上級マクロ まとめ

前川 大空 [*]

2026 年 2 月 1 日

1 Optimization

1.1 Sequential form maximization problem: Theory

■p.5 Canonical Maximization Problem, Sequential Form (SP) 以下の最大化問題が SP と呼称される:

$$V^*(\mathbf{x}_0) = \max_{\{\mathbf{x}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) \quad \text{s.t.} \quad (\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) \in X_t,\ \mathbf{x}_0 : \text{ given.} \tag{1}$$

ここで, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+^S$, $F : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}$, $X_t \subset \mathcal{X}^2$, and $\beta < 1$. $V^*(\cdot)$ は **価値関数** と呼ばれる. **最適化問題はこの SP の形に帰着させるのが基本となる**.

■p.6 内点性 内点解 $((\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) \in \text{int}(X_t))$ を考えるのが応用経済学では一般的なので, 事前に内点解を仮定して解析的に扱いやすくしておく.

■p.7 最適性 以下の形で定義される

Definition 1: Optimality

$\mathbf{x}$ is optimal to SP iff it is feasible and for any feasible sequence $\mathbf{x}'$,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(\mathbf{x}'_t, \mathbf{x}'_{t+1}). \tag{2}$$

■p.9〜13 諸々の仮定 SP のもとでは以下の仮定が仮定される:

Assumption 1

For any feasible sequence $\mathbf{x}$, $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})$ is finite. Moreover, there exists an optimal sequence $\mathbf{x}^*$.

均衡が存在することの条件付けがむずかしいので仮定にした.

Assumption 2

F is continuous over X_t.

[*] 一橋大学 経済学部 4 年, 2122230K, 五年一貫コース公共経済プログラム

DP (Dynamic Programming) は非連続にも対応できるので Sequential Approach (SP) より強力 (後述).

Assumption 3 (直感)

均衡水準を少し下げても問題は起こらないことを以下の二点から保証するもの.

1. 目的関数の有限性に関しての適切性
2. feasibility に関しての適切性

Assumption 4

Sets X_t and $\mathcal{X}$ are convex, and function F is weakly concave.

常識的な財の組み合わせ (凸結合) での feasibility と, 極端な水準を避ける常識的な選好を保証する仮定. [*1]

Assumption 5

The function F is continuously differentiable (C^1).

Assumption 6

$F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}$ for all $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X_t$.

消費と投資 (将来の消費に繋がる) のトレードオフを意味する.

■p.14 SP の解の特徴付け 上の仮定のもとで, SP の解を特徴づける便利な式に関する公式が知られている.

Proposition 1: Acemoglu Th. 6.10, SL Th. 4.15, and Kamihigashi (2002)

Suppose that **Assumptions 1-6** hold. Then an interior allocation $\mathbf{x}^*$ is optimal **iff** it satisfies:

1. (Euler equation) For all $t \geq 0$,

$$F_2\left(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{x}_{t+1}^*\right) + \beta F_1\left(\mathbf{x}_{t+1}^*, \mathbf{x}_{t+2}^*\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1\times S}. \tag{3}$$

2. (Transversality condition)

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t F_2\left(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{x}_{t+1}^*\right)\mathbf{x}_{t+1}^* = 0 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

つまり, **Assumption 1-6 のもと, オイラー方程式と横断性条件を満たす配分はそのまま SP の最適解となる**. さらに, 以下が **追加的な条件の下で** 成り立つ.

Proposition 2: Uniqueness

Suppose that **Assumption 1** holds. Moreover, assume that F is **strictly concave**. Then there exists a unique solution to the SP.

F の狭義凹性を仮定すれば, 解の一意性まで保証できることが分かった.

[*1] 例としてはコブダグラス型効用関数などが挙げられる. 消費のシェアが一定となり, この効用関数の下では家計に極端な消費水準は好まれないことが知られる. また, 選好の (i) 完備性, (ii) 推移性, (iii) 連続性, (v) 凸性 から効用関数の quasi-concavity が imply されることが知られており, これは凹性の必要条件である.

1.2 Sequential form maximization problem: Applications

■p.4~18 Application 1: Ramsey Growth Model　家計の最適化問題は次のように与えられる:

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \qquad \text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = k_t^{\alpha}, \quad c_t,\, k_{t+1} \geq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad k_0 : \text{ given.} \tag{5}$$

(5) を SP の形式に書き換えると次のようになる:

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\bigl(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\bigr) \qquad \text{s.t.} \quad (k_t, k_{t+1}) \in X_t := \{k_t, k_{t+1} \geq 0 \mid k_{t+1} \leq k_t^{\alpha}\}, \quad k_0 : \text{ given.} \tag{6}$$

制御変数 (t 期に選択する必要がある変数, 今回の例では $\{(c_t, k_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}$.) と状態変数 (期首には決定されている変数, 今回は $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$.) を区別して, 実質的に自動で決定される制御変数 (c_t) を一つ落とすだけ.

Application of Proposition 1　定理 1.1 から, Euler 方程式と TVC を満たす $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ は最適解となる.

- **Euler 方程式**

$$-\frac{1}{c_t} + \beta\alpha \frac{k_{t+1}^{\alpha-1}}{c_{t+1}} = 0$$

と書き換えられる. これは「現在の消費の限界費用」と「将来の消費の限界便益」の均衡条件を表す.

- **横断性条件 (TVC)**

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{k_{t+1}}{c_t} = 0$$

と表される. これは資本の限界効用価値が無限大に蓄積されないことを要求する.

Guess-and-Verify Method　最適資本パスが次の再帰形式を持つと仮定する:

$$k_{t+1} = \gamma k_t^{\alpha}$$

γ は定数. Euler 方程式および TVC を満たす γ が存在すれば, 定理 1.1 からそれが最適解となる. 実際には

$$k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha}, \quad c_t = (1-\alpha\beta)k_t^{\alpha} = (1-\alpha\beta)y_t$$

を得る. したがって, **本モデル (対数効用の Ramsey Model) はソロー成長モデルに帰着される**.

Dynamic Response in This Simple Model　対数を取ると,

$$\ln k_{t+1} = \ln(\alpha\beta) + \alpha \ln k_t.$$

定常状態 k^* では, $k_t = k_{t+1} = k^*$ となるため:

$$\ln k^* = \ln(\alpha\beta) + \alpha \ln k^*$$

が成立する. 定常状態からの乖離で表すと,

$$\ln \frac{k_{t+1}}{k^*} = \alpha \ln \frac{k_t}{k^*} \quad \Longrightarrow \quad \ln \frac{k_{t+1}}{k^*} = \alpha^{t+1} \ln \frac{k_0}{k^*} \to 0 \quad (\forall k_0).$$

したがって, **資本は定常状態へ単調収束する**. このとき価値関数は

$$V_0(k_0) \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln c^* + \alpha^{t+1} \ln \frac{k_0}{k^*} \right) = \frac{\ln c^*}{1-\beta} + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln \frac{k_0}{k^*}.$$

第 1 項は定常状態の寄与, 第 2 項は移行動学による損失を表す.

■p.19～20 Usage of the TVC

- $\mathbf{x}_1$ を与え, EE を満たし, 解の候補となる系列 $\mathbf{x}(\mathbf{x}_1)$ を構成する.
- **Assumption 3** が $\mathbf{x}(\mathbf{x}_1)$ に対して満たされるかを確認する.
  - **満たされる場合**: 1.1 より TVC は必要条件で, かつ EE を満たすため, それは最適解である.
  - **満たされない場合**: $\mathbf{x}(\mathbf{x}_1)$ が最適解となる可能性がある.

以上の手順により, 解の一意性または複数解の存在を検証できる.

■p.21～31 Application 2: Endogenous Labor Supply　SP を構成するにあたってやることは Ramsey Model と同じ. ただ **Assumption 6** が成立するとは限らないため, 最適解周りの挙動に緩和した条件

$$F_2(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{x}_{t+1}^*)\mathbf{x}_t \leq \mathbf{0}$$

が成り立っていることから, 定理 1.1 が利用できている.

