

# 恐竜本 補足資料

前川 大空 \*

2025 年 9 月 21 日

## 目次

1	潜在結果モデルと因果効果	2
2	無作為化実験	5

## はしがき

■p.i 構造推定アプローチ 経済理論による均衡条件の構造型の導出 → その誘導型の導出 → 最小 2 乗推定量 → 操作変数法 → 一般化積率法 (GMM) と進む流れ (Ex. Wooldridge, 2010). 潜在結果アプローチはこの中に埋め込まれる型で説明されている, [らしい](#). DDR <sup>\*1</sup>にせよ『構造推定アプローチ』への批判が最近の潮流なのかもしれない.

■p.i 構造推定アプローチの問題点 既存教科書の説明スタイルは, [制度の記述から始まる](#) 近年のミクロ経済学の実証研究における因果推論の実践とは必ずしも一致する型とはなっていない. [一般均衡理論のみならない分析, ゲームなどを想定する点で異なるといったはなし? → 実制度の話を意図しているだけ?](#)

■p.ii 『経済学訛り』の因果推論 経済学においては DiD や RDD など, 疑似実験の手法が頻繁に活用される.

■p.iii モチベーション 『既存の知識は暗黙知も含めてドキュメント化してさっさと共有してしまおう. 人々の貴重な時間をもっと新しく未解決の問題について考えるために使おう』. マジでアツい.

■p.iv コンテンツについて R の実装についてはウェブ付録の [実践編](#) において記載されている. [Lec5,6](#) の実装でも参考出来るかもしれない.

## 序章 経済学の因果推論アプローチ

■p.1 教科書の流れ 第 2 ~ 5 章: RCT, 第 6 ~ 8 章: DiD, 第 9 ~ 11 章: RDD

第 1 章: 潜在結果モデル導入, 第 2 章: ATE の推定, 第 3 章: 統計的推測, 第 4 章: 非遵守者, 第 5 章: 実践

---

\* 一橋大学経済学部 4 年, 五年一貫専修コース公共経済プログラム

<sup>\*1</sup> 末石 (2024), データ駆動型回帰分析, 日本評論社, 第 1 版

■p.3 潜在結果モデルの導入法 『筆者らは、本書のように潜在結果モデルだけに依拠して議論を進めたほうが初学者にとっては理解しやすいのではないかと考えている。』 構造型を背後に (明示的には) 想定しない, DDR でも同じような議論は見受けられた。

■p.4 『経済学訛り』の因果推論 行動反応を考えるとが訛りの原因, 非遵守者を考えるのはこのため。

■p.4 同値観測性の問題 Ex. 上向きの需要関数, Lec1 のひとまとめにしたことによる上向き傾向. 解決策として識別のための誘導型が導入された。

■p.5 信頼性革命 自然実験や疑似実験に注目すべき, との近年の計量経済学研究における潮流. 構造推定アプローチはここに対応できない点でも近年の評価を落としている？

■p.5 提示されている問い 本書を読み進めるにあたって答えを出せるようになるう。

- RDD を局所線型モデルで推定するとき, 推定対象範囲を定めるためのバンド幅の選び方は？
- 処置群と統制群を分けるスコア変数が離散的なときはどのように対処すべきだろうか？
- DiD で因果効果を推定しようとするとき, 処置が個体間で一斉に行われるのではなくタイミングがずれている場合にはどのような定式化を用いるべきだろうか？

■p.7 構造推定アプローチと IV(GMM) の別 構造型を内生変数について解き, 外生変数だけの誘導型に直して推定するのが構造推定アプローチ. 一方で, ショックについて解き, そのモーメントに関する条件 (積率条件) を利用してパラメータ推定するのが GMM, 定式化の範囲を限定したものが IV method.

