, 罰を与えるため, 複数の均衡が必要になることである. この修正には **無限期間** が必要となる.

■無限繰り返しゲーム　有限繰り返し囚人のジレンマに見られる問題は, ゲームには固定された有限期間があるというプレイヤー間の共通知識の結果. 繰り返しゲームが有限で, そのステージゲームが唯一のナッシュ均衡を持つ場合, 最終期間 T から, **静的ナッシュ均衡の分解** が逐次合理性から生じる. **無限繰り返しゲームでは, プレイヤーは, ステージゲームにおける静的ナッシュ均衡と整合しない幅広い行動を支持しうる** (後述).

■無限繰り返しゲームの利得　無限繰り返しゲーム $G(\delta)$ について, 現在価値概念の自然な拡張は以下:

定義 10.2 無限利得列の現在価値

割引率 $0 < \delta < 1$ のもとで, プレイヤー i の利得系列 $\{v_i^t\}_{t=1}^{\infty}$ の現在価値は以下で与えられる:

$$v_i = v_i^1 + \delta v_i^2 + \delta^2 v_i^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} v_i^t$$

δ はゲームの終了確率だと解釈することが出来る. 簡便のため次を仮定する:

定義 10.3 無限利得列の平均利得 (Average payoff)

割引率 $\delta < 1$ のもとで, プレイヤー i の平均利得は次式で定義される:

$$\overline{v}_i = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} v_i^t.$$

■無限繰り返しゲームにおける戦略　無限反復ゲームの展開形表現では, ステージゲームが無限に繰り返され, 情報集合の数も無限になる. この設定では, 戦略を記述する便利で自然な方法として, 各プレイヤーの全情報集合は, 前のシーケンスでプレイされた固有のプレイパス = **履歴** によって識別される.

Ex. **無限期間繰り返しの囚人のジレンマゲーム**　第四段階では, 各人が $4^3 = 64$ 個の情報集合を持ち, 各々が前段階での固有のプレイパス = 履歴 に対応する.

この観察は, 情報集合とプレイ履歴の間に 1 対 1 の関係があることを意味します. この関係性から, 以下では

「履歴」という語を, プレイヤーが検討中のステージ (過去のプレイがまさにそのステージの履歴) に至るまでに選択した特定の行動プロファイルのシーケンスを表すために使用する.

定義 10.4 無限繰り返しゲームにおける戦略

無限繰り返しゲームにおいて, 期間 t の履歴を $h_t \in \mathcal{H}_t$ とし, 全履歴の集合を $\mathcal{H} = \bigcup_{t=1}^{\infty} \mathcal{H}_t$ とする.

- **純粋戦略**: 写像 $s_i : \mathcal{H} \to S_i$ であり, 各履歴に対してステージゲームでの行動を指定する.
- **行動戦略**: 写像 $\sigma_i : \mathcal{H} \to \Delta S_i$ であり, 各履歴において確率的に行動を選ぶ.

戦略の解釈は基本的に多段階ゲームと同じ. 全情報集合は固有の履歴で識別されるため, これは戦略の完備な定義で, 直感的に理解できる.

■SPE の適応　実際に無限繰り返しゲームにも SPE を適応しよう.

定義 10.5 無限繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡

純粋戦略プロファイル $(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot))$ が部分ゲーム完全均衡であるとは, 任意の履歴 h_t で, 以後のプレイがその履歴を起点とする部分ゲームのナッシュ均衡となること. 行動戦略も同様に定義される.

戦略と同様に, これは一見実装不可能な概念のように思える. 特に各戦略は無限に多い履歴のいずれかに作用する写像であるため, 戦略のプロファイルが任意の履歴に対してナッシュ均衡であることをどう確認できるだろう? 結局, よく知られた結果の一つが有用なベンチマークとなる.

命題 10.2 静的ナッシュ均衡の繰り返し

無限繰り返しゲーム $G(\delta)$ において, ステージゲームのナッシュ均衡戦略プロファイル $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ を考える. 各プレイヤーがすべての履歴 $h \in H$ に対して, 以下の:

$$\sigma_i^*(h) = \sigma_i^*$$

履歴に依存しないナッシュ戦略を採用するなら, σ^* は任意の $\delta < 1$ で部分ゲーム完全均衡となる.

証明は有限多段階ゲームにおける **命題 9.1** の考え方を模倣している. プレイヤー i が, 対戦相手の行動が履歴とは独立していると信じる場合, 現在のプレイが将来への影響を考慮する必要はない. 結果として, 対戦相手の現在のプレイが, ステージゲームの静的ナッシュ均衡における彼らのプレイと一致すると信じている場合, ナッシュ均衡の定義から, 最適反応はナッシュ均衡行動を選択すること.
Ex. **無限期間繰り返しの囚人のジレンマゲーム**　**命題 10.2** より, 毎期 (F, f) を選択することに加え, 履歴に依存する **トリガー戦略** (後述) で, 裏切りが発生しない間の (M, m) が SPE として成立.

■グリムトリガー戦略　考え方: ステージゲームにナッシュ均衡があり, そのいかなるナッシュ均衡よりも良い結果をもたらす SPE の行動の存在を確かめたい場合, 静的ナッシュ均衡を永久にプレイする確立された SPE と比較することで, 静的最適反応では選択されないより望ましい結果を支持する. ゆえにグリムトリガー戦略で, プレイヤーが短期的な逸脱の誘惑が存在する行動に固執するインセンティブを提供する. グリムトリガー戦略が SPE であることを確認するには, どのサブゲームにも利益のある逸脱がないことを確認すべき. サブゲームは無限にあり, これは不可能に見えるが, **Ch 9.5** の一段階偏差を利用して以下を言える:

命題 10.3 一段階偏差による特徴づけ

無限繰り返しゲーム $G(\delta)$ で, $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ が部分ゲーム完全均衡であるのは, 任意の i および任意の履歴 h_{t-1} に対して, i の $s_i(h_{t-1})$ からの一段階偏差では利得を改善できない場合かつそれに限る.

Ex. **無限期間繰り返しの囚人のジレンマゲーム**　繰り返しゲームにおける grim-trigger 戦略は, 履歴が無限に存在しても実質的に二分できるため扱いやすい. すなわち, いまだ逸脱が起きておらずプレイが (M, m) で続く「オン軌道」の状態と, 過去に逸脱が起きたため以後 (F, f) を続ける「オフ軌道」の状態. したがって SPNE の確認には, 各状態で逸脱の誘因がないことを確かめれば十分.

まずオフ軌道を考える. 提案された戦略はこの場合その期以降ずっと (F, f) を指示するので, 相手が今後ずっと f をプレイすると信じるなら, あるプレイヤーが f から m に一時的に変えることで当期に得る利得は -2 (すなわち 1 の代わりに -1 を得る) と損失になり, その後も以降は grim-trigger が続くため将来の利得は改善しない. よってオフ軌道の任意の部分ゲームでは誰も一方的に f を m に変えたいとは思わない.

次にオン軌道を考える. 戦略に従えば当期の利得は 4 で, 以後も毎期 4 が続くため期待利得は

$$v_i^* \;=\; 4 + \delta 4 + \delta^2 4 + \cdots \;=\; 4 + \frac{4\delta}{1-\delta}.$$

もしそのプレイヤーが当期に裏切って m ではなく f を選べば当期利得は 5 になり, その後は相手が永久に f を選ぶと見なされて以降は毎期 1 しか得られないため, 逸脱時の期待利得は

$$v_i' \;=\; 5 + \delta 1 + \delta^2 1 + \cdots \;=\; 5 + \frac{\delta}{1-\delta}.$$

したがって逸脱しないための条件は $v_i^* \geq v_i'$, すなわち

$$4 + \frac{4\delta}{1-\delta} \;\geq\; 5 + \frac{\delta}{1-\delta}, \quad \delta \;\geq\; \frac{1}{4}.$$

結論として, 将来を十分に重視する (すなわち δ が十分大きい) プレイヤーが集まっているとき, grim-trigger 型の報酬・懲罰戦略により協力が永続的に維持され得る. 無限反復によって, シングルステージゲームの一意均衡から多くの SPNE が生じる点が重要である (後述: **Folk Theorem**).

■企業間の黙示的共謀 (tacit collusion)　繰り返しゲームにおける報酬と罰の戦略 (reward-and-punishment strategies) を用いた均衡の最も著名な応用の一つは, 企業間の黙示的共謀の研究. 多くの先進国では, 企業が競争を制限するための明示的な契約を結ぶことを禁じている. 例えばアメリカ合衆国のシャーマン反トラスト法 (Sherman Antitrust Act, 1890) の第 1 条は, 取引の制限を目的とした「共謀」を違法と宣言しており, 価格固定のような契約もこれに含まれる. しかし, 競争相手同士に実際の会合や話し合いがなかったとしても, 彼らが暗黙の了解や合意を通じて価格を決めていると断定できるだろうか.

繰り返しゲームの戦略は, 企業が共謀を支える戦略に関する信念を通じて, 明示的な協議や合意を行うことなく反競争的な行動を持続させるのに有用である. すなわち, 暗黙の, あるいは黙示的な共謀を可能にするのだ. これを示すために, 次の**クールノー複占 (Cournot duopoly)** の問題を考える. 二つの企業それぞれの生産費用は $c_i(q_i) = 10q_i$ で, 需要は $p = 100 - q$ (ただし $q = q_1 + q_2$) と与えられるものとし, この市場ゲームが各期 $t = 1, 2, \ldots$ で繰り返され, 割引因子を $\delta \in (0, 1)$ とする.

