1 Terme

Video:

1.1 Terme ausmultiplizieren

Einführung

Um Klammern aufzulösen, wird die Zahl vor der Klammer mit jeder Zahl in der Klammer multipliziert.

$$3 \cdot (a - 2) = 3 \cdot a - 3 \cdot 2 = 3a - 6$$

Auch mehrere Faktoren können in eine Klammer „hineinmultipliziert“ werden:

$$3a \cdot (a + 4) = 3a \cdot a + 3a \cdot 4 = 3a^2 + 12a$$

Zwei Klammern werden ausmultipliziert, indem man jeden Summanden der einen Klammer mit jedem der anderen Klammer multipliziert.

$$(3 + a) \cdot (a + 5) = 3a + 15 + a^2 + 5a = a^2 + 8a + 15$$

Rechenregeln:

Für beliebige Zahlen a, b, c und d gilt:

(1) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

(2) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

(3) $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Einstiegsaufgabe

Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $2 \cdot (a + 4)$ b) $5 \cdot (a - 3)$ c) $(x + 3) \cdot (-3)$

d) $(a + 3) \cdot (5 + a)$ e) $(b - 2) \cdot (5 + b)$ f) $(2 - a) \cdot (2 + a)$

1.1 Terme ausmultiplizieren

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $2 \cdot (5a + 3b)$ b) $7 \cdot (a + 8b - 3)$ c) $(-5) \cdot (-2ab - c)$

d) $(9h + 2) \cdot a$ e) $16b \cdot (-3)$ f) $4 \cdot (1b + 5)$

2. Löse die Klammern auf.

a) $(8a + 2) \cdot 6$ b) $(5a - 3b) \cdot (-7)$ c) $(3 - 2a) \cdot (-3)$

d) $(7v - 3w) \cdot 7$ e) $(8w + 2c) \cdot (-2)$ f) $(8t - 6b) \cdot 1$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

3. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $(x + 3) \cdot (4 - x)$ b) $(2x + 3) \cdot (x + 4)$

c) $(3a + 2x) \cdot (a - 3x)$ d) $(a + 2) \cdot (a + 4)$

4. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $3 \cdot (x + 3) \cdot (4 - x)$ b) $x \cdot (2x + 3) \cdot (x + 4)$

c) $(-2) \cdot (3a + 2x) \cdot (a - 3x)$ d) $(a + 2) \cdot (a + 4) \cdot (-5a)$

5. Löse die Klammern auf.

a) $(3d^2 - 2d) \cdot 5$ b) $(9h - 3g) \cdot (-5h + 3g)$ c) $(55e - 33e) \cdot (-2)$

d) $8 \cdot (-a - 4k) \cdot (-2)$ e) $(7a - 1) \cdot (5a - 5b)$ f) $(8z - 5z + 6g) \cdot (7a - 3)$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

6. Multipliziere die Klammern aus.

a) $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (b - a)$ b) $(2a - 4) \cdot (-4) \cdot (-4a + ab)$

c) $(2c^2 + b^2) \cdot (3a - c) \cdot (b - ac)$ d) $(a + b)^3$

7. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $(8f - 5d + 3) \cdot (-3 + d + f)$ b) $(2ab - b^2) + (b - a) \cdot (3ab - b)$

1.2 Terme faktorisieren

Video:

Einführung

Beim Ausmultiplizieren wird jeder Summand in einer Klammer mit dem Faktor davor multipliziert:

$$\underbrace{\underbrace{2}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{(a + b)}_{\text{Faktor}}}_{\text{Produkt}} = \underbrace{\underbrace{2a}_{\text{Summand}} + \underbrace{2b}_{\text{Summand}}}_{\text{Summe}}$$

Das umgekehrte Vorgehen, wenn man die Summe in ein Produkt umwandelt, nennt man Faktorisieren. Dabei schreibt man die Zahl, die in jedem Summanden vorkommt, vor die Klammer – man sagt auch „ausklammern“:

$$\underline{5} \cdot b + \underline{5} \cdot c = \mathbf{5} \cdot (b + c)$$

Dies funktioniert auch mit Variablen, welche in jedem Summanden enthalten sind:

$$\underline{a} \cdot b^2 + 3\underline{a} = \mathbf{a} \cdot (b^2 + 3)$$

Auch bei einer Differenz von Termen kann man faktorisieren:

$$6\underline{b} - a\underline{b} = \mathbf{b} \cdot (6 - a)$$

Wenn in jedem Summanden mehrere gleiche Zahlen oder Variablen enthalten sind, kann man diese alle vor die Klammer ziehen:

$$3ab - 6ac = \underline{3a}b - \underline{3} \cdot 2\underline{a}c = \mathbf{3a} \cdot (b - 2c)$$

Einstiegsaufgabe

Faktorisiere.

