中級マクロ 2025 冬学期

前川 大空 *

2026 年 1 月 25 日

1 Solow Model

1.1 Solow Model 1

■p.14 閉鎖経済で政府が存在しない場合 $I = S$ が成立する.

Proof. 三面等価の法則より生産と需要は一致し (市場一掃条件):

$$Y_t = I_t + C_t + G_t + NX_t,$$

が成り立つ. 政府が存在せず, 閉鎖経済であるため $G_t = NX_t = 0$. また支出側での貯蓄の定義, 生産と支出の一致より:

$$I_t = Y_t - C_t =: S_t.$$

ソローモデルでは貯蓄率 s が外生的に与えられるため:

$$I_t = S_t = sY_t \quad s \in (0,1),$$

が成り立つ. □

■p.19 CRS 生産関数は企業所有者の設定を無用にする.

定理: Euler's Theorem

生産関数 $F(K, L)$ が m 次同次ならば以下が成立:

(1) $mF(K,L) = F_K K + F_L L,$

(2) F_K, F_L は $m-1$ 次同次.

定義: m 次同次

生産関数 $F(K,L) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が m 次同次とは:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^m F(K,L) \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Proof. m 次同次の定義より:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^m F(K,L) \quad \forall\, \lambda > 0.$$

両辺を λ で微分し, $\lambda = 1$ を代入すると:

$$F_K(\lambda K, \lambda L)K + F_L(\lambda K, \lambda L)L = m\lambda^{m-1}F(K,L),$$
$$F_K K + F_L L = mF(K,L),$$

よって **(1)** を得た. また両辺を K で微分し, λ で割ると:

$$F_K(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{m-1}F_K(K,L),$$

ゆえ F_K は $m-1$ 次同次で, F_L も同様に示され **(2)** を得る. □

$m = 1$ (収穫一定, CRS) で以下が示される.

定理: 完全分配

生産関数 $F(K,L)$ が 一次同次ならば以下が成立:

(1) $Y = F(K,L) = F_K K + F_L L = RK + wL,$

(2) F_K, F_L は 0 次同次.

企業は超過利潤を得ないため, 所有者を明示しなくてよい.

■p.37 以下のコブ=ダグラス型 PF を考える:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0,1),$$

ここで α は以下の意味を持つ:

α の意味

1. 資本の生産への貢献度
2. 所得に占める資本所得の比率 (資本分配率)

Proof. 生産量の資本弾力性と資本分配率はそれぞれ:

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \ln K} = \frac{\partial[\alpha \ln K_t + (1-\alpha)\ln L_t]}{\partial \ln K} = \alpha,$$
$$\frac{R_t K_t}{Y_t} = \frac{F_K K_t}{Y_t} = \frac{\alpha K_t^{-1} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} K_t}{K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}} = \alpha.$$

ゆえに題意は満たされた. □

■p.39 A_t の成長率 g_A は上記の議論に影響を及ぼさない.

■p.40 成長会計:

$$\frac{\Delta Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{\Delta A_{t+1}}{A_t} + \alpha \frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} + (1-\alpha)\frac{\Delta L_{t+1}}{L_t},$$

はコブダグラス型 PF を変形して得られる.

Proof. $t, t+1$ 期で対数・差分を取ると:

$$\ln(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}) = \ln(\frac{A_{t+1}}{A_t}) + \alpha \ln(\frac{K_{t+1}}{K_t}) + (1-\alpha)\ln(\frac{L_{t+1}}{L_t}).$$

ΔX_{t+1} の変動が十分に小さければ, 一次のテイラー展開より:

$$\ln(\frac{X_{t+1}}{X_t}) \approx \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} =: \frac{\Delta X_{t+1}}{X_t}.$$

個別に代入することで題意の式を得る. □

■p.49 ソローモデルの基本方程式は, $g_A = 0$ では以下で与えられる:

定理: ソローモデルの基本方程式 ($g_A = 0$)

以下の非線形差分方程式で与えられる:

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + sf(k_t),$$
$$\iff \quad \Delta k_{t+1} = \frac{sf(k_t) - (n+\delta)k_t}{1+n}.$$

* 一橋大学 経済学部 4 年, 2122230K, 五年一貫公共経済プログラム

Proof. 一人当たり資本 $k_t \equiv K_t/L_t$, $f(k_t) \equiv F(K_t/L_t, 1)$ とし:

$$
\begin{aligned}
I_t &= S_t = sY_t = sF(K_t, L_t),\\
K_{t+1} &= (1-\delta)K_t + sF(K_t, L_t),\\
K_{t+1}/L_t &= (1-\delta)K_t/L_t + sF(K_t, L_t)/L_t,\\
&= (1-\delta)k_t + sf(k_t).
\end{aligned}
$$

$F(k_t, 1) = F(K_t, L_t)/L_t$ は CRS による. さらに変形し:

$$
\begin{aligned}
\frac{K_{t+1}}{L_t} &= \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n)k_{t+1},\\
(1+n)k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + sf(k_t),\\
(1+n)\Delta k_{t+1} &= -(n+\delta)k_t + sf(k_t),
\end{aligned}
$$

よって題意の式を得る. □

■p.53　定常状態 k^* は以下の均衡経路である.

定義: 定常状態

$$k_t = k^* \quad \forall\, t.$$

定常状態 k^* は以下のように導出できる.

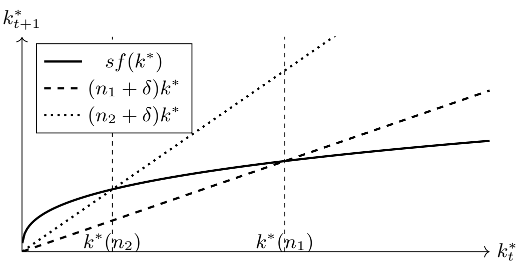
Proof. 定常状態の定義を基本方程式に代入することにより:

$$(n+\delta)k^* = sf(k^*), \qquad \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s},$$

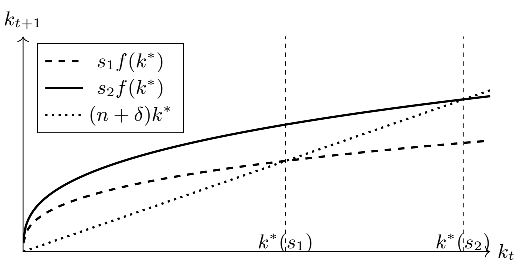
を得る. □

■p.56　この設定下での比較静学は以下の通り:

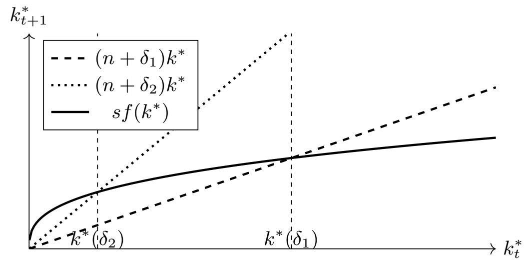
(1) n の増加 ($n_1 \to n_2$)　n が増加すると $n+\delta$ が大きくなり, k^* は減少する. 直感的には人口成長が速いと一人当たり資本がより早く希薄化されるため, 定常状態の一人当たり資本は小さくなる.



