上級マクロ 補足資料

前川 大空 [*], 三輪和正

2026 年 2 月 9 日

1 Problem Set 0

2 Optimization Lecture 4

2.1 Ramsey Growth Model (PS1, Q4)

3 Optimization Lecture 5

3.1 p.31-32 Blanchard-Khan Condition

■差分方程式の安定性　最も基本的な場合として, 一階線形差分方程式:

$$x_{t+1} = \lambda x_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

を考える. ここで x はスカラーで, 初期値 x_0 は所与とする. このとき解は

$$x_t = \lambda^t x_0$$

と明示的に求まる. したがって, 解の安定性は固有値 λ の絶対値のみによって特徴づけられる:

- $|\lambda| < 1$: $x_t \to 0$ であり, 解は安定的.
- $|\lambda| > 1$: $|x_t| \to \infty$ であり, 解は発散的.

■二階差分方程式　次に, 二階線形差分方程式を考える:

$$x_{t+2} = \phi_1 x_{t+1} + \phi_2 x_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

初期値 x_0, x_1 が与えられているとする. ベクトル

$$\boldsymbol{\xi}_t \equiv \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{pmatrix}$$

を導入すると, 上の差分方程式は一階のベクトル差分方程式として

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_t \equiv F \boldsymbol{\xi}_t$$

[*] 一橋大学 経済学部 4 年, 2122230K, 五年一貫コース公共経済プログラム

と書ける．行列 F の固有値 λ ($F\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ を満たす値) は特性方程式

$$\det(\lambda\mathbf{I} - F) = 0 \iff \det\begin{pmatrix}\lambda - \phi_1 & -\phi_2 \\ -1 & \lambda\end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

から得られる．固有値分解を用いた表示を行うため, 以下では特性方程式が重根をもたない場合に限定する．このとき, 行列 F は互いに異なる 2 つの固有値 $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ をもち, それぞれに対応する固有ベクトルは一次独立となるため, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上で対角化可能で以下のように書ける:

$$F\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i\lambda_i \; \forall\, i = 1, 2 \quad \iff \quad F\mathbf{V} = \mathbf{V}\Lambda \quad \iff \quad F = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1},$$

ここで $\Lambda \equiv \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\mathbf{V}$ は対応する固有ベクトルを列にもつ正則行列．この分解を用いると,

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1} = F\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\xi}_t \quad \iff \quad \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \Lambda\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\xi}_t \quad \iff \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{t+1} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$$

ここで $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \equiv \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\xi}_t$．したがって以下が成り立つ:

$$\tilde{\xi}_{i,t} = \tilde{\xi}_{i,0}\lambda_i^t \quad (i = 1, 2) \quad \iff \quad \begin{pmatrix}x_{t+1} \\ x_t\end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{V}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t = \mathbf{V}\begin{pmatrix}\tilde{\xi}_{1,0}\lambda_1^t \\ \tilde{\xi}_{2,0}\lambda_2^t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_{1,1}\tilde{\xi}_{1,0}\lambda_1^t + v_{1,2}\tilde{\xi}_{2,0}\lambda_2^t \\ v_{2,1}\tilde{\xi}_{1,0}\lambda_1^t + v_{2,2}\tilde{\xi}_{2,0}\lambda_2^t\end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix}x_{t+1} \\ x_t\end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{V}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t = \mathbf{V}\Lambda^t\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 = \mathbf{V}\Lambda^t\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\xi}_0 = F^t\boldsymbol{\xi}_0 = F^t\begin{pmatrix}x_1 \\ x_0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

(2) は, 初期条件 $\boldsymbol{\xi}_0$ **（$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0$）の調整**によって, λ による増幅を経て t 期の水準が決定されると理解できる．また, (1) から x_t は 2 つの固有値 λ_1^t, λ_2^t の**線形結合**として表されることが分かる．ゆえに解は $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ で

$$x_t = u_1\lambda_1^t + u_2\lambda_2^t, \tag{3}$$

と書ける．ここで u_1, u_2 は, 初期条件 (x_0, x_1)（$\boldsymbol{\xi}_0$）を満たすように決まる係数である．このとき解の収束性・発散性は, 各固有値の絶対値 $|\lambda_1|, |\lambda_2|$ によって特徴づけられる:

- $|\lambda_i| < 1$: 対応する方向は安定.
- $|\lambda_i| > 1$: 対応する方向は発散.

