

2 Terme und Gleichungen behandeln

2.1 Termwerte berechnen

Video:



Einführung

Beschreibung der Begriffe:

Einen Rechenausdruck, der Zahlen, Buchstaben, Rechenzeichen und eventuell Klammern enthält, nennt man **Term**.

Beispiel:

$$4 + 2 \cdot 5$$

Das Ergebnis eines Terms heißt **Wert des Terms** oder **Termwert**.

$$4 + 2 \cdot 5 = 14 \quad \text{Wert des Terms}$$

Wenn in einem Term ein Buchstabe auftritt, dann nennt man ihn **Variable** bzw. **Parameter**.

$$a + 2 \cdot b$$

Setzt man für die Variablen Zahlen ein, lässt sich der Wert des Terms berechnen.

Für $a = 1$ und $b = 3$ gilt:

$$a + 2 \cdot b = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

Man berechnet also Terme, indem man für die Variablen die entsprechenden Zahlen einsetzt:

Für $a = 5$, $b = 2$ und $c = 3$ gilt:

$$a \cdot (b + 4 \cdot c) = 5 \cdot (2 + 4 \cdot 3) = 5 \cdot 14 = 70$$

Einstiegsaufgaben

Berechne jeweils den Wert des Terms für $a = 2$ und $b = 4$.

a) $a + 3 \cdot b = 2 + 3 \cdot 4$

b) $a + b$

c) $3 \cdot (b + 2 \cdot a)$

2.1 Termwerte berechnen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad I

1 Berechne jeweils den Wert des Terms für $a = 2$ und $b = 5$.

- | | | | |
|----------------|----------------------|---------------|-------------------------|
| a) $a + b$ | b) $2a + 3b$ | c) $-a - b$ | d) $4a + b$ |
| e) $a : 2 + b$ | f) $2 \cdot (b - a)$ | g) $-2b - 3a$ | h) $a^2 + b \cdot (-3)$ |

2 Berechne jeweils den Wert des Terms für $a = 1$, $b = 3$ und $c = -1$.

- | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------|
| a) $a - b + c$ | b) $-b - c + 2a$ | c) $-(2a - 3c) + 4b$ |
| d) $(-a + 3b) \cdot c$ | e) $a \cdot b \cdot c$ | f) $2 - 3ac + 4b$ |

3 Ermittle die fehlenden Werte in folgender Tabelle.

a	1	2	3	4	5	6
$3 \cdot a$	3			12		

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad II

4 Berechne jeweils den Wert des Terms für $a = -2$ und $b = 2,5$.

- | | | | |
|---------------|----------------|-----------------------|---------------------------|
| a) $3a - 2ab$ | b) $a^2 + b^2$ | c) $(-a - 2) \cdot b$ | d) $2ab - a \cdot (-1,5)$ |
|---------------|----------------|-----------------------|---------------------------|

5 Ermittle die fehlenden Werte in folgender Tabelle.

a	1	2	1,5	-1	0	10
b	1	-1	0,5	-0,5	3	-3
$2a - b$						
$-b - a$						
$3 \cdot (a + 2b)$						

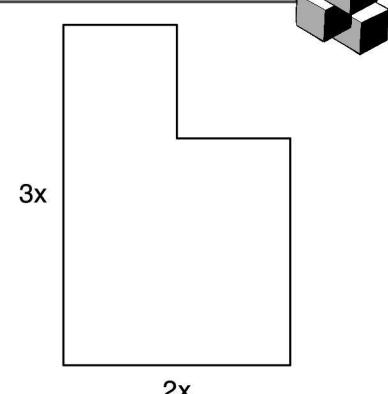
6 Berechne den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $a = 5,5$ cm und $b = 4$ cm.

7 Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite 4 cm und der zugehörigen Höhe von 5 cm.

