Aufgabe 6

(1) Auf Grund der Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation gilt für jedes Element $n \in S$, dass es als Produkt $n = d_1 d_2$, $d_1, d_2 \in S$, dargestellt werden kann und zwar entweder nur mit $(d_1, d_2) = (1, n)$, also S-Primzahl, oder mit $d_1 \neq 1 \neq d_2$. Für d_1 und d_2 gilt die selbe Aussage, da diese Zahlen ebenfalls in S sind. Ist also n zusammengesetzt, erhält man zwei kleinere Zahlen $d_1, d_2 \in S$ für die die gleiche Argumentation gilt. So kann man rekursiv immer kleinere Faktoren von n konstruieren, da es nur endlich viele kleinere Zahlen als n in S gibt, sind die Faktoren irgendwann S-Primzahlen. (Mir ist kein formal besserer Beweis eingefallen.)

(2) Dies ist leicht zu konstruieren, indem man mittels Primzahlzerlegung in den natürlichen Zahlen und gleichzeitig in S arbeitet:

$$7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11 = 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \tag{1}$$
$$49 \cdot 33 = 21 \cdot 77 \tag{2}$$

Aufgabe 7

Aufgabe 8

Aufgabe 9

Aufgabe 10