1.3 Dynamic programming as equivalent formulation: Theory

■p.6 Dynamic Programming (DP)　関数 $V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ に関する動的計画問題 (DP) は

$$V(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in X(\mathbf{x})} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta V(\mathbf{y})\} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \qquad X(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathcal{X} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X\}. \tag{7}$$

これは, 「この方程式を満たす関数 V を求めよ」という **関数方程式** であって, 単なる最大化問題ではない. **SP に関する命題 1.1 は, 連続性の下での議論を前提としている**[*2] ため, $\mathbf{x}_{t+1}$ が離散値をとる場合には直接適用できない. 一方で **DP の定式化 (7) は離散・連続の双方に適用可能** で, リスクや高次効果を捉える点で有用である. また, **SP は最適解を求めたのちに代入によって VF を求めるのに対し, DP は逆の順序を辿ることに注意せよ.**

■p.9～17 Value Equivalence　SP と DP の関係性を, 先ずは目的関数の水準の観点から探る.

Proposition 3: Value Equivalence

Assumption 1 が成り立つと仮定すると, 以下が成り立つ.

1. **SP (1) の価値関数 V^* は DP (7) を解く.**
2. もし関数 V が DP を満たし, かつ任意の feasible な $\mathbf{x}$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t V(\mathbf{x}_t) = 0, \tag{8}$$

が成り立ち, さらに任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ について

$$\arg \max_{\mathbf{y} \in X(\mathbf{x})} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta V(\mathbf{y})\} \neq \varnothing, \tag{9}$$

が成立するならば $V = V^*$ が成り立つ (**DP の解は SP の価値関数に一致する**) .

[*2] **Assumption 2** 以降の成立や, それらが意味を持つために必要である.

前提となる仮定が **Assumption 1** のみであることに注意せよ．つまり，**SP に関する命題 1.1 は利用できず，簡単には SP の解を考えることが出来ない状況であるにもかかわらず，DP は SP の価値関数を特定することが出来るのである．** また，$\lim_{t\to\infty}\beta^t V(\mathbf{x}_t)=0$ を以下のように緩和することが出来る．

Corollary 1: Generalization of the Value Equivalence

Proposition 3 の **(ii)** において，仮定 (8) を以下のように弱める：任意の feasible な $\mathbf{x}$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t V(\mathbf{x}_t)\geq 0. \tag{10}$$

また，任意の初期 $\mathbf{x}_0$ について，$\mathbf{x}^*$ を再帰的に

$$\mathbf{x}^*_{t+1}\in\arg\max_{\mathbf{y}\in X(\mathbf{x}^*_t)}\{F(\mathbf{x}^*_t,\mathbf{y})+\beta V(\mathbf{y})\},\quad \mathbf{x}^*_0=\mathbf{x}_0, \tag{11}$$

により定めるとき，もし

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t V(\mathbf{x}^*_t)=0, \tag{12}$$

が成り立てば $V=V^*$ が成立する．

上の系は，最適軌道上では厳密な条件を課すが，一般の feasible な経路では非負性のみを要求することによって条件を緩和している．

■p.18〜24 Policy Equivalence　SP と DP の関係性を，政策関数の水準の観点から探る．

Proposition 4: Policy Equivalence

Assumption 1 を仮定する．V^* を SP の価値関数とする．次が成り立つ：

1. SP の解 $\mathbf{x}^*$ ($\mathbf{x}^*_0$ は所与) は任意 $t\geq 0$ について以下を満たす

$$\textbf{Principle of Optimality (PoO)}:\quad V^*(\mathbf{x}^*_t)=F(\mathbf{x}^*_t,\mathbf{x}^*_{t+1})+\beta V^*(\mathbf{x}^*_{t+1}). \tag{13}$$

2. 逆に，ある feasible な流列 $\mathbf{x}$ が全ての $t\geq 0$ について PoO を満たし，かつ

$$\textbf{TVC-like Condition}:\quad \lim_{t\to\infty}\beta^t V^*(\mathbf{x}_t)=0, \tag{14}$$

が成り立つならば，その経路は SP の最適経路であり，以下が成り立つ

$$V^*(\mathbf{x}_0)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t F(\mathbf{x}_t,\mathbf{x}_{t+1}). \tag{15}$$

PoO は「ある時点以降の部分問題も，その時点の状態を初期値とする最適化問題になっている」という事実から来ている．[*3] すなわち，全期間の最適計画に含まれる任意の部分計画は，その部分問題においても最適でなければならない．対偶を取るなら，もしある時点 t において，

$$V^*(\mathbf{x}^*_t)\neq F(\mathbf{x}^*_t,\mathbf{x}^*_{t+1})+\beta V^*(\mathbf{x}^*_{t+1})$$

が成り立てば，t 期以降の選択を改善すれば全体の目的関数を改善できてしまい，$\mathbf{x}^*$ の最適性に反する．

[*3] 命題で用いている "PoO" は，「ある時点以降の部分問題も，その時点の状態を初期値とする最適化問題になっている」との原理 (**本来の PoO**) から導かれている．すなわち，現状の設定下では最適経路上で (13) の意味での "PoO" が成立する．本文中で用いている "PoO" は全て (13) を指示している．

PoO を満たす経路では, 各期において「その期以降の最適化問題」を正しく解いている. このとき, PoO を $t = 0, 1, \ldots, T$ まで足し上げると, 以下が得られる:

$$V^*(\mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t F(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) + \beta^{T+1} V^*(\mathbf{x}_{T+1}).$$

ここで (14) により最後の項が消滅するため, **逐次的に (すなわち各期において将来を含めた部分問題を解く形で) 実行された最適経路に沿う割引利得の総和は, 初期状態における VF $V^*(\mathbf{x}_0)$ に一致する ((15)).** [*4]

■p.25 政策関数のマルコフ性　PoO は「状態 $\mathbf{x}$ が将来の最適行動に関する十分統計量」であることを示す.

$$h(\mathbf{x}) \in \arg\max_{\mathbf{y} \in X(\mathbf{x})} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta V(\mathbf{y})\},$$

なる写像を定めると, **政策関数 h は過去の履歴に依存せず状態変数 $\mathbf{x}$ のみに依存して決まる (マルコフ性).** この事実は, 過去の履歴が将来の最適行動に追加的な情報を与えないことを意味し, 状態変数が「将来に関連するすべての情報を要約している」という意味で十分統計量になっていることを示す. SP の枠組みでは一般にこの結果を導くのが困難であるのに対し, DP はこの性質を自然に与える.

1.4 Dynamic programming as equivalent formulation: Applications

■p.4∼9 Example 1: Infinite Value Function　$\beta < 1,\ \beta R = 1$. 家計の問題は次の通り:

$$V^*(b_0) = \max_{\{c_t, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t \quad \text{s.t.} \quad c_t + b_{t+1} \leq R b_t, \quad c_t \geq 0,\ b_{t+1} \in \mathbb{R}.$$

借入制約がないため, パス

$$c_0 = K, \quad c_t = 0\ (t \geq 1), \quad b_{t+1} = R b_t$$

により任意の大きさ K を達成でき, 結果 $V^*(b_0) = \infty$ となる. 対応する Bellman 方程式は

$$V(b) = \max_{c, b'} \{c + \beta V(b')\} \quad \text{s.t.} \quad c + b' \leq Rb,$$

であり $V(b) = Rb$ が解となるが, $V^* = \infty$ と整合しない. **したがって, 価値関数が無限大となるケースでは SP と DP の等価性は崩れるため, 等価性のため VF の有限性は保証されるべきである.**

■p.10∼14 Example 2: When TVC-like Condition is Violated　設定を修正して借入禁止 $b_{t+1} \geq 0$ を導入して SP を考えると, 横断性条件 (TVC)

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t F_2(b_t, b_{t+1}) b_{t+1} = -\lim_{t \to \infty} \beta^t b_{t+1} = 0$$

が成り立てば, 累積を展開して以下が導かれる:

$$V^*(b_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (R b_t - b_{t+1}) = R b_0.$$

ところが, PoO を満たす政策変数でも TVC-like Condition が破れることで, Policy Equivalence が失われる場合がある (PoO は成立しても実際の割引価値が V^* と一致しない). **PoO に加え, TVC-like Condition を明示的に確認する必要がある.**

[*4] この直感に関しては寧ろ中級マクロの方が理解に資するかもしれない. **中級マクロまとめの pp.6-7** を参照せよ.

