Εθνικό & Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επέκταση της άλγεβρας Poincaré και εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία

Παρασκευάς Ντάβος
Α.Μ.: 202200099

Επιβλέπων:

Ιωάννης Παπαδημητρίου
Επ. Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2025

Abstract

This research thesis, entitled ***"Extension of the Poincaré Algebra and Introduction to Supersymmetry"***, is essentially structured into four main parts.

In the **first part**, an introduction to Group Theory and Algebras is provided, with an extensive discussion of key definitions and fundamental theorems, thereby establishing the concepts of a group and the algebra of a group. Particular emphasis is placed on Lie groups, which describe continuous symmetries.

The **second part** focuses on the Lorentz and Poincaré groups, which govern the symmetries of Special Relativity. Special attention is given to their representations and the role of Weyl and Dirac spinors.

The **third part** is dedicated to the extension of the Poincaré algebra and the derivation of the $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry algebra. We demonstrate that in any supersymmetric field theory, the number of bosonic and fermionic degrees of freedom must be equal, and we examine in detail the representations of the $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry algebra. Finally, a brief presentation of extended supersymmetries with $\mathcal{N} > 1$ is included.

In the **fourth part**, we introduce free field theories through a systematic study of the Klein–Gordon and Dirac fields. This is followed by an introduction to supersymmetric field theories, with a particular focus on the massless, free Wess–Zumino supersymmetric model — the simplest and most fundamental example of a supersymmetric field theory one can analyze. A detailed discussion is presented on the concepts of on-shell and off-shell supersymmetric representations and their role in supersymmetric field theories. Through this study, the necessity for the formulation of a new formalism in supersymmetry becomes evident.

Finally, the thesis is supplemented by **two appendices**, in which essential properties of the exponential mapping are proven, along with several fundamental identities involving Weyl spinors. These results are omitted from the main body of the thesis for the sake of clarity and cohesion.

Περίληψη

Η παρούσα ερευνητική εργασία, ***«Επέκταση της άλγεβρας Poincaré και εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία»***, αποτελείται ουσιαστικά από τέσσερα κύρια μέρη.

Στο **πρώτο μέρος** γίνεται μία εισαγωγή στη Θεωρία Ομάδων και στις Άλγεβρες, με εκτενή αναφορά σε βασικούς ορισμούς και θεμελιώδη θεωρήματα, θεμελιώνοντας την έννοια της ομάδας και της άλγεβρας μίας ομάδας. Εστιάζουμε κυρίως στις ομάδες Lie, οι οποίες περιγράφουν τις συνεχείς συμμετρίες.

Στο **δεύτερο μέρος** μελετώνται οι ομάδες Lorentz και Poincaré, οι οποίες περιγράφουν τις συμμετρίες της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις αναπαραστάσεις τους και στη χρήση των σπινόρων Weyl και Dirac.

Το **τρίτο μέρος** είναι αφιερωμένο στην επέκταση της άλγεβρας Poincaré και στην εξαγωγή της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} = 1$. Αποδεικνύουμε ότι σε κάθε υπερσυμμετρική θεωρία πεδίου ο αριθμός των μποζονικών και φερμιονικών βαθμών ελευθερίας είναι ίσος, και μελετούμε τις αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} = 1$. Τέλος, γίνεται μία παρουσίαση για τις εκτεταμένες υπερσυμμετρίες $\mathcal{N} > 1$.

Στο **τέταρτο μέρος** κάνουμε μία εισαγωγή στις ελεύθερες θεωρίες πεδίου, μελετώντας συστηματικά τα ελεύθερα πεδία Klein-Gordon και Dirac. Έπειτα, γίνεται μία εισαγωγή στις υπερσυμμετρικές θεωρίες πεδίου και εστιάζουμε στη μελέτη του ελεύθερου, άμαζου υπερσυμμετρικού μοντέλου Wess-Zumino, ως την πρώτη και πιο απλή υπερσυμμετρική θεωρία πεδίου που μπορεί κανείς να αναλύσει. Γίνεται εκτενής ανάλυση για τις on-shell και off-shell υπερσυμμετρικές αναπαράστασεις και τον ρόλο τους στις υπερσυμμετρικές θεωρίες πεδίου. Μέσα από αυτή τη μελέτη παρατηρούμε την ανάγκη διατύπωσης ενός νέου φορμαλισμού στην υπερσυμμετρία.

Τέλος, στα **δύο παραρτήματα** που ακολουθούν, κρίθηκε απαραίτητο να αποδειχθούν βασικές ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης, καθώς και ορισμένες θεμελιώδεις σχέσεις για τους σπίνορες Weyl, οι οποίες παραλείπονται από το κυρίως σώμα της εργασίας για λόγους συνοχής.

Αφιερωμένο στον παππού μου...

"A physical law must possess mathematical beauty."
Paul Dirac

Ευχαριστίες

Καταρχάς, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κ. Ιωάννη Παπαδημητρίου για την πολύτιμη βοήθειά του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας ερευνητικής εργασίας, καθώς και για την καθοδήγηση που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης μου. Του είμαι ιδιαιτέρως ευγνώμων για την πρότασή του να ασχοληθώ με αυτό το συναρπαστικό πεδίο της Θεωρητικής Φυσικής, το οποίο μελέτησα με συνέπεια και ιδιαίτερο ενδιαφέρον, και ανυπομονώ να εμβαθύνω ακόμη περισσότερο.

Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη προς την οικογένειά μου, η οποία με στηρίζει αδιάκοπα από τη στιγμή που αποφάσισα να ακολουθήσω τον δρόμο της Φυσικής. Χάρη στην πίστη της σε εμένα και στις δυνατότητές μου, μου δόθηκε η ευκαιρία να κυνηγήσω τα όνειρά μου και να προοδεύσω στον τομέα που αγαπώ.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ απευθύνω στους φίλους μου, εντός και εκτός πανεπιστημίου, για τη συνεχή στήριξη, την κατανόηση και την παρέα τους, που αποτέλεσαν για εμένα πηγή δύναμης και χαλάρωσης στις πιο απαιτητικές στιγμές.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή στη Θεωρία Ομάδων και στις Άλγεβρες

Η έννοια της συμμετρίας διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στη Θεωρητική Φυσική, επιτρέποντάς μας βαθύτερη κατανόηση κρίσιμων αρχών και φυσικών φαινομένων. Ένας από τους πλέον συστηματικούς τρόπους ανάλυσης του ρόλου και των συνεπειών των συμμετριών σε ένα φυσικό σύστημα είναι η Θεωρία Ομάδων (Group Theory). Η θεωρία αυτή περιγράφει τις συμμετρίες που διέπουν τους φυσικούς νόμους, οι οποίοι παραμένουν συχνά αμετάβλητοι υπό συγκεκριμένους μετασχηματισμούς, όπως περιστροφές, μεταθέσεις ή ανακλάσεις. Κατά συνέπεια, η Θεωρία Ομάδων αποτελεί αναντικατάστατο εργαλείο για τη μελέτη των συμμετριών στα φυσικά συστήματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο, αρχικά θα παρουσιαστούν οι βασικοί ορισμοί και οι χρήσιμες έννοιες που σχετίζονται με τη Θεωρία Ομάδων. Στη συνέχεια, θα πραγματοποιηθεί μία συστηματική διερεύνηση των αναπαραστάσεων των ομάδων, ώστε να κατανοηθεί η εσωτερική τους δομή. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στις συνεχείς συμμετρίες, οι οποίες περιγράφονται από τις ομάδες Lie. Οι ιδιότητες αυτών των ομάδων αναλύονται μέσω των γεννητόρων τούς, οι οποίοι υπακούουν σε μία συγκεκριμένη άλγεβρα, γνωστή ως άλγεβρα Lie. Τέλος, ως εφαρμογή όλων των παραπάνω, θα μελετήσουμε διεξοδικά την ομάδα $SU(2)$.

1.1 Ορισμός ομάδας

Μία ομάδα (group) είναι μία αφηρημένη μαθηματική δομή που περιλαμβάνει ένα σύνολο από αντικείμενα (που τα ονομάζουμε στοιχεία) και μία δυαδική πράξη μεταξύ των στοιχείων τής.

Ορισμός 1.1. *Έστω G ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μία δυαδική πράξη $\circ : G \times G \to G$ (κλειστότητα). Για $x, y \in G$ γράφουμε $x \circ y$ και καλούμε την πράξη $\circ$ γινόμενο. Αν*

i) η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική, δηλαδή $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ $\forall x, y, z \in G$,

ii) $\exists$ (μοναδικό) ταυτοτικό στοιχείο $\mathbf{1} \in G : \forall x \in G, x \circ \mathbf{1} = \mathbf{1} \circ x = x$ και

iii) $\forall x \in G, \exists$ (μοναδικό) αντίστροφο στοιχείο $x^{-1} \in G : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = \mathbf{1}$,

τότε το G καλείται ομάδα.

Αν ισχύει ότι: $\forall x, y \in G, x \circ y = y \circ x$, τότε η G καλείται αβελιανή ομάδα. Επιπλέον, υπάρχουν διακρίτες ομάδες, όπως η $G = \mathbb{Z}$ (με τη δυαδική πράξη να είναι η πρόσθεση $\circ := +$, με την κλειστότητα και την προσαιτεριστικότητα να είναι προφανείς, με το ταυτοτικό στοιχείο να είναι $\mathbf{1} := 0$ και με το αντίστροφο στοιχείο να είναι $x^{-1} = -x$), αφού τα στοιχεία της ομάδας αυτής είναι διακριτά και συνεχείς ομάδες, όπως η ομάδα μεταθέσεων $T(1)$ ή ομάδες πινάκων, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο επόμενο εδάφιο, όπου κάθε στοιχείο τους μπορεί να παραμετροποιηθεί μέσω ενός συνόλου παραμέτρων, που κάθε μία παράμετρος μπορεί να παίρνει συνεχείς τιμές.

1.2 Ομάδα μεταθέσεων και ομάδες πινάκων

1.2.1 Ομάδα μεταθέσεων

Για να ορίσουμε την ομάδα μεταθέσεων (translation group) $T(1)$ (το 1 δηλώνει ότι αναφερόμαστε στη μία διάσταση), παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor μίας συνάρτησης f γύρω από το σημείο x:

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x) + af'(x) + \frac{1}{2}a^2 f''(x) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \\ &= e^{a\frac{d}{dx}} f(x) \quad \forall x, a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης. Ο τελεστής (operator) $T_a := e^{a\frac{d}{dx}}$ καλείται τελεστής μετάθεσης (translation operator), καθώς μετατοπίζει τη συντεταγμένη x της συνάρτησης f στην οποία δρα, κατά μία σταθερή ποσότητα a. Το σύνολο των τελεστών αυτών και η δυαδική πράξη $T_a \circ T_b = T_{a+b}$, σχηματίζουν την ομάδα μετάθεσης $T(1)$, καθώς η κλειστότητα και η προσαιτεριστικότητα είναι προφανείς, το ταυτοτικό στοιχείο είναι το $\mathbf{1} = 1$ και το αντίστροφο στοιχείο είναι το $T_a^{-1} = T_{-a}$. Διαπιστώνουμε πως η $T(1)$ είναι συνεχής ομάδα, αφού η παράμετρος a παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Μπορούμε να γράψουμε $e^{a\frac{d}{dx}} = e^{ia(-i\frac{d}{dx})}$ και να ορίσουμε τον τελεστή:

$$P := -i\frac{d}{dx}, \tag{1.1}$$

που από την Κβαντική Μηχανική τον αναγνωρίζουμε ως τον τελεστή της ορμής (στη μία διάσταση) για $\hbar = 1$, ο οποίος μας δείχνει την άμεση σχέση μεταξύ μεταθέσεων και ορμής (από το θεωρήμα της Noether γνωρίζουμε πως η διατήρηση της ορμής προκύπτει από τη συμμετρία του συστήματος ως προς τις μεταθέσεις στο χώρο). Στα επόμενα εδάφια, θα αποδείξουμε το γεγονός πως ο τελεστής P αποτελεί τον γεννήτορα της $T(1)$, καθώς γεννά τις μεταθέσεις στο χώρο, δηλαδή η ορμή είναι ο γεννήτορας των χωρικών μεταθέσεων.

1.2.2 Ομάδες πινάκων

Αρχικά, θα διατυπώσουμε τους βασικούς ορισμούς για τις ομάδες πινάκων (matrix groups) με τις οποίες θα ασχοληθούμε σε αυτήν την ερευνητική εργασία.

Ορισμός 1.2. *Ορίζουμε τις παράκατω ομάδες πινάκων ως εξής:*

i) *Η γενική γραμμική ομάδα πινάκων (general linear group) $GL(n, K)$ ορίζεται ως $\{A \in M_{n\times n}(K) \mid \det(A) \neq 0\}$, όπου $M_{n\times n}(K)$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία που ανήκουν στο σώμα K, με τη δυαδική πράξη να είναι το γινόμενο πινάκων. Η ειδική γραμμική ομάδα πινάκων (special linear group) $SL(n, K)$ απαιτεί επιπλέον $\det(A) = 1$.*

ii) *Η ομάδα των μοναδιακών πινάκων (unitary group) $U(n)$ ορίζεται ως $\{U \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \det(U) \neq 0$ και $U^\dagger U = \mathbf{1}$ ή $U^\dagger = U^{-1}\}$, όπου $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία που ανήκουν στο $\mathbb{C}$, με τη δυαδική πράξη να είναι το γινόμενο πινάκων. Η ειδική ομάδα των μοναδιακών πινάκων (special unitary group) $SU(n)$ απαιτεί επιπλέον $\det(U) = 1$.*

iii) *Η ομάδα των ορθογώνιων πινάκων $O(n)$ (orthogonal group) ορίζεται ως $\{O \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(O) \neq 0$ και $O^T O = \mathbf{1}\}$, όπου $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία που ανήκουν στο $\mathbb{R}$, με τη δυαδική πράξη να είναι το γινόμενο πινάκων. Η ειδική ομάδα των ορθογώνιων πινάκων (special orthogonal group) $SO(n)$ απαιτεί επιπλέον $\det(O) = 1$.*

Οι ομάδες πινάκων αποτελούν σημαντικά παραδείγματα μη αβελιανών ομάδων (non-abelian groups), δηλαδή ομάδων όπου η δυαδική πράξη δεν είναι αντιμεταθετική, καθώς για δύο πίνακες A και B ισχύει γενικά πως $AB \neq BA$. Στη Θεωρητική Φυσική, οι ομάδες συμμετρίας που συναντάμε στο Καθιερωμένο Πρότυπο των Στοιχειωδών Σωματιδίων είναι οι $SU(3)$, $SU(2)$ και $U(1)$. Η ομάδα $U(1)$ περιλαμβάνει όλους τους μιγαδικούς αριθμούς με μοναδιαίο μέτρο, δηλαδή $U(1) = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\right\}$. Η ομάδα $SU(1)$, αντίθετα, είναι πολύ πιο περιορισμένη, περιλαμβάνοντας μόνο το στοιχείο 1, για αυτό και δεν τη χρησιμοποιούμε. Επιπλέον, στην Κλασσική και στην Κβαντική Μηχανική χρησιμοποιούνται συχνά οι ομάδες $SO(2)$ και $SO(3)$. Η ομάδα $SO(2)$ αναπαριστά στροφές στο επίπεδο (δύο διαστάσεις), ενώ η $SO(3)$ αναπαριστά στροφές στον τρισδιάστατο χώρο (τρείς διαστάσεις).

1.3 Ιδιότητες και πράξεις ομάδων

Τώρα, θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε την έννοια της υποομάδας, να μελετήσουμε κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες των ομάδων και να ορίσουμε πράξεις μεταξύ αυτών.

Ορισμός 1.3. *Έστω μία ομάδα G. Το υποσύνολο $H \subseteq G$ καλείται υποομάδα (subgroup) της G αν και μόνο αν:*

i) Το H είναι εφοδιασμένο με μία δυαδική πράξη $\circ : H \times H \to H$ (κλειστότητα) και ισχύει η προσαιτεριστικότητα,

ii) $\exists$ (μοναδικό) ταυτοτικό στοιχείο $\mathbf{1} \in H : \forall x \in H, x \circ \mathbf{1} = \mathbf{1} \circ x = x$ και

iii) $\forall x \in H, \exists$ (μοναδικό) αντίστροφο στοιχείο $x^{-1} \in H : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = \mathbf{1}$

Για $x \in G$ ορίζουμε τα αριστερά και δεξία σύμπλοκα (left and right cosets) της H ως τα σύνολα $xH = \{xy \mid y \in H\}$ και $Hx = \{yx \mid y \in H\}$, αντίστοιχα. Αν για κάθε $x \in G$ ισχύει $xH = Hx$, τότε η υποομάδα καλείται κανονική (normal group). Αν μία ομάδα G δεν περιέχει κανονικές υποομάδες πλήν του εαυτού της και της τετριμμένης που περιλαμβάνει μόνο το ταυτικό στοιχείο της, τότε καλείται απλή (simple group). Η ομάδα συμπλόκων μίας κανονικής υποομάδας H της G (με γινόμενο $xH \circ yH = xyH$, το ταυτοτικό στοιχείο είναι το $\mathbf{1}H$, όπου $\mathbf{1}$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G, και αντίστροφο $x^{-1}H$) ονομάζεται ομάδα πηλίκο (quotient group) της G και συμβολίζεται με G/H. Δηλαδή, $G/H = \{xH \mid x \in G\}$.

Είναι εύκολο κανείς να δείξει πως οι $SU(n)$ και $SO(n)$ είναι κανονικές υποομάδες των $U(n)$ και $O(n)$, αντίστοιχα.

Έχοντας ορίσει την έννοια της υποομάδας και έχοντας δεί την πρώτη πράξη μεταξύ ομάδων που μας οδήγησε στον ορισμό της ομάδας πηλίκου, θα ορίσουμε δύο επιπλέον χρήσιμες πράξεις μεταξύ δύο ομάδων, το ευθύ και το ημι-ευθύ γινόμενό τους.

Ορισμός 1.4. *Έστω δύο ομάδες G και H.*

i) Το ευθύ γινόμενό (direct product) της G με την H ορίζεται ως το σύνολο $G \times H$ εφοδιασμένο με τη δυαδική πράξη $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2), \forall x_1, x_2 \in G, y_1, y_2 \in H$. Τότε, το $G \times H$ είναι ομάδα και οι G και H είναι κανονικές υποομάδες της $G \times H$.

ii) Το ημι-ευθύ γινόμενό (semi-direct product) της G με την H ορίζεται ως το σύνολο $G \rtimes H$ εφοδιασμένο με τη δυαδική πράξη $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \circ x_1(y_2))$[1]$, \forall x_1, x_2 \in G, y_1, y_2 \in H$. Τότε, το $G \rtimes H$ είναι ομάδα και η G δεν είναι κανονική υποομάδα της $G \rtimes H$, ενώ η H είναι.

Αξίζει να σημειωθεί πως το ημι-ευθύ γινόμενο δύο ομάδων δεν είναι συμμετρικό (εν γένει ισχύει $G \rtimes H \neq H \rtimes G$). Στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι ομάδες $SU(3)$, $SU(2)$ και $U(1)$ ενοποιούνται μέσω της σχέσης $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ που είναι ένα παράδειγμα ευθύ γινομένου και σχηματίζουν μία ομάδα βαθμίδας (gauge group)[2]. Τα ευθέα γινόμενα είναι τετριμμένες δομές, καθώς δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των υποομάδων, τα στοιχεία κάθε υποομάδας ενεργούν μόνο πάνω σε στοιχεία της ίδιας υποομάδας. Αυτό, προφάνως, δεν ισχύει για τα ημι-ευθέα γινόμενα ομάδων, αφού υπάχρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των στοιχείων των υποομάδων, όπως φαίνεται από τον ορισμό 1.4, όπου λαμβανούμε $y_1 \circ x_1(y_2)$ με το $x_1(y_2)$ να δηλώνει την αλληλεπίδραση των στοιχείων μεταξύ των δύο υποομάδων.

Τέλος, θα διατυπώσουμε τους ορισμούς των ομομορφισμών και ισομορφισμών ομάδων που θα χρειαστούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 1.5. *Έστω δύο ομάδες G και H. Θα λέμε ότι μία απεικόνιση (map) $\varphi : G \to H$ είναι ομομορφισμός (homomorphism) ομάδων αν για κάθε $x, y \in G$ ισχύει $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$. Επιπλέον:*

- *Αν ο ομομορφισμός $\varphi : G \to H$ είναι $1-1$, τότε η φ καλείται μονομορφισμός (monomorphism) ομάδων.*
- *Αν ο ομομορφισμός $\varphi : G \to H$ είναι επί, τότε καλείται επιμορφισμός (epimorphism) ομάδων.*
- *Αν $\varphi : G \to G$ είναι ομομορφισμός, τότε λέγεται ενδομορφισμός (endomorphism).*
- *Αν $\varphi : G \to H$ είναι $1-1$ και επί, τότε καλείται ισομορφισμός (isomorphism) ομάδων.*

[1] Το στοιχείο $x_1(y_2)$ δηλώνει την αλληλεπίδραση των στοιχείων των δύο υποομάδων. Δηλαδή, ισχύει ότι το στοιχείο $x_1(y_2)$ μπορεί να γραφεί ως $x_1(y_2) = f(y_2)$, όπου η f έχει μία εξαρτησιακή σχέση από το στοιχείο x_1.

[2] Οι ομάδες βαθμίδας (gauge groups) είναι μαθηματικές ομάδες που περιγράφουν τη συμμετρία του χωροχρόνου σε θεωρίες σωματιδίων και φυσικής πεδίων, όπως θα δούμε αργότερα.

- *Αν ένας ομομορφισμός $\varphi : G \to G$ είναι ισομορφισμός, τότε καλείται αυτομορφισμός (automorphism).*

Για παράδειγμα, οι ομάδες $\mathbb{Z}$ και $2\mathbb{Z}$ (πολλαπλάσια του δύο) με την απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}, \varphi(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{Z}$ (να είναι αμφιμονότιμη και να διατηρεί την πρόσθεση) αποτελούν ομομορφισμό ομάδων. Ένα άλλο παράδειγμα ομομορφισμού ομάδων είναι η απεικόνιση από την ομάδα των πραγματικών αριθμών, όπου η δυαδική πράξη είναι η πρόσθεση, προς την ομάδα των θετικών πραγματικών αριθμών, όπου η δυαδική πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός. Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \varphi(x) = e^x$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \cdot e^y \\ &= \varphi(x) \cdot \varphi(y),\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η απεικόνιση φ είναι ομομορφισμός ομάδων. Επιπλέον, η φ είναι μονομορφισμός, επιμορφισμός και ισομορφισμός.

1.4 Αναπαραστάσεις ομάδων και άλγεβρες

Δύο σημαντικά εργαλεία για την κατανόηση της δομής των ομάδων και των ιδιοτήτων τούς είναι η θεωρία αναπαραστάσεων των ομάδων και οι άλγεβρες. Η θεωρία αναπαραστάσεων παρέχει ένα πλαίσιο για να κατανοήσουμε πως τα στοιχεία μίας ομάδας δρουν σε στοιχεία διανυσματικών χώρων, επιτρέποντάς μας να μελετήσουμε τη δομή και τις ιδιότητες των ομάδων μέσω αυτών των δράσεων. Αντίστοιχα, οι άλγεβρες σχετίζονται με τις ιδιότητες των στοιχείων που συνδέονται με τις ομάδες, παρέχοντας εργαλεία για την ανάλυση της αλγεβρικής τους δομής. Αρχικά, θα μελετήσουμε την έννοια της αναπαράστασης μίας ομάδας και στη συνέχεια θα εισάγουμε την έννοια της άλγεβρας, χωρίς να εμβαθύνουμε σε όλες τις τεχνικές λεπτομέρειες, καθώς θα ασχοληθούμε με πιο εκτενή παραδείγματα όταν εξετάσουμε τους γεννήτορες των ομάδων Lie.

Στη Θεωρητική Φυσική ασχολούμαστε κυρίως με τις αναπαραστάσεις των ομάδων και με τις ιδιότητες μίας ομάδας, της οποίας τα στοιχεία αναπαρίστανται ως πίνακες σε ένα διανυσματικό χώρο, δρώντας πάνω σε άλλα διανύσματα του χώρου αυτού και μετασχηματίζοντάς τα σε νέα.

Ορισμός 1.6. *Μία αναπαράσταση (representation) της ομάδας G σε ένα διανυσματικό χώρο V είναι ένας ομομορφισμός $\varphi : G \to GL(V, K)$, με την $GL(V, K)$ να είναι η γενική γραμμική ομάδα πινάκων στο διανυσματικό χώρο V με σώμα K.*

Μέχρι τώρα, παρατηρούμε πως οι ομάδες πινάκων που ορίσαμε έχουν την ιδιότητα να ορίζονται μέσω μίας εκ των αναπαραστάσεών τους. Αυτές ονομάζονται θεμελιώδεις αναπαραστάσεις (fundamental or defining representations) της ομάδας. Ωστόσο, θα χρειαστούμε και άλλες αναπαραστάσεις, όπως οι συζυγείς αναπραστάσεις (adjoint representations). Συνεπώς, μία ομάδα μπορεί να έχει παραπάνω από μία αναπαραστάσεις. Συνήθως, μία ομάδα μπορεί να έχει άπειρες αναπαραστάσεις. Για αυτό, πρέπει να ορίσουμε πότε δύο αναπαραστάσεις μίας ομάδας θεωρούνται ισόμορφες.

Ορισμός 1.7. *Δύο αναπαραστάσεις της ομάδας G, $\varphi_1 : G \to GL(V_1, K_1)$ και $\varphi_2 : G \to GL(V_2, K_2)$ στους διανυσματικούς χώρους V_1 και V_2 με σώματα K_1 και K_2 αντίστοιχα, ονομάζονται ισόμορφες (isomorphic) αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός $\rho : V_1 \to V_2$ τέτοιος ώστε $\forall x \in G, \rho\varphi_1(x)\rho^{-1} = \varphi_2(x)$.*

Τα θεμελιώδη στοιχεία της θεωρίας αναπαραστάσεων των ομάδων, τα οποία θα μας απασχολήσουν, είναι οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις.

Ορισμός 1.8. *Μία μη αναγώγιμη αναπαράσταση (irreducible representation) της ομάδας $G, \varphi : G \to GL(V, K)$, είναι μία αναπαράσταση όπου δεν υπάρχει κανονικός υπόχωρος (no proper subspace) $W \subseteq V$ που να είναι κλειστός ως προς την ομάδα, δηλαδή δεν υπάρχει $W \subseteq V : \forall y \in W$ και $x \in G$, $\varphi(x)y \in W$.*

Με άλλα λόγια, δε μπορούμε να χωρίσουμε τη μη αναγώγιμη αναπαράσταση μίας ομάδας G σε δύο μέρη που να μη συνδέονται μεταξύ τους. Από εδώ και στο εξής, θα αναζητούμε τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις των ομάδων με τις οποίες θα ασχοληθούμε. Οπότε, είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε ένα λήμμα, γνωστό ως το λήμμα του Schur, που θα χρειαστούμε παρακάτω.

Λήμμα 1.1. *Αν έχουμε μία μη αναγώγιμη αναπαράσταση της ομάδας G, $\varphi : G \to GL(V, K)$, τότε όλα τα στοιχεία $A \in V$ που μετατίθενται με τα στοιχεία $\varphi(x), \forall x \in G$ είναι ανάλογα του ταυτοτικού στοιχείου, δηλαδή $A = \lambda \mathbf{1}$. Τα λ είναι σταθερές και χαρακτηρίζουν την αναπαράσταση (ταυτότητα της αναπαράστασης).*

Τέλος, για ακόμη βαθύτερη κατανόηση της δομής των ομάδων θα πρέπει να εισάγουμε της έννοια της άλγεβρας. Θα επεκτείνουμε τη δομή των διανυσματικών χώρων προσθέτοντας μία δυαδική πράξη για τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου, η οποία θα δίνει ως αποτέλεσμα ένα νέο στοιχείου του χώρου αυτού.

Ορισμός 1.9. *Μία άλγεβρα (algebra) A με σώμα K (όπως το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{Z}$) είναι ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος με σώμα K εφοδιασμένος με μία δυαδική πράξη $\circ : A \times A \to A$.*

Ένα παράδειγμα άλγεβρας είναι οι μιγαδικοί αριθμοί. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, που αποτελείται από στοιχεία της μορφής:

$$z = a + bi, \quad \text{όπου } a, b \in \mathbb{R} \text{ και } i^2 = -1,$$

αποτελεί μία άλγεβρα με σώμα $\mathbb{R}$, όπου ορίζουμε τη δυαδική πράξη της άλγεβρας ως τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

1.5 Ομάδες και άλγεβρες Lie

Μία ιδιαίτερη κλάση συνεχών ομάδων στη Θεωρητική Φυσική είναι οι ομάδες Lie, καθώς μπορούμε να παραμετροποιήσουμε τα στοιχεία τους και μέσω αυτών να μελετήσουμε τις συνεχείς συμμετρίες των φυσικών συστημάτων. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε τις ομάδες Lie χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Συγκεκριμένα, η διαφορίσιμη πολλαπλότητα (smooth manifold) είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος μπορεί να παραμετροποιηθεί μέσω μίας συνάρτησης του $\mathbb{R}^n$ ή του $\mathbb{C}^n$. Δηλαδή, θα περιγράψουμε μία ομάδα Lie G μέσω μίας παραμετροποίησης των στοιχείων της $g(\vec{a}) \in G$, όπου $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$ το σύνολο των παραμέτρων. Επιπλέον, απαιτούμε οι παραμετροποιήσεις να είναι λείες (smooth), δηλαδή απείρως διαφορίσιμες.

