上級計量経済学

前川 大空 *

2025 年 12 月 10 日

■Ch 11, p.51 (57) 式: $\widehat{\delta}_{\mathrm{RE}}$ 漸近分散の導出　まず, 個体 i に対する元のモデルを:

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= z_i^\top \gamma + w_{it}^\top \delta + c_i + u_{it},\\
y_i &= \mathbf{1}_T z_i^\top \gamma + \mathbf{W}_i \delta + \mathbf{1}_T c_i + u_i,
\end{aligned}
$$

と書く. ここで z_i は時間不変の説明変数である一方, w_{it} は i, t の両方向で変動する. [*1] RE モデルでは z_i は吸収されず, c_i と独立である（$\because$ RE1(b)）として γ を推定する. ここで:

$$
\mathbf{C}_T = \mathbf{I}_T - \lambda \mathbf{P}_T, \qquad \mathbf{P}_T = \mathbf{1}_T(\mathbf{1}_T^\top \mathbf{1}_T)^{-1}\mathbf{1}_T^\top = \frac{1}{T}\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^\top,
$$

であり, $\lambda = 1 - \sqrt{\eta}$, $\eta = \sigma_u^2/(\sigma_u^2 + T\sigma_c^2)$. これを用いて:

$$
\check{y}_i = \mathbf{C}_T y_i, \qquad \check{\mathbf{Z}}_i = \mathbf{C}_T \mathbf{1}_T z_i^\top = (1-\lambda)\mathbf{1}_T z_i^\top, \qquad \check{\mathbf{W}}_i = \mathbf{C}_T \mathbf{W}_i, \qquad \check{v}_i = \mathbf{C}_T(\mathbf{1}_T c_i + u_i) = \mathbf{C}_T v_i
$$

と変換すると, RE 推定に用いられる **(52) 式** に対応した:

$$
\check{y}_i = \mathbf{C}_T(\mathbf{1}_T z_i^\top \gamma + \mathbf{W}_i\delta + \mathbf{1}_T c_i + u_i) = \check{\mathbf{Z}}_i \gamma + \check{\mathbf{W}}_i \delta + \check{v}_i = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Z}}_i & \check{\mathbf{W}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} + \check{v}_i \ = \ \check{\mathbf{X}}_i \beta + \check{v}_i,
$$

が得られる. ここで **RE3** により, **(16) 式**, **(50) 式** で得たとおり, また, p.46 で確認したとおり:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\check{v}_i \check{v}_i^\top] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[\check{v}_i \check{v}_i^\top \mid \check{\mathbf{X}}_i, c_i] \mid \check{\mathbf{X}}_i]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{C}_T v_i v_i^\top \mathbf{C}_T^\top \mid \check{\mathbf{X}}_i, c_i] \mid \check{\mathbf{X}}_i]]\\
&= \mathbf{C}_T \mathbb{E}[\mathbb{E}[v_i v_i^\top \mid \check{\mathbf{X}}_i]]\mathbf{C}_T^\top = \mathbf{C}_T \Omega \mathbf{C}_T^\top = \mathbf{C}_T(\sigma_u^2 \mathbf{I}_T + \sigma_c^2 \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top)\mathbf{C}_T^\top\\
&= (\mathbf{I}_T - \lambda\mathbf{P}_T)(\sigma_u^2 + T\sigma_c^2)(\mathbf{P}_T + \eta \mathbf{Q}_T)(\mathbf{I}_T - \lambda \mathbf{P}_T) = (\sigma_u^2/\eta)(\mathbf{P}_T + \eta\mathbf{Q}_T - 2\lambda\mathbf{P}_T + \lambda^2\mathbf{P}_T)\\
&= (\sigma_u^2/\eta)(\eta\mathbf{Q}_T + (1-\lambda)^2\mathbf{P}_T) = (\eta\sigma_u^2/\eta)(\mathbf{Q}_T + \mathbf{P}_T) = \sigma_u^2 \mathbf{I}_T
\end{aligned}
$$