Ch 5.2.3 で我々はステージゲームのナッシュ・クールノー均衡を解き, そこで $q_1^* = q_2^* = 30$, 均衡価格は $p = 40$, 各企業の利潤は $v_i^* = 900$ であることを得た. またクールノー均衡における利潤の和は独占時の利潤の和より小さいことも確認した. 実際, 各企業が $q_1 = q_2 = 22.5$ を生産すれば, 各社の利潤は

$$v_i = (100 - 45) \times 22.5 - 10 \times 22.5 = 1012.5,$$

すなわち独占利潤の半分となる．もしステージゲームで $q_i = 22.5$ とする拘束力のある契約を結べるならば, 利潤向上のためにそうするだろう．ここでは, 独占利潤を実現するために, 先の囚人のジレンマの無限反復例と類似した報酬・罰の戦略によって, 企業が拘束力のある契約を結ばずとも (シャーマン法のような規制に違反することなく) SPNE として独占的な利潤を達成できることを示す．

まず, 企業が独占利潤をどのように分配するかを決める必要がある．これは各企業の数量 q_1^c と q_2^c によって決まる．独占利潤を達成するには $q_1^c + q_2^c = 45$ を満たし, 価格は $p = 55$ となる．例を面白くするために, 分配を非対称に $q_1^c = 22$, $q_2^c = 23$ とする．するとステージゲームでの利潤は

$$v_1^c = (55 - 10) \times 22 = 990, \qquad v_2^c = (55 - 10) \times 23 = 1035.$$

次に, 無限反復囚人のジレンマの論理に従えば, 企業の戦略は一般に次の形をとるべきである．各企業 i は第 1 期に q_i^c を選ぶ．以後各期 $t > 1$ において, これまでのすべての履歴が (q_1^c, q_2^c) の連続であったならば各企業は再び q_i^c を選び, それ以外の履歴 (いずれかの逸脱が過去にあった場合) ではグリム・トリガー (grim-trigger) によって以降は恒久的にナッシュ・クールノー均衡の $q_i^* = 30$ を選ぶ, というものである．

次に, どの企業も提案された戦略から逸脱したくないことを検証する．ここでも履歴は二種類に分かれる: 均衡軌道上の履歴 ((q_1^c, q_2^c) の連続) と, それ以外の (オフ軌道の) 履歴である．**一段階偏差原理 (one-stage deviation principle)** を用いれば, 均衡軌道上とオフ軌道上の両方で任意の企業が逸脱したくないことを確認すれば十分である．

まずオフ軌道については容易に, 誰も逸脱したがらない．オフ軌道の任意の時点で企業 i は相手が $q_j^* = 30$ を選ぶと期待しており, $q_i^* = 30$ はこれに対する最適反応である．したがってオフ軌道の任意の部分ゲームでの逸脱は当期に即時の損失を招き, その後はグリム・トリガーが永続するため将来の回復余地がない．したがってどの δ に対してもオフ軌道では逸脱の誘因はない.

次にオン軌道での逸脱を検討する．均衡軌道上で各企業は q_i^c を選び, 各期の利得は v_i^c である．各期において, 両企業とも静的最適反応を取っていないことに注意せよ．**Ch 5.2.3** で導出した最適反応関数は:

$$\mathrm{BR}_i(q_j) = \frac{90 - q_j}{2}. \tag{10.4}$$

これより, 企業 1 の $q_2^c = 23$ に対する最適反応は $\mathrm{BR}_1(23) = \frac{90-23}{2} = 33.5$, 企業 2 の $q_1^c = 22$ に対する最適反応は $\mathrm{BR}_2(22) = \frac{90-22}{2} = 34$ である．したがって各企業は任意の期に q_i^c から逸脱することで一時的に利得を増やせるが, その代償として以後は永続的にナッシュ・クールノー均衡に戻される．

最も誘惑的な逸脱は, 各企業がその時点の静的最適反応を選ぶことであり, これを $q_i^d = \mathrm{BR}_i(q_j^c)$ と表す．前の計算から $q_1^d = 33.5$, $q_2^d = 34$ であり, 逸脱した企業の当期利得は

$$v_i^d = (100 - q_i^d - q_j^c) q_i^d - 10 q_i^d.$$

具体的に, 企業 1 については

$$v_1^d = (100 - 33.5 - 23) \times 33.5 - 10 \times 33.5 = 1122.25,$$

企業 2 については

$$v_2^d = (100 - 23 - 34) \times 34 - 10 \times 34 = 1122.$$

ここで, 提案された部分ゲーム完全均衡の軌道から逸脱しないための条件をチェックする．均衡軌道での当期利得を v_i^c, 最も魅力的な逸脱の当期利得を v_i^d, ナッシュ・クールノーに戻された以降の利得を v_i^* とすると,

囚人のジレンマの例と同様に企業 i は次の不等式が成り立てば逸脱しない:

$$v_i^c + \delta \frac{v_i^c}{1-\delta} \;\geq\; v_i^d + \delta \frac{v_i^*}{1-\delta}.$$

これを整理すると, 次と同値になる:

$$\delta \;\geq\; \frac{v_i^d - v_i^c}{v_i^d - v_i^*}. \tag{10.5}$$

各企業について上の式に値を代入して, 逸脱しない最小の割引因子 δ_i を求める. 計算結果は:

$$\delta_1 \;\geq\; \frac{1122.25-990}{1122.25-900} \approx 0.595, \qquad \delta_2 \;\geq\; \frac{1122-1035}{1122-900} \approx 0.392.$$

これは逸脱の誘惑の度合いをよく反映している. 企業 1 は逸脱による一時的利得が企業 2 より大きく, また継続利得の落ち込みが相対的に小さいため, 企業 1 の方が将来をより重視しなければ (すなわち高い δ を持たなければ) この戦略ペアは自己強制的な部分ゲーム完全均衡にならない.

最後に二点述べておく. 第一に, もし二社がこれらの信念を共有していれば, 会話を交わさずとも, 原理的には反競争的な規制を回避できる. **OPEC のように規制が及ばない場合には, 企業は実際にこの種の報酬・懲罰戦略に頼ることができる**.

第二に, 歴史的に見てこのような共謀が機能している場合でも, ときどき企業間で価格戦争が発生し, 共謀が一定期間失敗しその後回復することがある. 分析は価格戦争をオフ軌道行動の事例と見なすことを示唆しており, その発生は説明上の困惑を生む. **一つの説明は, 逸脱の検出が容易でないためである. 例えば実際に生産された数量が容易に観測できない場合である.**

OPEC の例を考える. OPEC はまさにクールノー的に (数量を通じて) 価格を操作しようとするカルテルであるが, 各企業の生産量を正確に観察するのは極めて困難である. するとトリガー戦略の運用は問題を抱える. もし他者の選択を観測できなければ, 報酬から罰へ移る判断はどうすればよいだろうか.

価格が急落すれば, 誰かが提案された数量から逸脱したことは直ちに明らかであり, 価格の観察によってグリム・トリガーは価格戦争をもたらすように思われる. しかしこの議論は, **価格がランダムに変動する可能性がある場合には破綻する**. 例えば石油市場では需給双方が価格を決めるが, 現実世界では需要は一定ではない. 寒い週には需要が増え, 暖かい週には需要が減るかもしれない. したがって価格はもはやクリーンな逸脱の指標ではなく, 需要の変動あるいは逸脱いずれかを示すノイズのある信号となる. すると, 企業には弁明の余地が生まれ, 逸脱が生じやすくなる. つまり, 検出が完全でない場合に共謀を試みると, 価格戦争が時折発生することは内在的な現実である.

■非協力的な自己強化行動　無限に繰り返される囚人のジレンマや無限に繰り返されるクールノーゲームにおいて, プレイヤーは継続的な関係性を利用して協力行動を維持することができましたが, その行動は, 短期的には逸脱したいという誘惑のために自己強化的ではありませんでした. どちらの例においても, 2 つの重要な要素が必要でした. それは, 予め定められた終期がないこと, そして割引率が小さすぎないことです. 既に述べたように, 終期が存在する場合, ゲーム終了時に協力するインセンティブを与えることは不可能であり, プレイヤーはそれを予測して非協力的な自己強化行動に訴えることになります. 同様に, 割引率が小さすぎる場合, ゲームの継続によって得られるインセンティブは, 協力的なプレイの道から逸脱したいという誘惑を克服するほど強力ではありません.

短期的な誘惑を克服するための長期的なインセンティブを生み出す能力を説明するために用いられてきた解釈の一つは, 繰り返し関係を持つプレイヤーが互いに協力するという評判を築くことができるというものであ

る．プレイヤーが協力的であるという評判を維持している限り, 他のプレイヤーは彼を信頼し, 同様に反応する．もしプレイヤーがどの段階でも協力的でなかった場合, 彼は好意を失い, プレイヤーは関与の非協力的な段階に移行する (例えば, セクション 10.3 で説明したようなグリムトリガー戦略を用いる)．このような評判への懸念は, 将来が存在しない, あるいは将来がそれほど重要でない場合には, 弱まるか, あるいは完全に消滅する可能性がある.

■Folk Theorem　この節では, 無限反復ゲーム理論の重要な成果の一つを, ある程度形式的に説明する．一意なナッシュ均衡が存在するステージゲームが無限に繰り返される場合, 多くの結果が SPNE になりうることを説明する．まず, いくつかの必要な数学的概念を定義する:

定義 10.6 凸結合 (Convex combination)

二つのベクトル $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ に対して, ある $\alpha \in [0, 1]$ が存在し, 次を満たすとき

$$\tilde{v} = \alpha v + (1 - \alpha) v'$$

ベクトル $\tilde{v}$ を v と v' の **凸結合 (convex combination)** という.

定義 10.7 凸包 (Convex hull)

有限集合 $V = \{v^1, v^2, \ldots, v^k\} \subset \mathbb{R}^n$ に対して, その **凸包 (convex hull)** は

$$\mathrm{CoHull}(V) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k_+, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1,\, v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j \right\}.$$

反復ゲーム理論における最も著名な結果の一つを紹介する準備ができた．十分に高い割引率があれば, 反復ゲームの平均利得の凸包におけるほぼ任意のベクトル v について, それを SPNE として支持する戦略プロファイルを見つけることが可能である．ゲームの利得の凸包を実現可能な利得の集合と呼ぶ．なぜなら, その集合内の各ベクトルは, 無限に繰り返されるゲームにおいて, ステージゲームにおける戦略の組み合わせによって達成できるからである．こうして, 次の結果が言える:

定理 10.1 民間定理 (Folk Theorem)

有限の完全情報同時ゲーム G を考える．$(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ を G のナッシュ均衡利得, $(v_1, \ldots, v_n)$ を G の実現可能な利得とする．もしすべての $i \in N$ について $v_i > v_i^*$ が成り立ち, かつ δ が 1 に十分近ければ, 無限反復ゲーム $G(\delta)$ には平均利得が $(v_1, \ldots, v_n)$ に任意に近い SPNE が存在する.