通常, 一つは安定根, もう一つは発散根となる場合が多い (e.g. Ramsey Growth Model).

■**Blanchard–Khan Condition**　経済モデルでは, **すべての変数の初期値を好きに指定できるわけではない**．まず, $t = 0$ の値が所与で, 初期値を動かせない**状態変数 (state variables)** がある．一方で, $t = 0$ に値を**内生的に選べる**変数があり, これを**制御変数 (jump variables)** と呼ぶ．[*1]

解は (3) のとおり, 固有値 λ に対応する成分の和として表されていた．$|\lambda| > 1$ **の成分は, 少しでも混ざると時間とともに膨らみ, 定常状態から離れていくため,「定常状態に収束する」という条件を課すには, その成分の係数を 0 にしなければならない**．そのために使える調整手段が, $t = 0$ に選べる制御変数の初期値である．つまり, **発散方向 ($|\lambda| > 1$ の固有値の個数) を消し込むだけの自由度 (制御変数の個数) があるか**が, 収束解の**存在**と**一意性**を決める．これを一般化したのが **Blanchard and Khan (1980)** の条件で:

- **発散固有値の個数 = 制御変数の個数 ⇒ 定常状態に収束する解は一意に存在.**
- 発散固有値の個数 > 制御変数の個数 ⇒ 収束条件を満たす解は存在しない.
- 発散固有値の個数 < 制御変数の個数 ⇒ 収束条件を満たす解は複数存在する.

この条件は期待を含む線形動学モデルにもそのまま適用でき，収束解の存在性と一意性の判定基準となる．

[*1] たとえば Ramsey Growth Model では, k_t が状態変数として所与で, $t = 0$ に k_{t+1} を選ぶ, という形で現れる.

■**Local Method and Blanchard–Khan** Local method では，Euler 方程式を定常状態の近傍で線形化することにより，二階の線形差分方程式が得られる。この方法は，もともと

$$x_t \to \bar{x}$$

すなわち定常状態への収束を前提として議論を行っている。したがって，線形化によって得られる解のうち，$|\lambda| > 1$ の固有値に対応する成分が消去されない解は許容されず，**Blanchard–Khan 条件を満たす解のみが近似解として残る**.

3.2 Linearization

■**p.35 Ramsey Growth Model における Euler 方程式の厳密な線形化** 線形化の結果得られた $(*)$ を導く.

$$G(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}) = -\big(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\big)^{-\sigma} + \beta\, \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\big(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}\big)^{-\sigma}.$$

Chain rule を厳密に用いて各偏導関数を導出する.

$$G_1 \equiv \frac{\partial G}{\partial k_t} = -\frac{d}{dk_t}\big(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\big)^{-\sigma} = \sigma\alpha\, k_t^{\alpha-1}\big(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\big)^{-\sigma-1}. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} G_2 \equiv \frac{\partial G}{\partial k_{t+1}} &= -\frac{d}{dk_{t+1}}(k_t^{\alpha} - k_{t+1})^{-\sigma} + \beta \frac{d}{dk_{t+1}}\Big[\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\big(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}\big)^{-\sigma}\Big], \\ &= -\sigma\big(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\big)^{-\sigma-1} + \beta\Big\{A'B + AB'\Big\}, \quad \text{where } A = (k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2})^{-\sigma},\ B = \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

ここで,

$$A' = -\sigma\,(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2})^{-\sigma-1} \cdot \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}, \qquad B' = \alpha(\alpha-1)k_{t+1}^{\alpha-2},$$

であるから,

$$\begin{aligned} G_2 &= -\sigma(k_t^{\alpha} - k_{t+1})^{-\sigma-1} \\ &\quad + \beta\Big[-\sigma\alpha^2 k_{t+1}^{2\alpha-2}(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2})^{-\sigma-1} + \alpha(\alpha-1)k_{t+1}^{\alpha-2}(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2})^{-\sigma}\Big]. \end{aligned} \tag{5}$$

$$G_3 \equiv \frac{\partial G}{\partial k_{t+2}} = \beta\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\frac{d}{dk_{t+2}}\big(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}\big)^{-\sigma} = \beta\sigma\alpha\, k_{t+1}^{\alpha-1}\big(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}\big)^{-\sigma-1}. \tag{6}$$