■p.15~21 Application 1: Recursive Version of Ramsey Growth Model　DP 表現は以下の通り:

$$V(k)=\max_{c,k'}\{\ln c+\beta V(k')\}\quad \text{s.t.}\quad c+k'=k^{\alpha}.$$

guess-and-verify method を行う．候補解として $V(k)=a+b\ln k$ を仮定すると, FONC より

$$k'=\frac{\beta b}{1+\beta b}k^{\alpha},\quad c=\frac{1}{1+\beta b}k^{\alpha},\qquad \text{where}\quad b=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta},$$

が得られ, [*5] これは SP の解析解と一致する．[*6] ただし, この一致は Value Equivalence を主張するものではない．実際, DP を満たす候補価値関数において, Value Equivalence (2) における TVC-like Condition が成立しない path を構成できる．したがって, **本モデルにおいて SP $\Rightarrow$ DP は確認できる一方, DP $\Rightarrow$ SP は保証されない**．実務的には追加的な下限制約 $k\geq\varepsilon>0$ を設定して仮定を満たすことで技術的に Value Equivalence (の系) を満たすように調整することは可能である．

　また, DP からラグランジアンを構成してもオイラー方程式を得ることが出来る．[*7]

■p.22~29 Application 2: General Ramsey Growth Model　一般化 Ramsey モデル:

$$V^*(k_0)=\max_{\{c_t,k_{t+1}\}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\quad \text{s.t.}\quad c_t+k_{t+1}=Af(k_t),\ c_t,\ k_{t+1}\geq 0.$$

ここで u は狭義凹, f は凹．初期資本の凸結合に対して実行可能経路の凸結合を作れるため, 効用の狭義凹性より V^* は狭義凹になる．DP の Bellman 方程式

$$V(k)=\max_{c,k'}\{u(c)+\beta V(k')\}\quad \text{s.t.}\quad c+k'=Af(k),$$

も同様に扱え, 狭義凹性は一意性や安定性の基盤となる．

p.27~29 **比較静学**　最適性条件は, 内点解において以下で与えられる:

$$u'\big(Af(k)-k'\big)=\beta V'(k'). \tag{16}$$

以下では, この条件を k' に関する方程式として比較静学を行う．まず左辺について, u は狭義凹であり, $c=Af(k)-k'$ は k' の減少関数であるから, 合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dk'}u'\big(Af(k)-k'\big)=-u''\big(Af(k)-k'\big)>0,$$

が成り立つ．したがって, 左辺は k' の狭義増加関数である．一方, V は狭義凹であるため,

$$\frac{d}{dk'}\beta V'(k')=\beta V''(k')<0,$$

すなわち右辺は k' の狭義減少関数である．よって, (16) を満たす k' は一意に定まる．

　A または k の増加は, すべての k' に対して消費 $c=Af(k)-k'$ が増加し, 左辺 $u'\big(Af(k)-k'\big)$ は点ごとに低下する．このとき, 右辺は変化しないため, 等式 (16) を満たすにはより大きな k' が必要となる．ゆえ

[*5] **中級マクロまとめの pp.6-7** で証明した通り, また, 上級マクロの **PS 1.4 Closed-form Solution** 後半でも議論される．

[*6] 上級マクロの **PS 1.4 Closed-form Solution** 前半で議論されている．

[*7] 証明は **中級マクロまとめの pp.6** や **Optimization 4, pp.20-21**．

に最適な k' は増加する．このとき, 当期消費 $c = Af(k) - k'$ も増加する．とくに, 技術水準 A の上昇は, 消費と資本を比例的に拡大させるが, 最適政策の形状は変えず, unbiased growth をもたらす．

一方, 割引因子 β の上昇は, 右辺 $\beta V'(k')$ を点ごとに上昇させる．この場合, 左辺は変化しないため, 等式 (16) を満たすにはより大きな k' が必要となる．したがって, 将来を相対的に重視するほど最適な次期資本は増加し, その結果, 当期消費 $c = Af(k) - k'$ は低下する．[*8]

■p.30∼40 Application 3: Investment Problem and Tobin's Q (Hayashi (1982))　平均 Q = 限界 Q. 観測可能な企業価値から投資の十分統計量 (Q) を得られる．

1.5 Solution methods for dynamic programming and sequential approach

1.5.1 Solution methods for dynamic programming

■p.5∼6 Motivation: Beyond the Guess-and-Verify Method　これまでの応用では, 候補となる価値関数の関数形を仮定し, Bellman 方程式に代入して検証する **guess-and-verify method** を用いてきた．しかし, **この方法は, 真の価値関数の形状について強い事前知識を要求するため, 一般には利用可能でない**．

この問題に対する標準的な解決策は, **Bellman 方程式を関数から関数への写像の不動点問題として捉えること**である．すなわち, 関数から関数への写像 $\mathcal{F}$ を反復して適応したものとして価値関数を構成する:

$$\mathcal{F}(V)(x) \equiv \max_{x' \in X(x)} \{F(x, x') + \beta V(x')\}.$$

ここで, Bellman 方程式 (7) は

$$V = \mathcal{F}(V)$$

という不動点問題として書き直される．任意の初期関数 V_0 に対し,

$$V_n \equiv \mathcal{F}^n(V_0)$$

を定義し, 極限 $\lim_{n\to\infty} V_n$ が存在すれば, それが価値関数の候補となる．[*9]

■p.7∼13 Discretized Dynamic Programming: Setup　状態空間を

$$\mathcal{X} = [\underline{x}, \overline{x}]$$

とし, これを有限個の点により離散化する:

$$\underline{x} = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = \overline{x}, \qquad \mathcal{N} \equiv \{1, 2, \ldots, N\}.$$

このとき, 離散化された DP は以下で与えられる:

$$V(x_i) = \max_{j \in \mathcal{N}: x_j \in X(x_i)} \{F(x_i, x_j) + \beta V(x_j)\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{N},$$

N を十分大きく取れば, 連続問題の近似として解釈できる．$v_i \equiv V(x_i)$, $F_{i,j} \equiv F(x_i, x_j)$ とおくと, 上式は

$$v_i = \max_{j \in \mathcal{N}: x_j \in X(x_i)} \{F_{i,j} + \beta v_j\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{N},$$

[*8] 図的な議論と対応させ考えること．上マの **SlideWithHandwriting** を確認せよ．

[*9] 一般の連続空間においては, 適切な関数空間とノルムを定義する必要があり, 関数解析的な議論が不可避となる．しかし実務上このレベルの議論は殆ど有用でないため, ここでは状態空間を離散化することで有限次元の問題に還元する．

と書ける．写像 $\mathcal{T}: V^N \to V^N$, $V^N \subset \mathbb{R}^N$ を

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) \equiv \left(\max_{j \in \mathcal{N}: x_j \in X(x_i)} \{F_{i,j} + \beta v_j\} \right)_{i \in \mathcal{N}},$$

で定義すると, 問題は

$$\mathbf{v} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$$

を満たすベクトル $\mathbf{v}$ を求めることに帰着する．縮小写像は以下で定義される．

Definition 2: Contraction Mapping

集合 $Z \subset \mathbb{R}^N$ 上の写像 $\mathcal{T}: Z \to Z$ が**縮小写像**であるとは, ある $\beta \in [0, 1)$ が存在して

$$\|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)\| \leq \beta \|x - y\| \quad \forall x, y \in Z,$$

が成り立つことをいう．ここでノルムは $\|x\| \equiv \max_i |x_i|$ とする．

また, 縮小写像は連続である．

Proposition 5: Contraction Mapping Theorem

$Z \subset \mathbb{R}^N$ をコンパクト集合とする．$\mathcal{T}: Z \to Z$ が縮小写像であるならば,

1. 任意の初期値 $v_0 \in Z$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n(v_0) = v^*$ が存在する．
2. v^* は $\mathcal{T}$ の唯一の不動点である．

