

消費者理論の諸定理

前川 大空 *

2026 年 2 月 11 日

1 数学的定義・定理

■凸集合 集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ が凸であるとは、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in C,$$

が成り立つことをいう。以下では $C \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする。

■符号反転と凹凸 関数 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 f の (狭義) 凹性と $-f$ の (狭義) 凸性は同値である。

Proof. 実際、任意の $\lambda \in [0, 1]$ と $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ について

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq (>) \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

この両辺に -1 を掛ければ

$$\iff (-f)(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq (<) \lambda (-f)(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) (-f)(\mathbf{y}),$$

となる。 □

■線形関数は凸かつ凹 線形関数 $\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$ は凸かつ凹である。

Proof. 実際、

$$\ell(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) = \lambda \ell(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \ell(\mathbf{y}),$$

が恒等的に成り立つため、凸性・凹性の不等式が等号で成立する。 □

特に予算式 $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}$ は \mathbf{x} に関して凸かつ凹である。

■準凹性の特徴付け（上方位集合） $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ について、次は同値である： (i) f は準凹である。 (ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し上位集合 $\{\mathbf{x} \in C \mid f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$ は凸である。

Proof. (i) \Rightarrow (ii) を示す。 f が準凹とし、任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ を取る。 $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \geq \alpha$ として準凹性より

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq \min\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\} \geq \alpha,$$

* 一橋大学 経済学部 4 年, 2122230K, 五年一貫コース公共経済プログラム

したがって $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \{\mathbf{z} \in C \mid f(\mathbf{z}) \geq \alpha\}$ であり, 上方位集合は凸である.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ と $\lambda \in [0, 1]$ を取る. $\alpha := \min\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$ とおけば $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \geq \alpha$ であるから, (ii) より $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$ も上方位集合に属し,

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq \alpha := \min\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}.$$

よって f は準凹である. □

■凸(凹) \Rightarrow 準凸(準凹) f が凸ならば準凸, f が凹ならば準凹である.

Proof. 例えば凸 f について, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し下方位集合

$$\{\mathbf{x} \in C \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\},$$

が凸であることを示せばよい. \mathbf{x}, \mathbf{y} がこの下方位集合に属するとき, f の凸性より

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \leq \alpha,$$

ゆえ $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$ も下方位集合に属する. 凹 \Rightarrow 準凹も同様に, 上方位集合の凸性から従う. □

■包絡線定理 $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ を選択変数, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ をパラメータとする. 目的関数 $f: \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ は \mathbf{x} に関して狭義凹, $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ に関して C^1 とする. 制約関数 $g_j: \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) は \mathbf{x} に関して凸, 1 $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ に関して C^1 とする. 以下の不等号制約付き最適化問題を考える:

$$V(\boldsymbol{\theta}) := \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \quad \text{s.t. } g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

任意の $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ に対し, 最適解 $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta})$ が一意に存在し, 制約想定 (e.g. NDCQ) が $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta})$ でなりたつと仮定する. この仮定のもと, ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}_+^m$ が存在し, 2 3 以下がなりたつ:

Proposition 1.1: Envelope theorem

価値関数 V は微分可能で, 以下がなりたつ:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}}. \quad (1)$$

特に, あるパラメータ θ_ℓ が制約関数に影響せず $\partial g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_\ell = 0$ が全 j についてなりたつとき, 対応する制約項は消え, 以下がなりたつ:

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} = \frac{\partial}{\partial \theta_\ell} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\theta})}}. \quad (2)$$

■包絡線定理 (最小化への適用) 最小化問題 $\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ でも, $-f$ が (狭義) 凹になれば

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = - \max_{\mathbf{x}} (-f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})),$$

として最大化問題に帰着でき, 包絡線定理を適用できる (シェファードの補題の導出で用いる).

^{*1} 『力』では g も凹であることに注意せよ.

^{*2} NDCQ がなりたつとき, ラグランジュ乗数は一意に定まる.

^{*3} 狭義単調性は定理には必要ないが, 狭義凹性ととも仮定すれば最適解が一意に定まる十分条件となる.

■定義と補助的仮定 価格ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$, 所得を $y > 0$, 効用水準を $\bar{u} \in \mathbb{R}$ とする. section 1 では, 効用最大化・支出最小化問題が包絡線定理の仮定を満たすとする. 間接効用と支出関数を

$$V(\mathbf{p}, y) := \max_{\mathbf{x}} \{u(\mathbf{x}) \mid \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq y\}, \quad e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^\top \mathbf{x} \mid u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}\},$$

とそれぞれ定義する. さらにそれぞれに対応する需要関数を定義する.