■p.8 構造推定アプローチと潜在結果アプローチの別 構造推定モデルは推定対象である誘導型を導出するために, 経済モデルから導き出された構造型を利用している時点で, 検証不可能な仮定を置いていることとなる. 一方の潜在結果アプローチは実験デザインなどの制約を変更することによってのみ推定の方法を変更しており, 経済理論は結果の解釈にのみ用いられる。

■p.9 『誘導型の推定』との言い方の不適切性 潜在結果モデルは経済理論 (構造型) から導出されるとは限らないため, 誤解を招く不適切ないいかた。

## 1 潜在結果モデルと因果効果

■p.12 諸定義の導入 以下のように定義されている。

Def. 実験, 無作為化実験

個体への処置割当が既知な状況のこと, 特に個体への処置割当が無作為に行われているようなことが既知な状況を無作為化実験と呼ぶ。

Def. タイプ

潜在結果はあらかじめ個体ごとに定まっているものとして, この対応結果を潜在結果のタイプと呼ぶ。

**Def. 因果関係**

タイプの集合のうち幾つかのタイプに属するものを因果効果として定義する。

■p.16 潜在結果と健在結果の別 潜在結果は関数だが、健在結果は値である、 $Z$  について足したため。

■p.17 潜在結果モデル  $(Y, Z, W, Y^*(\cdot))$  を潜在結果モデルと呼ぶ。うち潜在結果  $Y^*(\cdot)$  は観測不可能。

■p.18 SUTVA 2 項処置モデルとして定義してしまおう:

**Assumption: SUTVA**

潜在的結果が以下のように表されることを指す。

$$Y_i = Y_i^*(Z_i) = \begin{cases} Y_i^*(1) & \text{if } Z_i = 1 \\ Y_i^*(0) & \text{if } Z_i = 0 \end{cases} \quad \text{where } Z_i \in \{0, 1\}$$

つまり、以下の 2 条件がこの式で表現されている:

1. no spillover: 潜在的結果は他者の処置の影響を受けない (引数が  $Z_i$  のみ)
2. consistency: 処置が施されたとき、観測されるのは潜在結果をその処置で評価した値
3. binary treatment: 処置が均一 (デジタルな処置)

■p.21 処置割当メカニズム 処置割当メカニズムとは、 $(W, Y^*(0), Y^*(1))$  から  $Z$  への行の交換に対して不変な非負の関数  $\mathbb{P}[Z | W, Y^*(0), Y^*(1)]$  で、任意の  $(W, Y^*(0), Y^*(1))$  に対して以下が成り立つものである。

$$\sum_{Z \in \{0,1\}^n} \mathbb{P}[Z | W, Y^*(0), Y^*(1)] = 1 \quad (1.3)$$

つまり、プロファイルの選び取り方全体にわたって定義された確率測度と言えよう。 $Y^*(0), Y^*(1)$  に依存しており、これらは正規処置割当メカニズムを考慮すれば除外されることとなる。

■p.22 個体処置割当確率  $p_i$ .  $2^{n-1}$  個を足し合わせており  $1 - p_i$  が個人非割り当て確率となる。

■p.22 傾向スコア  $e(w)$ . 引数として顕わには  $w$  のみがあるが、実際には  $Y^*(0), Y^*(1)$  にも依存する。

■p.23 正規処置割当メカニズム 以下の条件を満たすものが正規処置割当メカニズムと呼ばれる。

1. 個別割当:  $p_i$  が  $p_i[W, Y^*(1), Y^*(0)] = q[W_i, Y_i^*(1), Y_i^*(0)]$  と個人の情報のみに依存する
2. 確率割当: すべての個人の  $p_i$  が  $0 < p_i[W, Y^*(1), Y^*(0)] < 1$
3. 条件付き独立割当:  $p_i$  が 潜在結果に依存せず、 $\mathbb{P}[Z | W, Y^*(0), Y^*(1)] = \mathbb{P}[Z | W]$

これは以下のように単純化された:

**正規処置割当メカニズム**

ある集合  $\mathcal{A}$  が存在し、任意の  $(Z, W, Y^*(0), Y^*(1)) \in \mathcal{A}$  について。

$$\mathbb{P}[Z | W, Y^*(0), Y^*(1)] \propto \prod_{i=1}^n q(W_i)^{Z_i} [1 - q(W_i)]^{1-Z_i} \quad (1.6)$$

であり、それ以外の処置割当メカニズムの値は 0。

このとき、傾向スコアはその個体の個体処置割当確率と一致する:  $e(\mathbf{w}) = q(\mathbf{w})$ .

