Felicitas Hetzelt, Inf. M. Sc., 21328576
Ulrich Dorsch, Inf. M. Sc., 21325920

Aufgabe 1

(1) $\gcd(d, a) = 1$ bedeutet, dass in a keiner der Primteiler von d vorkommt. Mit $d \mid ab$ folgt aber, dass alle Primteiler von d mit ihrer Vielfachheit in ab vorkommen. Also müssen diese in b enthalten sein, also $d \mid b$.

(2) Für ein $d \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{N}$ gelte $d \nmid a, d \mid ab \Rightarrow d \mid b$.

Sei $d = 1$:

Es gilt $1 \mid a$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Die Voraussetzungen der Implikation sind also nicht erfüllt. Hier ist also ein Fehler in der Aufgabenstellung.

Sei d zusammengesetzt:

Dann gibt es a mit $d \nmid a$, wobei jedoch a und d gemeinsame Primteiler haben, also $d = p \cdot d'$ und $a = p \cdot a'$, hierbei sei p das Produkt aller gemeinsamen Primteiler. Mit $d \mid ab$ gilt damit $b = d' \cdot b'$; es gibt ein b für das b' und d keine gemeinsamen Primteiler hat, damit gilt $d \mid ab = pa'd'b' = da'b'$, jedoch nicht $d \mid b$. Also gilt die Implikation für zusammengesetzte d nicht für alle a, b.

Sei d prim:

Dann gilt $\gcd(d, a) = 1$ und die Situation ist wie in (1).

Damit gilt die Behauptung (teilweise).

Aufgabe 2

$$\frac{3^{4n+2} - 1}{8} = \frac{(3^{2n+1} - 1)(3^{2n+1} + 1)}{8} = \frac{(3 \cdot 9^n - 1)(3 \cdot 9^n + 1)}{8}$$

Da $9 \equiv 1 \mod 4$ gilt, ist auch $9^n \equiv 1 \mod 4$. Somit ist

$$3 \cdot 9^n - 1 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \mod 4$$
$$3 \cdot 9^n + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 0 \mod 4$$

Damit ist

$$\frac{(3 \cdot 9^n - 1)(3 \cdot 9^n + 1)}{8} = \frac{3 \cdot 9^n - 1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 9^n + 1}{4}$$

ein Produkt zweier natürlicher Zahlen.

Damit bleibt noch zu zeigen, dass beide Faktoren ungerade sind. Angenommen der erste Faktor sei gerade:

$$\frac{3 \cdot 9^n - 1}{2} \equiv 0 \mod 2$$

Dann gilt:

$$\frac{3 \cdot 9^n}{2} = 2 \cdot x + \frac{1}{2}$$
$$3 \cdot 9^n = 4 \cdot x + 1$$

mit einem $x \in \mathbb{N}$. Da aber $3 \cdot 9^n \equiv 3 \not\equiv 1 \equiv 4 \cdot x + 1 \mod 4$ gilt, führt dies zu einem Widerspruch.
Angenommen der zweite Faktor sei gerade:

$$\frac{3 \cdot 9^n + 1}{4} \equiv 0 \mod 2$$

Dann gilt:

$$\frac{3 \cdot 9^n}{4} = 2 \cdot x + \frac{7}{4}$$
$$3 \cdot 9^n = 8x + 7$$

mit einem $x \in \mathbb{N}$. Da aben $3 \cdot 9^n \equiv 3 \not\equiv 7 \equiv 8 \cdot x + 7 \mod 8$ gilt, führt dies zu einem Widerspruch.

Somit sind beide Faktoren der Zahl ungerade und damit die Zahl selbst ungerade. Also ist $\frac{3^{4n+2}-1}{8}$ eine ungerade zusammengesetzte natürliche Zahl.

Aufgabe 3

(1)
```
(* Liste der kleinsten Primteiler von n! - 1, 3 <= n <= 20 *)
Table[Divisors[n! - 1][[2]], {n, 3, 20}]
  {5, 23, 7, 719, 5039, 23, 11, 29, 13, 479001599, 1733, 87178291199,
  17, 3041, 19, 59, 653, 124769}
```

(2) Der Satz von Wilson lautet p prim $\Leftrightarrow p \mid (p-1)! + 1$. Insbesondere teilt offensichtlich auch keine Zahl kleiner als p die Zahl $(p-1)!+1$. Desweiteren teilt für $p \geq 5$ p auch $(p-1)! - p + 1$.

$$p \mid (p-1)! - p + 1 = ((p-2)! - 1)(p-1)$$

$p \nmid p-1$, also muss $p \mid (p-2)! - 1$ gelten. Da $(p-2)! - 1$ von keiner Zahl $\leq p-2$ geteilt wird, $p-1$ keine Primzahl ist, ist auch p weiterhin wie gewünscht der kleinste Primteiler.

Aufgabe 4

(1) $p_1 \cdots p_{n-1} - 1 \equiv -1 \mod p_i$ für alle $1 \leq i \leq n-1$; diese Zahl ist also nicht durch eine der $n-1$ ersten Primzahlen teilbar. Da jede natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung durch ihre Primteiler hat, muss es eine Primzahl $p_n \leq p_1 \cdots p_{n-1} - 1$ geben, die in der Darstellung dieser Zahl als Primzahl vorkommt. Damit gilt die Behauptung.

(2) I.V.: $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ für alle $n \geq 1$.

I.A.: $n = 1$, $p_n = p_1 = 2 \leq 2^{2^{n-1}} = 2^{2^0} = 2$

I.S.: Gelte I.V. für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt mit (1):

$$p_n \leq p_1 \cdots p_{n-1} - 1 = \prod_{k=1}^{n-1} 2^{2^{k-1}} - 1 = 2^{\sum_{k=0}^{n-2} 2^k} - 1 = 2^{\frac{1-2^{n-1}}{1-2}} - 1 = 2^{2^{n-1}} - 1 \leq 2^{2^{n-1}}$$

(3) Mit (2) hat man für $x = 2^{2^{n-1}} \geq p_n$ einen funktionalen Zusammenhang zwischen x und n, sodass es mindestens n Primzahlen $\leq$ x gibt.

Damit kann man folgende Funktion konstruieren:

$$\frac{\log 2^{2^{n-1}}}{\log 2} = 2^{n-1}$$

$$\frac{\log \frac{\log 2^{2^{n-1}}}{\log 2}}{\log 2} = \frac{\log\log 2^{2^{n-1}} - \log\log 2}{\log 2} = n - 1$$

Mit $\log\log 2 < \log 2$ erhält man damit:

$$n + 1 \geq \frac{\log\log 2^{2^{n-1}}}{\log 2} \geq n$$

Damit folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 5

Für $n \geq 12$ sind auf jeden Fall die Zerlegungen $n = a+b = 4+(n-4) = 6+(n-6) = 8+(n-8)$ möglich; $4, 6, 8$ sind zusammengesetzte Zahlen, $n-4, n-6, n-8$ könnten jedoch Primzahlen sein; da es jedoch keine weiteren Primzahldrillinge als $3, 5, 7$ gibt, erfüllt eine dieser Zerlegungen auf jeden Fall die gewünschten Bedingungen, wenn $n - 8 > 3$ gilt, was mit $n \geq 12$ immer der Fall ist.