(2) s の増加 ($s_1 \to s_2$)　貯蓄率 s が上昇すると投資供給曲線 $sf(k)$ が上方にシフトし, 交点 k^* は増加する. 直感的には貯蓄が増えると一人当たり投資が増え, より高い定常資本を実現できるためである.



(3) δ の増加 ($\delta_1 \to \delta_2$)　資本減耗率 δ が上昇すると $n+\delta$ が大きくなり, 交点 k^* は減少する. 直感的には減耗が大きいほど既存資本の維持により多くの投資が必要になるため, 同じ投資率では一人当たり資本は低下する.



■p.61　黄金律 k^g の定義は以下の通り.

定義: 黄金律

定常状態の一人当たり消費 c^* を最大化する k^*.

今回の黄金律 k^g を考える.

定理: 今回のソローモデルでの黄金律

$$f'(k^g) = n + \delta.$$

Proof. 定常状態でのソローモデルの基本方程式を変形して:

$$
\begin{aligned}
sf(k^*) &= (n+\delta)k^*,\\
c^* = (1-s)f(k^*) &= f(k^*) - (n+\delta)k^*.
\end{aligned}
$$

今回の設定では, 最適化問題は以下のように具体化される:

$$
\begin{aligned}
k^g &\equiv \arg\max_{k^*} f(k^*) - (n+\delta)k^*,\\
\frac{\partial c^*}{\partial k^*} &= f'(k^*) - (n+\delta) = 0.
\end{aligned}
$$

を得る. □

1.2　Solow Model 2

$g_A > 0$ のケースを考えてソローモデルを再考する.

■p.5　技術進歩は三類型で分類される.

定義: 中立的技術進歩

- Hicks 型: $F(K_t, L_t, A_t) = A_t F(K_t, L_t)$
- Solow 型: $F(K_t, L_t, A_t) = F(A_t K_t, L_t)$
- Harrod 型: $F(K_t, L_t, A_t) = F(K_t, A_t L_t)$

均衡成長経路を考えるため, Harrod 型中立的技術進歩を考える.

定義: 均衡成長経路 (BGP)

GDP が一定の成長率で増加する一方, 資本産出比率・利子率・生産要素分配比率が一定のままである経路

■p.5　設定を整理する. Harrod 型（労働増強型）技術進歩を仮定し:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t), \quad A_{t+1} = (1+g_A)A_t, \quad L_{t+1} = (1+n)L_t.$$

F は CRS. 効率労働 1 単位あたりの資本・生産を以下で定義する:

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}, \quad \tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t} = f(\tilde{k}_t).$$

■p.11　総資本の遷移式を $A_t L_t$ で割ると次式が得られる:

定理: ソローモデルの基本方程式 ($g_A > 0$)

以下の非線形差分方程式で与えられる:

$$\begin{aligned}&(1+n)(1+g_A)\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\tilde{k}_t + sf(\tilde{k}_t),\\ \iff \quad &\Delta\tilde{k}_{t+1} = \frac{sf(\tilde{k}_t) - (n+\delta+g_A+ng_A)\tilde{k}_t}{(1+n)(1+g_A)}.\end{aligned}$$

Proof. 左辺について,

$$\frac{K_{t+1}}{A_t L_t} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} \cdot \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_t L_t} = (1+n)(1+g_A)\,\tilde{k}_{t+1}.$$

右辺は明らか. 先に示した等式を $\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t$ について整理すると

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{k}_{t+1} &= \frac{sf(\tilde{k}_t) + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+n)(1+g_A)\tilde{k}_t}{(1+n)(1+g_A)},\\ &= \frac{sf(\tilde{k}_t) - (\delta+n+g_A+ng_A)\tilde{k}_t}{(1+n)(1+g_A)}.\end{aligned}$$

よって題意の式が示された. □

ここで ng_A を小さい 2 次項として打ち切ると

$$\Delta\tilde{k}_{t+1} \approx \frac{sf(\tilde{k}_t) - (\delta+n+g_A)\tilde{k}_t}{(1+n+g_A)}.$$

貯蓄によって得られた資本増加 $sf(\tilde{k}_t)$ は, (δ, n, g_A) により相殺される.

■p.12　定常状態 $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$ を仮定すると:

$$sf(\tilde{k}^*) = \big(n+g_A+ng_A+\delta\big)\tilde{k}^* \approx (n+g_A+\delta)\tilde{k}^*.$$

■p.16　定常状態において成長率は以下の通り:

$$(g_{\tilde{k}}, g_{\tilde{y}}, g_k, g_y, g_K, g_Y) = (0, 0, g_A, g_A, g_A+n, g_A+n)$$

Proof. $\tilde{k}_t$ が定常状態で一定ならば

$$\tilde{k}_t = \text{const.}, \qquad \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_t L_t} = (1+g_A)(1+n),$$

総資本の成長率は $\approx n+g_A$. 1 人あたり資本 K_t/L_t は

$$\frac{K_{t+1}/L_{t+1}}{K_t/L_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{L_t}{L_{t+1}} = 1+g_A,$$

ゆえに一人当たり資本の成長率は g_A. $Y_t = A_t L_t f(\tilde{k}_t)$ であって, $f(\tilde{k}_t)$ は定数ゆえ, $g_{Y/L} = g_A$, $g_Y \approx n+g_A$. □

g_A が定常状態で一定となるため, BGP の存在を確証できる.

■p.17　カルドアの定型化された事実は以下の通り.

定理: Kaldor facts (Kaldor, 1963)

1. $Y, Y/L$ の成長率は安定的で, 下落する傾向はない
2. K/L も時間とともに一定率で成長する
3. 資本の収益率 R は安定的
4. 資本産出比 K/Y は長期的にほぼ一定
5. 所得分配比率 $wL/Y, RK/Y$ は一定
6. Y/L の成長率には国際間で大きな差がある

うち FACT 1 ~ 5 はソローモデルと整合的.

Proof. **FACT** 1, 2 は定常状態での成長率の計算により示された.