つまり, **適当な関数のクラス（縮小写像）の下では, 極限 $\lim_{n\to\infty} V_n$ が不動点問題を解く**．

■p.14∼15 Blackwell's Sufficient Condition　縮小性を直接確認する代わりに, 以下の十分条件が有用である．

Proposition 6: Blackwell's Sufficient Condition

集合 $Z \subset \mathbb{R}^N$ が任意の $\mathbf{v} \in Z$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ に対して $\mathbf{v} + \mathbf{a} \in Z$ を満たすとする．写像 $\mathcal{T}: Z \to Z$ が

1. **Monotonicity**: $\mathbf{v} \leq \mathbf{w} \Rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{v}) \leq \mathcal{T}(\mathbf{w})$,
2. **Discounting**: ある $\beta \in [0, 1)$ が存在して $\mathcal{T}(\mathbf{v} + \mathbf{a}) \leq \mathcal{T}(\mathbf{v}) + \beta \mathbf{a}$,

を満たすならば, $\mathcal{T}$ は縮小写像である．

増加関数 $\mathcal{T}$ に常に 1 未満の『導関数』がある場合 $\mathcal{T}$ は縮小写像である．

■Application to the Discretized DP　$\mathcal{T}$ は単調性と割引性を自然に満たす．適切な $\overline{v}, \underline{v}$ を用いて[*10]

$$Z \equiv [\underline{v}, \overline{v}]^N, \qquad \tilde{Z} \equiv [\underline{v}, \infty)^N$$

を定義すると, **Blackwell's Sufficient Condition** より $\mathcal{T}: \tilde{Z} \to \tilde{Z}$ は縮小写像である．さらに $\mathcal{T}(Z) \subset Z$ が成り立つため, **Contraction Mapping Theorem** より **$\mathcal{T}: Z \to Z$ 上で一意な不動点が存在する．**

以上より, 不動点問題を解くための自然なアルゴリズムが正当化される:

[*10] 縮小写像定理を用いるために, 解を必ず含むコンパクト集合 Z を構成する必要があるため, 以下のように上限・下限を設定する

$$\max_i v_i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, \overline{F} = \frac{1}{1-\beta} \overline{F} \equiv \overline{v}, \quad \min_i v_i \geq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, \underline{F} = \frac{1}{1-\beta} \underline{F} \equiv \underline{v}.$$

1. 任意の初期値 $\mathbf{v}_0 \in Z$ を取る.

2. 反復列を以下で定義する:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathcal{T}(\mathbf{v}_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

3. $\mathcal{T}$ が縮小写像であるため, 一意な不動点 $\mathbf{v}^*$ が存在し, 誤差は以下で評価できる:

$$\|\mathbf{v}^* - \mathcal{T}^n(\mathbf{v}_0)\| = \|\mathcal{T}(\mathbf{v}^*) - \mathcal{T}^n(\mathbf{v}_0)\| \le \beta^n \|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_0\| \le \beta^n \|\overline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}}\|.$$

4. 与えられた許容誤差 $\varepsilon > 0$ に対して, 以下を満たす n を選べば, $\mathbf{v}_n$ は近似解となる:

$$\beta^n \|\overline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}}\| \le \varepsilon.$$

1.5.2 Solution methods for sequential approach

次に, Sequential Problem に対する解法として **global method** と **local method** がある. 両者の根幹には **定常状態 (steady state)** の概念がある. 以下では feasible set が時間非依存 X と仮定する.

Definition 3: Steady State

$\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ が **内部定常状態** (interior steady state) であるとは, 以下が成り立つことをいう:

$$F_2(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) + \beta F_1(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \qquad (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \mathrm{int}(X).$$

初期値が $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}$ であれば, 定常配分 $(\bar{\mathbf{x}})_{t=0}^{\infty}$ は最適解である. 実際,

$$\beta^t F_2(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})\bar{\mathbf{x}} \to 0,$$

より, TVC は自動的に満たされる. この配分は時間を通じて $\bar{\mathbf{x}}$ に留まるため, **steady state** と呼ばれる.

■p.27~28 Global Method: Shooting Algorithm　以下が成り立つ.

Proposition 7: Global Method

Assumptions 1-6 が成り立つとする. もし $\{\mathbf{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$ が Euler 方程式を満たし, かつ内部定常状態 $\bar{\mathbf{x}}$ に収束するならば, $\{\mathbf{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$ は唯一の最適解である.

この結果の要点は, $\mathbf{x}_t \to \bar{\mathbf{x}}$ であることから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな t について $|\mathbf{x}_t| \le \varepsilon + |\bar{\mathbf{x}}|$ が成り立つ点にある. $F \in C^1$ より $F_2(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})\mathbf{x}_{t+1}$ は有界であり,

$$\beta^t F_2(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})\mathbf{x}_{t+1} \to 0,$$

が従うため, TVC が成立する. この命題に基づく **Shooting Algorithm** は以下の通りである:

1. 初期条件 x_0 のもとで, $\mathrm{x}_1 \in X_0(\mathrm{x}_0)$ を仮定する.

2. $(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$ を与え, Euler 方程式を用いて $\{\mathrm{x}_t\}_{t=2}^{\infty}$ を計算する.

3. 十分大きな T について $|\mathrm{x}_T - \bar{\mathrm{x}}| < \varepsilon$ が成り立てば, $\{\mathrm{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$ は最適解である.

4. 成り立たなければ, 初期値 x_1 を修正し, 手順 1 に戻る.

解が定常状態に収束することが事前に分かっている場合にのみ有効である.

■p.29∼36 Local Method：Linearization　Local method では Euler 方程式を厳密には解かず, 定常状態近傍で線形 (正確には対数線形) 近似を行う. 収束先である定常状態まわりでの議論をしている, それすなわち, 実際に近づいた後のことを考えているのだから, **$\mathbf{x}_t \to \bar{\mathbf{x}}$ を仮定している**こととなり, **Global Method の命題** から, **得られるのは局所的な近似最適解**であることが分かる. **x_t をスカラーとし**, Euler 方程式を

$$G(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) \equiv F_2(x_t, x_{t+1}) + \beta F_1(x_{t+1}, x_{t+2}) = 0,$$

と書く. これを定常状態 $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})$ の周りで線形化すると以下を得る: [*11]

$$a\hat{x}_{t+2} + b\hat{x}_{t+1} + c\hat{x}_t = 0, \qquad \hat{x}_t \equiv \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}},$$

$$\text{where} \qquad a = G_1(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})\bar{x}, \quad b = G_2(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})\bar{x}, \quad c = G_3(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})\bar{x}.$$

これは 2 階線形差分方程式であり, 特性方程式

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

の根 λ_1, λ_2 により解の性質が決まる. 解は $\hat{x}_t = u_1\lambda_1^t + u_2\lambda_2^t$ と表される. 収束条件 $\hat{x}_t \to 0$ $(x_t \to \bar{x})$ を課すことで, 以下の対応関係が得られる:

- $1 < |\lambda_1| \le |\lambda_2|$: 解は存在しない.
- $|\lambda_1| < 1 \le |\lambda_2|$**: 解は一意**. [*12] $u_1 = \hat{x}_0,\ u_2 = 0$ **を取れば解** $\hat{x}_t = \lambda_1^t \hat{x}_0$ **を得られる**.
- $|\lambda_1| \le |\lambda_2| < 1$: 複数解が存在.

理論的に解の一意性が分かっている場合, 最後のケースは排除される.

p.33∼36 Demonstration: Ramsey Growth Model　次の SP を考える:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \qquad \text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = k_t^{\alpha}.$$

この問題は唯一解を持つことが知られている. 線形化された Euler 方程式[*13] の特性方程式は

$$F(\lambda) = \alpha\beta\lambda^2 + \Big(\frac{1}{\sigma}(\alpha - 1)(1 - \alpha\beta) - (\alpha\beta + \alpha)\Big)\lambda + \alpha,$$

で与えられ, $F(0) > 0,\ F(1) < 0,\ \alpha\beta > 0$ より $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ が従う. したがって,

$$\hat{k}_t = \lambda_1^t \hat{k}_0,$$

が唯一の線形化解となる. 特に $\sigma = 1$ (対数効用) の場合, $\lambda_1 = \alpha$ となり, 解析解[*14] と一致する.

