末石計量 補足資料

前川 大空 *

2025 年 5 月 24 日

1 線形回帰と OLS

1.1 単回帰モデル

■p.3 『平均独立は独立性を示唆しない』 まず, 確率変数の独立性の仮定を確認する.

Def: 確率変数の独立性

確率変数 X, Y が $P(XY) = P(X)P(Y)$ ならば, X, Y は独立であるという.

平均独立の仮定より以下を得る:

$$\mathbb{E}[u_i] \overset{\text{LIE}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_i|X_i]] \overset{\text{A2}}{=} \mathbb{E}[0] = 0$$
$$\therefore \mathbb{E}[u_i] = \mathbb{E}[u_i|X_i]$$

また, 以下の関係式も成立する:

$$\implies Cov[u_i X_i] = \mathbb{E}[u_i X_i] - \mathbb{E}[u_i]\mathbb{E}[X_i] \overset{\text{LIE}}{=} \mathbb{E}[X_i \mathbb{E}[u_i|X_i]] - \mathbb{E}[u_i]\mathbb{E}[X_i] \overset{\text{A2}}{=} 0$$
$$\mathbb{E}[u_i X_i] = \mathbb{E}[u_i]\mathbb{E}[X_i]$$

これは独立性の必要条件に過ぎず, 誤差項と説明変数の**独立性を意味しない**. 仮定は平均が X に依存しないことを意味するのみで, **不均一分散等の可能性は排除しない**.

■p.3 単回帰モデルの仮定 1 単回帰モデルの仮定と誤差項の関係について考えたい.

単回帰モデルの仮定 1:

$(X_i, Y_i)\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ は i.i.d.

u_i の i.i.d. 性も確証する仮定として考えてよいのか？特に独立性の定義と運用があやふやなので今一度確認したい. $(X_i, Y_i)\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ は独立. すなわち, 以下が全ての $i \neq j$ で成立していることを指す:

$$P((Y_i, X_i) \in A, (Y_j, X_j) \in B) = P((Y_i, X_i) \in A)P((Y_j, X_j) \in B)\ \forall A, B \subset \Omega$$
$$P_{X_i, Y_i, X_j, Y_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) = P_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) P_{X_j, Y_j}(x_j, y_j)\ \forall x_i, y_i \in \Omega$$

基本的に下の記法を用いて独立性は議論する. 以下では独立を $(X_i, Y_i) \perp\!\!\!\perp (X_j, Y_j)$ とも表記する.

* 一橋大学経済学部 4 年, 五年一貫専修コース公共経済プログラム

■単回帰モデルにおける独立性　上記で挙げた疑問点に答えを与える．$(X_i, Y_i) \perp\!\!\!\perp (X_j, Y_j)$ から, $(X_i) \perp\!\!\!\perp (X_j)$, $(Y_i) \perp\!\!\!\perp (Y_j)$, $(X_i) \perp\!\!\!\perp (Y_j)$ 等は直ちに言えそうだ．が, 方針確認のため証明する．

Proof. 定義より以下が成立:

$$P_{X_i,Y_i,X_j,Y_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) = P_{X_i,Y_i}(x_i, y_i) P_{X_j,Y_j}(x_j, y_j)$$

上の式と条件付期待値の定義より,

$$P_{X_i,Y_i,X_j,Y_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) = P_{X_i,Y_i}(x_i, y_i) P_{X_j,Y_j|X_i,Y_i}(x_j, y_j | x_i, y_i)$$
$$P_{X_j,Y_j|X_i,Y_i}(x_j, y_j | x_i, y_i) = P_{X_j,Y_j}(x_j, y_j)$$

条件付同時 pdf が無条件同時 pdf と一致する．この式自体も独立性の定義の一つ．先ずは $(X_i) \perp\!\!\!\perp (X_j)$, 即ち

$$P_{X_j|X_i}(x_j | x_i) \overset{\text{def}}{=} \frac{P_{X_i,X_j}(x_i, x_j)}{P_{X_i}(x_i)} = \frac{P_{X_i}(x_i) P_{X_j}(x_j)}{P_{X_i}(x_i)} = P_{X_j}(x_j)$$

