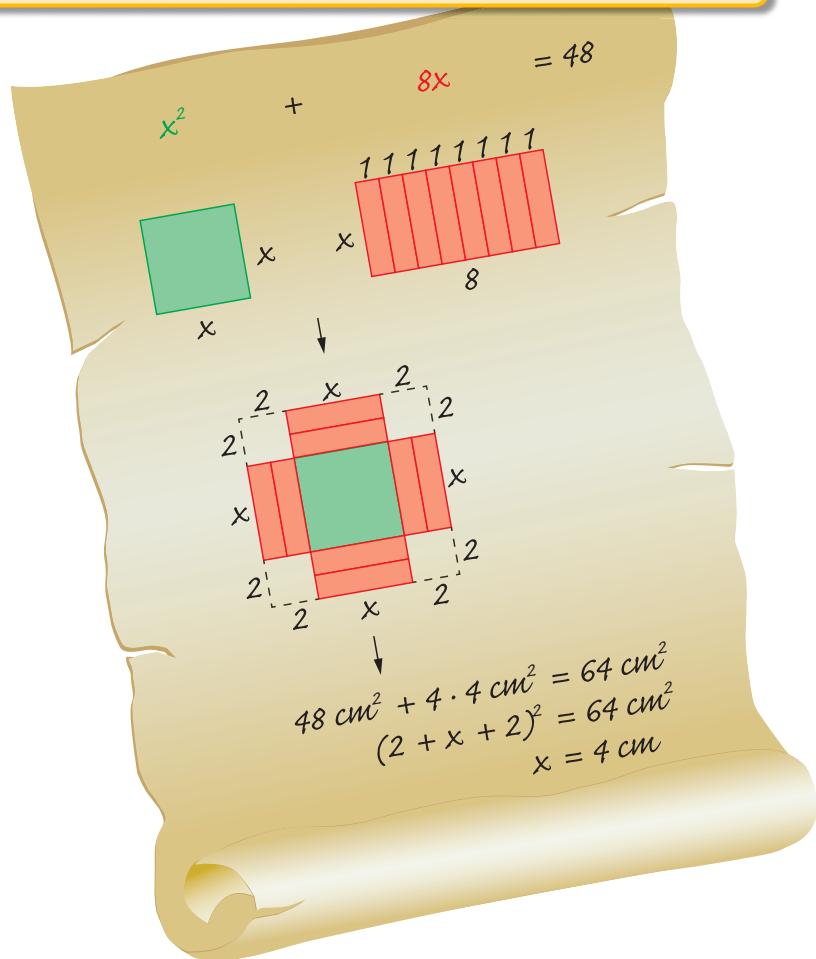


# 2

# Quadratische Gleichungen

## EINSTIEG

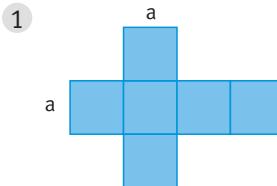
- Der arabische Mathematiker Al-Chwarizmi hat schon vor über 1000 Jahren ein Verfahren beschrieben, wie man quadratische Gleichungen lösen kann. Das Blatt zeigt das Beispiel für die Gleichung  $x^2 + 8x = 48$ . Beschreibe sein Vorgehen.
- Löse ebenso die Gleichungen:  $x^2 + 8x = 84$  und  $x^2 + 4x = 21$ .
- Erkläre, warum Al-Chwarizmi auf diese Weise nur stets eine Lösung einer quadratischen Gleichung findet.



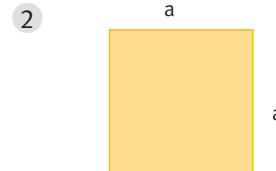
## AUSBLICK

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, ...

- quadratische Gleichungen auf verschiedene Arten zu lösen.
- die Lösung von quadratischen Gleichungen geometrisch zu interpretieren.
- Schnitte zwischen Parabeln und Geraden systematisch zu betrachten.



- 1 Das Netz eines Würfels hat den Flächeninhalt  $486 \text{ cm}^2$ .



- 2 Ein Quadrat hat den Flächeninhalt  $36 \text{ m}^2$ .



- 3 Die kreisförmige Rosette einer Kirche überdeckt eine Fläche von  $1018 \text{ dm}^2$ .

- Stelle jeden Sachverhalt als Gleichung dar.
- Löse die Gleichungen. Achte auf die Anzahl der Lösungen in Zusammenhang mit dem Sachverhalt.

### MERKWISSEN

Gleichungen, die sich auf die **allgemeine Form**  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ) bringen lassen, heißen **quadratische Gleichungen**. Man unterscheidet **reinquadratische** ( $b = 0$ ) und **gemischtquadratische Gleichungen** ( $b \neq 0$ ). Jede reinquadratische Gleichung lässt sich durch Umformen auf die Form  $x^2 = d$  bringen mit  $d = -\frac{c}{a}$ .

Wenn nichts anderes vereinbart ist, gilt  $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ .

$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
<p>Beispiel: <math>x^2 = 4</math></p> <p>rechnerisch:  <math>x_{1/2} = \pm \sqrt{4}</math>  <math>x_{1/2} = \pm 2</math>  <math>x_1 = -2; x_2 = 2</math></p> <p>Der Radikand ist positiv, die Gleichung hat zwei Lösungen.</p> <p><math>\mathbb{L} = \{-2; 2\}</math></p>	<p>Beispiel: <math>x^2 = 0</math></p> <p>rechnerisch:  <math>x_{1/2} = \pm \sqrt{0}</math>  <math>x_{1/2} = \pm 0</math>  <math>x = 0</math></p> <p>Der Radikand ist null, die Gleichung hat eine Lösung.</p> <p><math>\mathbb{L} = \{0\}</math></p>	<p>Beispiel: <math>x^2 = -2</math></p> <p>rechnerisch:  <math>x^2 = -2</math></p> <p>Der Radikand ist negativ, die Gleichung hat keine Lösung.</p> <p><math>\mathbb{L} = \emptyset</math></p>

### BEISPIELE

Jede reinquadratische Gleichung  $x^2 = d$  lässt sich auf die Form  $x^2 - d = 0$  bringen.

Beim grafischen Lösen von quadratischen Gleichungen sind die abgelesenen Werte oft nur Näherungswerte.

- I Löse die Gleichung  $2x^2 = 6$  grafisch. Beschreibe dein Vorgehen.

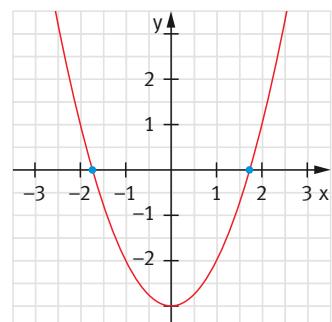
#### Lösung:

Wir können die reinquadratische Gleichung  $2x^2 = 6$  umformen in  $x^2 = 3 \iff x^2 - 3 = 0$ .

Die Lösung der Gleichung können wir als Nullstellen der Funktion  $y = x^2 - 3$  verstehen. Für die Anzahl der Nullstellen gelten dieselben Bedingungen wie im Merkwißen.

Der Zeichnung entnimmt man:

$$x_1 \approx -1,7; x_2 \approx 1,7 \\ \mathbb{L} = \{-1,7; 1,7\}$$



## VERSTÄNDNIS

- Überprüfe, ob die Gleichung  $9^2 + x = 0$  quadratisch ist.
- Begründe, warum die reinquadratische Gleichung  $x^2 + 144 = 0$  keine Lösung hat.

**1** Gib zunächst die Anzahl der Lösungen an und bestimme anschließend die Lösungsmenge rechnerisch.

a) $x^2 = 169$	b) $x^2 = -196$	c) $2x^2 = 450$	d) $256 - x^2 = 0$
e) $x^2 = 2,89$	f) $z^2 = \frac{36}{121}$	g) $a^2 = \frac{729}{-289}$	h) $z^2 + \frac{1}{16} = 0$

**2** Bestimme zeichnerisch die Lösungsmenge wie in Beispiel I.

a) $x^2 - 2 = 0$	b) $x^2 + 2 = 0$	c) $-x^2 + 2 = 0$	d) $x^2 = 0$	e) $3x^2 = 21$
------------------	------------------	-------------------	--------------	----------------

**3** Überprüfe die folgende rechnerische Lösung der Gleichung. Berichtige.

a)  $\frac{1}{4}x^2 = 4 \quad | \cdot 4$   
 $x^2 = 16$   
 $x = 4$   
 $\mathbb{L} = \{4\}$

b)  $3 - x^2 = 6 \quad | + 3$   
 $x^2 = 9$   
 $x_1 = -3; x_2 = 3$   
 $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

**4** Bestimme die Lösungsmenge rechnerisch.

a) $x^2 + 2 = 18$	b) $y^2 - 5 = 22$	c) $9 - x^2 = 5$
d) $7 - 4t^2 = 18t^2$	e) $12x^2 - 7 = -7$	f) $2,25a^2 + 15 = 12$
g) $2t + 8 = t \cdot (2 + 3t)$	h) $x \cdot (2x - 6) = 4 - 6x$	i) $z \cdot (z^2 + 8) = 0$
j) $7x \cdot (3x + 5) - 11 = 5x(2x + 7)$	k) $(x + 3)^2 - 7x + 8 = (x - 5) \cdot (x + 5) - x$	

Lösungen zu 4:

$$\emptyset; \emptyset; 0; 0; \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm \sqrt{\frac{7}{22}}; \pm \sqrt{\frac{8}{3}}; \pm \sqrt{2}; \pm \sqrt{27}$$