Ορισμός 1.10. *Μία ομάδα Lie G είναι μία πεπερασμένης διάστασης λεία διαφορίσιμη πολλαπλότητα, όπου η δυαδική πράξη μεταξύ των στοιχείων της ομάδας και η αντιστροφή ενός στοιχείου είναι λείες συναρτήσεις, δηλαδή για τα στοιχεία $g(\vec{a_1}), g(\vec{a_2}) \in G$, $g(\vec{a_1}) \circ g(\vec{a_2}) = g(\vec{c})$, όπου $\vec{c} = \vec{c}(\vec{a_1}, \vec{a_2})$ είναι μία λεία συνάρτηση των $\vec{a_1}$ και $\vec{a_2}$, και $g^{-1}(\vec{a}) = g(\vec{c})$, όπου $\vec{c} = \vec{c}(\vec{a})$ είναι μία λεία συνάρτηση του $\vec{a}$.*

Οι ομάδες πινάκων είναι ομάδες Lie, καθώς τα στοιχεία τους είναι πίνακες A, οι οποίοι μπορούν να παραμετροποιηθούν από ένα σύνολο παραμέτρων $\vec{a}$, έτσι ώστε η δράση τους σε ένα στοιχείο $\vec{x}$ ενός διανυσματικού χώρου V (η διάσταση του οποίου επιτρέπει τη δράση του πίνακα A στα στοιχεία του) να μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} x'_i &= [A(\vec{a})\vec{x}]_i \\ &= f_i(\vec{x}, \vec{a}), \end{aligned}$$

όπου x'_i οι συνιστώσες του μετασχηματισμένου $\vec{x}'$. Η συνάρτηση αυτή, f_i, καλείται συνάρτηση σύνθεσης ή γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού (composition function) και λόγω της αναλυτικότητάς της (είναι απείρως διαφορίσιμη) μπορούμε να θεωρήσουμε πως για $\vec{a} = \vec{0}$ παίρνουμε το ταυτοτικό στοιχείο, δηλαδή:

$$f_i(\vec{x}, \vec{0}) = x_i.$$

Θεωρώντας, τώρα, μία μικρή μεταβολή της j-οστής παραμέτρου, αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + dx_i \\ &= f_i(\vec{x}, \vec{0}) + da_j \frac{\partial f_i(\vec{x}, \vec{0})}{\partial a_j} + \dots \\ &\simeq x_i + da_j \frac{\partial f_i(\vec{x}, \vec{0})}{\partial a_j}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει:

$$\begin{aligned} dx_i &= da_j \frac{\partial f_i(\vec{x},\vec{0})}{\partial a_j} \\ &= da_j \left[\frac{\partial A(\vec{0})}{\partial a_j}\vec{x}\right]_i \\ &= [da_j X_j \vec{x}]_i\,, \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε τις ποσότητες:

$$X_j := \frac{\partial A(\vec{0})}{\partial a_j} = \frac{\partial f_i(\vec{x},\vec{0})}{\partial a_j} \tag{1.2}$$

να είναι οι γεννήτορες (generators) της ομάδας Lie (γνωστοί και ως γεννήτορες του μετασχηματισμού). Αν θεωρήσουμε, τώρα, μία φυσική ποσότητα F που θέλουμε να μελετήσουμε, τότε μπορούμε να την αντιπροσωπεύσουμε σε μία συνάρτηση εντός του εκάστοτε διανυσματικού χώρου V. Έτσι, κάτω από την μεταβολή της j-οστής παραμέτρου, ισχύει ότι η ποσότητα μετασχηματίζεται ως:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial f_i(\vec{x},\vec{0})}{\partial a_j} da_j \\ &= da_j \frac{\partial f_i(\vec{x},\vec{0})}{\partial a_j}\frac{\partial F}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Έτσι, ορίζουμε τις ποσότητες:

$$Y_j := \frac{\partial A(\vec{0})}{\partial a_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i(\vec{x},\vec{0})}{\partial a_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

να είναι οι διαφορικοί γεννήτορες της ομάδας Lie (γνωστοί και ως διαφορικοί γεννήτορες (differential generators) του μετασχηματισμού). Αξίζει να σημειωθεί πως ο αριθμός των γεννητόρων μίας ομάδας Lie είναι ίσος με τη διάσταση της διαφορίσιμης πολλαπλότητας που συμπίτει με το πλήθος των ελεύθερων παραμέτρων στην παραμετροποίηση των στοιχείων της ομάδας. Ο μεταθέτης των γεννητόρων μίας ομάδας Lie ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$[X_i, X_j] = iC_{ij}{}^k X_k, \tag{1.4}$$

όπου τα $C_{ij}{}^k$ ονομάζονται σταθερές δομής (structure constants) της ομάδας Lie και είναι αντισυμμετρικά ως προς τα i και j, δηλαδή:

$$C_{ij}{}^k = -C_{ji}{}^k. \tag{1.5}$$

Επιπλεόν, για τους γεννήτορες της ομάδας Lie ισχύει η ταύτοτητα Jacobi:

$$[X_i,[X_j,X_k]] + [X_j,[X_k,X_i]] + [X_k,[X_i,X_j]] = 0. \tag{1.6}$$

Προφανώς, αυτή η ταύτοτητα ικανοποείται και από τις σταθερές δομής της ομάδας Lie στην εξής μορφή:

$$C_{ij}{}^k C_{kl}{}^m + C_{jl}{}^k C_{ki}{}^m + C_{li}{}^k C_{kj}{}^m = 0. \tag{1.7}$$

Προηγουμένως, συζητήσαμε πως μία ομάδα έχει πολλές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, μία ομάδα Lie έχει τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις της που συνήθως έχουν τη μικρότερη δυνατή διάσταση και τις συζυγείς αναπαραστάσεις της που αποτελούνται από τους n πίνακες M_i με στοιχεία:

$$(M_i)_j{}^k = -iC_{ij}{}^k, \tag{1.8}$$

όπου τα $C_{ij}{}^k$ είναι οι σταθερές δομής της ομάδας Lie. Από την ταυτότητα Jacobi, προκύπτει ότι:

$$[M_i, M_j] = iC_{ij}{}^k M_k, \tag{1.9}$$

υποδηλώνοντας πως οι πίνακες των συζυγών αναπαράστασεων ικανοποιούν την ίδια σχέση μετάθεσης με τους γεννήτορες της θεμελιώδους αναπαράστασης της ομάδας Lie.

Έτσι, λοιπόν, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τις άλγεβρες Lie, οι οποίες διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στη Φυσική. Ένα τετριμμένο παράδειγμα είναι το εξωτερικό γίνομενο δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$, το οποίο σχηματίζει μία άλγεβρα Lie. Ένα μη τετριμμένο παράδειγμα είναι οι αγκύλες Poisson από την Κλασσική Μηχανική που σχηματίζουν και αυτές μία άλγεβρα Lie.

Ορισμός 1.11. *Μία άλγεβρα Lie $\mathfrak{L}$ είναι μία άλγεβρα όπου ο μεταθέτης $[,]$, ο οποίος καλείται Lie bracket, ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες $\forall x, y, z \in \mathfrak{L}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$:*

i) $[ax + by, z] = a[x, y] + b[y, z]$,

ii) $[x, y] = -[y, x]$ *και*

iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Για τους γραμμικούς τελεστές με τους οποίους θα ασχοληθούμε σε αυτήν την ερευνητική εργασία, θεωρούμε πως $[x, y] = xy - yx$. Αυτό δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, στο εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ ισχύει πως $[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x} \times \vec{y}$. Μπορεί να υπάρχουν πολλές διαφορετικές ομάδες Lie, οι οποίες να έχουν την ίδια άλγεβρα Lie. Μπορεί κανείς να δείξει πως η $SO(3)$ και η $SU(2)$ αποτελούν ένα τετριμμένο παράδειγμα. Για αυτό, όταν μελετάμε την άλγεβρα Lie μίας ομάδας πινάκων, θα την συμβολίζουμε με καλλιγραφικά και πεζά γράμματα. Για παράδειγμα, θα συμβολίζουμε την άλγεβρα Lie της ομάδας $SU(2)$ με $\mathfrak{su}(2)$.

Τώρα, θα εξετάσουμε τη θεωρία του Lie που αναφέρεται στην εκθετική απεικόνιση και στο πως μπορούμε μέσω της άλγεβρας Lie μίας ομάδας να κατασκευάσουμε τα στοιχεία της αντίστοιχης ομάδας.

Ορισμός 1.12. *Η εκθετική απεικόνιση (exponential map) από την άλγεβρα Lie $\mathfrak{L}$ μίας ομάδας G στην ομάδα G ορίζεται ως $\exp : \mathfrak{L} \to G$, όπου $\forall X \in \mathfrak{L}$, το στοιχείο $x \in G$ δίνεται από:*

$$x = \exp(iX) = \exp\big(ia_i X^i\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia_i X^i)^n}{n!}, \tag{1.10}$$

όπου κάθε στοιχείο X της άλγεβρας Lie $\mathfrak{L}$ μπορεί να γραφτεί στη βάση των γεννητόρων της άλγεβρας, δηλαδή $X = a_i X^i$ με a_i οι σταθερές και X^i οι γεννήτορες.

Θυμόμαστε πως τα στοιχεία της $U(1)$ αναπαρίστανται ως $e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ και τα στοιχεία της $T(1)$ ως $T_a = e^{iaP}$, όπου από τη σχέση (1.1) ο P είναι ο τελεστής της ορμής. Από εδώ καθίσταται σαφές πως ο P είναι ο γεννήτορας της $T(1)$.

Επίσης, θα ασχοληθούμε με τους τελεστές Casimir μίας άλγεβρας Lie, καθώς αυτοί σχετίζονται άμεσα με τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις των ομάδων Lie.

Ορισμός 1.13. *Οι τελεστές Casimir μίας άλγεβρας Lie είναι τα στοιχεία εκείνα τα οποία μετατίθενται με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της άλγεβρας αυτής.*

Από το Λήμμα 1.1 συμπεραίνουμε πως οι τελεστές Casimir είναι ανάλογοι του ταυτοτικού στοιχείου και η σταθερά που χαρακτηρίζει την αναπαράσταση είναι πλεόν η ταυτότητα των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της ομάδας Lie.

1.6 Άλγεβρα και αναπαραστάσεις της ομάδας $SU(2)$

Στο τελευταίο εδάφιο, προτού περάσουμε στη μελέτη των ομάδων Lorentz και Poincaré με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την ομάδα $SU(2)$ ως μία εφαρμογή όλων όσων έχουμε αναφέρει για τις ομάδες Lie, καθώς η $SU(2)$ είναι μία ομάδα Lie ως ομάδα πινάκων. Συγκεκριμένα, θα προσπαθήσουμε να βρούμε τους γεννήτορές της, την άλγεβρα στην οποία υπακούουν αυτοί και τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις τής.

Αρχίζουμε με τον ορισμό της $SU(2)$. Συγκεκριμένα, με βάση τον ορισμό 1.2. η $SU(2)$ περιγράφεται ως:

$$SU(2) := \{U \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(U) = 1 \text{ και } U^\dagger U = \mathbf{1} \text{ ή } U^\dagger = U^{-1}\}. \tag{1.11}$$

Για $X \in \mathfrak{su}(2)$, από την εκθετική απεικόνιση έχουμε πως $\exp(iX) = \exp(ia^i X_i) \in SU(2), \forall a \in \mathbb{R}$, άρα:

$$\begin{aligned} [\exp(ia^i X_i)]^\dagger \exp(ia^i X_i) &= \exp\left(-ia^i X_i^\dagger\right) \exp(ia^i X_i) \\ &= \exp\left[-ia^i(X_i^\dagger - X_i)\right] \\ &= \mathbf{1}, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$X_i^\dagger = X_i. \tag{1.12}$$

Επιπλέον, πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} \det\left[\exp(ia^i X_i)\right] &= \det\left[\mathrm{Tr}(ia^i X_i)\right] \\ &= \det\left[ia^i \,\mathrm{Tr}(X_i)\right] \\ &= 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε μία από τις ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης που αποδεικνύουμε στο Παράρτημα Α: Ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\mathrm{Tr}(X_i) = 0. \tag{1.13}$$

Λόγω των σχέσεων (1.12) και (1.13) μπορούμε να επιλέξουμε ως βάση του χώρου που ορίζει η σχέση (1.11) τους πίνακες σ_1, σ_2 και σ_3, όπου:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{1.14}$$

είναι οι γνωστοί πίνακες του Pauli από την Κβαντική Μηχανική, αφού η $SU(2)$ έχει $2^2 - 1 = 3$ ελεύθερα στοιχεία. Έτσι, κάθε στοιχείο της $SU(2)$ μπορεί να γραφτεί ως $a^i \sigma_i$. Για τη θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$ στις δύο διαστάσεις, οι τρείς γεννήτορές της είναι οι $X_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \forall i = 1, 2, 3$. Ισχύει πως:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ij}{}^k \sigma_k, \forall i = 1, 2, 3,$$

όπου δ_{ij} το δέλτα του Kronecker και ϵ_{ijk} το σύμβολο Levi - Civita. Άρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τον μεταθέτη:

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i \\ &= \delta_{ij} + i\epsilon_{ij}{}^k \sigma_k - \left(\delta_{ji} + i\epsilon_{ji}{}^k \sigma_k\right) \\ &= 2i\epsilon_{ij}{}^k \sigma_k, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ και $\epsilon_{ij}{}^k = -\epsilon_{ji}{}^k$. Δηλαδή, ισχύει:

$$[X_i, X_j] = i\epsilon_{ij}{}^k X_k \tag{1.15}$$

(για αυτό βάλαμε και τον παράγοντα $1/2$ στους γεννήτορες X_i). Παρατηρούμε ότι για τις σταθερές δομής της $SU(2)$ ισχύει $C_{ij}{}^k = \epsilon_{ij}{}^k$.

Για τη συζυγή αναπαράσταση της $SU(2)$ ορίζουμε:

$$(M_i)_j{}^k = -iC_{ij}{}^k = -i\epsilon_{ij}{}^k. \tag{1.16}$$

Υπολογίζουμε τον μεταθέτη:

$$
\begin{aligned}
[M_i, M_j]_l{}^m &= (M_i)_l{}^n (M_j)_n{}^m - (M_j)_l{}^n (M_i)_n{}^m \\
&= -(\epsilon_{il}{}^n \epsilon_{jn}{}^m - \epsilon_{jl}{}^n \epsilon_{in}{}^m) \\
&= -(-\epsilon^n{}_{il} \epsilon_{nj}{}^m + \epsilon^n{}_{jl} \epsilon_{ni}{}^m) \\
&= -(-(\delta_{ij}\delta_l{}^m - \delta_i{}^m \delta_{lj}) + (\delta_{ji}\delta_l{}^m - \delta_j{}^m \delta_{li})) \\
&= -(\delta_i{}^m \delta_{lj} - \delta_j{}^m \delta_{li}) \\
&= \delta_{il}\delta_j{}^m - \delta_i{}^m\, \delta_{lj} \\
&= \epsilon^k{}_{ij} \epsilon_{kl}{}^m \\
&= i\epsilon_{ij}{}^k (-i\epsilon_{kl}{}^m) \\
&= i\epsilon_{ij}{}^k (M_k)_l{}^m,
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ και τις ιδιότητες $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ και $\epsilon_{ij}{}^k = -\epsilon_{ji}{}^k$. Δηλαδή, ισχύει:

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ik}{}^k M_k. \tag{1.17}$$

Έτσι, επιβεβαιώσαμε τη σχέση (1.9), θεωρώντας γνωστή τη σχέση (1.8). Άρα, λοιπόν, για τη συζηγή αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$ μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$M_i = iJ_i, \tag{1.18}$$

όπου:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

οι πίνακες J_1, J_2 και J_3 είναι οι γεννήτορες της άλγεβρας Lie $\mathfrak{so}(3)$, η οποία συνδέεται με την ομάδα στροφών $SO(3)$. Στην Κβαντική Μηχανική, οι γεννήτορες της στροφορμής ικανοποιούν την άλγεβρα Lie που δίνεται από τη σχέση:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}{}^k J_k \tag{1.20}$$

για $\hbar = 1$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την ανάλυση που έχουμε κάνει μέχρι στιγμής μέσω των σχέσεων. (1.17) και (1.18). Από εδώ παρατηρούμε πως δύο διαφορετικές ομάδες Lie, οι $SU(2)$ και $SO(3)$, έχουν την ίδια άλγεβρα Lie, δηλαδή ισχύει ότι $\mathfrak{su}(2) \equiv \mathfrak{so}(3)$.

Τέλος, θα μελετήσουμε τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της $SU(2)$. Για να το κάνουμε αυτό θα αναζητήσουμε τον τελεστή Casimir της άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$. Συγκεκριμένα, ορίζουμε την ποσότητα:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{1.21}$$

Παρατηρούμε πως:

$$
\begin{aligned}
[J^2, J_i] &= [J_j J^j, J_i] \\
&= J_j [J^j, J_i] + [J_j, J_i] J^j \\
&= J_j [\delta^{jl} J_l, J_i] + [J_j, J_i] J^j \\
&= J_j \delta^{jl} [J_l, J_i] + [J_j, J_i] J^j \\
&= J^l [J_l, J_i] + [J_j, J_i] J^j \\
&= J^j [J_j, J_i] + [J_j, J_i] J^j \\
&= J^j (i\epsilon_{jik}) J^k + (i\epsilon_{jik}) J^k J^j \\
&= i\epsilon_{jik} J^j J^k + i\epsilon_{kij} J^j J^k \\
&= i\epsilon_{jik} J^j J^k - i\epsilon_{jik} J^j J^k
\end{aligned}
$$

$$= 0.$$

Αφού $[J^2, J_i] = 0$, τότε ο J^2 είναι ο τελεστής Casimir της άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$. Άρα, από το Λήμμα 1.1 ισχύει $J^2 = \lambda \mathbf{1}$. Δεν θα μας εκπλήξει ίσως το γεγονός ότι η σταθερά είναι $\lambda = j(j+1)$, κάτι το οποίο το γνωρίζουμε από την Κβαντική Μηχανική, καθώς οι αναπαραστάσεις της $SU(2)$ συνδέονται με την έννοια της στροφορμής. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του spin-$\frac{1}{2}$, τότε $j = \frac{1}{2}$, επομένως η σταθερά Casimir είναι:

$$j(j+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}.$$

Η κατάσταση αυτή αναπαριστά τα σωματίδια όπως το ηλεκτρόνιο, το οποίο έχει spin-$\frac{1}{2}$. Στην περίπτωση του spin-1, τότε $j = 1$, επομένως η σταθερά Casimir είναι:

$$j(j+1) = 1(1+1) = 2.$$

Αυτή η αναπαράσταση ισχύει για σωματίδια όπως το φωτόνιο, το οποίο έχει spin-1. Αυτό σημαίνει ότι η παράμετρος j προσδιορίζει την αναπαράσταση της $SU(2)$, και συνεπώς τη συμπεριφορά του σωματιδίου (ή συστήματος) στην Κβαντική Μηχανική.

2 Ομάδες Lorentz και Poincaré

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις ομάδες Lorentz και Poincaré, οι οποίες περιγράφουν τις συμμετρίες της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Στη θεωρία αυτή, ένα σημείο στο χωροχρόνο Minkowski για $D = 4$ αντιστοιχεί σε ένα τετραδιάνυσμα θέσης: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, όπου $x^0 = ct$ και c είναι η ταχύτητα του φωτός (στο υπόλοιπο της εργασίας θα θεωρήσουμε ότι $c = 1$). Αρχικά, θα μελετήσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz που αφορούν περιστροφές και προωθήσεις στο χωροχρόνο, διατηρώντας το μήκος των τετραδιανυσμάτων αναλλοίωτο και πως οι συμμετρίες αυτές περιγράφονται μέσω της ομάδας Lorentz. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς Poincaré, στους οποίους προστίθενται επιπλέον οι μεταθέσεις στο χωροχρόνο, περιγράφοντας τη γενικότερη συμμετρία του χωροχρόνου, διατηρώντας τη διαφορική απόσταση μεταξύ δύο χωροχρονικών σημείων αναλλοίωτη και πως οι συμμετρίες αυτές περιγράφονται μέσω της ομάδας Poincaré.

Επιπλέον, θα επιμείνουμε αρκετά στην εύρεση και περιγραφή των γεννητόρων των ομάδων Lorentz και Poincaré, καθώς και στην αναζήτηση της άλγεβρα Lie που ικανοποιούν, δηλαδή τις σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων. Έτσι, θα οδηγηθούμε στις δύο πολύ γνωστές άλγεβρες Lorentz και Poincaré. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την εκθετική απεικόνιση που συνδέει την άλγεβρα Lorentz με την ομάδα Lorentz και την άλγεβρα Poincaré με την ομάδα Poincaré. Τέλος, θα μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις αυτών των ομάδων, εστιάζοντας στη φυσική σημασία τους. Αυτά τα εδάφια περιλαμβάνουν τη σύνδεση με την Κβαντική Μηχανική, όπου οι συμμετρίες αυτές διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στην περιγραφή των στοιχειωδών σωματιδίων και θα δούμε πως μπορούμε να περιγράψουμε έμμαζα και άμαζα σωματίδια.

Παρά το γεγονός πως η παρούσα ανάλυση που επακολουθεί στις επόμενες παραγράφους για τις ομάδες Lorentz και Poincaré γίνεται για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski, όλοι οι ορισμοί, όλες οι αποδείξεις και όλες οι πράξεις μπορούν να γενικευτούν και για $D > 2$ χωρόχρονους Minkowski.

2.1 Ομάδα Lorentz και η άλγεβρά της

Αρχικά, θα ορίσουμε την αόριστη ομάδα ορθογώνιων πινάκων $O(p, q)$, η οποία χρειάζεται για τον ορισμό της ομάδας Lorentz.

Ορισμός 2.1. *Η αόριστη ορθογώνια ομάδα πινάκων (indefinite orthogonal group) $O(p, q)$ είναι η ομάδα των $(p + q) \times (p + q)$ πινάκων που διατηρούν μία συγκεκριμένη συμμετρική διγραμμική μορφή ορισμένου τύπου. Θεωρούμε τον $(p + q) \times (p + q)$ διαγώνιο πίνακα g, ο οποίος δίνεται από τη σχέση:*

$$g = \mathrm{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q}),$$

όπου τα πρώτα p στοιχεία είναι ίσα με -1, και τα επόμενα q στοιχεία είναι ίσα με 1. Ορίζουμε μία συμμετρική διγραμμική μορφή $[\cdot, \cdot]_{p,q}$ στον χώρο $\mathbb{R}^{p+q}$ ως εξής:

$$[x, y]_{p,q} = \langle x, gy \rangle,$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^{p+q}$. Αυστηρά, η μορφή δίνεται από:

$$[x, y]_{p,q} = -x_1 y_1 - \cdots - x_p y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \cdots + x_{p+q} y_{p+q}.$$

Η ομάδα $O(p, q)$ αποτελείται από όλους τους $(p+q) \times (p+q)$ πίνακες A που διατηρούν τη διγραμμική μορφή $[\cdot, \cdot]_{p,q}$:

$$O(p, q) = \{A \in M_{(p+q)\times(p+q)}(\mathbb{R}) \mid [Ax, Ay]_{p,q} = [x, y]_{p,q},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{p+q}\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\langle Ax, gAy \rangle = \langle x, gy \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{p+q}.$$

Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με την εξής ιδιότητα για τον πίνακα $A \in O(p, q)$:

$$g^{-1} A^{\mathrm{T}} g = A^{-1} \quad \acute{\eta} \quad A^T g A = g.$$

Αξίζει να σημειωθεί πως μπορούμε να ορίσουμε την ειδική αόριστη ομάδα ορθογώνιων πινάκων (special indefinite orthogonal group) $SO(p,q)$ απαιτώντας επιπλεόν να ισχύει $\det(A) = 1$. Τέλος, για $p = n$ και $q = 0$ προκύπτουν οι ομάδες $O(n)$ (ομάδα ορθογώνιων πινάκων) και $SO(n)$ (ειδική ομάδα ορθογώνιων πινάκων) που έχουμε ορίσει για τον Ευκλείδειο χώρο.

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας επιβάλλει η χωροχρονική απόσταση να είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, δηλαδή:

$$s^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu,$$

όπου $\eta = \text{diag}(-1,1,1,1)$ η μετρική Minkoswki για $D = 4$. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός που διατηρεί αναλλοίωτη την απόσταση μεταξύ δύο χωροχρονικών σημείων στο χωροχρόνο Minkowski είναι ο μετασχηματισμός Lorentz. Αυτός ο μετασχηματισμός είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός των χωροχρονικών συντεταγμένων της μορφής:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \text{όπου} \quad \Lambda^T\eta\Lambda = \eta.$$

Οι μετασχηματισμοί Lorentz με $\det(\Lambda) = +1$ ονομάζονται ορθοί (proper), ενώ οι μετασχηματισμοί $\det(\Lambda) = -1$ ονομάζονται καταχρηστικοί (improper). Επιπλεόν, οι μετασχηματισμοί με $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ονομάζονται ορθόχρονοι (orthochronous), ενώ οι μετασχηματισμοί με $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ ονομάζονται μη-ορθόχρονοι (non-orthochronous). Αποδεικνύεται πως η ορίζουσα του μετασχηματισμού και το πρόσημο του στοιχείου $\Lambda^0{}_0$ είναι Lorentz αναλλοίωτα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατηγοριοποίηση των μετασχηματισμών Lorentz. Πράγματι, προκύπτουν οι εξής κατηγορίες:

i) Ορθοί ορθόχρονοι $\Lambda_+^\uparrow$ με $\det(\Lambda) = +1$ και $\Lambda^0{}_0 \geq 1$.

ii) Ορθοί μη-ορθόχρονοι $\Lambda_+^\downarrow$ με $\det(\Lambda) = +1$ και $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.

iii) Καταχρηστικοί ορθόχρονοι $\Lambda_-^\uparrow$ με $\det(\Lambda) = -1$ και $\Lambda^0{}_0 \geq 1$.

iv) Καταχρηστικοί μη-ορθόχρονοι $\Lambda_-^\downarrow$ με $\det(\Lambda) = -1$ και $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.

Τα τέσσερα αυτά τμήματα είναι μεταξύ τους ασύνδετα, δηλαδή είναι αδύνατον να μεταβούμε από το ένα στο άλλο με συνεχή τρόπο. Για να μεταβούμε από έναν ορθόχρονο ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$) σε έναν μη-ορθόχρονο ($\Lambda^0{}_0 \leq -1$) μετασχηματισμό, θα πρέπει το στοιχείο $\Lambda^0{}_0$ να μειωθεί μέχρι να γίνει ίσο με 1 και μετά να κάνει ένα άλμα για να γίνει -1. Επίσης, αφού η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση των παραμέτρων της, δεν μπορεί να μεταβεί συνεχώς από την τιμή $\det(\Lambda) = +1$ στην $\det(\Lambda) = -1$. Έτσι, συμπεραίνουμε πως μόνο τα στοιχεία του $\Lambda_+^\uparrow$ είναι συνεχώς συνδεδεμένα με το ταυτοτικό. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε την ομάδα Lorentz.

Ορισμός 2.2. *Η ομάδα Lorentz (Lorentz group) $O(1,3)$ για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski είναι η ομάδα που περιλαμβάνει του πίνακες $\Lambda^\mu{}_\nu$ των γραμμικών μετασχηματισμών των χωροχρονικών συντεταγμένων της μορφής $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, οι οποίοι αφήνουν την ποσότητα $s^2 = x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu$ αναλλοίωτη, γνωστοί ως μετασχηματισμοί Lorentz, και η δυαδική πράξη είναι το γινόμενο πινάκων. Επιπλέον, η ορθή ορθόχρονη ομάδα Lorentz (restricted Lorentz group) $SO^+(1,3)$ είναι η υποομάδα της ομάδας Lorentz για την οποία ισχύει* $\det(\Lambda) = 1$ *(ορθή) και* $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ *(ορθόχρονη).*

Ορίζουμε δύο διακριτούς μετασχηματισμούς που ανήκουν στην ομάδα Lorentz.

- Αντιστροφή χρόνου $T = \text{diag}(-1,1,1,1)$ με $\det(T) = -1$ και $T^0{}_0 = -1$, δηλαδή $T \in \Lambda_-^\downarrow$.

- Αντιστροφή χώρου $P = \text{diag}(1,-1,-1,-1)$ με $\det P = -1$ και $P^0{}_0 = +1$, δηλαδή $P \in \Lambda_-^\uparrow$.

Παρατηρούμε το αξιοθαύμαστο γεγονός πως αν $\Lambda \in SO^+(1,3)$, τότε όλοι οι άλλοι μετασχηματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν μέσω αυτού και των διακριτών μετασχηματισμών T και P που ορίσαμε:

- Ορθοί ορθόχρονοι $\Lambda_+^\uparrow$.

- Ορθοί μη-ορθόχρονοι $\Lambda^{\downarrow}_{+} = \Lambda^{\uparrow}_{+} PT$ με $\det(\Lambda) = +1$ και $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$.
- Καταχρηστικοί ορθόχρονοι $\Lambda^{\uparrow}_{-} = \Lambda^{\uparrow}_{+} P$ με $\det(\Lambda) = -1$ και $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$.
- Καταχρηστικοί μη-ορθόχρονοι $\Lambda^{\downarrow}_{-} = \Lambda^{\uparrow}_{+} T$ με $\det(\Lambda) = -1$ και $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$.

Επομένως, θα επικεντρωθούμε στους μετασχηματισμούς της $SO^{+}(3,1)$ από εδώ και στο εξής. Αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο μίας προώθησης και μίας στροφής στο χωροχρόνο, $\Lambda = \Lambda(\vec{\beta})\Lambda(\tilde{R})$. Δηλαδή, οι μετασχηματισμοί του $SO^{+}(3,1)$ μπορούν να παραμετροποιηθούν με συνολικά 6 παραμέτρους: 3 για τις προωθήσεις και 3 για τα στροφές. Αυτό, μπορούμε να το δούμε θεωρώντας έναν απειροστό μετασχηματισμό Lorentz:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}.$$

Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\eta_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta}, \\
(\delta^{\mu}_{\alpha} + \omega^{\mu}_{\alpha})(\delta^{\nu}{}_{\beta} + \omega^{\nu}{}_{\beta})\eta_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

και κρατώντας όρους μέχρι τάξη $\mathcal{O}(\omega)$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}\eta_{\mu\nu} + \delta^{\mu}{}_{\alpha}\omega^{\nu}{}_{\beta}\eta_{\mu\nu} + \omega^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}\eta_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta}, \\
\eta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} &= \eta_{\alpha\beta}, \\
\omega_{\alpha\beta} &= -\omega_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, οι παράμετροι του μετασχηματισμού πρέπει να είναι αντισυμμετρικές. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν 6 ελεύθερες παράμετροι. Ισχύει ότι ο απειροστός μετασχηματισμός Lorentz γράφεται στη μορφή:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

και επιπλέον μπορούμε, χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες του μετασχηματισμού, να τον εκφράσουμε στη μορφή:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x^{\mu}.$$

Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned}
\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} &= \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x^{\mu}, \\
\eta_{\kappa\mu}\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} &= \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\eta_{\kappa\mu}x^{\mu}, \\
\omega_{\kappa\nu}x^{\nu} &= \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_{\kappa}.
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας την αντισυμμετρική της παραπάνω σχέσης:

$$-\omega_{\nu\kappa}x^{\nu} = \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_{\kappa}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$(\omega_{\kappa\nu} - \omega_{\nu\kappa})x^{\nu} = i\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_{\kappa}.$$

Τώρα, επεξεργαζόμαστε το αριστερό μελός:

$$\begin{aligned}
\omega^{\alpha\beta}\left(\eta_{\kappa\alpha}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\nu\alpha}\eta_{\beta\kappa}\right)x^{\nu} &= i\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_{\kappa}, \\
\omega^{\alpha\beta}\left(x_{\beta}\eta_{\kappa\alpha} - x_{\alpha}\eta_{\beta\kappa}\right) &= i\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_{\kappa},
\end{aligned}$$

$$\omega^{\alpha\beta}\left(x_\beta\eta_{\kappa\alpha} - x_\alpha\eta_{\kappa\beta}\right) = i\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_\kappa.$$

Δηλαδή, χρησιμοποιώντας ότι $\partial_\nu x_\mu = \eta_{\mu\nu}$ έχουμε:

$$\omega^{\alpha\beta}(x_\beta\partial_a - x_\alpha\partial_\beta)x_\kappa = i\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_\kappa,$$
$$i\omega^{\alpha\beta}(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_a)x_\kappa = \omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}x_\kappa.$$

Έτσι, καταλήξαμε στη διαφορική αναπαράσταση των γεννητόρων πάνω στις συντεταγμένες της ομάδας $SO^+(1,3)$ που είναι:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu). \tag{2.1}$$

Θα υπολογίσουμε την άλγεβρα Lie των γεννητόρων:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -[x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho] \\
&= -\Big\{[x_\mu\partial_\nu, x_\rho\partial_\sigma] - [x_\mu\partial_\nu, x_\sigma\partial_\rho] - [x_\nu\partial_\mu, x_\rho\partial_\sigma] + [x_\nu\partial_\mu, x_\sigma\partial_\rho]\Big\} \\
&= -\Big\{x_\mu\partial_\nu x_\rho\partial_\sigma - x_\rho\partial_\sigma x_\mu\partial_\nu - x_\mu\partial_\nu x_\sigma\partial_\rho + x_\sigma\partial_\rho x_\mu\partial_\nu \\
&\quad - x_\nu\partial_\mu x_\rho\partial_\sigma + x_\rho\partial_\nu x_\sigma\partial_\mu + x_\nu\partial_\mu x_\sigma\partial_\rho - x_\sigma\partial_\rho x_\nu\partial_\mu\Big\} \\
&= -\Big\{x_\mu\eta_{\rho\nu}\partial_\sigma - x_\rho\eta_{\mu\sigma}\partial_\nu - x_\mu\eta_{\sigma\nu}\partial_\rho + x_\sigma\eta_{\mu\rho}\partial_\nu \\
&\quad - x_\nu\eta_{\rho\mu}\partial_\sigma + x_\rho\eta_{\sigma\nu}\partial_\mu + x_\nu\eta_{\sigma\mu}\partial_\rho - x_\sigma\eta_{\nu\rho}\partial_\mu\Big\} \\
&= i(\eta_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\sigma\nu}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\sigma\nu}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}). \tag{2.2}$$

Τώρα, μπορούμε να ορίσουμε του γεννήτορες των στροφών J_i και των προωθήσεων K_i μέσω της διαφορικής αναπράστασης των γεννητόρων του μετασχηματιμσού Lorentz ως:

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}J^k \Leftrightarrow J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \tag{2.3}$$

και

$$M_{0i} = K_i \Leftrightarrow K_i = M_{0i}. \tag{2.4}$$

Οι γεννήτορες αυτοί ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}{}^k J_k, \tag{2.5}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ij}{}^k K_k, \tag{2.6}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ij}{}^k J_k. \tag{2.7}$$

Η σχέση (2.2) μόνη της ή οι σχέσεις (2.5) και (2.7) μαζί εναλλακτικά ορίζουν την άλγεβρα της ομάδας Lorentz, δηλαδή τη γνωστή άλγεβρα Lorentz (Lorentz algebra) για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski.