FACT 3 は CRS のもとで示せる:

$$\begin{aligned}R_t = F_K(K_t, A_tL_t) &= \frac{\partial}{\partial K_t}A_tL_tF(\frac{K_t}{A_tL_t}, 1),\\ &= \frac{\partial\tilde{k}_t}{\partial K_t}A_tL_t\frac{\partial F}{\partial\tilde{k}_t}(\tilde{k}_t, 1) = f'(\tilde{k}_t).\end{aligned}$$

であり, 定常状態では $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$ により R_t は一定となる.

FACT 4 は直接計算で示せる:

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\tilde{k}_t}{f(\tilde{k}_t)},$$

定常状態で $\tilde{k}_t$ が一定ならこれも一定である.

FACT 5 はコブダグラス型 PF に限らず示せる:
資本産出比 K/Y, 資本収益率 R の成長率は **FACT** 3, 4 から一定だったため, RK/Y は定常状態で一定となる. wL/Y も同様にして一定.
コブダグラス関数に限らず, BGP 上で Harrod 型技術進歩を仮定し, かつ一次同次ならば成立する. □

■p.25　$g_y = g_A$ で技術進歩のみに依存し, **FACT** 6 は説明不能.

1.3　Solow Model 3

■p.14　基本的な python の内容は以下の通り:

```
A = [1,2,3]                          # list: 要素 A[0] = 1
B = (1,2,3)                          # tuple: 要素の変更不能

def functionname(input1,input2):     # 関数名, 引数の数は自由
    output = hoge(input1, input2)    # 処理

    return output                    # 戻り値

for i in range(n):                   # 0 から n-1 まで 1 ずつ増える
    print(i)
for i in range(1,n):                 # 1 から n-1 まで 1 ずつ増える
    print(i)
for i in range(a,b,c):               # a から b-1 まで c ずつ増える
    print(i)
for i in range(10):
    print(i)
    if i == 5:                       # 初めて条件を満たした位置
        break                        # ここで for を抜ける (5 まで表示される)

import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 10, 200)          # 等間隔な数値の生成
y = np.sin(x)

plt.figure()
plt.plot(x, y)
plt.title("Title")                   # タイトル
plt.xlabel("x")                      # 軸 x
plt.ylabel("y")                      # 軸 y
plt.grid(True)                       # 目盛り線
plt.xlim(0,10)                       # 範囲調整
plt.ylim(-1, 1)                      # 範囲調整
plt.show()
```

税制を伴うソローモデル

HW 1 に沿って, $g_A = 0$ で労働所得税 τ を考える. 資本蓄積式は:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + s(1-\tau)Y_t.$$

これを人口で割り, 生産関数の CRS を用いることで,

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s(1-\tau)f(k_t),$$

が得られる. したがって, 基本方程式は

$$\Delta k_{t+1} = \frac{s(1-\tau)f(k_t) - (n+\delta)k_t}{1+n}.$$

■定常状態　定常状態 k^* は $k_{t+1}=k_t=k^*$ によって定義され,

$$s(1-\tau)f(k^*)=(n+\delta)k^*.$$

■比較静学　定常状態の一人当たり資本は以下の性質を持つ:

- n,δ の上昇は k^* を低下させる
- 貯蓄率 s の上昇は k^* を増加させる
- 税率 τ の上昇は可処分所得を通じて k^* を低下させる

成長率は:

$$g_k=g_y=0,\quad g_K=g_Y=n,$$

が成立する．したがって τ は長期の成長率には影響しない．

■黄金律と税制　定常状態での一人当たり消費は:

$$c^*=(1-\tau)f(k^*)-(n+\delta)k^*,$$

で与えられる．これを最大化する黄金律資本 k^g は:

$$f'(k^g)=\frac{n+\delta}{1-\tau},$$

によって特徴づけられる．

2　Ramsey Model (RCK Model)

2.1　Ramsey Model 1

■p.11　簡単化のために $g_A=n=0$ と仮定する:

$$A_{t+1}=A_t=A,\quad L_{t+1}=L_t=L.$$

生産関数は CRS を満たすとし:

$$Y_t=F(K_t,L_t).$$

効率労働あたりの資本・産出・消費を以下で定義する:

$$k_t:=\frac{K_t}{L_t},\quad y_t:=\frac{Y_t}{L_t},\quad c_t:=\frac{C_t}{L_t}.$$

CRS より $y_t=f(k_t)$ が成立する．

■p.10　各期で代表的企業は, 所与の要素価格 (R_t,w_t) の下:

$$\max_{K_t,L_t}\ \Pi_t=F(K_t,L_t)-R_tK_t-w_tL_t,$$

を解き, 以下が成り立つ:

$$R_t=f'(k_t),\ w_t=f(k_t)-k_tf'(k_t),\ Y_t=R_tK_t+w_tL_t.$$

Proof. FOC より

$$\frac{\partial\Pi_t}{\partial K_t}=F_K(K_t,L_t)-R_t=0,\quad \frac{\partial\Pi_t}{\partial L_t}=F_L(K_t,L_t)-w_t=0.$$

CRS と $k_t\equiv K_t/L_t$ の定義より

$$R_t=f'(k_t),\quad w_t=f(k_t)-k_tf'(k_t).$$

目的関数に代入し $R_tK_t^*+w_tL_t^*=f(k_t^*)L_t^*=F(K_t^*,L_t^*)$.　□

■p.14　$k_0>0$ を所与として, 代表的家計は以下の最大化問題を解く:

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^tu(c_t),\quad 0<\beta<1,$$
$$\text{s.t.}\quad c_t+k_{t+1}=(1+r_t)k_t+w_t.$$

Proof. 予算制約式を導出する．家計の支出と所得は一致し: [a]

$$C_t+S_t=R_tK_t+w_tL_t,$$

完全分配 $Y_t=R_tK_t+w_tL_t$, 財市場の均衡 $Y_t=C_t+I_t$ ゆえ:

$$S_i+C_t=R_tK_t+w_tL_t=Y_i=I_t+C_t.$$

よって $S_i=I_t$ で, 資本遷移式から:

$$S_t=I_t=K_{t+1}-(1-\delta)K_t$$
$$C_t+K_{t+1}=(1+R_t-\delta)K_t+w_tL_t$$

$r_t=R_t-\delta$ と定義し L_t で両辺を割ると題意の式を得る．　□

[a] 正確には, 効用が狭義単調増加であることによる．

■p.18　オイラー方程式は以下で与えられる:

$$u'(c_t)=\beta(1+r_{t+1})u'(c_{t+1}),$$

Proof. ラグランジアンを

$$\mathcal{L}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\Big[u(c_t)+\lambda_t\big((1+r_t)k_t+w_t-c_t-k_{t+1}\big)\Big]$$