を証明したい．ここで,

$$\begin{aligned}
P_{X_i,X_j}(x_i, x_j) &= \iint_{\mathbb{R}^2} P_{X_i,Y_i,X_j,Y_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) dy_i dy_j \\
&\overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} P_{X_i,Y_i}(x_i, y_i) P_{X_j,Y_j}(x_j, y_j) dy_i dy_j \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_{X_i,Y_i}(x_i, y_i) dy_i \int_{\mathbb{R}} P_{X_j,Y_j}(x_j, y_j) dy_j = P_{X_i}(x_i) P_{X_j}(x_j)
\end{aligned}$$

よって証明したい等式が成立．他二つも同様に証明が可能．　□

次に, 上で示した $(X_i) \perp\!\!\!\perp (X_j)$, $(Y_i) \perp\!\!\!\perp (Y_j)$, $(X_i) \perp\!\!\!\perp (Y_j)$ を用いて, 誤差項の独立性 $(u_i) \perp\!\!\!\perp (u_j)$ を証明したい．

Proof. 単回帰モデルとその仮定:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \text{ where } (X_i, Y_i) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

より, $Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i = u_i(X_i, Y_i) = u_i$. つまり, 示したいのは,

$$(u_i) \perp\!\!\!\perp (u_j), \text{ where } u_i = u_i(X_i, Y_i) = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$$
$$P_{u_i,u_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) = P_{u_i}(x_i, y_i) P_{u_j}(x_j, y_j)$$

$u_i = Y_i - bX_i$ と $u_j = Y_j - bX_j$ との独立性を示すために, 各々の確率密度がどう計算されるか, それらが積の形に分解できるかを考える．$u_i = z$ の確率に注目する．定義から $u_i = z \implies Y_i = bX_i + z$. $X_i = x$ のとき, $Y_i = bx + z$ となる確率は:

$$P_{u_i}(z) = \int_{\mathbb{R}} P_{X,Y}(x, bx + z)\, dx$$

という形で書ける．同様に $u_j = w$ となる確率密度は:

$$P_{u_j}(w) = \int_{\mathbb{R}} P_{X,Y}(x', bx' + w)\, dx'$$

ここで u_i と u_j の同時密度を考えると:

$$
\begin{aligned}
P_{u_i,u_j}(z,w) &= \iint_{\mathbb{R}^2} P_{X_i,Y_i,X_j,Y_j}(x, bx+z, x', bx'+w)\,dx\,dx' \\
&\overset{\text{i.i.d.}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} P_{X_i,Y_i}(x, bx+z)\,P_{X_j,Y_j}(x', bx'+w)\,dx\,dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_{X,Y}(x, bx+z)\,dx \int_{\mathbb{R}} P_{X,Y}(x', bx'+w)\,dx' \overset{\text{def}}{=} P_{u_i}(z)P_{u_j}(w)
\end{aligned}
$$

よって目的の関係式を得た. □

よって, $(u_i)\perp\!\!\!\perp(u_j)$ が確認できた. 以上の議論より, **誤差項同士の独立性は仮定 1 のみで保証可能**である. しかし, 同一分布性は先述の通り保証されず, 以下のように結論づけられる.

単回帰モデルの仮定下での誤差項の性質:

単回帰モデルの仮定の下で, 誤差項は独立だが i.i.d. ではない.

■**p.4 識別と A2**　観測可能な変数 (Y_i, X_i) の**同時分布**が分かれば, というのがミソ. 識別の定義: 『**観測されるデータの分布が既知の時, θ の値が一意に定まるならば, θ は識別されるという**』に沿った記述であることを確認すること. より詳しく言えば, (X_i, Y_i) の同時分布が判明することで, $\mathbb{E}[Y_i|X_i]$ が X_i の関数として決定される. ここで (1.2) 式は X_i の一変数関数として考えられるため, $\boldsymbol{\beta}$ が一意に定まる (=識別される).

■**p.6 『漸近分散』の語の用法**　自分の Note での用法と違うことに注意. 状況によって柔軟に判断しよう. 例えば, p,6 や p.9 で出てくる漸近分散は正確に言えば $\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$ のものである. 対して**標準誤差という語は $\hat{\beta}_1$ そのものに用いられている**ことを注意しよう.