a) $7a + 7b$

b) $3c - ac$

c) $4ab^2 + 2b$

1.2 Terme faktorisieren

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Faktorisiere durch Ausklammern einer geeigneten Zahl.

a) $4a + 16b$ b) $20a + 25bc$ c) $36 - 6b$

d) $100b - 25a$ e) $144k + 12a$ f) $20v - 30d$

2. Klammere die Variable a aus.

a) $3a - ax$ b) $4a + a^2$ c) $-a^2 + 3a$

d) $ba + ca$ e) $3a + ba + ax$ f) $a^3 + a$

3. Klammere die Variable x aus.

a) $x^2 + 3x$ b) $x^3 - 4x$ c) $x^3 - 2x^2 + 4x$

d) $-x^2 + x$ e) $-3x^4 + 5x^3 - x$ f) $x^3 - x^2 + x$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

4. Fasse zunächst zusammen und faktorisiere dann.

a) $x + x^2 + x$ b) $4z^2 - z^3 + zz$ c) $r^5 - r^2 + r + r$

d) $s^2 + 4s - 5s^2$ e) $y^5 - y^2 + 2y^2$ f) $u^5 - 3u^5 - 2u^2$

5. Faktorisiere.

a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$ b) $0{,}75m + 1{,}5x - 0{,}75d$ c) $50z + 0{,}5y$

d) $\frac{1}{8}b - \frac{1}{4}x$ e) $\frac{5}{8}v - \frac{7}{8}b$ f) $88k - 55v - 33n$

g) $99i - 30m - 15m^2$ h) $p + 8p^3 - p^5$ i) $2{,}5m + 5mi$

j) $15nh + 5n - 5n^2$ k) $18f + 27bf^2 - 36f^3s$ l) $55k^3 + 35kb - 15k^2$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

6. Faktorisiere, indem du so viele Zahlen und / oder Variablen wie möglich ausklammerst.

a) $2cxx + 4xcv - 8xbc$

b) $h^3zd - h^3m^2zd + h^4zd^2$

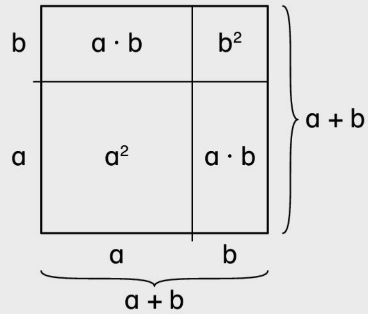
c) $zr^3t^2 + t^2r^4b + t^3r^2$

1.3 Die erste binomische Formel anschaulich beweisen

Video:

Einführung

Den Flächeninhalt des Quadrates (siehe rechte Abbildung) kann man auf zwei Arten ausrechnen.



1) Man wählt die gesamte Kantenlänge und quadriert sie. So erhält man den Flächeninhalt:

$$(a + b)^2$$

2) Man addiert die Flächeninhalte der inneren Rechtecke und erhält:

$$a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$
$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Da beide Seiten denselben Flächeninhalt widerspiegeln, gilt die Formel:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

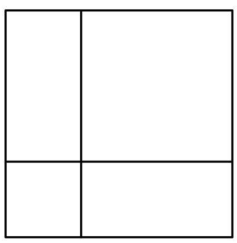
Diese Formel musst du auswendig lernen. Man nennt sie die „erste binomische Formel".

Einstiegsaufgabe

Beschrifte die Skizze so, dass die Formel

$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$

veranschaulicht wird. Achte dabei auf die Verwendung der richtigen Variablen.



1.3 Die erste binomische Formel anschaulich beweisen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Übertrage in dein Heft und ergänze die fehlenden Werte bzw. Variablen.

a) $(b+x)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot \square + \square^2$

b) $(a+\square)^2 = a^2 + 2ac + \square^2$

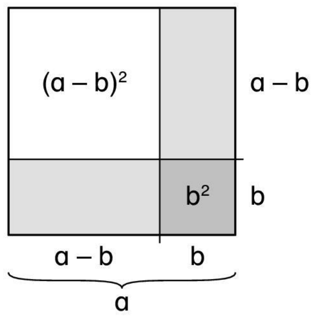
c) $(d+n)^2 = \square^2 + \square \cdot d \cdot \square + \square^2$

d) $(\square + \square)^2 = \square^2 + 2yz + \square^2$

2. Veranschauliche die Formel $a^2 + a^2 = 2a^2$ an einem geeigneten Bild.

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

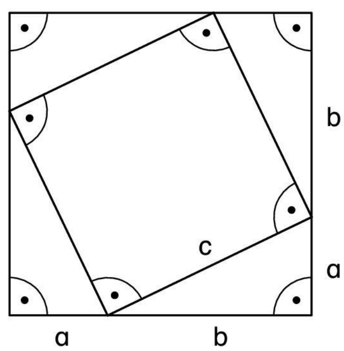
3. Die zweite binomische Formel lautet $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Erläutere mithilfe des Bildes, warum die Formel richtig ist.



Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

4. Finde einen anschaulichen Beweis für die dritte binomische Formel
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

5. Begründe, warum in folgendem Bild $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
Stelle dazu den Flächeninhalt des Quadrats auf zwei Arten dar und stelle die Gleichung um.



1.4 Die zweite binomische Formel anwenden

Video:

Einführung

Die zweite binomische Formel lautet:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

a und b sind dabei Platzhalter für beliebige Terme. Man könnte auch schreiben:

$$(\bigcirc - \triangle)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \triangle + \triangle^2.$$

Zunächst wird der erste Term quadriert, vom Ergebnis wird das doppelte Produkt der beiden Summanden ($\bigcirc$, $\triangle$) subtrahiert und schließlich das Quadrat des zweiten Terms hinzuaddiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned}(a - 4)^2 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2\\ &= a^2 - 8a + 16\end{aligned}$$

$$\bigcirc^2 \qquad 2 \cdot \bigcirc \cdot \triangle \qquad \triangle^2$$

Setze bei schwierigeren Termen Klammern!

$$\begin{aligned}(2a - 3b)^2 &= (2a)^2 - 2 \cdot (2a) \cdot (3b) + (3b)^2\\ &= 4a^2 - 12ab + 9b^2\end{aligned}$$

Einstiegsaufgabe

a) $(a - 2)^2$

b) $(b - 5)^2$

c) $(2a - 5)^2$

d) $(x - 7)^2$

e) $(3x - 4y)^2$

1.4 Die zweite binomische Formel anwenden

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Berechne.

a) $(5b - 7)^2$ b) $(4 - d)^2$ c) $(3c - b)^2$

d) $(2a - x)^2$ e) $(1p - r)^2$ f) $(2d - w)^2$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

2. Berechne mithilfe der ersten und zweiten binomischen Formel.

a) $(3v + 2b)^2$ b) $(6 + 5s)^2$ c) $(8n - 4)^2$

d) $(5n - 3v)^2$ e) $(9b + 1m)^2$ f) $(7v - 11)^2$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

3. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $3 \cdot (a - b)^2$ b) $(a - b)^2 \cdot (a + b)$

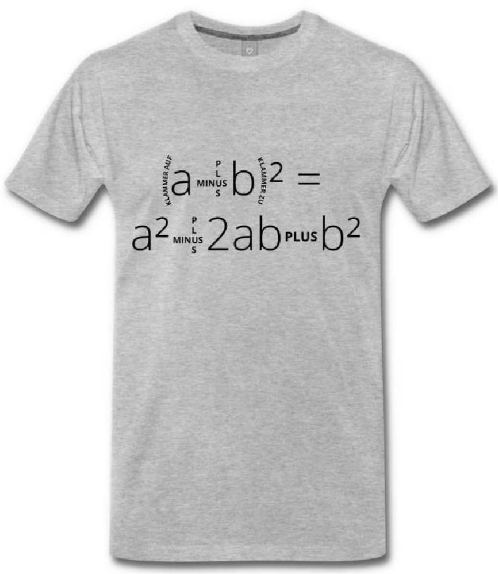
c) $(a - b)^2 \cdot (a + c)$ d) $3a \cdot (2a - 3b)^2$

e) $(a - b)^2 \cdot (a + b)^2$ f) $(c - 3b)^2 \cdot (2b + 5c)$

g) $-2 \cdot (a - 3)^2 \cdot 4$ h) $(a - 2d)^2 \cdot d \cdot (-d + 1)$

i) $(a - b)^3$ j) $(a - (a + b))^2$

k) $(2 + a)^2 - (a - 3)^2$ l) $3 \cdot (2a - 3b)^2 + 2 \cdot (a^2 + 2ab)$



a62a632775cd5056908102235afd5efe

1.5 Die dritte binomische Formel anwenden

Video:

Einführung

Die dritte binomische Formel lautet:

$$\boxed{(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2}$$

a und b sind dabei Platzhalter für beliebige Terme. Man könnte auch schreiben:

$$(\bigcirc - \triangle) \cdot (\bigcirc + \triangle) = \bigcirc^2 - \triangle^2.$$

Beachte: In beiden Klammer stehen jeweils die gleichen Terme. Lediglich das Rechenzeichen ist ein anderes!