Definition 1.1: 非補償需要 (Walrasian demand)

価格ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$ と所得 $y > 0$ に対し, 非補償需要 $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)$ を以下で定める.

$$\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) := \arg \max_{\mathbf{x}} \{u(\mathbf{x}) \mid \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq y\}, \quad (3)$$

Definition 1.2: 補償需要 (Hicksian demand)

価格ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$ と効用水準 \bar{u} に対し, 補償需要 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ を以下で定める.

$$\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) := \arg \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^\top \mathbf{x} \mid u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}\}, \quad (4)$$

section 1 ではさらに, 需要や支出関数といった最適解は一意 (とくに, 各需要は関数として定義できる) で, これらにも包絡線定理が適用可能とする.

■ロイの恒等式 効用関数の狭義単調性を仮定する.

Proposition 1.2: Roy's identity

財 $j = 1, \dots, n$ について, つぎがなりたつ:

$$x_j^u(\mathbf{p}, y) = - \frac{\partial V(\mathbf{p}, y) / \partial p_j}{\partial V(\mathbf{p}, y) / \partial y}. \quad (5)$$

Proof. 間接効用関数は

$$V(\mathbf{p}, y) = u(\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)),$$

であたえられる. 両辺を p_j で微分すると, 包絡線定理より

$$\frac{\partial V(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, y, \lambda) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y), \lambda=\lambda^*(\mathbf{p}, y)} = -\lambda^*(\mathbf{p}, y) x_j^u(\mathbf{p}, y),$$

ここで λ^* は予算制約のラグランジュ乗数. 同様に y で微分すると

$$\frac{\partial V(\mathbf{p}, y)}{\partial y} = \lambda^*.$$

仮定, とくに u の狭義単調性より $\lambda^* > 0$ ゆえ, 両式を割れば結論がしたがう. □

■シェファードの補題 支出関数 $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は \mathbf{p} について C^2 とする.

Proposition 1.3: Shephard's lemma

補償需要関数 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ は支出関数の価格微分であたえられる:

$$x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Proof. 支出最小化問題のラグランジアンは以下のように構成される:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) = -\mathbf{p}^\top \mathbf{x} - \mu(\bar{u} - u(\mathbf{x}))$$

包絡線定理をもちいて以下がなりたつ

$$-\frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}(\mathbf{p}^\top \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}), \mu=\mu^*(\mathbf{p}, \bar{u})} = -x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}),$$

したがって題意の式が得られる. □

■Slutsky 行列の一般的性質 補償需要 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ に対する Slutsky 行列を

$$S(\mathbf{p}, \bar{u}) := \left(\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

と定義する. 補償需要と Slutsky 行列について, 一般に以下が成り立つ:

Proposition 1.4: Hicksian demand and Slutsky matrix

- (0 次同次性) $\mathbf{x}^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) \quad \forall \lambda > 0.$
- (adding-up)

$$\sum_j p_j \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = 0 \quad \forall i. \quad (7)$$

- (対称性) $S = S^\top.$
- (負半定性) 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\mathbf{v}^\top S \mathbf{v} \leq 0.$

Slutsky 行列の性質 (0 次同次性)

Proof. 支出関数の 1 次同次性より $e(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \lambda e(\mathbf{p}, \bar{u})$. 右辺を \mathbf{p} で微分すると

$$\nabla_{\mathbf{p}}(\lambda e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \lambda \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \bar{u}),$$

である. 一方, 左辺について合成関数の微分 ($\mathbf{q} := \lambda \mathbf{p}$) より

$$\nabla_{\mathbf{p}} e(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \lambda \nabla_{\mathbf{q}} e(\mathbf{q}, \bar{u}).$$

以上より

$$\lambda \nabla_{\mathbf{q}} e(\mathbf{q}, \bar{u}) \Big|_{\mathbf{q}=\lambda \mathbf{p}} = \lambda \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \bar{u}).$$

$\lambda > 0$ だから両辺を λ で割り, シェファードの補題 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \bar{u})$ を用いると

$$\mathbf{x}^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = \nabla_{\mathbf{q}} e(\mathbf{q}, \bar{u}) \Big|_{\mathbf{q}=\lambda \mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}).$$

よって題意は示された.

□

Slutsky 行列の性質 (adding-up)

Proof. 0 次同次性より $x_i^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) = x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})$. 両辺を λ で微分し $\lambda = 1$ とすると

$$0 = \frac{d}{d\lambda} x_i^h(\lambda \mathbf{p}, \bar{u}) \Big|_{\lambda=1} = \sum_j \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} p_j.$$

よって題意は示された.

□

Slutsky 行列の性質 (対称性)

Proof. 支出関数 $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は \mathbf{p} に関して凹である. 実際, 任意の $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}$ と $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} e(\theta \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)}, \bar{u}) &= \inf_{\mathbf{x}: u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}} (\theta \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)}) \cdot \mathbf{x} \\ &= \inf_{\mathbf{x}: u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}} (\theta \mathbf{p}^{(1)} \cdot \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)} \cdot \mathbf{x}). \end{aligned}$$

一般に $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ であるから

$$e(\theta \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \theta) \mathbf{p}^{(2)}, \bar{u}) \geq \theta e(\mathbf{p}^{(1)}, \bar{u}) + (1 - \theta) e(\mathbf{p}^{(2)}, \bar{u}),$$

よって e は凹である. e が \mathbf{p} に関して C^2 と仮定すると, シェファードの補題より

$$S(\mathbf{p}, \bar{u}) = \nabla_{\mathbf{p}}^2 e(\mathbf{p}, \bar{u}).$$

Young の定理より S は対称行列である.