と定義する．FOC より:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_t}:\ u'(c_t)=\lambda_t,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k_{t+1}}:\ \lambda_t=\beta\lambda_{t+1}(1+r_{t+1}).$$

両式を組み合わせると題意の式を得る．　□

■p.8　競争均衡の定義を与える．

定義: 1 人あたりの競争均衡

新古典派成長モデルの競争均衡は $\{c_t,k_t,w_t,R_t\}_{t=0}^{\infty}$ で構成され,

1. 家計は k_0, $\{w_t,R_t\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として効用を最大化し,
2. 企業は $\{w_t,R_t\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として利潤を最大化し,
3. $\{w_t,R_t\}_{t=0}^{\infty}$ は, 全市場が一掃されるよう設定される．

Solow Model とは違い, 各主体の最適化問題が明示的に盛り込まれている．

市場一掃条件についてはワルラス法則により, 家計と企業の最適化条件を満たせば, 財・サービス市場も均衡する．前二つは以下で表現される:

$$u'(c_t)=\beta(1+f'(k_{t+1})-\delta)u'(c_{t+1}),$$
$$c_t+k_{t+1}=(1-\delta)k_t+f(k_t)$$

Proof. オイラー方程式は求めた通り．家計と企業の最適条件より:

$$c_t+k_{t+1}=(1+r_t)k_t+w_t,$$
$$R_t=f'(k_t),\ w_t=f(k_t)-k_tf'(k_t).$$

代入して:

$$\begin{aligned}c_t+k_{t+1}&=(1+r_t)k_t+w_t,\\&=(1+r_t)k_t+f(k_t)-k_tR_t=(1-\delta)k_t+f(k_t).\end{aligned}$$

完全分配から導出してもよい．　□

■p.24　位相図についてコメントを少しだけ．

- $\Delta k_{t+1}=f(k_t)-\delta k_t-c_t=0$ は f の凹性から山型となる．

■p.27　定常状態における水準は:

$$f'(k^*)=\frac{1}{\beta}-1+\delta,\quad c^*=-\delta k^*+f(k^*)$$

Proof. $c_{t+1} = c_t = c$, $k_{t+1} = k_t = k^*$ より:

$$1 = \beta(1 + f'(k^*) - \delta),\ c^* + k^* = (1-\delta)k^* + f(k^*)$$

変形することによって題意の式が示される. □

■p.24　$\Delta k_{t+1} = 0$ での最適条件より, 黄金律は:

$$f'(k^g) = \delta.$$

定義: 黄金律 (Ramsey Model)

$\Delta k_{t+1} = 0$ での一人当たり消費 c を最大化する k.

Proof. $\Delta k_{t+1} = 0$ における最適条件:

$$c = -\delta k + f(k),$$

について一階条件をとることによって得る. □

$k^g > k^*$ であるから, 黄金律は定常状態にない.

■p.38　生涯予算制約式は:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} + \lim_{T\to\infty} \frac{k_{T+1}}{\prod_{s=0}^{T}(1+r_s)} = k_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)}.$$

Proof. 家計の期間予算制約式は

$$c_t + k_{t+1} = (1+r_t)k_t + w_t$$

$$k_{t+1} - (1+r_t)k_t = -c_t + w_t$$

について, 両辺を $\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)$ で割ると

$$\frac{k_{t+1}}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} - \frac{k_t}{\prod_{s=0}^{t-1}(1+r_s)} = \frac{-c_t + w_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)}$$

これを $t = 0$ から T まで足し合わせると,

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} = k_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} - \frac{k_{T+1}}{\prod_{s=0}^{T}(1+r_s)}.$$

$T \to \infty$ の極限を取ると, 生涯予算制約式が得られる. □

■p.37　No-Ponzi 条件は, 無限の債務先送りを禁止する実現可能性条件.

定義: No-Ponzi Condition

$$\lim_{T\to\infty} \frac{k_{T+1}}{\prod_{s=0}^{T}(1+r_s)} \geq 0.$$

一方で横断性条件は, 家計が資本を無限に積み上げたり, 消費を永遠に先送りしたりする非最適経路を排除する条件.

定義: 横断性条件

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T u'(c_T)\, k_{T+1} = 0.$$

オイラー方程式だけでは複数の経路が許容されるが, TVC によって最適な経路のみが選択される.

定理: TVC $\Longrightarrow$ No-Ponzi

EE の下で, TVC が満たされれば No-Ponzi 条件も満たされる.

Proof. オイラー方程式を反復すると

$$u'(c_T) = \frac{u'(c_0)}{\beta^T \prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}, \quad \beta^T u'(c_T) = \frac{u'(c_0)}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}.$$

が得られる. これを横断性条件に代入すると

$$\lim_{T\to\infty} \frac{u'(c_0)}{\prod_{s=1}^{T}(1+r_s)}\, k_{T+1} = 0.$$

$u'(c_0) > 0$ かつ $(1+r_0) > 0$ であるから,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{k_{T+1}}{\prod_{s=0}^{T}(1+r_s)} = 0$$

が従う. これは No-Ponzi Condition ゆえ題意は示された. □

2.2　Ramsey Model 2

■p.16　社会計画者問題の位置づけを明確にするため, まず分権経済との対比を行う. これまでの分析では, 家計と企業がそれぞれ最適化を行い, 市場を通じて資源配分が決定されていた. これに対し, 本節では単一の意思決定主体が経済全体の資源配分を直接決定する状況を考える.

定義: 社会計画者

与えられた技術・人口・初期資本の下, 代表的家計の効用を最大化するように, 資源制約のみを考慮して $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ を直接選択する主体.

■p.17　社会計画者は要素価格を介さず, 経済全体の実現可能集合の中から最適な配分を選択する. このとき, 制約条件は財・サービス市場における資源制約のみで与えられる:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t, \quad k_0 > 0 \text{ given}.$$

社会計画者問題のラグランジアンは:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big[u(c_t) + \lambda_t \big(f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1} \big) \Big]$$

■p.19　最適条件は一階条件から得られ:

$$u'(c_t) = \beta(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta)\, u'(c_{t+1}),$$
$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t.$$

Proof. ラグランジアン $\mathcal{L}$ を各変数で偏微分すると,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t \big(u'(c_t) - \lambda_t \big) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = \beta^t \big(-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} (f'(k_{t+1}) + 1 - \delta) \big) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = \beta^t \big(f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1} \big) = 0.$$

第一式より $\lambda_t = u'(c_t)$. これを第二式に代入すると,

$$u'(c_t) = \beta(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta)\, u'(c_{t+1})$$

を得る. 第三式は各期の資源制約そのものである. □

定理: 厚生経済学の第一基本定理

分権経済における競争均衡配分は, 社会計画者問題の解と一致する. したがって, 競争均衡における資源配分はパレート効率的.