まず, ステージゲームの利得の凸包に含まれ, 各人にステージゲームのナッシュ均衡から得られる以上のものを提供する利得ベクトル $(v_1, \ldots, v_n)$ を考える．その結果, 利得は $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ となる．凸包の定義により $(v_1, \ldots, v_n)$ は, ステージゲームの純粋戦略プロファイルから得られる利得の組み合わせの加重平均.

次に, 割引率が 1 に近い場合, 平均利得が $(v_1, \ldots, v_n)$ に等しい戦略プロファイルのシーケンスを構築できる．直感的には, 一連のプレイは, ステージゲームの純粋戦略の異なる利得を選択し $(v_1, \ldots, v_n)$ を凸結合として達成するために必要な重みを模倣すると考えられる.

第三に, この実現可能な $(v_1, \ldots, v_n)$ は, ステージゲームのナッシュ均衡からの利得を超える利得を各プレイヤーに提供するため, 報酬・罰戦略を作成するために必要な「くさび」が得られる．最後に, 十分に高い割引率があれば, そのくさびを十分に大きくして, 逸脱による短期的な利益がいかに大きくても, それを阻止するこ

とができる．この最後の点は, 割引率が 1 に任意に近い場合, 1 段階での最大の利益でさえ, 小さな損失の無限系列によって矮小化されるため.

■Ex. **囚人のジレンマ**　平均利得が $(2,2)$ となるケースを取り上げよう．割引因子 δ が 1 に十分近いとき，平均利得ベクトル $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ が $(2,2)$ に任意に近づくことを示す．**Figure 10.5** のように，利得ベクトル $(2,2)$ は $(5,-1)$ と $(-1,5)$ の等確率重み付き平均 (凸結合) である．これらの 2 組の利得は純粋戦略 (F,m) および (M,f) によって実現される．したがって「プレイヤーがそれぞれの戦略を半分ずつの期間で行えば，平均的に利得 $(2,2)$ が得られる」と考えるのは自然である．次のような戦略を考えよう:

- プレイヤー 1:
  - 1 期では F をプレイする．
  - 偶数期 $t = 2, 4, \ldots$: これまでが $(F,m), (M,f), (F,m), \ldots$ なら M を，でなければ F をプレイ．
  - 奇数期 $t = 3, 5, \ldots$: 常に F をプレイする．
- プレイヤー 2:
  - 1 期では m をプレイする．
  - 奇数期 $t = 3, 5, \ldots$: これまでが $(F,m), (M,f), (F,m), \ldots$ なら m を，でなければ f をプレイ．
  - 偶数期 $t = 2, 4, \ldots$: 常に f をプレイする．

もし両プレイヤーがこれらの戦略に従うなら，次のような平均利得をもたらす:

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_1 = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} v_1^t &= (1-\delta)[5 + \delta(-1) + \delta^2(5) + \delta^3(-1) + \ldots] \\
&= (1-\delta)\left[5(1+\delta^2+\delta^4+\ldots) + (-1)(\delta+\delta^3+\delta^5+\ldots)\right] \\
&= (1-\delta)\left[\frac{5}{1-\delta^2} + \frac{(-\delta)}{1-\delta^2}\right] = \frac{5-\delta}{1+\delta}.
\end{aligned}
$$

同様にプレイヤー 2 については

$$
\bar{v}_2 = (1-\delta)[(-1) + \delta(5) + \delta^2(-1) + \delta^3(5) + \ldots] = \frac{-1+5\delta}{1+\delta}.
$$

したがって，

$$
\lim_{\delta \to 1} \bar{v}_1 = \lim_{\delta \to 1} \bar{v}_2 = 2,
$$

すなわち割引因子が 1 に近づくにつれ，平均利得は $(2,2)$ に収束する．

次に，これらの戦略が SPE を形成しているかを確認する．一段階偏差原理と，各サブゲームが同一の無限繰り返しゲームであるという事実を用いる．検討すべき偏差の型は 3 つある:

1. **懲罰フェーズ:**　いずれかの期に偏差が起きた場合，両者は以後永遠に (F,f) をプレイする．このフェーズで偏差しても，その期に -2 の損失を被り，将来の利得は変わらないため，偏差の誘因はない．
2. **プレイヤーの「良い期」:**　均衡経路上では対称性があり，奇数期はプレイヤー 1 にとって「良い期」(利得 5)，プレイヤー 2 にとって「悪い期」(利得 -1) である．偶数期には役割が逆転する．
   たとえばプレイヤー 1 が奇数期に偏差しなければ，平均利得は $\bar{v}_1$ である．偏差すれば当該期の利得は 5 から 4 に下がり，その後は永久に (F,f) に移行するため，1 が続く．この場合の平均利得は:

$$
v_1' = (1-\delta)[4 + \delta(1) + \delta^2(1) + \ldots] = (1-\delta)4 + \delta.
$$

割引因子 δ が 1 に近いとき，v_1' は 1 程度にしかならず，v_1 (約 2) より小さい．より正確には，

$$\frac{5-\delta}{1+\delta} \geq (1-\delta)4+\delta$$

がすべての $\delta \in (0,1)$ に対して成り立つので，偏差は有利でない．

3. **プレイヤーの「悪い期」：** ここではプレイヤー 1 (または 2) が偶数期 (または奇数期) で偏差するかを考える．偏差しなければ平均利得は $\frac{-1+5\delta}{1+\delta}$ である．偏差すれば当該期の利得は − 1 から 1 に上がるが，その後は永久に (F,f) が繰り返されるので，将来の利得はすべて 1 となる:

$$v_1'' = (1-\delta)[1+\delta(1)+\delta^2(1)+\dots] = 1.$$

よって偏差しないための条件は

$$\frac{-1+5\delta}{1+\delta} \geq 1, \quad \delta \geq \frac{1}{2}$$

したがって，δ が十分大きければ (特に $\delta \geq 1/2$) ，これらの戦略ペアはサブゲーム完全均衡を形成し，平均利得 $(2,2)$ を近似的に実現できる．無限繰り返しは「報酬と罰」を含む戦略を可能にし，頻繁に相互作用がある状況で直感的なインセンティブ設計として機能することを示している．

補足 実際，割引因子 δ を 1 に極端に近づけなくても，平均利得 $(2,2)$ に近い結果を得ることができる．たとえば $\delta = 0.9$ の場合，先の戦略では

$$v_1 = \frac{5-0.9}{1+0.9} = 2.158, \quad v_2 = \frac{-1+0.9\times 5}{1+0.9} = 1.842.$$

ここで少しプレイ経路を変えて，例えば $t=26$ 期目の偶数期に (F,m) の代わりに (F,f) をプレイするようにする (それに応じて戦略も修正する) と，その期の利得はプレイヤー 1 が $5 \to 1$，プレイヤー 2 が $-1 \to 1$ へと変わる．したがって，各プレイヤーの平均利得は

$$-(5-1)\times\frac{0.9^{25}}{1+0.9} = -0.151, \qquad (1-(-1))\times\frac{0.9^{25}}{1+0.9} = 0.076$$

だけ増加する．よって新しい平均利得は

$$v_1 = 2.158 - 0.151 = 2.007, \quad v_2 = 1.842 + 0.076 = 1.918.$$

さらに $t=36$ 期に (M,f) の代わりに (M,m) をプレイすると，プレイヤー 1 は $5 \to 4$，プレイヤー 2 は $-1 \to 4$ となる．これにより平均利得の変化は

$$(5-4)\times\frac{0.9^{35}}{1+0.9} = 0.013, \quad (4-(-1))\times\frac{0.9^{35}}{1+0.9} = 0.066,$$
$$v_1 = 2.007 - 0.013 = 1.994, \quad v_2 = 1.918 + 0.066 = 1.984.$$

遠い将来のプレイを微調整して，δ が 1 に近くなくても平均利得を $(2,2)$ に任意に近づけられる．

まとめ

- ステージゲームに一意の NE があれば, 有限回反復ゲームは, δ に依らず一意の SPNE をもつ
- 無限反復ゲームでは, 一意の NE でない行動も, SPNE となる
- アメとムチの構造は, 将来ステージでの報酬や脅しで形成され, $\delta \to 1$ に近づくほど強固に
- $\delta \to 1$ なら, SPNE で達成可能な平均利得が広がり, ほぼ任意の均衡となる (Folk Theorem)
- 反復ゲームは, 長期的戦略的相互作用の理解に有用

11 Strategic Bargaining

ゲーム理論の観点から, 現実の様々な場面で登場する交渉をどのようにモデル化し分析できるのかを考える. 交渉は多くの場合, 当事者間で分配しなければならない余剰に関するものであり, 当事者が提案を行い, それに応答し, 合意に至るよう努めることによって成立する. 割引因子は δ, 期間 T は「厳格な期限」であり, この最終期間で合意に達しなかった場合, 両方のプレイヤーの報酬はゼロであると仮定する.

このゲームは有限繰り返しゲームの特徴もいくつか備えている. 「奇数」ラウンドをプレイヤー 1 が提案し, プレイヤー 2 が応答するラウンド, 「偶数」ラウンドをその逆と考えると, 各ラウンドのペアを, **合意が成立しない限り繰り返される 1 つのステージ** として扱える. 繰り返しゲームとは以下の二点で異なる.

1. 提案が受け入れられればゲームはどのラウンドでも終了する可能性がある
2. ステージゲームの報酬の流れとしてではなく, ゲーム終了時にのみ報酬が得られる

■最後通牒ゲーム $T = 1$ である簡単なケース (最後通牒ゲーム) から分析を始める. これは完全情報ゲームで, 後ろ向き推論で SPNE のプレイパスを見つけられる (**Ch.8** の **事実**). まずベンチマークとして, **逐次合理性を必要とせずに** ナッシュ均衡によってサポートされるプレイパスを見つけよう.

命題 11.1 1 期ゲームにおけるナッシュ均衡

交渉ゲームにおいて $T = 1$ の場合, 余剰の任意の分配

$$x^* \in [0,1], \quad (v_1, v_2) = (x^*, 1 - x^*)$$

はナッシュ均衡として支持されうる.