□

Slutsky 行列の性質 (負半定性)

Proof. 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$g(t) := e(\mathbf{p} + t\mathbf{v}, \bar{u})$$

とおくと, e の凹性から g は凹関数である. したがって 2 階微分可能なら $g''(0) \leq 0$. 連鎖律より

$$g''(0) = \mathbf{v}^\top \nabla_{\mathbf{p}}^2 e(\mathbf{p}, \bar{u}) \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top S(\mathbf{p}, \bar{u}) \mathbf{v}.$$

ゆえに S は負半定 (negative semi-definite) である.

□

■間接効用と支出関数の関係 効用関数の狭義単調性を仮定する.

Proposition 1.5: Relations between indirect utility and expenditure

間接効用と支出関数の間では, 任意の (\mathbf{p}, \bar{u}, y) で以下がなりたつ:

$$V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \bar{u}, \quad e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)) = y. \quad (8)$$

Proof. まず $V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \bar{u}$ をしめす. 支出関数の定義より, $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は効用水準 \bar{u} を達成可能な最小の支出である. したがって, 所得を $y = e(\mathbf{p}, \bar{u})$ としたとき, 効用最大化問題において少なくとも効用 \bar{u} は達成可能である. 一方, $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ は最小支出であるから, それ以上の効用は達成できない. ゆえに題意がしたがう.

つぎに $e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)) = y$ をしめす。定義より、 $V(\mathbf{p}, y)$ は所得 y の下で達成可能な最大効用である。この効用水準を達成するために必要な最小支出は、定義から y 以下である。一方、所得制約の下で最大効用が達成されていることから、それより小さい支出では同じ効用水準は達成できない。ゆえに題意がしたがう。 \square

■双対性 (補償・非補償需要の対応) 効用関数の狭義単調性を仮定する。

Proposition 1.6: Duality

任意の (\mathbf{p}, \bar{u}, y) に対して以下が成り立つ:

$$\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)), \quad \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})). \quad (9)$$

Proof. 第一式を示す。 $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)$ を所得 y の下での効用最大化の一意最適解とする。するとその効用は $u(\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)) = V(\mathbf{p}, y)$ であり、かつ支出は効用の狭義単調性から $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = y$ である。効用水準 $V(\mathbf{p}, y)$ を達成する最小支出は $e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ であり、section 1 より $e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y)) = y$ である。したがって $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = y = e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ となり、 $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y)$ は効用 $V(\mathbf{p}, y)$ を達成するバンドルの中で最小支出を与えるバンドル。よって $\mathbf{x}^u(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ が成り立つ。同様に第二式は対称の議論で示される。すなわち、 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$ は効用 \bar{u} を達成する最小支出バンドルで、その支出は $\mathbf{p}^\top \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = e(\mathbf{p}, \bar{u})$ 。所得 $y = e(\mathbf{p}, \bar{u})$ のもとでの効用最大化問題は効用 \bar{u} を最適解として達成し (section 1), したがって $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{x}^u(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u}))$ が成り立つ。 \square

■スルツキー方程式 効用の狭義単調性を仮定する。

Proposition 1.7: Slutsky equation

各 $i, j = 1, \dots, n$ について、以下がなりたつ

$$\frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)} - \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} x_j^u(\mathbf{p}, y). \quad (10)$$

Proof. 双対性より

$$x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = x_i^u(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})).$$

これを p_j で微分すると、連鎖律より

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} \Big|_{y=e(\mathbf{p}, \bar{u})} + \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} \Big|_{y=e(\mathbf{p}, \bar{u})} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j}.$$

両辺を $\bar{u} = V(\mathbf{p}, y)$ と取り、双対性とシェファードの補題により

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)} = x_j^h(\mathbf{p}, \bar{u}) \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)} = x_j^u(\mathbf{p}, y)$$

がなりたつ。これを代入して整理すると、間接効用と支出関数の関係から $y = e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))$ は常に成り立つことに注意して

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)}, \\ &= \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} \Big|_{y \equiv e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))} + \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} \Big|_{y \equiv e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, y))} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}=V(\mathbf{p}, y)}, \\ &= \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^u(\mathbf{p}, y)}{\partial y} x_j^u(\mathbf{p}, y). \end{aligned}$$

これを変形することでスルツキー方程式を得る。 □

参考文献

- [1] Jehle, G.A. and Reny, P.J. (2011), *Advanced Microeconomic Theory*, 3rd ed., Pearson Education.