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad III

8 Berechne den Umfang der Figur für den angegebenen x -Wert.

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) $x = 2$ cm | b) $x = 1,5$ cm |
| c) $x = 2,2$ dm | d) $x = 5,8$ km |



9 Berechne den Wert des folgenden Terms T für $a = -2,2$, $b = 5,5$, $c = -1,5$ und $d = 3,1$.

$$T = 2 \cdot (a + b + c + d) - (2b - 3c) + c^2 - 3 \cdot (-a + 2b - 3c - d)$$

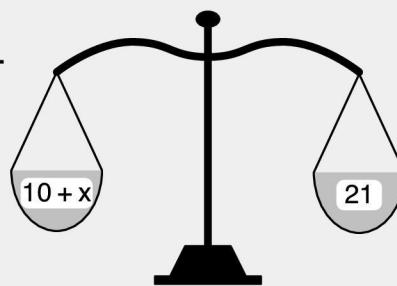
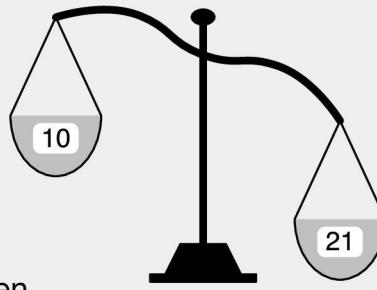
2.2 Gleichungen

Video:



Einführung

- Die Waage rechts ist nicht im Gleichgewicht.
- In der linken Waagschale ist weniger als in der rechten.
- Um zu beschreiben, wie viel man links dazugeben muss, damit die Waage im Gleichgewicht ist, verwendet man für die unbekannte Zahl ein „x“.
- Gibt man links ein „x“ dazu, so ist die Waage im Gleichgewicht.
- Es gilt also: $10 + x = 21$.



$10 + x = 21$ nennt man eine **Gleichung**. Auf beiden Seiten der Gleichung steht derselbe Termwert.

Die Gleichung $10 + x = 21$ ist richtig für $x = 11$, denn es gilt: $10 + 11 = 21$.

Gleichungen lösen durch Probieren:

Gesucht ist die Lösung von $x + 9 = 16$.

Für $x = 5$ gilt: $5 + 9 = 14 \neq 16$

Für $x = 6$ gilt: $6 + 9 = 15 \neq 16$

Für $x = 7$ gilt: $7 + 9 = 16$

Die Lösung der Gleichung ist $x = 7$.

Gleichungen lösen durch Umstellen:

$$x + 9 = 16$$

Da auf beiden Seiten die Terme denselben Wert haben, bleibt die Gleichung erhalten, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl abzieht. Wir rechnen daher auf beiden Seiten -9 und kennzeichnen dies am Rand:

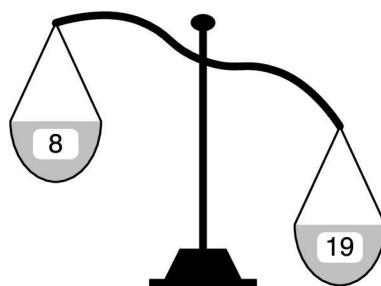
$$x + 9 = 16 \quad | -9$$

$$x + 9 - 9 = 16 - 9$$

$x = 7 \leftarrow$ Lösung der Gleichung

Einstiegsaufgabe

Gib die Gleichung an, welche die Waage im Gleichgewicht beschreibt. Bestimme die Lösung der Gleichung.



2.2 Gleichungen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad I

1 Löse folgende Gleichungen durch Probieren.

a) $x + 5 = 18$

b) $x + 25 = 38$

c) $13 - x = 27$

d) $35 - x = 105$

e) $2x + 13 = 25$

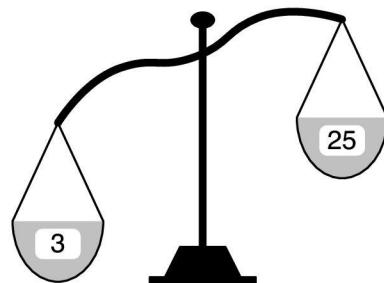
f) $-2x - 4 = 326$

g) $-3x - 28 = 35$

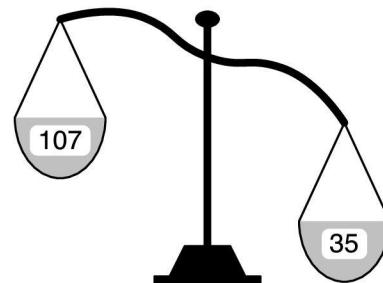
h) $5x = 250$

2 Gib eine Gleichung an, sodass die Waage im Gleichgewicht ist.

a)



b)



Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad II

3 Löse folgende Gleichungen durch Probieren.

a) $2x - 42 = 102$

b) $6x + 2 \cdot (3 - 6) = 62$

c) $5x - (-3) = 23$

4 Löse folgende Gleichungen durch Umstellen.

a) $8x - 32 - 6 = 26$

b) $19 + 3x = 100$

c) $25 + 2x = 200$

d) $4x + 2 \cdot (5 - 8) = 202$

e) $9x - 15 = 26$

f) $100x - 100 = 2$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad III

5 Jens feiert Geburtstag. Deshalb lädt er drei Freunde ins Kino ein. Er zahlt die Eintrittskarten und kauft noch für alle zusammen eine Packung Popcorn für 8,50 €.
Berechne den Preis für eine Eintrittskarte, wenn Jens insgesamt 49,50 € ausgegeben hat.
Stelle dazu zunächst eine Gleichung auf, wobei x der Preis einer Eintrittskarte ist.

6 Cem hat 45 € gespart. Er bekommt jede Woche 6 € Taschengeld. Ermittle die Anzahl der Wochen, die er noch sparen muss, damit er 111 € zusammen hat.
Stelle zunächst eine Gleichung auf.

7 Familie Felten besitzt Hunde und Vögel. Die Tiere haben zusammen 76 Beine und 27 Köpfe.
Berechne die Anzahl der Hunde und Vögel. Dabei ist x die Anzahl der Hunde und $27 - x$ die Anzahl der Vögel.

Video:



2.3 Einfache Gleichungen lösen

Einführung

- Bei einer Gleichung muss auf jeder Seite der gleiche Termwert stehen.
- Die Variable x ist ein Platzhalter und steht für eine unbekannte Zahl, die es zu ermitteln gilt.
- Durch Umformen der Gleichung lässt sich die Zahl bestimmen, die für die Variable steht.
- Durch Addieren oder Subtrahieren lässt sich erreichen, dass nur noch die Variable oder ein Vielfaches von ihr auf einer Seite der Gleichung steht.

Beispiel:
$$\begin{array}{rcl} x + 3 = 9 & | - 3 \\ x + 3 - 3 = 9 - 3 & \\ x = 6 & \end{array}$$

Durch Dividieren oder Multiplizieren mit einer Zahl $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung gelingt es, dass die Variable allein auf der einen Seite und ihr Wert auf der anderen Seite der Gleichung steht:

Beispiel:
$$\begin{array}{rcl} 2x + 3 = 9 & | - 3 \\ 2x + 3 - 3 = 9 - 3 & \\ 2x = 6 & | : 2 \\ x = 3 & \end{array}$$

Beim Umformen einer Gleichung wie im zweiten Beispiel berücksichtige Folgendes:

- Um die Zahl $+3$ auf die andere Seite zu bringen, müssen wir die gegenteilige Rechenoperation durchführen. Deshalb wird auf beiden Seiten der Gleichung -3 gerechnet.
- Danach steht $2x$ oder $2 \cdot x$ auf der linken Seite. Jetzt lösen wir die Gleichung nach x auf.
- Die gegenteilige Rechenoperation von Multiplizieren ist Dividieren. Deshalb teilen wir beide Seiten der Gleichung durch 2. Schließlich bleibt auf der linken Seite nur noch x stehen und der Wert für x steht auf der anderen Seite der Gleichung.

Einstiegsaufgaben

Bestimme jeweils die Zahl x .

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $x + 1 = 2$ | b) $x - 5 = 9$ |
| c) $x + 5 = 3$ | d) $2x = 4$ |
| e) $3x = 12$ | f) $6x = 42$ |
| g) $x + 10 = 5$ | h) $17x = 17$ |
| i) $x - 0 = 0$ | j) $x - 6 = 10$ |
| k) $6x - 3 = 15$ | l) $2x + 2 = 14$ |

2.3 Einfache Gleichungen lösen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad I



1 Bestimme x.

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) $x + 2 = 3$ | b) $x - 6 = 6$ | c) $x + 8 = 10$ | d) $x - 1 = 3$ |
| e) $8x = 16$ | f) $10x = 20$ | g) $3,5x = 7$ | h) $-2x = -6$ |
| i) $2x - 3 = 6$ | j) $6x - 8 = 2$ | k) $9x - 6 = 3$ | l) $1x - 8 = 6$ |