■p.24 抽出・割当に起因する不確実性 母集団から標本  $n$  を抽出する際の不確実性が 抽出に起因する不確実性 で、処置  $Z_i$  決定に際する不確実性が 割当に起因する不確実性 である. p.25 の説明に詳しい.

■p.27 識別 2 項処置モデルを前提とした識別の具体的説明がかなりのページを割いて行われる.

#### 大まかな認識: 識別可能性

観測されるデータの同時分布が既知の時,  $\theta$  の値が一意に定まるならば,  $\theta$  は識別されるという.

Ex. 学習塾に通う 5 人を標本とした ATE の識別 2 項処置モデルで, 3 人に特別講習を 無作為に 割り当てることを考える. 処置割当メカニズム ( $\mathbf{Z}$  に割り当てられる条件付確率測度) は  $\mathbf{P_Z}$  で表される. ありうる  $\mathbf{Y}^*, \mathbf{P_Z}$  の集合を  $\mathcal{M}$  と書く. ここで  $m = (\mathbf{y}^*, \mathbf{p_z})$  に値が定まると モデルは一意に定まる.\*<sup>2</sup> モデル, 特に  $\mathbf{y}^*$  が一意に定まったことで, 今回識別の対象である ATE も一意に定まる:

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i^*(1) - y_i^*(0)]$$

しかしこれは観測不可能な  $\mathbf{y}^*$  が含まれているため, 識別に関しては現状何も言えない. そこで観測されるデータの同時分布  $\mathbf{p_{ZY}}$  について考えると, これも一意に定まり,  $\mathbf{p_{ZY}}[\mathbf{z}, \mathbf{y}] = \mathbf{p_z}[\mathbf{z}] \mathbb{1}\{\mathbf{y}^*(\mathbf{z}) = \mathbf{y}\}$ .  $\phi$  にはこの (観測可能な) 同時分布  $\mathbf{p_{ZY}}$  と観測可能なすべての情報が含まれている. この例では割当が分析者にとって既知であるため,  $\mathbf{p_z}$  も  $\phi$  に含まれる. モデルの値  $m = (\mathbf{y}^*, \mathbf{p_z})$  を定めれば,  $\phi$  も一意に定まる.

しかし, 複数の異なるモデルが同じ  $\phi$  を生成する可能性がある. ここで, 構造  $s(\phi, \theta) \subset \mathcal{M}$  を,  $\phi, \theta$  を生成する モデル  $m$  の値の集合 と定義し, この問題を明確化するために 観測上同値性 を定義する:

#### 今回の例における定義: 観測上同値性

ATE  $\theta, \tilde{\theta}$  について, ある  $\phi$  が存在して, 構造  $s(\phi, \theta), s(\phi, \tilde{\theta})$  がともに空でないとき, 観測上同値という.

つまり,  $\theta, \tilde{\theta}$  を生成する異なるモデル ( $m, m'$ ) が観測上同じ情報  $\phi$  を生成する可能性があり, 逆に言えば, その異なる ATE を生成する 2 モデルのうちどちらから  $\phi$  が生成されているかを, 観測される情報からでは 原理的に (非常に小さい可能性だろうが) 区別できない場合があることを意味する. 観測上同値性を回避するための方法としては以下が挙げられている:

1. 割当メカニズムの知識  $\mathbf{p_z}$  を得ること: この例では既に満たしている
2. モデルの値の幅 ( $\mathcal{M}$ ) を狭くする: 正規処置割当メカニズムへの限定,  $\mathbf{Z} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}^*$  の条件追加 (今回)