となる. 次に, δ の部分のみを抽出するために **FWL** を用いる. まず, 個体ごとに定義された $\check{\mathbf{W}}_i$ と $\check{y}_i$ を全個体でプールするとき, パネル全体では個々の個体を縦にスタックした形で次のように表される:

$$
\check{\mathbf{W}} \ = \ \begin{bmatrix} \check{\mathbf{W}}_1 \\ \check{\mathbf{W}}_2 \\ \vdots \\ \check{\mathbf{W}}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NT \times M}, \qquad \check{y} \ = \ \begin{bmatrix} \check{y}_1 \\ \check{y}_2 \\ \vdots \\ \check{y}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NT},
$$

同様にして $\check{v} \in \mathbb{R}^{NT}$, $\check{Z} \in \mathbb{R}^{NT \times J}$ も構成すると:

$$
\check{y} = \check{\mathbf{Z}}\gamma + \check{\mathbf{W}}\delta + \check{v} = \check{\mathbf{X}}\beta + \check{v},
$$

* 一橋大学 経済学部 4 年, 2122230K, 五年一貫コース公共経済プログラム

[*1] FE モデルは, $\alpha_i \coloneqq c_i + z_i^\top \gamma$ は時間不変で, 一括して個体効果として吸収されるため, z_i に係る γ は識別不能となる.

この pooled OLS に関して FWL を適応する．つまり, 変換後の $\check{\mathbf{W}}_i$ について,

$$\check{w}_{it} = w_{it} - \lambda \bar{w}_i.$$

これを時間不変の $(1-\lambda)z_i$ に対して pooled 回帰し, その **母集団残差** を $\tilde{w}_{it}$ と定義する．スカラー $(1-\lambda)$ は射影行列に影響しないため, 実質的には $\check{w}_{it}$ を z_i に回帰した残差と同一である．個体ごとに定義された残差行列はパネル全体で, 個々の個体を縦にスタックした形で次のように表される:

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_1 \\ \tilde{\mathbf{W}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{W}}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NT\times M}, \qquad \tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NT},$$

母集団レベルでの FWL による定式化は, まず変換後の $\check{\mathbf{W}}, \check{y}$ を $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{NT\times J}$ に射影し, その残差:

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{M_Z}\,\check{\mathbf{W}}, \qquad \tilde{y} = \mathbf{M_Z}\,\check{y}, \qquad \mathbf{M_Z} \coloneqq \mathbf{I}_{NT} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^\top\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^\top,$$

は求まる．したがって, FWL により δ に対する RE 推定量はプールされた残差行列を用いて次のように書ける:

$$\hat{\delta}_{RE} = (\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{y} = (\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^\top\mathbf{M_Z}\check{y},$$

これを残差生成行列の対称性と冪等性に注意して変形し: *2

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{RE} &= (\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^\top\mathbf{M_Z}\check{y} = (\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^\top\mathbf{M_Z}(\check{\mathbf{Z}}\gamma + \check{\mathbf{W}}\delta + \check{v}), \\ &= \mathbf{0} + \delta + (\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^\top\mathbf{M_Z}\check{v} = \delta + (\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{W}}^\top\check{v},\end{aligned}$$

さて, 漸近分布を導出しよう．RE3 ($\mathbb{E}[\check{v}_i\check{v}_i^\top \mid \check{\mathbf{X}}_i] = \mathbb{E}[\check{v}_i\check{v}_i^\top] = \sigma_u^2\mathbf{I}_T$), LIE, CLT, CMT, Slutkey's theorem を用い:

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\hat{\delta}_{RE} - \delta) = (\frac{\tilde{\mathbf{W}}^\top\tilde{\mathbf{W}}}{N})^{-1}\frac{\tilde{\mathbf{W}}^\top\check{v}}{\sqrt{N}} &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, (\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{W}}_i^\top\tilde{\mathbf{W}}_i])^{-1}\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{W}}_i^\top\check{v}_i\check{v}_i^\top\tilde{\mathbf{W}}_i](\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{W}}_i^\top\tilde{\mathbf{W}}_i])^{-1}) \\ &\overset{d}{=} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_u^2(\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{W}}_i^\top\tilde{\mathbf{W}}_i])^{-1})\end{aligned}$$

よって:

$$\mathrm{Avar}(\hat{\delta}_{RE}) = \frac{\sigma_u^2}{N}\Big[\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{W}}_i^\top\tilde{\mathbf{W}}_i]\Big]^{-1}.$$

これは **(57) 式** に対応する．

■Ch 11, p.53 (60) 式: ハウスマン統計量の漸近分布（χ^2）

$$H = (\hat{\delta}_{FE} - \hat{\delta}_{RE})^\top\Big[\widehat{\mathrm{Avar}}(\hat{\delta}_{FE}) - \widehat{\mathrm{Avar}}(\hat{\delta}_{RE})\Big]^{-1}(\hat{\delta}_{FE} - \hat{\delta}_{RE})$$

が帰無仮説の下で漸近的に χ_M^2 に従うことを示す．まず, 一般に各推定量の漸近分布は次の形を持つ:

$$\sqrt{N}(\hat{\delta}_{FE} - \delta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{FE}), \qquad \sqrt{N}(\hat{\delta}_{RE} - \delta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{RE}),$$

ここで各 $\Sigma.$ は有限な正定行列．二つの推定量の同時漸近分布を

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix}\hat{\delta}_{FE} - \delta \\ \hat{\delta}_{RE} - \delta\end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\ \Sigma_{\text{joint}}), \qquad \Sigma_{\text{joint}} = \begin{bmatrix}\Sigma_{FE} & \Sigma_{FE,RE} \\ \Sigma_{FE,RE}^\top & \Sigma_{RE}\end{bmatrix},$$

*2 $\mathbf{M}_{\check{\mathbf{Z}}}$ で考えたほうが直接的ではある．

と書く．ここで差分は同時ベクトルに対する線形変換で表せる:

$$R\sqrt{N}\begin{pmatrix}\hat{\delta}_{FE}-\delta\\ \hat{\delta}_{RE}-\delta\end{pmatrix}=\sqrt{N}(\hat{\delta}_{FE}-\hat{\delta}_{RE})\xrightarrow{d}\mathcal{N}\big(0,\ R\,\Sigma_{\text{joint}}\,R^\top\big),\quad R\ =\ \begin{pmatrix}I_M & -I_M\end{pmatrix}$$

ここで共分散行列を展開すると

$$R\,\Sigma_{\text{joint}}\,R^\top=\Sigma_{FE}+\Sigma_{RE}-\Sigma_{FE,RE}-\Sigma_{FE,RE}^\top\coloneqq\Omega$$

ここで, パネル RE/FE の文脈では

$$\Sigma_{FE,RE}=\Sigma_{RE}$$

が成り立つため,

$$\Omega=\Sigma_{FE}-\Sigma_{RE}=N\big(\text{Avar}(\hat{\delta}_{FE})-\text{Avar}(\hat{\delta}_{RE})\big).$$