2.3 Shooting Algorithm

■p.11　オイラー方程式と予算制約式に加えて、**横断性条件を組み込むため**に、内生的に決まる消費と資本の経路が定常状態に収束するにように、c_0 を選択するためのアルゴリズム.

■大まかな流れ

1. (定常状態 (k^*, c^*) を解析的に求める.)
2. 初期資本 k_0 を与える (一般には $0 < k_0 < k^*$).
3. 探索区間 $[c_L, c_H]$ を設定 ($c_L = 10^{-8}$, $c_H = f(k_0) - \delta k_0$).
4. $c_0 = \frac{1}{2}(c_L + c_H)$ を定め, EE・資本遷移式から $\{c_t, k_t\}$ を計算.
5. 経路が収束すれば c_0 を採用し, 発散すれば探索区間を更新.

コードで重要なのは以下の部分か:

```
# 発散しない場合: 定常状態と比較
# k が小さくなった -> c0 が大きすぎる
if last_k < k_star:
    high = c0
# k が大きくなった -> c0 が小さすぎる
else:
    low = c0

# 二分点を更新して次へ
c0 = 0.5 * (low + high)
```

2.4 Dynamic Programming

■p.8　**社会計画者** は各期の選択が将来に影響する問題に直面しており, 最適化問題を再帰的に書き直せる. 動的計画法とは, 全期間の最適化問題を各期に分解 (∵ 最適性の原理) し, 再帰的に解く手法.

■p.9　動的計画法を用いるために価値関数を導入する.

定義: 価値関数

t 期に資本 k_t を保有するときに達成可能な最大効用:

$$V_t(k_t) \equiv \max_{\{c_\tau, k_{\tau+1}\}_{\tau=t}^T} \sum_{\tau=t}^{T} \beta^{\tau-t} u(c_\tau)$$

■p.10　VF を用いて社会計画者問題は再帰的な形に書き直せる.

ベルマン方程式 (有限期間)

価値関数は次の再帰関係を満たす:

$$V_t(k_t) = \max_{k_{t+1}} \Big\{ u\big(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\big) + \beta V_{t+1}(k_{t+1}) \Big\}.$$

ここで, k_t は状態変数, k_{t+1} は制御変数である.

有限期間モデルでは, 終端条件を出発点として, 後ろ向き推論で価値関数と政策関数を求められる. 最終期での $V_{T+1}(k_{T+1}) \equiv 0$ から:

$$k^*_{T+1} = 0, \quad V_T(k_T) = u(f(k_T) + (1-\delta)k_T),$$

が求まり, これを用いて

$$V_{T-1},\, k_T = g_{T-1}(k_{T-1}) \implies, \ldots, \implies V_0,\, k_1 = g_0(k_0).$$

を順に計算できる.

■p.16　無限期間モデルでは時間は明示的に現れなくなる.

ベルマン方程式 (無限期間)

$$V(k) = \max_{k'} \Big\{ u\big(f(k) + (1-\delta)k - k'\big) + \beta V(k') \Big\},$$

$0 < \beta < 1$ と凹性の仮定により, 問題は適切に定義される.

■p.18　ベルマン方程式からオイラー方程式を導出できる.

Proof. ベルマン方程式

$$V(k) = \max_{k'} \{u(c) + \beta V(k')\}, \quad c = f(k) + (1-\delta)k - k'$$

について, 最適な $k' = g(k)$ に関する一階条件は

$$u'(c) = \beta V'(k').$$

一方, 包絡線定理より,

$$V'(k) = \frac{\partial V(k,k')}{\partial k} = (1 - \delta + f'(k))u'(c),$$
$$V'(k') = (1 - \delta + f'(k'))u'(c').$$

が成り立つ. これを一階条件に代入することで,

$$u'(c) = \beta(1 - \delta + f'(k'))u'(c')$$

を得る. これはオイラー方程式である. □

■p.22　解析解が得られない場合, ベルマン方程式を数値的に解く.

価値関数反復法

任意の初期推測 $V^{(0)}$ を与え, 以下を繰り返し計算する.

$$V^{(1)}(k) = \max_{k'} \{u(c) + \beta V^{(0)}(k')\}$$

縮小写像の性質 により, $V^{(n)}$ は真の価値関数に収束する.

■p.23　実装では, 変数を有限個のグリッドに離散化する.

■p.31　無限期間社会計画者問題を

$$u(c) = \log c, \quad f(k) = k^\alpha, \quad \delta = 1$$

と特定化する. この場合, 解析的な解が存在することが知られている:

政策関数:

$$k' = g(k) = \alpha\beta k^\alpha$$

価値関数:

$$V(k) = A + B \log k,$$
$$\text{where} \quad A = \frac{1}{1-\beta}\left[\log(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log(\alpha\beta)\right],\ B = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

Proof. 一般の社会計画者問題におけるオイラー方程式は

$$u'(c_t) = \beta(1 - \delta + f'(k_{t+1}))u'(c_{t+1})$$

である. ここで

$$u'(c) = \frac{1}{c}, \quad f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}, \quad \delta = 1$$

を代入すると,

$$\frac{1}{c_t} = \beta\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} \frac{1}{c_{t+1}}$$

を得る. 資源制約より

$$c_t = k_t^\alpha - k_{t+1}.$$

政策関数の形状を

$$k_{t+1} = g(k_t) = \phi k_t^\alpha$$

と仮定する. このとき

$$c_t = (1-\phi)k_t^\alpha, \quad c_{t+1} = (1-\phi)k_{t+1}^\alpha$$

であり,

$$\frac{1}{(1-\phi)k_t^\alpha} = \beta\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\frac{1}{(1-\phi)k_{t+1}^\alpha}$$

となる．さらに $k_{t+1} = \phi k_t^\alpha$ を代入すると

$$\frac{1}{k_t^\alpha} = \beta\alpha\frac{1}{k_{t+1}} = \beta\alpha\frac{1}{\phi k_t^\alpha} \iff \phi = \alpha\beta$$

が従う．したがって, 最適政策関数の候補として

$$k_{t+1} = g(k_t) = \alpha\beta k_t^\alpha$$

がある．逆に, この政策関数はオイラー方程式と資源制約を満たす．
次に価値関数を導出する．$V(k)$ が対数形

$$V(k) = A + B\log k$$

で表されると仮定する．これをベルマン方程式に代入すると

$$\begin{aligned}V(k) &= \log\big((1-\alpha\beta)k^\alpha\big) + \beta\big[A + B\log(\alpha\beta k^\alpha)\big]\\ &= \log(1-\alpha\beta) + \alpha\log k + \beta A + \beta B\log(\alpha\beta) + \alpha\beta B\log k.\end{aligned}$$