Proof. 次の戦略の組を考える:

- プレイヤー 1: 「x^* を提案する」
- プレイヤー 2: 「$x \leq x^*$ の提案は受諾し, $x > x^*$ の提案は拒否する」

このとき, 全員が逸脱の誘因を持たないため, 互いに最適反応で, 任意の x^* が均衡分配となる. □

この命題は, **ナッシュ均衡がこのゲームには適用できない** ことを示す. つまり, ゲームの結果を意味のある方法で予測できない. ここで要求されるべきは逐次合理性.

命題 11.2 1 期ゲームの部分ゲーム完全均衡の一意性

交渉ゲームにおいて $T = 1$ の場合, 以下の戦略が唯一の SPE を構成する:

プレイヤー 1 が $x = 1$ を提案し, プレイヤー 2 が $x \leq 1$ の提案を受諾する.

Proof. プレイヤー 2 は任意の正のシェア $(x < 1)$ を受け入れることが合理的で, $x = 1$ のとき無差別である. したがって, プレイヤー 1 にとって逐次最適な提案は $x = 1$ となる. 他の戦略 (たとえば「正のシェアのみ受け入れる」) はプレイヤー 1 に最適反応を持たず, SPE にはならない. □

■有限期間交渉ゲーム　期間 $T < \infty$ で終了する交渉ゲームを考える. ナッシュ均衡を用いた場合, このゲームは依然として予測力を持たない. 実際, 任意の余剰分配 $x^* \in [0, 1]$ を実現する戦略を構築できる.

たとえば, 各奇数ラウンド (プレイヤー 1 が提案者) でプレイヤー 1 が x^* を提案し, プレイヤー 2 は $x \leq x^*$ の提案を受け入れる. 偶数ラウンドでは役割を入れ替え, 同様の戦略をとる. このとき, 最初のラウンドで余剰分配 $(x^*, 1 - x^*)$ に合意することが容易に確認できる.

NE 概念のみでは「いつ合意に達するか」さえ特定できない. たとえば, プレイヤー 1 が第 1 期に $x = 1$ を提示し, プレイヤー 2 がそれを拒否する戦略を採用すれば, 第 2 期に合意が生じる NE も構築可能である. このように, NE は時点や分配に関して無数の均衡を許容する.

逐次合理性と SPE で, 結果は一意に定まる. これは, 後ろ向き推論で, 有限回の交渉においても同様に導かれる. 最終ラウンドでは提案者がパイ全体を自分のものにする提案を行い, 応答者はそれを受け入れる. 実際, 最後通牒ゲームでは, プレイヤー 1 が唯一の SPE で全余剰を獲得した.

$T = 2$ を考えると, 第 2 ラウンドは 1 ラウンドゲームと等価で, 到達すればプレイヤー 2 が全余剰を得る. 割引因子を $\delta \leq 1$ とすると, プレイヤー 2 は第 1 ラウンドで自分の利得が δ 未満となる提案 $(x > 1 - \delta)$ を拒否し, 次期に全パイを得る戦略をとる. プレイヤー 1 の最適な提案は $x = 1 - \delta$ で, 均衡分配は:

$$(v_1, v_2) = (1 - \delta, \delta)$$

ゲームで利するものはラウンド数によって変動する:

■奇数ラウンドの場合の一般形　ゲームが奇数ラウンド $T < \infty$ の場合, プレイヤー 1 は先行者優位と後行者優位の両方を持つ. つまり, 最初に提案するものの優位と, 最後に提案するものの利益を併せ持つ. 後方帰納法により次が得られる. 各奇数期 $T - s$ (s は偶数) における逐次合理的提案は

$$x_{T-s} = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \cdots + \delta^s,$$

各偶数期 (s は奇数) では

$$x_{T-s} = \delta - \delta^2 + \delta^3 - \delta^4 + \cdots + \delta^s.$$

このパターンから, 第 1 期の提案 (均衡提案) は次のように得られる.

$$x_1 = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \cdots + \delta^{T-1} = \frac{1 + \delta^T}{1 + \delta}.$$

したがって, 均衡利得は

$$v_1^* = \frac{1 + \delta^T}{1 + \delta}, \qquad v_2^* = \frac{\delta - \delta^T}{1 + \delta}. \tag{11.1}$$

命題 11.3 合意の時点

任意の部分ゲーム完全均衡において, プレイヤーたちは **最初のラウンドで合意** に到達する.

- T が有限なら, プレイヤー 1 は常に $v_1^* > v_2^*$ の利得を得る. これは先行者・後行者優位双方による
- $\delta = 0$ の場合, ゲームは 1 ラウンドゲームに退化し, プレイヤー 1 が全余剰を得る
- $\delta = 1$ の場合, 後行者が全余剰を獲得する

やや直感に反する最後の結果は, 人為的な停止期間 T に起因する. そこで, 割引因子 δ を固定し, $T \to \infty$ の極限を考えると,

$$\lim_{T\to\infty} v_1^* = \frac{1}{1+\delta}, \qquad \lim_{T\to\infty} v_2^* = \frac{\delta}{1+\delta}. \tag{11.2}$$

人為的な後行者効果は消え, 先行者優位が残るため, $\lim_{T\to\infty} v_1^* > \lim_{T\to\infty} v_2^*$ が $\delta \in [0,1)$ で成り立つ. プレイヤーが極めて忍耐強い場合 $(\delta \to 1)$ には,

$$\lim_{\delta\to 1}\lim_{T\to\infty} v_1^* = \lim_{\delta\to 1}\lim_{T\to\infty} v_2^* = \frac{1}{2}. \tag{11.3}$$

すなわち, 無限期間・完全忍耐の極限では, 2 人はパイを等分する.

まとめ: 有限期間交渉

有限期間交渉におけるナッシュ均衡は予測力を持たないが, 逐次合理性を課すことで一意の SPE が得られる. 有限期間では先行者が有利となるが, 期間が長くなるにつれてその効果は薄れ, 完全に忍耐強いプレイヤー同士では均等分配に収束する.

■Infinite Horizon Game　合意に至らなければプレイヤーが役割を無限に交代し続ける無限期間交渉ゲーム (infinite horizon game) を考える. このとき, 割引が存在するため, 合意に至らない場合に利得が 0 となるという仮定は自然である. なぜなら, もし永遠に不一致が続けば, もはや合意すべき対象 (パイ) が何も残らないからである.

ただし, 有限期間ゲームの極限として無限期間ゲームを考える場合との間には決定的な違いがある. 不一致が永遠に続く経路は無限の長さを持つため, **後ろ向き推論** は使えない. しかし, この無限期交渉ゲームには興味深い特徴がある. それは, 不一致の後に現れるゲームの**定常構造 (stationary structure)** である. すなわち, 奇数期ではプレイヤー 1 が提案者となり, 以後のゲームは再び無限の地平を持つ. 偶数期ではプレイヤー 2 が提案者となり, 同様に無限の地平を持つ. したがって, この構造を利用すれば, ゲームの唯一のサブゲーム完全均衡を比較的単純な論理で導くことができる.

まず重要な観察として, **逐次合理性 (sequential rationality)** から, 有限期モデルでの **命題 11.3** と同様に, 均衡では第 1 期に合意が成立しなければならない. なぜなら, 合意を先延ばしにすることによる割引による損失は第 1 期で合意すれば回避できるためである. したがって, 任意の SPE では第 1 期に合意が成立する.

次に, 複数の SPE が存在すると仮定しよう. その場合, プレイヤー 1 が提案を行うとき, 最も高い利得を得る均衡 (best SPE) における利得を $\overline{v}_1$, 最も低い利得を得る均衡 (worst SPE) における利得を $\underline{v}_1$ とする. 同様に, プレイヤー 2 についてもそれぞれ $\overline{v}_2$ と $\underline{v}_2$ を定義する.

ここでゲームの定常性が重要になる. 各奇数期は各偶数期と構造的に同一であり, 単にプレイヤーの役割が入れ替わるだけである. したがって,

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \overline{v}, \quad \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{v}$$

が成り立つ. ゼロサム的なゲーム構造から, プレイヤー 1 にとって利得 $\underline{v}$ をもたらす均衡では, プレイヤー 2 は提案を拒否した後に, 自身が提案者となる段階で利得 $\overline{v}$ を確保できる. したがって, 即時合意が成立し, かつその際取り分を最大化するならば, プレイヤー 1 はプレイヤー 2 に $\delta\overline{v}$ の利得を与えねばならない. したがって, プレイヤー 1 の利得は

$$\underline{v} = 1 - \delta\overline{v} \tag{11.4}$$

となる．同様に，プレイヤー 2 が提案者となる均衡では

$$\overline{v} = 1 - \delta\underline{v} \tag{11.5}$$

が成立する．式 (11.4) と (11.5) を連立すると，

$$\overline{v} = \underline{v} = \frac{1}{1+\delta}$$

が得られる．この結果は，無限期交渉ゲームの**唯一の SPE** を特徴づけ，有限期交渉ゲームの均衡の極限とも一致する．第 1 期に必ず合意が成立するため，この利得構造を用いて均衡戦略を明示できる．

■均衡戦略

- 奇数期: プレイヤー 1 は自身が $x = \dfrac{1}{1+\delta}$ を得る提案を行い，プレイヤー 2 は $x \leq \dfrac{1}{1+\delta}$ なら受諾
- 偶数期: プレイヤー 2 は $x = \dfrac{\delta}{1+\delta}$ を与える提案を行い，プレイヤー 1 は $x \geq \dfrac{\delta}{1+\delta}$ なら受諾

まとめ

- 余剰分配の主要な決定要因は **割引率**．高いほどプレイヤーは忍耐強く，分配は公平になる．
- 交渉プロトコルや合意ルールも分配結果に大きな影響を与える．有限の交渉では，最後に行動するプレイヤーは **後行者優位性** を，最初に動くプレイヤーは **割引による優位性** をもつ．
- 無限ゲーム・提案者が等確率で決まるゲームでは，後行者優位性は消え，先行者優位が残る．