Beispiel:

$$\begin{aligned}(a + 4) \cdot (a - 4) &= a^2 - 4^2 \\ &= \underbrace{a^2}_{\bigcirc^2} - \underbrace{16}_{\triangle^2}\end{aligned}$$

Setze bei schwierigeren Termen Klammern!

$$\begin{aligned}(2a + 3b) \cdot (2a - 3b) &= (2a)^2 - (3b)^2 \\ &= 4a^2 - 9b^2\end{aligned}$$

Einstiegsaufgabe

a) $(a + 2) \cdot (a - 2)$

b) $(c + 1) \cdot (c - 1)$

c) $(2a + 5) \cdot (2a - 5)$

d) $(x + 2) \cdot (x - 2)$

e) $(2x + 2y) \cdot (2x - 2y)$

1.5 Die dritte binomische Formel anwenden

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Berechne.

a) $(2 + a) \cdot (2 - a)$ b) $(n + 3) \cdot (n - 3)$ c) $(3 + b) \cdot (3 - b)$

d) $(j + 6) \cdot (j - 6)$ e) $(9 + g) \cdot (9 - g)$ f) $(u + 6) \cdot (u - 6)$

g) $(7 + e) \cdot (7 - e)$ h) $(x + 1) \cdot (x - 1)$ i) $(x + 2) \cdot (x - 2)$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

2. Berechne mithilfe der dritten binomischen Formel. Eine der Teilaufgaben musst du anders rechnen.

a) $(5 - h) \cdot (5 + h)$ b) $(b - 7) \cdot (b + 7)$ c) $(z - f) \cdot (z + f)$

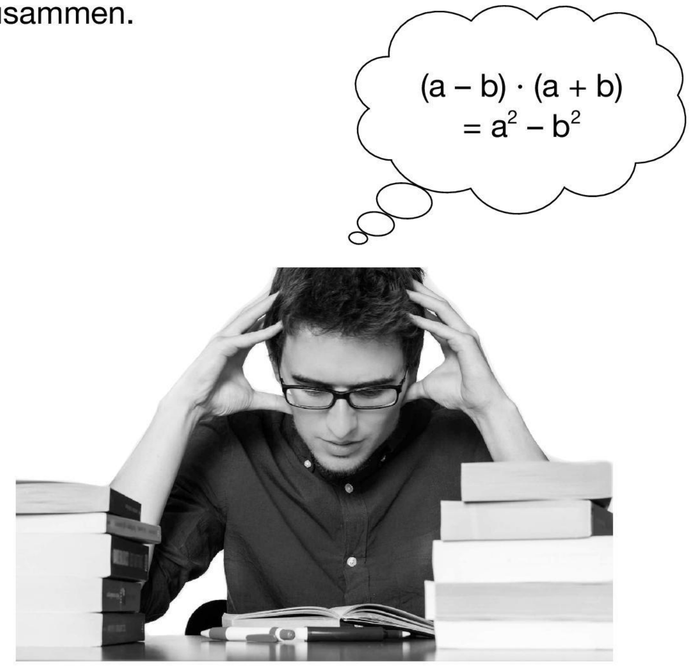
d) $(g - j) \cdot (j + g)$ e) $(9 - u) \cdot (u + 9)$ f) $(k + x) \cdot (x + k)$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

3. Beweise die dritte binomische Formel, indem du den Term ausmultiplizierst und zusammenfasst.

4. Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $(a - 2) \cdot (a + 2) \cdot 4a$
b) $(a + b)^2 - (a + c) \cdot (a - c)$
c) $3 \cdot (a - 4)^2 + 2 \cdot (a - 3) \cdot (a + 3)$
d) $(c - 5) \cdot (c + 5) - (a - c) \cdot (a + c)$



1.6 Binome ergänzen

Video:

Einführung

In manchen Aufgaben zu den binomischen Formeln geht es darum, Lücken zu ergänzen. Es ist dann eine Formel gegeben, bei welcher ein oder mehrere Einträge fehlen.

Binomische Formeln:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

In folgender Formel etwa sind die richtigen Ergänzungen für das Dreieck und den Kreis gesucht:

$$(a + \triangle)^2 = \bigcirc + 4ab + 4b^2$$

Es handelt sich – wegen des Pluszeichens in der Klammer – um die erste binomische Formel, sodass

$\triangle = 2b$ (denn $(2b)^2 = 4b^2$) und $\bigcirc = a^2$

gelten muss.

Insgesamt bedeutet das: $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$

Probe: $(a + 2b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$

Das gleiche Prinzip kann bei den anderen binomischen Formeln angewendet werden:

$$(\triangle + 2) \cdot (\triangle - 2) = a^2 - 4$$

Hier ist $\triangle = a$, wie man anhand der dritten binomischen Formel erkennt.