[*11] スライドでは log-linearization と記載しているが, 実際には一次のテイラー近似に過ぎない.

[*12] 一般には **Blanchard-Khan condition** として知られている. **上級マクロ 補足** を参照すること.

[*13] 線形化については **上級マクロ 補足** を参照すること.

[*14] **Optimization 4** でも述べたが, 上級マクロの **PS 1.4 Closed-form Solution** 前半で議論されている.

2 Equilibrium Concepts

2.1 Dynamic Decisions under Uncertainty & Two-Periods Exchange Economy Model

これまでの最適化の議論では, 利子率や財価格といった価格は所与として扱われてきた. すなわち, 分析の対象は部分均衡における個別主体の最適化問題であった. 本節では視点を変え, **価格がどのようにして決定されるのかという「均衡」の概念を導入する**. 基本的な発想としては, 要と供給が一致する価格が均衡価格である. ただし, 交換経済では供給は外生的に与えられ, 価格に依存しない. **さらにマクロ経済学では, 時間と不確実性を明示的に扱う必要があり, そのため市場の概念を拡張し, 金融取引を含めて考えることが不可欠となる**.

本節では, まず不確実性と動学を伴う個人の意思決定問題を定式化し, その後に二期間交換経済モデルを導入する. このモデルでは供給側は外生的に与えられ, 二種類の均衡概念が自然に現れることを示す.

2.1.1 Dynamic Decisions under Uncertainty

■p.7∼11 環境と問題設定　期間集合は $\mathcal{T} = \{0, 1\}$ とする. 各期の初めにショック s_t が実現し, 初期状態 s_0 は所与である. ショックは有限集合 $\mathcal{S} = \{z_1, z_2, \dots, z_S\}$ の値を取り, 時点 t における履歴は $s^t = (s_0, s_1, \dots, s_t)$ と表される. $\mathcal{S}^t$ を時点 t までのすべての可能な履歴の集合とし, 履歴 s^t が実現する確率を $\pi_t(s^t)$ と書く. 経済には単一の消費財 (リンゴ) が存在する.

個人は初期賦存 I を保有している. 個人は, 履歴 s^t が実現したときに消費財を 1 単位受け取る権利 (請求権, claim) を購入できる. 時点 t, 履歴 s^t に対応する請求権の保有量を $c_t(s^t)$, その価格を $p_t(s^t)$ とする. このとき個人は以下の効用最大化問題を解く

$$U(\mathbf{c}) = U\big(c_0, \{c_1(s^1)\}_{s^1 \in \mathcal{S}^1}\big) \quad \text{s.t. } p_0 c_0 + \sum_{s^1 \in \mathcal{S}^1} p_1(s^1) c_1(s^1) \leq I \tag{17}$$

この問題には二つの異なる意思決定が含まれている.

1. **消費・貯蓄決定問題**: 当期消費と将来のための貯蓄をどのように配分するか
2. **ポートフォリオ決定問題**: 将来の不確実な*15 状態 s^1 にわたって消費をどのように配分するか

さらに, 効用関数が

$$U(\mathbf{c}) = W\big(c_0, \mathcal{R}(\mathbf{c}_1)\big)$$

と表されると仮定する. $\mathcal{R} : \mathbb{R}_+^S \to \mathbb{R}_+$ はリスクがない状態での確実性等価 (certainty equivalence) を返してくれる. また $W : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ は時間集約関数である. この分離により, ポートフォリオ問題と消費・貯蓄問題を段階的に分析できる. **Backward Induction** により以下のような手順で問題を解く:

1. **ポートフォリオ決定問題**:

$$\tilde{\mathcal{R}}(a) \equiv \max_{\mathbf{c}_1} \mathcal{R}(c_1) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{s^1 \in \mathcal{S}^1} p_1(s^1) c_1(s^1) \leq a$$

2. **消費・貯蓄決定問題**:

$$\max_{c_0, a} W\big(c_0, \tilde{\mathcal{R}}(a)\big) \quad \text{s.t.} \quad p_0 c_0 + a \leq I$$

*15 経済学的には, 生起確率が分かっているので uncertainty というか risk の問題だが.

■p.12〜13 **例 1: 加法分離型期待効用**　不確実性集約と時間集約を

$$\mathcal{R}(c_1) = u^{-1}\left(\sum_{s^1\in\mathcal{S}^1} \pi_1(s^1)u(c_1(s^1))\right), \qquad W(x,y) = u^{-1}\big(u(x) + \beta u(y)\big),$$

とする．このとき $U(\mathbf{c}) = W(c_0, \mathcal{R}(\mathbf{c}_1))$ は以下と等価

$$u(c_0) + \beta \sum_{s^1\in S^1} \pi_1(s^1)u(c_1(s^1)).$$

ここで, 二期間の効用が加法分離可能な形であることに注意されたい．二期間 (というか二種類の違う問題を) まとめてラグランジアンを構成すると, 得られる最適性条件は

$$\beta\pi_1(s^1)\cdot\frac{u'(c_1(s^1))}{u'(c_0)} = \frac{p_1(s^1)}{p_0},$$

すなわち, **不確実性を考慮した限界代替率が価格比に等しいことがわかる**.

■p.14〜15 **例 2: 加法分離型期待 CRRA 効用**　さらに $u(c) = c^{1-\theta}/(1-\theta)$ とすると, 消費水準は明示的に解け, $\theta \to 1$ (対数効用) ではより単純化されて

$$p_0 c_0 = \frac{1}{1+\beta}I, \qquad p_1(s^1)c_1(s^1) = \frac{\beta}{1+\beta}\pi_1(s^1)I,$$

が得られる．これは需要の価格弾力性が 1 のコブ=ダグラス型の構造に対応している．

■p.16〜18 **例 3: Epstein–Zin 効用**　最後に, 不確実性と時間選好を分離する Epstein–Zin 型効用を考える．

$$\mathcal{R}(c_1) = \left(\mathbb{E}c_1^{1-\theta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \qquad W(x,y) = \left(x^{1-\rho} + \beta y^{1-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}},$$

とすると, 以下の生涯効用を得られる:

$$U(c) = \left(c_0^{1-\rho} + \beta\left(\mathbb{E}c_1^{1-\theta}\right)^{\frac{1-\rho}{1-\theta}}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

ρ が時間的代替弾力性を, θ がリスク回避度を決定する．[*16] ポートフォリオ問題を解くと, 需要は CES 型で

$$c_1(s^1) \propto p_1(s^1)^{-1/\theta}\pi_1(s^1)^{1/\theta}$$

という形を持つ．このとき $\tilde{\mathcal{R}}(a) = a/\tilde{P}$ と書け, $\tilde{P}$ は状態価格の加重平均からなる価格指数である．その後の消費・貯蓄問題は (β, ρ) のみに依存し, θ には依存しない．従って本来は二つのパラメータは問題構造上も区別されるべきだが, $\rho = \theta$ の場合, 効用は CRRA に一致し, 逆に言えば **CRRA 効用はリスク回避と時間的代替という二つの異なる区別されるべき選好を単一のパラメータで同時に規定してしまう**.