12 Baysian Game

これまで扱ってきたあらゆる例や分析手法において，私たちは暗黙のうちに重要な前提を置いてきた．すなわち，「プレイヤーがどのようなゲームをプレイしているか」が **共通の知識** であるという前提である．具体的には，誰が参加者であり，各プレイヤーがどのような行動選択肢を持ち，各行動の組み合わせがどのような利得に対応するのかを，全員が理解していると仮定してきた．さらに，この理解そのものが共通の知識として共有されていると考えてきた．

このような前提の下では，支配戦略の逐次除去，合理化可能性，そして何よりも **ナッシュ均衡** や **部分ゲーム完全均衡** といった概念を定義し，分析を進めることができた．しかし，このような理想化された状況が現実の戦略的相互作用で成立することは稀である．

■Ex. 複占市場ゲーム　これらのモデルでは，各企業の費用関数や生産技術が互いに完全に知られていると仮定している．しかし現実には，他社のコスト構造や労働生産性を正確に把握しているとは考えにくい．むしろ，他社の費用についてある程度の「見当」は持っていても，確実な知識はないと考える方が自然である．

■不完備情報ゲーム (games of incomplete information)　このような **他プレイヤーの特性に関する不確実性** を扱うために，**John C. Harsanyi** は 1960 年代半ばに画期的な方法を提示した．彼は，他プレイヤーの行動に対する信念と同様に，他プレイヤーの特性 (たとえば費用関数や効用関数) に対しても確率的信念を形成できるように理論を拡張したのである．

ハーサニイは，このような状況を **不完備情報ゲーム (games of incomplete information)** と呼んだ．ここで「不完備情報」とは，プレイヤーが相手の利得関数 (または選好) を正確には知らない状況を指す．彼

は，各プレイヤーが異なる「タイプ (type)」を持つ可能性を想定し，そのタイプによって利得関数が異なるとした．タイプはプレイヤーの特性や選好を表し，他のプレイヤーには不確実である．

この不確実性を形式的に扱うために，ハーサニイは次のような **自然 (Nature)** による事前のタイプ選択モデルを導入した．ゲーム開始前に「自然」が各プレイヤーのタイプを確率的に選択し，そのタイプに応じて利得関数が決まる．言い換えれば，自然が多数の「可能なゲーム」から 1 つを選んでいるとみなせる．したがって，タイプの選択には確率分布が存在し，しかも **この分布がプレイヤー全員の共通知識** である必要がある．この仮定を **共通事前分布 (common prior assumption)** と呼ぶ．

■例: 参入ゲーム (entry game)　プレイヤー 1 (新規参入者) は市場への参入 (Enter) か撤退 (Out) かを決め，既存企業であるプレイヤー 2 は，参入された場合に「対抗 (Fight)」するか「受容 (Accommodate)」するかを選ぶ．完全情報下では，SPNE は (E, a)．

ここで，プレイヤー 2 には 2 種類のタイプが存在するとしよう．ひとつは「合理的 (rational)」タイプで，前述の通常の利得構造を持つ．もうひとつは「好戦的 (crazy)」タイプで，戦うこと自体に効用を感じる．すなわち，(E, F) の利得が -1 ではなく $+2$ になる．このとき「自然」がプレイヤー 2 がどのタイプかを確率 p で選ぶ．プレイヤー 1 にとって自分のタイプは既知だが，相手のタイプは未知．この不確実性のため，プレイヤー 1 の情報集合には分岐があり，プレイヤー 2 は自分のタイプを知って意思決定する．

標準形に書き換えると，プレイヤー 2 は「タイプ別に何をするか」を指定する戦略 (例: AA, AF, FA, FF) を持つ．これをもとに，各戦略組の期待利得を計算し，通常どおりナッシュ均衡を求めることができる．プレイヤー 2 について部分ゲームを作れ, 合理的な際の F は逐次合理性を満たさないことが確認できる．従って FA, FF は SPE から除外され, 残るのは (E, AF) のみ.

■ハーサニイの発想とその意義　この分析を通じて，ハーサニイの発想の核心が明らかになる．それは，不完備情報という複雑な状況を「自然がタイプを確率的に選ぶ不完全情報ゲーム」として再構成し，通常の均衡概念で扱えるようにした点にある．これにより，プレイヤーは相手のタイプについて確率的信念を形成し，それに基づいて最適反応を選ぶことができる．

タイプごとに最適化を行うようなメタプレイヤーと実際のプレイヤー 2 の行動が一致することを確認しておこう. 展開形ゲームでは，**戦略は情報集合ごとの完全な行動指示** を意味する．ゆえにプレイヤー 2 の戦略は:

$$s_2 = (s_2^{\text{rational}}, s_2^{\text{crazy}}).$$

プレイヤー 2 の各タイプはそれぞれ独自の情報集合 (ノード) を持つため，タイプごとに異なる行動を指定することができる. したがって，メタプレイヤーの最適化問題は次のように書ける:

$$\max_{s_2=(s_2^{\text{rational}},\, s_2^{\text{crazy}})} \Big[p \cdot u_2^{\text{rational}}(s_2^{\text{rational}}) + (1-p) \cdot u_2^{\text{crazy}}(s_2^{\text{crazy}}) \Big].$$

この目的関数は，s_2^{rational} と s_2^{crazy} について分離可能であるため，各タイプに関して独立に最適化でき:

$$s_2^{\text{rational}} = \arg\max u_2^{\text{rational}}, \quad s_2^{\text{crazy}} = \arg\max u_2^{\text{crazy}}, \qquad s_2^* = \big(s_2^{\text{rational}*},\, s_2^{\text{crazy}*}\big).$$

がメタプレイヤーの最適戦略であり，これは各タイプの最適戦略の組と一致する．言い換えれば，**「メタプレイヤーの最適戦略 ＝ 各タイプの最適戦略の組」**である．

ただし，この枠組みは強い仮定に依存している．特に，タイプの確率分布が共通知識であるという **共通事前分布仮定** は現実的とは言い難い．この仮定により，プレイヤーは「世界がどのように成り立っているか」について完全に一致した信念を持つとされる．したがって，現実の応用では，この仮定の強さを自覚したうえで，モデルの妥当性や予測の信頼性を慎重に評価する必要がある．

■ベイジアンゲーム　完全情報ゲームの正規形は，

$$\langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle.$$

ここで $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ はプレイヤー集合，S_i はプレイヤー i の戦略集合，$v_i : S \to \mathbb{R}$ はプレイヤー i の利得関数，$S \equiv S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ である．静学ゲームでは，戦略集合 S_i は行動集合 A_i に対応する．

一方で，不完全情報下の状況を表すためには，プレイヤーが自らの利得構造は知っているが，他者の利得を知らないという不確実性を導入する必要がある．このために，以下の 3 つの要素を追加する．

1 つ目に，プレイヤーの選好はその **タイプ** と結びつく．もしプレイヤーが異なる利得関数を持つ可能性があるならば，それぞれの利得関数は異なるタイプに対応する．より一般的には，プレイヤーが自分の利得やゲームに関する情報をどの程度持っているかも，タイプの一部を構成する．

2 つ目に，タイプに関する不確実性は，**自然 (Nature)** が各プレイヤーのタイプを選択することによって記述される．各プレイヤーに **タイプ空間** Θ_i を与え，自然がそこから型を選ぶものとする．

3 つ目に，自然がタイプの組み合わせをどのように選ぶかに関する **共通認識** が存在する．この分布は **共通事前分布 (common prior)** と呼ばれ，プレイヤー全員に共通の確率分布として知られている．各プレイヤーは自らのタイプを知ることで，他者のタイプに関する事後的な信念, 事後分布を形成できる．

定義 12.1 静学ベイズゲームの正規形表現

n 人プレイヤーの静学ベイズゲームは次のように定義される:

$$\langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\Theta_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot; \theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n \rangle,$$

ここで，N はプレイヤー集合, A_i はプレイヤー i の行動集合，$\Theta_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \ldots, \theta_{ik_i}\}$ はタイプ空間，$v_i : A \times \Theta_i \to \mathbb{R}$ はタイプ依存の利得関数，$A \equiv A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，$\phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ はプレイヤー i の信念であり，自分のタイプが θ_i のときに他者のタイプ θ_{-i} がとられる条件付き確率分布を表す． $\phi_i : \Theta_{-i} \times \Theta_i \to [0, 1]$, $\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) = 1$.

このように，プレイヤー，行動，選好という基本構成に加えて，**「タイプ」「タイプ依存の選好」「他者のタイプに関する信念」**という 3 要素を導入することで，不完全情報の状況を記述することができる．

■ゲームの進行過程　静学ベイズゲームは次の 4 段階で進行する:

1. 自然 (Nature) がタイプの組 $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ を選択
2. i は自分の θ_i を観察し，共通事前分布から他者タイプの事後信念 $\phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ を形成
3. 全プレイヤーが同時に行動 $a_i \in A_i$ を選択
4. 各プレイヤー i の利得は $v_i(a; \theta_i)$ として実現

上記の定義では, 簡単のために各タイプの利得が i の私的情報のみに依存する．これは **私的価値の場合** として知られており, 後ほど拡張を迫られる．

■信念　ベイズゲームの定義において導入された重要な概念のひとつが，**共通事前分布（common prior）**である。これは，すべてのプレイヤーが自然（Nature）によるタイプ選択の確率分布について同一の信念を共有しているという仮定を意味する。本節では，各プレイヤー i がこの共通事前分布を用いて，他プレイヤーのタイプに関する事後分布（posterior belief）をどのように導出するかを考える。

この考え方は，**条件付き確率**の基本的な応用である。以下では，その直感と数式を整理する。

まず，自然が各プレイヤーのタイプを実際に選ぶ前の段階を考える。この時点では，プレイヤーは自分のタイプが何であるかをまだ知らないが，自然がタイプを選ぶ確率分布を知っている。次に，自然がタイプを選び，各プレイヤーが自分のタイプを個別に（私的に）知る段階に移る。この新しい情報（＝自分のタイプ）は，他のプレイヤーのタイプに関する推測を更新する手掛かりとなる。**この更新が，条件付き確率で表される**。

■条件付き確率の定義　情報を受け取った際に考慮されるべき, 事後確率は以下で定義される:

定義 12.2 条件付き確率

事象 S が真であることを条件としたとき，事象 H が真である条件付き確率は次の式で与えられる：

$$\Pr\{H \mid S\} = \frac{\phi(S \cap H)}{\phi(S)}.$$

■ベイズゲームへの応用例　2 人のプレイヤー，各人二つのタイプを考える：

$$\theta_1 \in \{a, b\}, \qquad \theta_2 \in \{c, d\}.$$

自然がこれらのタイプの組み合わせを選ぶ事前確率分布（共通事前分布）は次のように与えられているとする：

	$\theta_2 = c$	$\theta_2 = d$
$\theta_1 = a$	1/6	1/3
$\theta_1 = b$	1/3	1/6

すなわち，プレイヤー 1 がタイプ a，プレイヤー 2 がタイプ d である確率はプレイヤー 1 が b，プレイヤー 2 が c である確率と同じく 1/3 であり，また，$(\theta_1 = a, \theta_2 = c)$ と $(\theta_1 = b, \theta_2 = d)$ の確率はいずれも 1/6. プレイヤー 1 が自分のタイプが a であることを知ったとしよう。このときプレイヤー 1 がプレイヤー 2 のタイプに対して形成する事後信念は条件付き確率で求められる。

$$\phi_1(\theta_2 = c \mid \theta_1 = a) = \frac{\Pr\{\theta_1 = a \cap \theta_2 = c\}}{\Pr\{\theta_1 = a\}} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3}.$$

$$\phi_1(\theta_2 = d \mid \theta_1 = a) = \frac{\Pr\{\theta_1 = a \cap \theta_2 = d\}}{\Pr\{\theta_1 = a\}} = \frac{1/3}{1/6 + 1/3} = \frac{2}{3}.$$

したがって，プレイヤー 1 は自分がタイプ a であることを知ったとき，プレイヤー 2 がタイプ c であると信じる確率が 1/3，タイプ d であると信じる確率が 2/3 である。

このように，**共通事前分布** と **条件付き確率** を組み合わせることで，各プレイヤーは自分のタイプに応じた合理的な信念（**事後分布**）を形成できる。これがベイズゲーム分析の基礎をなす仕組みである。

■タイプに基づく戦略とベイズ・ナッシュ均衡　完備情報ゲームとは異なり，i は複数のタイプ $\theta_i \in \Theta_i$ を持ちうるため，各タイプごとに異なる行動を選びうる．このため，戦略は次のように, **行動とは異なるものとして** 定義される．

定義 12.3 純粋戦略

静学ベイズゲーム
$$\langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\Theta_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot;\theta_i)\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n \rangle$$
におけるプレイヤー i の純粋戦略とは，関数
$$s_i : \Theta_i \to A_i$$
であり，各タイプ θ_i に対して行動 $a_i = s_i(\theta_i)$ を定める写像. 混合戦略は純粋戦略上の確率分布.

プレイヤーは自分のタイプを知る前に，すべてのタイプに対して行動計画をあらかじめ定めておくと考えられる. この構造は展開形ゲームの情報集合に基づく戦略定義と類似しており，タイプが情報集合に対応する. この観察で，プレイヤーが相手タイプに応じた戦略の取り方に抱く, 整合的な信念を形成可能になる.

■Ex. **参入ゲーム**　このゲームは，**定義 12.1** で示された, 一般的なベイズゲームの特殊例とみなせる。既存企業（プレイヤー 2）の戦略は自らのタイプに依存するため，この行列表現ではタイプ依存的な純粋戦略が 4 通り含まれる。プレイヤー 1 は，自然によるタイプ分布について正しい信念を持ち，プレイヤー 2 の特定の戦略と組み合わせることで，異なる分岐と結果に関して明確な信念を形成することができる。

不完全情報をもつ静学的ベイズゲームでは, プレイヤーは自らの選択肢に対して期待利得を評価するために, 他プレイヤーのタイプ分布に関する信念を用いる。例では，プレイヤー 2 のタイプを $\theta_2 \in \{r, c\}$ （rational と crazy）とし，合理的タイプである確率を p とする。プレイヤー 1 がプレイヤー 2 の純粋戦略に対して信念
$$s_2(\theta_2) = \begin{cases} A & \text{if } \theta_2 = r, \\ F & \text{if } \theta_2 = c \end{cases}$$
を持つとする. プレイヤー 1 はタイプが 1 種類ゆえ，主観的な参入（E）を選択した際の期待利得は,
$$Ev_1(E, s_2(\theta_2)) = p\, v_1(E, s_2(r)) + (1-p)\, v_1(E, s_2(c)) = p \times 1 + (1-p) \times (-1).$$
これに $p = \frac{2}{3}$ を代入すると,
$$Ev_1(E, s_2(\theta_2)) = \tfrac{1}{3},$$
となり，これが行列表現での純粋戦略の組 (E, AF) に対応する利得である. ここで二点強調しておこう:

第一に，もしプレイヤー i がタイプ依存の純粋戦略を用い，自然がプレイヤー i のタイプを確率的に決定する場合，他のプレイヤー $j \neq i$ からみると，プレイヤー i は混合戦略を用いているように見える。上の例でいえば，プレイヤー 2 が戦略 AF を用いるなら，プレイヤー 1 からみると，プレイヤー 2 は確率 p で A を，確率 $1-p$ で F を選んでいると考えられる。

第二に，我々は実質的にプレイヤー i のすべての情報集合（すなわちタイプ）について戦略を指定している。したがって，自然によってあるタイプが実現した場合でも，実現しなかった他のタイプに対しても戦略を完全に定義しておく必要がある。これは，相手プレイヤーが自分の期待利得を計算する際に，相手の行動に関する明確な信念を形成できるようにするためである。

プレイヤー $j \neq i$ は，i のタイプに関する事後分布 $\phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ と，各タイプ θ_i がとる戦略 $s_i(\theta_i)$ の双方を組み合わせて期待利得を形成する。したがって，タイプごとの行動ルールが明確でなければ，期待利得を一貫して定義することはできない。

このようにして，静学的ベイズゲームの構造と戦略が定義された。次に，その解概念としてナッシュ均衡を拡張した**ベイズ・ナッシュ均衡（Bayesian Nash Equilibrium）** を導入する。

ベイズ・ナッシュ均衡

ベイズゲーム

$$\langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\Theta_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot;\theta_i)\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n \rangle$$

において，戦略組 $s^* = (s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot))$ がベイズ・ナッシュ均衡であるとは，任意のプレイヤー i，任意のタイプ $\theta_i \in \Theta_i$，および任意の行動 $a_i \in A_i$ に対して，

$$\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) v_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i) \geq \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) v_i(a_i, s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i)$$

が成り立つことである.

すなわち，任意のタイプの実現に対して，プレイヤーは自らの信念 $\phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ と他プレイヤーの戦略 s_{-i}^* に基づき，期待利得を最大化する戦略をとっていることを意味する。

別の表現をすれば，各タイプ θ_i に対して，プレイヤー i は自分の戦略 $s_i^*(\theta_i)$ を，任意の代替行動 $a_i \in A_i$ よりも少なくとも高い期待利得を与えるように選択している：

$$E_{\theta_{-i}}\left[v_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i) \mid \theta_i\right] \geq E_{\theta_{-i}}\left[v_i(a_i, s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i) \mid \theta_i\right], \quad \forall a_i \in A_i.$$

この表記は，タイプ空間が有限でない場合（連続型タイプ）にも一般化できる。たとえば，各プレイヤーのタイプが区間 $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$ 上で連続分布 $F_i(\theta_i)$ に従う場合，期待利得は他プレイヤーのタイプの実現に関して積分（$n-1$ 重積分）で表される。

このように，ベイズ・ナッシュ均衡は，「各プレイヤーが自分のタイプに応じた最適な応答を行い，その期待利得が他のいかなる戦略変更によっても改善されない」という条件を満たす戦略プロファイルである。

■ベイズの定理

$$\mathbf{P}(H \mid E) = \frac{\mathbf{P}(H)\mathbf{P}(E \mid H)}{\mathbf{P}(E)}$$

注意: 事前・事中・事後 (Ex ante / Interim / Ex post)

- **事前 (ex ante)**：型がサンプルされる前に期待される利得 (型を知らない期待値)
- **事中 (interim)**：自分の型を知った後, 他者の型は条件付き分布に従うとみなした期待利得 (上のベイズ・ナッシュ均衡はこの観点)
- **事後 (ex post)**：全員の型が既知になった後の利得 (確定値)

(訳) 均衡概念をどのタイミングの期待に基づくかで区別することが重要である.

命題 12.1 (存在)

各プレイヤーの型集合と行動集合が有限であれば, ベイズ・ナッシュ均衡は少なくとも 1 つ存在する.

Proof. 有限ゲームの期待利得を用いて通常の有限正規形ゲームに書き換えれば, ナッシュの存在定理が適用できるため. □

■応用・例

- **逆選択 (Adverse selection)**：売り手が製品品質を観測し買い手が観測できない場合 (マーケット・

フォー・レモンズ).
- **オークション (Auction)** : 入札者の評価 (私的価値) が各自の型. 独立私的価値モデルと共通価値モデルは解析を大きく変える.
- **メカニズム設計の静的問題**: 仕組み (ルール) を設計してインセンティブ整合 (IC) と個人参加条件 (IR) を満たすようにする問題.

定義 12.4 インセンティブ整合 (Bayesian IC) と個人参加条件 (IR)

- **ベイズ的インセンティブ整合 (Bayesian Incentive Compatibility, BIC)**: 各型 θ_i にとって, 真のタイプを報告することが期待利得を最大化する.
- **個人参加条件 (Individual Rationality, IR)**: 参加することで得られる期待利得が予約利得 (outside option) を超える.

(訳) メカニズムは各型にとって虚偽報告より真実報告の方が有利であり, 参加する価値があることを保証すべきである.

短いまとめ

- 不完全情報静的ゲームは「型」と「共有事前分布」によって扱う.
- ベイズ・ナッシュ均衡は, 各型が条件付き期待利得を最大化する点で定義される.
- オークション・逆選択・メカニズム設計は代表的応用領域であり, IC と IR が中心課題である.