係数比較より,

$$B = \alpha + \alpha\beta B \iff B = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}&A = \log(1-\alpha\beta) + \beta A + \beta B\log(\alpha\beta)\\ \iff\ & A = \frac{1}{1-\beta}\left[\log(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log(\alpha\beta)\right].\end{aligned}$$

以上より, 価値関数は

$$V(k) = A + B\log k$$

で与えられ, 係数 A, B は上記の通りである． □

3 Overlapping Generation Model

3.1 OLG Model 1

■p.7 厚生経済学の第一基本定理は，競争均衡における資源配分はパレート効率的であると主張する．OLG モデルでは競争均衡がパレート非効率となり得る．

■p.8 設定は以下の通り:

- 家計 i, 財 j は可算無限個 $i, j \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- 家計 i の効用は $u_i = c_i^i + c_i^{i+1}$, $c_j^i \geq 0$: 家計 i の財 j の消費量.
- 初期保有量:

$$\omega_i^j = \begin{cases} 1 & (j = i),\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

- 価格は財 0 を基準化： $p_0 = 1$.

■家計の予算制約と最適化 家計 i は保有財を売却して所得を得る:

$$I_i = p_i \cdot 1 = p_i, \quad p_i c_i^i + p_{i+1}c_i^{i+1} = p_i.$$

最も安い財を最大限消費することが最適.

命題 1

価格 $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{1}$ は均衡価格で，自給自足配分 $\bar{x}$ と共に競争均衡となる.

Proof. $p_j = 1$ のとき，各家計の所得は $I_i = 1$．予算制約は

$$c_i^i + c_i^{i+1} = 1.$$

効用は $c_i^i + c_i^{i+1}$ であり，任意の配分で効用は常に 1 になる．よって自分の保有する財をそのまま消費する配分

$$c_i^i = 1, \quad c_i^{i+1} = 0$$

は予算を満たし効用最大化である．
市場一掃について，任意の財 j はちょうど家計 j が 1 単位保有しており，家計 j がその財を消費しているため需要と供給が一致する．従って $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{x})$ は競争均衡である． □

■p.10 自給自足均衡は均衡であるが，パレート効率的とは限らない.

命題 2

自給自足の競争均衡は非効率 ($\tilde{x}$ で支配可能).

以下の配分 $\tilde{x}$ を考える（ある固定の i_0 を選ぶ）:
- 家計 $i < i_0$: 財 i を 1 単位消費.
- 家計 $i = i_0$: 財 i, $i+1$ を各 1 単位消費（合計 2 単位).
- 家計 $i > i_0$: 財 $i+1$ を 1 単位消費.

市場一掃の確認：
- $j < i_0$: j が保有し家計 j が消費する（供給 1，消費 1).
- $j = i_0$: i_0 が保有し家計 i_0 が消費（供給 1，消費 1).
- $j > i_0$: $j+1$ が保有し家計 j が消費（供給 1，消費 1).

Proof. 自給自足配分 x に対して $\tilde{x}$ を比較する：
- $i < i_0$: $\tilde{x}$ で $c_i^i = 1$, $u_i(\tilde{x}) = 1 = u_i(x)$.
- $i = i_0$: $\tilde{x}$ で $c_{i_0}^{i_0} = c_{i_0}^{i_0+1} = 1$, $u_{i_0}(\tilde{x}) = 2 > 1 = u_{i_0}(x)$.
- $i > i_0$: $\tilde{x}$ で $c_i^{i+1} = 1$, $u_i(\tilde{x}) = 1 = u_i(x)$.

よって x はパレート非効率. □

■p.11 初期賦存を適切に再配分すれば，$\tilde{x}$ が競争均衡配分になる.

命題 3

以下の $\tilde{\omega}$ では $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{1}$ の下で配分 $\tilde{x}$ は競争均衡として実現される.

再配分された $\tilde{\omega}$ を次のように定める：
- 家計 $i < i_0$: 財 i を 1 単位保有.
- 家計 $i = i_0$: 財 i, $i+1$ を各 1 単位保有（合計 2 単位).
- 家計 $i > i_0$: 財 $i+1$ を 1 単位保有.

Proof. $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{1}$ とすると各家計の所得は保有単位数に等しい：
- $i = i_0$: $I_i = 2$, 予算制約下で $c_{i_0}^{i_0} = c_{i_0}^{i_0+1} = 1$ は最適.
- $i < i_0$: $I_i = 1$, $c_i^i = 1$ が最適.
- $i > i_0$: $I_i = 1$, $c_i^{i+1} = 1$ が最適.

市場一掃は先述の議論で成立し $(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{x})$ は競争均衡. □

第二定理の限定的な形だが, OLG は不完全性から一般的定理は不成立.

■p.15 企業の利潤最大化は今までと同様.

■p.16 各期 t に生まれる家計は 2 期間生存し，若年期 (t 期) と老年期 ($t+1$ 期) で異なる消費を行う．若年期の予算制約は:

$$c_t + s_t = w_t, \qquad d_{t+1} = R_{t+1}s_t.$$

減耗率を $\delta = 1$ とし，$1 + r_t \coloneqq R_t$ とおく．生涯効用は:

$$U_t = u(c_t) + \beta u(d_{t+1}).$$

最適化によりオイラー方程式が得られる:

$$u'(c_t) = \beta R_{t+1}u'(d_{t+1}).$$

Proof. 家計の問題は

$$\max_{c_t,s_t}\ u(c_t)+\beta u(R_{t+1}s_t) \qquad \text{s.t. } c_t+s_t=w_t.$$

制約から $c_t=w_t-s_t$ を代入し，目的関数を

$$u(w_t-s_t)+\beta u(R_{t+1}s_t)$$

と書く。これを s_t について微分すると

$$-u'(w_t-s_t)+\beta R_{t+1}u'(R_{t+1}s_t)=0.$$

ここで $d_{t+1}=R_{t+1}s_t$ であるから，題意の式が得られる。 □

■p.20　貯蓄は陰関数の形で次のように表される:

$$s_t=s(w_t,R_{t+1}).$$

Proof. 上述の最適化条件は

$$u'(w_t-s_t)=\beta R_{t+1}u'(R_{t+1}s_t).$$

左辺は w_t と s_t の関数，右辺は R_{t+1} と s_t の関数であり，

$$F(s_t;w_t,R_{t+1})\coloneqq u'(w_t-s_t)-\beta R_{t+1}u'(R_{t+1}s_t)$$

とみなせる。通常の仮定（$u'>0,\ u''<0$）の下で F は s_t について単調に増加し，陰関数として表現が可能. □

■p.21　世代 t の総貯蓄は

$$S_t=s_tL_t.$$

資本蓄積式 $K_{t+1}=(1-\delta)K_t+I_t,\ I_t=S_t,\ \delta=1$ を用いると:

$$K_{t+1}=S_t=s_tL_t.$$

1 人あたり資本 $k_t=K_t/L_t$ を用いると,

$$k_{t+1}=\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}=\frac{s_tL_t}{(1+n)L_t}=\frac{s(w_t,R_{t+1})}{1+n}.$$

