測度論的確率論

前川 大空 *

2025 年 9 月 8 日

1　確率モデルを作るまで

1.1　事象や観測を表現するための数学的記述

■p.5 $C([0,1])$:　$[0,1]$ 上の連続関数全体. $D([0,T])$ は右連続で左極限を持つ, カドラグ関数全体を指す.

■p.5 **実用上の標本空間**:　多くの統計的問題 (確率過程を除いて) では $\Omega=\mathbb{R}^d$ と置けば問題ない.

■p.6 **語の区別**:　ω は根元事象・標本, Ω は標本空間, 標本の集合で確率を測る対象となるのが事象.

■p.6 **事象の定義**:　σ-加法族 $\mathcal{F}$ が確率を考えるために必要であり, この元が事象として定義される. 有限加法族 $\mathcal{F}$ が有限個の元 (要素) しか持たないとき, $\mathcal{F}$ は自動的に σ-加法族となる.

■p.7 **自明な σ-加法族**:　$\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$ のこと.

■p.7 **可測空間**:　**Def 1.1.11.** の $(\Omega,\mathcal{F})$ が確率モデルには必要. $\mathcal{F}$ は確率を知りたい範囲を考慮して設定する必要があり, 一方で 2^Ω は集合が大きすぎて不適切. ボレル集合体などが実用的な σ-加法族として知られる.

■p.8 **ボレル集合体**　まず, 区間の集合 $\mathcal{I}$ を以下のように定義する:

$$\mathcal{I}\equiv\{(a,b]\mid a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\} \tag{1.1}$$

$b=\infty$ の時は $(a,b]=(a,\infty)$ と考えるので標本空間は $\mathbb{R}$. $\mathcal{I}$ を用いて区間塊 $\mathcal{A}$ は以下のように定義される:

$$\mathcal{A}\equiv\{\cup_{k=1}^{m}I_k\mid m\in\mathbb{N},\, I_i\cap I_j=\emptyset\,(1\le i<j\le m),\, I_i,I_j\in\mathcal{I}\} \tag{1.2}$$

これは有限加法族だが, 無限個の元を持つため σ-加法族とは限らない.

Proof. 有限個の互いに素な $(a,b]$ の和集合で $\mathcal{A}$ の元は定義される．まず $\emptyset\in\mathcal{A}$ である ($I_k=\emptyset\,\forall k$ とすればよい)．また $A=\cup_{k=1}^{m}I_k\in\mathcal{A}$ の補集合 A^c を考えると，$\Omega=\mathbb{R}$ を I_k で分割した区間の有限個の和集合として表せ，$A^c\in\mathcal{A}$ が従う．最後に $A=\bigcup_{i=1}^{m}I_i$, $B=\bigcup_{j=1}^{n}J_j\in\mathcal{A}$ を考える．I_i,J_j の端点全体を集めると有限集合 E が得られる．E で, 実直線は有限個の互いに素な区間 $(\alpha,\beta]$ に分割される．各 $(\alpha,\beta]$ は A,B との包含関係で判別できるから, $A\cup B$ も有限個の互いに素な $(\alpha,\beta]$ の和集合として表せ, $A\cup B\in\mathcal{A}$. したがって $\mathcal{A}$ は有限加法族である. □

* 一橋大学経済学部 4 年, 五年一貫専修コース公共経済プログラム

この $\mathcal{A}$ から生成された最小の σ-加法族を $\mathbb{R}$ 上のボレル集合族として:

$$\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A})$$

と記載する. 構成の仕方としては **Thm 1.1.13.** のように, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$ とする方法も認められる.

Proof. 未確認. □

■p.10 **注意** 1.1.14.　無理数全体の集合は非加算集合.

■p.11 d **次元可測空間**:　$\Omega = \mathbb{R}^d$ の場合は, d 次元ボレル集合体 $\mathcal{B}_d$ を利用して $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ が利用される.

■**演習** 1,2:　未確認.

1.2　確率変数と確率

■p.12 **確率変数**:　確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ は, 根元事象から観測への対応といえる. 可測空間のみで定義可能.

Def 1.2.1. 確率変数:

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し, 写像 $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ が, 任意の $B \in \mathcal{B}_d$ に対して:

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \tag{1.3}$$

を満たすとき, X を d 次元確率変数という.

■p.12 **演習** 3:　未確認. 計量経済学のための数学にも対応する定理があったはず.

■p.13 **可測関数**:　計量経済学のための数学では説明が不足しており, これを用いる証明 (記憶している限りでは **Thm 9.4**) に苦戦した記憶. 一応 **Def 9.4** は関連概念ではあるはず. [*1]

Def 1.2.4. 可測関数:

可測空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ から $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ への写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が, 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

を満たすとき, f は $\mathcal{X}$ 上の $\mathcal{F}$-可測関数, あるいは単に $\mathcal{F}$-可測 と呼ぶ. 特に d 次元可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ として考えるならば, f を単に可測関数と呼ぶ.

可測関数の定義において行先の $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ はとくに限定されない? **Thm 1.2.5.** の証明での『Y が $\mathcal{F}/\mathcal{B}_k$-可測であることを示せばよい』との記述は, **Def 1.2.1.** で考慮しているように, k 次元確率変数が σ-加法族として $\mathcal{B}_k$ を念頭に置いているからだろう. 可測関数の定義は **Def 1.2.1.** と対応する形であることから, 確率変数とは「Ω 上の $\mathcal{F}$-可測関数」であり, $\mathcal{F}$ の事象にのみ確率は付与される (確率測度の定義域が $\mathcal{F}$ に限定される) こととなる.

[*1] 定義・定理番号の後ろに点がないのが『計量経済学のための数学』, 点があるのが『統計学への確率論』です. DDR 補足資料の **付録 C** に『計量経済学のための数学』の主要なステートメントは記載しているのでご確認ください.

Thm 1.2.5. 合成関数と可測性:

X を d 次元確率変数とするとき, 任意の $((\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ からの$)$ 可測関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ に対して, $Y \equiv f(X)$ は k 次元確率変数である.

■p.13 **頻度論的確率論**:　高校でやる確率みたいなやつ. 数え上げで確率を定義している.

■p.17 **確率測度**:　**Def 1.2.9.** の完全加法性 (σ-加法性) が要求される. **Def 1.2.6.** の有限加法性は不十分.

■p.17 **例** 1.2.8.:　無限個の区間を考える必要があることが問題だったため, σ-加法族を考えている. 不具合のない (集合として大きすぎない) 対処としてボレル集合族 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ を使っている.

■p.18 **ホップの拡張定理**:　都合のいい確率 $\mathbb{P}$ は必ずただ一つ存在するという結論.

Thm 1.2.12. ホップの拡張定理:

$\mathcal{A}$ を Ω の集合からなる有限加法族とし, $\mathbb{P}^*$ を $\mathcal{A}$ 上の有限加法的確率 (ref: **Def 1.2.6.**) とする. このとき, 以下の (1), (2) は同値である.

1. $\sigma(\mathcal{A})$ 上に $\mathbb{P}^*$ の拡張 $\mathbb{P}$ が**存在して一意**である.
2. $\mathbb{P}^*$ は $\sigma(\mathcal{A})$ 上で σ-加法的である.

■p.19 **例** 1.2.8. **の続き**:　未確認.