15 Sequential Rationality with Incomplete Information

本章では, **逐次合理性** を **不完全情報動的ゲーム** に適用し, これらの考え方を捉える均衡概念を導入する. つまり, プレイヤーが均衡経路上だけでなく, **経路外でも最適反応を行う均衡プレイ** に注目する. 不完全情報ゲームでは, 一部のプレイヤーは他者のタイプ集合に対応する情報集合を持つ (**Ch.12.2**). このとき, ゲームの構造的にシングルトンではない情報集合が多数存在し, **取りうるサブゲームの数は大幅に減少する**. 逐次合理性を保証する SPNE の適用を妨げる. プレイヤーが信念を持ち, その信念が環境および他者戦略と整合すべきで, この考え方をより精緻化する必要がある.

Ex. **企業参入**　完全情報ゲームにおける SPNE を見つける際のサブゲームの利用法を復習する. **Figure 15.1** を見よ. 2 つの純粋戦略ナッシュ均衡 $(O,F),(E,A)$ があるが, SPNE は (E,A) のみ.

Ex. **企業参入 (不完全情報)**　**Figure 15.2** を見よ. **新規参入者の技術力のタイプ** が今回は不確実, つまり:

1. Nature が新規参入者のタイプ (弱いタイプ W, 競争力のあるタイプ C) を選択する
   $\theta_1 \in \{W,C\}$, $\Pr\{\theta_1 = C\} = p$. 既存企業はタイプ間の確率分布しか知らない.
2. 参入者は E,O を選択し, 既存企業は新規参入者の選択を観察する.
3. 参入者の行動を観察し, 参入 (E) した場合は, 既存企業は A,F を選択する.

の流れでゲームが進行する. プレイヤー 1 (参入者) はタイプ依存的な戦略 $s_1 = s_1^C s_1^W$, $s_1^{\theta_1} \in \{O,E\}$ を選択する. 一方既存企業は情報集合が一つだけである. 各人の純粋戦略集合は:

$$s_1 \in S_1 = \{OO,OE,EO,EE\},\ s_2 \in S_2 = \{A,F\}$$

この展開型ゲームを正規形に変換するには, 計 8 つの純粋戦略のペアから生じる期待利得を計算する必要があり, タイプによるランダム性がに関して期待値が取られる. 例えば $(s_1, s_2) = (OE, A)$ ならば:

$$Ev_1 = p \times 0 + (1-p) \times (-1) = p - 1$$

$$Ev_2 = p \times 2 + (1-p) \times (1) = 1 - p$$

$p = 0.5$ と設定すれば, ベイズゲームの行列表現は **p.306** の通り. この行列ののナッシュ均衡は全て, ベイズゲームのベイズ・ナッシュ均衡 (**Ch.12**). したがって, $(OO, F), (EO, A)$ が **純粋戦略ベイズ・ナッシュ均衡**.

■例の関連性　二つの例は密接に関連している. 均衡 (OO, F) は, 現職者が脅迫を行う均衡だが, 完全情報ゲームの (O, F) に似ている. 均衡 (EO, A) は (E, A) に似ている. さらに逐次合理性の観点からみれば, (OO, F) **は,** (O, F) **と同様に逐次合理的ではない**. ではこれらの 2 つの均衡のうち, どちらが拡張型ゲームにおいて SPNE となるのか? サブゲーム完全均衡の定義は, すべての適切なサブゲームにおいて, そのサブゲームへの戦略の制約は, そのサブゲームにおけるナッシュ均衡でなければならないということである. これは, 第 8 章で見たように, プレイヤーが均衡経路上でも外でも, 互いに最善の対応を行っていることを意味する. しかし, 図 15.2 の拡張型ゲームを見ると, 適切なサブゲームは 1 つしかなく, それが完全ゲームであることが容易にわかる. したがって, (OO, F) と (EO, A) はどちらもサブゲーム完全均衡として存続する.

この例は, 非常に魅力的なサブゲーム完全均衡の概念が, 不完全情報ゲームの一部では効果がない可能性があることを示しています. 最初は, これはやや不可解に思えるかもしれません. しかし, 問題は, サブゲーム完全均衡の概念がサブゲーム内の最善の応答にのみ注意を限定する点にあります. しかし, 不完全情報がある場合, 他のプレイヤーのタイプに関する誘導情報セットによって, 完全なゲームのみが適切なサブゲームとなることがよくあります. これが起こる理由は, 分析した修正参入ゲームでは, プレイヤー 2 がプレイヤー 1 の行動を観察しているにもかかわらず, プレイヤー 1 が複数のタイプを持っているという事実は, プレイヤー 2 が着手することで始まる適切なサブゲームが存在しないことを示唆しているためです. これは, プレイヤー 2 が行動を起こす際, プレイヤー 1 のタイプを知らないため, ゲーム全体以外に適切なサブゲームは存在しないことを意味します. 実際, プレイヤーが対戦相手のタイプについて抱く不確実性を表す情報セットを介してアクションノードがリンクされるというこの問題は, 不完全情報を持つすべてのゲームに当てはまります. サブゲーム完全均衡の論理を不完全情報を持つ動的ゲームに拡張するには, 逐次合理性を明確に定義するために, 解の概念にさらに厳密な構造を課す必要があります. 私たちの目標は, 修正参入ゲームのような, 信頼性の低い脅威を含む均衡を排除する分析構造を特定することです. これは次のセクションで行います.

定義 15.1: 均衡経路上／均衡経路外の情報集合

$\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ を不完全情報ゲームのベイズ・ナッシュ均衡戦略プロファイルとする. ある情報集合が**均衡経路上**であるとは, σ^* とタイプの分布の下でその情報集合が正の確率で到達されることをいう. 逆に**均衡経路外**であるとは, σ^* とタイプ分布の下でその情報集合が到達される確率がゼロであることをいう.

定義 15.2: 信念の体系

信念の体系 μ とは, 各情報集合 h に対してその情報集合に含まれる各決定ノード $x \in h$ 上の確率分布を割り当てるものである. すなわち, 情報集合 h にいるプレイヤーが「自分はノード x にいる」と考える主観確率 $\mu(x) \in [0, 1]$ が定義され, 任意の h について $\sum_{x \in h} \mu(x) = 1$ が成り立つ.

要求 15.1: 信念の存在

英語要約: Every player has a well-defined belief over where he is in each of his information sets.

(訳)：すべてのプレイヤーは, 自分の各情報集合において「どのノードにいるか」について定義済みの信念 (確率分布) を持つ．すなわちゲームは信念の体系を備えていなければならない.

要求 15.2: 均衡経路上でのベイズ整合性

英語要約: Given a conjectured strategy profile and Nature's choices, beliefs at information sets reached with positive probability must be updated according to Bayes' rule.

(訳)：戦略プロファイル σ^* と Nature による型の選択が与えられたとき, σ^* の下で正の確率で到達される情報集合における信念はベイズ則に従って決定されなければならない.

要求 15.3: 均衡経路外での信念の自由度

英語要約: At information sets off the equilibrium path any belief can be assigned (Bayes' rule does not apply).

(訳)：均衡経路外の情報集合については, ベイズ則で信念を一意に決めることができないため, 任意の信念を割り当て得る (ただし合理性の観点から追加の制約を課うこともある) .

要求 15.4: 逐次合理性

英語要約: Given their beliefs, players' strategies must be sequentially rational: at every information set each player must play a best response to his belief (and others' strategies).

(訳)：各プレイヤーは与えられた信念に基づいて逐次合理的に振る舞わなければならない．すなわち任意の情報集合において, そのプレイヤーの採る戦略はその情報集合での信念と対戦相手の戦略に対する最適応答でなければならない.

定義 15.3: 完全ベイズ均衡 (Perfect Bayesian Equilibrium, PBE)

英語定義（簡潔化）：A Bayesian Nash equilibrium profile σ^* together with a system of beliefs μ constitutes a perfect Bayesian equilibrium if they satisfy Requirements 15.1–15.4.

(訳)：ベイズ・ナッシュ均衡 σ^* と信念体系 μ の組が, 要求 15.1–15.4 をすべて満たすとき, それらの組 (σ^*, μ) を **完全ベイズ均衡** と呼ぶ.

命題 15.1

主張: If a (possibly mixed) strategy profile $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ is a Bayesian Nash equilibrium of a Bayesian game, and if σ^* induces that *all* information sets are reached with positive probability, then σ^* together with the belief system μ^* uniquely derived from σ^* and the distribution of types constitutes a perfect Bayesian equilibrium.

(訳)：もし戦略プロファイル σ^* がベイズ・ナッシュ均衡であり, さらにその下で全ての情報集合が正の確率で到達されるならば, σ^* に基づきタイプ分布とベイズ則から一意に導かれる信念体系 μ^* と組になった (σ^*, μ^*) は完全ベイズ均衡を構成する.

Proof. 仮に命題が偽であるとすると, σ^* はベイズ・ナッシュ均衡であるにもかかわらず, (σ^*, μ^*) が完全ベイズ均衡を構成しない, すなわち要求 15.4 (逐次合理性) がどこかで破られる．つまりあるプレイヤー i とその情報集合 h_i が存在して, i の戦略 σ_i^* は $\mu^*(h_i)$ に対する最適応答ではない．その場合, h_i での最適反応を行う戦略 σ_i' を考え, その他の情報集合では σ_i^* と同じにする．しかし仮定より μ^* は σ^* からベイズ則で導かれているため, σ_i' は σ^*_-i に対して σ_i^* より優れてしまい, これは σ^* がベイズ・ナッシュ均衡であるという仮定に反する．よって矛盾し, 命題は成立する． □

注意 (Remark)

- 要求 15.3 (均衡経路外での信念は自由に選べる) は弱い制約であるため, 一部の文献はこの概念を *weak perfect Bayesian equilibrium* と呼ぶ.
- より厳密には, 均衡経路外でも可能な限りベイズ則で信念を決める (許される場合はベイズ則に従わせる) という追加要求を置くことができる．この追加制約の有無が均衡の絞り込みに影響する．
- 図 15.3 のように Nature が動かないゲームでも, 各情報集合に信念を割り当てることは可能であり, その場合は均衡経路外の信念設定に注意が必要である．

先に述べたように、要件（15.3）は均衡経路上ではない（off the equilibrium path）情報集合に対して何の制約も課していない。このため，一部の文献ではこの解概念を **弱い完全ベイズ均衡（weak perfect Bayesian equilibrium）** と呼んでいる。