■**p.6 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$ の厳密分布**　中級計量で与えられた説明は, 古典的仮定, 特に均一分散と正規性 (条件付きで良い) の下での議論. $\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$ を標準化したものは, 分散が観測可能な場合は標準正規分布に, 不可能な場合には自由度 $n-2$ の t 分布に従っていた. この仮定を外した場合の議論は p.9 で少し展開されている. 重要なのは漸近理論が適応可能で, この漸近分布はどの場合でも正規分布であることだ.

■**p.8 『i.i.d. 仮定下で誤差項の無条件分散はすべての i について必ず等しくなる』**

Proof. 以下の単回帰モデルと仮定のもとで議論を行う:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \text{ where } (X_i, Y_i) \text{ は RVs}, \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$Var(u_i)$ が i に関し一定であると示す. $Var(Y_i) = \sigma_y^2, Var(X_i) = \sigma_x^2$ とすると: $\sigma_y^2 = Var(\beta_1 X_i + u_i) = \beta_1^2\sigma_x^2 + Var(u_i) + 2\beta_1 Cov(X_i, u_i)$, $(const.) = Var(u_i) + 2\beta_1 Cov(X_i, u_i) \overset{\text{A2}}{=} Var(u_i)$. □

不均一分散の定義:

単回帰モデルの仮定の下では無条件分散の不均一分散は実現せず, p.7 の形で定義を行う必要がある.

■**p.9 不均一分散下での $\hat{\beta}_1$ の標準誤差導出**　ここでは OLSE の分散を求めて, その標本対応から導いた標準誤差が古典的仮定のもとでの標準誤差とは異なることを示す. 単回帰モデルとその仮定:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \text{ where } (X_i, Y_i) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

OLS 推定量は

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = (\bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}) = (\beta_0 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)\bar{X} + \bar{u}, \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2})$$

まず不偏性を示そう.

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\beta}_1] &= \beta_1 + \mathbb{E}[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}] \\
&\overset{\text{LIE}}{=} \beta_1 + \mathbb{E}[\mathbb{E}[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}|\mathbf{X}]] \\
&= \beta_1 + \mathbb{E}[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\mathbb{E}[u_i|\mathbf{X}]}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}] \\
&\overset{\text{i.i.d.}}{=} \beta_1 + \mathbb{E}[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\mathbb{E}[u_i|X_i]}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}] \overset{\text{A2}}{=} \beta_1
\end{aligned}$$

$\hat{\beta}_0$ も LIE により不偏性を確認できる. □

$Var(\hat{\beta}_1) = \mathbb{E}[(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2] = \mathbb{E}[(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2})^2] \overset{\text{LIE}}{=} \mathbb{E}[\frac{\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i)^2|\mathbf{X}]}{[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2]^2}]$. 期待値内の分母を考えよう.

$$(\text{denominator}) = \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i)^2|\mathbf{X}] = \mathbb{E}\left[S^2|\mathbf{X}\right] \text{ where } S = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i$$

$$\mathbb{E}\left[S^2|\mathbf{X}\right] = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\mathbb{E}[u_i^2|\mathbf{X}] + 2\sum\sum\nolimits_{i<j}(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})\mathbb{E}[u_iu_j|\mathbf{X}].$$

先述の議論より, A1 より**誤差項同士が独立**, つまり**相関がない** (∵独立性の必要条件) ので:

$$\mathbb{E}[u_iu_j|\mathbf{X}] = \mathbb{E}[u_i|\mathbf{X}]\mathbb{E}[u_j|\mathbf{X}] = 0\ ,\ \therefore \mathbb{E}\left[S^2|\mathbf{X}\right] = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\mathbb{E}[u_i^2|\mathbf{X}] = \sigma_i^2\ \forall i \neq j$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \mathbb{E}[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\mathbb{E}[u_i^2|\mathbf{X}]}{[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2]^2}]$$

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{X}) \overset{\text{LIE}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\mathbb{E}[u_i^2|\mathbf{X}]}{[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2]^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\sigma_i^2}{[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2]^2}$$

更に均一分散の仮定を置けば:

$$Var(u_i|X_i) = \mathbb{E}[u_i^2|\mathbf{X}] = \sigma^2\ \forall i\ ,\ \therefore \mathbb{E}\left[S^2|\mathbf{X}\right] = \sigma^2\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2\mathbb{E}[\frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}], Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{X}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

古典的仮定下での OLSE の**条件付分散**が得られ, これは本文の記述と一致している. だが実際は $Var(u_i|X_i) = \sigma(X_i)$ と X_i に依存することがしばしばで, この場合古典的仮定下での標準誤差は推定には使えない.