Τέλος, αφού γνωρίζουμε τους γεννήτορες της άλγεβρας της Lorentz, χρησιμοποιώντας την εκθετική απεικόνιση $\forall\Lambda \in SO^+(1,3)$ ισχύει ότι:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left[\exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\right]^\mu{}_\nu, \tag{2.8}$$

δηλαδή οποιοσδήποτε μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να παρασταθεί ως εκθετική απεικόνιση ενός συνδυασμού των γεννητόρων της άλγεβρας Lorentz.

Στην ανάλυση που μόλις προηγήθηκε στην υποενότητα αυτή, όλα τα παραπάνω αποτελέσματα τα μελετήσαμε για την περίπτωση όπου έχουμε $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski. Προφανώς, όλα αυτά μπορούν να γενικευθούν και για $D > 2$ χωρόχρονους Minkowski, όπου τότε στη συγκεκριμένη περίπτωση θα μελετά κανείς τις ομάδες $O(1, D-1)$ και $SO^+(1, D-1)$ και τις αντίστοιχες άλγεβρές τους.

2.2 Ομάδα Poincaré και η άλγεβρά της

Η ομάδα Lorentz μπορεί να επεκταθεί αν συμπεριλάβουμε στην άλγεβρα Lie και ένα γενικότερο σύνολο μεταθέσεων στο χωρόχρονο. Η ομάδα που προκύπτει ονομάζεται ομάδα Poincaré και έχει 10 ελεύθερες παραμέτρους (6 για τις προωθήσεις και τις στροφές στο σύνολο και 4 για τις μεταθέσεις). Οι μετασχηματισμοί αυτοί, γνωστοί ως μετασχηματισμοί Poincaré, είναι της μορφής:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu, \quad \text{όπου} \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta.$$

Οι μετασχηματισμοί Poincaré αφήνουν αναλλοίωτη την ποσότητα ds^2, δηλαδή:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu.$$

Προτού ορίσουμε την ομάδα Poincaré αξίζει να σημειωθεί πως η επέκταση της $O(1,3)$ θα πραγματοποιηθεί παίρνοντας το ημι-ευθύ γινόμενό της με την $T(1,3)$, όπου η $T(1,3)$ είναι η ομάδα μεταθέσεων στο χώρο Minkowski, περιγράφοντας 1 χρονική και 3 χωρικές μεταθέσεις.

Ορισμός 2.3. *Η ομάδα Poincaré (Poincaré group) $O(1,3) \rtimes T(1,3)$ στο χωρόχρονο Minkowski για $D = 4$ είναι η ομάδα που περιλαμβάνει ως στοιχεία τα $g = (\Lambda, \alpha)$, όπου τα Λ^μ_ν και α^μ περιγράφουν τους γραμμικούς μετασχηματισμούς της μορφής $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu$, οι οποίοι αφήνουν την ποσότητα $ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dx'_\mu dx'^\mu$ αναλλοίωτη, γνωστοί ως μετασχηματισμοί Poincaré, και η δυαδική πράξη ορίζεται ως $(\Lambda_1, \alpha_1) \circ (\Lambda_2, \alpha_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 \alpha_2 + \alpha_1)$. Επιπλέον, η ορθή ορθόχρονη ομάδα Poincaré (restricted Poincaré group) $SO^+(1,3) \rtimes T(1,3)$ είναι η υποομάδα της ομάδας Poincaré για την οποία ισχύει* $\det(\Lambda) = 1$ *(ορθή) και $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (ορθόχρονη).*

Από τον ορισμό καταλαβαίνουμε πως η $SO^+(1,3)$ δεν είναι κανονική υποομάδα της ομάδας Poincaré, ενώ η $T(1,3)$ είναι.

Έχοντας εισάγει και τις μεταθέσεις στους μετασχηματισμούς Poincaré προκύπτουν επιπλέον άλλες 4 ελεύθερες παράμετροι. Έτσι, χρειαζόμαστε 10 ελεύθερες παραμέτρους για να παραμετροποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Poincaré. Ο απειροστός μετασχηματισμός Poincaré είναι:

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu + \alpha^\mu,$$

και χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες του μετασχηματισμού μπορούμε να τον εκφράσουμε στη μορφή:

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} x^\mu + i\alpha^\rho P_\rho x^\mu.$$

Δηλαδή, για να βρούμε τον γεννήτορα των μεταθέσεων θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned}
\alpha^\mu &= i\alpha^\rho P_\rho x^\mu, \\
-i\eta_{\kappa\mu}\alpha^\mu &= \alpha^\rho P_\rho \eta_{\kappa\mu} x^\mu, \\
-i\alpha_\kappa &= \alpha^\rho P_\rho x_\kappa, \\
-i\eta_{\kappa\rho}\alpha^\rho &= \alpha^\rho P_\rho x_\kappa, \\
-i\partial_\rho x_\kappa \alpha^\rho &= \alpha^\rho P_\rho x_\kappa.
\end{aligned}$$

Από εδώ καταλαβαίνουμε ότι:

$$P_\rho x_\kappa = -i\partial_\rho x_\kappa,$$

δηλαδή καταλήγουμε στη σχέση:

$$P_\rho = -i\partial_\rho. \tag{2.9}$$

Οι γεννήτορες των μεταθέσεων ικανοποιούν την εξής σχέση:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{2.10}$$

Άρα, μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη σχέση μετάθεσης των γεννητόρων των προωθήσεων και των στροφών με εκείνους των μεταθέσεων. Ισχύει ότι:

$$[x_\mu, P_\nu] = i\eta_{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

(όπου το γνωρίζουμε από την Κβαντική Μηχανική για $\hbar = 1$) και άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= [i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), P_\rho] \\
&= [-x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu, P_\rho] \\
&= -[x_\mu P_\nu, P_\rho] + [x_\nu P_\mu, P_\rho] \\
&= -x_\mu [P_\nu, P_\rho] - [x_\mu, P_\rho] P_\nu + x_\nu [P_\mu, P_\rho] + [x_\nu, P_\rho] P_\mu \\
&= -[x_\mu, P_\rho] P_\nu + [x_\nu, P_\rho] P_\mu \\
&= -i\eta_{\mu\rho} P_\nu + i\eta_{\nu\rho} P_\mu \\
&= -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu + \eta_{\nu\rho} P_\mu).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι:

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu). \tag{2.12}$$

Οι σχέσεις (2.2), (2.10) και (2.11) ορίζουν την άλγεβρα της ομάδας Poincaré, γνωστή ως άλγεβρα Poincaré (Poincaré algebra) για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες των προωθήσεων, των στροφών και των μεταθέσεων, η άλγεβρα Poincaré για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski ορίζεται μέσω των σχέσεων:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{2.13}$$

$$[J_i, P_0] = 0, \tag{2.14}$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ij}{}^k P_k, \tag{2.15}$$

$$[K_i, P_0] = -iP_i, \tag{2.16}$$

$$[K_i, P_j] = i\eta_{ij} P_0, \tag{2.17}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ij}{}^k J_k, \tag{2.18}$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}{}^k J_k, \tag{2.19}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ij}{}^k K_k, \tag{2.20}$$

υπολογίζοντας τους αντίστοιχους μεταθέτες.

Τέλος, αφού γνωρίζουμε τους γεννήτορες της άλγεβρας Poincaré, χρησιμοποιώντας την εκθετική απεικόνιση $\forall g \in SO^+(1,3) \rtimes T(1,3)$ ισχύει ότι:

$$g = exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} + i\alpha^\mu P_\mu\right), \tag{2.21}$$

δηλαδή οποιοσδήποτε μετασχηματισμός Poincaré μπορεί να παρασταθεί ως εκθετική απεικόνιση ενός συνδυασμού των γεννητόρων της άλγεβρας Poincaré.

Στην ανάλυση που μόλις προηγήθηκε στην υποενότητα αυτή, όλα τα παραπάνω αποτελέσματα τα μελετήσαμε για την περίπτωση όπου έχουμε $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski. Προφανώς, όλα αυτά μπορούν να γενικευθούν και για $D > 2$ χωρόχρονους Minkowski, όπου τότε στη συγκεκριμένη περίπτωση θα μελετά κανείς τις ομάδες $O(1, D-1) \rtimes T(1, D-1)$ και $SO^+(1, D-1) \rtimes T(1, D-1)$ και τις αντίστοιχες άλγεβρές τους.

Έχοντας πλέον μελετήσει τις άλγεβρες Lorentz και Poincaré για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski αναλυτικά, το επόμενο βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι η μελέτη των αναπαραστάσεων των ομάδων αυτών. Στις επόμενες υποενότητες θα μελετήσουμε τις αναπαταστάσεις των ομάδων αυτών και θα δούμε πως περιγράφουμε στις θεωρίες πεδίου σωματίδια και πεδία, τα οποία θα μας χρειαστούν αργότερα, όταν θα χρειαστεί να διατυπώσουμε τη δράση που μας δίνει τις εξισώσεις κίνησης του πεδίου και της φυσικής θεωρίας που μελετάμε.

2.3 Αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz

Όλα αυτά που αναφέρουμε σε αυτήν την υποενότητα ισχύουν $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski, δηλαδή για την ομάδα Lorentz $O(1,3)$. Η άλγεβρα της ομάδας Lorentz ορίζεται από τις σχέσεις μεταθέσεων των γεννητόρων (2.5), (2.6) και (2.7). Για την απλοποίηση της άλγεβρας, ορίζουμε τους συνδυασμούς $J_i^{\pm} = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i)$. Αυτοί ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$[J_i^+, J_j^+] = i\epsilon_{ij}{}^k J_k^+, \tag{2.22}$$
$$[J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ij}{}^k J_k^-, \tag{2.23}$$
$$[J_i^+, J_j^-] = 0. \tag{2.24}$$

Αυτή η αποσύνθεση δείχνει ότι μεταξύ της άλγεβρας Lorentz και της άλγεβρας $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ υπάρχει ένας ομομορφισμός. Οι αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lorentz κατασκευάζονται από τις αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(2)$, οι οποίες χαρακτηρίζονται από έναν ημι-ακέραιο j. Κάθε αδιαίρετη αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2)$ έχει διάσταση $2j + 1$. Για την ομάδα Lorentz, οι αναπαραστάσεις σημειώνονται με δύο ημι-ακέραιους αριθμούς (j_+, j_-), που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές των δύο τελεστών Casimir της $\mathfrak{su}(2)$. Η διάσταση μίας αναπαράστασης της ομάδας Lorentz δίνεται ως εξής:

$$\dim(j_+, j_-) = (2j_+ + 1)(2j_- + 1). \tag{2.25}$$

Οι κύριες πεπερασμένων διαστάσεων αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz είναι οι εξής:

i) Βαθμωτό (scalar) $(0, 0)$: Αντιπροσωπεύει αντικείμενα που είναι αναλλοίωτα υπό μετασχηματισμούς Lorentz, όπως τα βαθμωτά μεγέθη ή πεδία.

ii) Σπίνορες (spinors) $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, \frac{1}{2})$: Αντιπροσωπεύουν φερμιόνια, που μετασχηματίζονται υπό τις δύο μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις spin-$\frac{1}{2}$ της ομάδας Lorentz. Αυτές αντιστοιχούν στα αριστερόστροφους (left-handed) και δεξιόστροφους (right-handed) σπίνορες Weyl.

iii) Τετραδιάνυσμα (vector) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: Αντιπροσωπεύει αντικείμενα όπως τα τετραδιανύσματα (*π.χ.*, το ηλεκτρομαγνητικό τανυστικό δυναμικό A^μ).

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τις κύριες πεπερασμένων διαστάσεων αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz:

Αναπαράσταση	Διάσταση	Τύπος
$(0, 0)$	1	Βαθμωτό μέγεθος ή πεδίο (scalar)
$(\frac{1}{2}, 0)$	2	Αριστερόστροφος σπίνορας (left-handed spinor)
$(0, \frac{1}{2})$	2	Δεξιόστροφος σπίνορας (right-handed spinor)
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4	Τετραδιάνυσμα (vector)

Πίνακας 2.1: Κατηγορίες αναπαραστάσεων με τις αντίστοιχες διαστάσεις και τύπους.

Στο επόμενο εδάφιο θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε τις σπινοριακές αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz. Δηλαδή, θα ασχοληθούμε με τις αναπαραστάσεις που αναφέρονται στους αριστερόστροφους και δεξιόστροφους σπίνορες.

2.4 Σπινοριακές αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz

2.4.1 Σπίνορες Weyl

Σε αυτό το εδάφιο θα μελετήσουμε τις σπινοριακές αναπραστάσεις (spinor representations) της ομάδας Lorentz εισάγοντας τους σπίνορες Weyl.

Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας ομομορφισμός μεταξύ των ομάδων $SO^{+}(1,3)$ και $SL(2,\mathbb{C})$. Αυτός ο ομομορφισμός, με $\Lambda \in SO^{+}(1,3)$ και $\mathcal{M} \in SL(2,\mathbb{C})$, δίνεται ρητά ως εξής:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\mathcal{M}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\sigma^{\mu}\mathcal{M}\bar{\sigma}_{\nu}\mathcal{M}^{\dagger}], \tag{2.26}$$

$$\mathcal{M}(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \pm\frac{1}{\sqrt{\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\sigma}_{\mu}\sigma^{\nu})}}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\sigma}_{\mu}\sigma^{\nu}, \tag{2.27}$$

όπου $\sigma^{\mu} = (\mathbf{1},\vec{\sigma}) = \bar{\sigma}_{\mu}$ και $\bar{\sigma}^{\mu} = (-\mathbf{1},\vec{\sigma}) = \sigma_{\mu}$ με $\vec{\sigma}$ οι πίνακες Pauli που έχουμε ορίσει στη σχέση (2.5). Για να αποδείξουμε τον ομομορφισμό, πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\mathcal{M})\Lambda^{\nu}{}_{\rho}(\tilde{\mathcal{M}}) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\mathcal{M}\tilde{\mathcal{M}}).$$

Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\mathcal{M}\tilde{\mathcal{M}}) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\Big(\sigma^{\mu}\mathcal{M}\tilde{\mathcal{M}}\bar{\sigma}_{\rho}\tilde{\mathcal{M}}^{\dagger}\mathcal{M}^{\dagger}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}\bar{\sigma}_{\nu}\mathcal{M}^{\dagger}\sigma^{\mu}\big)\,\mathrm{Tr}\Big(\tilde{\mathcal{M}}\bar{\sigma}_{\rho}\tilde{\mathcal{M}}^{\dagger}\sigma^{\nu}\Big) \\
&= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\mathcal{M})\Lambda^{\nu}{}_{\rho}(\tilde{\mathcal{M}}),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(M_1M_2) &= \frac{1}{2}\sum_{\mu}\mathrm{Tr}(M_1\sigma_{\mu})\,\mathrm{Tr}(\sigma_{\mu}M_2) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(M_1\bar{\sigma}_{\mu})\,\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu}M_2).
\end{aligned}$$

Αυτή η αντιστοιχία δύο προς ένα σημαίνει ότι μεταξύ της $SO^{+}(1,3)$ και της $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, με $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, υπάρχει ένας ομομορφισμός. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι ο ομομορφισμός αυτός μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως. Αρχικά, θεωρούμε ότι έχουμε ένα γενικό ερμιτιανό πίνακα 2×2, ο οποίος μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

όπου: $\det(\mathbf{x}) = -\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$, δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα αυτού είναι η αρνητική νόρμα του τετραδιανύσματος της θέσης x^{μ}. Άρα, η γραμμική απεικόνιση που μπορούμε να θεωρήσουμε, δηλαδή ο ομομορφισμός που ψάχνουμε, είναι η εξής:

$$\mathbf{x} = \bar{\sigma}_{\mu}x^{\mu}$$

και αντίστοιχα:

$$x^{\mu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu}\mathbf{x}).$$

Έτσι, μπορούμε να εξετάσουμε τις αναπαραστάσεις της $SL(2,\mathbb{C})$ αντί της ομάδας Lorentz, όταν περιγράφουμε σωματίδια. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν δύο μη ισοδύναμες θεμελιώδεις αναπαραστάσεις φ της $SL(2,\mathbb{C})$. Συγκεκριμένα:

i) Η αυτοαναπαράσταση (self-representation) $\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ που δρα σε ένα μιγαδικό στοιχείο ψ, με δύο συνιστώσες, ενός διανυσματικού χώρου V:

$$\psi'_{\mathsf{A}} = (\mathcal{M})_{\mathsf{A}}{}^{\mathsf{B}}\psi_{\mathsf{B}}, \quad \mathsf{A},\mathsf{B} = 1,2. \tag{2.28}$$

ii) Η μιγαδική συζυγής αυτοαναπαράσταση (complex conjugate self-representation) $\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^*$ που δρα σε ένα μιγαδικό στοιχείο $\bar{\psi}$, με δύο συνιστώσες, ενός διανυσματικού χώρου $\bar{V}$:

$$\bar{\psi}'_{\dot{\mathsf{A}}} = (\mathcal{M}^*)_{\dot{\mathsf{A}}}{}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}, \quad \dot{\mathsf{A}}, \dot{\mathsf{B}} = 1, 2. \tag{2.29}$$

Τα μιγαδικά στοιχεία ψ και $\bar{\psi}$ σε αυτούς τους διανυσματικούς χώρους ονομάζονται αριστερόστροφοι και δεξιόστροφοι σπίνορες Weyl (left and right-handed Weyl spinors), αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ο αριστερόστροφος Weyl σπίνορας ψ ανήκει στην αναπαράσταση $(\frac{1}{2}, 0)$ και ο νόμος μετασχηματισμού του δίνεται από τη σχέση (2.28) με $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(\frac{1}{2},0)}$ να ανήκει στην αναπαράσταση $(\frac{1}{2}, 0)$. Αντίστοιχα, ο δεξιόστροφος Weyl σπίνορας $\bar{\psi}$ ανήκει στην αναπαράσταση $(0, \frac{1}{2})$ και ο νόμος μετασχηματισμού του δίνεται από τη σχέση (2.29) με $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_{(0,\frac{1}{2})}$ να ανήκει στην αναπαράσταση $(0, \frac{1}{2})$. Οι τελείες στους δείκτες για τη συζυγή αναπαράσταση είναι εκεί για να μας βοηθήσουν να θυμόμαστε ποια αναπαράσταση χρησιμοποιούμε και δεν φέρουν καμία επιπλέον φυσική σημασία.

Μπορούμε να αναβιβάζουμε και να καταβιβάζουμε τους δείκτες στους σπίνορες Weyl χρησιμοποιώντας τους πίνακες:

$$\epsilon_{\mathsf{AB}} = \epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

$$\epsilon^{\mathsf{AB}} = \epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\psi^{\mathsf{A}} = \epsilon^{\mathsf{AB}}\psi_{\mathsf{B}}, \quad \psi_{\mathsf{A}} = \epsilon_{\mathsf{AB}}\psi^{\mathsf{B}}$$

και

$$\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}} = \epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}, \quad \bar{\psi}_{\dot{\mathsf{A}}} = \epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$\epsilon^{\mathsf{A}\Gamma}\epsilon_{\Gamma\mathsf{B}} = \delta^{\mathsf{A}}_{\mathsf{B}} \tag{2.32}$$

και

$$\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\Gamma}}\epsilon_{\dot{\Gamma}\dot{\mathsf{B}}} = \delta^{\dot{\mathsf{A}}}_{\dot{\mathsf{B}}}. \tag{2.33}$$

Αφού η εξίσωση (2.28) δίνει το $\mathcal{M}$ σε όρους των πινάκων Pauli, η δομή των δεικτών τους πρέπει να είναι $(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\mathsf{A}}\mathsf{A}}$ και $(\bar{\sigma}_\mu)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}}$. Έτσι,η σχέση μεταξύ των αριστερόστροφων ψ και δεξιόστροφων $\bar{\psi}$ σπινόρων Weyl μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$(\bar{\sigma}_0)^{\dot{\mathsf{A}}\mathsf{A}}(\psi_{\mathsf{A}})^* = \bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}.$$

Επειδή $(\bar{\sigma}_0)^{\dot{\mathsf{A}}\mathsf{A}} = \delta^{\dot{\mathsf{A}}\mathsf{A}}$ από εδώ και στο εξής συχνά θα παραλείπουμε τον πίνακα και απλώς θα γράφουμε:

$$(\psi_{\mathsf{A}})^* = \bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}. \tag{2.34}$$

Παρατηρούμε ότι από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τον ερμιτιανό συζυγή:

$$(\psi_{\mathsf{A}})^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\mathsf{A}}} \tag{2.35}$$

και

$$(\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{A}}})^\dagger = \psi_{\mathsf{A}}. \tag{2.36}$$

Έχουμε δει μέσω των σχέσεων (2.28) και (2.29) τον μετασχηματισμό των ψ_{A} και $\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{A}}}$, αντίστοιχα. Τώρα, θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε τον μετασχηματισμό των ψ^{A} και $\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}$. Συγκεκριμένα, κάνοντας τις πράξεις, ισχύει ότι:

$$\epsilon^{\mathsf{AB}}\left(\mathcal{M}_{(\frac{1}{2},0)}\right)_{\mathsf{B}}{}^{\Gamma}\epsilon_{\Gamma\Delta} = \epsilon^{\mathsf{AB}}\left(\mathcal{M}\right)_{\mathsf{B}}{}^{\Gamma}\epsilon_{\Gamma\Delta} = \left(\left((\mathcal{M})^T\right)^{-1}\right)^{\mathsf{A}}{}_{\Delta} = \left((\mathcal{M})^{-1}\right)_{\Delta}{}^{\mathsf{A}} \tag{2.37}$$

και

$$\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\left(\mathcal{M}_{(0,\frac{1}{2})}\right)_{\dot{\mathsf{B}}}{}^{\dot{\Gamma}}\epsilon_{\dot{\Gamma}\dot{\Delta}}=\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\left(\mathcal{M}^*\right)_{\dot{\mathsf{B}}}{}^{\dot{\Gamma}}\epsilon_{\dot{\Gamma}\dot{\Delta}}=\left(\left((\mathcal{M}^*)^T\right)^{-1}\right)^{\dot{\mathsf{A}}}{}_{\dot{\Delta}}=\left((\mathcal{M}^*)^{-1}\right)_{\dot{\Delta}}{}^{\dot{\mathsf{A}}}. \tag{2.38}$$

Τώρα, είμαστε σε θέση να βρούμε τον μετασχηματισμό των ψ^{A} και $\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}$. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\psi'_{\mathsf{A}}&=(\mathcal{M})_{\mathsf{A}}{}^{\mathsf{B}}\psi_{\mathsf{B}},\\
\psi'_{\mathsf{A}}&=\epsilon_{\mathsf{A}\Delta}\left(\left((\mathcal{M})^T\right)^{-1}\right)^{\Delta}{}_{\Sigma}\epsilon^{\Sigma\mathsf{B}}\psi_{\mathsf{B}},\\
\epsilon^{\mathsf{KA}}\psi'_{\mathsf{A}}&=\delta^{\mathsf{K}}_{\Delta}\left(\left((\mathcal{M})^T\right)^{-1}\right)^{\Delta}{}_{\Sigma}\epsilon^{\Sigma\mathsf{B}}\psi_{\mathsf{B}},\\
\psi'^{\mathsf{K}}&=\left(\left((\mathcal{M})^T\right)^{-1}\right)^{\mathsf{K}}{}_{\Sigma}\psi^{\Sigma},\\
\psi'^{\mathsf{K}}&=\left((\mathcal{M})^{-1}\right)_{\Sigma}{}^{\mathsf{K}}\psi^{\Sigma}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'_{\dot{\mathsf{A}}}&=(\mathcal{M}^*)_{\dot{\mathsf{A}}}{}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}},\\
\bar{\psi}'_{\dot{\mathsf{A}}}&=\epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\Delta}}\left(\left((\mathcal{M}^*)^T\right)^{-1}\right)^{\dot{\Delta}}{}_{\dot{\Sigma}}\epsilon^{\dot{\Sigma}\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}},\\
\epsilon^{\dot{\mathsf{K}}\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}'_{\dot{\mathsf{A}}}&=\delta^{\dot{\mathsf{K}}}_{\dot{\Delta}}\left(\left((\mathcal{M}^*)^T\right)^{-1}\right)^{\dot{\Delta}}{}_{\dot{\Sigma}}\epsilon^{\dot{\Sigma}\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}},\\
\bar{\psi}'^{\dot{\mathsf{K}}}&=\left(\left((\mathcal{M}^*)^T\right)^{-1}\right)^{\dot{\mathsf{K}}}{}_{\dot{\Sigma}}\bar{\psi}^{\dot{\Sigma}},\\
\bar{\psi}'^{\dot{\mathsf{K}}}&=\left((\mathcal{M}^*)^{-1}\right)_{\dot{\Sigma}}{}^{\dot{\mathsf{K}}}\bar{\psi}^{\dot{\Sigma}}.
\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε:

$$\psi'^{\mathsf{A}}=\left(\left((\mathcal{M})^T\right)^{-1}\right)^{\mathsf{A}}{}_{\mathsf{B}}\psi^{\mathsf{B}}=\left((\mathcal{M})^{-1}\right)_{\mathsf{B}}{}^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{B}} \tag{2.39}$$

και

$$\bar{\psi}'^{\dot{\mathsf{A}}}=\left(\left((\mathcal{M}^*)^T\right)^{-1}\right)^{\dot{\mathsf{A}}}{}_{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}}=\left((\mathcal{M}^*)^{-1}\right)_{\dot{\mathsf{B}}}{}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}}. \tag{2.40}$$

Μπορούμε να δημιουργήσουμε αναλλοίωτα γινόμενα σπινόρων κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς αριστερόστροφων και δεξιόστροφων σπινόρων ως εξής:

$$\begin{aligned}
\psi'\chi'\equiv\psi'^{\mathsf{A}}\chi'_{\mathsf{A}}&=\left(\left((\mathcal{M})^T\right)^{-1}\right)^{\mathsf{A}}{}_{\mathsf{B}}\psi^{\mathsf{B}}(\mathcal{M})_{\mathsf{A}}{}^{\Sigma}\chi_{\Sigma}\\
&=\left((\mathcal{M})^{-1}\right)_{\mathsf{B}}{}^{\mathsf{A}}(\mathcal{M})_{\mathsf{A}}{}^{\Sigma}\psi^{\mathsf{B}}\chi_{\Sigma}\\
&=\delta^{\Sigma}_{\mathsf{B}}\psi^{\mathsf{B}}\chi_{\Sigma}\\
&=\psi^{\mathsf{B}}\chi_{\mathsf{B}}\\
&=\psi\chi
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'\bar{\chi}'\equiv\bar{\psi}'_{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\chi}'^{\dot{\mathsf{A}}}&=(\mathcal{M}^*)_{\dot{\mathsf{A}}}{}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}\left(\left((\mathcal{M}^*)^T\right)^{-1}\right)^{\dot{\mathsf{A}}}{}_{\dot{\Sigma}}\bar{\chi}^{\dot{\Sigma}}\\
&=(\mathcal{M}^*)_{\dot{\mathsf{A}}}{}^{\dot{\mathsf{B}}}\left((\mathcal{M}^*)^{-1}\right)_{\dot{\Sigma}}{}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\chi}^{\dot{\Sigma}}\\
&=\left((\mathcal{M}^*)^{-1}\right)_{\dot{\Sigma}}{}^{\dot{\mathsf{A}}}(\mathcal{M}^*)_{\dot{\mathsf{A}}}{}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\chi}^{\dot{\Sigma}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta^{\dot{\mathsf{B}}}_{\dot{\Sigma}} \bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}} \bar{\chi}^{\dot{\Sigma}} \\
&= \bar{\psi}_{\dot{\Sigma}} \bar{\chi}^{\dot{\Sigma}} \\
&= \bar{\psi}\bar{\chi}.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$\psi'\chi' \equiv \psi'^{\mathsf{A}}\chi'_{\mathsf{A}} = \psi\chi \tag{2.41}$$

και

$$\bar{\psi}'\bar{\chi}' \equiv \bar{\psi}'_{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\chi}'^{\dot{\mathsf{A}}} = \bar{\psi}\bar{\chi}. \tag{2.42}$$

Σημειώνουμε, επίσης, ότι οι σπίνορες Weyl (αριστερόστροφοι και δεξιόστροφοι) είναι αριθμοί Grassmann (Grassmann numbers), δηλαδή ισχύει ότι:

$$\{\psi_{\mathsf{A}}, \psi_{\mathsf{B}}\} = \{\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{A}}}, \bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}\} = \{\psi_{\mathsf{A}}, \bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}\} = \{\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{A}}}, \psi_{\mathsf{B}}\} = 0. \tag{2.43}$$

Επιπλέον, στο Παράρτημα B: Χρήσιμες σχέσεις για τους σπίνορες Weyl αποδεικνύουμε κάποιες πολύ χρήσιμες σχέσεις για τους σπίνορες Weyl.