[*16] ここで重要なのは, Epstein–Zin 効用は時間については依然として (単調変換後には) 加法分離的であるが, 不確実性に対しては期待効用型の線形性を仮定しない点である．

2.1.2　Two-Periods Exchange Economy

■p.20∼26 Arrow–Debreu 市場: Trading Promises　各期・各状態 (t, s^t) において消費財は一種類のみ存在する．経済には有限人数の個人 $i \in \{1, 2, \dots, I\} \equiv \mathcal{I}$ が存在し，各個人は確率的な初期賦存系列

$$y_t^i(s^t) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}_+$$

を持つ．集合 $\mathcal{Y}$ は有限であり，**状態によって初期賦存水準は大きく異なり得る**．このため，個人は初期賦存が高い状態では消費を抑え，低い状態では消費を増やすことを望む可能性がある．**この需要を可能にするために，$t = 0$ において状態条件付きの約束を取引できる金融市場を考える**．すなわち，history s^t が実現したときに消費財 1 単位を受け取る約束が取引され，その価格を $p_t(s^t)$ と表す．以下を仮定する: [*17]

Assumption 7: Perfect Enforcement

金融市場は，個人が行った約束を完全に強制履行できると仮定する．

この仮定の下で，個人 i の予算制約は以下で表される:

$$p_0 c_0^i + \sum_{s^1 \in \mathcal{S}^1} p_1(s^1) c_1^i(s^1) \le p_0 y_0^i(s^0) + \sum_{s^1 \in \mathcal{S}^1} p_1(s^1) y_1^i(s^1). \tag{18}$$

$c^i = (c_t^i(s^t))_{t,s^t}$ がこの制約を満たすとき，c^i は **budget-feasible** であるという．[*18] 需要関数はゼロ次同次であり，$c^i(tp) = c^i(p)$ が成り立つ．各個人は，厳密に増加かつ厳密に凹な効用関数 $U^i(c^i)$ を最大化する．

Definition 4: Arrow–Debreu Equilibrium (Second–Period)

Arrow–Debreu 均衡は，価格体系 $\mathbf{p} = \{p_t(s^t)\}_{t \in \mathcal{T},\, s^t \in \mathcal{S}^t}$ と配分 $\mathbf{c} = (\mathbf{c}^i)_{i \in \mathcal{I}}$ の組で，次を満たす:

1. 所与の価格体系 $\mathbf{p}$ の下で，各 $\mathbf{c}^i$ は個人 i の効用最大化問題の解
2. すべての期・状態について市場が一掃される (**市場一掃条件**)：

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} c_t^i(s^t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} y_t^i(s^t) \equiv Y_t(s^t)$$

市場一掃条件の一つは冗長であり，価格はゼロ次同次性により水準が不定となるため，$p_0 = 1$ と正規化しても実質配分には影響しない (ニュメレール)．

Definition 5: Pareto Efficiency

配分 $\mathbf{c}$ がパレート効率的であるとは，次を満たす別の配分 $\mathbf{d}$ が存在しないことをいう．

1. $\mathbf{d}$ は実行可能で $\sum_i d_t^i(s^t) = Y_t(s^t)$ を満たし
2. 全ての個人について $U^i(\mathbf{d}^i) \ge U^i(\mathbf{c}^i)$ が成り立ち
3. ある個人 j については厳密な不等号 $U^j(\mathbf{d}^j) > U^j(\mathbf{c}^j)$ が成り立つ

[*17] 極めて強い仮定で，部分的履行や不履行を許す金融摩擦モデルが重要となるが，本節ではベンチマークとして採用する．

[*18] ここでいう feasible とは，事後的 (つまり状態ごと) には満たされてなくとも成り立つ．つまり，実現した状態における証券を多く買っていたならば，証券を買わなかった場合よりも多く消費することが出来るし，逆も然りである．Promise を買った結果として損をするケースも考えられるが，Perfect Enforcement の仮定から必ず履行される．

Proposition 8: First-Welfare Theorem

Arrow–Debreu 均衡 $(\mathbf{p}, \mathbf{c})$ は,

$$\sum_{t,s^t} p_t(s^t) \sum_{i\in\mathcal{I}} y_t^i(s^t) < \infty$$

が成り立つ限り, **パレート効率的である**.

■p.27〜28 別の市場構造: Arrow 証券　次に, 状態 s^1 に対応する **Arrow 証券 (Security)** を考える. これは $t=0$ に購入され, 翌期に状態 s^1 が実現したときに消費財 1 単位を支払う金融資産である. 価格を $q_1(s^0, s^1)$, 個人 i の保有量を $a_1^i(s^0, s^1)$ とすると, 予算制約は

$$p_0 c_0^i + \sum_{s^1} q_1(s^0, s^1) a_1^i(s^0, s^1) = p_0 y_0^i, \qquad c_1^i(s^1) = y_1^i(s^1) + a_1^i(s^0, s^1),$$

と書ける. 各状態について, 以下の**自然負債制約 (NDL)** を課す

$$a_1^i(s^0, s^1) \geq -y_1^i(s^1) \equiv D_i^i(s^i).$$

Arrow 証券市場と, Arrow–Debreu 市場では, **取引対象と制約の表現方法が異なる**.

Arrow–Debreu 市場では, 各期・各状態の消費 $c_t(s^t)$ 自体が価格付けされ, **状態ごとの消費が直接取引対象となる**. このため, **予算制約は現在価値で一括して課され, 個々の状態における制約は明示されない**.

Arrow 証券市場では, **取引されるのは将来の状態条件付き支払** $a_1(s^1)$ であり, 各状態ごとにどれだけ借り入れるかが明示的に表現される. 完全履行を仮定しても, **将来に実現する初期賦存を上回る返済を約束することは不可能であるため, 各状態について自然負債制約 (NDL) が必要となる**.

Definition 6: Sequential Market Equilibrium (Second–Period)

逐次市場均衡とは, 価格 $(p_0, \mathbf{q}) = (p_0, (q_1(s_0, s_1))_{s^1\in\mathcal{S}^1})$ と配分 $(\mathbf{c}^i, \mathbf{a}^i)_{i\in\mathcal{I}}$ の組であり, 以下を満たす:

1. 所与の価格の下で各個人が配分 $(\mathbf{c}^i, \mathbf{a}^i)_{i\in\mathcal{I}}$ で最適化を行う
2. 市場一掃条件を満たす:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_1^i(s_0, s_1) = 0 \quad \forall s^1 \in \mathcal{S}^1, \qquad \sum_{i\in\mathcal{I}} c_t^i = \sum_{i\in\mathcal{I}} y_t^i \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

市場一掃条件の前半と予算制約式によって, 後半が imply される (ので冗長).

■p.29 二つの均衡概念の等価性　Arrow 証券市場の予算制約を整理すると,

$$p_0 c_0^i + \sum_{s^1} q_1(s^0, s^1) c_1^i(s^1) = p_0 y_0^i + \sum_{s^1} q_1(s^0, s^1) y_1^i(s^1),$$

が得られる. これは Arrow–Debreu 市場の予算制約と同一であり, **対応関係**

$$p_1(s^1) = q_1(s^0, s^1),$$

の下で, 両者は同じ最適化問題に帰着する.

■p.30〜35 Arrow–Debreu **均衡の例**: CRRA **効用**　各個人 i の効用関数が:

$$u^i(c) = c^{1-\theta}/(1-\theta),$$

で与えられているとする. このとき, 個人 i の最適化問題は以下で表される: [*19]

$$\max_{\{c_t^i(s^t)\}_{t\in\mathcal{T}}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} \beta^t \pi_t(s^t) \frac{(c_t^i(s^t))^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t) c_t^i(s^t) \le \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t) y_t^i(s^t).$$

最適消費は価格指数:

$$P = \left(1 + \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} (\beta\pi_t(s^t))^{\frac{1}{\theta}} p_t(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}},$$

を用いて表され, 初期消費と将来消費は以下のように書ける: [*20]

$$c_0^i = P^{\frac{1-\theta}{\theta}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t) y_t^i(s^t),$$

$$c_1^i(s^1) = p_1(s^1)^{-\frac{1}{\theta}} \pi_1(s^1)^{\frac{1}{\theta}} \beta^{\frac{1}{\theta}} P^{\frac{1-\theta}{\theta}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t) y_t^i(s^t).$$

これを個人について集計すると, 総需要は:

$$C_0 \equiv \sum_{i\in\mathcal{I}} c_0^i = P^{\frac{1-\theta}{\theta}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t) Y_t(s^t),$$

$$C_1(s^1) \equiv \sum_{i\in\mathcal{I}} c_1^i(s^1) = p_1(s^1)^{-\frac{1}{\theta}} \pi_1(s^1)^{\frac{1}{\theta}} \beta^{\frac{1}{\theta}} P^{\frac{1-\theta}{\theta}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t) Y_t(s^t).$$

需要曲線は価格に対して右下がりで, 供給 $Y_t(s^t)$ は外生的なので**供給曲線は垂直となる**. 比較静学的には, 確率 $\pi_1(s^1)$ や割引因子 β が上昇すると需要が右シフトし価格が上昇し, **初期賦存 $Y_t(s^t)$ が増加すると需要が右シフトして, 第 0 期の価格は上昇する. 一方で 第 1 期では供給も右シフトし, 数量が上がり, 価格の変化幅は第 0 期と整合的となる**. **CRRA 効用は homothetic であるため**, 個人需要は生涯所得: [*21]

$$I_0^i \equiv \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t) y_t^i(s^t),$$

に比例し,

$$c(\mathbf{p}, I_0^i) = I_0^i \, c(\mathbf{p}, 1),$$

が成り立つ. この結果, 集計需要は以下のように書ける:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} c(\mathbf{p}, I_0^i) = c(\mathbf{p}, 1) \sum_{i\in\mathcal{I}} I_0^i,$$

[*19] 一財 CES 需要の問題 (**PS0 Q6,7**) において $1/\sigma = \theta$, $\theta_i = \beta^t \pi_t(s^t)$, $i = (t, s^t)$ と再定義すれば帰着する.