Es gilt also: $(a + 2) \cdot (a - 2) = a^2 - 4$

Probe: $(a + 2) \cdot (a - 2) = a^2 - 2^2 = a^2 - 4$

Einstiegsaufgabe

Übertrage die Formeln in dein Heft und ergänze die Lücken. Führe anschließend die Probe durch.

a) (Erste binomische Formel) $(a + \_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_ + 6ab + 9b^2$

b) (Zweite binomische Formel) $(\_\_\_\_ - \_\_\_\_)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$

c) (Dritte binomische Formel) $(\_\_\_\_ + \_\_\_\_) \cdot (b - 1) = b^2 - 1$

1.6 Binome ergänzen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Ergänze mithilfe der ersten binomischen Formel. Übertrage die Aufgaben dazu in dein Heft und ergänze die Lücken.

a) $(b + \underline{\quad})^2 = \underline{\quad} + 8bc + 16c^2$

b) $(s + r)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

c) $(\underline{\quad} + k)^2 = \underline{\quad} + 4ak + k^2$

d) $(\underline{\quad} + \underline{\quad})^2 = h^2 + 12hb + 36b^2$

e) $(2x + \underline{\quad})^2 = \underline{\quad} + 4xb + b^2$

f) $(3a + 5)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

g) $(a + \underline{\quad})^2 = \underline{\quad} + 18ab + 81b^2$

h) $(2n + 3d)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

2. Ergänze mithilfe der zweiten binomischen Formel. Übertrage die Aufgaben dazu in dein Heft und ergänze die Lücken.

a) $(\underline{\quad} - \underline{\quad})^2 = 64a^2 - 16am + m^2$

b) $(\underline{\quad} - \underline{\quad})^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$

c) $(2b - 3v)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

d) $(e - w)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

e) $(6p - z)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

f) $(\underline{\quad} - \underline{\quad})^2 = 1 - 6b + 9b^2$

g) $(\underline{\quad} - \underline{\quad})^2 = 4c^2 - 6cw + w^2$

h) $(9 - r)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

3. Ergänze mithilfe der dritten binomischen Formel. Übertrage die Aufgaben dazu in dein Heft und ergänze die Lücken.

a) $(\underline{\quad} + \underline{\quad}) \cdot (c - 1) = c^2 - 1$

b) $(5 + u) \cdot (\underline{\quad} - \underline{\quad}) = 25 - u^2$

c) $(3 + z) \cdot (3 - z) = \underline{\qquad\qquad}$

d) $(\underline{\quad} + \underline{\quad}) \cdot (3 - k) = 9 - k^2$

e) $(\underline{\quad} + \underline{\quad}) \cdot (r - s) = r^2 - s^2$

f) $(a + z) \cdot (a - z) = \underline{\qquad\qquad}$

g) $(7 + x) \cdot (7 - x) = \underline{\qquad\qquad}$

h) $(p + 8) \cdot (\underline{\quad} - \underline{\quad}) = p^2 - 64$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

4. Ergänze die Binome und schreibe hinter die Gleichung, um welche binomische Formel es sich hierbei handelt. Mache jeweils eine Probe. Übertrage die Aufgaben dazu in dein Heft und ergänze die Lücken.

a) $(\underline{\quad} + \underline{\quad})^2 = u^2 + 16ub + 64b^2$

b) $(j + 2) \cdot (\underline{\quad} - \underline{\quad}) = j^2 - 4$

c) $(b - v)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

d) $(\underline{\quad} + \underline{\quad}) \cdot (2x - y) = 4x^2 - y^2$

e) $(-g + 4) \cdot (-g - 4) = \underline{\qquad\qquad}$

f) $(v - 2r)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

g) $(7a + b)^2 = \underline{\qquad\qquad}$

h) $(\underline{\quad} - \underline{\quad})^2 = 4m^2 - 8mx + 4x^2$

5. Erkläre, warum sich $(b + \underline{\quad})^2 = \underline{\quad} + 8bc + 9c^2$ nicht ergänzen lässt.

1.7 Mit Binomen faktorisieren

Video:

Einführung

Aufgrund der dritten binomischen Formel gilt:

$$(b + 3) \cdot (b - 3) = b^2 - 9$$

Die Formel lässt sich auch rückwärts anwenden, denn es gilt:

$$b^2 - 9 = (b + 3) \cdot (b - 3)$$

Dieses Vorgehen wird **Faktorisieren** genannt.