Τέλος, ένα πεπερασμένο στοιχείο της ομάδας Lorentz μέσω της εκθετικής απεικόνισης έχουμε δει πως γράφεται ως εξής:

$$U(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right).$$

Εισάγοντας τους ορισμούς $\theta_i = \epsilon_{ijk}\omega^{jk}$ και $\lambda_i = \omega_{0i}$, γράφουμε

$$U(\Lambda) = \exp\left(i\theta_i J^i + i\lambda_i K^i\right)$$

Γνωρίζουμε ότι οι γεννήτορες των στροφών J_i ικανοποιούν τη σχέση (1.20). Μπορούμε να θέσουμε $J_i^- = \frac{\sigma_i}{2}$, $J_i^+ = 0$ για την αναπαράσταση $(\frac{1}{2}, 0)$ και $J_i^+ = \frac{\sigma_i}{2}$, $J_i^- = 0$ για την αναπαράσταση $(0, \frac{1}{2})$. Για τους γεννήτορες των προωθήσεων, έχουμε επίσης $K_i = \frac{i}{2}\sigma_i$ για το $(\frac{1}{2}, 0)$ και $K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ για την αναπαράσταση $(0, \frac{1}{2})$. Έτσι, οι πίνακες $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}^*$ μπορούν να γραφούν ως:

$$\mathcal{M} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(i\vec{\theta} - \vec{\lambda}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]$$

και

$$\mathcal{M}^* = \exp\left[\frac{1}{2}\left(i\vec{\theta} + \vec{\lambda}\right)\cdot\vec{\sigma}\right].$$

Εισάγοντας τους πίνακες:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu\right) \tag{2.44}$$

και

$$\bar{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu\right) \tag{2.45}$$

μπορούμε να δούμε ότι:

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = -\bar{\sigma}^{\mu\nu}. \tag{2.46}$$

Τέλος, μπορούμε να γράψουμε τους πίνακες ως $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}^*$ ως εξής:

$$\mathcal{M} = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \tag{2.47}$$

$$\mathcal{M}^* = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right) \tag{2.48}$$

2.4.2 Σπίνορες Dirac και Majorana

Οι σπινόρες Weyl μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μία τετραδιάστατη αναπαράσταση της ομάδας Poincaré, συνδυάζοντας δύο σπινόρες Weyl και παίρνοντας έναν σπινόρα Dirac (Dirac spinor), Ψ_α:

$$\Psi_\alpha = \begin{bmatrix} \psi_{\mathsf{A}} \\ \bar{\chi}^{\dot{\mathsf{A}}} \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

Γενικά, για έναν σπίνορα Dirac ισχύει ότι: $(\psi_{\mathsf{A}})^* \neq \bar{\chi}^{\dot{\mathsf{A}}}$. Ένας σπίνορας Dirac μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\Psi'_\alpha = \begin{bmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^* \end{bmatrix} \Psi_\alpha = \begin{bmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\mathsf{A}} \\ \bar{\chi}^{\dot{\mathsf{A}}} \end{bmatrix}. \tag{2.50}$$

Έτσι, για να περιγράψουμε ένα φερμιόνιο Dirac, το οποίο διαθέτει τόσο καταστάσεις σωματιδίου όσο και αντισωματιδίου, μέσω ενός σπινόρα Dirac χρειαζόμαστε δύο διαφορετικούς σπινόρες Weyl, έναν αριστερόστροφο και έναν δεξιόστροφο.

Για τα φερμιόνια Majorana, τα οποία είναι τα ίδια τα αντισωματίδιά τους, ο σπίνορας ονομάζεται σπίνορας Majorana (Majorana spinor) και ισχύει ότι:

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \psi_{\mathsf{A}} \\ \bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}} \end{bmatrix}, \tag{2.51}$$

όπου $(\psi_{\mathsf{A}})^* = \bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}$.

2.5 Πίνακες Dirac και άλγεβρα Clifford

Στη Θεωρητική Φυσική, οι πίνακες Γάμμα (gamma matrices), $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, γνωστοί ως οι πίνακες Dirac από την Κβαντική Θεωρία Πεδίου, αποτελούν ένα σύνολο από πίνακες που ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις αντιμετάθεσης, οι οποίες εξασφαλίζουν πως αυτοί οι πίνακες παράγουν μία αναπαράσταση της άλγεβρας Clifford (Clifford algebra).

Όσα διατυπώσουμε ισχύουν για μόνο $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski. Προφανώς, όμως, μπορούν να γενικευθούν και για $D > 2$ χωρόχρονους Minkowski, αλλά κάθε φορά οι ορισμοί και οι ιδιότητες τους πρέπει να αναδιατυπωθούν με κατάλληλο τρόπο. Οι πίνακες Γάμμα μέσω της αναπαράστασης Dirac δίνονται ως εξής:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.52}$$

όπου σ_i είναι οι πίνακες Pauli και $i = 1, 2, 3$. Μέσω των πινάκων Γάμμα μπορούμε να ορίσουμε έναν πέμπτο πίνακα Γάμμα ως εξής:

$$\gamma^* = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.53}$$

Η βασική ιδιότητα των πινάκων Γάμμα είναι ότι παράγουν μία άλγεβρα Clifford παίρνοντας τον αντιμεταθέτη τους. Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}. \tag{2.54}$$

Αυτή η ιδιότητα είναι θεμελιώδης, καθώς μέσω αυτής αποδεικνύεται ότι υπάρχουν διαφορετικές αναπαραστάσεις των πινάκων Γάμμα. Προφανώς, αυτό οφείλεται στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της άλγεβρας Clifford. Αρχικά, χρησιμοποιήσαμε την αναπαράσταση Dirac των πινάκων Γάμμα για να τους εισάγουμε. Ωστόσο, από εδώ και στο εξής, θα χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων Γάμμα για την οποία ισχύει ότι:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.55}$$

όπου $\mu = 0, 1, 2, 3$. Σε αυτήν την αναπαράσταση ο πέμπτος πίνακας Γάμμα ορίζεται ως εξής:

$$\gamma^* = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Τώρα, θα επιβεβαιώσουμε τη σχέση (2.53) χρησιμοποιώντας την αναπράσταση Weyl των πινάκων Γάμμα. Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{bmatrix} \\ &= 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}, \end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι:

$$\begin{gathered} \sigma^0\bar{\sigma}^0 + \sigma^0\bar{\sigma}^0 = -2 \cdot \mathbf{1}, \\ \sigma^0\bar{\sigma}^i + \sigma^i\bar{\sigma}^0 = 0, \\ \sigma^i\bar{\sigma}^j + \sigma^j\bar{\sigma}^i = 2\delta^{ij}, \end{gathered}$$

δηλαδή:

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}.$$

Όλες αυτές οι εκφράσεις θα μας είναι πολύ χρήσιμες στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα μελετήσουμε την υπερσυμμετρική άλγεβρα και θα χρειαστούμε τις έννοιες των σπινόρων Weyl και Dirac.

2.6 Αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré. Για να μπορέσουμε να τις μελετήσουμε θα χρειαστούμε το Λήμμα 1.1 και τους τελεστές Casimir της άλγεβρας Poincaré. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των τελεστών Casimir μίας άλγεβρας σχετίζεται με την τάξη της άλγεβρας αυτής. Συγκεκριμένα, ισχύει πως η τάξη της άλγεβρας ισούται με τον αριθμό των τελεστών Casimir της.

Ισχύει πως μεταξύ της $SO^+(1,3)$ και της $SU(2) \times SU(2)$ υπάρχει ένας ομομορφισμός, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Αφού η τάξη της $\mathfrak{su}(2)$ είναι 1 συμπεραίνουμε ότι η τάξη της άλγεβρας Lorentz, και συνεπώς της άλγεβρας Poincaré, είναι 2. Αυτό, αμέσως, συνεπάγεται ότι η άλγεβρα Poincaré έχει τάξη 2. Άρα, η άλγεβρα Poincaré έχει δύο τελεστές Casimir.

Στόχος μας από δω και πέρα είναι να βρούμε τους τελεστές Casimir της άλγεβρας Poincaré. Ορίζουμε την ποσότητα:

$$P^2 = P^\mu P_\mu = P_\mu P^\mu \tag{2.57}$$

και παρατηρούμε τα εξής:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P^2] &= [P_\mu, P_\nu P^\nu] \\ &= [P_\mu, P_\nu]P^\nu + P_\nu[P_\mu, P^\nu] \\ &= P_\nu[P_\mu, P^\nu] \\ &= P_\nu[P_\mu, \eta^{\nu\kappa}P_\kappa] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P_\nu \eta^{\nu\kappa}[P_\mu, P_\kappa] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, P^2] &= [M_{\mu\nu}, P_\rho P^\rho] \\
&= [M_{\mu\nu}, P_\rho] P^\rho + P_\rho [M_{\mu\nu}, P^\rho] \\
&= -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) P^\rho + P_\rho [M_{\mu\nu}, \eta^{\rho\kappa} P_\kappa] \\
&= -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) P^\rho + P^\kappa [-i(\eta_{\mu\kappa} P_\nu - \eta_{\nu\kappa} P_\mu)] \\
&= -i\eta_{\mu\rho} P_\nu P^\rho + i\eta_{\nu\rho} P_\mu P^\rho - i\eta_{\mu\kappa} P_\nu P^\kappa + i\eta_{\nu\kappa} P_\mu P^\kappa \\
&= -iP_\nu P_\mu + iP_\mu P_\nu - iP_\nu P_\mu + iP_\mu P_\nu \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι:

$$
[P_\mu, P^2] = 0 \tag{2.58}
$$

και

$$
[M_{\mu\nu}, P^2] = 0. \tag{2.59}
$$

Από τις σχέσεις (2.58) και (2.59) συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος τελεστής Casimir της άλγεβρας Poincaré είναι ο P^2.

Για τον δεύτερο τελεστή Casimir της άλγεβρας Poincaré ορίζουμε το ψευδοδιάνυσμα Pauli–Ljubanski (Pauli-Ljubanski polarisation vector) ως εξής:

$$
W_\mu := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}. \tag{2.60}
$$

Έτσι, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, W_\nu] &= [P_\mu, \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} P^\rho M^{\sigma\tau}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}[P_\mu, P^\rho M^{\sigma\tau}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}\left([P_\mu, P^\rho] M^{\sigma\tau} + P^\rho [P_\mu, M^{\sigma\tau}]\right) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}\left([P_\mu, \eta^{\rho\kappa} P_\kappa] M^{\sigma\tau} + P^\rho [P_\mu, M^{\sigma\tau}]\right) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}\left(\eta^{\rho\kappa}[P_\mu, P_\kappa] M^{\sigma\tau} + P^\rho [P_\mu, M^{\sigma\tau}]\right) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} P^\rho [P_\mu, M^{\sigma\tau}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} P^\rho [\eta_{\mu\gamma} P^\gamma, M^{\sigma\tau}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} P^\rho \eta_{\mu\gamma} [P^\gamma, M^{\sigma\tau}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} P^\rho \eta_{\mu\gamma} i(\eta^{\sigma\gamma} P^\tau - \eta^{\tau\gamma} P^\sigma) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} \eta_{\mu\gamma} \eta^{\sigma\gamma} P^\rho P^\tau - \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} \eta_{\mu\gamma} \eta^{\tau\gamma} P^\rho P^\sigma \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} \delta^\sigma_\mu P^\rho P^\tau - \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} \delta^\tau_\mu P^\rho P^\sigma \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\mu\tau} P^\rho P^\tau - \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\mu} P^\rho P^\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\mu\tau}P^\rho P^\tau - \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\tau\mu}P^\rho P^\tau \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\mu\tau}P^\rho P^\tau - \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\tau\rho\mu}P^\tau P^\rho \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\mu\tau}P^\rho P^\tau - \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\mu\tau}P^\rho P^\tau \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

δηλαδή παίρνουμε:

$$
[P_\mu, W_\nu] = 0. \tag{2.61}
$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, W^2] &= [P_\mu, W_\nu W^\nu] \\
&= [P_\mu, W_\nu]W^\nu + W_\nu[P_\mu, W^\nu] \\
&= W_\nu[P_\mu, W^\nu] \\
&= W_\nu[P_\mu, \eta^{\nu\kappa}W_\kappa] \\
&= W_\nu\eta^{\nu\kappa}[P_\mu, W_\kappa] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

δηλαδή έχουμε:

$$
[P_\mu, W^2] = 0. \tag{2.62}
$$

Ορίζουμε την ποσότητα:

$$
I := \frac{i}{8}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma} \tag{2.63}
$$

και θα έχουμε τα εξής:

$$
\begin{aligned}
[M^{\mu\nu}, I] &= \left[M^{\mu\nu}, \frac{i}{8}\epsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma}M^{\kappa\lambda}M^{\rho\sigma}\right] \\
&= \frac{i}{8}\left\{M^{\mu\nu}\epsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma}M^{\kappa\lambda}M^{\rho\sigma} - \epsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma}M^{\kappa\lambda}M^{\rho\sigma}M^{\mu\nu}\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$
[M^{\mu\nu}, I] = 0. \tag{2.64}
$$

Τώρα, υπολογίζουμε το εξής:

$$
\begin{aligned}
[I, P^\mu] &= \left[\frac{i}{8}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}, P^\mu\right] \\
&= \frac{i}{8}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}, P^\mu\right] \\
&= \frac{i}{8}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left\{M^{\alpha\beta}[M^{\gamma\delta}, P^\mu] + [M^{\alpha\beta}, P^\mu]M^{\gamma\delta}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\{M^{\alpha\beta}(\eta^{\gamma\mu}P^\delta - \eta^{\delta\mu}P^\gamma) + (\eta^{\alpha\mu}P^\beta - \eta^{\beta\mu}P^\alpha)M^{\gamma\delta}\} \\
&= \frac{1}{8}\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\gamma\mu}M^{\alpha\beta}P^\delta - \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\delta\mu}M^{\alpha\beta}P^\gamma + \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\alpha\mu}M^{\gamma\delta}P^\beta - \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\beta\mu}M^{\gamma\delta}P^\delta\} \\
&= \frac{1}{8}\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\gamma\mu}M^{\alpha\beta}P^\delta - \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\delta\mu}M^{\alpha\beta}P^\gamma + \epsilon^{\mu}{}_{\alpha\beta\delta}M^{\alpha\beta}P^\delta + \epsilon_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta\delta}M^{\gamma\delta}P^\alpha\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4}(\epsilon^{\mu}{}_{\alpha\beta\delta}M^{\alpha\beta}P^{\delta} + \epsilon^{\mu}{}_{\alpha\beta\delta}P^{\alpha}M^{\gamma\delta}),$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$M^{\alpha\beta}P^{\delta} = P^{\delta}M^{\alpha\beta} - i(\eta^{\alpha\delta}P^{\beta} - \eta^{\beta\delta}P^{\alpha}),$$

θα πάρουμε ότι:

$$[I, P^{\mu}] = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu}{}_{\alpha\beta\delta}P^{\alpha}M^{\gamma\delta} = W^{\mu}. \tag{2.65}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, W_{\rho}] &= [M_{\mu\nu}, [I, P_{\rho}]] \\
&= -[I, [P_{\rho}, M_{\mu\nu}]] - [P_{\rho}, [M_{\mu\nu}, I]] \\
&= -[I, i(\eta_{\mu\rho}P_{\nu} - \eta_{\nu\rho}P_{\mu})] \\
&= -i(\eta_{\mu\rho}[I, P_{\nu}] - \eta_{\nu\rho}[I, P_{\mu}]) \\
&= -i(\eta_{\mu\rho}W_{\nu} - \eta_{\nu\rho}W_{\mu}).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$[M_{\mu\nu}, W_{\rho}] = -i(\eta_{\mu\rho}W_{\nu} - \eta_{\nu\rho}W_{\mu}). \tag{2.66}$$

Έτσι, λοιπόν, έχουμε:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, W^2] &= [M_{\mu\nu}, W_{\kappa}W^{\kappa}] \\
&= W_{k}[M_{\mu\nu}, W^{\kappa}] + [M_{\mu\nu}, W_{\kappa}]W^{\kappa} \\
&= W_{\kappa}[M_{\mu\nu}, \eta^{\kappa\rho}W_{\rho}] + [M_{\mu\nu}, W_{\kappa}]W^{\kappa} \\
&= W_{\kappa}\eta^{\kappa\rho}[M_{\mu\nu}, W_{\rho}] + [M_{\mu\nu}, W_{\kappa}]W^{\kappa} \\
&= W^{\rho}[M_{\mu\nu}, W_{\rho}] + [M_{\mu\nu}, W_{\kappa}]W^{\kappa} \\
&= W^{\rho}[-i(\eta_{\mu\rho}W_{\nu} - \eta_{\nu\rho}W_{\mu})] + \{-i(\eta_{\mu\kappa}W_{\nu} - \eta_{\nu\kappa}W_{\mu})\}W^{\kappa} \\
&= -iW_{\mu}W_{\nu} + iW_{\nu}W_{\mu} - iW_{\nu}W_{\mu} + iW_{\mu}W_{\nu} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$[M_{\mu\nu}, W^2] = 0. \tag{2.67}$$

Από τις σχέσεις (2.62) και (2.67) ισχύει ότι ο W^2 είναι ο δεύτερος Casimir τελεστής της άλγεβρας Poincaré.

Οι άπειρων διαστάσεων αναπαραστάσεις της άλγεβρας Poincaré μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κύριες κατηγορίες:

i) Αναπαραστάσεις για έμμαζα σωματίδια (massive representations): Οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται από την ιδιοτιμή του $P^2 = P^{\mu}P_{\mu} = m^2 > 0$ και την ιδιοτιμή του W^2. Στο σύστημα αναφοράς όπου $P^{\mu} = (m, 0)$, δηλαδή στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου, η μηδενική συνιστώσα του W^{μ} μηδενίζεται και αυτό ισχύει γιατί:

$$\begin{aligned}
W^{\mu}P_{\mu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_{\nu}M_{\rho\sigma}P_{\mu} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(P_{\nu}P_{\mu}M_{\rho\sigma} - P_{\nu}\left[M_{\rho\sigma}, P_{\mu}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_{\nu}P_{\mu}M_{\rho\sigma} - i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\sigma\mu}P_{\nu}P_{\rho} + i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\rho\mu}P_{\nu}P_{\sigma} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$W^\mu P_\mu = 0. \tag{2.68}$$

Άρα, αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$W_0 = 0. \tag{2.69}$$

Επιπλέον, για τις χωρικές συνιστώσες έχουμε:

$$W_i = \frac{1}{2}\epsilon_{i0jk}P^0 M^{jk} = m^2\epsilon_{ijk}M^{jk}. \tag{2.70}$$

Ορίζοντας:

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \tag{2.71}$$

που είναι ο τελεστής ολικής στροφορμής, επειδή βρίσκομαστε στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου έχουμε μόνο το σπιν, άρα $J_i = S_i$, δηλαδή:

$$S_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}. \tag{2.72}$$

Έτσι, έχουμε:

$$W_i = mS_i \tag{2.73}$$

και

$$W^2 = -W^i W_i = -m^2\vec{S}^2 \tag{2.74}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του W^2 είναι $-m^2 s(s+1)$, όπου το s υποδηλώνει το σπιν και παίρνει τιμές $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$. Επομένως, αυτές οι αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται από τη μάζα ηρεμίας και το σπιν του σωματιδίου και αντιστοιχούν σε σωματίδια με μάζα ηρεμίας m και σπιν s. Επιπλέον, επειδή η προβολή s_3 του σπιν μπορεί να πάρει τιμές από $-s$ έως $+s$, τα σωματίδια αυτά αντιστοιχούν στις έμμαζες πολλαπλέτες της ομάδας Poincaré διάστασης $2s+1$.

ii) Αναπαραστάσεις για άμαζα σωματίδια (massless representations): Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $P^2 = W^2 = 0$. Δεν μπορούμε να ορίσουμε σύστημα ηρεμίας, αλλά μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς όπου $P^\mu = (P^0, 0, 0, P^0)$. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς ισχύει επίσης ότι $W^\mu = (W^0, 0, 0, W^0)$, και από τη σχέση (2.68) ισχύει ότι:

$$W^\mu = \lambda P^\mu. \tag{2.75}$$

Από την εξίσωση (2.75) έχουμε:

$$\lambda = \frac{W^0}{P^0} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{P}}{P^0} = \vec{S}\cdot\hat{P}. \tag{2.76}$$

Έτσι, η σταθερά αναλογίας είναι η ελικότητα (helicity) λ, η οποία παίρνει τιμές:

$$\lambda = \pm s = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots. \tag{2.77}$$

Επομένως, αυτές οι αναπαραστάσεις αντιστοιχούν σε άμαζα σωματίδια με ελικότητα λ. Έτσι, αν έχουμε μια κατάσταση με ορμή p και ελικότητα λ, τότε:

$$P^\mu |p;\lambda\rangle = p^\mu |p;\lambda\rangle \tag{2.78}$$

και

$$W^3 |p;\lambda\rangle = \lambda |p;\lambda\rangle. \tag{2.79}$$

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο θεωρούμε τα σωματίδια άμαζα (η μάζα παράγεται από τον μηχανισμό Higgs), έτσι μπορούμε να τα κατατάξουμε στις άμαζες πολλαπλέτες της ομάδας Poincaré:

- $\lambda = 0$: Higgs
- $\lambda = \pm\frac{1}{2}$: Quarks, Leptons
- $\lambda = \pm 1$: Gauge bosons

3 Υπερσυμμετρική άλγεβρα και αναπαραστάσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε τη σύνδεση των συμμετριών που συναντάμε στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, τις οποίες αποκαλούμε εξωτερικές συμμετρίες (external symmetries), και περιγράφονται από την ομάδα Poincaré και των συμμετρίων βαθμίδας (gauge symmetries) που συναντάμε στις θεωρίες πεδίου, τις οποίες αποκαλούμε εσωτερικές συμμετρίες (internal symmetries) και περιγράφονται από τις ομάδες βαθμίδας. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε αν μπορούμε να βρούμε μία μεγαλύτερη συμμετρία από την οποία να περιγράφονται και να πηγάζουν αυτές οι δύο συμμετρίες.

Αρχικά, θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε την έννοια της άλγεβρας Lie, διατυπώνοντας τον ορισμό της βαθμωτής υπεράλγεβρας Lie. Με βάση τον ορισμό αυτόν θα επεκτείνουμε την ομάδα Poincaré στην ομάδα υπερ-Poincaré και θα μελετήσουμε την $\mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρία. Έτσι, έχοντας ορίσει την ομάδα υπερ-Poincaré και την αντίστοιχη υπερσυμμετρική άλγεβρά της, θα μελετήσουμε τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της ομάδας αυτής, εστιάζοντας στις άμαζες και έμμαζες αναπαραστάσεις της $\mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρικής άλγεβρας, που αναφέρονται φυσικά στις αναπαραστάσεις της ομάδας υπερ-Poincaré.

Τέλος, θα παρουσιάσουμε πολύ εισαγωγικά, χωρίς εκτενή ανάλυση, πως μπορεί κανείς να μελετήσει τις $\mathcal{N} > 1$ εκτεταμένες υπερσυμμετρίες. Θα διατυπώσουμε την υπερσυμμετρική άλγεβρα για $\mathcal{N} > 1$ και θα περιγράψουμε και πάλι τις άμαζες και έμμαζες αναπαραστάσεις, συνδέοντας την όλη ανάλυση με την περίπτωση $\mathcal{N} = 1$.

3.1 Βαθμωτές υπεράλγεβρες Lie

Η απάντηση στο ερωτήμα αν υπάρχει κάποια μεγαλύτερη συμμετρία, η οποία να περιγράφει τις εσωτερικές και τις εξωτερικές συμμετρίες, είναι αρνητική, αν βασιστούμε μόνο στις άλγεβρες Lie για την περιγραφή των συμμετρίων αυτών. Αξίζει να σημειωθεί πως οι Coleman και Mandula το 1967 απέδειξαν το γνωστό θεώρημα, «The no-go theorem», σύμφωνα με το οποίο κάτω από λογικές υποθέσεις οποιαδήποτε επέκταση της ομάδας Poincaré συμπεριλαμβάνοντας τις ομάδες βαθμίδας θα οδηγούσε στο ευθύ γινόμενο ομάδων:

$$\text{Poincaré Group} \times \text{Gauge Groups}.$$

Ωστόσο, το ευθύ γινόμενο ομάδων σημαίνει πως οι γεννήτορες των δύο υποομάδων μετατίθενται. Άρα, αν θεωρήσουμε ως γεννήτορες των ομάδων βαθμίδας τα στοιχεία B_i, ισχύει ότι:

$$[P_\mu, B_i] = [M_{\mu\nu}, B_i] = 0.$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει πως δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των εξωτερικών και των εσωτερικών συμμετριών.

Ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αποφύγουμε το παραπάνω θεώρημα είναι η εισαγωγή της Υπερσυμμετρίας. Συγκεκριμένα, οι Haag, Lopuszanski και Sohnius το 1975 κατάφεραν να αποδείξουν πως μπορούμε να παρακάμψουμε το παραπάνω θεώρημα εισάγωντας τις $\mathbb{Z}_2$ βαθμωτές υπεράλγεβρες Lie.

Ορισμός 3.1. *Μία βαθμωτή υπεράλγεβρα Lie (graded Lie superalgebra) είναι ένας διανυσματικός χώρος $\mathfrak{L}$, ο οποίος αποτελεί το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών υποχώρων $\mathfrak{L}_0$ και $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1$, εφοδιασμένος με μία δυαδική πράξη $\circ : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, (ορίζουμε τη δυαδική πράξη να είναι το Lie bracket, [,]), τέτοιος ώστε $\forall x_i \in \mathfrak{L}_i$:*

i) $[x_i, x_j] \in \mathfrak{L}_{i+j \ mod\ 2}$,

ii) $[x_i, x_j] = -(-1)^{ij}[x_j, x_i]$ *και*

iii) $[x_i, [x_j, x_k]](-1)^{ik} + [x_j, [x_k, x_i]](-1)^{ji} + [x_k, [x_i, x_j]](-1)^{kj}$ *(γενικευμένη ταυτότητα Jacobi).*

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις βαθμωτές υπεράλγεβρες Lie είμαστε σε θέση να επεκτείνουμε την ομάδα Poincaré στην υπέρ-Poincaré, ώστε να περιλαμβάνει τις εσωτερικές συμμετρίες.

3.2 Υπερσυμμετρική άλγεβρα $\mathcal{N} = 1$

Όπως ήδη έχουμε πει θέλουμε να επεκτείνουμε την ομάδα Poincaré στην υπερ-Poincaré και να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης που ικανοποιεί η αντίστοιχη υπερσυμμετρική άλγεβρα. Με βάση τον ορισμό ορισμό 3.1 μπορούμε ορίσουμε $\mathfrak{L}_o :=$ άλγεβρα Poincaré και να προσθέσουμε ένα νέο διανυσματικό χώρο $\mathfrak{L}_1$, ο οποίος παράγεται από ένα σύνολο φερμιονικών γεννητόρων Q^i_α, με $i = 1, 2, ..., \mathcal{N}$. Αρχικά, θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση $\mathcal{N} = 1$ και στο τέλος του κεφαλαίου θα εξετάσουμε μερικές περιπτώσεις $\mathcal{N} > 1$, οι οποίες καλούνται εκτεταμένες υπερσυμμετρίες.

