

# 測度論的確率論

前川 大空 \*

2025 年 9 月 8 日

## 1 確率モデルを作るまで

### 1.1 事象や観測を表現するための数学的記述

■p.5  $C([0, 1])$ :  $[0, 1]$  上の連続関数全体.  $D([0, T])$  は右連続で左極限を持つ, カドラグ関数全体を指す.

■p.5 実用上の標本空間: 多くの統計的問題 (確率過程を除いて) では  $\Omega = \mathbb{R}^d$  と置けば問題ない.

■p.6 語の区別:  $\omega$  は根元事象・標本,  $\Omega$  は標本空間, 標本の集合で確率を測る対象となるのが事象.

■p.6 事象の定義:  $\sigma$ -加法族  $\mathcal{F}$  が確率を考えるために必要であり, この元が事象として定義される. 有限加法族  $\mathcal{F}$  が有限個の元 (要素) しか持たないとき,  $\mathcal{F}$  は自動的に  $\sigma$ -加法族となる.

■p.7 自明な  $\sigma$ -加法族:  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  のこと.

■p.7 可測空間: Def 1.1.11. の  $(\Omega, \mathcal{F})$  が確率モデルには必要.  $\mathcal{F}$  は確率を知りたい範囲を考慮して設定する必要があり, 一方で  $2^\Omega$  は集合が大きすぎて不適切. ボレル集合体などが実用的な  $\sigma$ -加法族として知られる.

■p.8 ボレル集合体 まず, 区間の集合  $\mathcal{I}$  を以下のように定義する:

$$\mathcal{I} \equiv \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\} \quad (1.1)$$

$b = \infty$  の時は  $(a, b] = (a, \infty)$  と考えるので標本空間は  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{I}$  を用いて区間塊  $\mathcal{A}$  は以下のように定義される:

$$\mathcal{A} \equiv \{\cup_{k=1}^m I_k \mid m \in \mathbb{N}, I_i \cap I_j = \emptyset (1 \leq i < j \leq m), I_i, I_j \in \mathcal{I}\} \quad (1.2)$$

これは有限加法族だが, 無限個の元を持つため  $\sigma$ -加法族とは限らない.

*Proof.* 有限個の互いに素な  $(a, b]$  の和集合で  $\mathcal{A}$  の元は定義される. まず  $\emptyset \in \mathcal{A}$  である ( $I_k = \emptyset \forall k$  とすればよい). また  $A = \cup_{k=1}^m I_k \in \mathcal{A}$  の補集合  $A^c$  を考えると,  $\Omega = \mathbb{R}$  を  $I_k$  で分割した区間の有限個の和集合として表せ,  $A^c \in \mathcal{A}$  が従う. 最後に  $A = \cup_{i=1}^m I_i, B = \cup_{j=1}^n J_j \in \mathcal{A}$  を考える.  $I_i, J_j$  の端点全体を集めると有限集合  $E$  が得られる.  $E$  で, 実直線は有限個の互いに素な区間  $(\alpha, \beta]$  に分割される. 各  $(\alpha, \beta]$  は  $A, B$  との包含関係で判別できるから,  $A \cup B$  も有限個の互いに素な  $(\alpha, \beta]$  の和集合として表せ,  $A \cup B \in \mathcal{A}$ . したがって  $\mathcal{A}$  は有限加法族である.  $\square$

---

\* 一橋大学経済学部 4 年, 五年一貫専修コース公共経済プログラム

この  $\mathcal{A}$  から生成された最小の  $\sigma$ -加法族を  $\mathbb{R}$  上のボレル集合族として:

$$\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A})$$

と記載する. 構成の仕方としては **Thm 1.1.13.** のように,  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$  とする方法も認められる.

*Proof.* 未確認.

□

■p.10 注意 1.1.14. 無理数全体の集合は非加算集合.

■p.11  $d$  次元可測空間:  $\Omega = \mathbb{R}^d$  の場合は,  $d$  次元ボレル集合体  $\mathcal{B}_d$  を利用して  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$  が利用される.

■演習 1.2: 未確認.

