

消費者理論の諸定理

前川 大空 *

2026年2月11日

1 数学的定義・定理

■凸集合 集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ が凸であるとは、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in C,$$

が成り立つことをいう。以下では $C \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする。

■符号反転と凹凸 関数 $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 f の（狭義）凹性と $-f$ の（狭義）凸性は同値である。

Proof. 実際、任意の $\lambda \in [0, 1]$ と $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ について

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq (>) \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

この両辺に -1 を掛ければ

$$\iff (-f)(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq (<) \lambda(-f)(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)(-f)(\mathbf{y}),$$

となる。 □

■線形関数は凸かつ凹 線形関数 $\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$ は凸かつ凹である。

Proof. 実際、

$$\ell(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \lambda\ell(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)\ell(\mathbf{y}),$$

が恒等的に成り立つため、凸性・凹性の不等式が等号で成立する。 □

特に予算式 $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}$ は \mathbf{x} に関して凸かつ凹である。

■準凹性の特徴付け（上方位集合） $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ について、次は同値である：(i) f は準凹である。 (ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し上位集合 $\{\mathbf{x} \in C \mid f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$ は凸である。

Proof. (i) \Rightarrow (ii) を示す。 f が準凹とし、任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ を取る。 $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \geq \alpha$ として準凹性より

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq \min\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\} \geq \alpha,$$

* 一橋大学 経済学部 4 年, 2122230K, 五年一貫コース公共経済プログラム

したがって $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in \{\mathbf{z} \in C \mid f(\mathbf{z}) \geq \alpha\}$ であり, 上方位集合は凸である.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ と $\lambda \in [0, 1]$ を取る. $\alpha := \min\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$ とおけば $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \geq \alpha$ であるから, (ii) より $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ も上方位集合に属し,

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq \alpha := \min\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}.$$

よって f は準凹である. \square

■凸(凹) \Rightarrow 準凸(準凹) f が凸ならば準凸, f が凹ならば準凹である.

Proof. 例えば凸 f について, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し下方位集合

$$\{\mathbf{x} \in C \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\},$$

が凸であることを示せばよい. \mathbf{x}, \mathbf{y} がこの下方位集合に属するとき, f の凸性より

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}) \leq \alpha,$$

ゆえ $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ も下方位集合に属する. 凹 \Rightarrow 準凹も同様に, 上方位集合の凸性から従う. \square

■包絡線定理 $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ を選択変数, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ をパラメータとする. 目的関数 $f : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ は \mathbf{x} に関して狭義凹, $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ に関して C^1 とする. 制約関数 $g_j : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) は \mathbf{x} に関して凸, ^{*1} $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ に関して C^1 とする. 以下の不等号制約付き最適化問題を考える:

$$V(\boldsymbol{\theta}) := \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \quad \text{s.t. } g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

任意の $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ に対し, 最適解 $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta})$ が一意に存在し, 制約想定 (e.g. NDCQ) が $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta})$ でなりたつと仮定する. この仮定のもと, ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}_+^m$ が存在し, ^{*2 *3} 以下がなりたつ:

Proposition 1.1: Envelope theorem

値関数 V は微分可能で, 以下がなりたつ:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta)} \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} [f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta)} \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}}. \quad (1)$$

特に, あるパラメータ θ_ℓ が制約関数に影響せず $\partial g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_\ell = 0$ が全 j についてなりたつとき, 対応する制約項は消え, 以下がなりたつ:

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} = \frac{\partial}{\partial \theta_\ell} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta)} \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta)} \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}}. \quad (2)$$

■包絡線定理(最小化への適用) 最小化問題 $\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ でも, $-f$ が(狭義)凹になれば

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = -\max_{\mathbf{x}} (-f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})),$$

として最大化問題に帰着でき, 包絡線定理を適用できる(シェファードの補題の導出で用いる).

^{*1}『力』では g も凹であることに注意せよ.

^{*2} NDCQ がなりたつとき, ラグランジュ乗数は一意に定まる.

^{*3} 狹義単調性は定理には必要ないが, 狹義凹性とともに仮定すれば最適解が一意に定まる十分条件となる.

■定義と補助的仮定 價格ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$, 所得を $y > 0$, 効用水準を $\bar{u} \in \mathbb{R}$ とする. section 1 では, 効用最大化・支出最小化問題が包絡線定理の仮定を満たすとする. 間接効用と支出関数を

$$V(\mathbf{p}, y) := \max_{\mathbf{x}} \{u(\mathbf{x}) \mid \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq y\}, \quad e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^\top \mathbf{x} \mid u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}\},$$

とそれぞれ定義する. さらにそれぞれに対応する需要関数を定義する.