Η υπερσυμμετρική άλγβερα για $\mathcal{N} = 1$ απαιτεί οι φερμιονικοί γεννήτορες να είναι 4, άρα ισχύει $\alpha = 1, 2, 3, 4$, και όλοι μαζί σχηματίζουν ένα σπίνορα Majorana, ο οποίος καλείται υπερφορτίο (supercharge). Αφού ο φερμιονικός γεννήτορας Q_α είναι ένας σπίνορας Majorana, μπορούμε να τον γράψουμε μέσω των σπινόρων Weyl στη μορφή:

$$Q_\alpha = \begin{bmatrix} Q_{\mathsf{A}} \\ \bar{Q}^{\dot{\mathsf{A}}} \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Για να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης ακολουθούμε τα εξής βήματα. Αρχικά, θέλουμε να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των Q_{A}, $\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}$ και P_μ. Οι σπίνορες Weyl, Q_{A} και $\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}$, δεν έχουν καμία χωροχρονική εξάρτηση. Αυτό συνεπάγεται πως παραμένουν αναλλοιώτοι κάτω από χωροχρονικές μεταθέσεις. Δηλαδή, έχουμε:

$$e^{-i\alpha^\mu P_\mu} Q_{\mathsf{A}} e^{i\alpha^\mu P_\mu} = Q_{\mathsf{A}} \tag{3.2}$$

και

$$e^{-i\alpha^\mu P_\mu} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} e^{i\alpha^\mu P_\mu} = \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}. \tag{3.3}$$

Αυτό σημαίνει πως αν αναπτύξουμε το εκθετικό και κρατήσουμε όρους μέχρι τάξης $\mathcal{O}(\alpha)$, τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - i\alpha^\mu P_\mu) Q_{\mathsf{A}} (\mathbf{1} + i\alpha^\mu P_\mu) &= Q_{\mathsf{A}}, \\ Q_{\mathsf{A}} + i\alpha^\mu Q_{\mathsf{A}} P_\mu - i\alpha^\mu P_\mu Q_{\mathsf{A}} &= Q_{\mathsf{A}}, \\ i\alpha^\mu [Q_{\mathsf{A}}, P_\mu] &= 0, \\ [Q_{\mathsf{A}}, P_\mu] &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - i\alpha^\mu P_\mu) \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} (\mathbf{1} + i\alpha^\mu P_\mu) &= \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, \\ \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} + i\alpha^\mu \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} P_\mu - i\alpha^\mu P_\mu \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} &= \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, \\ i\alpha^\mu [\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, P_\mu] &= 0, \\ [\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, P_\mu] &= 0. \end{aligned}$$

Έτσι, λοιπόν, έχουμε:

$$[Q_{\mathsf{A}}, P_\mu] = 0 \tag{3.4}$$

και

$$[\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, P_\mu] = 0. \tag{3.5}$$

Τώρα, θέλουμε να βρούμε τη σχέση μετάθεσης μεταξύ των Q_{A}, $\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}$ και $M_{\mu\nu}$. Οι Q_{A} και $\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}$ είναι σπίνορες Weyl, άρα:

$$Q'_{\mathsf{A}} = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \right)_{\mathsf{A}}^{\ \ \mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} \simeq \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) Q_{\mathsf{B}}$$

και

$$\bar{Q}'_{\dot{\mathsf{A}}} = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}}\right)_{\dot{\mathsf{A}}}^{\ \ \dot{\mathsf{B}}} Q_{\dot{\mathsf{B}}} \simeq \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)\bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}.$$

Επιπλέον, ισχύει πως οι σπίνορες αυτοί είναι και τελεστές, άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
Q'_{\mathsf{A}} &= U^{\dagger}(\Lambda)Q_{\mathsf{A}}U(\Lambda),\\
\left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right)_{\mathsf{A}}^{\ \ \mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} &= e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}Q_{\mathsf{A}}e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}},\\
\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_{\mathsf{A}}^{\ \ \mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} &= \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)Q_{\mathsf{A}}\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)
\end{aligned}$$

και κραντώντας όρους μέχρι τάξης $\mathcal{O}(\omega)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
Q_{\mathsf{A}} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_{\mathsf{A}}^{\ \ \mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} &= Q_{\mathsf{A}} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}Q_{\mathsf{A}}M^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}Q_{\mathsf{A}},\\
[Q_{\mathsf{A}}, M^{\mu\nu}] &= \left(\sigma^{\mu\nu}\right)_{\mathsf{A}}^{\ \ \mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}}
\end{aligned}$$

και κάνοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία για τον σπίνορα $\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}'_{\dot{\mathsf{A}}} &= U^{\dagger}(\Lambda)\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}U(\Lambda),\\
\left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}}\right)_{\dot{\mathsf{A}}}^{\ \ \dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}} &= e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

και κραντώντας όρους μέχρι τάξης $\mathcal{O}(\omega)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\mathsf{A}}}^{\ \ \dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}} &= \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right),\\
\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\mathsf{A}}}^{\ \ \dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}} &= \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}M^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}},\\
[\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, M^{\mu\nu}] &= \left(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\mathsf{A}}}^{\ \ \dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}.
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε:

$$[Q_{\mathsf{A}}, M^{\mu\nu}] = \left(\sigma^{\mu\nu}\right)_{\mathsf{A}}^{\ \ \mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}}, \tag{3.6}$$

και

$$[\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, M^{\mu\nu}] = \left(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\mathsf{A}}}^{\ \ \dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}. \tag{3.7}$$

Τέλος, θέλουμε να βρούμε τις σχέσεις αντιμετάθεσης $\{Q_{\mathsf{A}}, Q_{\mathsf{B}}\}$ και $\{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\}$. Συγκεκριμένα, οι αντιμεταθέτες αυτοί θα πρέπει να ισούνται με ποσότητες που ικανοποιούν σχέσεις μετάθεσης. Οι μόνες πιθανότητες είναι:

$$\{Q_{\mathsf{A}}, Q^{\mathsf{B}}\} = s\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_{\mathsf{A}}^{\mathsf{B}} M_{\mu\nu} \tag{3.8}$$

και

$$\{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\} = t\left(\sigma^{\mu}\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_{\mu}. \tag{3.9}$$

Το αριστερό μέλος της (3.8) μετατίθεται με τον P, ενώ το δεξί μέλος όχι. Οπότε είναι $s = 0$. Για το t είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε το οτιδήποτε, έτσι από σύμβαση κανονικοποίησης επιλέγουμε $t = 2$. Άρα, έχουμε:

$$\{Q_{\mathsf{A}}, Q_{\mathsf{B}}\} = \{\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\} = 0 \tag{3.10}$$

και

$$\{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\} = 2\,(\sigma^{\mu})_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}}\,P_{\mu}. \tag{3.11}$$

Συνεπώς, οι σχέσεις (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.10) και (3.11) ορίζουν την υπερσυμμετρική άλγεβρα $\mathcal{N} = 1$. Αυτή είναι η επέκταση της άλγεβρας Poincaré με την εισαγωγή της υπερσυμμετρικής άλγεβρας που αντιπροσωπεύει την ομάδα υπερ-Poincaré.

Τέλος, μπορούμε να γράψουμε την υπερσυμμετρική άλγεβρα $\mathcal{N} = 1$ μέσω των σπινόρων Majorana. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$[Q_{\alpha}, P_{\mu}] = 0, \tag{3.12}$$

$$[Q_{\alpha}, M_{\mu\nu}] = 0 \tag{3.13}$$

και

$$\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{b}\} = 2(P_{\mu}\gamma^{\mu})_{\alpha b} \tag{3.14}$$

όπου έχουμε $\bar{Q}_{\alpha} = (iQ^{\dagger}\gamma^{0})_{\alpha}$. Οι σχέσεις (3.12), (3.13), (3.14) αποτελούν μία αναδιατύπωση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} = 1$. Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τη διατύπωση μέσω των σπινόρων Weyl χάρην ευκολίας.

3.3 Αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} = 1$

Στο εδάφιο αυτό θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} = 1$. Συγκεκριμένα, θα εστιάσουμε αρχικά στις αναπαραστάσεις για άμαζα σωματίδια, καθώς γνωρίζουμε πως στο Καθιερωμένο Πρότυπο όλα τα σωματίδια είναι άμαζα και ο Μηχανισμός Higgs είναι αυτός που τους προσδίδει μάζα. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την περίπτωση εκείνη για την οποία έχουμε έμμαζα σωματίδια.

Αρχικά, από τις σχέσεις (3.4), (3.5), (3.6) και (3.7) παρατηρούμε πως υπερσυμμετρική άλγεβρα $\mathcal{N} = 1$ επιβάλει:

$$[Q_{\mathsf{A}}, P^2] = 0$$

και

$$[\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, P^2] = 0,$$

αλλά έχουμε:

$$[Q_{\mathsf{A}}, W^2] \neq 0$$

και

$$[\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}, W^2] \neq 0.$$

Άρα, τα έμμαζα σωματίδια που ανήκουν στην ίδια αναπαράσταση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} = 1$ που ονομάζεται υπερσυμμετρική πολλαπλέτα (supermultiplet) θα είναι εκφυλισμένα στη μάζα και θα έχουν διαφορετικά σπιν μεταξύ τους.

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι μία οποιαδήποτε υπερσυμμετρική πολλαπλέτα για $\mathcal{N} = 1$ περιέχει ίσο αριθμό φερμιονίων και μποζονίων, δηλαδή οι φερμιονικοί και μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας είναι ίσοι. Για να το κάνουμε αυτό, ορίζουμε τον τελεστή αρίθμησης (number operator) N_F, ο οποίος αριθμεί τον αριθμό των φερμιονίων σε μία κατάσταση. Επιπλέον, ορίζουμε τον τελεστή $(-1)^{N_F}$, ο οποίος έχει ιδιοτιμές $+1$ για μποζονικές καταστάσεις και -1 για φερμιονικές. Τότε, ισχύει ότι:

$$(-1)^{N_F}\,|B\rangle = |B\rangle\;(-1)^{N_F}\,|F\rangle = -\,|F\rangle\,,$$

όπου $|B\rangle$ και $|F\rangle$ οι μποζονικές και φερμιονικές καταστάσεις αντίστοιχα. Επειδή ο τελεστής Q_{A} αλλάζει τον αριθμό των φερμιονίων κατά μία μονάδα, αφού αλλάζει το σπιν, ισχύει ότι:

$$(-1)^{N_F} Q_{\mathsf{A}} = -Q_{\mathsf{A}}(-1)^{N_F}. \tag{3.15}$$

Για καταστάσεις για τις οποίες ισχύει $P_0 \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left[(-1)^{N_F} P_0\right] &= \frac{1}{2}\delta^{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}} \operatorname{Tr}\left[(-1)^{N_F}\right] (\sigma^\mu)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}} P_\mu \\
&= \frac{1}{4}\delta^{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}} \operatorname{Tr}\left[(-1)^{N_F}\right] \{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}\} \\
&= \frac{1}{4}\delta^{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}} \operatorname{Tr}\left[(-1)^{N_F}\right] \left(Q_{\mathsf{A}}\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} + \bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} Q_{\mathsf{A}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\delta^{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}} \operatorname{Tr}\left[(-1)^{N_F} Q_{\mathsf{A}}\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}} - (-1)^{N_F} Q_{\mathsf{A}}\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, αυτό συνεπάγεται πως για οποιαδήποτε πεπερασμένης διάστασης υπερσυμμετρική αναπαράσταση με $P_0 \neq 0$ θα έχουμε:

$$\operatorname{Tr}\left[(-1)^{N_F}\right] = 0, \tag{3.16}$$

το οποίο σημαίνει ότι έχουμε ίσο αριθμό φερμιονίων και μποζονίων, δηλαδή ίσο αριθμό φερμιονικών και μποζονικών βαθμών ελευθερίας - καταστάσεων. Άρα, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τις άμαζες και έμμαζες αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} = 1$.

i) Αναπαραστάσεις για άμαζα σωματίδια (massless representations): Στην περίπτωση αυτή, θα περιοριστούμε στην περίπτωση μηδενικής μάζας και θα διαλέξουμε το σύστημα εκείνο για το οποίο ισχύει $P_\mu = (E, 0, 0, E)$ οπότε από την (3.11) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\} &= 2\left(\sigma^0\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_0 + 2\left(\sigma^1\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_1 + 2\left(\sigma^2\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_2 + 2\left(\sigma^3\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_3 \\
&= 2E(\sigma^0 + \sigma^3)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} \\
&= 4E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Άρα, λαμβάνουμε:

$$\{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\} = 4E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

από την οποία αντιλαμβανόμαστε πως οι μόνοι μη μηδενικοί φερμιονικοί γεννήτορες είναι οι Q_1 και $\bar{Q}_{\dot{1}}$, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 4E. \tag{3.18}$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε τους τελεστές:

$$\alpha := \frac{Q_1}{2\sqrt{E}} \tag{3.19}$$

και

$$\alpha^\dagger := \frac{\bar{Q}_{\dot{1}}}{2\sqrt{E}}, \tag{3.20}$$

οι οποίοι υπακούουν τις σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$\{\alpha, \alpha\} = \left\{\alpha^\dagger, \alpha^\dagger\right\} = 0 \tag{3.21}$$

και

$$\{\alpha, \alpha^\dagger\} = \mathbf{1}. \tag{3.22}$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως οι δύο αυτοί τελεστές ονομάζονται φερμιονικοί τελεστές καταστροφής και δημιουργίας (fermionic annihilation and creation operators) στην Υπερσυμμετρική Κβαντική Μηχανική αντίστοιχα, για τους προφανείς λόγους.

Τώρα, για μία κατάσταση με ελικότητα λ, θα έχουμε:

$$W^3 |p; \lambda\rangle = \lambda |p; \lambda\rangle , \tag{3.23}$$

όπου από το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε αποδείξει ότι $W^3 = J^3 = S^3$. Άρα, μπορούμε να πούμε με βάση την (3.6) ότι:

$$\begin{aligned}
[\alpha, W^3] &= \left[\frac{Q_1}{2\sqrt{E}}, \frac{1}{2}\left(M^{12} - M^{21}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{E}}\left([Q_1, M^{12}] - [Q_1, M^{21}]\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{E}}\left((\sigma^{12})_1{}^{\mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} - (\sigma^{21})_1{}^{\mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{E}}\left(\sigma^{12} - \sigma^{21}\right)_1{}^{\mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} \\
&= \frac{i}{16\sqrt{E}}\left([\sigma^1, \sigma^2] - [\sigma^2, \sigma^1]\right)_1{}^{\mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} \\
&= \frac{i}{8\sqrt{E}}\left([\sigma^1, \sigma^2]\right)_1{}^{\mathsf{B}} Q_{\mathsf{B}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{E}}\left(\sigma^3\right)_1{}^{1} Q_1 \\
&= \frac{1}{2}\alpha,
\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε:

$$[\alpha, W^3] = \frac{1}{2}\alpha. \tag{3.24}$$

Ομοίως, από την (3.7) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
[\alpha^\dagger, W^3] &= \left[\frac{\bar{Q}_{\dot{1}}}{2\sqrt{E}}, \frac{1}{2}\left(M^{12} - M^{21}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{E}}\left([\bar{Q}_{\dot{1}}, M^{12}] - [\bar{Q}_{\dot{1}}, M^{21}]\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{E}}\left((\bar{\sigma}^{12})_{\dot{1}}{}^{\dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}} - (\bar{\sigma}^{21})_{\dot{1}}{}^{\dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{E}}\left(\bar{\sigma}^{12} - \bar{\sigma}^{21}\right)_{\dot{1}}{}^{\dot{\mathsf{B}}} Q_{\dot{\mathsf{B}}} \\
&= \frac{i}{16\sqrt{E}}\left([\bar{\sigma}^1, \sigma^2] - [\bar{\sigma}^2, \sigma^1]\right)_{\dot{1}}{}^{\dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}} \\
&= \frac{i}{8\sqrt{E}}\left(-[\sigma^1, \sigma^2]\right)_1{}^{\dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{E}}\left(\sigma^3\right)_{\dot{1}}{}^{\dot{1}} \bar{Q}_{\dot{1}} \\
&= -\frac{1}{2}\alpha^\dagger,
\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε:

$$\left[\alpha^{\dagger}, W^{3}\right] = -\frac{1}{2}\alpha^{\dagger}. \tag{3.25}$$

Συνεπώς, ξεκινώντας από μία κατάσταση με ελικότητα λ, τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} W^{3}\alpha \left|p;\lambda\right\rangle &= \left(\alpha W^{3} - [\alpha, W^{3}]\right)\left|p;\lambda\right\rangle \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\alpha\left|p;\lambda\right\rangle, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε:

$$W^{3}\alpha\left|p;\lambda\right\rangle = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\alpha\left|p;\lambda\right\rangle. \tag{3.26}$$

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε:

$$\begin{aligned} W^{3}\alpha^{\dagger}\left|p;\lambda\right\rangle &= \left(\alpha^{\dagger}W^{3} - [\alpha^{\dagger}, W^{3}]\right)\left|p;\lambda\right\rangle \\ &= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\alpha^{\dagger}\left|p;\lambda\right\rangle, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε:

$$W^{3}\alpha^{\dagger}\left|p;\lambda\right\rangle = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\alpha^{\dagger}\left|p;\lambda\right\rangle. \tag{3.27}$$

Για αυτό, για να ορίσουμε αυτές τις αναπαραστάσεις ορίζουμε μία βασική κατάσταση, η οποία έχει τη μικρότερη δυνατή ελικότητα:

$$\left|\Omega\right\rangle = \left|p;\lambda\right\rangle, \tag{3.28}$$

τέτοια ώστε:

$$\alpha\left|\Omega\right\rangle = 0 \tag{3.29}$$

και

$$\alpha^{\dagger}\left|\Omega\right\rangle = \alpha^{\dagger}\left|p;\lambda\right\rangle = \left|p;\lambda + \frac{1}{2}\right\rangle. \tag{3.30}$$

Λόγω της σχέσης αντιμετάθεσης (3.22), έχουμε:

$$\alpha^{\dagger}\alpha^{\dagger}\left|\Omega\right\rangle = 0. \tag{3.31}$$

Άρα, ολόκληρη η υπερσυμμετρική πολλαπλέτα περιλαμβάνει 2 καταστάσεις. Αυτές είναι οι εξής:

$$\left|p;\lambda\right\rangle, \ \left|p;\lambda + \frac{1}{2}\right\rangle. \tag{3.32}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μας και τις CPT-συζυγές καταστάσεις, έχουμε:

$$\left|p;\pm\lambda\right\rangle, \ \left|p;\pm\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\right\rangle \tag{3.33}$$

Αν υποθέσουμε $\lambda = 0$, τότε θα έχουμε ένα βαθμωτό (scalar) με $\lambda = 0$ και ένα φερμιόνιο με $\lambda = \frac{1}{2}$. Αυτό ονομάζεται χειραλική πολλαπλέτα (chiral multiplet). Αντίστοιχα, μπορούμε να έχουμε μία διανυσματική πολλαπλέτα (vector multiplet) επιλέγοντας ελικότητα $\lambda = \frac{1}{2}$, όπου θα έχουμε φερμιόνιο και $\lambda = 1$, όπου θα έχουμε μποζόνιο. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στους επόμενους δύο πίνακες.

scalar $\lambda = 0$	fermion $\lambda = \frac{1}{2}$
squark ($\tilde{q}$)	quark (q)
slepton ($\tilde{l}$)	lepton (l)
Higgs ($\tilde{H}$)	Higgsino (H)

Πίνακας 3.1: Η περίπτωση $\lambda = 0$

fermion (gaugino) $\lambda = \frac{1}{2}$	boson $\lambda = 1$
Photino ($\tilde{\gamma}$)	photon (γ)
Wino ($\tilde{W}$)	W
Zino ($\tilde{Z}$)	Z

Πίνακας 3.2: Η περίπτωση $\lambda = \frac{1}{2}$

ii) Αναπαραστάσεις για έμμαζα σωματίδια (massive representations): Στην περίπτωση αυτή, θα μελετήσουμε σωματίδια μη μηδενικής μάζας. Άρα, διαλέγουμε το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου, οπότε θα έχουμε $P_\mu = (m, 0, 0, 0)$. Τότε, από τη σχέση (3.11), θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\} &= 2\left(\sigma^0\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_0 + 2\left(\sigma^1\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_1 + 2\left(\sigma^2\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_2 + 2\left(\sigma^3\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_3 \\ &= 2m(\sigma^0)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} \\ &= 2m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Άρα, λαμβάνουμε:

$$\{Q_{\mathsf{A}}, \bar{Q}_{\dot{\mathsf{B}}}\} = 2m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, θα έχουμε και πάλι τους φερμιονικούς τελεστές καταστροφής και δημιουργίας, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$\alpha_{\mathsf{A}} = \frac{Q_{\mathsf{A}}}{\sqrt{2m}} \tag{3.35}$$

και

$$\alpha^\dagger_{\dot{\mathsf{A}}} = \frac{\bar{Q}_{\dot{\mathsf{A}}}}{\sqrt{2m}}, \tag{3.36}$$

οι οποίοι υπακούουν τις σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$\left\{\alpha_{\mathsf{A}}, \alpha^\dagger_{\dot{\mathsf{A}}}\right\} = \delta_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}}\mathbf{1} \tag{3.37}$$

και

$$\{\alpha_{\mathsf{A}}, \alpha_{\mathsf{B}}\} = \left\{\alpha^\dagger_{\dot{\mathsf{A}}}, \alpha^\dagger_{\dot{\mathsf{B}}}\right\} = 0. \tag{3.38}$$

Άρα, ξεκινάμε με μία κατάσταση:

$$|\Omega\rangle = |p; j, j_3\rangle\,, \tag{3.39}$$

τέτοια ώστε:

$$\alpha_{\mathsf{A}}\,|\Omega\rangle = 0. \tag{3.40}$$

Συνεπώς, ολόκληρη η υπερσυμμετρική πολλαπλέτα περιλαμβάνει 4 καταστάσεις και όχι 2, όπως είχαμε για τα άμαζα σωματίδια. Αυτές είναι οι εξής:

$$|\Omega\rangle\,,\ \alpha^\dagger_1\,|\Omega\rangle\,,\ \alpha^\dagger_2\,|\Omega\rangle\,,\ \alpha^\dagger_1\alpha^\dagger_2\,|\Omega\rangle \tag{3.41}$$

Αν υποθέσουμε η αρχική κατάσταση, δηλαδή η κατάσταση $|\Omega\rangle$ να έχει σπιν j, τότε παρατηρούμε πως και η $\alpha^\dagger_1\alpha^\dagger_2\,|\Omega\rangle$ θα έχει σπιν j.

Στο πλαίσιο που μελετάμε μας ενδιαφέρουν δύο έμμαζες υπερσυμμετρικές πολλαπλέτες. Συγκεκριμένα, έχουμε τις εξής:

1) Αν ξεκινήσουμε από $j = 0$, τότε θα έχουμε $j = 0$ και $\frac{1}{2}$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες 2 και 1 αντίστοιχα, το οποίο σημαίνει ότι έχουμε έμμαζο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο (massive complex scalar) μαζί με ένα μοναδικό έμμαζο φερμιόνιο Weyl (single massive Weyl fermion). Είναι το αντίστοιχο της χειραλικής πολλαπλέτας που μελετήσαμε πριν, αλλά τώρα προφανώς όλα τα σωματίδια έχουν μάζα.
2) Αν ξεκινήσουμε από $j = \frac{1}{2}$, τότε θα έχουμε $j = 0, \frac{1}{2}$ και $j = 1$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες 1, 2 και 1 αντίστοιχα, το οποίο σημαίνει έμμαζο σωματίδιο με σπιν 1 (one massive spin 1 particle), δύο έμμαζα φερμιόνια Weyl (two massive Weyl fermions) και ένα έμμαζο σωματίδιο με σπιν 0 (one massive spin 0 particle). Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε περισσότερες καταστάσεις από αυτές που βρήκαμε στην άμαζη διανυσματική πολλαπλέτα. Συγκεκριμένα, εδώ έχουμε μία άμαζη διανυσματική πολλαπλέτα και μία άμαζη χειραλική πολλαπλέτα και καταλαβαίνουμε πως μία άμαζη διανυσματική πολλαπλέτα καταναλώνει μία άμαζη χειραλική πολλαπλέτα και δίνει μία έμμαζη διανυσματική πολλαπλέτα.

3.4 Εκτεταμένες υπερσυμμετρίες $\mathcal{N} > 1$

Σε αυτό το εδάφιο θα συζητήσουμε την περίπτωση εκείνη για την οποία έχουμε εκτεταμένες υπερσυμμετρίες $\mathcal{N} > 1$. Πράγματι, είναι δυνατόν σε πολλές θεωρίες Θεωρητικής Φυσικής να εμφανίζονται περισσότερες από μία υπερσυμμετρίες, δηλαδή να έχουμε την περίπτωση των εκτεταμένων υπερσυμμετριών. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία συλλογή από $\mathcal{N} > 1$ υπερφορτία Q^i_{A} και $\bar{Q}^i_{\dot{\mathsf{A}}}$ με $i = 1, ..., \mathcal{N}$. Άρα, μας ενδιαφέρει να δούμε πως διατυπώνεται πλέον η υπερσυμμετρική άλγεβρα.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως καθένα από αυτά τα υπερφορτία Q^i_{A} και $\bar{Q}^i_{\dot{\mathsf{A}}}$ ικανοποιεί τις ίδιες σχέσεις μετάθεσης με τους γεννήτορες της ομάδας Poincaré που είχαμε και για $\mathcal{N} = 1$:

$$[Q^i_{\mathsf{A}}, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_{\mathsf{A}}{}^{\mathsf{B}} Q^i_{\mathsf{B}}, \tag{3.42}$$

$$[Q^i_{\mathsf{A}}, P_\mu] = 0, \tag{3.43}$$

$$[\bar{Q}^i_{\dot{\mathsf{A}}}, M^{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\mathsf{A}}}{}^{\dot{\mathsf{B}}} \bar{Q}^i_{\dot{\mathsf{B}}}, \tag{3.44}$$

και

$$[\bar{Q}^i_{\dot{\mathsf{A}}}, P_\mu] = 0. \tag{3.45}$$

Η βασική σχέση αυτής της υπερσυμμετρικής άλγεβρας είναι:

$$\left\{Q^i_{\mathsf{A}}, \bar{Q}^j_{\dot{\mathsf{B}}}\right\} = 2(\sigma^\mu)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_\mu \delta^{ij}, \tag{3.46}$$

η οποία μας δείχνει ξεκάθρα τη σχέση αντιμετάθεσης μεταξύ ενός υπερφορτίου και του ερμιτιανού συζυγή του αν $\dot{\mathsf{B}} = \dot{\mathsf{A}}$.

Ωστόσο, υπάρχουν δύο εντελώς διαφορετκές σχέσεις, οι οποίες διαφοροποιούν την υπερσυμμετρική άλγεβρα για $\mathcal{N} > 1$. Αυτές οι σχέσεις σχετίζονται με τους αντιμεταθέτες των υπερφορτίων. Συγκεκριμένα, η πρώτη σχέση είναι:

$$\left\{Q^i_{\mathsf{A}}, Q^j_{\mathsf{B}}\right\} = \epsilon_{\mathsf{AB}} Z^{ij}, \tag{3.47}$$

ενώ η δεύτερη σχέση είναι:

$$\left\{\bar{Q}^i_{\dot{\mathsf{A}}}, \bar{Q}^j_{\dot{\mathsf{B}}}\right\} = \epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}} (Z^\dagger)^{ij}. \tag{3.48}$$

Εδώ οφείλουμε να διευκρινήσουμε ότι το $Z^{ij} = -Z^{ji}$ είναι ένα κεντρικό φορτίο (central charge). Αυτό σημαίνει ότι αντιμετατίθεται με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Η ακριβής φύση αυτών των κεντρικών φορτίων εξαρτάται από τη θεωρία που μελετάμε την εκάστοτε φορά, αλλά πρέπει να κατασκευάζονται από άλλες διατηρούμενες ποσότητες που υπάρχουν στη θεωρία αυτή.

Μία ακόμη τεράστια διαφορά είναι η ομάδα R-symmetry group. Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι για $\mathcal{N} = 1$ υπάρχει μία $U(1)_R$ συμμετρία που περιστρέφει τη φάση του υπερφορτίου. Για $\mathcal{N} > 1$, η συμμετρία R περιστρέφει τα υπεροφορτία μεταξύ τους.

Στη Θεωρητική Φυσική, συνατάμε συχνά θεωρίες με εκτεταμένη υπερσυμμετρία. Κάποια συνηθισμένα παραδείγματα είναι οι $\mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = 4$, $\mathcal{N} = 8$ και $\mathcal{N} = 11$ εκτεταμένες υπερσυμμετρίες. Οι θεωρίες αυτές είναι μία υποκατηγορία των θεωριών με $\mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρία. Αυτό σημαίνει ότι οι αναπαραστάσεις των θεωριών με $\mathcal{N} > 1$ μπορούν να κατασκευαστούν ενώνοντας τα υπερφορτία της $\mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρίας που περιγράψαμε προηγουμένως. Στο πλαίσιο αυτής της ερευνητικής εργασίας δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με εκτεταμένες υπερσυμμετρίες και με θεωρίες που βαζίζονται σε αυτές.

Ωστόσο, πριν περάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε πως μπορεί κανείς να μελετήσει τις άμαζες και τις έμμαζες αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} > 1$, θέτοντας το αντίστοιχο μαθηματικό πλαίσιο. Συγκεκριμένα, έχουμε:

i) Αναπαραστάσεις για άμαζα σωματίδια (massless representations): Αν περιοριστούμε και πάλι στην περίπτωση όπου έχουμε μηδενική μάζα, τότε όπως και στο προηούμενο εδάφιο διαλέγουμε το σύστημα $P_\mu = (E, 0, 0, E)$ και τότε από την (3.46), θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\left\{Q^i_{\mathsf{A}}, \bar{Q}^j_{\dot{\mathsf{B}}}\right\} &= 2(\sigma^\mu)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_\mu \delta^{ij} \\ &= 2(\sigma^0)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_0 \delta^{ij} + 2(\sigma^1)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_1 \delta^{ij} + 2(\sigma^2)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_2 + 2(\sigma^3)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} P_3 \delta^{ij} \\ &= 2E\left(\sigma^0 + \sigma^3\right)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{B}}} \delta^{ij} \\ &= 4E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{ij},\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε σε πλήρη αναλογία με το προηγούμενο εδάφιο ότι:

$$\left\{Q^i_{\mathsf{A}}, \bar{Q}^j_{\dot{\mathsf{B}}}\right\} = 4E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{ij}. \tag{3.49}$$

Συνεπώς, όπως και πριν για μία κατάσταση με ελικότητα λ θα έχουμε:

$$Q^i_2 \left|p;\lambda\right\rangle = \bar{Q}^i_{\dot{2}} \left|p;\lambda\right\rangle = 0, \tag{3.50}$$

δηλαδή θα έχουμε από τις (3.47) και (3.48):

$$Z^{ij} \left|p;\lambda\right\rangle = 0. \tag{3.51}$$

Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα, καθώς μας λέει πως τα κεντρικά φορτία δε διαδραματίζουν κανέναν ρόλο στις άμαζες αναπαραστάσεις. Άρα, είμαστε σε θέση να ορίσουμε και πάλι ένα σύνολο $\mathcal{N} > 1$ φερμιονικούς τελεστές καταστροφής και δημιουργίας αντίστοιχα με προηγούμενο εδάφιο. Συγκεκριμένα, ορίζουμε:

$$\alpha^i := \frac{Q^i_1}{2\sqrt{E}} \tag{3.52}$$

και

$$\alpha^{j\dagger} := \frac{\bar{Q}^j_{\dot{1}}}{2\sqrt{E}}, \tag{3.53}$$

οι οποίοι υπακούουν τις σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$\left\{\alpha^i, \alpha^{j\dagger}\right\} = \delta^{ij} \tag{3.54}$$

και

$$\left\{\alpha^{i}, \alpha^{j}\right\} = \left\{\alpha^{i\dagger}, \alpha^{j\dagger}\right\} = 0. \tag{3.55}$$

Έστω τώρα ότι ξεκινάμε από μία αρχική κατάσταση με ελικότητα λ, τότε έχουμε:

$$|\Omega\rangle = |p; \lambda\rangle\,, \tag{3.56}$$

τέτοια ώστε:

$$\alpha^{i}\,|\Omega\rangle = 0. \tag{3.57}$$

Άρα, μπορούμε να δημιουργήσουμε με τον φερμιονικό τελεστή δημιουργίας την εξής συλλογή καταστάσεων:

$$|\Omega\rangle\,, \alpha^{j\dagger}\,|\Omega\rangle\,, \alpha^{j\dagger}\alpha^{j\dagger}\,|\Omega\rangle\,, \ldots, \alpha^{j\dagger}\ldots\alpha^{\mathcal{N}\dagger}\,|\Omega\rangle\,. \tag{3.58}$$

Προσθέτωντας και τις CPT-συζυγές καταστάσεις, μπορεί κανείς να μελετήσει τις αναπαραστάσεις οποιασδήποτε υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} > 1$.

ii) Αναπαραστάσεις για έμμαζα σωματίδια (massive representations): Αυτό που αλλάζει στην περίπτωση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} > 1$, είναι ότι πλέον ισχύει το εξής:

$$\left\{Q^{i}_{\mathsf{A}}, \bar{Q}^{j}_{\dot{\mathsf{B}}}\right\} = \epsilon_{\mathsf{AB}} Z^{ij} \tag{3.59}$$

Από αυτή τη σχέση επιλέγοντας το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου μη μηδενικής μάζας $P_{\mu} = (m, 0, 0, 0)$, βρίκσουμε ότι:

$$\left\{Q^{i}_{\mathsf{A}}, \bar{Q}^{j}_{\dot{\mathsf{B}}}\right\} = 2m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^{ij}. \tag{3.60}$$

Έτσι, μπορεί κανείς να μελετήσει τις έμμαζες αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας $\mathcal{N} > 1$, έχοντας πλέον όλο το απαιτούμενο μαθηματικό πλαίσιο.