[*20] 証明は **上級マクロ 補足** を参照すること.

[*21] この生涯所得は, 実際に実現するものではなく, 全ての状態における所得を足し合わせていることに注意せよ, なお, 現在考えているのは Arrow–Debreu Market であるため, その予算制約式に対応する生涯所得としては整合的である.

p.34∼35 Straub (2019)　**個人の不確実性は $\{I_0^i\}_{i\in\mathcal{I}}$ の再分配を通じてのみ作用し，均衡価格そのものには影響を与えない**．市場一掃条件を用いると，均衡価格は以下のように表せる:

$$p_t(s^t) = \beta \left(\frac{Y_t(s^t)}{Y_0(s^0)} \right)^{-\theta} \pi_t(s^t).$$

これは個々の初期賦存 $y_t^i(s^t)$ の分布と独立．一方で，生涯所得は内生的に決まり，以下のように分解できる:

$$I_0^i = y_0^i + \beta\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{-\theta} y_t^i \right] = y_0^i + \beta\,\mathrm{Cov}\left(\left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{-\theta}, y_t^i \right) + \beta\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{Y_t}{Y_0} \right)^{-\theta} \right] \mathbb{E}[y_t^i].$$

$\mathrm{Cov}\big((Y_t/Y_0)^{-\theta}, y_t^i\big) > 0$ であれば，個人 i の初期賦存は景気後退期に相対的に大きくなり，他者には保険的な役割を果たすため，高く評価される．逆に，景気拡張期にのみ大きくなる初期賦存は，社会的価値が低い．この点で，**個人の不確実性は，誰の初期賦存の社会的価値が高いか，という再分配問題としてのみ現れる**．

2.2　Extension and Infinite–Periods Exchange Economy Model

本節では，有限期間の交換経済を無限期間へ拡張する．

■p.4 Setup　期間集合は $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とし，各期 t で履歴 $s^t = (s_0, \ldots, s_t)$ が実現している．[*22] $\mathcal{S}^t$ は時点 t までに起こりうる全ての履歴の集合で，$\mathcal{S}^{t+J} \mid s^t$ は履歴 s^t が与えられたもとでの将来履歴の集合．履歴 $s^t \in \mathcal{S}^t$ の確率を $\pi_t(s^t)$ と書き，条件付き確率を $\pi_{t+J}(s^{t+J} \mid s^t)$ と書く．条件付き期待値と期待値は:

$$\mathbb{E}_t[X_{t+J}] = \sum_{s^{t+J}\mid s^t} X_{t+J}(s^{t+J})\pi_{t+J}(s^{t+J} \mid s^t), \qquad \mathbb{E}_0[X_{t+J}] = \sum_{s^{t+J}} X_{t+J}(s^{t+J})\pi_{t+J}(s^{t+J}).$$

■p.5∼6 Extension of Proposition 1 to Stochastic Case　Stochastic な SP の最適条件を整理する．$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^S$ を与え，次の最大化問題を考える: [*23]

$$V^*(\mathbf{x}_0, s_0) = \max_{\{(\mathbf{x}_{t+1}(s^t))_{t\in\mathcal{T},\, s^t\in\mathcal{S}^t}\}_{t=0}^{\infty} \subset \mathcal{X}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in \mathcal{S}^t} \beta^t \pi_t(s^t) F\big(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t), s_t\big) \tag{19}$$

$$\text{s.t.} \quad \big(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t)\big) \in X_t(s_t) \qquad \forall t \geq 0,\ \forall s^t \in \mathcal{S}^t, \tag{20}$$

$$B_t(s^t) \leq \mathbf{x}_{t+1}(s^t) \qquad \forall t \geq 0,\ \forall s^t \in \mathcal{S}^t, \tag{21}$$

$$(\mathbf{x}_0, s_0) \ :\ \text{given}. \tag{22}$$

確定的な SP と比べると，(i) 状態が確率的であること，(ii) 定義域がより一般的であること，(iii) 追加制約があることが本質的な違いである．この問題の最適解は，確率的オイラー方程式と，横断性条件

$$F_2(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t), s_t) + \beta\mathbb{E}_t\big[F_1(\mathbf{x}_{t+1}(s^t), \mathbf{x}_{t+2}(s^{t+1}), s_{t+1})\big] = \mathbf{0}, \tag{23}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_0\Big[\beta^t F_2(\mathbf{x}_t(s^{t-1}), \mathbf{x}_{t+1}(s^t), s_t)\big(\mathbf{x}_{t+1}(s^t) - B_t(s^t)\big)\Big] = 0. \tag{24}$$

によって特徴づけられる．これは確定的ケースの結果を自然に確率的環境へ拡張したものであり，証明は対応する決定論的な議論を模倣することで得られる．

[*22] 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とし，ショック過程 $(s_t)_{t\geq 0}$ をその上の確率変数として定義する．履歴 s^t は $\omega \in \Omega$ の関数であり，$\pi_t(s^t) = \mathbb{P}(s^t)$, $\pi_{t+J}(s^{t+J} \mid s^t) = \mathbb{P}(s^{t+J} \mid s^t)$ と解釈する．

[*23] つまり，確定的なケースでは財の種類であった S を，各状態における財として読み替えており，実際に消費する財は 1 種のみ．

■p.7∼8 Arrow–Debreu Market (Arrow–Debreu Equilibrium)　無限期間の Arrow–Debreu Market を考える．各個人 i は任意の期・任意の状態における消費を約束する金融契約 (claim) を売買でき，予算制約は: [*24]

$$\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t)c_t^i(s^t) = \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} p_t(s^t)y_t^i(s^t) \equiv I_0^i. \tag{25}$$

個人 i は価格体系 $\mathbf{p} = (p_t(s^t))_{t\in\mathcal{T},\, s^t\in\mathcal{S}^t}$ を所与として，予算制約 (25) のもと以下を最大化する:

$$U^i(\mathbf{c}^i) = \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s^t\in\mathcal{S}^t} \beta^t \pi_t(s^t) u^i(c_t^i(s^t)) = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u^i(c_t)$$

Definition 7: Arrow–Debreu Equilibrium (Infinite Horizon)

Arrow–Debreu 均衡とは，価格 $\mathbf{p}$ と配分 $\{\mathbf{c}^i\}_{i\in\mathcal{I}} = \{\{c_t(s^t)\}_{t\in\mathcal{T},\, s^t\in\mathcal{S}^t}\}_{i\in\mathcal{I}}$ の組で，次を満たす:

1. 所与の価格体系 $\mathbf{p}$ の下で，各 $\mathbf{c}^i$ は個人 i の効用最大化問題の解
2. すべての期・状態について市場が一掃される (**市場一掃条件**)：

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} c_t^i(s^t) = \sum_{i\in\mathcal{I}} y_t^i(s^t) \equiv Y_t^i(s^t) \quad \forall\, t\in\mathcal{T},\ s^t\in\mathcal{S}^t.$$

■p.9∼11 Arrow Security (Sequential Market Equilibrium)　同じ経済を逐次的な市場構造で表現することもできる．各期 t・履歴 s^t において，次期状態 s_{t+1} に依存した Arrow 証券が取引され，フロー予算制約は:

$$c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}\in\mathcal{S}} q_{t+1}(s^t, s_{t+1}) a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) = y_t^i(s^t) + a_t^i(s^{t-1}, s_t). \tag{26}$$