■p.22　OLG での競争均衡は以下で定義される:

定義: 1 人あたりの競争均衡 (OLG)

OLG の競争均衡は $\{k_t,c_t,d_t,w_t,R_t\}_{t=0}^{\infty}$ で構成され以下を満たす:

1. $\{w_t,R_t\}$ は生産関数と利潤最大化条件より定まる:

$$w_t=f(k_t)-k_tf'(k_t),\quad R_t=f'(k_t).$$

2. $\{c_t,d_t\}$ は予算制約とオイラー方程式より定まる:

$$c_t+s_t=w_t,\quad d_{t+1}=R_{t+1}s_t,\quad u'(c_t)=\beta R_{t+1}u'(d_{t+1}).$$

3. 資本労働比率はにより更新される：

$$k_{t+1}=s(w_t,R_{t+1})/(1+n).$$

■p.23　基本方程式は:

$$k_{t+1}=\frac{s\big(f(k_t)-k_tf'(k_t),\ f'(k_{t+1})\big)}{1+n}.$$

定常状態は $k_{t+1}=k_t=k^*$ を満たし,

$$k^*=\frac{s\big(f(k^*)-k^*f'(k^*),\ f'(k^*)\big)}{1+n}.$$

■p.24　$s(w_t,R_{t+1})$ が非線形ゆえ, 定常状態は一般に一意に決まらない.

■p.25　log 型効用と Cobb–Douglas 生産関数を考える：

$$U_t=\log c_t+\beta\log d_{t+1},\qquad f(k)=k^\alpha,\ \alpha\in(0,1).$$

このとき, 基本方程式は以下の通り:

$$k_{t+1}=\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\,k_t^\alpha$$

Proof. 要素価格は

$$w_t=f(k_t)-k_tf'(k_t)=(1-\alpha)k_t^\alpha,\qquad R_t=f'(k_t)=\alpha k_t^{\alpha-1}.$$

家計のオイラー方程式は:

$$\frac{1}{c_t}=\beta R_{t+1}\frac{1}{d_{t+1}}\quad\Longrightarrow\quad d_{t+1}=\beta R_{t+1}c_t.$$

予算制約 $c_t+s_t=w_t,\ d_{t+1}=R_{t+1}s_t$ を組み合わせると:

$$R_{t+1}s_t=\beta R_{t+1}c_t\quad\Longrightarrow\quad s_t=\beta c_t.$$

したがって

$$c_t=\frac{1}{1+\beta}w_t=\frac{(1-\alpha)k_t^\alpha}{1+\beta},\quad s_t=\frac{\beta}{1+\beta}w_t=\frac{\beta(1-\alpha)k_t^\alpha}{1+\beta}.$$

$k_{t+1}=s_t/(1+n)$ であり, 代入により題意の式を得る. □

■p.26　定常状態 $k_{t+1}=k_t=k^*$ は

$$k^*=\left(\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Proof. $k_{t+1}=k_t=k^*$ を基本方程式に代入するだけである：

$$k^*=\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}(k^*)^\alpha.$$

両辺を $k^{*\alpha}$ で割れば結果を得る。 □

■p.28　黄金律は以下で与えられる

$$f'(k^g)=1+n,\quad k^g=\left(\frac{\alpha}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Proof. 財市場均衡 $Y_t=C_t+I_t$ を 1 人あたりに直すと

$$F(K_t,L_t)=c_tL_t+d_{t+1}L_{t-1}+K_{t+1}.$$

$$f(k_t)=c_t+\frac{d_{t+1}}{1+n}+(1+n)k_{t+1}.$$

定常状態 $k_{t+1}=k_t=k$ のもとでは

$$f(k)=c+\frac{d}{1+n}+(1+n)k.$$

黄金律は定常状態で合計消費を最大化する k であり:

$$\max_{k\ge 0}\{f(k)-(1+n)k\}.$$

一階条件より得られる. □

■p.29　競争均衡の定常資本 k^* と黄金律資本 k^g を比較する:

$$k^*>k^g\quad\Longleftrightarrow\quad f'(k^*)<f'(k^g)\quad\Longleftrightarrow\quad r<n.$$

この場合，資本を減らすことで全世代の消費を同時に増加させられるため，競争均衡はパレート非効率である（**動学的非効率**）.

■p.30　過剰蓄積条件 $k^* > k^g$ は

$$\frac{\beta}{1+\beta} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Proof. log 型効用・Cobb–Douglas 生産関数のもとでは

$$k^* = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad k^g = \left(\frac{\alpha}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

過剰蓄積条件 $k^* > k^g$ と単調性より，

$$k^* > k^g \iff \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} > \frac{\alpha}{1+n}.$$

両辺を $(1+n)$ で割れば主張が従う。 □

■p.30　資本過剰蓄積が動学的非効率性の原因である．老年期の消費が制度的に保障されれば (e.g. 年金制度) 過剰な貯蓄インセンティブが和らぎ，動学的非効率性の改善が可能となる．

3.2　Ricardian Equivalence

■p.5　政府支出の財源を一括税や公債のどのような組合せで行っても，ある条件下では均衡配分に影響を与えない．

定義: Ricardian Equivalence

政府支出 $\{G_t\}_{t=0}^{\infty}$ が所与であるとき，以下が成立する状況:

1. 財源調達方法は均衡経路に影響がない (中立命題)
2. 税と公債のタイミングで家計行動は不変 (等価命題)

■**前提（簡潔化）**　以下を仮定する。

仮定: Ricardian Equivalence の仮定

1. 完全資本市場 (家計と政府は同一の r_t を利用できる)
2. 家計と政府の時間的視野の一致 (家計と政府の割引因子が一致)
3. 政府は予算制約を満たす
4. リスクは存在しない
5. 徴税手段は一括税

