Aufgabe 6

(1) Auf Grund der Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation gilt für jedes Element $n \in S$, dass es als Produkt $n = d_1 d_2$, $d_1, d_2 \in S$, dargestellt werden kann und zwar entweder nur mit $(d_1, d_2) = (1, n)$, also S-Primzahl, oder mit $d_1 \neq 1 \neq d_2$. Für d_1 und d_2 gilt die selbe Aussage, da diese Zahlen ebenfalls in S sind. Ist also n zusammengesetzt, erhält man zwei kleinere Zahlen $d_1, d_2 \in S$ für die die gleiche Argumentation gilt. So kann man rekursiv immer kleinere Faktoren von n konstruieren, da es nur endlich viele kleinere Zahlen als n in S gibt, sind die Faktoren irgendwann S-Primzahlen. (Mir ist kein formal besserer Beweis eingefallen.)

(2) Dies ist leicht zu konstruieren, indem man mittels Primzahlzerlegung in den natürlichen Zahlen und gleichzeitig in S arbeitet:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11 &= 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 && (1) \\ 49 \cdot 33 &= 21 \cdot 77 && (2) \end{aligned}$$

Die obere Zeile sind die natürlichen Primzahlen, die untere S-Primzahlen wie man leicht sehen kann, da deren natürlichen Primfaktoren nicht in S sind.

Aufgabe 7

(1)

(2) Mittels partieller Integration gilt:

$$\int_2^x \frac{1}{\log t} dt = \int_2^x \frac{t'}{\log t} dt = \left[\frac{t}{\log t}\right]_2^x - \int_2^x t \left(\frac{1}{\log t}\right)' dt = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} - \int_2^x t \left(\frac{-1}{t(\log t)^2}\right) dt =$$

$$= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2} dt$$

(3) Aus (1) und (2) folgt sofort:

$$\int_2^x \frac{1}{\log t} dt < \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2} dt = \frac{x}{\log x} + \alpha(x) \frac{x}{(\log x)^2}$$

Mit $\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 1$, anders ausgedrückt: $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 : |\alpha(x) - 1| < \varepsilon$. Somit gilt auch $\forall c > 1 \exists x_c \forall x > x_c : |\alpha(x)| < c (:= 1 + \varepsilon)$. Damit folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 8

(1) Für $n \geq 9$ ist $n - 5 \geq 4$.Wenn man die Teilbarkeit durch 3 betrachtet, kommen also nur Vielfache der 3 vor: Sei n ungerade, dann sind $n, n-2, n-4$ Primzahlkandidaten, jedoch ist wie man leicht sieht mindestens eine durch 3 teilbar. Sei n gerade, dann sind $n-1, n-3, n-5$ Primzahlkandidaten, jedoch ist auch hier mindestens eine dieser Zahlen durch 3 teilbar. Also können nur zwei Primzahlen in dem Intervall vorkommen.

(2) Für $x \geq 9$ gilt also nach (1) $\pi(x) - \pi(x-6) \leq 2 = \frac{x}{3} - \frac{x-6}{3}$. Damit folgt sofort $\pi(x) \leq \frac{x}{3}$ für $x \geq 9$. Da $\pi(33) = 11$ ist, $\pi(34), \pi(35), \pi(36) = 11$, inspesondere $\pi(36) < \frac{36}{3}$ gilt für $x > 33$ die gewünschte Ungleichung $\pi(x) < \frac{x}{3}$, da es alle sechs aufeinanderfolgenden Zahlen maximal einen Zuwachs von zwei Primzahlen gibt.

Aufgabe 9

(1) Wie man leicht sieht ist $A(x)$ die Menge aller natürlichen Zahlen $\leq x$ dargestellt mit den Exponenten ihrer Primfaktorzerlegung, die höchste Potenz eines Primfaktors p kann für eine beliebige Zahl maximal $\lfloor \log_p x \rfloor = \lfloor \frac{\log x}{\log p} \rfloor \leq \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor$ sein. Somit gilt in $A(x)$ für jedes $a_p \in \left\{0, ..., \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor \right\}$. Damit gilt offensichtlich $A(x) \subseteq B(x)$. Die Anzahl der Elemente von A(x) ist offensichtlich gleich der Anzahl der Zahlen $\leq x$, da die Primfaktorzerlegung eindeutig ist, also $|A(x)| = \lfloor x \rfloor$. Bei $B(x)$ kann man leicht nachzählen, dass für jedes $p < x$, von denen es genau $\pi(x)$ gibt, für jedes a_p jedes Element aus $\left\{0, ..., \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor \right\}$ einmal ausgewählt wird, die kombinatorischen Möglichkeiten sind also $|B(x)| = \left(1 + \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor \right)^{\pi(x)}$.

(2) Aus (1) folgt wegen $A(x) \subseteq B(x)$:

$$\lfloor x \rfloor \leq \left(1 + \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor \right)^{\pi(x)}$$

$$\log \lfloor x \rfloor \leq \log \left(1 + \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor \right)^{\pi(x)} = \pi(x) \log \left(1 + \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor \right)$$

$$\log(x-1) < \pi(x) \log \left(\frac{\log 2 + \log x}{\log 2} \right) = \pi(x) \log \left(\frac{\log(2x)}{\log 2} \right)$$

$$\pi(x) < \frac{\log(x-1)}{\log\log(2x) - \log\log 2}$$

(3)

Aufgabe 10

(1) Es ist $2^n \equiv 1 \mod 3$ oder $\equiv 2 \mod 3$. Im ersten Fall ist $2^n - 1$ Vielfaches von 3, im zweiten $2^n + 1$. Somit kann man nur solche Primzahlzwillinge erhalten, wenn eine Zahl davon selbst die 3 ist. Dies ist nur für das Paar 3 und 5 möglich.

(2)
```
Select[Table[{n, {3 2^n - 1, 3 2^n + 1}}, {n, 1, 20}],
        PrimeQ[3 2^#[[1]] - 1] && PrimeQ[3 2^#[[1]] + 1] &]
  {{1, {5, 7}}, {2, {11, 13}}, {6, {191, 193}}, {18, {786431, 786433}}}
```