p.20 非交絡の仮定の解釈についての証明

Kazumasa Miwa

2025 年 6 月 30 日

定理 0.1. 非交絡の仮定

$$(Y_i(1), Y_i(0)) \perp\!\!\!\perp D_i | \mathbf{X}_i$$

が満たされているならば、e **についてのある条件のもとで**

$$f(e|D, \mathbf{X}) = f(e|\mathbf{X})$$

が成り立つ。

証明. 以下では確率及び分布（関数）は全て $\mathbf{X}$ についての条件付きであるとする。
確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を仮定してよい。また、今回の構造モデル及び定理の条件では D, e が決まれば Y が決まるので、確率変数として $(D, e)(\omega) : \Omega \to \{0, 1\} \times \mathbb{R}$ を考えればよい。今、$Y = h(D, \mathbf{X}, e)$ は定理の条件にて明らかに確率変数として扱われているので D, e について可測関数であり、任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について

$$A_{x,y} = \{e \mid Y(1) \leq x, Y(0) \leq y\} = \{e \mid h(1, \mathbf{X}, e) \leq x, h(0, \mathbf{X}, e) \leq y\} \in \mathcal{B}$$

である。ただし $\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}$ におけるボレル集合族である。よって非交絡の仮定から分布における独立性に関して

$$P(\{0\} \times A_{x,y}) = P(\{0, 1\} \times A_{x,y}) P(\{0\} \times \mathbb{R})$$
$$P(\{1\} \times A_{x,y}) = P(\{0, 1\} \times A_{x,y}) P(\{1\} \times \mathbb{R})$$

が成り立つ。ここで、$h(D, \mathbf{X}, e)$ が e について単調増加と仮定すると $h(i, \mathbf{X}, e), i = 0, 1$ には e についての逆関数が存在し、これを $h_i(\cdot)$ すると

$$A_{x,y} = \{e \mid e \leq h_1(x), e \leq h_0(y)\} = (-\infty, \min\{h_1(x), h_0(y)\}]$$

である。従って $i = 0, 1$ について

$$P(\{i\} \times (-\infty, \min\{h_1(x), h_0(y)\}]) = P(\{0, 1\} \times (-\infty, \min\{h_1(x), h_0(y)\}]) P(\{i\} \times \mathbb{R})$$

である。オーバーラップの仮定のもとでは $P(\{i\} \times \mathbb{R}) > 0$ 故両辺をその値で割って

$$\frac{P(\{i\} \times (-\infty, \min\{h_1(x), h_0(y)\}])}{P(\{i\} \times \mathbb{R})} = P(\{0, 1\} \times (-\infty, \min\{h_1(x), h_0(y)\}]) \qquad (*)$$

であり、x, y を任意にとることで $\min\{h_1(x), h_0(y)\}$ も任意にとれるので f を e の条件付分布（関数）として

$$f(e|D, \mathbf{X}) = f(e|\mathbf{X})$$

が成り立つ。オーバーラップの仮定が成り立たない場合は $P(\{i\} \times \mathbb{R}) = 0$ なる i について条件付き確率はそもそも定義されない（D は離散確率変数ゆえ）ので考えなくてよい。
$h(D, \mathbf{X}, e)$ が e について単調減少のときは $(*)$ 式にて $(-\infty, \min\{h_1(x), h_0(y)\}]$ を $[\max\{h_1(x), h_0(y)\}, \infty)$ にして、両辺を 1 から引けば示される。 ∎