■『単回帰モデルの仮定』下での漸近分散　条件付分散の確率収束先, 漸近分散の振る舞いを見よう.

Proof. 漸近分布という語は標準化を暗黙に要求していたことに注意して:

$$
\begin{aligned}
V = Var(\sqrt{n}\,(\hat{\beta}_1 - \beta_1)|\mathbf{X}) \quad &= \frac{n\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})^2\sigma_i^2]}{[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]^2} \\
&\overset{\text{heterogeneity}}{=} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})^2\sigma^2(X_i)]}{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]^2} \\
&\xrightarrow{p} \frac{\mathbb{E}[(X_i-\mathbb{E}[X])^2\sigma^2(X_i)]}{\sigma_X^4} \\
&= \frac{\mathbb{E}[(X_i-\mathbb{E}[X])^2\mathbb{E}[u_i^2|\mathbf{X}]]}{\sigma_X^4} \\
&\overset{\text{LIE}}{=} \frac{\mathbb{E}[(X_i-\mathbb{E}[X])^2u_i^2]}{\sigma_X^4} = \frac{Var((X_i-\mathbb{E}[X])u_i)}{Var(X_i)^2}
\end{aligned}
$$

ここでは連続写像定理, 4 次モーメントまでの有限性を用いた. 教科書の記述と合致する. □

■誤差項に関する期待値計算の性質　上記の導出において用いた誤差項に関する期待値計算の性質の正統性を確認しておこう. まず, 不偏性の証明で使用した $\mathbb{E}[u_i|\mathbf{X}] \overset{\text{i.i.d.}}{=} \mathbb{E}[u_i|X_i]$ を確認する. 次に, $\mathbb{E}[u_iu_j|\mathbf{X}] = \mathbb{E}[u_i|X_i]\mathbb{E}[u_j|X_j]$ と, この結果に必要となる仮定を clarify しておこう.

Proof. $\mathbb{E}[u_i \mid \mathbf{X}] = \mathbb{E}[u_i \mid X_i]$ を示したい. つまり以下が成り立つことを確かめたい:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[u_i \mid \mathbf{X}] &= \int u_i\, f_{u_i|\mathbf{X}}(u_i \mid \mathbf{X})\, du_i \\
&\overset{(\dagger)}{=} \int u_i\, f_{u_i|X_i}(u_i \mid X_i)\, du_i \;=\; \mathbb{E}[u_i \mid X_i].
\end{aligned}
$$

ここで (†) を示したい. 単回帰モデルの仮定

$$
Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \quad (X_i, Y_i) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}
$$

より $u_i = u_i(X_i, Y_i) = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$ は X_i と Y_i で決定され, $\mathbf{X}_{-i}$ は一切関与しない. よって,

$$
f_{u_i|\mathbf{X}}(u_i \mid \mathbf{X}) = f_{u_i|X_i,\mathbf{X}_{-i}}(u_i \mid X_i, \mathbf{X}_{-i}) = f_{u_i|X_i}(u_i \mid X_i),
$$

が成り立つため, (†) も示され題意が満たされた. □

Proof. 次に, $\mathbb{E}[u_i\, u_j \mid \mathbf{X}] = \mathbb{E}[u_i \mid X_i]\, \mathbb{E}[u_j \mid X_j]$, $i \neq j$ を検証しよう. 下を示すのが目標だ:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[u_i\, u_j \mid \mathbf{X}] &= \iint u_i\, u_j\, f_{u_i,u_j|\mathbf{X}}(u_i, u_j \mid \mathbf{X})\, du_i\, du_j \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \iint u_i\, u_j\, f_{u_i|X_i}(u_i \mid X_i)\, f_{u_j|X_j}(u_j \mid X_j)\, du_i\, du_j \\
&= \Big(\int u_i\, f_{u_i|X_i}(u_i \mid X_i)\, du_i\Big)\Big(\int u_j\, f_{u_j|X_j}(u_j \mid X_j)\, du_j\Big) = \mathbb{E}[u_i \mid X_i]\, \mathbb{E}[u_j \mid X_j].
\end{aligned}
$$