2 Löse die Gleichungen.

- | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|------------------|
| a) $2x + 6 = 54$ | b) $-6 + 3x = 15$ | c) $7x - x = 12$ | d) $3x - 2 = 31$ |
| e) $8 + x = 5$ | f) $-9x - 3 = 0$ | g) $3 - x = 5$ | h) $-3 + x = -5$ |

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad II



3 Löse die Gleichungen.

- | | | | |
|-------------------|------------------|--------------------|-----------------|
| a) $x + 7 = 21$ | b) $x + 25 = 5$ | c) $-8 - x = 3$ | d) $6 - x = -4$ |
| e) $-5 - 2x = 3$ | f) $4 - x = 4$ | g) $3x = 3$ | h) $2 - x = 16$ |
| i) $-18 - 3x = 3$ | j) $2x - x = 10$ | k) $-80 - 10x = 0$ | l) $6 - x = 4$ |

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad III

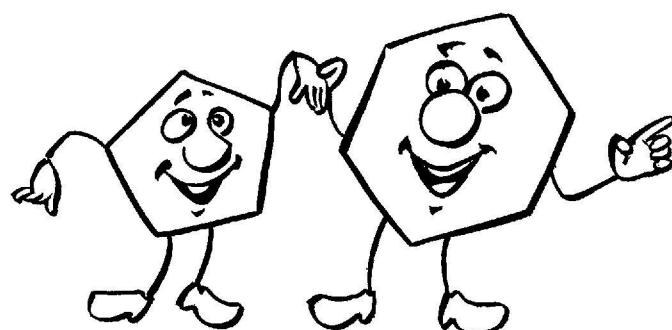


4 Löse die Gleichungen.

- | | | | |
|---------------------------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
| a) $-2x + 4 = 9$ | b) $4x - 12 = 4$ | c) $-8x + 3 = 19$ | d) $5,5x - 1 = 10$ |
| e) $-\frac{7}{8}x + 3 = -\frac{1}{8}$ | f) $-8x - 4x = 144$ | g) $7,5x - (-2) = 17$ | h) $-(-2x) - 3 = 0$ |

5 Eine Zahl mit 2 multipliziert ergibt 16.

6 Das Fünffache einer Zahl ergibt mit 10 addiert die Zahl 20.



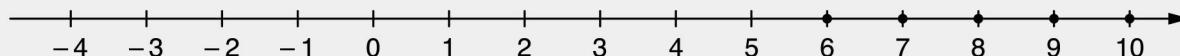
Video:



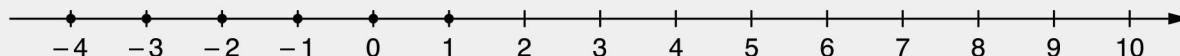
2.4 Ungleichungen lösen

Einführung

Bei der Ungleichung $x > 5$ steht x für alle Zahlen, die größer als 5 sind.
Betrachtet man nur ganze Zahlen, sind das die Zahlen $\{6, 7, 8, \dots\}$.



Bei der Ungleichung $x < 2$ steht x entsprechend für alle Zahlen, die kleiner als 2 sind.
Betrachtet man nur ganze Zahlen, sind das die Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1\}$.



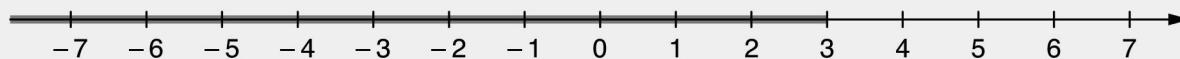
Ungleichungen werden häufig genau wie Gleichungen gelöst.

Beispiele für Ungleichungen mit ganzzahligen Lösungen:

$$2x - 4 < 2 \quad | + 4$$

$$2x < 6 \quad | : 2$$

$x < 3 \quad \rightarrow$ Alle ganzen Zahlen kleiner als 3 lösen die Ungleichung.



