

測度論的確率論

前川 大空 *

2025 年 9 月 8 日

1 確率モデルを作るまで

1.1 事象や観測を表現するための数学的記述

■p.5 $C([0, 1])$: $[0, 1]$ 上の連続関数全体. $D([0, T])$ は右連続で左極限を持つ, カドラグ関数全体を指す.

■p.5 実用上の標本空間: 多くの統計的問題 (確率過程を除いて) では $\Omega = \mathbb{R}^d$ と置けば問題ない.

■p.6 語の区別: ω は根元事象・標本, Ω は標本空間, 標本の集合で確率を測る対象となるのが事象.

■p.6 事象の定義: σ -加法族 \mathcal{F} が確率を考えるために必要であり, この元が事象として定義される. 有限加法族 \mathcal{F} が有限個の元 (要素) しか持たないとき, \mathcal{F} は自動的に σ -加法族となる.

■p.7 自明な σ -加法族: $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ のこと.

■p.7 可測空間: Def 1.1.11. の (Ω, \mathcal{F}) が確率モデルには必要. \mathcal{F} は確率を知りたい範囲を考慮して設定する必要があり, 一方で 2^Ω は集合が大きすぎて不適切. ボレル集合体などが実用的な σ -加法族として知られる.

■p.8 ボレル集合体 まず, 区間の集合 \mathcal{I} を以下のように定義する:

$$\mathcal{I} \equiv \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\} \quad (1.1)$$

$b = \infty$ の時は $(a, b] = (a, \infty)$ と考えるので標本空間は \mathbb{R} . \mathcal{I} を用いて区間塊 \mathcal{A} は以下のように定義される:

$$\mathcal{A} \equiv \{\cup_{k=1}^m I_k \mid m \in \mathbb{N}, I_i \cap I_j = \emptyset (1 \leq i < j \leq m), I_i, I_j \in \mathcal{I}\} \quad (1.2)$$

これは有限加法族だが, 無限個の元を持つため σ -加法族とは限らない.

Proof. 有限個の互いに素な $(a, b]$ の和集合で \mathcal{A} の元は定義される. まず $\emptyset \in \mathcal{A}$ である ($I_k = \emptyset \forall k$ とすればよい). また $A = \cup_{k=1}^m I_k \in \mathcal{A}$ の補集合 A^c を考えると, $\Omega = \mathbb{R}$ を I_k で分割した区間の有限個の和集合として表せ, $A^c \in \mathcal{A}$ が従う. 最後に $A = \cup_{i=1}^m I_i, B = \cup_{j=1}^n J_j \in \mathcal{A}$ を考える. I_i, J_j の端点全体を集めると有限集合 E が得られる. E で, 実直線は有限個の互いに素な区間 $(\alpha, \beta]$ に分割される. 各 $(\alpha, \beta]$ は A, B との包含関係で判別できるから, $A \cup B$ も有限個の互いに素な $(\alpha, \beta]$ の和集合として表せ, $A \cup B \in \mathcal{A}$. したがって \mathcal{A} は有限加法族である. \square

* 一橋大学経済学部 4 年, 五年一貫専修コース公共経済プログラム

この \mathcal{A} から生成された最小の σ -加法族を \mathbb{R} 上のボレル集合族として:

$$\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A})$$

と記載する. 構成の仕方としては **Thm 1.1.13.** のように, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$ とする方法も認められる.

Proof. 未確認.

□

■p.10 注意 1.1.14. 無理数全体の集合は非加算集合.

■p.11 d 次元可測空間: $\Omega = \mathbb{R}^d$ の場合は, d 次元ボレル集合体 \mathcal{B}_d を利用して $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ が利用される.

■演習 1.2: 未確認.

1.2 確率変数と確率

■p.12 確率変数: 確率変数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は, 根元事象から観測への対応といえる. 可測空間のみで定義可能.

Def 1.2.1. 確率変数:

可測空間 (Ω, \mathcal{F}) に対し, 写像 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ が, 任意の $B \in \mathcal{B}_d$ に対して:

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad (1.3)$$

を満たすとき, X を d 次元確率変数という.

■p.12 演習 3: 未確認. 計量経済学のための数学にも対応する定理があったはず.

■p.13 可測関数: 計量経済学のための数学では説明が不足しており, これを用いる証明 (記憶している限りでは **Thm 9.4**) に苦戦した記憶. 一応 **Def 9.4** は関連概念ではあるはず. ^{*1}

Def 1.2.4. 可測関数:

可測空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ から $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ への写像 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が, 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

を満たすとき, f は \mathcal{X} 上の \mathcal{F} -可測関数, あるいは単に \mathcal{F} -可測 と呼ぶ. 特に d 次元可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ として考えるならば, f を単に可測関数と呼ぶ.

可測関数の定義において行先の $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ はとくに限定されない? **Thm 1.2.5.** の証明での『 Y が $\mathcal{F}/\mathcal{B}_k$ -可測であることを示せばよい』との記述は, **Def 1.2.1.** で考慮しているように, k 次元確率変数が σ -加法族として \mathcal{B}_k を念頭に置いているからだろう. 可測関数の定義は **Def 1.2.1.** と対応する形であることから, 確率変数とは「 Ω 上の \mathcal{F} -可測関数」であり, \mathcal{F} の事象にのみ確率は付与される (確率測度の定義域が \mathcal{F} に限定される) こととなる.

^{*1} 定義・定理番号の後ろに点がないのが『計量経済学のための数学』, 点があるのが『統計学への確率論』です. DDR 補足資料の付録 C に『計量経済学のための数学』の主要なステートメントは記載しているのでご確認ください.

Thm 1.2.5. 合成関数と可測性: —

X を d 次元確率変数とすると、任意の $((\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ からの) 可測関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ に対して、 $Y \equiv f(X)$ は k 次元確率変数である。

■p.13 頻度論的確率論: 高校でやる確率みたいなやつ。数え上げで確率を定義している。

■p.17 確率測度: Def 1.2.9. の完全加法性 (σ -加法性) が要求される。Def 1.2.6. の有限加法性は不十分。

■p.17 例 1.2.8.: 無限個の区間を考える必要があることが問題だったため、 σ -加法族を考えている。不具合のない (集合として大きすぎない) 対処としてボレル集合族 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ を使っている。

■p.18 ホップの拡張定理: 都合のいい確率 \mathbb{P} は必ずただ一つ存在するという結論。

Thm 1.2.12. ホップの拡張定理: —

\mathcal{A} を Ω の集合からなる有限加法族とし、 \mathbb{P}^* を \mathcal{A} 上の有限加法的確率 (ref: Def 1.2.6.) とする。このとき、以下の (1), (2) は同値である。

1. $\sigma(\mathcal{A})$ 上に \mathbb{P}^* の拡張 \mathbb{P} が存在して一意である。
2. \mathbb{P}^* は $\sigma(\mathcal{A})$ 上で σ -加法的である。

■p.19 例 1.2.8. の続き: 未確認。

■p.23 確率測度の連続性: 大事なこと言ってそうだけどありがたみが分からない。