ここで (‡) を示したい. 先に示した誤差項の独立性と, (X_i, Y_i) の i.i.d. 性から

$$
f_{u_i,u_j|\mathbf{X}} = f_{u_i|X_i}\; f_{u_j|X_j}.
$$

によって (‡) が成立し, したがって題意は満たされた. □

■連続写像定理の正統性検証　次に, 漸近分布の導出で用いた連続写像定理 (CMT) の正統性を検証しよう. まず連続写像定理を眺めることにする.

Thm: 連続写像定理 (Continuous Mapping Theorem)

確率収束 $X_n \xrightarrow{p} X$ を満たす確率変数列 $\{X_n\}$ と，関数 $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ が点 x の近傍で連続であるとき,

$$g(X_n) \ \xrightarrow{p}\ g(X) \quad (\text{ただし } X_n \xrightarrow{p} X).$$

では CMT を確認したところで, 目的の式変形の正統性を確認しよう. なお, 分母における分散の確率収束については以前検証したため, ここでは確認せずに確率収束を認める.

Proof. 標準化を暗黙に含むことに注意して，以下の分子・分母それぞれの確率収束を示す

$$V \ = \ Var\big(\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \mid \mathbf{X}\big) \ = \ \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - \bar{X})^2\sigma^2(X_i)]}{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2]^2}.$$

$$\begin{aligned}
(\text{denominator}) = A_n^2 \ &= \ [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2]^2 \ \xrightarrow{p}\ (Var(X_i))^2 = \sigma_X^4 \quad (\because \text{LLN, CMT}) \\
(\text{numerator}) = B_n \ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\,\sigma^2(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i, \bar{X}), \\
&\quad \text{where } f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, m) = (x - m)^2\,\sigma^2(x).
\end{aligned}$$

ここで $\sigma(x)$ の連続性を仮定すれば f は連続関数である．各 i について，$(X_i, \bar{X}) \xrightarrow{p} (X_i, \mathbb{E}[X])$ である（第一成分は定常に同じ分布, 第二成分は LLN による）．CMT より

$$f\big(X_i, \bar{X}\big) \ \xrightarrow{p}\ f\big(X_i, \mathbb{E}[X]\big) \ = \ (X_i - \mathbb{E}[X])^2\,\sigma^2(X_i).$$

さらに, X_i の i.i.d. 性と 4 次モーメントまでの有限性の下で LNN を再適用すると,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i, \bar{X}) \ \xrightarrow{p}\ \mathbb{E}\big[f(X_i, \mathbb{E}[X])\big] \ = \ \mathbb{E}\big[(X_i - \mathbb{E}[X])^2\,\sigma^2(X_i)\big].$$

$$B_n \xrightarrow{p} \mathbb{E}\big[(X_i - \mathbb{E}[X])^2\,\sigma^2(X_i)\big]$$

これらを組み合わせ，LLN，CMT，LIE を用いて目的の確率収束先を得た.　□

付録 A　計算上のテクニック

■畳み込み積分 (Convolution)　畳み込みとは, 和が一定となるようなものをかけて足し合わせるという操作のことである. これを積分で利用したのが畳み込み積分である.

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

右辺は x の関数. この $h(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込み積分 (あるいは単に畳み込み) などと呼び, $h(x)=f(x)*g(x)$ などと表記する. 確率変数 X と Y の確率分布が分かっているときに, $Z=X+Y$ の確率分布は畳み込みで与えられる. つまり:

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(z-x)dx$$

と計算できる. ここで, h,f,g はそれぞれ順に連続確率変数 $Z=X+Y,X,Y$ の確率密度関数である.

参考文献

[1] 末石 直也 (2015), 計量経済学―ミクロデータ分析へのいざない, 第 1 版, 日本評論社