4 Ελεύθερες θεωρίες πεδίου και εισαγωγή στις υπερσυμμετρικές θεωρίες πεδίου

Έχοντας ήδη δομήσει την υπερσυμμετρική άλγεβρα $\mathcal{N} = 1$ και αναλύσει τις αναπαραστάσεις τής, είμαστε πλέον έτοιμοι να εμβαθύνουμε σε ένα από τα πιο θεμελιώδη και κομψά μοντέλα υπερσυμμετρικών θεωριών πεδίου: το ελεύθερο, άμαζο υπερσυμμετρικό μοντέλο Wess-Zumino. Το μοντέλο αυτό αποτελεί το πιο απλό, αλλά ταυτόχρονα ενδεικτικό παράδειγμα μίας υπερσυμμετρικής θεωρίας πεδίου, προσφέροντας μία ιδανική αφετηρία για την κατανόηση της δυναμικής που διέπει τις υπερσυμμετρικές αλληλεπιδράσεις. Παρά τη φαινομενική απλότητά του, το μοντέλο Wess-Zumino αναδεικνύει με ιδιαίτερο τρόπο τη δομή της υπερσυμμετρίας και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα φερμιονικά και τα μποζονικά πεδία.

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες από τη θεωρία πεδίου, περιγράφοντας τα θεμελιώδη μεγέθη και τις μεθόδους μελέτης τούς. Θα μελετήσουμε τα ελεύθερα πεδία Klein - Gordon και Dirac, ώστε να αποκτήσουμε οικειότητα με τις νέες έννοιες που εισάγουμε και θα μελετήσουμε διεξοδικά για τα πεδία αυτά κάποιες συμμετρίες τις οποίες διέπονται. Στη συνέχεια, θα εισαγάγουμε το ελεύθερο, άμαζο υπερσυμμετρικό μοντέλο Wess-Zumino, διατυπώνοντας τη δράση του και αποδεικνύοντας ότι αυτή παραμένει αναλλοίωτη υπό υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Τέλος, θα εξετάσουμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται, ώστε η θεωρία αυτή να είναι πραγματικά υπερσυμμετρική, αναλύοντας τους περιορισμούς που επιβάλλει η υπερσυμμετρία στη μορφή των επιτρεπτών όρων της δράσης.

4.1 Στοιχεία θεωρίας πεδίου στο χωρόχρονο Minkowski

Στην Κλασσική Μηχανική, γνωρίζουμε ότι για κάθε σύστημα μπορούμε να ορίσουμε ένα συναρτησοειδές $S[q_i(t)]$, που ονομάζεται δράση (action), ως το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής (Lagrangian) $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ που το περιγράφει:

$$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t). \tag{4.1}$$

Σύμφωνα με την αρχή της στάσιμης δράσης, οι πραγματικές τροχιές του συστήματος ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange, οι οποίες προκύπτουν απαιτώντας η μεταβολή της δράσης σε όρους πρώτης τάξης να είναι μηδέν ($\delta S = 0$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{4.2}$$

Η Λαγκρανζιανή $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ είναι μία συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων $q_i(t)$, των χρονικών παραγώγων τους $\dot{q}_i(t)$ και, γενικά, του χρόνου t. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange καθορίζουν πλήρως την κίνηση του συστήματος, επιτρέποντάς μας να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $q_i(t)$. Επιπλέον, η μελέτη των συμμετριών της δράσης επιτρέπει την ταυτοποίηση θεμελιωδών διατηρούμενων ποσοτήτων, σύμφωνα με το θεώρημα της Noether. Συγκεκριμένα, κάθε συνεχής συμμετρία του φυσικού συστήματος αντιστοιχεί σε μία διατηρούμενη ποσότητα. Για παράδειγμα, η ομογένεια του χώρου συνεπάγεται τη διατήρηση της ορμής, ενώ η ομογένεια του χρόνου οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας. Με αυτόν τον τρόπο, οι Νόμοι διατήρησης προκύπτουν άμεσα από τις συμμετρίες του συστήματος.

Αυτό που μας ενδιαφέρει σε αυτήν την ερευνητική εργασία είναι να μελετήσουμε πεδία και θεωρίες πεδίου. Άρα, πρέπει να γενικεύσουμε τη Λαγκρανζιανή θεώρηση, ώστε να περιγράψουμε συστήματα με άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας, καθώς στην Κλασσική Μηχανική περιγράφουμε συστήματα με περιορισμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Έτσι, η ανεξάρτητη μεταβλητή παύει να είναι ο χρόνος t, αλλά ένα χωροχρονικό σημείο x και οι εξαρτημένες συναρτήσεις $q_i(t)$ αντικαθίστανται από την τιμή ενός πεδίου $\phi(x)$ σε αυτό το σημείο του χωροχρόνου x. Συνεπώς, ορίζουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L}$ (Lagrangian density), η οποία για τοπικές θεωρίες πεδίου εξαρτάται μόνο από την τιμή του πεδίου $\phi(x)$ και των παραγώγων του $\partial_\mu \phi(x)$ σε αυτό το χωροχρονικό σημείο x, δηλαδή έχουμε:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \tag{4.3}$$

Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι η Λαγκρανζιανή του συστήματος πρόκυπτει από την ολοκλήρωση της Λαγκρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}$ σε όλο το χώρο. Επομένως, το ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής πυκνότητας σε όλο το χωρόχρονο μας δίνει τη συνολική δράση του συστήματος. Συνεπώς, η δράση S ορίζεται ως το χωροχρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}$:

$$S[\phi(x)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \tag{4.4}$$

Θέλουμε να δούμε πότε το συναρτησοειδές της δράσης καθίσταται στάσιμο. Για να το κάνουμε αυτό, θα εισάγουμε μία μικρή διαταραχή στο πεδίο $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi$, τέτοια ώστε να μηδενίζεται στο χρονικό σύνορο, δηλαδή $\delta\phi(t_1) = \delta\phi(t_2) = 0$. Τότε, εξετάζοντας την πρώτη τάξης μεταβολή της δράσης, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi\right] \\
&= \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right].
\end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος είναι απλώς μία ολική παράγωγος και μηδενίζεται επειδή έχουμε απαιτήσει η διαταραχή στο χρονικό σύνορο να μηδενίζεται. Επιπλέον, απαιτούμε η δράση να είναι στάσιμη, δηλαδή $\delta S = 0$. Άρα, έχουμε:

$$\int d^4x \left(\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\delta\phi\right) = 0.$$

Προφανώς, αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε διαταραχή $\delta\phi$ που μηδενίζεται στο χρονικό σύνορο. Συνεπώς, εξασφαλίζουμε τη συνθήκη στασιμοποίησης της δράσης και εξάγουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το πεδίο $\phi(x)$:

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = 0. \tag{4.5}$$

Αξίζει να σημειωθεί πως για τα συστήματα με περιορισμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας, η προσθήκη μίας τέλειας χρονικής παραγώγου μίας συνάρτησης των t και $q(t)$ μεταβάλλει τη δράση κατά μία σταθερά, αλλά δεν επηρεάζει τη στασιμοποίησή της. Θα δείξουμε ότι κάτι παρόμοιο ισχύει και για τα συστήματα με άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Έστω ότι η νέα Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι της μορφής:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \alpha^\mu, \tag{4.6}$$

όπου α^μ είναι μία συνάρτηση (που μπορεί να είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου), και ∂_μ δηλώνει την ολική παράγωγο ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες. Η δράση S' για τη νέα Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι:

$$S' = \int d^4x\, \mathcal{L}'.$$

Τότε, η μεταβολή της νέας δράσης είναι:

$$\begin{aligned}
\delta S' &= \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi\right] \\
&= \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta\phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}'}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right] \\
&= \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right] \\
&= \delta S \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Άρα, καταλήγουμε και πάλι στις ίδιες εξισώσεις κίνησης Euler - Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0.$$

Συνεπώς, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα καθορίζεται με αβεβαιότητα μόνο από την προσθήκη μίας ολικής παραγώγου.

Τώρα, θα μελετήσουμε τη γενική θεώρηση των συμμετρίων ενός συστήματος, καθώς οι συμμετρίες ενός συστήματος σχετίζονται άμεσα με τη δράση και τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα του συστήματος. Συγκεκριμένα, έστω ένας μετασχηματισμός του πεδίου $\phi(x)$, δηλαδή έστω ένας μετασχηματισμός ο οποίος είναι της μορφής: $\phi(x) \to \phi'(x)$. Αν ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτη τη δράση, δηλαδή ισχύει ότι:

$$S[\phi'(x)] = S[\phi(x)], \tag{4.7}$$

τότε ο μετασχηματισμός αυτός καλείται συμμετρία του συστήματος και συνεπάγεται άμεσα ότι και το μετασχηματισμένο πεδίο $\phi'(x)$ θα ικανοποιεί την ίδιες εξιώσεις Euler-Lagrange με το $\phi(x)$. Η απαίτηση αυτή είναι μία απαίτηση στην οποία, η μεταβολή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας, $\delta\mathcal{L}$, μπορεί να είναι διαφορετική του μηδενός, αλλά να ισούται με μία ολική παράγωγο, η οποία ως συνοριακός όρος στη μεταβολή της δράσης, δS, να μηδενίζεται και έτσι να ισχύει πως η δράση του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω απο τον μετασχηματισμό αυτόν. Μία ακόμη πιο ισχυρή απαίτηση είναι να απαιτήσουμε η μεταβολή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας να ισούται με μηδέν, δηλαδή να ισχύει ότι:

$$\delta\mathcal{L} = 0. \tag{4.8}$$

Τότε και πάλι ο μετασχηματισμός αυτός θα είναι συμμετρία του συστήματος, αλλά αυτή τη φορά η συνθήκη αυτή που ικανοποιείται είναι πιο ισχυρή από την προηγούμενη. Πολλές φορές αυτό που χρειαζόμαστε για να μελετήσουμε αν ένας μετασχηματισμός αποτελεί συμμετρία του συστήματος είναι ο εντοπισμός της απειροστής μεταβολής του πεδίου κατά τον απειροστό μετασχηματισμό, δηλαδή προσπαθούμε να εντοπίσουμε το $\delta\phi$ και ο απειροστός μετασχηματισμός του πεδίου γράφεται ως εξής:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x). \tag{4.9}$$

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η απειροστή μεταβολή του πεδίου στις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\delta\phi(x) = \epsilon^A \Delta_A \phi(x), \tag{4.10}$$

όπου τα ϵ^A είναι κάποιες σταθερές (μερικές φορές μπορεί να είναι και συναρτήσεις του χωρόχρονου, δηλαδή να ισχύει ότι $\epsilon^A = \epsilon^A(x)$) και Δ_A είναι είτε κάποιος διαφορικός τελεστής είτε κάποιος πίνακας που δρα στο πεδίο.

Τώρα, θα μελετήσουμε τα διατηρούμενα ρεύματα και τα φορτία. Συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι με τη μέθοδο της Noether μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διατηρούμενο ρεύμα για κάθε συνεχή συμμετρία της δράσης μίας θεωρίας πεδίου. Αν η απειροστή μεταβολή του πεδίου είναι της μορφής: $\delta\phi(x) = \epsilon^A \Delta_A \phi(x)$ και είναι συμμετρία του συστήματος, τότε η μεταβολή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας θα είναι μία ολική παράγωγος της μορφής:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^A \partial_\mu K^\mu_A. \tag{4.11}$$

Τότε, λοιπόν, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi \\
&= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\epsilon^A\Delta_A\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\epsilon^A\Delta_A\phi \\
&= \epsilon^A \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\Delta_A\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\Delta_A\phi \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \epsilon^A \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)}\right) \Delta_A \phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \Delta_A \phi\right] \\
&= \epsilon^A \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \Delta_A \phi\right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \Delta_A \phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \Delta_A \phi\right] \\
&= \epsilon^A \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \Delta_A \phi\right).
\end{aligned}
$$

Άρα, βρήκαμε ότι:

$$
\delta \mathcal{L} = \epsilon^A \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \Delta_A \phi\right) \tag{4.12}
$$

και εξισώνοντας την (4.11) με την (4.12) θα έχουμε:

$$
\epsilon^A \partial_\mu K_A^\mu = \epsilon^A \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \Delta_A \phi\right),
$$

δηλαδή:

$$
\partial_\mu \left(-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \Delta_A \phi - K_A^\mu\right) = 0. \tag{4.13}
$$

Συνεπώς, ορίζουμε ως ρεύμα Noether (Noether current) την εξής ποσότητα:

$$
J_A^\mu = \left(-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \Delta_A \phi - K_A^\mu\right) \tag{4.14}
$$

και παρατηρούμε από τη σχέση (4.13) ότι το ρεύμα Noether διατηρείται, αφού ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας:

$$
\partial_\mu J_A^\mu = 0. \tag{4.15}
$$

Για κάθε διατηρούμενο ρεύμα Noether ισχύει ότι μπορούμε να ορίσουμε ένα ολοκληρώσιμο φορτίο Noether (Noether charge) που είναι σταθερά της κίνησης και ανεξάρτητο του χρόνου. Συγκεκριμένα, για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski έχουμε ότι το ολοκληρώσιμο φορτίο ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της χρονικής συνιστώσας του διατηρούμενου ρεύματος Noether, δηλαδή:

$$
Q_A = \int d^3\vec{x}\, J_A^0(\vec{x}, t). \tag{4.16}
$$

4.2 Συμμετρίες και μετασχηματισμοί του συστήματος

Σε αυτό το εδάφιο θα μελετήσουμε κάποιες βασικές συμμετρίες του συστήματος και θα δούμε πως γράφεται η απειροστή μεταβολή του πεδίου υπό έναν απειροστό μετασχηματισμό κατά τις συμμετρίες που θα μελετήσουμε. Ήδη από τη σχέση (4.10) γνωρίζουμε ότι το Δ_A θα είναι είτε κάποιος διαφορικός τελεστής είτε κάποιος πίνακας. Το πεδίο $\phi(x)$ που μελετάμε μπορεί να είναι είτε πραγματικό είτε μιγαδικό, ανάλογα με το σύστημα που διαθέτουμε.

4.2.1 Ολική συμμετρία χωροχρονικής μετάθεσης

Αρχικά, θα μελετήσουμε την ολική συμμετρία χωροχρονικής μετάθεσης (global spacetime translation symmetry) κατά την οποία αν μετακινήσουμε όλο το πεδίο στο χώρο και στο χρόνο κατά ένα σταθερό τετράνυσμα a^μ, η φυσική του συστήματος θα παραμείνει ίδια. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός που μελετάμε είναι της εξής μορφής:

$$
x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{4.17}
$$

και τότε για το πεδίο $\phi(x)$ θα έχουμε:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x+a) \simeq \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x). \tag{4.18}$$

Άρα, δεδομένου ότι $\phi(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$ ισχύει ότι:

$$\delta\phi(x) = a^\mu \partial_\mu \phi(x). \tag{4.19}$$

Αν η δράση του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό, τότε λέμε ότι το σύστημα υπακούει στην ολική συμμετρία χωροχρονικής μετάθεσης (global spacetime translation symmetry). Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα συμμετρίας του μετασχηματισμού θα είναι η $T(1,3)$ που μελετήσαμε στην αρχή της ερευνητικής εργασίας και τότε το διατηρούμενο φορτίο Noether αυτής της συμμετρίας θα είναι το εξής:

$$P_\mu = \int d^3\vec{x}\, J^0_\mu \,, \tag{4.20}$$

όπου προφανώς P_μ είναι η τετραορμή και αφότου γνωρίζουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα του συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε το διατηρούμενο ρεύμα Noether και από εκεί να υπολογίσουμε μέσω του ολοκληρώματος της χρονικής συνιστώσας του ρεύματος Noether την τετραορμή.

4.2.2 Εσωτερική συμμετρία $SO(n)$

Τώρα, έστω ότι έχουμε ένα σύστημα από n βαθμωτά πραγματικά πεδία $\phi^i(x)$ με $i = 1, \cdots, n$. Η επόμενη περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι η εσωτερική συμμετρία $SO(n)$ ($SO(n)$ internal symmetry) κατά την οποία ισχύει ότι ο μετασχηματισμός του πεδίου είναι της μορφής:

$$\phi^i(x) \to \phi'^i(x) = R^i{}_j \phi^j(x), \tag{4.21}$$

όπου οι πίνακες $R \in SO(n)$ και υπακούουν σε όλες τις ιδιότητες της ομάδας $SO(n)$ που ήδη έχουμε περιγράψει. Η γεωμετρική ερμηνεία του μετασχηματισμού αυτού είναι ότι μπορούμε να δούμε ως διάνυσμα το $\phi^i(x)$ στον εσωτερικό χώρο $\mathbb{R}^n$ και η συμμετρία που περιγράφεται είναι η συμμετρία περιστροφής στο χώρο αυτόν. Προσοχή, δεν πρόκειται για περιστροφή στο φυσικό χωρόχρονο. Μέσω της εκθετικής απεικόνισης μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$R = e^{-\frac{1}{2}\theta^{ij} r_{ij}}, \tag{4.22}$$

όπου θ^{ij} πραγματικές παράμετροι και r_{ij} οι γεννήτορες της ομάδας συμμετρίας $SO(n)$ του μετασχηματισμού. Τότε, λοιπόν, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\phi^i(x) \to \phi'^i(x) &= R^i{}_j \phi^j(x) \\
&\simeq \left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\theta^{kl} r_{kl}\right)^i{}_j \phi^j(x) \\
&= \phi^i(x) - \frac{1}{2}\left(\theta^{kl} r_{kl}\right)^i{}_j \phi^j(x).
\end{aligned}$$

Άρα, η απειροστή μεταβολή του πεδίου $\phi^i(x)$ είναι:

$$\delta\phi^i(x) = -\frac{1}{2}\left(\theta^{kl} r_{kl}\right)^i{}_j \phi^j(x) \tag{4.23}$$

4.2.3 Γενική εσωτερική συμμετρία $SU(n)$

Η επόμενη συμμετρία που θα μελετήσουμε είναι η γενική εσωτερική συμμετρία $SU(n)$ ($SU(n)$ general internal symmetry). Θεωρούμε και πάλι ένα σύστημα από n βαθμωτά πεδία $\phi^i(x)$ με $i = 1, \cdots, n$, όπως και πριν, αλλά αντί για πραγματικά θεωρούμε ότι τα πεδία αυτά είναι μιγαδικά. Έστω μία συμπαγής ομάδα

Lie G με διάσταση $\dim_G$. Σε μία n-διάστατη αναπαράσταση των στοιχείων της ομάδας G θεωρούμε ότι οι γεννήτορες της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ είναι ένα σύνολο από $n \times n$ πινάκων $(t_A)^i{}_j$ με $A = 1, \cdots, \dim_G$ και ισχύει ότι:

$$[t_A, t_B] = f_{AB}{}^C t_C, \tag{4.24}$$

όπου $f_{AB}{}^C$ είναι οι σταθερές δομής της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$. Όπως ήδη έχουμε πει ισχύει ότι κάθε στοιχείο Θ της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ μπορεί να γραφτεί στη βάση των γεννητόρων της άλγεβρας ως εξής: $\Theta = \theta^A t_A$. Άρα, από την εκθετική απεικόνιση θα έχουμε ότι:

$$U(\Theta) = e^{-\Theta} = e^{-\theta^A t_A}. \tag{4.25}$$

Με βάση τα παραπάνω ισχύει ότι ο μετασχηματισμός του πεδίου θα είναι της μορφής:

$$\phi^i(x) \to \phi'^i(x) = U(\Theta)^i{}_j \phi^j(x) \tag{4.26}$$

και τότε η απειροστή μεταβολή του πεδίου μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
\phi^i(x) \to \phi'^i(x) &= U(\Theta)^i{}_j \phi^j(x) \\
&\simeq \left(\mathbf{1} - \theta^A t_A\right)^i{}_j \phi^j(x) \\
&= \phi^i(x) - \theta^A (t_A)^i{}_j \phi^j(x),
\end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει ότι:

$$\delta\phi^i(x) = -\theta^A (t_A)^i{}_j \phi^j(x), \tag{4.27}$$

το οποίο κανείς μπορεί να το γράψει διαφορετικά ως εξής:

$$\delta\phi = -\Theta\phi. \tag{4.28}$$

Αυτό που θα μας φανεί απίστευτα χρήσιμο στη συνέχεια είναι να δείξουμε ότι οι συμμετρίες κλείνουν και η σύνθεσή τους αποτελεί μία συμμετρία. Για να το αποδείξουμε αυτό υπολογίζουμε ένα διαδοχικό μετασχηματισμό, άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\phi &= \delta_1(-\Theta_2\phi) \\
&= -\Theta_2(-\Theta_1\phi) \\
&= \Theta_2\Theta_1\phi \\
&= \theta_2^B t_B\, \theta_1^A t_A \phi \\
&= \theta_1^A \theta_2^B\, t_B t_A \phi.
\end{aligned}$$

Άρα, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\phi &= (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\phi \\
&= (\Theta_2\Theta_1 - \Theta_1\Theta_2)\phi \\
&= \theta_1^A\theta_2^B (t_B t_A - t_A t_B)\phi \\
&= \theta_1^A\theta_2^B [t_B, t_A]\phi \\
&= -\theta_1^A\theta_2^B [t_A, t_B]\phi \\
&= -\theta_1^A\theta_2^B f_{AB}{}^C t_C \phi
\end{aligned}$$

και θέτωντας: $\delta_3 = [\delta_1, \delta_2]$ και $\theta_3 = \theta_1^A\theta_2^B f_{AB}{}^C$ παίρνουμε:

$$\delta_3\phi = -\theta_3^C t_C \phi = -\Theta\phi. \tag{4.29}$$

Άρα, μόλις αποδείξαμε ότι οι συμμετρίες κλείνουν και η σύνθεσή τους αποτελεί μία νέα συμμετρία. Δηλαδή, αποδείξαμε ότι οι μετασχηματισμοί του πεδίου που προκύπτουν από την ομάδα Lie σχηματίζουν την ίδια άλγεβρα που ικανοποιούν οι γεννήτορες της ομάδας. Άρα, η δράση των στοιχείων της ομάδας πάνω στα πεδία είναι η αναπαράσταση της άλγεβρας Lie. Τέλος, για ένα οποιοδήποτε σύστημα αν γνωρίζουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητά του μπορούμε να υπολογίσουμε το διατηρούμενο ρεύμα Noether (Noether current) και έτσι το ολοκλήρωμα της χρονικής συνιστώσας του ρεύματος Noether μας δίνει το διατηρούμενο φορτίο Noether του συστήματος το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$T_A = \int d^3\vec{x}\, J_A^0. \tag{4.30}$$

Άρα, αν η δράση ενός συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον παραπάνω μετασχηματισμό, τότε λέμε ότι το σύστημα υπακούει στη γενική εσωτερική συμμετρία $SU(n)$ ($SU(n)$ general internal symmetry).

4.2.4 Συμμετρίες Lorentz και Poincaré

Τέλος, θα ασχοληθούμε με τις συμμετρίες του χωρόχρονου Minkowski, που όπως ήδη έχουμε επισημάνει αναφέρονται στους μετασχηματισμούς Lorentz και Poincaré, και περιγράφονται από τις αντίστοιχες ομάδες Lorentz και Poincaré. Θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση των μετασχηματισμών Lorentz χάρην απλότητας αφού εύκολα κανείς αν γνωρίζει τους μετασχηματισμούς Lorentz μπορεί να περιγράψει εύκολα τι πρέπει να προσθέσουμε στους μετασχηματισμούς αυτούς, ώστε να πάρουμε τους μετασχηματισμούς Poincaré. Ισχύει ότι στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Lorentz είναι της εξής μορφής: $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, άρα ο μετασχηματισμός του πεδίου $\phi(x)$ είναι ο εξής:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(\Lambda x) = U(\Lambda)\phi(x), \tag{4.31}$$

όπου $U(\Lambda)$ είναι το στοιχείο εκείνο της ομάδας Lorentz το οποίο δρα στο πεδίο $\phi(x)$ και μας δίνει το μετασχηματισμένο πεδίο $\phi(\Lambda x)$. Από την εκθετική απεικόνηση μπορούμε να βρούμε την απειροστή μεταβολή του πεδίου:

$$\begin{aligned}
\phi(x) \to \phi'(x) &= U(\Lambda)\phi(x) \\
&= e^{\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}} \\
&\simeq \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\phi(x) \\
&= \phi(x) + \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\phi(x).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, προκύπτει ότι η απειροστή μεταβολή του πεδίου κατά έναν μετασχηματισμό Lorentz είναι η εξής:

$$\delta\phi(x) = \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\phi(x). \tag{4.32}$$

Άρα, αν η δράση ενός συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό Lorentz, τότε λέμε ότι το σύστημα μας υπακούουει στη συμμετρία Lorentz. Ομοίως για την συμμετρία Poincaré. Και πάλι κανείς μπορεί να δείξει ότι οι συμμετρίες κλείνουν και η σύνθεσή τους αποτελεί μία νέα συμμετρία, δηλαδή ότι οι μετασχηματισμοί του πεδίου που προκύπτουν από την ομάδα Lie σχηματίζουν την ίδια άλγεβρα που ικανοποιούν οι γεννήτορες της ομάδας, άρα η δράση των στοιχείων της ομάδας πάνω στα πεδία είναι η αναπαράσταση της άλγεβρας Lie. Τέλος, αν γνωρίζουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα του πεδίου μπορούμε να υπολογίσουμε το διατηρούμενο ρεύμα Noether και παίρνοντας το ολοκλήρωμα της χρονικής συνιστώσας του να πάρουμε το διατηρούμενο φορτίο που ορίζεται ως εξής:

$$M_{\rho\sigma} = \int d^3\vec{x}\, J_{\rho\sigma}^0, \tag{4.33}$$

το οποίο είναι η στροφορμή. Αν μελετούσαμε και τους μετασχηματισμούς Poincaré θα έπρεπε να συμπεριλάβουμε και την έκφραση (4.20) που θα αναφερόταν στις χωροχρονικές μεταθέσεις και θα μας έδινε την ορμή ως διατηρούμενο φορτίο του συστήματος. Οι συμμέτριες Lorentz και Poincaré είναι οι χωροχρονικές συμμετρίες (spacetime symmetries).

4.3 Το ελεύθερο πεδίο Klein - Gordon

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε το ελεύθερο έμμαζο πεδίο Klein - Gordon και στο τέλος θα εξετάσουμε την περίπτωση που το πεδίο είναι άμαζο. Τα ελεύθερα έμμαζα πεδία Klein - Gordon είναι τα ελεύθερα έμμαζα σχετικιστικά βαθμωτά πεδία που αποτελούν λύσεις της ελεύθερης εξίσωσης Klein - Gordon και περιγράφουν ελεύθερα, σχετικιστικά σωματίδια μάζας m. Για να δούμε τι είδους σωματίδια περιγράφουν κάνουμε την εξής ανάλυση.

Θεωρούμε επίπεδο χωρόχρονο χωρίς βαρύτητα (flat spacetime without gravity) και γνωρίζουμε από την Κβαντική Μηχανική ότι:

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t} \;\; \text{και} \;\; \vec{p} \to -i\vec{\nabla} \tag{4.34}$$

και από την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ότι:

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2. \tag{4.35}$$

Άρα, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E^2\phi(x) &= \left(\vec{p}^{\,2} + m^2\right)\phi(x), \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\phi(x) &= \left(\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + m^2\right)\phi(x), \\ -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) &= \left(-\nabla^2 + m^2\right)\phi(x), \\ -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) + \nabla^2\phi(x) - m^2\phi(x) = 0 \end{aligned}$$

και ορίζοντας τον τελεστή της νταλαμπεριανής ως εξής: $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$, έχουμε την ελεύθερη εξίσωση Klein - Gordon:

$$\left(\Box - m^2\right)\phi(x) = 0. \tag{4.36}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η σχετικιστική γενίκευση της κυματικής εξίσωσης και περιγράφει σωματίδια με μηδενικό σπιν, που δεν αλληλεπιδορύν μεταξύ τους και αναφέρεται σε επίπεδο χωρόχρονο, μάζας m. Η δράση του ελεύθερου έμμαζου πεδίου Klein - Gordon που μας δίνει την παραπάνω εξίσωση είναι η εξής:

$$S[\phi(x)] = -\frac{1}{2}\int d^4x \, \left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*(x)\partial_\nu\phi(x) + m^2\phi^*(x)\phi(x)\right], \tag{4.37}$$

δηλαδή η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου έμμαζου πεδίου Klein - Gordon είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*(x)\partial_\nu\phi(x) + m^2\phi^*(x)\phi(x)\right], \tag{4.38}$$

όπου $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*(x)\partial_\nu(x)\phi$ είναι ο κινητικός όρος, $m^2\phi^*(x)\phi(x)$ είναι ο όρος μάζας και θεωρούμε ότι το πεδίο $\phi(x)$ είναι μιγαδικό.

Έστω ότι έχουμε n μιγαδικά ελεύθερα έμμαζα σχετικιστικά βαθμωτά πεδία Klein - Gordon, δηλαδή έστω ότι έχουμε τα $\phi^i(x)$ με $i = 1, \cdots, n$. Τότε, η δράση του συστηματός που μελετάμε με βάση τη σχέση (4.37) θα είναι η εξής:

$$S\left[\phi^i(x)\right] = -\frac{1}{2}\int d^4x \, \left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*i}(x)\partial_\nu\phi^i(x) + m^2\phi^{*i}(x)\phi^i(x)\right]. \tag{4.39}$$

Τώρα, θα δείξουμε ότι η δράση του συστήματος αυτού παράμενει αναλλοίωτη κάτω από κάποιους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς.

Αρχικά, θεωρούμε μία χωροχρονική μετάθεση της μορφής $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ και ο μετασχηματισμός των πεδίων θα είναι της μορφής: $\phi^i(x) \to \phi'^i(x) = \phi^i(x+a)$, άρα έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
S\left[\phi'^i(x)\right] &= -\frac{1}{2}\int d^4x\ \left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi'^{*i}(x)\,\partial_\nu\phi'^i(x) + m^2\phi'^{*i}(x)\,\phi'^i(x)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\ \left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*i}(x+a)\,\partial_\nu\phi^i(x+a) + m^2\phi^{*i}(x+a)\,\phi^i(x+a)\right].
\end{aligned}
$$

Θέτω $x + a = y$ και ισχύει $d^4x = d^4y$, άρα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
S\left[\phi'^i(x)\right] &= -\frac{1}{2}\int d^4y\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*i}(y)\,\partial_\nu\phi^i(y) + m^2\phi^{*i}(y)\phi^i(y)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*i}(x)\,\partial_\nu\phi^i(x) + m^2\phi^i(x)\phi^i(x)\right] \\
&= S\left[\phi^i(x)\right].
\end{aligned}
$$

Άρα, ισχύει ότι κάτω από τον μετασχηματισμό αυτόν η δράση του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη και αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός αυτός περιγράφει την ολική συμμετρία χωροχρονικής μετάθεσης του συστήματος.