Definition 1.1: 非補償需要 (Walrasian demand)

価格ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$ と所得 $y > 0$ に対し, 非補償需要 $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)$ を以下で定める.

$$\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) := \arg \max_{\mathbf{x}} \{u(\mathbf{x}) \mid \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq y\}, \quad (3)$$

Definition 1.2: 補償需要 (Hicksian demand)

価格ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$ と効用水準 \bar{u} に対し, 補償需要 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ を以下で定める.

$$\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) := \arg \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^\top \mathbf{x} \mid u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}\}, \quad (4)$$

section 1 ではさらに, 需要や支出関数といった最適解は一意 (とくに, 各需要は関数として定義できる) で, これらにも包絡線定理が適用可能とする.

■ロイの恒等式 効用関数の狭義単調性を仮定する.

Proposition 1.2: Roy's identity

財 $j = 1, \dots, n$ について, つぎがなりたつ:

$$x_j^u(\mathbf{p}, y) = - \frac{\partial V(\mathbf{p}, y)/\partial p_j}{\partial V(\mathbf{p}, y)/\partial y}. \quad (5)$$

Proof. 間接効用関数は

$$V(\mathbf{p}, y) = u(\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)),$$

であったえられる. 両辺を p_j で微分すると, 包絡線定理より

$$\frac{\partial V(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, y, \lambda) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y), \lambda=\lambda^*(\mathbf{p}, y)} = -\lambda^*(\mathbf{p}, y) x_j^u(\mathbf{p}, y),$$

ここで λ^* は予算制約のラグランジュ乗数. 同様に y で微分すると

$$\frac{\partial V(\mathbf{p}, y)}{\partial y} = \lambda^*.$$

仮定, とくに u の狭義単調性より $\lambda^* > 0$ ゆえ, 両式を割れば結論がしたがう. \square

■シェファードの補題 支出関数 $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は \mathbf{p} について C^2 とする.

Proposition 1.3: Shephard's lemma

補償需要関数 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ は支出関数の価格微分であたえられる:

$$x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Proof. 支出最小化問題のラグランジアンは以下のように構成される:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) = -\mathbf{p}^\top \mathbf{x} - \mu(\bar{u} - u(\mathbf{x}))$$

包絡線定理をもちいて以下がなりたつ

$$-\frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = -\left. \frac{\partial}{\partial p_i} (\mathbf{p}^\top \mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}), \mu=\mu^*(\mathbf{p}, \bar{u})} = -x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}),$$

したがって題意の式が得られる. \square

■Slutsky 行列の一般的性質 補償需要 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ に対する Slutsky 行列を

$$S(\mathbf{p}, \bar{u}) := \left(\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

と定義する. 補償需要と Slutsky 行列について, 一般に以下が成り立つ:

Proposition 1.4: Hicksian demand and Slutsky matrix

- (0 次同次性) $\mathbf{x}^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) \quad \forall \lambda > 0.$
- (adding-up)

$$\sum_j p_j \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = 0 \quad \forall i. \quad (7)$$

- (対称性) $S = S^\top.$
- (負半定性) 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\mathbf{v}^\top S \mathbf{v} \leq 0.$

Slutsky 行列の性質 (0 次同次性)

Proof. 支出関数の 1 次同次性より $e(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \lambda e(\mathbf{p}, \bar{u}).$ 右辺を \mathbf{p} で微分すると

$$\nabla_{\mathbf{p}}(\lambda e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \lambda \nabla_{\mathbf{p}}e(\mathbf{p}, \bar{u}),$$

である. 一方, 左辺について合成関数の微分 ($\mathbf{q} := \lambda \mathbf{p}$) より

$$\nabla_{\mathbf{p}}e(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \lambda \nabla_{\mathbf{q}}e(\mathbf{q}, \bar{u}).$$

以上より

$$\lambda \nabla_{\mathbf{q}}e(\mathbf{q}, \bar{u}) \Big|_{\mathbf{q}=\lambda \mathbf{p}} = \lambda \nabla_{\mathbf{p}}e(\mathbf{p}, \bar{u}).$$

$\lambda > 0$ だから両辺を λ で割り, シェファードの補題 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \nabla_{\mathbf{p}}e(\mathbf{p}, \bar{u})$ を用いると

$$\mathbf{x}^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \nabla_{\mathbf{q}}e(\mathbf{q}, \bar{u}) \Big|_{\mathbf{q}=\lambda \mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{p}}e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}).$$

よって題意は示された. \square

Slutsky 行列の性質 (adding-up)

Proof. 0 次同次性より $x_i^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})$. 両辺を λ で微分し $\lambda = 1$ とすると

$$0 = \frac{d}{d\lambda} x_i^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) \Big|_{\lambda=1} = \sum_j \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} p_j.$$

よって題意は示された. \square

Slutsky 行列の性質 (対称性)

Proof. 支出関数 $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は \mathbf{p} に関して凹である. 実際, 任意の $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}$ と $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} e(\theta \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)}, \bar{u}) &= \inf_{\mathbf{x}: u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}} (\theta \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)}) \cdot \mathbf{x} \\ &= \inf_{\mathbf{x}: u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}} (\theta \mathbf{p}^{(1)} \cdot \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)} \cdot \mathbf{x}). \end{aligned}$$