しかし，より厳密な要件（15.3）の定式化では，可能な場合には，均衡経路外における信念も **ベイズ則（Bayes' rule）** に基づいて定義されるべきだとされる。では，もしある情報集合が均衡経路上で到達しない場合に，ベイズ則がどのように効力を持つことができるのだろうか。この点を理解するために，図 15.3 の例を考えよう。このゲームには自然（Nature）の手番は存在しないが，定義上，各情報集合に信念を割り当てることができるため，要件（15.3）を適用できる。

このゲームで，プレイヤー 1 が戦略 L を選択し，プレイヤー 2 が混合戦略 $\sigma_A = \Pr\{A\}$ を，プレイヤー 3 が混合戦略 $\sigma_C = \Pr\{C\}$ をとっているとする。もしこれがプレイヤー 4 の信念であるならば，プレイヤー 2 の後に続く情報集合は確率 1 で到達するので，そのときの信念は $\mu_A = \sigma_A$ でなければならない。一方，プレイヤー 3 の後に続く情報集合は正の確率では到達しないため，先の要件（15.3）のもとでは，この情報集合における信念は任意に設定してよいとされている。

しかし，より注意深く考えると次のような論理が導かれる。もしプレイヤー 4 が「プレイヤー 3 の後の情報集合」に到達したことを認識したならば，彼は「プレイヤー 1 が本来の戦略 L から逸脱した」と推論すべきである。だが，なぜ彼が「プレイヤー 3 もまた自らの混合戦略 σ_C から逸脱した」と信じなければならないのだろうか。むしろ自然な信念は「プレイヤー 1 のみが逸脱した」と考えることであり，したがって信念は $\mu_C = \sigma_C$ であるべきである。

このように，より厳密な要件（15.3）の定義では，たとえ到達確率がゼロの情報集合であっても，信念に一定の制約が課される場合がある。次節では，この問題を明示的に扱う **完全ベイズ均衡（perfect Bayesian equilibrium）** の精緻化（refinement）を導入する。

定義 15.4: 整合性 (Consistency)

英語定義 (簡潔化)：A profile (σ^*, μ^*) is *consistent* if there exists a sequence of nondegenerate mixed strategy profiles $\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$ and corresponding belief systems $\{\mu^k\}_{k=1}^{\infty}$ derived from each σ^k by Bayes' rule, such that $\lim_{k\to\infty}(\sigma^k, \mu^k) = (\sigma^*, \mu^*)$.

(訳)：(σ^*, μ^*) が整合的であるとは, 非退化な混合戦略列 $\{\sigma^k\}$ とそれぞれからベイズ則で導かれる信念列 $\{\mu^k\}$ が存在し, その極限が (σ^*, μ^*) に収束することをいう.

定義 15.5: 逐次均衡 (Sequential Equilibrium)

英語定義 (簡潔化)：A profile (σ^*, μ^*) is a sequential equilibrium if it is both a perfect Bayesian equilibrium and consistent (in the sense of Definition 15.4).

(訳)：(σ^*, μ^*) が逐次均衡であるとは, それが完全ベイズ均衡であり, かつ整合性 (Definition 15.4) を満たす場合をいう．逐次均衡は PBE に対する強い洗練化である (trembling-hand 的近似を許すことで信念の整合性を要求する)．

まとめ (Summary)

- 不完全情報ゲームでは, Nature によるタイプ選択に伴う情報集合のため, 真の部分ゲーム (proper subgame) はしばしば全体ゲームしか存在せず, 単純な部分ゲーム完全均衡はベイズ・ナッシュ均衡を十分に絞り込まないことがある.
- そこで全ての情報集合で信念を定義し, 均衡経路上ではベイズ則に従うことを課すことで, ベイズゲームにも逐次合理性を適用できるようにする (これが PBE の発想である)．
- 完全ベイズ均衡では, 信念は均衡経路上で制約されるが, 均衡経路外では自由度が残る．均衡経路外の信念は均衡行動を支持するよう選ばれるべきである.
- それでも PBE が逐次的に不合理に見えるプレイを排除できない場合があり, そのような状況に対処するために逐次均衡 (sequential equilibrium) などの洗練化が導入される.

16 Signaling Games

不完備情報ゲームでは，少なくとも一方のプレイヤーが他方のプレイヤーのタイプを知らないという特徴がある。このような状況では，場合によってはプレイヤーにとって自分のタイプを相手に**明示的に伝える（シグナリングする）**ことが有利になることがある。

たとえば，潜在的な競争相手（企業や政治家など）が自分が「強いタイプ」であることを知っているなら，それを現職の相手に知らせることで，「私は強い。したがってあなたは私と戦う時間や労力を浪費すべきではない」と示唆することができる。もちろん，「弱いタイプ」であっても自分を「強い」と思わせたいので，単に「私は強い」と発言するだけでは信頼性がない。そのため，単なる「安価な発言（cheap talk)」ではなく，プレイヤーが自分のタイプを**信頼できる形で（credibly）**伝える方法が必要となる。

このように，プレイヤーが均衡において自らのタイプを行動を通じて相手に示すことができるゲームを**シグナリング・ゲーム (signaling game)** と呼ぶ。この概念は，**マイケル・スペンス (Michael Spence, 1973)** によるノーベル賞受賞研究に端を発する。スペンスは，教育が「学習内容」そのものではなく，「労働者の潜在能力」を企業に伝えるシグナルとして機能することを理論的に示した。

■シグナリング・ゲームの基本構造　シグナリング・ゲームは，次の 4 つの要素を持つ共通の構造をもつ。

1. 自然が 1 のタイプを選ぶ。2 はそのタイプを知らないが，利得には影響する（共通価値）
2. 1 の行動集合は十分に豊かで（タイプ数と同じ数以上の要素），各行動はタイプで異なるコスト
3. 1 が先に行動を選択し，2 はその行動を観察してから反応
4. 2 は，1 の行動を観察した後，事前の信念に基づき信念を更新し，更新後の信念に基づき最適反応

1 の行動が，2 に対して何らかの情報（シグナル）を与える可能性があることから，このようなゲームを「シグナリング・ゲーム」と呼ぶ。もし均衡においてプレイヤー 1 の各タイプが異なる行動を選ぶなら，プレイヤー 2 はその観察からプレイヤー 1 のタイプを完全に推論できる。すなわち，2 は初めは 1 のタイプを知らないが，均衡下では 1 の行動によってそのタイプを**完全に学習（完全分離）**できる。

もちろん，タイプが必ずしも明示されるとは限らない。もし均衡においてすべてのタイプのプレイヤー 1 が同じ行動を選ぶなら，プレイヤー 2 は何の情報も得られず，信念を更新することはできない。このような違いに基づき，シグナリング・ゲームには次の 2 種類の主要な**完全ベイズ均衡（Perfect Bayesian Equilibrium, PBE）**のクラスが存在する。

1. **プーリング均衡** (Pooling Equilibrium):　すべてのタイプのプレイヤー 1 が同じ行動を選ぶ均衡であり，プレイヤー 2 は何の情報も得られない。プレイヤー 2 の信念は，正の確率で到達する情報集合においてのみベイズ則で更新される。到達確率ゼロの情報集合では，プレイヤー 2 の信念は任意であり，それが彼自身の最適応答を支持するように設定される。プレイヤー 2 の順序的に合理的な戦略が，プレイヤー 1 にプーリング戦略から逸脱させないように働く。
2. **セパレーティング均衡** (Separating Equilibrium):　プレイヤー 1 の各タイプが異なる行動を選び，これによってタイプが完全に識別される均衡である。プレイヤー 2 の信念は，到達確率が正のすべての情報集合においてベイズ則によって一意に定まる。もしプレイヤー 1 の行動数がタイプ数より多い場合には，どのタイプも選ばない行動（到達確率ゼロの情報集合）に対しても，プレイヤー 2 の信念が戦略を支持するように設定される。プレイヤー 2 の戦略がプレイヤー 1 の戦略を支持し，その逆も成立する。

「プーリング（pooling)」という名称は，すべてのタイプのプレイヤー 1 が同一の行動に「集まる」ことを意味する。したがってプレイヤー 2 はプレイヤー 1 の行動から何の情報も得られず，彼の事後信念は事前信念と一致する（すなわち，プレイヤー 1 のタイプに関する事前分布のままである)。

これに対して「セパレーティング（separating)」均衡では，各タイプのプレイヤー 1 が他のタイプと異なる行動を選ぶため，プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の行動を観察した瞬間に，そのタイプを完全に推定できる。

さらに，**ハイブリッド均衡（hybrid equilibrium）**あるいは**半分離均衡（semi-separating equilibrium）**と呼ばれる第三のクラスも存在する。この場合，異なるタイプのプレイヤー 1 が異なる混合戦略を選ぶ。したがって，情報を持たないプレイヤー 2 の情報集合は，異なるタイプによって異なる確率で到達することがあり，ベイズ則によりプレイヤー 2 はプレイヤー 1 のタイプに関して部分的な情報を得ることができる。ただし，完全に識別できるとは限らない。これらの均衡は第 17 章で詳しく分析する。（より高度な議論については Fudenberg and Tirole (1991, Chapter 8) を参照。）

最後に，前章で扱った不完備情報下の参入ゲームを用いて，これら 2 種類の均衡を確認できる。ベイズ・ナッシュ均衡 (OO, F) では，プレイヤー 1 の両タイプが「参入しない（Out)」を選ぶため，プレイヤー 2 はタイプに関して何の情報も得られない。（この場合，プレイヤー 2 の行動はプレイヤー 1 の「参入しない」決

定の後には生じない。）したがって (OO, F) はプーリング均衡である（ただし完全ベイズ均衡ではない）。

一方で，ベイズ・ナッシュ均衡 (EO, A) は完全ベイズ均衡でもあり，ここではプレイヤー 1 の行動がそのタイプを完全に示している。すなわち，もしプレイヤー 2 が「参入（Entry）」を観察すれば，確率 1 でプレイヤー 1 が「強いタイプ」であると信じ，逆に「参入しない（Out）」を観察すれば，確率 1 でプレイヤー 1 が「弱いタイプ」であると信じる。したがって，(EO, A) はセパレーティング均衡の例である。

付録 A　数学的補遺