正規分布の既知の事実を用いる: もし $Z\sim\mathcal{N}(0,\Omega)$ かつ Ω が正定値であれば

$$Z^\top\Omega^{-1}Z\sim\chi^2_M.$$

したがって, 上の収束結果を用いると

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt{N}(\hat{\delta}_{FE}-\hat{\delta}_{RE})\big)^\top\Omega^{-1}\big(\sqrt{N}(\hat{\delta}_{FE}-\hat{\delta}_{RE})\big)\\ =&\big(\hat{\delta}_{FE}-\hat{\delta}_{RE}\big)^\top\frac{N\big(\text{Avar}(\hat{\delta}_{FE})-\text{Avar}(\hat{\delta}_{RE})\big)^{-1}}{N}\big(\hat{\delta}_{FE}-\hat{\delta}_{RE}\big)\\ =&\big(\hat{\delta}_{FE}-\hat{\delta}_{RE}\big)^\top\big(\text{Avar}(\hat{\delta}_{FE})-\text{Avar}(\hat{\delta}_{RE})\big)^{-1}\big(\hat{\delta}_{FE}-\hat{\delta}_{RE}\big)\sim\chi^2_M.\end{aligned}$$

標本対応によって **(60) 式** を得る.

■Ch11 p.52 RE **推定量の効率性**　まず, 変数の定義を復習する．変換後（quasi–demeaned）変数を

$$\check{w}_{it}=w_{it}-\lambda\bar{w}_i,\qquad\bar{w}_i=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T w_{it},$$

とおく．$\tilde{w}_{it}$ は $\check{w}_{it}$ を時間不変の z_i に対して母集団線形射影した残差であり, その射影係数を

$$\Pi=\big[T\,\mathbb{E}(z_iz_i^\top)\big]^{-1}\,\mathbb{E}\Big[z_i\sum_{t=1}^T\check{w}_{it}^\top\Big]$$

と定義する．定義より

$$\sum_{t=1}^T\check{w}_{it}=T(1-\lambda)\bar{w}_i,$$

であるから,

$$\Pi=(1-\lambda)\big[\mathbb{E}(z_iz_i^\top)\big]^{-1}\mathbb{E}[z_i\bar{w}_i^\top].$$

ここで $\bar{w}_i^*\equiv L(\bar{w}_i\mid z_i)$ を $\bar{w}_i$ の z_i に対する母集団線形射影（$=\mathbb{E}[\bar{w}_i\mid z_i]$ の線形近似）と置くと,

$$\Pi^\top z_i=(1-\lambda)\,\bar{w}_i^*.$$

したがって定義どおり

$$\tilde{w}_{it}=\check{w}_{it}-\Pi^\top z_i=(w_{it}-\lambda\bar{w}_i)-(1-\lambda)\bar{w}_i^*.$$

これを FE 残差 $\ddot{w}_{it}=w_{it}-\bar{w}_i$ を用いて整理すると

$$\tilde{w}_{it}=\ddot{w}_{it}+(1-\lambda)(\bar{w}_i-\bar{w}_i^*),$$

となる．これは **(58) 式**. 次に行列形式での差を考えるために, 各個体 i について $T \times M$ 行列 $\tilde{W}_i, \ddot{W}_i$ を対応する時刻列の累積として定義する．まず重要な観察:

$$\sum_{t=1}^{T} \ddot{w}_{it} = \mathbf{0} \quad (\forall i)$$

が成り立つ（within 変換の定義より）．

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} \tilde{w}_{it}\tilde{w}_{it}^\top &= \sum_{t=1}^{T} \Big(\ddot{w}_{it} + (1-\lambda)(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)\Big)\Big(\ddot{w}_{it} + (1-\lambda)(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)\Big)^\top \\
&= \sum_{t=1}^{T} \ddot{w}_{it}\ddot{w}_{it}^\top + (1-\lambda)^2 T(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)^\top \\
&\quad + (1-\lambda)\sum_{t=1}^{T} \ddot{w}_{it}(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)^\top + (1-\lambda)\sum_{t=1}^{T}(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)\ddot{w}_{it}^\top.
\end{aligned}$$

上の第 3 項と第 4 項は消え, 結果を個体ごとの期待値で取ると

$$\mathbb{E}\big(\tilde{W}_i^\top \tilde{W}_i\big) - \mathbb{E}\big(\ddot{W}_i^\top \ddot{W}_i\big) = (1-\lambda)^2 T\,\mathbb{E}\big[(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)^\top\big],$$

となり, **(59) 式** を得た．[*3] $\mathrm{Var}(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*) = \mathbb{E}\big[(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)^\top\big]$ が正則で, かつ $0 \le \lambda < 1$ であれば,

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_i^\top \tilde{W}_i) - \mathbb{E}(\ddot{W}_i^\top \ddot{W}_i)$$

は正定値となる.