Arrow 証券市場では，将来の状態条件付き支払が明示的に取引されるため，各履歴 s^t および各次期状態 s_{t+1} ごとに，個人がどれだけの返済義務を負うかが明確に定義される．**このとき，将来の各状態において支払が契約で固定されるため，どの将来状態が実現しても返済可能な範囲を超える負債は許容されない**．

この点を反映するため，**自然負債制約 (Natural Debt Limit, NDL)** が必要となる．NDL とは，各履歴 s^t および次期状態 s_{t+1} において，個人が将来にわたって受け取ることのできる所得の現在価値によって，当期における Arrow 証券の保有量の下限が内生的に定まる制約である．具体的には，以下を制約とする:

$$a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) \geq D_{t+1}^i(s^{t+1}), \tag{27}$$

$$\text{where}\quad D_{t+1}^i(s^{t+1}) \equiv -\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s^{t+1+k}|s^{t+1}} q_{t+1+k}^{t+1}(s^{t+1+k}\mid s_{t+1})\, y_{t+1+k}^i(s^{t+1+k})\right). \tag{28}$$

ここで $q_{t+1+k}^{t+1}(s_{t+1+k}\mid s_{t+1})$ は，状態 s_{t+1} における財を基準とした，将来状態 s_{t+1+k} における財の相対価格を表し，単一期の Arrow 証券価格の積として定義される．[*25]

[*24] 二期間の Arrow–Debreu Market における個人の予算制約 (18) と同様の構成をしている．

[*25] $k=0$ の項は $t+1$ 期における既知の初期賦存に対応する．一方 $k\geq 1$ については，将来の各状態における返済可能性が状態ごとに同時に満たされる必要がある．これらの状態別制約を単一の制約として表現するため，将来状態の財を Arrow 証券価格によって $t+1$ 期・状態 s_{t+1} の財に換算し，現在価値として集約している．

以上の制約の下で, 各個人 i は, 予算制約式 (26) および NDL (27) を満たしつつ, 期待効用を最大化するように, 消費計画と Arrow 証券の保有量を選択する.

$$\max_{(\mathbf{c}^i,\mathbf{a}^i)} \ \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u^i\big(c_t^i(s^t)\big) \tag{29}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}\in\mathcal{S}} q_{t+1}(s^t,s_{t+1}) a_{t+1}^i(s^t,s_{t+1}) = y_t^i(s^t) + a_t^i(s^{t-1},s_t), \tag{30}$$

$$a_{t+1}^i(s^t,s_{t+1}) \geq D_{t+1}^i(s^{t+1}) \in \mathbb{R} \qquad \forall t,\ \forall s^{t+1}. \tag{31}$$

Definition 8: Sequential Market Equilibrium (Infinite Horizon)

逐次市場均衡とは, 証券価格 $\mathbf{q}$ と配分 $\{(\mathbf{c}^i,\mathbf{a}^i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ の組で, 次を満たす:

1. 所与の価格 $\mathbf{q}$ の下で, 各個人 i の配分 $(\mathbf{c}^i,\mathbf{a}^i)$ は効用最大化問題 (29) の解である.
2. すべての期・状態について市場が一掃される (**市場一掃条件**):

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_{t+1}^i(s^t,s_{t+1}) = 0 \quad \forall t,\ \forall s^t,\ \forall s_{t+1}\in\mathcal{S}, \qquad \sum_{i\in\mathcal{I}} c_t^i(s^t) = \sum_{i\in\mathcal{I}} y_t^i(s^t) \quad \forall t,\ \forall s^t.$$

■p.12∼16 Budget Equivalence under Arrow Security Market　以下の同値性が NDL の意味を明確化する.

Proposition 9: Budget Equivalence

任意の履歴 s^t において，消費系列 $\{c_t^i\}$ および資産系列 $\{a_t^i\}$ が各期・各履歴でフロー予算制約を満たしていると仮定する。このとき，以下の三条件のうち一つが成り立てば，他の二つも成り立つ。

1. (**現在価値予算制約: PVBC**) 履歴 s^t において，次の不等式が成り立つ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s^{t+k}|s^t} q_{t+k}^t(s^{t+k}\mid s^t)\, c_{t+k}^i(s^{t+k}) \ \leq\ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s^{t+k}|s^t} q_{t+k}^t(s^{t+k}\mid s^t)\, y_{t+k}^i(s^{t+k}) + a_t^i(s^{t-1},s_t).$$

2. (**自然負債制約: NDL**) 履歴 s^t において，次の制約が成り立つ:

$$a_t^i(s^{t-1},s_t) \ \geq\ -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s^{t+k}|s^t} q_{t+k}^t(s^{t+k}\mid s^t)\, y_{t+k}^i(s^{t+k}).$$

3. (**No-Ponzi 条件**) 履歴 s^t において，次が成り立つ:

$$\lim_{J\to\infty}\sum_{s^{t+J}|s^t} q_{t+J}^t(s^{t+J}\mid s^t)\, a_{t+J}^i(s^{t+J-1},s_{t+J}) \ \geq\ 0.$$

つまり, **Arrow 証券市場では, 現在価値予算制約, NDL, No-Ponzi 条件は互いに同値である**.

■p.17∼18 Characterization　最適化問題 (29) の最適性条件は, 任意の期 t，履歴 s^t，および次期状態 s_{t+1} についての確率的オイラー方程式と横断性条件によって成り立つ.

$$u_c^i(c_t^i(s^t)) = \frac{1}{q_{t+1}(s^t,s^{t+1})}\beta u_c^i(c_{t+1}^i(s^{t+1}))\pi_{t+1}(s_{t+1}\mid s^t), \tag{32}$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_0 \left[\beta^T u_c^i(c_T^i)\, q_{T+1}\, a_{T+1}^i\right] = 0. \tag{33}$$

導出は **上級マクロ 補足, LectureNote 2 Proposition 5** を参照すること.

■Arrow–Debreu 均衡と逐次市場均衡の等価性　内点の Arrow–Debreu 均衡からは, 価格比

$$q_t(s^{t-1}, s^t) = \frac{p_t(s^t)}{p_{t-1}(s^{t-1})}$$

によって逐次市場均衡が構成でき, 逆に逐次市場均衡からは Arrow–Debreu 価格が積の形で再構成できる.

■p.20∼23 Application 1: Asset Pricing with Representative Agent　この枠組みの応用として, 代表的家計による資産価格決定を考える. 全ての家計が同一であれば, 均衡では $c_t = Y_t$ が成り立ち, Arrow 証券価格は

$$q_{t+1}(s^t, s^{t+1}) = \beta\pi_{t+1}(s^{t+1} \mid s^t)\frac{u_c(Y_{t+1}(s^{t+1}))}{u_c(Y_t(s^t))}$$

と表される. これは確率割引因子 (pricing kernel) として解釈され, リスクフリー債や任意の将来ペイオフをもつ資産の価格は, このカーネルを用いて将来ペイオフを評価することで得られる.

■p.24∼28 Application 2: Asset Pricing with Epstein-Zin Preference　最後に Epstein–Zin 効用を導入すると, 効用は再帰的に定義され, リスク回避度と異時点間代替の弾力性を分離できる. この場合, 資産価格は

$$q(s, s') = \beta\pi(s' \mid s)\left(\frac{U(s')}{E_s[U(s')^{1-\theta}]^{1/(1-\theta)}}\right)^{\frac{\rho-\theta}{1-\theta}}\left(\frac{Y(s')}{Y(s)}\right)^{-\rho}$$

の形をとり, 一般には閉形式解を得ることは困難である. そのため, 状態がマルコフ過程に従う場合には, 動的計画法を用いて数値的に解を求めるのが標準的である. Epstein–Zin 効用の下では横断性条件の必要性が一般には未解決であるが, 均衡の存在を仮定する応用研究では, 実務的にこれらの条件を課すことが多い. 理論分析では加法分離型効用が扱いやすく, 一方でリスクの役割を強調する応用では Epstein–Zin 効用が有用である, という使い分けが自然である.

2.3 Market Equilibrium in Production Economy