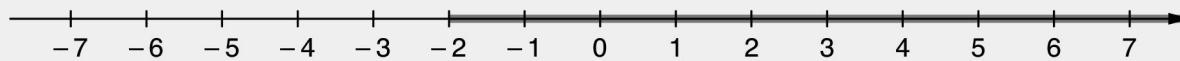
Ausnahme:

Teilt man durch eine negative Zahl, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um:

$$-3x + 1 < 7 \quad | - 1$$

$$-3x < 6 \quad | : (-3)$$

$x > -2 \quad \rightarrow$ Alle ganzen Zahlen größer als -2 lösen die Ungleichung.



Einstiegsaufgaben

Löse die Ungleichungen und veranschauliche die ganzzahligen Lösungen an einer Zahlena-gerade.

- a) $x + 7 < 6$
- b) $3x > 9$
- c) $4x - 3 < 5$
- d) $-5x + 6 > 16$

2.4 Ungleichungen lösen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad I

1 Löse die Ungleichungen.

- | | | |
|---------------------|--------------------|----------------------|
| a) $3x + 24 > -3$ | b) $25 > -7x + 10$ | c) $9x + 81 < 27$ |
| d) $25x < 50 + 100$ | e) $12x - 12 > 36$ | f) $100 - 50x > 300$ |

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad II

2 Löse die Ungleichungen.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $5 + 6x > 4x + 15$ | b) $24 - 3x > 9 - 9 + 6x$ | c) $12x - 2x < 3x - (25 + 3)$ |
| d) $2(3x - 4) < 34$ | e) $4x + 42 - 6x < 5x + 22$ | f) $25x - (2x + 2 - x) < 5x$ |
| g) $\frac{1}{4}x - 8 < 3 \cdot (-\frac{1}{4}x + 5)$ | h) $\frac{1}{8} - 27 > \frac{16}{32}x - 14$ | i) $\frac{1}{6} \cdot (4x - 38) > \frac{1}{8}$ |

3 Finde die beiden Fehler in der Lösung der Ungleichung und markiere diese mit einem Rechteck. Schreibe die Lösung der Ungleichung ohne Fehler auf.

$$4x - 25 - (2x + 3) > 5^2 - 8$$

$$4x - 50x - 75 > 10 - 8$$

$$-46x - 75 > 2 \quad | +75$$

$$-46x > 77 \quad | :(-46)$$

$$x > \frac{77}{46}$$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad III

4 Erstelle eine passende Ungleichung zu den Texten und löse sie.

- a) Das Siebenfache einer Zahl ist zu 18 addiert größer als das Dreifache der Zahl zu 27 addiert.
- b) Ein Drittel einer Zahl ist größer als das Fünffache der Zahl minus 51.
- c) Reduziert man von 100 das Zehnfache einer Zahl, so ist das Ergebnis größer als das Vierfache der Zahl vermehrt um 25.

Video:



2.5 Gleichungen aufstellen

Einführung

In Bewegungsaufgaben geht es um Folgendes:

Zwei Personen P_1 und P_2 fahren beide von einem Ort A zu einem Ort B. P_1 fährt früher los als P_2 . Allerdings fährt P_2 schneller, daher wird P_2 irgendwann P_1 einholen. Die Frage ist, nach welcher Zeit x dies passiert.

Solche Probleme werden gelöst, indem zunächst eine Gleichung mit x aufgestellt und diese dann nach x umgestellt wird.

Beispiel:

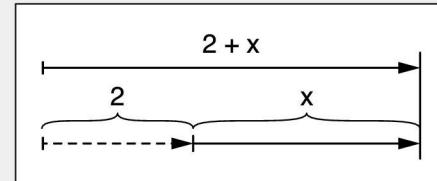
Person 1 (P_1) fährt mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h.

Person 2 (P_2) fährt zwei Stunden nach P_1 los, aber mit einer Geschwindigkeit von 75 km/h.

x ist die Zeit, die P_2 fahren muss, um P_1 einzuholen. P_1 fährt also $2 + x$ Stunden, bis sie eingeholt wird.

Der zurückgelegte Weg ist bis dahin derselbe!

Weg P_1 = Weg P_2



Weg $P_1 = 25 \cdot (2 + x)$, da P_1 $2 + x$ Stunden fährt und pro Stunde 25 km zurücklegt.