Αντίστοιχα, θα δείξουμε ότι το σύστημα υπακούει στη γενική εσωτερική συμμετρία $SU(n)$. Θεωρούμε έναν μετασχηματισμό των πεδίων της μορφής: $\phi^i(x) \to \phi^i(x) = U^i{}_j\phi^j(x)$ και τότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
S\left[\phi'^i(x)\right] &= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi'^{*i}(x)\,\partial_\nu\phi'^i(x) + m^2\phi'^{*i}(x)\phi'^i(x)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu(U^*)^i{}_j\phi^{*j}(x)\,\partial_\nu U^i{}_k\phi^k(x) + m^2(U^*)^i{}_j\phi^{*j}(x)U^i{}_k\phi^k(x)\right]
\end{aligned}
$$

και από την ιδιότητα του πίνακα $U \in SU(n)$, $U^\dagger U = \mathbf{1}$ έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
S\left[\phi'^i(x)\right] &= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*j}(x)\,\partial_\nu\phi^k(x)\,((U^*)^T)_j{}^iU^i{}_k + m^2\phi^{*j}(x)\phi^k(x)((U^*)^T)_j{}^iU^i{}_k\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*j}(x)\,\partial_\nu\phi^k(x)\,(U^\dagger)_j{}^iU^i{}_k + m^2\phi^{*j}(x)\phi^k(x)(U^\dagger)_j{}^iU^i{}_k\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*j}(x)\,\partial_\nu\phi^k(x)\,(U^\dagger U)_{jk} + m^2\phi^{*j}(x)\phi^k(x)(U^\dagger U)_{jk}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*j}(x)\,\partial_\nu\phi^k(x)\,(\mathbf{1})_{jk} + m^2\phi^{*j}(x)\phi^k(x)(\mathbf{1})_{jk}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*j}(x)\,\partial_\nu\phi^k(x)\,\delta_{jk} + m^2\phi^{*j}(x)\phi^k(x)\delta_{jk}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*k}(x)\,\partial_\nu\phi^k(x) + m^2\phi^{*k}(x)\phi^k(x)\right] \\
&= S\left[\phi^i(x)\right].
\end{aligned}
$$

Άρα, η δράση του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό αυτόν και ισχύει ότι ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί τη γενική συμμετρία $SU(n)$ του συστήματος.

Επιπλέον, θα δείξουμε ότι η δράση του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό Lorentz της μορφής: $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Ο μετασχηματισμός του πεδίου κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό είναι της εξής μορφής: $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(\Lambda x)$. Άρα, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
S\left[\phi'^i(x)\right] &= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi'^{*i}(x)\,\partial_\nu\phi'^i(x) + m^2\phi'^{*i}(x)\phi'^i(x)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*i}(\Lambda x)\,\partial_\nu\phi^i(\Lambda x) + m^2\phi^{*i}(\Lambda x)\phi^i(\Lambda x)\right].
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $y = \Lambda x$ και θα έχουμε: $d^4x = \det(\Lambda) d^4y$ με $\det(\Lambda) = 1$, άρα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} S\left[\phi'^i(x)\right] &= -\frac{1}{2}\int d^4y \det(\Lambda)\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*i}(y)\,\partial_\nu\phi^i(y) + m^2\phi^{*i}(y)\phi^i(y)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{*i}(x)\,\partial_\nu\phi^i(x) + m^2\phi^{*i}(x)\phi^i(x)\right] \\ &= S\left[\phi^i(x)\right]. \end{aligned}$$

Άρα, η δράση του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό Lorentz και λέμε ότι το σύστημα μας είναι Lorentz αναλλοίωτο (Lorentz invariant).

Τέλος, για το ελεύθερο άμαζο σχετικιστικό βαθμωτό πεδίο Klein - Gordon, απλά θέτουμε τη μάζα ίση με μηδέν και η δράση του συστήματος είναι:

$$S[\phi(x)] = \int d^4x\, \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*(x)\partial_\nu\phi(x), \tag{4.40}$$

δηλαδή η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι:

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*(x)\partial_\nu\phi(x) \tag{4.41}$$

και η εξίσωση Klein - Gordon για το ελεύθερο άμαζο πεδίο Klein - Gordon είναι η εξής:

$$\Box\phi(x) = 0. \tag{4.42}$$

4.4 Το ελεύθερο πεδίο Dirac

Στο εδάφιο αυτό θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε το ελεύθερο πεδίο Dirac. Τόσο το έμμαζο όσο και το άμαζο. Η εξίσωση Dirac βασίζεται σε ειδικές αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz που είναι οι σπινοριακές αναπαραστάσεις που ήδη έχουμε μελετήσει. Οι σπινοριακές αναπαραστάσεις περιγράφουν φερμιόνια και είναι πολύ σημαντικές για τη μελέτη της υπερσυμμετρίας για θεωρίες πεδίου που θα δούμε αργότερα.

Χωρίς να αναφέρουμε όλο το ιστορικό υπόβαθρο για το πως καταλήξαμε στην εξίσωση Dirac απλά θα την εισάγουμε, ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε όλη την ανάλυση που χρειαζόμαστε χωρίς να αντιμετωπίσουμε κάποιο πρόβλημα. Εισάγουμε την εξίσωση Dirac ως μία σχετικιστική γενίκευση που περιγράφει ένα σωματίδιο με εσωτερική δομή. Ένα τέτοιο σωματίδιο περιγράφεται από ένα πεδίο με πολλές συνιστώσες $\phi^M(x)$, όπου ο δείκτης M αναφέρεται στη συνιστώσα του πίνακα στήλη που μετασχηματίζεται κάτω από τις πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz. Θεωρούμε δηλαδή ότι τέτοια σωματίδια περιγράφονται από ένα σπινοριακό πεδίο $\Psi(x)$ που ονομάζεται σπινοριακό πεδίο και ικανοποιεί σε πρώτη τάξη την εξής κυματική εξίσωση:

$$\left(\partial\!\!\!/ - m\right)\Psi(x) = (\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \tag{4.43}$$

όπου προφανώς: $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$ τελεστής Dirac και $\mu = 0, 1, 2, 3$ για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \partial\!\!\!/\Psi(x) &= m\Psi(x), \\ \partial\!\!\!/^2\Psi(x) &= m\partial\!\!\!/\Psi(x), \\ (\gamma^\mu\partial_\mu)^2\Psi(x) &= m^2\Psi(x), \\ (\gamma^\mu\partial_\mu\gamma^\nu\partial_\nu)\Psi(x) &= m^2\Psi(x), \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\Psi(x) &= m^2\Psi(x), \\ \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu\Psi(x) &= m^2\Psi(x), \\ \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu\Psi(x) &= m^2\Psi(x) \end{aligned}$$

και απαιτώντας να ισχύει η εξίσωση Klein - Gordon (4.36) παίρνουμε ότι:

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu,$$

δηλαδή έχουμε:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}, \tag{4.44}$$

ότι ακριβώς είχαμε πει στη σχέση (2.54). Η σχέση αυτή υποδηλώνει μία πολύ σημαντική σχέση ανάμεσα στην άλγεβρα Clifford και την ομάδα Lorentz. Οι πίνακες Γάμμα είναι οι γεννήτορες της άλγεβρας Clifford και από εδώ και στο εξής θα χρησιμοπιήσουμε την αναπράσταση Weyl των πινάκων Γάμμα που ορίζονται στις σχέσεις (2.55) και (2.56). Τέλος, ένα ακόμη πολύ σημαντικό στοιχείο για την άλγεβρα Clifford είναι ότι ο μεταθέτης $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ορίζεται ως:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{4.45}$$

και είναι οι γεννήτορες μίας διδιάστατης αναπαράστασης της άλγεβρας Lie της ομάδας $SO(1,3)$.

Για το συζυγές πεδίο Dirac θεωρούμε ότι απαιτούμε το $\Psi^\dagger\beta\Psi$ να είναι μία διγραμμική μορφή που είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz. Άρα, έχουμε ότι ο πίνακας β θα πρέπει να είναι τετραγωνικός, αντιστρέψιμος και πρέπει να τον προσδιορίσουμε. Το γεγονός ότι η παραπάνω διγραμμική μορφή είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz σημαίνει ότι:

$$\Sigma^\dagger_{\mu\nu}\beta + \beta\Sigma_{\mu\nu} = 0 \tag{4.46}$$

και υποθέτουμε ότι ο πίνακας β είναι ερμιτιανός. Επειδή οι γεννήτορες των χωρικών στροφών Σ_{ij} είναι αντιερμιτιανοί και οι γεννήτορες των προωθήσεων Σ_{0i} είναι ερμιτιανοί, αυτό σημαίνει πως ο β δεν μπορεί να είναι η ταυτότητα. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο πίνακας β μπορεί να είναι οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του γ^0. Αυτή η μορφή είναι επιτρεπτή για οποιαδήποτε ερμιτιανή αναπαράσταση και είναι μοναδική. Αρά, αυτό δίνει:

$$\beta\gamma_\mu\beta^{-1} = -\gamma^\dagger_\mu, \tag{4.47}$$

δηλαδή ότι:

$$\beta\Sigma_{\mu\nu}\beta^{-1} = -\Sigma^\dagger_{\mu\nu}. \tag{4.48}$$

Συνεπώς, επιλέγουμε:

$$\beta = i\gamma^0 \tag{4.49}$$

και έτσι ορίζουμε το μιγαδικό συζυγές πεδίο Dirac ως εξής:

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\beta = i\Psi^\dagger\gamma^0 \tag{4.50}$$

και με αυτόν τον τρόπο η διγραμμική μορφή: $\bar{\Psi}\Psi$ είναι αναλλοίωτο κατά Lorentz.

Η δράση για το ελεύθερο πεδίο Dirac είναι η εξής:

$$S\left[\Psi(x), \bar{\Psi}(x)\right] = -\int d^4x\, \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi(x). \tag{4.51}$$

Τώρα, θα εξετάσουμε τη μεταβολή σε πρώτη τάξη της δράσης (variation of action), ώστε να εξάγουμε την εξίσωση Dirac και τη συζυγή της. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\delta S\left[\Psi(x), \bar{\Psi}(x)\right] = -\int d^4x\, \delta\bar{\Psi}(x)\left(\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi(x) - \int d^4x\, \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\delta\Psi(x)$$

$$= -\int d^4x\, \delta\bar{\Psi}(x) \left(\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \Psi(x) - \int d^4x\, \bar{\Psi}(x) \left(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m\right) \delta\Psi(x),$$

όπου: $\overleftarrow{\partial}_\mu$ δηλώνει τη δράση προς τα αριστερά της παραγώγου και προφανώς όλοι συνοριακοί όροι μηδενίζονται. Λέμε ότι $\delta\bar{\Psi}(x)$ και $\delta\Psi(x)$ είναι ανεξάρτητες μεταβολές και οι ποσότητες αυτές είναι συζυγείς σπινοριακές. Άρα, για να είναι η δράση στάσιμη θα πρέπει:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \;\text{ και }\; \bar{\Psi}(x)(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0, \tag{4.52}$$

όπου η πρώτη εξίσωση είναι η εξίσωση Dirac για το ελεύθερο έμμαζο πεδίο Dirac και η δεύτερη εξίσωση είναι η συζυγής της πρώτης, δηλαδή η εξίσωση Dirac για το ελεύθερο έμμαζο συζυγές πεδίο Dirac.

Τώρα, θα ορίσουμε τον μετασχηματισμό Lorentz του πεδίου Dirac. Για πεπερασμένους ορθούς μετασχηματιασμούς Lorentz που αναπαρίστανται από πίνακες της μορφής:

$$L(\lambda) = e^{\frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} \tag{4.53}$$

ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
L(\lambda)\gamma^\rho L^{-1}(\lambda) &= e^{\frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}\gamma^\rho e^{-\frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} \\
&\simeq \gamma^\rho + \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] + \cdots \\
&= \gamma^\rho + \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\left(\gamma^\mu \eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu \eta^{\mu\rho}\right) \\
&= \gamma^\sigma \left(\delta_\sigma{}^\rho + \omega_\sigma{}^\rho\right) \\
&= \gamma^\sigma \Lambda_\sigma{}^\rho,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα: $[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = (\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho})$ και $\omega_\sigma{}^\rho = \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\left(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho}\right)$ και έτσι βρήκαμε ότι:

$$L(\lambda)\gamma^\rho L^{-1}(\lambda) = \gamma^\sigma \Lambda_\sigma{}^\rho \tag{4.54}$$

και ο μετασχηματισμός του ελεύθερου πεδίου Dirac θα είναι της μορφής:

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = L(\lambda)^{-1}\Psi(\Lambda x) \tag{4.55}$$

Για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski ισχύει ότι έχουμε δει πως η αναπαράσταση Dirac της ομάδας Lorentz είναι αναγώγιμη. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι υπάρχει μία μη διαγώνια αναπαράσταση για $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski στην οποία μπορούμε να βρούμε δύο μη αναγώγιμες υποαναπαραστάσεις που κάθε μία θα έχει διάσταση 2. Οι υποαναπαραστάσεις αυτές είναι οι αναπαραστάσεις Weyl που ήδη έχουμε ορίσει. Άρα, για κάθε ένα σπινοριακό πεδίο Dirac $\Psi(x)$ στο $D = 4$ χωρόχρονο Minkowski (όπου το πεδίο αυτό είναι διάστασης 4) μπορούμε να ορίσουμε δύο σπινοριακά πεδία Weyl $\psi(x)$ και $\bar{\chi}(x)$, όπου το πρώτο αντιστοιχεί στη θεμελιώδη αναπαράσταση και το δεύτερο αντιστοιχεί στη μιγαδική συζυγή αναπαράσταση (δηλαδή το σπινοριακό πεδίο $\bar{\chi}(x)$ είναι το μιγαδικό συζυγές του σπινοριακού πεδίου $\psi(x)$). Άρα, όπως ήδη έχουμε δει από τη σχέση (2.49) ισχύει ότι:

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{bmatrix}, \tag{4.56}$$

όπου το $\psi(x)$ είναι το αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl και το $\chi(x)$ είναι το δεξιόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl. Από αυτήν τη σχέση και τη σχέση (4.55) αντιλαμβανόμαστε πως μετασχηματισμοί των σπινοριακών πεδίων Weyl είναι της εξής μορφής:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = L(\lambda)^{-1}\psi(\Lambda x) \text{ και } \bar{\chi}(x) \to \bar{\chi}'(x) = \bar{L}(\lambda)^{-1}\bar{\chi}(\Lambda x) \tag{4.57}$$

με

$$L(\lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} \text{ και } \bar{L}(\lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}}, \tag{4.58}$$

σε πλήρη αντιστοιχία με τη σχέση (2.47) και (2.48).

Υπάρχουν δύο Lorentz αναλλοίωτες κυματικές εξισώσεις για αυτά τα σπινοριακά πεδία $\psi(x)$ και $\bar{\chi}(x)$, οι οποίες είναι οι εξής:

$$\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)=0 \;\text{ και }\; \sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)=0. \tag{4.59}$$

Όπως βλέπουμε μέχρι στιγμής θεωρούμε αυτά τα δύο σπινοριακά πεδία άμαζα. Επιπλεόν, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)&=0,\\
\sigma^{\nu}\partial_{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)&=0,\\
\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\psi(x)&=0,\\
\frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}+\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi(x)&=0,\\
\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi(x)&=0,\\
\Box\psi(x)&=0
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)&=0,\\
\bar{\sigma}^{\nu}\partial_{\nu}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)&=0,\\
\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)&=0,\\
-\frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}+\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\chi}(x)&=0,\\
-\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\chi}(x)&=0,\\
\Box\bar{\chi}(x)&=0.
\end{aligned}$$

Άρα, για τα άμαζα σπινοριακά πεδία $\psi(x)$ και $\chi(x)$ ισχύει ότι:

$$\Box\psi(x)=0 \;\text{ και }\; \Box\bar{\chi}(x)=0. \tag{4.60}$$

Θεωρώντας ότι:

$$A\bar{\sigma}_{\mu}A^{\dagger}=\bar{\sigma}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu} \;\text{ και }\; A^{\dagger}\sigma_{\mu}A=\sigma_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \tag{4.61}$$

και γνωρίζοντας ότι:

$$L(\lambda)^{\dagger}=\bar{L}(-\lambda)=\bar{L}(\lambda)^{-1}, \tag{4.62}$$

ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\psi'^{\dagger}(x)\bar{\sigma}^{\mu}\psi'(x)&=\left[L(\lambda)^{-1}\psi(\Lambda x)\right]^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\left[L(\lambda)^{-1}\psi(\Lambda x)\right]\\
&=\psi^{\dagger}(\Lambda x)L(\lambda)\bar{\sigma}^{\mu}L(\lambda)^{-1}\psi(\Lambda x)\\
&=\psi^{\dagger}(\Lambda x)L(\lambda)\bar{\sigma}^{\mu}L(\lambda)^{\dagger}\psi(\Lambda x)\\
&=\psi^{\dagger}(\Lambda x)\bar{\sigma}^{\nu}\Lambda_{\nu}{}^{\mu}\psi(\Lambda x)\\
&=\Lambda_{\nu}{}^{\mu}\psi^{\dagger}(\Lambda x)\bar{\sigma}^{\nu}\psi(\Lambda x)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}'^{\dagger}(x)\sigma^{\mu}\bar{\chi}'(x)&=\left[\bar{L}(\lambda)^{-1}\bar{\chi}(\Lambda x)\right]^{\dagger}\sigma^{\mu}\left[\bar{L}(\lambda)^{-1}\bar{\chi}(\Lambda x)\right]\\
&=\bar{\chi}^{\dagger}(\Lambda x)L(\lambda)\sigma^{\mu}L(\lambda)^{\dagger}\bar{\chi}(\Lambda x)\\
&=\bar{\chi}^{\dagger}(\Lambda x)\sigma^{\nu}\Lambda_{\nu}{}^{\mu}\bar{\chi}(\Lambda x)\\
&=\Lambda_{\nu}{}^{\mu}\bar{\chi}^{\dagger}(\Lambda x)\sigma^{\nu}\bar{\chi}(\Lambda x).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, μόλις αποδείξαμε ότι για έναν μετασχηματισμό Lorentz οι παρακάτω ποσότητες μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\psi(x) \to \psi'^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\psi'(x) = \Lambda_\nu{}^\mu\psi^\dagger(\Lambda x)\bar{\sigma}^\nu\psi(\Lambda x) \tag{4.63}$$

και

$$\bar{\chi}^\dagger(x)\sigma^\mu\bar{\chi}(x) \to \bar{\chi}'^\dagger(x)\sigma^\mu\bar{\chi}'(x) = \Lambda_\nu{}^\mu\bar{\chi}^\dagger(\Lambda x)\sigma^\nu\bar{\chi}(\Lambda x). \tag{4.64}$$

Δηλαδή, αυτές οι ποσότητες είναι αναλλοίωτες κατά Lorentz. Συνεπώς, η αναλλοίωτη κατά Lorentz ερμιτιανή δράση που περιγράφει ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο είναι η εξής:

$$S\left[\psi(x), \bar{\psi}(x)\right] = -\int d^4x\, i\psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) \tag{4.65}$$

και η αναλλοίωτη κατά Lorentz ερμιτιανή δράση που περιγράφει ένα δεξιόστροφο σπινοριακό πεδίο είναι η εξής:

$$S\left[\chi(x), \bar{\chi}(x)\right] = -\int d^4x\, i\bar{\chi}^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x). \tag{4.66}$$

Από τις εκφράσεις αυτές για τις δράσεις εξετάζοντας τις μεταβολές (variations) $\psi^\dagger(x) \to \psi'^\dagger(x) = \psi^\dagger(x) + \delta\psi^\dagger(x)$ και $\bar{\chi}^\dagger(x) \to \bar{\chi}'^\dagger(x) = \bar{\chi}^\dagger(x) + \delta\bar{\chi}^\dagger(x)$, ισχύει ότι:

$$\delta S\left[\psi(x), \bar{\psi}(x)\right] = -\int d^4x\, i\delta\psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)$$

και

$$\delta S\left[\chi(x), \bar{\chi}(x)\right] = -\int d^4x\, i\delta\bar{\chi}^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x),$$

όπου βγάζουμε τις εξισώσεις των σπινοριακών πεδίων:

$$\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) = 0 \;\text{ και }\; \sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x) = 0. \tag{4.67}$$

Είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε ότι με ένα σπινοριακό πεδίο Weyl ($\psi(x)$ ή $\bar{\chi}(x)$) δεν υπάρχει τρόπος να εισάγουμε μάζα (θυμίζουμε ότι μέχρι τώρα εργαζόμαστε με άμαζες αναπαραστάσεις). Δηλαδή, δεν μπορεί κανείς να πει:

$$\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) = m\psi(x) \;\text{ και }\; \sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x) = m\chi(x), \tag{4.68}$$

διότι οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι κατά Lorentz αναλλοίωτες. Για να περιγράψουμε έμμαζα σωματίδια χρησιμοποιούμε και τα δύο σπινοριακά πεδία ($\psi(x)$ ή $\bar{\chi}(x)$) ως εξής:

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) &= 0,\\
\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) &= m\psi(x),\\
\begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}\partial_\mu\begin{bmatrix}\psi(x)\\ \bar{\chi}(x)\end{bmatrix} &= m\begin{bmatrix}\psi(x)\\ \bar{\chi}(x)\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\\ \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m\psi(x)\\ m\bar{\chi}(x),\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

άρα έχουμε:

$$\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) = m\bar{\chi}(x) \tag{4.69}$$

και

$$\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x) = m\psi(x). \tag{4.70}$$

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση ενός υπερσυμμετρικού μοντέλου στο επόμενο εδάφιο, θα δούμε πως μπορούμε να εκφράσουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα Dirac, που περιγράφει τα φερμιόνια, μέσω σπινοριακών πεδίων Weyl, $\psi(x)$ και $\chi(x)$, ώστε να εξοικοιωθούμε με τις πράξεις και τον συμβολισμό. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα Dirac μέσω ενός σπινορικού πεδίου Dirac, $\Psi(x)$, γράφεται όπως έχουμε δεί από τη δράση του πεδίου Dirac στη σχέση (4.51) στη μορφή:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x),$$

Ισχύει ότι:

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{bmatrix}$$

και

$$\bar{\Psi}(x) = i\Psi^\dagger(x)\gamma^0 = i\begin{bmatrix} \psi^\dagger(x) & \bar{\chi}^\dagger(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} -\bar{\chi}^\dagger(x) & \psi^\dagger(x) \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\Psi}(x)(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) \\
&= i\begin{bmatrix} -\bar{\chi}^\dagger(x) & \psi^\dagger(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \partial_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{bmatrix} - im\begin{bmatrix} -\bar{\chi}^\dagger(x) & \psi^\dagger(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{L} = i\left[-\bar{\chi}^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x) + \psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + m\bar{\chi}^\dagger(x)\psi(x) - m\psi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\right]
\end{aligned}$$

Άρα, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα Dirac γράφεται μέσω των σπινοριακών πεδίων Weyl, $\psi(x)$ και $\bar{\chi}(x)$, στη μορφή:

$$\mathcal{L} = i\left[-\bar{\chi}^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x) + \psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + m\bar{\chi}^\dagger(x)\psi(x) - m\psi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\right] \tag{4.71}$$

Τέλος, είναι πολύ χρήσιμο να σημειώσουμε ότι μπορούμε να μελετάμε τα σπινοριακά πεδία Weyl, $\psi(x)$ και $\bar{\chi}(x)$, μέσω των προβολικών τελεστών που δρουν πάνω στο σπινοριακό πεδίο Dirac. Συγκεκριμένα, ισχύει ορίζουμε αυτούς τους προβολικούς τελεστές ως εξής:

$$P_L := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_*) \;\text{ και }\; P_R := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_*), \tag{4.72}$$

οι οποίο όταν δρούν στο σπινοριακό πεδίο Dirac έχουν την εξής δράση:

$$P_L\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ 0 \end{bmatrix} \;\text{ και }\; P_R\Psi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\chi}(x) \end{bmatrix}. \tag{4.73}$$

Με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε να μελετήσουμε τη χειραλικότητα των συνιστωσών του σπινοριακού πεδίου Dirac (και του σπινοριακού πεδίου Majorana).

Αν μελετάμε ένα σπινοριακό πεδίο Majorana $\Psi(x)$, τότε θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη Majorana (Majorana condition):

$$\Psi(x) = \Psi^C(x) = B^{-1}\Psi^*(x), \tag{4.74}$$

όπου C είναι ο πίνακας συζυγίας φορτίου (charge conjugation matrix) που ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T \tag{4.75}$$

και για τον B^- μπορεί να αποδείξει κανείς ότι: $B^-1 = \gamma^0\gamma^1\gamma^3$. Με βάση αυτά θα ισχύει ότι:

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_2^*(x) \\ -\psi_1^*(x) \end{bmatrix} \tag{4.76}$$

και ορίζουμε:

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix} \text{ και } \tilde{\psi}(x) = \begin{bmatrix} \psi_1^*(x) \\ -\psi_2^*(x) \end{bmatrix}, \tag{4.77}$$

άρα προκύπτει ότι:

$$P_L\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } P_R\Psi(x) = (P_L\Psi(x))^C = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}(x) \end{bmatrix}. \tag{4.78}$$

και οι εξισώσεις κίνησης σε πλήρη αντιστοιχία με τις σχέσεις (4.69) και (4.70) είναι:

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x) = m\tilde{\psi}(x) \tag{4.79}$$

και

$$\sigma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi}(x) = m\psi(x). \tag{4.80}$$

4.5 Το ελεύθερο, άμαζο υπερσυμμετρικό μοντέλο Wess-Zumino

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε δει ότι μία υπερσυμμετρική πολλαπλέτα περιέχει ίσο αριθμό φερμιονίων και μποζονίων. Συνεπώς, η απλούστερη υπερσυμμετρική θεωρία πεδίου που μπρούμε να φτιάξουμε είναι εκείνη η οποία περίγραφεται από μία Λαγκρανζιανή πυκνότητα που αποτελείται από μία χειραλική υπερσυμμετρική πολλαπλέτα (chiral supermultiplet), δηλαδή ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl, $\psi(x)$, που περιγράφει ένα φερμιόνιο με spin-$1/2$, και ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, $\phi(x)$, που περιγράφει ένα μποζόνιο με spin-0. Το βαθμωτό μιγαδικό πεδίο διαδραματίζει το ρόλο του υπερσυμμετρικού ζευγαριού του (superpartner), καθώς έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας. Η πιο απλή δράση που μπορούμε να γράψουμε για τα πεδία αυτά είναι:

$$S_{WZ} = \int d^4x \; (\mathcal{L}_{scalar} + \mathcal{L}_{fermion}) = \int d^4x \; \left[\partial^\mu \phi^*(x)\partial_\mu\phi(x) + i\psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)\right] \tag{4.81}$$

και ονομάζεται άμαζο, ελεύθερο υπερσυμμετρικό μοντέλο Wess-Zumino (WS) και περιλαμβάνει μία χειραλική υπερσυμμετρική πολλαπλέτα, δηλαδή ένα φερμιόνιο με spin-$1/2$ που περιγράφεται από το σπινοριακό πεδίο Weyl, $\psi(x)$, ένα μποζόνιο που περιγράφεται από ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, $\phi(x)$.

Γνωρίζουμε ότι ένας υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός αλλάζει ένα μποζόνιο σε φερμιόνιο. Τότε, για την αλλαγή στο πεδίο $\phi(x)$ θα έχουμε ότι:

$$\delta\phi(x) = \epsilon(x)\psi(x) = \epsilon^{\mathsf{A}}(x)\psi_{\mathsf{A}}(x) \tag{4.82}$$

και

$$\delta\phi^*(x) = \epsilon^\dagger(x)\psi^\dagger(x) = \epsilon^\dagger_{\dot{\mathsf{A}}}(x)\psi^{\dagger\dot{\mathsf{A}}}(x), \tag{4.83}$$

όπου το $\epsilon(x)$ είναι ένας αριστερόστροφος σπίνορας Weyl, ο οποίος υπακούει σε σχέσεις αντιμετάθεσης και περιγράφει μία απειροστή ποσότητα που παραμετροποιεί τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό. Επικαλούμαστε καθολική υπερσυμμετρία, άρα πρέπει να ισχύει:

$$\partial_\mu \epsilon = 0. \tag{4.84}$$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{scalar} &= \delta(\partial^\mu\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x)) \\ &= \delta(\partial^\mu\phi^*(x))\partial_\mu\phi(x) + \partial^\mu\phi^*(x)\delta(\partial_\mu\phi(x)) \\ &= \partial^\mu\delta\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x) + \partial^\mu\phi^*(x)\partial_\mu\delta\phi(x) \\ &= \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x) + \epsilon\partial^\mu\phi^*(x)\partial_\mu\psi(x), \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στη σχέση:

$$\delta\mathcal{L}_{scalar} = \epsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) + \epsilon \partial^\mu \phi^*(x) \partial_\mu \psi(x). \tag{4.85}$$

Επιπλέον, έχουμε από τις διαστάσεις των πεδίων ότι:

$$[\psi(x)] = (\text{mass})^{\frac{3}{2}}, \quad [\phi(x)] = (\text{mass})^1.$$

Άρα, έχουμε:

$$[\epsilon(x)] = (\text{mass})^{-\frac{1}{2}}.$$

Αντίστοιχα, η μεταβολή του $\psi(x)$ πρέπει να περιέχει το $\phi(x)$, ώστε η υπερσυμμετρία να είναι συνεπής. Επειδή το $\phi(x)$ είναι βαθμωτό, η φυσική επιλογή είναι να πάρουμε την παράγωγό του:

$$\delta\psi(x) \sim \partial\phi(x).$$

Αυτό προκύπτει διότι τα φερμιόνια έχουν διάσταση $\frac{3}{2}$ (σε όρους διαστατικής ανάλυσης πεδίων), ενώ το $\phi(x)$ έχει διάσταση 1. Άρα, για να ταιριάξουμε τις διαστάσεις, πρέπει να περιλάβουμε μία παράγωγο $\partial_\mu\phi(x)$, η οποία αυξάνει τη διάσταση κατά 1, ώστε το σύνολο να έχει διάσταση $\frac{3}{2}$, όπως απαιτείται για ένα φερμιόνιο. Η σωστή δομή της μεταβολής του $\psi(x)$ πρέπει να σέβεται τη συμμετρία της θεωρίας και να μεταφέρει σωστά τους βαθμούς ελευθερίας. Οι σ^μ πίνακες χρησιμοποιούνται γιατί συνδέουν σπίνορες Weyl με τετραδιανυσματικά αντικείμενα ($\partial_\mu\phi(x)$). Άρα, γράφουμε:

$$\delta\psi_{\mathsf{A}}(x) = -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_{\mathsf{A}} \partial_\mu \phi(x) \tag{4.86}$$

και

$$\delta\psi^\dagger_{\dot{\mathsf{A}}}(x) = i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot{\mathsf{A}}} \partial_\mu \phi^*(x) \tag{4.87}$$

για να διατηρήσουμε την ορθή συμπεριφορά του μετασχηματισμού. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{fermion} &= i\delta\psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\delta\psi(x) \\
&= -\epsilon\sigma^\nu\partial_\nu\phi^*(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \psi^\dagger(x)\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) \\
&= -2\epsilon\partial^\mu\psi(x)\partial_\mu\phi^*(x) + \epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\psi(x)\partial_\nu\phi^*(x) + 2\psi^\dagger(x)\epsilon^\dagger\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) - \psi^\dagger(x)\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) \\
&= -\epsilon\partial^\mu\phi^*(x)\partial_\mu\psi(x) - \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x) \\
&\quad + \partial_\mu\left(\epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\ \psi(x)\partial_\nu\phi^*(x) - \epsilon\psi(x)\partial_\mu\phi^*(x) + \epsilon^\dagger\psi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)\right),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες:

$$[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu]_{\mathsf{B}}^{\mathsf{A}} = 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\mathsf{B}}^{\mathsf{A}} \tag{4.88}$$

και

$$[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu]_{\dot{\mathsf{B}}}^{\dot{\mathsf{A}}} = 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot{\mathsf{B}}}^{\dot{\mathsf{A}}} \tag{4.89}$$

και έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{fermion} = &-\epsilon\partial^\mu\phi^*(x)\partial_\mu\psi(x) - \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x) \\
&+ \partial_\mu\left(\epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi(x)\partial_\nu\phi^*(x) - \epsilon\psi(x)\partial_\mu\phi^*(x) + \epsilon^\dagger\psi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)\right).
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Άρα, έχουμε:

$$\delta S_{WS} = \int d^4x\ (\delta\mathcal{L}_{scalar} + \delta\mathcal{L}_{fermion}) = 0 \tag{4.91}$$

και με αυτό συμπεραίνουμε ότι δράση παραμένει αναλλοιώτη υπό υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς.