Faktorisieren kann man auch mithilfe der ersten beiden binomischen Formeln:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$$

Durch eine Probe lässt sich das Ergebnis kontrollieren:

$$(a - 3)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 - 6a + 9$$

Beachte, dass es manchmal vorteilhaft ist auszuklammern, bevor man die binomischen Formeln anwendet:

$$4b^2 - 100 = 4 \cdot (b^2 - 25) = 4 \cdot (b + 5) \cdot (c - 5)$$

Einstiegsaufgaben

1. Klammere eine Zahl oder eine Variable aus.

a) $5a - 5b$　　b) $2a + ab$　　c) $4a^2 - 8a$

2. Benutze eine binomische Formel zum Faktorisieren des Terms.

a) $c^2 - 8c + 16$　　b) $c^2 - 25$　　c) $100 + 20c + c^2$

3. Faktorisiere, indem du zuerst ausklammerst und dann eine binomische Formel anwendest.

a) $4a^2 - 24a + 36$　　c) $9b^2 - 81$　　c) $2c^2 + 4cd + 2d^2$

1.7 Mit Binomen faktorisieren

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Klammere eine Zahl oder Variable aus.

a) $5d - 15a + 50d$ b) $2s + 3sz - 6sd$ c) $100k - 20b + 60$

d) $x + xb - 3xy$ e) $7g + 56n - 63k$ f) $88a - 22a + 11$

g) $36b - 12a + 24s$ h) $3{,}5r + 7p - 10{,}5w$ i) $18j + 54jf - 81f$

2. Faktorisiere mithilfe einer binomischen Formel.

a) $4a^2 + 12ab + 9b^2$ b) $x^2 - 8x + 16$ c) $n^2 - 10n + 25$

d) $4 - m^2$ e) $25 - 64g^2$ f) $c^2 - 2cv + v^2$

g) $64v^2 - 16vz + z^2$ h) $1r^2 + 6rt + 9t^2$ i) $25w^2 - 10w + 1$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

3. Klammere zuerst eine Zahl aus und faktorisiere dann.

a) $8 - 2m^2$ b) $5x^2 + 20x + 20$ c) $7x^2 - 70xm + 175m^2$

d) $16k^2 - 48ku + 36u^2$ e) $32 - 2z^2$ f) $-3r^2 - 18rt - 27t^2$

4. Klammere zuerst eine Variable aus und faktorisiere dann.

a) $a^3 + 2a^2b + ab^2$ b) $4ac^2 - 4acd + ad^2$ c) $d^3 - 25d$

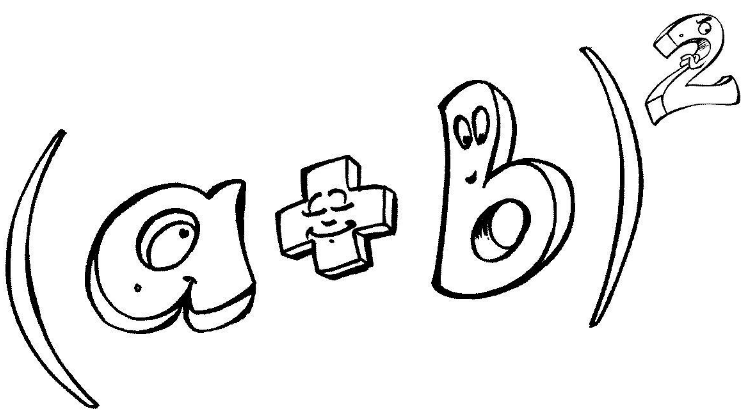
d) $25a^3 - 30a^2 + 9a$ e) $ba^2 - bc^2$ f) $9ba^2 - 121b$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

5. Faktorisiere so weit wie möglich.

a) $a^2 - 400$ b) $18c^2 + 36cd + 18d^2$ c) $81cd - c^3d$

d) $4b^2c^2 - 8abc^2 + 4a^2c^2$ e) $(a - 1) \cdot a^2 - (a - 1) \cdot b^2$ f) $a^3 + a^2 - a$



1.8 Zahlen mit der ersten binomischen Formel quadrieren

Video:

Einführung

Mithilfe der ersten binomischen Formel kann man Quadrate im Kopf berechnen.

Dazu zerlegt man die Zahl geschickt in zwei Summanden:

$$53^2$$

$$= (50 + 3)^2 \longleftrightarrow (a + b)^2$$

$$= 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 3 + 3^2 \longleftrightarrow = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= 2\,500 + 300 + 9$$

$$= 2\,809$$

Das gleiche Prinzip funktioniert auch mit größeren Zahlen:

$$120^2$$

$$= (100 + 20)^2$$

$$= 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 20 + 20^2$$

$$= 10\,000 + 4\,000 + 400$$

$$= 14\,400$$

Einstiegsaufgabe

a) Berechne 74^2 mithilfe der ersten binomischen Formel. Gib wie im Einführungsbeispiel jeden Rechenschritt an.

$$74^2$$

$$= (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$$

$$= \_\_\_\_^2 + 2 \cdot \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ + \_\_\_\_^2$$

$$= \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$$

$$= \_\_\_\_$$

b) Bestimme 87^2.