定常状態を $k_t = k_{t+1} = k_{t+2} = \bar{k}$ とおき, $\bar{c} = \bar{k}^{\alpha} - \bar{k}$ と定義する. 線形化で % 偏差 $\hat{k}_{t+i} = (k_{t+i} - \bar{k})/\bar{k}$ を使うので, 係数として $\tilde{G}_i \equiv G_i(\bar{k}, \bar{k}, \bar{k})\,\bar{k}$ を用いる.

$$\tilde{G}_1 = \sigma\alpha\,\bar{k}^{\alpha}\,\bar{c}^{-\sigma-1}, \tag{7}$$

$$\tilde{G}_3 = \beta\sigma\alpha\,\bar{k}^{\alpha}\,\bar{c}^{-\sigma-1}, \tag{8}$$

$$\tilde{G}_2 = -\sigma\bar{k}\,\bar{c}^{-\sigma-1} - \beta\sigma\alpha^2\bar{k}^{2\alpha-1}\bar{c}^{-\sigma-1} + \beta\alpha(\alpha-1)\bar{k}^{\alpha-1}\bar{c}^{-\sigma}. \tag{9}$$

このとき線形化は次の形になる:

$$\tilde{G}_1\,\hat{k}_t + \tilde{G}_2\,\hat{k}_{t+1} + \tilde{G}_3\,\hat{k}_{t+2} = 0. \tag{L}$$

定常状態の Euler 方程式は:

$$\bar{c}^{-\sigma} = \beta\bar{c}^{-\sigma}\alpha\,\bar{k}^{\alpha-1} \implies 1 = \beta\alpha\,\bar{k}^{\alpha-1}. \tag{E}$$

全体をある正の定数で割ると, 係数が単純化される.

$$D \coloneqq \sigma\,\bar{k}^{\alpha}\,\bar{c}^{-\sigma-1}$$

として, まず明らかに

$$\frac{\tilde{G}_1}{D} = \frac{\sigma\alpha\bar{k}^{\alpha}\bar{c}^{-\sigma-1}}{\sigma\bar{k}^{\alpha}\bar{c}^{-\sigma-1}} = \alpha, \tag{10}$$

$$\frac{\tilde{G}_3}{D} = \frac{\beta\sigma\alpha\bar{k}^{\alpha}\bar{c}^{-\sigma-1}}{\sigma\bar{k}^{\alpha}\bar{c}^{-\sigma-1}} = \alpha\beta. \tag{11}$$

次に $\tilde{G}_2/D$ を計算する:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{G}_2}{D} &= \frac{-\sigma\bar{k}\bar{c}^{-\sigma-1}}{\sigma\bar{k}^{\alpha}\bar{c}^{-\sigma-1}} + \frac{-\beta\sigma\alpha^2\bar{k}^{2\alpha-1}\bar{c}^{-\sigma-1}}{\sigma\bar{k}^{\alpha}\bar{c}^{-\sigma-1}} + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)\bar{k}^{\alpha-1}\bar{c}^{-\sigma}}{\sigma\bar{k}^{\alpha}\bar{c}^{-\sigma-1}} \\ &= -\bar{k}^{1-\alpha} - \beta\alpha^2\bar{k}^{\alpha-1} + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{\sigma}\,\bar{k}^{-1}\bar{c}.\end{aligned}$$

ここで $\bar{c} = \bar{k}^{\alpha} - \bar{k} = \bar{k}(\bar{k}^{\alpha-1} - 1)$ と, (E) より $\beta\bar{k}^{\alpha-1} = 1/\alpha$ を用いると, 各項をさらに整理できる:

$$\begin{aligned}-\bar{k}^{1-\alpha} &= -(\beta\alpha), \\ -\beta\alpha^2\bar{k}^{\alpha-1} &= -\alpha^2\cdot(\beta\bar{k}^{\alpha-1}) = -\alpha^2\cdot\frac{1}{\alpha} = -\alpha, \\ \frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{\sigma}\,\bar{k}^{-1}\bar{c} &= \frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{\sigma}\,(\bar{k}^{\alpha-1}-1) = \frac{\alpha-1}{\sigma}\,\big(\beta\alpha\bar{k}^{\alpha-1} - \beta\alpha\big) = \frac{\alpha-1}{\sigma}\,(1-\beta\alpha).\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\tilde{G}_2}{D} = -(\beta\alpha) - \alpha + \frac{\alpha-1}{\sigma}(1-\beta\alpha) = \frac{\alpha-1}{\sigma}(1-\alpha\beta) - (\alpha\beta+\alpha). \tag{12}$$