Ωστόσο, δεν έχουμε τελείωσει με το να δείξουμε πως αυτή η θεωρία πεδίου είναι υπερσυμμετρική. Συγκεκριμένα, πρέπει να δείξουμε πως ο μεταθέτης δύο διαδοχικών υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών που παραμετροποιείται από τους σπίνορες ϵ_1 και ϵ_2 είναι ένας άλλος υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός. Μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned}(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\phi(x) &= \delta_2(\epsilon_1\psi(x)) - \delta_1(\epsilon_2\psi(x)) \\ &= \epsilon_1(-i\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger\partial_\mu\phi(x)) - \epsilon_2(-i\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger\partial_\mu\phi(x)) \\ &= i(-\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger + \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu\phi(x)\end{aligned}$$

και έτσι έχουμε:

$$(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\phi(x) = i(-\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger + \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu\phi(x) \tag{4.92}$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\psi_{\mathsf{A}}(x) &= \delta_2(-i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_{\mathsf{A}}\partial_\mu\phi(x)) - \delta_1(-i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_{\mathsf{A}}\partial_\mu\phi(x)) \\ &= -i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_{\mathsf{A}}\partial_\mu\delta_2\phi(x) + i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_{\mathsf{A}}\partial_\mu\delta_1\phi(x) \\ &= -i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_{\mathsf{A}}\partial_\mu(\epsilon_2\psi(x)) + i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_{\mathsf{A}}\partial_\mu(\epsilon_1\psi(x)) \\ &= -i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_{\mathsf{A}}\epsilon_2\partial_\mu\psi(x) + i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_{\mathsf{A}}\epsilon_1\partial_\mu\psi(x)\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την ταύτοτητα:

$$\chi_{\mathsf{A}}(\xi\eta) = -\xi_{\mathsf{A}}(\eta\chi) - \eta_{\mathsf{A}}(\chi\xi), \tag{4.93}$$

θέτοντας $\chi = \sigma^\mu\epsilon_1^\dagger$, $\xi = \epsilon_2$ και $\eta = \partial_\mu\psi$ μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\xi^\dagger\sigma^\mu\chi = -\chi\bar{\sigma}^\mu\xi^\dagger. \tag{4.94}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}-i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_{\mathsf{A}}\epsilon_2\partial_\mu\psi(x) &= -i\Big[-\epsilon_{2\mathsf{A}}(\partial_\mu\psi(x)\bar{\sigma}^\mu\epsilon_1^\dagger) - \partial_\mu\psi_{\mathsf{A}}(x)(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger\epsilon_2)\Big] \\ &= -i\Big[\epsilon_{2\mathsf{A}}(\epsilon_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi) - \partial_\mu\psi_{\mathsf{A}}(\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\Big]\end{aligned}$$

και

$$i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_{\mathsf{A}}\epsilon_1\partial_\mu\psi(x) = i\Big[\epsilon_{1\mathsf{A}}(\epsilon_2^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)) - \partial_\mu\psi_{\mathsf{A}}(x)(\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)\Big].$$

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\psi_{\mathsf{A}}(x) = i(-\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger + \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu\psi_{\mathsf{A}}(x) + i\epsilon_{1\mathsf{A}}\epsilon_2^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - i\epsilon_{2\mathsf{A}}\epsilon_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x). \tag{4.95}$$

Οι τελευταίοι δύο όροι μηδενίζονται ($\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) = 0$), ενώ οι υπόλοιποι είναι ίδιοι με την περίπτωση του βαθμωτού πεδίου. Ο λόγος για αυτό είναι ότι ο σπίνορας έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας (δύο μιγαδικοί), ενώ το βαθμωτό πεδίο έχει μόνο δύο (ένας μιγαδικός). Έτσι, η υπερσυμμετρία αποτελεί συμμετρία μόνο όταν ικανοποιούνται οι κλασσικές εξισώσεις κίνησης. Αν θέλουμε η υπερσυμμετρία να ισχύει κβαντομηχανικά, πρέπει να εισαγάγουμε ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $F(x)$ χωρίς κινητικό όρο. Αυτά τα πεδία καλούνται βοηθητικά πεδία (auxiliary fields), έχουν διάσταση $[F(x)] = (\text{mass})^2$ σαν τα βαθμωτά πεδία και οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$F(x) = F^*(x) = 0. \tag{4.96}$$

Ορίζουμε το βοηθητικό πεδίο $F(x)$ σαν μία πολλαπλέτα των εξισώσεων κίνησης για το $\psi(x)$ κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς:

$$\delta F(x) = -i\epsilon^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) \tag{4.97}$$

και

$$\delta F^{*}(x) = i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}(x)\bar{\sigma}^{\mu}\epsilon. \tag{4.98}$$

Συνεπώς, θα πάρουμε:

$$\delta\mathcal{L}_{auxiliary} = -i\epsilon^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) + i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}(x)\bar{\sigma}^{\mu}\epsilon \tag{4.99}$$

και στον μετασχηματισμό του $\psi(x)$ θα έχουμε ότι:

$$\delta\psi_{\mathsf{A}}(x) = -i(\sigma^{\mu}\epsilon^{\dagger})_{\mathsf{A}}\partial_{\mu}\phi(x) + \epsilon_{\mathsf{A}}F(x) \tag{4.100}$$

και

$$\delta\psi^{\dagger}_{\dot{\mathsf{A}}}(x) = i(\epsilon\sigma^{\mu})_{\dot{\mathsf{A}}}\partial_{\mu}\phi^{*}(x) + \epsilon^{\dagger}_{\dot{\mathsf{A}}}F^{*}(x). \tag{4.101}$$

Με αυτές τις τροποποιήσεις θα έχουμε:

$$\begin{aligned}(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\psi_{\mathsf{A}}(x) = {} & i(-\epsilon_1\sigma^{\mu}\epsilon_2^{\dagger} + \epsilon_2\sigma^{\mu}\epsilon_1^{\dagger})\partial_{\mu}\psi_{\mathsf{A}}(x) \\ & + i\epsilon_{1\mathsf{A}}\epsilon_2^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - i\epsilon_{2\mathsf{A}}\epsilon_1^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) \\ & - i\epsilon_{1\mathsf{A}}\epsilon_2^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) + i\epsilon_{2\mathsf{A}}\epsilon_1^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x).\end{aligned}$$

Δηλαδή, παίρνουμε:

$$(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\psi_{\mathsf{A}}(x) = i(-\epsilon_1\sigma^{\mu}\epsilon_2^{\dagger} + \epsilon_2\sigma^{\mu}\epsilon_1^{\dagger})\partial_{\mu}\psi_{\mathsf{A}}(x). \tag{4.102}$$

Έτσι, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{scalar} + \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{auxiliary} \tag{4.103}$$

είναι αναλλοίωτη υπό υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς και για κάθε πεδίο έχουμε:

$$(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)X(x) = i(-\epsilon_1\sigma^{\mu}\epsilon_2^{\dagger} + \epsilon_2\sigma^{\mu}\epsilon_1^{\dagger})\partial_{\mu}X(x) \tag{4.104}$$

με $X = \phi, \phi^{*}, \psi, \psi^{\dagger}, F, F^{*}$.

4.6 On-shell και Off-shell υπερσυμμετρικές αναπαραστάσεις

Μία από τις πιο θεμελιώδεις διακρίσεις στις υπερσυμμετρικές θεωρίες πεδίου είναι εκείνη μεταξύ των on-shell και των off-shell αναπαραστάσεων της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Η διάκριση αυτή δεν αφορά μονάχα την τεχνική πλευρά της θεωρίας, αλλά έχει άμεσες συνέπειες τόσο στη δομή των υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών όσο και στη δυνατότητα κβαντικοποίησης της θεωρίας με συνέπεια.

Μία αναπαράσταση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας λέγεται on-shell, όταν η υπερσυμμετρική άλγεβρα κλείνει μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις κίνησης των πεδίων, δηλαδή όταν η θεωρία εξετάζεται πάνω στο κέλυφος των δυναμικών εξισώσεων (on the mass shell). Στην περίπτωση αυτή, η αντιμετάθεση δύο υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών οδηγεί σε μετάθεση στο χωροχρονικό σημείο,, αλλά μόνο αφού επιβληθούν οι εξισώσεις κίνησης. Αυτή η εξάρτηση από τις δυναμικές εξισώσεις σημαίνει ότι η υπερσυμμετρία δεν αποτελεί ακριβή συμμετρία της θεωρίας σε κάθε επίπεδο, κάτι που μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στη διατήρησή της σε κβαντικό επίπεδο.

Αντίθετα, μία off-shell υπερσυμμετρική αναπαράσταση είναι μία αναπαράσταση στην οποία η υπερσυμμετρική άλγεβρα κλείνει χωρίς να απαιτείται η χρήση των εξισώσεων κίνησης. Δηλαδή, η αντιμετάθεση δύο υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών ισούται με μία μεταφορά στον χωρόχρονο αλγεβρικά, ανεξαρτήτως της δυναμικής των πεδίων. Για να επιτευχθεί αυτό, είναι συχνά απαραίτητο να εισάγουμε βοηθητικά πεδία (auxiliary fields), τα οποία δεν διαθέτουν κινητικό όρο και επομένως δεν συνεισφέρουν στους φυσικούς βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας. Τα πεδία αυτά έχουν σχεδιαστεί ώστε να εξισορροπούν τον αριθμό των μποζονικών και φερμιονικών βαθμών ελευθερίας, ώστε η υπερσυμμετρική άλγεβρα να κλείνει off-shell.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η χειραλική υπερσυμμετρική πολλαπλέτα που μελετήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η οποία αποτελείται από ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ και ένα αριστερόστροφο Weyl σπινορικό πεδίο $\psi(x)$. Στην on-shell μορφή της, η υπερσυμμετρική άλγεβρα δεν κλείνει χωρίς την επιβολή των εξισώσεων κίνησης για το $\psi(x)$ και το $\phi(x)$. Όπως είδαμε στο ελεύθερο, άμαζο υπερσυμμετρικό μοντέλο Wess-Zumino, η μεταβολή του σπινορικού πεδίου $\psi(x)$ υπό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό περιέχει παράγωγο του $\phi(x)$. Συνεπώς, όταν υπολογίζουμε την αντιμετάθεση δύο τέτοιων μετασχηματισμών, εμφανίζονται επιπλέον όροι που μηδενίζονται μόνο όταν ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης (π.χ. $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0$). Αυτό σημαίνει ότι η υπερσυμμετρία της θεωρίας είναι αυστηρά on-shell.

Για να επιτευχθεί off-shell κλείσιμο της υπερσυμμετρικής άλγεβρας στην ίδια θεωρία, εισάγουμε ένα νέο βαθμωτό πεδίο $F(x)$, το οποίο είναι μιγαδικό και δεν διαθέτει κινητικό όρο. Το πεδίο αυτό ονομάζεται βοηθητικό πεδίο και υπακούει σε αλγεβρική εξίσωση κίνησης (π.χ. $F(x) = 0$). Τότε, η υπερσυμμετρική πολλαπλέτα επεκτείνεται στο σύνολο $(\phi(x), \psi(x), F(x))$ και οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί τροποποιούνται ώστε να περιλαμβάνουν και μεταβολή του $F(x)$. Στο νέο αυτό σχήμα, η υπερσυμμετρική άλγεβρα κλείνει αλγεβρικά και χωρίς αναφορά σε εξισώσεις κίνησης, δηλαδή off-shell. Παράλληλα, ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας εξισορροπείται:

$$\text{Μποζονικοί: } \phi(x)\ (2\ \text{πραγματικοί}) + F(x)\ (2) = 4, \quad \text{Φερμιονικοί: } \psi(x)\ (4) \Rightarrow \#_{\text{bosonic}} = \#_{\text{fermionic}}.$$

Παρόλο που στην εργασία αυτή δε θα μελετηθούν η Yang-Mills θεωρία που είναι η επόμενη θεωρία που κάποιος μπορεί να δείξει ότι είναι υπερσυμμετρική, αντίστοιχη κατασκευή συναντάμε και εκεί όπου στη διανυσματική υπερσυμμετρική πολλαπλέτα (vector supermultiplet), η οποία αποτελείται από ένα διανυσματικό βαθμωτό πεδίο $A_\mu(x)$, ένα Majorana σπινοριακό πεδίο $\lambda(x)$ και ένα βοηθητικό πραγματικό βαθμωτό πεδίο $D(x)$. Το πεδίο $D(x)$ δεν έχει δυναμική, αλλά εισάγεται για να επιτευχθεί off-shell κλείσιμο της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Και εδώ ισχύει η ίδια εξισορρόπηση των βαθμών ελευθερίας: το $A_\mu(x)$ έχει 3 φυσικούς βαθμούς ελευθερίας (μετά το fixing του βαθμού βαθμίδας), το $D(x)$ έναν, ενώ το $\lambda(x)$ έχει 4. Συνεπώς, έχουμε και πάλι $4 = 4$ και off-shell υπερσυμμετρία.

Η έννοια της off-shell υπερσυμμετρίας είναι ιδιαίτερα σημαντική στην κβαντική θεωρία. Ενώ η on-shell υπερσυμμετρία είναι αρκετή για την κλασική αναλλοιώτητα της δράσης, δεν επαρκεί για να εγγυηθεί τη διατήρηση της υπερσυμμετρίας υπό ποσοτικοποίηση, δηλαδή στην πορεία υπολογισμού διαγραμμάτων Feynman κ.λπ. Μόνο σε off-shell φορμαλισμό μπορεί να διασφαλιστεί πλήρως η διατήρηση της συμμετρίας αυτής, καθώς όλες οι παραγώγους και τα commutators έχουν κλειστό αλγεβρικό σχήμα ανεξάρτητα από τις εξισώσεις κίνησης.

Συνεπώς, η εισαγωγή βοηθητικών πεδίων και η μετάβαση από on-shell σε off-shell φορμαλισμό δεν αποτελεί απλώς τεχνική λεπτομέρεια, αλλά βασική δομική επιλογή στην κατασκευή και ποσοτικοποίηση υπερσυμμετρικών θεωριών. Οι πλήρεις off-shell αναπαραστάσεις διαδραματίζουν επίσης θεμελιώδη ρόλο στη διατύπωση των θεωριών αυτών στον υπερχώρο (superspace), όπου οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί γίνονται γεωμετρικές μεταβολές σε επεκταμένες διαστάσεις με μεταβλητές Grassmann.

Παράρτημα A: Ιδιότητες εκθετικής απεικόνισης

Σε αυτό το παράρτημα θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης που χρειαστήκαμε και εφαρμόσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα, έστω A και B δύο πίνακες:

i) **Πρόταση A.1.:** Αν $[A, B] = 0$, τότε:
$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Απόδειξη: Από την ταυτότητα Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) γνωρίζουμε πως:
$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Αφού [A, B] = 0, τότε συμπεραίνουμε ότι:
$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

$\square$

ii) **Πρόταση A.2.:** Αν ο πίνακας B έχει αντίστροφο, τότε:
$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:
$$\begin{aligned} e^{BAB^{-1}} &= \mathbf{1} + BAB^{-1} + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \dots \\ &= B\left(\mathbf{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots\right)B^{-1} \\ &= Be^A B^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

iii) **Πρόταση A.3.:** $\forall A$, ισχύει ότι:
$$\left(e^A\right)^* = e^{A^*}.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:
$$\begin{aligned} \left(e^A\right)^* &= \left(\mathbf{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots\right)^* \\ &= \left(\mathbf{1} + A^* + \frac{1}{2!}\left(A^*\right)^2 + \dots\right) \\ &= e^{A^*}. \end{aligned}$$

$\square$

iv) **Πρόταση A.4.:** $\forall A$, ισχύει ότι:
$$\left(e^A\right)^T = e^{A^T}.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:
$$\begin{aligned} \left(e^A\right)^T &= \left(\mathbf{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots\right)^T \\ &= \left(\mathbf{1} + A^T + \frac{1}{2!}\left(A^T\right)^2 + \dots\right) \\ &= e^{A^T}. \end{aligned}$$

$\square$

v) **Πρόταση Α.5.:** $\forall A$, ισχύει ότι:
$$\left(e^{A}\right)^{\dagger} = e^{A^{\dagger}}.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:
$$\begin{aligned}\left(e^{A}\right)^{\dagger} &= \left(\mathbf{1} + A + \frac{1}{2!}A^{2} + \dots\right)^{\dagger} \\ &= \left(\mathbf{1} + A^{\dagger} + \frac{1}{2!}\left(A^{\dagger}\right)^{2} + \dots\right) \\ &= e^{A^{\dagger}}.\end{aligned}$$

□

vi) **Πρόταση Α.6.:** $\forall A$, ισχύει ότι:
$$\left(e^{A}\right)^{-1} = e^{-A}.$$

Απόδειξη: Αφού [A, A] = 0, τότε $e^{A}e^{-A} = e^{A}e^{-A}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\left(e^{A}\right)^{-1} e^{A} &= \mathbf{1}, \\ \left(e^{A}\right)^{-1} e^{A}e^{-A} &= e^{-A}, \\ \left(e^{A}\right)^{-1} e^{A-A} &= e^{-A}, \\ \left(e^{A}\right)^{-1} &= e^{-A}.\end{aligned}$$

□

vii) **Πρόταση Α.7.:** $\forall A$, ισχύει ότι:
$$\det\left(e^{A}\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

Απόδειξη: Κάθε πίνακας A μπορεί να γραφτεί στη διαγωνοποιημένη μορφή του ως εξής:

$$A = PDP^{-1},$$

όπου $D = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών $a_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ του πίνακα A. Τότε, μπορούμε να γράψουμε:
$$e^{A} = e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1}.$$

Δηλαδή, έχουμε:
$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\left(Pe^{D}P^{-1}\right) \\ &= \det(P)\det\left(e^{D}\right)\det\left(P^{-1}\right) \\ &= \det\left(PP^{-1}\right)\det\left(e^{D}\right) \\ &= \det(\mathbf{1})\det\left(e^{D}\right) \\ &= \det\left(e^{D}\right) \\ &= e^{a_1}e^{a_2}\dots e^{a_n} \\ &= e^{a_1+a_2+\dots+a_n} \\ &= e^{\mathrm{Tr}(A)}\end{aligned}$$

□

Παράρτημα Β: Χρήσιμες σχέσεις για τους σπίνορες Weyl

Σε αυτό το παράρτημα θα προσπαθήσουμε να δείξουμε κάποιες χρήσιμες σχέσεις για τους σπίνορες Weyl που χρειαστήκαμε και εφαρμόσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα:

i) **Πρόταση Β.1.:** Ισχύει ότι:

$$\psi^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{B}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mathsf{AB}}\psi\psi.$$

Απόδειξη: Οι ψ^{A} και ψ^{B} είναι αριθμοί Grassmann, δηλαδή:

$$\begin{aligned}\{\psi^{\mathsf{A}}, \psi^{\mathsf{B}}\} &= 0,\\ \psi^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{B}} &= -\psi^{\mathsf{B}}\psi^{\mathsf{A}}.\end{aligned}$$

Για $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, τότε $\psi^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{A}} = 0$. Έτσι, το $\psi^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{B}}$ είναι αντισυμμετρικό, άρα:

$$\begin{aligned}\psi^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{B}} &= C\epsilon^{\mathsf{AB}},\\ \epsilon_{\mathsf{AB}}\psi^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{B}} &= C\epsilon_{\mathsf{AB}}\epsilon^{\mathsf{AB}},\\ \psi\psi &= C\epsilon_{\mathsf{AB}}\epsilon^{\mathsf{AB}},\\ \psi\psi &= -2C,\\ C &= -\frac{1}{2}\psi\psi\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\psi^{\mathsf{A}}\psi^{\mathsf{B}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mathsf{AB}}\psi\psi.$$

□

ii) **Πρόταση Β.2.:** Ισχύει ότι:

$$\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}\bar{\psi}.$$

Απόδειξη: Οι $\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}$ και $\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}}$ είναι αριθμοί Grassmann, δηλαδή:

$$\begin{aligned}\{\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}, \bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}}\} &= 0,\\ \bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}} &= -\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}.\end{aligned}$$

Για $\dot{\mathsf{A}} = \dot{\mathsf{B}}$, τότε $\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}} = 0$. Έτσι, το $\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}}$ είναι αντισυμμετρικό, άρα:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}} &= C\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}},\\ \epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}} &= C\epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}},\\ \bar{\psi}\bar{\psi} &= C\epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}},\\ \bar{\psi}\bar{\psi} &= -2C,\\ C &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{B}}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}\bar{\psi}.$$

□

iii) **Πρόταση B.3.:** Ισχύει ότι:

$$(\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\phi}\bar{\psi}).$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
(\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= (\bar{\theta}^{\mathsf{A}}\bar{\phi}_{\mathsf{A}})(\bar{\theta}^{\mathsf{B}}\bar{\psi}_{\mathsf{B}}) \\
&= (\epsilon_{\mathsf{AC}}\bar{\theta}^{\mathsf{A}}\bar{\phi}^{\mathsf{C}})(\epsilon_{\mathsf{BD}}\bar{\theta}^{\mathsf{B}}\bar{\psi}^{\mathsf{D}}) \\
&= \epsilon_{\mathsf{AC}}\epsilon_{\mathsf{BD}}\bar{\theta}^{\mathsf{A}}\bar{\phi}^{\mathsf{C}}\bar{\theta}^{\mathsf{B}}\bar{\psi}^{\mathsf{D}} \\
&= -\epsilon_{\mathsf{AC}}\epsilon_{\mathsf{BD}}\bar{\theta}^{\mathsf{A}}\bar{\theta}^{\mathsf{B}}\bar{\phi}^{\mathsf{C}}\bar{\psi}^{\mathsf{D}} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mathsf{AC}}\epsilon_{\mathsf{BD}}\epsilon^{\mathsf{AB}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\phi}^{\mathsf{C}}\bar{\psi}^{\mathsf{D}} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mathsf{BD}}\delta^{\mathsf{B}}_{\mathsf{C}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\phi}^{\mathsf{C}}\bar{\psi}^{\mathsf{D}} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mathsf{CD}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\phi}^{\mathsf{C}}\bar{\psi}^{\mathsf{D}} \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\phi}\bar{\psi}).
\end{aligned}$$

□

iv) **Πρόταση B.4.:** Ισχύει ότι:

$$(\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\phi}\bar{\psi}).$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
(\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= (\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\phi}_{\dot{\mathsf{A}}})(\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{B}}}) \\
&= (\epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\phi}^{\dot{\mathsf{C}}})(\epsilon_{\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{D}}}) \\
&= \epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}}\epsilon_{\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\phi}^{\dot{\mathsf{C}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{D}}} \\
&= -\epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}}\epsilon_{\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{A}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathsf{B}}}\bar{\phi}^{\dot{\mathsf{C}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{D}}} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}}\epsilon_{\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}}\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{B}}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\phi}^{\dot{\mathsf{C}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{D}}} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}}\delta^{\dot{\mathsf{B}}}_{\dot{\mathsf{C}}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\phi}^{\dot{\mathsf{C}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{D}}} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\mathsf{C}}\dot{\mathsf{D}}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\phi}^{\dot{\mathsf{C}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{D}}} \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\phi}\bar{\psi}).
\end{aligned}$$

□

v) **Πρόταση B.5.:** Ισχύει ότι:

$$\chi\sigma^{\mu}\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}\chi.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\chi\sigma^{\mu}\bar{\psi} &= \chi^{\mathsf{A}}(\sigma^{\mu})_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}}\bar{\psi}^{\dot{\mathsf{A}}} \\
&= \epsilon^{\mathsf{AB}}\chi_{\mathsf{B}}(\sigma^{\mu})_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}}\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{C}}} \\
&= \chi_{\mathsf{B}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\mathsf{C}}\mathsf{B}}\bar{\psi}_{\dot{\mathsf{C}}} \\
&= \bar{\psi}_{\dot{\mathsf{C}}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\mathsf{C}}\mathsf{B}}\chi_{\mathsf{B}} \\
&= \bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}\chi.
\end{aligned}$$

□

vi) **Πρόταση Β.6.:** Ισχύει ότι:

$$\chi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi = -\psi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\chi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi &= \chi^{\mathsf{A}}(\sigma^\mu)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\mathsf{A}}\mathsf{B}}\psi_{\mathsf{B}}\\ &= \epsilon^{\mathsf{AC}}\chi_{\mathsf{C}}(\sigma^\mu)_{\mathsf{A}\dot{\mathsf{A}}}\epsilon^{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{D}}}\epsilon_{\dot{\mathsf{D}}\dot{\mathsf{C}}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\mathsf{C}}\mathsf{B}}\epsilon_{\mathsf{BE}}\psi^{\mathsf{E}}\\ &= -\chi_{\mathsf{C}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\mathsf{B}}\mathsf{C}}(\sigma^\nu)_{\mathsf{E}\dot{\mathsf{B}}}\psi^{\mathsf{E}}\\ &= \psi^{\mathsf{E}}(\sigma^\nu)_{\mathsf{E}\dot{\mathsf{B}}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\mathsf{B}}\mathsf{C}}\chi_{\mathsf{C}}\\ &= \psi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi.\end{aligned}$$

□

vii) **Πρόταση Β.7.:** Ισχύει ότι:

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma^\mu\bar{\chi}.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger &= \bar{\psi}^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger\chi^\dagger\\ &= \psi(\sigma^\mu)^\dagger\bar{\chi}\\ &= \psi\sigma^\mu\bar{\chi}.\end{aligned}$$

□

viii) **Πρόταση Β.8.:** Ισχύει ότι:

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi)^\dagger = \bar{\psi}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\chi}.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(\chi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi)^\dagger &= \psi^\dagger(\bar{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger\chi^\dagger\\ &= \bar{\psi}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\chi}.\end{aligned}$$

□

ix) **Πρόταση Β.9.:** Ισχύει ότι:

$$(\phi\psi)(\bar{\chi}\bar{\theta}) = \frac{1}{2}(\phi\sigma^\mu\bar{\chi})(\psi\sigma_\mu\bar{\theta}).$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(\phi\psi)(\bar{\chi}\bar{\theta}) &= (\phi^{\mathrm{A}}\psi_{\mathrm{A}})(\bar{\chi}_{\dot{\mathrm{A}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathrm{A}}})\\ &= -\bar{\chi}_{\dot{\mathrm{A}}}\psi_{\mathrm{A}}\phi^{\mathrm{A}}\bar{\theta}^{\dot{\mathrm{A}}}\\ &= -\operatorname{Tr}(M_1M_2),\end{aligned}$$

όπου: $(M_1)^{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{A}} = \bar{\chi}^{\dot{\mathrm{A}}}\phi^{\mathrm{A}}$ και $(M_2)_{\mathrm{A}\dot{\mathrm{A}}} = \psi_{\mathrm{A}}\bar{\theta}_{\dot{\mathrm{A}}}$. Αφού $\sigma^\mu = \bar{\sigma}_\mu$, τότε έχουμε:

$$\operatorname{Tr}(M_1M_2) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(M_1\sigma^\mu)\operatorname{Tr}(M_2\bar{\sigma}_\mu).$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\phi\psi)(\bar{\chi}\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}(\phi\sigma^\mu\bar{\chi})(\bar{\theta}\bar{\sigma}_\mu\psi)\\ &= \frac{1}{2}(\phi\sigma^\mu\bar{\chi})(\psi\sigma_\mu\bar{\theta}).\end{aligned}$$

□

x) **Πρόταση Β.10.:** Ισχύει ότι:

$$(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta}) = \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\eta^{\mu\nu}$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta}) &= (\theta^{\mathrm{A}}(\sigma^{\mu})_{\mathrm{A}\dot{\mathrm{A}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathrm{A}}})(\theta^{\mathrm{B}}(\sigma^{\nu})_{\mathrm{B}\dot{\mathrm{B}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathrm{B}}}) \\
&= -\theta^{\mathrm{A}}\theta^{\mathrm{B}}\bar{\theta}^{\dot{\mathrm{A}}}\bar{\theta}^{\dot{\mathrm{B}}}(\sigma^{\mu})_{\mathrm{A}\dot{\mathrm{A}}}(\sigma^{\nu})_{\mathrm{B}\dot{\mathrm{B}}} \\
&= -\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\epsilon^{\mathrm{AB}}\epsilon^{\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{B}}}(\sigma^{\mu})_{\mathrm{A}\dot{\mathrm{A}}}(\sigma^{\nu})_{\mathrm{B}\dot{\mathrm{B}}} \\
&= \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(\sigma^{\mu})_{\mathrm{A}\dot{\mathrm{A}}}(\bar{\sigma}^{\nu})^{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{A}} \\
&= \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\eta^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] Julius Wess & Jonathan Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press, 1992.

[2] Daniel Z. Freedman & Antoine Van Proeyen, Supergravity, Cambridge University Press, 2012.

[3] Joseph D. Lykken, Introduction to Supersymmetry (lecture notes), 1996.

[4] David Tong, Supersymmetric Field Theory, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos.

[5] Are Raklev, Supersymmetry (lecture notes), 2021.

[6] Matteo Bertolini, Lectures on Supersymmetry (lecture notes), 2023

[7] A. Bilal, Introduction to Supersymmetry (lecture notes), 2000.

[8] B. C. Allanacha & F. Quevedo, Supersymmetry (lecture notes), 2016.

[9] Joseph Conlon, Introduction to Supersymmetry (lecture notes), 2010.

[10] Tung, Wu-Ki, Group Theory In Physics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singa- pore, 1985.

[11] Ανδρέας Μπούκας & Ανάργυρος Φελλούρης, Εισαγωγή στις ομάδες και στις άλγεβρες Lie, Σημειώσεις διαλέξεων.

[12] Αλεξόπουλος Ευάγγελος, Το Καθιερωμένο Πρότυπο και εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία, Πτυχιακή Εργασία, 2017.

[13] Αλέξανδρος Γκίωνης, Εισαγωγή σε υπερσυμμετρικές θεωρίες πεδίου Το μοντέλο Wess-Zumino, Διπλωματκή Εργασία, 2017.

[14] Κωνσταντίνος Αυγεράκης, Ολοκληρώματα Διαδρομών και εφαρμογές στην Υπερσυμμετρική Κβαντομηχανική, Ερευνητική Εργασία, 2024.