さて, 例に立ち戻り,  $\mathbf{p_z}$  が  $\phi$  に含まれていることを思い出そう. 定義より  $\mathbf{p_{ZY}}$  も  $\phi$  に含まれる.  $\mathbf{Z} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}^*$  (無作為割当) を利用することによって, 観測可能な変数で構成された, 処置群と統制群の平均値の差は:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^n Z_i Y_i - \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^n (1 - Z_i) Y_i\right] = \theta(\mathbf{Y}^*) = \theta \quad (1.7)$$

と 興味の対象である ATE に対して不偏性を持つ ことが示される. つまり, 今回の例では, 情報  $\phi$  ( $\mathbf{p_{ZY}}, \mathbf{p_z}, \mathbf{y}$  など) が 1 つ与えられると, それと整合的なモデルの値  $m = (\mathbf{y}^*, \mathbf{p_z})$  が含意するパラメータ  $\theta$  の値は一意に定

\*<sup>2</sup>  $\mathbf{Z}$  の分布  $\mathbf{p_z}$  は無作為割当から均等に割り振られ, 常に  $\mathbf{p_z}[\mathbf{z}] = \frac{1}{5C_3}$  と一定の値をとるために, 単に『値』と書かれる.

められる。より詳しく言えば、異なるモデル  $(m, m') = ((y^*, \mathbf{p}_Z), (y^{*'}, \mathbf{p}_Z))$  で、 $\text{ATE}(\theta, \tilde{\theta}) = (\theta(y^*), \tilde{\theta}(y^{*'}))$  について  $\theta \neq \tilde{\theta}$  となるケースを考えると、情報  $\phi(\mathbf{p}_{ZY}, \mathbf{p}_Z, \mathbf{y})$  など) は、特に割当の独立性による  $\mathbf{y}$  の不一致によりそれぞれのモデルで異なり ( $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}' \implies \phi \neq \phi'$ )、従って  $(\theta, \tilde{\theta})$  は観測的同値になり得ない。つまり、無作為割当は「 $\mathbf{y}$  をそのままに  $y^*$  を変える」ことを許してくれないのである。この状態をもって、ATE はこの例において 識別 されていると定義する。

今回の例における定義: 識別可能性

情報を増やす、またはモデルのとりうる値を減らすなどといった何らかの方法を経て、ある ATE  $\theta$  に対してそれと観測上同値な別のパラメータ  $\tilde{\theta}$  が存在しないとき、そのパラメータ  $\theta$  が識別されるという。

今回は、 $\mathbf{p}_Z$  が既知 (情報を増やす)、無作為割当 ( $Z \perp\!\!\!\perp Y^*$ ) であることによって  $\mathcal{M}$  の範囲が狭まっており、故に識別が可能となったことを認識せよ。

定義:  $\Theta$  のグローバルな識別可能性

モデル  $\mathcal{M}$  が生成しうるパラメータの集合  $\Theta$  の任意の要素  $\theta$  が識別されること。

■識別の構成的な証明 例は、観測可能なものが、興味のあるパラメータに一致することを示すものだった。

定義: 推定対象 (estimand)

必ずしも興味はないが、情報  $\phi$  に含まれる観測から構成できる対象一般のこと。

この例の平均値の差 (1.7) 式 も推定対象である。

定義: 識別の構成的な証明

推定対象の 1 つが仮定のもとで興味のあるパラメータに一致することを示す方法。

つまり、例の識別の証明手順は、構成的な証明である。

■p.32 識別が成立しないケース 先述の例から、無差別割当を取り去っている。これによって、異なる  $\theta, \tilde{\theta}$  を生成する異なるモデル  $(m, m') = ((y^*, \mathbf{p}_Z), (y^{*'}, \mathbf{p}_Z))$  が観測上同じ情報  $\phi(\mathbf{p}_{ZY}, \mathbf{p}_Z, \mathbf{y})$  など) を生成しており、モデルを区別できないために、識別が出来ていない。

■Lewbel(2019): 一般的な識別の定義  $\mathcal{M}$  が何故か関数の集合として定義されているが意図が分からない。

## 2 無作為化実験

■p.35 答えたい疑問点

1. 実験を行うことで ATE を推定できる理由は?
2. 無作為化実験・層化無作為化実験など実験方法における差異の、推定への影響は?