(L) を D で割ると, $\hat{k}$ に対する線形結合の係数は上で得た定数となる. すなわち

$$\frac{\sum_{i=0}^{2} G_{i+1}(\bar{k},\bar{k},\bar{k})\bar{k}\hat{k}_{t+i}}{D} = \frac{1}{D}[\tilde{G}_1\,\hat{k}_t + \tilde{G}_2\,\hat{k}_{t+1} + \tilde{G}_3\,\hat{k}_{t+2}] = 0.$$

$$\alpha\beta\,\hat{k}_{t+2} + \left[\frac{1}{\sigma}(\alpha-1)(1-\alpha\beta) - (\alpha\beta+\alpha)\right]\hat{k}_{t+1} + \alpha\,\hat{k}_t = 0. \tag{$*$}$$

これはスライドに示された $(*)$ と一致する. □

4 Equilibrium Concepts 1

■**AD Equilibrium について（p.29）** P の表記がややこしいので導出しておく.

Proof. 最大化問題は

$$\max_{\{c_t^i(s^t)\}_{s^t\in S^t, t\in\{0,1\}}} \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} \beta^t \frac{\big(c_t^i(s^t)\big)^{1-\theta}}{1-\theta}\pi_t\big(s^t\big) \text{ s.t. } \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t\big(s^t\big)c_t^i\big(s^t\big) \le \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t\big(s^t\big)y_t^i\big(s^t\big)$$

であった. 簡単のためラグランジュの未定乗数法で解く. ラグランジアンは

$$L=\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}\beta^t\frac{\left(c_t^i\left(s^t\right)\right)^{1-\theta}}{1-\theta}\pi_t\left(s^t\right)+\lambda\left(\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)y_t^i\left(s^t\right)-\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)c_t^i\left(s^t\right)\right)$$

FOC は

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^i\left(s^t\right)}=\beta^t\left(c_t^i\left(s^t\right)\right)^{-\theta}\pi_t\left(s^t\right)-\lambda p_t\left(s^t\right)=0\quad\text{for}\quad s^t\in\mathcal{S}^t,t\in\{0,1\}\tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)y_t^i\left(s^t\right)-\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)c_t^i\left(s^t\right)=0\tag{14}$$

(13) より $c_t^i(s^t)=\lambda^{-1/\theta}p_t(s^t)^{-1/\theta}(\beta^t\pi_t(s^t))^{1/\theta}$ であるから, (14) に代入して

$$\lambda^{-1/\theta}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)^{(\theta-1)/\theta}\left(\beta^t\pi_t\left(s^t\right)\right)^{1/\theta}=\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)y_t^i\left(s^t\right)$$

$$\therefore\lambda^{-1/\theta}=\left(\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)y_t^i\left(s^t\right)\right)\left(\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)^{(\theta-1)/\theta}\left(\beta^t\pi_t\left(s^t\right)\right)^{1/\theta}\right)^{-1}$$

これを代入して

$$c_t^i\left(s^t\right)=p_t\left(s^t\right)^{-1/\theta}P^{(1-\theta)/\theta}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)y_t^i\left(s^t\right)$$

$$\text{where}\quad P=\left(\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t}p_t\left(s^t\right)^{(\theta-1)/\theta}\left(\beta^t\pi_t\left(s^t\right)\right)^{1/\theta}\right)^{\theta/(\theta-1)}$$

を得る. $p_0=1$ より

$$P=\left(1+\sum_{s^1\in\mathcal{S}}p_t\left(s^1\right)^{(\theta-1)/\theta}\left(\beta^t\pi_t\left(s^1\right)\right)^{1/\theta}\right)^{\theta/(\theta-1)}$$