■Ch 11 p.54 帰無仮説の別表現 (61) 式　**(58) 式** より, RE と FE の δ 推定量の差は $(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)$ と c_i の相関に起因することが, $\mathrm{Cov}(\ddot{w}_{it}, c_i) = 0$ から分かる．すなわち帰無仮説は

$$H_0: \quad \mathbb{E}\big[(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)\,c_i\big] = 0,$$

となる（**(61) 式**）．この式は次の点で解釈に有用である:

- $z_i = 1 \in \mathbb{R}$ では, $\bar{w}_i^* = \mathbb{E}[\bar{w}_i]$ となり, 帰無仮説は $\mathrm{Cov}(\bar{w}_i, c_i) = 0$ として無相関性の検定となる．[*4]
- 一方 z_i に豊富な時間固定変数を含めると, まず $\bar{w}_i$ からその z_i に関する予測部分 $\bar{w}_i^*$ を差し引き, 残差 $(\bar{w}_i - \bar{w}_i^*)$ と c_i の相関を消すことが可能になる (= 帰無仮説が採択される).

■Ch 11 p.55 Mundlak の仮定と回帰的検定 ((62) 式)　Mundlak (1978) の仮定を導入すると,

$$c_i = \psi + \bar{w}_i^\top \xi + a_i,$$

ただし a_i は平均 0 かつ $\mathbf{w}_i := (w_{i,1}, \dots, w_{i,T}), z_i$ と無相関．これを元のモデルに代入すると（ψ は切片に吸収）:

$$y_{it} = x_{it}^\top \beta + c_i + u_{it}.$$

$$y_{it} = x_{it}^\top \beta + \bar{w}_i^\top \xi + a_i + u_{it}. \tag{62}$$

ここで帰無仮説は $H_0 : \xi = 0$ であり, これは「個人間の異質性が $\bar{w}_i$ に依存しない」ことを意味する．[*5]

[*3] スライドは T がないのでタイポ.

[*4] $z_i = 1$ として実際に計算を行い確かめよう:

$$\Pi^\top z_i = (1-\lambda)(\mathbb{E}[z_i \bar{w}_i^\top])^\top \big(\big[\mathbb{E}(z_i z_i^\top)\big]^{-1}\big)^\top z_i = (1-\lambda)\,\bar{w}_i^*.$$

$$(\mathbb{E}[1 \times \bar{w}_i^\top])^\top \big(\big[\mathbb{E}(1 \times 1)\big]^{-1}\big)^\top \times 1 = \mathbb{E}[\bar{w}_i] = \bar{w}_i^*.$$

[*5] このモデルは CRE（Correlated Random Effects）と呼ばれる．個体効果 c_i が説明変数の個体平均 $\bar{x}_i$ に線形に依存するという仮定を用いて, RE モデルに $\bar{x}_i$ を追加した手法である．これにより, 説明変数と個体効果の相関構造をモデル内部で扱うことができ, $\xi = 0$ の Wald 検定を通じて FE/RE の整合性を判定できる.