3.2.1　Ramsey Model - 政府のある場合

■p.10　企業の最適化問題は同一．

■p.11　政府は $\{G_t\}_{t=0}^{\infty}$ を所与として，$\{T_t, B_t\}_{t=0}^{\infty}$ を選択する．簡単化のため $L_t = L$ として，政府の期間予算制約（1 人当たり）は:

$$B_{t+1} - B_t + T_t = G_t + r_t B_t,$$
$$\tau_t + b_{t+1} = (1+r_t)b_t + g_t.$$

■p.13　家計は，可処分所得を効用最大のため，消費と資産に分ける．資産は $A_t = K_t + B_t$ に分けられ，家計の期間予算制約（1 人当たり）は:

$$c_t + a_{t+1} = (1+r_t)a_t + w_t - \tau_t,$$
$$c_t + k_{t+1} + b_{t+1} = (1+r_t)(k_t+b_t) + w_t - \tau_t.$$

オイラー方程式は以下で与えられる: [*1]

$$u'(c_t) = \beta(1+r_{t+1})u'(c_{t+1}).$$

■p.16　中立命題を確認する．競争均衡における経路は一括税と公債に依存しない、すなわち、政府の財源調達方法は均衡経路に影響を与えない．

Proof. 企業の最適条件とオイラー方程式より:

$$u'(c_t) = \beta(1+f'(k_{t+1})-\delta)u'(c_{t+1}).$$

企業の最適条件，家計・政府の予算制約式より:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} + b_{t+1} + \tau_t &= (1+r_t)(k_t+b_t) + w_t, \\ c_t + k_{t+1} + (1+R-\delta)b_t + g_t &= (1+R-\delta)(k_t+b_t) + w_t, \\ c_t + k_{t+1} + g_t &= (1+f'(k_t)-\delta)k_t + w_t, \\ c_t + k_{t+1} + g_t &= (1-\delta)k_t + f(k_t). \end{aligned}$$

競争均衡経路は τ, b に依存せず，題意は満たされた． □

■p.19　等価命題を確認する．家計の生涯予算制約と政府の生涯予算制約を用いると，家計の可処分所得の割引現在価値（および消費選択）は，政府の資金調達方法（$\{\tau_t\}, \{b_t\}$）には依存しない．

Proof. 家計の生涯予算制約を利子率で割引して合計すると（TVC により端項は消えると仮定）:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} = a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t - \tau_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)}.$$

一方，政府の生涯予算制約（No-Ponzi 条件により端項消去）から

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\tau_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} = b_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)}.$$

右辺の τ_t の割引和を家計の生涯制約に代入すると，

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} = (a_0 - b_0) + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t - g_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)}.$$

したがって，家計の消費の割引現在価値は k_0 と $\{w_t - g_t\}$ の割引現在価値だけに依存し，税と公債の時点配分には依存しない． □

3.2.2　OLG Model - 政府のある場合

OLG では各世代は次世代の利益のみを考えるため，家計と政府の時間的視野が一致しておらず，OLG では Ricardian Equicalence が崩れる．

■p.22　基本的には Ramsey Model with Government Debt と同様の仮定を用いる．企業の利潤最大化より要素価格は

$$R_t = r_t + \delta = f'(k_t), \quad w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t),$$

であり，注意として $r_t = R_t - \delta$ が成り立つ．政府の期間予算制約は

$$\tau_t + b_{t+1} = (1+r_t)b_t + g_t.$$

各期に新世代が生まれ，各家計は 2 期間生存，$L_t = L$．家計の効用は:

$$u(c_t) + \beta u(d_{t+1}), \qquad \beta \in (0,1),$$

で，$u' > 0$，$u'' < 0$ を仮定する。若年期・老年期の予算制約は

$$c_t + s_t = w_t - \tau_t, \quad d_{t+1} = (1+r_{t+1})s_t.$$

家計の最適化より一階条件（オイラー方程式）は

$$u'(c_t) = \beta(1+r_{t+1})u'(d_{t+1}).$$

Proof. 若年期の選択変数は s_t であり，制約を代入して

$$\max_{s_t}\ u(w_t - \tau_t - s_t) + \beta u((1+r_{t+1})s_t)$$

の一階条件を取れば得られる。 □

[*1] 操作変数は $\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ で，変数を置き換えることを除き導出は同じ．

よって
$$s_t = s\bigl(w_t,\ r_{t+1},\ \tau_t\bigr).$$
増税に対して s_t は減少する (中立性が崩れる).

■p.28　$u(x) = \log x,\ f(k) = k^{\alpha}, \quad \alpha, \beta \in (0,1)$ とすると:
$$w_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}, \quad r_{t+1} = f'(k_{t+1}) - \delta = \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta.$$
オイラー方程式は
$$\frac{1}{w_t - \tau_t - s_t} = \beta(1 + r_{t+1})\frac{1}{(1+r_{t+1})s_t} = \frac{\beta}{s_t},$$
となるので代数処理により
$$(1+\beta)s_t = \beta(w_t - \tau_t) \quad \Longrightarrow \quad s_t = \frac{\beta(w_t - \tau_t)}{1+\beta} = \frac{\beta((1-\alpha)k_t^{\alpha} - \tau_t)}{1+\beta}.$$
■p.29　総貯蓄は $K_{t+1} + B_{t+1} = A_{t+1} = s_t L$, [*2] 一人当たりは:
$$k_{t+1} + b_{t+1} = s_t.$$
したがって競争均衡は次の三式から求まる：
$$r_t = f'(k_t) - \delta, \qquad w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t),$$
$$\tau_t + b_{t+1} = (1 + r_t)b_t + g_t,$$
$$k_{t+1} + b_{t+1} = s\bigl(f(k_t) - k_t f'(k_t),\ f'(k_{t+1}) - \delta,\ \tau_t\bigr).$$
■p.31　定常状態では，均衡構成要素と外生変数が一定で, 政府制約は:
$$\tau + b^* = (1 + f'(k^*) - \delta)b^* + g$$
より変形して
$$b^* = \frac{\tau - g}{f'(k^*) - \delta}.$$
一方，家計貯蓄の定常値と資産集合条件を合わせると
$$k^* + b^* = s\bigl(f(k^*) - k^* f'(k^*),\ f'(k^*) - \delta,\ \tau\bigr).$$
これらを結合すると
$$k^* + \frac{\tau - g}{f'(k^*) - \delta} = s\bigl(f(k^*) - k^* f'(k^*),\ f'(k^*) - \delta,\ \tau\bigr).$$
定常状態の値は、政府の財源調達方法に依存する.

3.3　OLG 3

3.4　OLG 4

[*2] 老年期の資産は, 若年期の貯蓄であるため.