であることに注意せよ. □

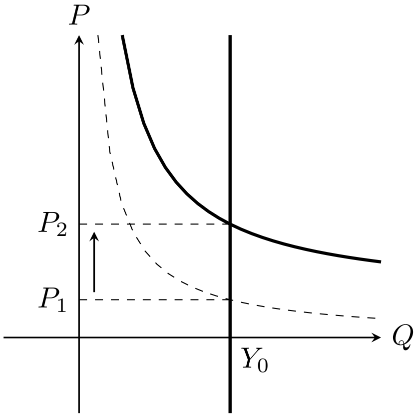
■Aggregate individual demand の比較静学について（p.30） $Y_t\left(s^1\right)$ が上昇したときの価格と需要量の変化について. 結論から言うと**価格, 数量ともに増加する.** これは p.30 の総需要曲線の 1 式目から導かれる.（n 週間前に Euler 方程式を解いていないから分からないなどとほざいた覚えがあるが, 需要曲線自体が Euler 方程式もしくはそれにあたるものを変形して導かれるもの. 混乱を生じさせ申し訳ない.)*2

第 1 式は以下のように変形できる.

$$P^{\frac{\theta-1}{\theta}}=\frac{1}{C_0}\left\{p_0Y_0+\sum_{s^1\in\mathcal{S}^1}p_t\left(s^1\right)Y_t\left(s^1\right)\right\}$$

$Y_t\left(s^1\right)\uparrow$ かつ $\theta>1$ より, この総需要曲線は上方にシフトする. Market Clearing Condition より $Y_0=C_0$ であることに注意して, 図は以下.

*2 需要関数はその定義から最適性を織り込んでおり, 最適性は Euler Equation によって特徴づけられていた.



よって P は増加する. Q（ここでは $C_1(s^t)$ というべきであろう）が増加するのは見た通り.

5　Equilibrium Concepts 2

5.1　Extension of Proposition 1 to Stochastic Case (LecNote Opt, sec 7-1,2)

■sec 7-1 の Assumption 9 について　省略されているが, **(103)** は全ての $(s_1, s_2, \cdots,)$ について成り立つことが仮定されていると思われる. また, **Assumption 3 (i)** に対応するパートが記載されていないが, これを書き換えたものが暗黙に利用されて証明が行われていると考えられる.

5.2　Proof of Optimality (LecNote Eq, Prop 5)

Arrow Security Market では, 各個人 i は予算制約式と NDL を満たしつつ期待効用を最大化するように, 消費計画と Arrow 証券の保有量を選択していた.

$$\max_{(\mathbf{c}^i, \mathbf{a}^i)} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u^i\big(c_t^i(s^t)\big) \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1} \in \mathcal{S}} q_{t+1}(s^t, s_{t+1}) a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) = y_t^i(s^t) + a_t^i(s^{t-1}, s_t), \tag{16}$$

$$a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) \geq D_{t+1}^i(s^{t+1}) \in \mathbb{R} \qquad \forall t,\ \forall s^{t+1}. \tag{17}$$

最適化問題 (15) の最適性条件は, 任意の期 t, 履歴 s^t, および次期状態 s_{t+1} についての確率的オイラー方程式と横断性条件によって成り立つ.

$$u_c^i(c_t^i(s^t)) = \frac{1}{q_{t+1}(s^t, s^{t+1})} \beta u_c^i(c_{t+1}^i(s^{t+1})) \pi_{t+1}(s_{t+1} \mid s^t), \tag{18}$$

$$\lim_{T \to \infty} \mathbb{E}_0 \left[\beta^T u_c^i(c_T^i)\, q_{T+1}\, a_{T+1}^i\right] = 0. \tag{19}$$

これを示そう.

Proof. Stochastic な SP では, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^S$ を与え, 次の最大化問題を考えた:

$$V^*(\mathbf{x}_0, s_0) = \max_{\{(\mathbf{x}_{t+1}(s^t))_{t \in \mathcal{T},\, s^t \in \mathcal{S}^t}\}_{t=0}^{\infty} \subset \mathcal{X}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in \mathcal{S}^t} \beta^t \pi_t(s^t) F\big(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t), s_t\big) \tag{20}$$

$$\text{s.t.}\quad \big(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t)\big) \in X_t(s_t) \qquad \forall t \geq 0,\ \forall s^t \in \mathcal{S}^t, \tag{21}$$

$$B_t(s^t) \leq \mathbf{x}_{t+1}(s^t) \qquad \forall t \geq 0,\ \forall s^t \in \mathcal{S}^t, \tag{22}$$

$$(\mathbf{x}_0, s_0)\ :\ \text{given.} \tag{23}$$

この問題の最適解は, 確率的オイラー方程式と, 横断性条件

$$F_2(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t), s_t) + \beta \mathbb{E}_t\big[F_1(\mathbf{x}_{t+1}(s^t), \mathbf{x}_{t+2}(s^{t+1}), s_{t+1})\big] = \mathbf{0}, \tag{24}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_0\Big[\beta^t F_2(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t), s_t)\big(\mathbf{x}_{t+1}(s^t) - B_t(s^t)\big)\Big] = 0. \tag{25}$$