## 1.2 確率変数と確率

■p.12 確率変数: 確率変数  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  は, 根元事象から観測への対応といえる. 可測空間のみで定義可能.

**Def 1.2.1. 確率変数:**

可測空間  $(\Omega, \mathcal{F})$  に対し, 写像  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  が, 任意の  $B \in \mathcal{B}_d$  に対して:

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad (1.3)$$

を満たすとき,  $X$  を  $d$  次元確率変数という.

■p.12 演習 3: 未確認. 計量経済学のための数学にも対応する定理があったはず.

■p.13 可測関数: 計量経済学のための数学では説明が不足しており, これを用いる証明 (記憶している限りでは **Thm 9.4**) に苦戦した記憶. 一応 **Def 9.4** は関連概念ではあるはず. <sup>\*1</sup>

**Def 1.2.4. 可測関数:**

可測空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  から  $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$  への写像  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  が, 任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対して:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

を満たすとき,  $f$  は  $\mathcal{X}$  上の  $\mathcal{F}$ -可測関数, あるいは単に  $\mathcal{F}$ -可測 と呼ぶ. 特に  $d$  次元可測空間  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$  を  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  として考えるならば,  $f$  を単に可測関数と呼ぶ.

可測関数の定義において行先の  $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$  はとくに限定されない? **Thm 1.2.5.** の証明での『 $Y$  が  $\mathcal{F}/\mathcal{B}_k$ -可測であることを示せばよい』との記述は, **Def 1.2.1.** で考慮しているように,  $k$  次元確率変数が  $\sigma$ -加法族として  $\mathcal{B}_k$  を念頭に置いているからだろう. 可測関数の定義は **Def 1.2.1.** と対応する形であることから, 確率変数とは「 $\Omega$  上の  $\mathcal{F}$ -可測関数」であり,  $\mathcal{F}$  の事象にのみ確率は付与される (確率測度の定義域が  $\mathcal{F}$  に限定される) こととなる.

<sup>\*1</sup> 定義・定理番号の後ろに点がないのが『計量経済学のための数学』, 点があるのが『統計学への確率論』です. DDR 補足資料の付録 C に『計量経済学のための数学』の主要なステートメントは記載しているのでご確認ください.

**Thm 1.2.5. 合成関数と可測性:** —

$X$  を  $d$  次元確率変数とすると、任意の  $((\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$  からの) 可測関数  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  に対して、 $Y \equiv f(X)$  は  $k$  次元確率変数である。

■p.13 頻度論的確率論: 高校でやる確率みたいなやつ。数え上げで確率を定義している。

■p.17 確率測度: Def 1.2.9. の完全加法性 ( $\sigma$ -加法性) が要求される。Def 1.2.6. の有限加法性は不十分。

■p.17 例 1.2.8.: 無限個の区間を考える必要があることが問題だったため、 $\sigma$ -加法族を考えている。不具合のない (集合として大きすぎない) 対処としてボレル集合族  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$  を使っている。

■p.18 ホップの拡張定理: 都合のいい確率  $\mathbb{P}$  は必ずただ一つ存在するという結論。

**Thm 1.2.12. ホップの拡張定理:** —

$\mathcal{A}$  を  $\Omega$  の集合からなる有限加法族とし、 $\mathbb{P}^*$  を  $\mathcal{A}$  上の有限加法的確率 (ref: Def 1.2.6.) とする。このとき、以下の (1), (2) は同値である。

1.  $\sigma(\mathcal{A})$  上に  $\mathbb{P}^*$  の拡張  $\mathbb{P}$  が存在して一意である。
2.  $\mathbb{P}^*$  は  $\sigma(\mathcal{A})$  上で  $\sigma$ -加法的である。

■p.19 例 1.2.8. の続き: 未確認。

■p.23 確率測度の連続性: 大事なこと言ってそうだけどありがたみが分からない。交換可能なことを確かめればよい、というか Thm 1.2.17. の (1.9) 式か、(1.10) 式の成立を確かめればよいということ？

■p.24 Thm 1.2.20.: (1) の証明を未確認。