証明：標本分散が母分散に確率収束

Sora Maekawa

2025 年 1 月 11 日

標本分散が母分散 σ^2 に確率収束することを示す. 標本分散の定義は以下の通り：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

ここで, $\bar{X}$ は標本平均で、次のように定義される：

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

標本分散を展開し, 母分散 σ^2 に関係づけるため次の変形を行う：

$$X_i - \bar{X} = (X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu),$$

これを S^2 の定義に代入:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right]^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X} - \mu)^2$$

大数の法則を適用し, 標本分散が母分散に収束することを示す.

(第 1 項)：$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ LLN と確率収束の性質より, i.i.d RVs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し：

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sigma^2$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$ で収束することを利用した. したがって, この項は母分散 σ^2 に確率収束する.

(第 2 項)：$\frac{n}{n-1}(\bar{X} - \mu)^2$ 標本平均 $\bar{X}$ も大数の法則により母平均 μ に確率収束する：

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$$

このとき、$(\bar{X} - \mu)^2$ は確率収束の連続性（連続写像定理）により：

$$(\bar{X} - \mu)^2 \xrightarrow{P} 0$$

ここでも同様に $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$ で収束することを利用でき:

$$\frac{n}{n-1}(\bar{X} - \mu)^2 \xrightarrow{P} 0$$

上記の (1) と (2) を統合すると：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X} - \mu)^2$$

において, 第 1 項は σ^2 に確率収束し, 第 2 項の影響は無視できる（確率収束で 0）ため以下を得る：

$$S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$