で与えられていた. では, **Proposition 1** を利用するために, 最適化問題を SP の形に書き換えよう. 状態集合を $\mathcal{S} \equiv \{z_1, \dots, z_S\}$ とする. 履歴 s^t の下で, 次期の Arrow 証券価格をベクトルで

$$\mathbf{q}_{t+1}(s^t) \equiv \big(q_{t+1}(s^t, z_1), \dots, q_{t+1}(s^t, z_S)\big)^\top \in \mathbb{R}^S_+$$

とおく（所与）. 同様に, 個人 i の次期保有を

$$\mathbf{A}^i_{t+1}(s^t) \equiv \big(a^i_{t+1}(s^t, z_1), \dots, a^i_{t+1}(s^t, z_S)\big)^\top \in \mathbb{R}^S$$

とベクトルで表す. 実現状態 $s_t \in \mathcal{S}$ に対応する単位ベクトルを $\mathbf{e}(s_t) \in \mathbb{R}^S$ とすると,

$$a^i_t(s^{t-1}, s_t) = \mathbf{e}(s_t) \cdot \mathbf{A}^i_t(s^{t-1})$$

である. このとき予算制約 (16) と NDL は

$$c^i_t(s^t) + \mathbf{q}_{t+1}(s^t) \cdot \mathbf{A}^i_{t+1}(s^t) = y^i_t(s^t) + \mathbf{e}(s_t) \cdot \mathbf{A}^i_t(s^{t-1}), \tag{26}$$

$$\mathbf{A}^i_{t+1}(s^t)\ \geq\ \mathbf{D}^i_{t+1}(s^t) \qquad \text{where} \quad \mathbf{D}^i_{t+1}(s^t) \equiv \big(D^i_{t+1}(s^t, z_j)\big)_{j=1}^S. \tag{27}$$

ここまでの記法を用いれば, 状態変数 $\mathbf{x}_t$ と制御変数 $\mathbf{x}_{t+1}$ を選ぶ SP を書ける. 履歴 s^t の下

$$\mathbf{x}_t(s^{t-1}) \equiv \mathbf{A}^i_t(s^{t-1}) \in \mathbb{R}^S \quad \text{(state)}, \qquad \mathbf{x}_{t+1}(s^t) \equiv \mathbf{A}^i_{t+1}(s^t) \in \mathbb{R}^S \quad \text{(control)}$$

とおく. さらに, 予算制約 (26) から消費は

$$c^i_t(s^t) = y^i_t(s^t) + \mathbf{e}(s_t) \cdot \mathbf{A}^i_t(s^{t-1}) - \mathbf{q}_{t+1}(s^t) \cdot \mathbf{A}^i_{t+1}(s^t) \tag{28}$$

と一意に定まる（$\mathbf{q}_{t+1}$ は所与）. したがって, 目的関数は

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in \mathcal{S}^t} \beta^t \pi_t(s^t) \qquad \underbrace{u^i\big(c^i_t(s^t)\big)}_{=:\, F\left(\mathbf{A}^i_t(s^{t-1}), \mathbf{A}^i_{t+1}(s^t), s_t\right)}$$

であり, 制約（許容集合）は

$$\mathbf{A}^i_{t+1}(s^t)\ \geq\ \mathbf{D}^i_{t+1}(s^t) \qquad \forall t \geq 0,\ \forall s^t \tag{29}$$

なお $c^i_t(s^t) \geq 0$ と制限して $X_t \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ を規定する. 上の SP に対し, 一般形の条件 (24), (25) を適用すると, **(i) EE** (18) **と (ii) TVC** (19) **が従うことを示そう**.