1.8 Zahlen mit der ersten binomischen Formel quadrieren

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Berechne mithilfe der ersten binomischen Formel, wie im ersten Einführungsbeispiel.

a) 51^2 b) 72^2 c) 93^2 d) 55^2
e) 44^2 f) 65^2 g) 38^2 h) 89^2

2. Ermittle das Ergebnis mithilfe der ersten binomischen Formel, indem du die Zehner abspaltest, wie im zweiten Einführungsbeispiel.

a) 530^2 b) 230^2 c) 150^2 d) 790^2
e) 430^2 f) 180^2 g) 740^2 h) 610^2

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

3. Berechne mithilfe der ersten binomischen Formel, indem du die Einerstelle abspaltest.

a) 506^2 b) 901^2 c) 605^2 d) 709^2
e) 702^2 f) 507^2 g) 101^2 h) 303^2

4. Berechne mithilfe der ersten binomischen Formel, indem du die Zehner abspaltest. Verwende dabei die Ergebnisse aus Aufgabe 1.

a) $1\,051^2$ b) $2\,072^2$ c) $3\,093^2$ d) $4\,055^2$
e) $5\,044^2$ f) $6\,065^2$ g) $7\,038^2$ h) $8\,089^2$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

5. Löse folgende Rechenaufgaben mithilfe der zweiten binomischen Formel
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

In Teilaufgabe a) gilt also: $59^2 = (60 - 1)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = \ldots$

a) 59^2 b) 78^2 c) 98^2 d) 75^2

6. Berechne mithilfe der zweiten binomischen Formel.

a) 198^2 b) 999^2 c) 785^2 d) 597^2

1.9 Mit der dritten binomischen Formel schnell rechnen

Video:

Einführung

Terme der Form $a^2 - b^2$ lassen sich auch ohne Taschenrechner berechnen.
Dazu verwendet man nur die dritte binomische Formel.

Das heißt zum Beispiel, immer wenn eine Quadratzahl von einer anderen Quadratzahl abgezogen wird, können wir wie folgt vorgehen:

$$\underbrace{203^2}_{a^2} - \underbrace{197^2}_{b^2} = \left(\underbrace{203}_{a} + \underbrace{197}_{b}\right) \cdot \left(\underbrace{203}_{a} - \underbrace{197}_{b}\right) = 400 \cdot 6 = 2\,400$$

Wenn solche Terme in komplizierteren Rechnungen auftreten, kann man zunächst in einer Nebenrechnung die binomische Formel verwenden:

$$\frac{200^2}{312^2 - 208^2}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
&312^2 - 208^2\\
&= (312 + 208) \cdot (312 - 208)\\
&= 520 \cdot 104\\
&= 520 \cdot (100 + 4)\\
&= 520 \cdot 100 + 520 \cdot 4\\
&= 52\,000 + 2\,080\\
&= 54\,080
\end{aligned}$$

Jetzt ergibt sich das Ergebnis wie folgt:

$$\frac{200^2}{312^2 - 208^2} = \frac{200 \cdot 20\cancel{0}}{54\,08\cancel{0}} = \frac{200 \cdot \cancel{20}^{5}}{\cancel{5\,408}^{1352}} = \frac{\cancel{200}^{25} \cdot 5}{\cancel{1\,352}^{169}} = \frac{125}{169}$$

Einstiegsaufgaben

1. Berechne mithilfe der dritten binomischen Formel.

a) $201^2 - 199^2$ b) $302^2 - 298^2$ c) $205^2 - 195^2$

2. Berechne. Beginne mit einer geeigneten Nebenrechnung.

a) $\dfrac{2\,000}{205^2 - 195^2}$ b) $\dfrac{12\,000}{350^2 - 50^2}$

1.9 Mit der dritten binomischen Formel schnell rechnen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Berechne mithilfe der dritten binomischen Formel.

a) $305^2 - 295^2$	b) $93^2 - 12^2$	c) $301^2 - 209^2$
d) $410^2 - 390^2$	e) $410^2 - 290^2$	f) $115^2 - 114^2$
g) $410^2 - 409^2$	h) $865^2 - 860^2$	i) $501^2 - 498^2$
j) $659^2 - 656^2$	k) $2^2 - 1^2$	l) $200^2 - 100^2$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

2. Berechne. Nutze dabei deine Ergebnisse aus Aufgabe 1.

a) $\frac{3000}{305^2 - 295^2}$	b) $\frac{25}{93^2 - 12^2}$	c) $\frac{1000}{301^2 - 209^2}$
d) $\frac{150}{410^2 - 390^2}$	e) $\frac{500}{410^2 - 290^2}$	f) $\frac{229}{115^2 - 114^2}$
g) $\frac{2}{410^2 - 409^2}$	h) $\frac{1}{865^2 - 860^2}$	i) $\frac{5994}{501^2 - 498^2}$
j) $\frac{2500}{659^2 - 656^2}$	k) $\frac{300000}{2^2 - 1^2}$	l) $\frac{55}{200^2 - 100^2}$

