測度論的確率論

前川 大空 *

2025 年 9 月 7 日

1　確率モデルを作るまで

1.1　事象や観測を表現するための数学的記述

■p.5 $C([0,1])$:　$[0,1]$ 上の連続関数全体. $D([0,T])$ は右連続で左極限を持つ, カドラグ関数全体を指す.

■p.5 **実用上の標本空間**:　多くの統計的問題 (確率過程を除いて) では $\Omega = \mathbb{R}^d$ と置けば問題ない.

■p.6 **語の区別**:　ω は根元事象・標本, Ω は標本空間, 標本の集合で確率を測る対象となるのが事象.

■p.6 **事象の定義**:　σ-加法族 $\mathcal{F}$ が確率を考えるために必要であり, この元が事象として定義される. 有限加法族 $\mathcal{F}$ が有限個の元 (要素) しか持たないとき, $\mathcal{F}$ は自動的に σ-加法族となる.

■p.7 **自明な σ-加法族**:　$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ のこと.

■p.7 **可測空間**:　**Def 1.1.11.** の $(\Omega, \mathcal{F})$ が確率モデルには必要. $\mathcal{F}$ は確率を知りたい範囲を考慮して設定する必要があり, 一方で 2^Ω は集合が大きすぎて不適切. ボレル集合体などが実用的な σ-加法族として知られる.

■p.8 **ボレル集合体**　まず, 区間の集合 $\mathcal{I}$ を以下のように定義する:

$$\mathcal{I} \equiv \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\} \tag{1.1}$$

$\mathcal{I}$ を用いて区間塊 $\mathcal{A}$ は以下のように定義される:

$$\mathcal{A} \equiv \{\cup_{k=1}^m I_k \mid m \in \mathbb{N},\, I_i \cap I_j = \emptyset\,(1 \leq i < j \leq m),\, I_i, I_j \in \mathcal{I}\} \tag{1.2}$$

これは有限加法族だが, 無限個の元を持つため σ-加法族とは限らない.

Proof. 有限個の互いに素な $(a,b]$ の和集合で $\mathcal{A}$ の元は定義される. まず $\emptyset \in \mathcal{A}$ である ($I_k = \emptyset \forall k$ とすればよい). また $A = \cup_{k=1}^m I_k \in \mathcal{A}$ の補集合 A^c を考えると, $\Omega = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を I_k で分割した区間の有限個の和集合として表せ, $A^c \in \mathcal{A}$ が従う. 最後に $A = \bigcup_{i=1}^m I_i$, $B = \bigcup_{j=1}^n J_j \in \mathcal{A}$ を考える. I_i, J_j の端点全体を集めると有限集合 E が得られる. E で, 実直線は有限個の互いに素な区間 $(\alpha,\beta]$ に分割される. 各 $(\alpha,\beta]$ は A, B との包含関係で判別できるから, $A \cup B$ も有限個の互いに素な $(\alpha,\beta]$ の和集合として表せ, $A \cup B \in \mathcal{A}$. したがって $\mathcal{A}$ は有限加法族である. □

* 一橋大学経済学部 4 年, 五年一貫専修コース公共経済プログラム