Weg $P_2 = 75x$, da P_2 x Stunden fährt und pro Stunde 75 km zurücklegt.

Daher gilt: $25 \cdot (2 + x) = 75x$

Die Lösung der Gleichung ist $x = 1$.

Es dauert also $1 + 2 = 3$ Stunden, bis P_1 von P_2 eingeholt wurde.

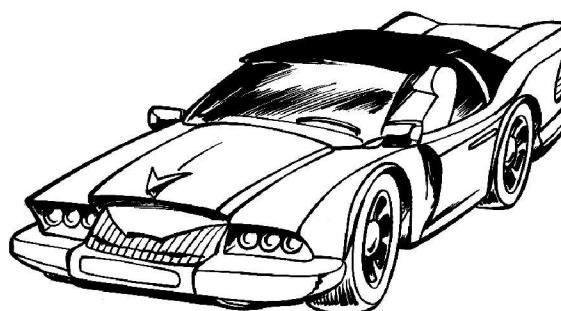
Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} 25 \cdot (2 + x) &= 75x \\ 50 + 25x &= 75x & | -25x \\ 50 &= 50x & | : 50 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Einstiegsaufgabe

P_1 fährt mit 30 km/h, P_2 fährt mit 50 km/h. P_2 fährt eine Stunde nach P_1 los.

Berechne die Zeitdauer, bis P_1 von P_2 eingeholt wird.



2.5 Gleichungen aufstellen

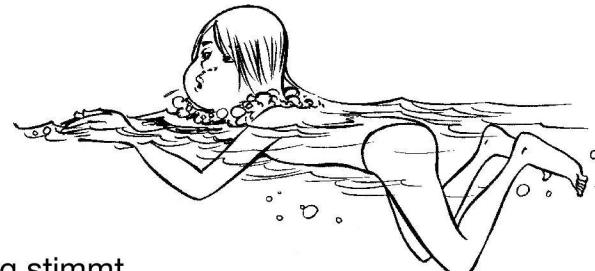
Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad I

- 1** Heiko und Sandra fahren von einer Party mit dem Fahrrad nach Hause. Sandra fährt eine halbe Stunde nach Heiko los, allerdings fährt sie etwa 10 km/h schneller als Heiko mit seinen gemütlichen 15 km/h.
Ermittle die Zeitspanne, die Heiko unterwegs ist, bis er von Sandra eingeholt wird.

- 2** Dilara und Uta schwimmen sehr gut. Dilara erreicht eine Geschwindigkeit von 5,4 km/h und Uta schafft sogar 6,48 km/h. Dilara schwimmt um 16:00 Uhr los, Uta allerdings erst 15 Minuten später.

Uta behauptet, dass sie Dilara 10 Minuten später bereits eingeholt hat.

- Entscheide durch Rechnung, ob Utas Behauptung stimmt.
- Bestimme die Uhrzeit, zu der Uta Dilara eingeholt hat.



Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad II

- 3** Svenja und Benjamin haben sich für 10:00 Uhr für zwei Stunden zum Walken verabredet. Da Benjamin verschlafen hat, wartet Svenja noch 10 Minuten und walkt schließlich ohne ihn los. Benjamin und Svenja walken in ähnlicher Geschwindigkeit. Er schafft 9 km/h und sie walkt mit 8 km/h.

Berechne die Anzahl der Minuten, bis Benjamin Svenja eingeholt hat, wenn er nach weiteren 5 Minuten am ursprünglich vereinbarten Treffpunkt losläuft.

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad III

- 4** Nico und Nils laufen um die Wette. Nils läuft 10 km/h und Nico 13 km/h. Gemeinsam laufen sie 20 Minuten. Danach macht Nico eine Pause von 15 Minuten.

Bestimme die Anzahl der Minuten, bis Nico Nils wieder eingeholt hat.

- 5** Drei Autofahrer fahren mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Jochen fährt 85 km/h, Bernd fährt 95 km/h und Vanessa ist mit 100 km/h unterwegs.

Bernd fährt um 15:00 Uhr, Jochen um 15:15 Uhr und Vanessa um 15:23 Uhr auf die Autobahn.

Berechne die Uhrzeit, zu der mindestens zwei Autofahrer nebeneinander sind.