(EE) 一般形 SP の確率的オイラー方程式 (24) に，本問題の

$$F(\mathbf{A}_t^i, \mathbf{A}_{t+1}^i, s_t) = u^i\big(y_t^i(s^t) + \mathbf{e}(s_t)\cdot\mathbf{A}_t^i - \mathbf{q}_{t+1}(s^t)\cdot\mathbf{A}_{t+1}^i\big)$$

を代入する．このとき

$$F_2 = -u_c^i(c_t^i)\,\mathbf{q}_{t+1}(s^t), \qquad F_1 = u_c^i(c_{t+1}^i)\,\mathbf{e}(s_{t+1})$$

であるから，

$$u_c^i\big(c_t^i(s^t)\big)\,\mathbf{q}_{t+1}(s^t) = \beta\,\mathbb{E}_t\big[u_c^i\big(c_{t+1}^i(s^{t+1})\big)\,\mathbf{e}(s_{t+1})\big]\,. \tag{30}$$

ここで $\mathbf{e}(s_{t+1})$ は実現状態の成分のみが 1 の単位ベクトルであるから，条件付き期待値は

$$\mathbb{E}_t\big[u_c^i\big(c_{t+1}^i(s^{t+1})\big)\,\mathbf{e}(s_{t+1})\big] = \big(u_c^i(c_{t+1}^i(s^t,z))\,\pi_{t+1}(z\mid s^t)\big)_{z\in\mathcal{S}}$$

と書ける．従って (30) を成分表示すると，任意の $z\in\mathcal{S}$ について

$$u_c^i\big(c_t^i(s^t)\big)\,q_{t+1}(s^t,z) = \beta\,u_c^i\big(c_{t+1}^i(s^t,z)\big)\,\pi_{t+1}(z\mid s^t), \tag{31}$$

すなわち Arrow Security Market の確率的オイラー方程式 (18) が得られる．

(TVC) 一般形の TVC (25) は，本問題では（$F_2 = -u_c\,\mathbf{q}_{t+1}$ を用いて）

$$0 = \lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_0\big[\beta^T u_c^i\big(c_T^i\big)\,\mathbf{q}_{T+1}(s^T)\cdot\big(\mathbf{A}_{T+1}^i(s^T) - \mathbf{D}_{T+1}^i(s^T)\big)\big] \tag{32}$$

と書ける．いま内点解を考えているので，各成分についてオイラー方程式 (31) を (32) に代入すると

$$0 = \lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_0\Big[\beta^{T+1}u_c^i\big(c_{T+1}^i(s^{T+1})\big)\,\mathbf{e}(s_{T+1})\cdot\big(\mathbf{A}_{T+1}^i(s^T) - \mathbf{D}_{T+1}^i(s^T)\big)\Big] \tag{33}$$

となる．ここで

$$\mathbf{e}(s_{T+1})\cdot\mathbf{A}_{T+1}^i(s^T) = a_{T+1}^i(s^T, s_{T+1}), \qquad \mathbf{e}(s_{T+1})\cdot\mathbf{D}_{T+1}^i(s^T) = D_{T+1}^i(s^T, s_{T+1})$$

であるから，(33) は

$$0 = \lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_0\big[\beta^{T+1}u_c^i\big(c_{T+1}^i(s^{T+1})\big)\,\big(a_{T+1}^i(s^T,s_{T+1}) - D_{T+1}^i(s^T,s_{T+1})\big)\big] \tag{34}$$

と同値である．ここで次を仮定する：

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_0\big[\beta^{T+1}u_c^i\big(c_{T+1}^i(s^{T+1})\big)\,D_{T+1}^i(s^T,s_{T+1})\big] = 0. \tag{35}$$

この仮定の下では (34) から

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_0\big[\beta^{T+1}u_c^i\big(c_{T+1}^i(s^{T+1})\big)\,a_{T+1}^i(s^T,s_{T+1})\big] = 0 \tag{36}$$

が従う．最後に再びオイラー方程式を用いれば

$$\beta^{T+1}u_c^i\big(c_{T+1}^i(s^{T+1})\big)a_{T+1}^i(s^T,s_{T+1}) = \beta^T u_c^i\big(c_T^i(s^T)\big)q_{T+1}(s^T,s_{T+1})a_{T+1}^i(s^T,s_{T+1})$$

であるから，題意の横断性条件 (19) が得られる． □