■**推定と検定手続き**

- **(62) 式** は pooled OLS により推定可能である．Mundlak の仮定の下で, pooled OLS による ξ の推定量は RE 推定（RE のモデルに $\bar{w}_i$ を含めた場合）の推定量と一致する．また解析的に $\hat{\xi} = \hat{\delta}_B - \hat{\delta}_{FE}$ が成り立つことが知られている（$\hat{\delta}_B$ は between estimator: $\bar{y}_i$ を横断面回帰したときの $\bar{w}_i$ の係数）．
- RE 推定は between と within の加重平均ゆえ, RE と FE を比較する従来のハウスマン検定と一致する．
- pooled OLS での通常の Wald 検定は, a_i に起因する系列相関があれば不適切. 実務上は:
  1. pooled OLS で完全に頑健な (クラスター・不均一分散) 分散推定量を用いた Wald 検定
  2. RE3 を前提に **(62) 式** を RE で推定し, 通常の RE 共分散行列を利用した Wald 検定

  のいずれかが推奨される．

ハウスマン検定が成り立つためには, FE 推定量と RE 推定量が同一の誤差構造に基づき, 共通の漸近分散構造をもつ必要がある．RE3（自己無相関・均一分散）は, RE が GLS として一致し, FE・RE の同時漸近分布において $\Sigma_{FE,RE} = \Sigma_{RE}$ が成立するための仮定である．自己相関や不均一分散があるとこの等式が崩れ, 分散の差に基づくハウスマン統計量は理論的根拠を失う．

■**Lagrange 乗数検定（LM 検定）について**　LM 検定は, 制約付きモデル（例: pooled OLS）を推定した残差のみを用いて, 制約が妥当か（例: 個別効果が存在しないか）を判定する手法である．パネルデータでは個別効果の分散がゼロという帰無仮説に対して構築される．

■**R で利用可能な検定手法**　R では `plm` パッケージが標準的であり, 本文で扱った各検定に対応する関数は:

- **個別効果の有無（Pooled vs FE）：F 検定** `plmtest(..., type = "pooling")`
- **個別効果の有無（Pooled vs RE）：Lagrange 乗数（LM）検定** `plmtest(..., type = "bp")`
- **ハウスマン検定（FE vs RE）**：`phtest()` FE と RE を比較する通常のハウスマン検定．RE3（RE の誤差構造の正確な特定）が必要なため, これが破れると漸近分布は χ^2 に従わず検定は無効となる．
- **"頑健ハウスマン" 検定**: `phtest(..., vcov = vcovHC)` FE–RE の同時漸近分布を用いないため, 実質的には CRE モデルに基づく FE vs RE の Wald 検定に対応し, クラスター・不均一分散・系列相関に頑健である．

Take Away: 検定の使い分け

- **Pooled vs FE**: F 検定 (`plmtest(..., type = "pooling")`)
- **Pooled vs RE**: LM 検定 (`plmtest(..., type = "bp")`)
- **FE vs RE**:
  - RE3 が成立するなら通常のハウスマン検定 (`phtest()`).
  - RE3 が怪しい（実務上ほぼ常に）
    → CRE に基づく Wald 検定 (`phtest(..., vcov = vcovHC)`) が望ましい
- CRE モデルは, (62) 式のように時間平均 $\bar{x}_i$ を追加することで FE と RE の整合性条件を明示化するモデルであり, 上記の頑健 Wald 検定はまさに CRE の帰無仮説 $\xi = 0$ を直接検定している．

CRE モデルに基づいて FE, RE 間の検定を記載するならば以下のようになる:

```
pdata <- pdata.frame(dat, index = c("id", "time"))
pdata$xb <- ave(pdata$x, pdata$id)

cre_mod <- plm(y ~ x + xb, data = pdata, model = "random")

waldtest(cre_mod, . ~ . - xb,
  vcov = vcovHC(cre_mod, type = "HC1", cluster = "group"))
```

■理論に基づく実務上の帰結　以上のように議論を進めてきたものの, 実際にモデル間の選択を行うことは不適切との議論も近年はある. ゆえに, 実務的には, ドメインの知識に基づいて定性的な分析を行い (ハウスマン検定などは一切行わず!) 共分散行列の構造を考察し, そこで仮定を満たすようなモデルを用い, 必要に応じて頑健共分散行列推定量を用いることが現状の解決策となる.