Aufgabe 11

(1) Für $n \geq 0$ gilt für aufeinanderfolgende Summanden in der angegebenen Summe:

$$\frac{2^{2^{k+1}}}{10^{2^{k+1}}} \cdot \frac{10^{2^k}}{2^{2^k}} = \frac{2^{2^k}}{10^{2^k}} < \frac{1}{2^k}$$

Damit erhält man mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe und der Aussage aus Aufgabe 4:

$$10^{2^n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{2^k}} \leq 10^{2^n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^{2^k}}{10^{2^k}} < 10^{2^n} \cdot \frac{2^{2^{n+1}}}{10^{2^{n+1}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 10^{2^n} \cdot \frac{2^{2^{n+1}}}{10^{2^{n+1}}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \cdot 10^{2^n} \cdot \frac{2^{2^{n+1}}}{10^{2^{n+1}}} = 2 \cdot \frac{2^{2^n+2^n}}{10^{2^{n+1}-2^n}} = 2 \cdot \frac{2^{2^n} \cdot 2^{2^n}}{10^{2^n}} = 2 \cdot \frac{2^{2^n}}{5^{2^n}} < 1$$

Damit gilt:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{2^k}} < \frac{1}{10^{2^n}}$$

(2) Mit Aufgabenteil (1) erhält man:

$$\lfloor 10^{2^n} \alpha \rfloor = \lfloor \sum_{k=1}^{\infty} p_k 10^{2^n - 2^k} \rfloor = \lfloor \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k 10^{2^n-2^k}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{10^{2^n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{2^k}}}_{<1 \text{ nach } (1)} \rfloor = \sum_{k=1}^{n} p_k 10^{2^n-2^k}$$

(3)

$$\lfloor 10^{2^n} \alpha \rfloor - 10^{2^{n-1}} \lfloor 10^{2^{n-1}} \alpha \rfloor = \sum_{k=1}^{n} p_k 10^{2^n-2^k} - 10^{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} p_k 10^{2^{n-1}-2^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k 10^{2^n-2^k} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k 10^{2^n-2^k} = p_n 10^{2^n-2^n} = p_n$$

Aufgabe 12

Für $m > n$ ist das Argument der Summe offensichtlich $= 0$. Somit sind nur noch die Summanden für $1 \leq m \leq n$ zu betrachten. Für $m = 1$ ist $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor = n - (n-1) = 1$, für $m = n$ erhält man $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor = 1 - 0 = 1$. Bleiben noch $2 \leq m \leq n-1$ zu betrachten.

Sei n prim. Dann gilt für jedes m, dass $n \not\equiv 0 \bmod m$, also $n = k \cdot m + j$ mit $1 \leq j \leq m-1$ und $n - 1 = k \cdot m + j - 1$. Damit folgt für $2 \leq m \leq n-1$: $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor = k - k = 0$.

Sei n zusammengesetzt. Dann existiert mindestens ein $2 \leq m_0 \leq n-1$ mit $m_0 \mid n$, also $n = k \cdot m_0$ und $n - 1 = (k-1) \cdot m_0 + (m_0 - 1)$. Damit folgt: $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor = k - (k-1) = 1$.

n ist also prim genau dann wenn alle Summanden der angegebenen Summe $= 0$ sind außer der Summanden für $m = 1$ und $m = n$; diese sind $= 1$; also gilt die Behauptung.

Aufgabe 13

Für alle $x > 0$ und $\alpha > 0$ gilt, dass $y := x^\alpha > 0$. Man betrachtet die Funktion $f(x^\alpha) = e \cdot \log x^\alpha - x^\alpha = f(y) = e \log y - y$; die Ableitungen sind: $f'(y) = ey^{-1} - 1$ und $f''(y) = -ey^{-2}$. Die erste Ableitung ist für $f'(y = e) = 0$, die zweite Ableitung ist immer < 0, für $y = e$ erhält man also ein Maximum. Also gilt $e \log y \leq y$. Damit folgt auch $e \log x^\alpha = e\alpha \log x \leq x^\alpha$ und so auch $\log x \leq \frac{1}{e\alpha} x^\alpha$.

Aufgabe 14

Es gilt:

$$D_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_{k+1}-p_k) = \frac{1}{n}(p_{n+1}-p_1) \underset{(a)}{\sim} \frac{1}{n}(n+1)\log(n+1) \underset{(b)}{\sim} \log n \underset{(c)}{\sim} \log(n\log n) \underset{(d)}{\sim} \log p_n$$

(a) Nach Primzahlsatz $p_n \sim n\log n$.

(b)
$$\frac{\frac{1}{n}(n+1)\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log(n+1)}{\log n} + \frac{\log(n+1)}{n\log n} \underset{n\to\infty}{\to} 1+0=1$$

(c)
$$\frac{\log(n\log n)}{\log n} = \frac{\log n + \log\log n}{\log n} = 1 + \frac{\log\log n}{\log n} \underset{n\to\infty}{\to} 1+0=1$$

(d) Nach Primzahlsatz.

Da die $\sim$-Relation sowohl reflexiv als auch transitiv ist, gilt die Behauptung.

Aufgabe 15

(1) Für $(p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16) = (7, 11, 13, 17, 19, 23)$ sind alle Zahlen wie gewünscht prim.

(2) Ist $p = 5$ so ist $p + 10$ keine Primzahl. Ist $p \equiv 1 \bmod 5$, so ist $p + 4$ durch 5 teilbar. Ist $p \equiv 2 \bmod 5$, so ist $p + 18$ durch 5 teilbar. Ist $p \equiv 3 \bmod 5$, so ist $p + 12$ durch 5 teilbar. Ist $p \equiv 4 \bmod 5$, so ist $p + 6$ durch 5 teilbar. Also sind für alle Zahlen p nie die angegebenen Zahlen gleichzeitig prim.