一般に $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ であるから

$$e(\theta \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)}, \bar{u}) \geq \theta e(\mathbf{p}^{(1)}, \bar{u}) + (1 - \theta) e(\mathbf{p}^{(2)}, \bar{u}),$$

よって e は凹である. e が \mathbf{p} に関して C^2 と仮定すると, シェファードの補題より

$$S(\mathbf{p}, \bar{u}) = \nabla_{\mathbf{p}}^2 e(\mathbf{p}, \bar{u}).$$

Young の定理より S は対称行列である. \square

Slutsky 行列の性質 (負半定性)

Proof. 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$g(t) := e(\mathbf{p} + t\mathbf{v}, \bar{u})$$

とおくと, e の凹性から g は凹関数である. したがって 2 階微分可能なら $g''(0) \leq 0$. 連鎖律より

$$g''(0) = \mathbf{v}^\top \nabla_{\mathbf{p}}^2 e(\mathbf{p}, \bar{u}) \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top S(\mathbf{p}, \bar{u}) \mathbf{v}.$$

ゆえに S は負半定 (negative semi-definite) である. \square

■間接効用と支出関数の関係 効用関数の狭義単調性を仮定する.

Proposition 1.5: Relations between indirect utility and expenditure

間接効用と支出関数の間では, 任意の (\mathbf{p}, \bar{u}, y) で以下がなりたつ:

$$V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \bar{u}, \quad e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)) = y. \quad (8)$$

Proof. まず $V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \bar{u}$ をしめす. 支出関数の定義より, $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は効用水準 \bar{u} を達成可能な最小の支出である. したがって, 所得を $y = e(\mathbf{p}, \bar{u})$ としたとき, 効用最大化問題において少なくとも効用 \bar{u} は達成可能である. 一方, $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は最小支出であるから, それ以上の効用は達成できない. ゆえに題意がしたがう.

つぎに $e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)) = y$ をしめす。定義より, $V(\mathbf{p}, y)$ は所得 y の下で達成可能な最大効用である。この効用水準を達成するために必要な最小支出は, 定義から y 以下である。一方, 所得制約の下で最大効用が達成されていることから, それより小さい支出では同じ効用水準は達成できない。ゆえに題意がしたがう。□

■双対性 (補償・非補償需要の対応) 効用関数の狭義単調性を仮定する。

Proposition 1.6: Duality

任意の (\mathbf{p}, \bar{u}, y) に対して以下が成り立つ:

$$\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)), \quad \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})). \quad (9)$$

Proof. 第一式を示す。 $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)$ を所得 y の下での効用最大化の一意最適解とする。するとその効用は $u(\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)) = V(\mathbf{p}, y)$ であり, かつ支出は効用の狭義単調性から $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = y$ である。効用水準 $V(\mathbf{p}, y)$ を達成する最小支出は $e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ であり, section 1 より $e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)) = y$ である。したがって $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = y = e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ となり, $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)$ は効用 $V(\mathbf{p}, y)$ を達成するバンドルの中で最小支出を与えるバンドル。よって $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ が成り立つ。同様に第二式は対称の議論で示される。すなわち, $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ は効用 \bar{u} を達成する最小支出バンドルで, その支出は $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = e(\mathbf{p}, \bar{u})$ 。所得 $y = e(\mathbf{p}, \bar{u})$ のもとでの効用最大化問題は効用 \bar{u} を最適解として達成し (section 1), したがって $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u}))$ が成り立つ。□

■スルツキー方程式 効用の狭義単調性を仮定する。

Proposition 1.7: Slutsky equation

各 $i, j = 1, \dots, n$ について, 以下がなりたつ

$$\frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)} - \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} x_j^u(\mathbf{p}, y). \quad (10)$$

Proof. 双対性より

$$x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = x_i^u(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})).$$

これを p_j で微分すると, 連鎖律より

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} \Big|_{y=e(\mathbf{p}, \bar{u})} + \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} \Big|_{y=e(\mathbf{p}, \bar{u})} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j}.$$

両辺を $\bar{u} = V(\mathbf{p}, y)$ と取り, 双対性とシェファードの補題により

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)} = x_j^h(\mathbf{p}, \bar{u}) \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)} = x_j^u(\mathbf{p}, y)$$

がなりたつ。これを代入して整理すると、間接効用と支出関数の関係から $y = e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ は常に成り立つことに注意して

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p},y)}, \\ &= \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} \Big|_{y \equiv e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))} + \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} \Big|_{y \equiv e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p},y)}, \\ &= \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} x_j^u(\mathbf{p}, y). \end{aligned}$$

これを変形することでスルツキー方程式を得る。 \square

参考文献

- [1] Jehle, G.A. and Reny, P.J. (2011), *Advanced Microeconomic Theory*, 3rd ed., Pearson Education.