3. Berechne mithilfe der dritten binomischen Formel.

a) $208^2 - 198^2$	b) $315^2 - 300^2$	c) $407^2 - 397^2$
d) $111^2 - 102^2$	e) $407^2 - 399^2$	f) $312^2 - 295^2$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

4. Bestimme das Ergebnis.

a) $\frac{208^2 - 198^2}{301^2 - 299^2}$	b) $\frac{315^2 - 300^2}{805^2 - 795^2}$	c) $\frac{407^2 - 397^2}{502^2 - 499^2}$
d) $\frac{111^2 - 102^2}{107^2 - 102^2}$	e) $\frac{407^2 - 399^2}{600^2 - 500^2}$	f) $\frac{312^2 - 295^2}{850^2 - 50^2}$

1.10 Bruchterme anwenden

Video:

Einführung

Man nennt einen Term, der mindestens eine Variable in einem Nenner eines Bruches besitzt, einen **Bruchterm**.

Beispiele: $\frac{1}{x}$ $\frac{7}{8+a}$ $\frac{2a}{3a-4}$ $4-\frac{4}{x}$ $\frac{a}{a-2}-\frac{1}{a-1}$

Für die Variablen darf man in Bruchtermen nicht alle Zahlen einsetzen. Man muss stets darauf achten, dass nach dem Einsetzen im Nenner das Ergebnis nicht null ist – sonst würde man durch null teilen. Man nennt dies **einschränkende Bedingungen**.

Für die oben genannten Terme gilt:

Term	$\frac{1}{x}$	$\frac{7}{8+a}$	$\frac{2a}{3a-4}$	$4-\frac{4}{x}$	$\frac{a}{a-2}-\frac{1}{a-1}$
einschränkende Bedingung	$x \neq 0$	$a \neq -8$	$a \neq \frac{4}{3}$	$x \neq 0$	$a \neq 1$ und $a \neq 2$

Will man Bruchterme zusammenfassen, muss man die einzelnen Ausdrücke zunächst auf den gleichen Nenner bringen. Oben sind die ersten drei Terme bereits zusammengefasst. Für die anderen beiden gilt:

$$4-\frac{4}{x}=\frac{4}{1}-\frac{4}{x}=\frac{4\cdot x}{1\cdot x}-\frac{4}{x}=\frac{4x-4}{x}$$

$$\frac{a}{a-2}-\frac{1}{a-1}=\frac{a\cdot(a-1)}{(a-2)\cdot(a-1)}-\frac{1\cdot(a-2)}{(a-1)\cdot(a-2)}=\frac{a^2-a-(a-2)}{(a-1)\cdot(a-2)}=\frac{a^2-2a+2}{a^2-3a+2}$$

Wenn du jeden Bruch jeweils mit dem Nenner des anderen Bruchs erweiterst, kommst du auf den gleichen Nenner!

Einstiegsaufgabe

Gib die einschränkende Bedingung für den Term $\frac{1}{a-4}+\frac{1}{2}$ an und fasse ihn zusammen.

1.10 Bruchterme anwenden

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Umkreise die Bruchterme.

a) $\frac{1}{b}$ b) $\frac{2a-4}{b+1}$ c) $\frac{1}{2}+3a$ d) $5a-4$ e) $\frac{1}{3}+\frac{4}{a+1}$

2. Gib jeweils die einschränkende Bedingung an.

a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x-1}$ c) $\frac{5}{a+7}$ d) $\frac{5}{2x}$

3. Berechne den Wert des Terms für den angegebenen x-Wert.

a) $\frac{1}{x}$ für $x = 5$ b) $\frac{1}{x-1}$ für $x = 2$ c) $\frac{x}{x+3}$ für $x = -1$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

3. Fülle die Wertetabelle aus, indem du jeweils den angegebenen x-Wert in den Bruchterm einsetzt.

x	**1**	**2**	**3**	**–2**
$\frac{1}{x}$				
$\frac{x}{x-4}$				
$\frac{2x}{2x+3}$				

4. Gib jeweils die einschränkende Bedingung an.
Hinweis: Einschränkende Bedingungen, die man berechnen muss, findest du auch im Video.

a) $\frac{2}{2x-5}$ b) $\frac{4x}{5x+8}$ c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}$ d) $\frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)}$

5. Fasse so zusammen, dass der gesamte Term aus nur einem Bruch besteht.

a) $2-\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{a}+\frac{5}{a^2}$ d) $\frac{1}{2a}+\frac{3}{a+1}$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

6. Fasse zusammen und gib die einschränkende Bedingung an.

a) $\frac{3a}{a-1}-\frac{a}{a+3}$ b) $2-\frac{3}{a}+\frac{a-1}{a+2}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$