**5** Löse mit dem Taschenrechner und runde das Ergebnis auf zwei Dezimalen.

a) $x^2 = 2,89$	b) $7,4t^2 = 55$	c) $6,3z^2 = 1,5^2$	d) $1,3^4 = 3,5x^2$
e) $z^2 = \sqrt{33}$	f) $\frac{x^2}{12} = \sqrt{144}$	g) $\frac{t^2}{\sqrt{7}} = 2,4$	h) $\frac{3x^2 - 2,7}{1,23^2} = \sqrt{1,45}$

**6** Bestimme die Definitions- und die Lösungsmenge der Gleichungen.

a) $\frac{7-x}{4+2x} = \frac{x-3}{x+9}$	b) $\frac{3+x}{-2x-1} = \frac{1-2x}{x-3}$	c) $\frac{12-x}{2x-2} = \frac{x+6}{2+x}$	d) $\frac{1,5x+6}{x+6,5} = \frac{x+1}{2x-3}$
-----------------------------------------	-------------------------------------------	------------------------------------------	----------------------------------------------

**7** Gib zur angegebenen Lösungsmenge eine reinquadratische Gleichung an.

a) $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$	b) $\mathbb{L} = \{-\sqrt{0,5}; \sqrt{0,5}\}$	c) $\mathbb{L} = \{-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\}$
d) $\mathbb{L} = \{0\}$	e) $\mathbb{L} = \emptyset$	f) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

Findest du mehrere Möglichkeiten?

8 1) $x^2 = a$	2) $\frac{1}{2}x^2 - a = 0$	3) $2x^2 = -a$
4) $\frac{1}{2}x^2 - 4a = 0$	5) $7x^2 - 7a = 0$	6) $ax^2 - a = 0$

- a) Gib Zahlen für  $a$  so an, dass die Gleichung zwei, eine oder keine Lösung(en) hat ( $-5 \leq a \leq 5$ ).
- b) Begründe deine Lösung rechnerisch oder grafisch.

## AUFGABEN



Die Gleichung  $x^2 - 2x - 3 = 0$  kann nicht durch Radizieren gelöst werden.



Wenn man die Scheitelpunktsform der Funktion verwendet, dann kommt man auch mit Wurzel ziehen weiter.

- Überprüfe Jakobs Aussage.
- Führe Evas Idee aus.

### MERKWISSEN

Jede beliebige quadratische Gleichung lässt sich auf die Normalform bringen.

Binomische Formel:  
 $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

- Auch hier gilt:
- Bei  $(x + a)^2 = d$  erhält man für ...
- $d > 0$  zwei Lösungen.
  - $d = 0$  eine Lösung.
  - $d < 0$  keine Lösung.

Liegt eine quadratische Gleichung in der Form  $x^2 + px + q = 0$  vor, so spricht man von der **Normalform** einer quadratischen Gleichung.

Jede quadratische Gleichung kann auf verschiedene Arten gelöst werden.

**Beispiel:**  $x^2 + 6x + 5 = 0$

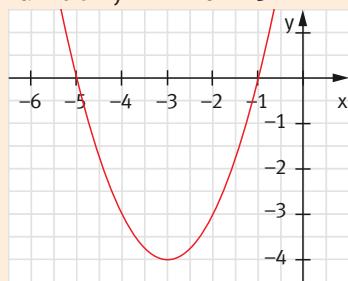
- 1 rechnerisch: Umformung mit **quadratischer Ergänzung**

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 3^2 - 9 + 5 &= 0 \quad |+4 \\ (x+3)^2 - 4 &= 0 \quad |+4 \\ (x+3)^2 &= 4 \\ x+3 &= \pm 2 \quad |-3 \end{aligned}$$

$$x_1 = -5; x_2 = -1$$

$$\mathbb{L} = \{-5; -1\}$$

- 2 grafisch: Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion  $y = x^2 + 6x + 5$



$$x_1 = -5; x_2 = -1$$

$$\mathbb{L} = \{-5; -1\}$$

### BEISPIELE

I Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

**Lösung:**

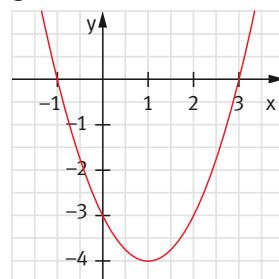
rechnerisch:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1^2 - 1 - 3 &= 0 \quad |+4 \\ (x-1)^2 - 4 &= 0 \quad |+4 \\ (x-1)^2 &= 4 \\ x-1 &= \pm 2 \quad |+1 \end{aligned}$$

$$x_1 = -1; x_2 = 3$$

$$\mathbb{L} = \{-1; 3\}$$

grafisch:



## VERSTÄNDNIS

- Begründe, dass aus einer Gleichung der Form  $x^2 + bx = 0$  die Lösungen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = -b$  direkt abgelesen werden können.
- Begründe, dass die Anzahl der Lösungen für  $(x + a)^2 = d$  von  $d$  abhängt.

**1** Wie viele Lösungen hat die Gleichung? Stelle eine Vermutung auf und berechne anschließend die Lösungsmenge.

- a)  $x^2 - 1 = 1,5x$       b)  $3 - x^2 = 2x$       c)  $8 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) - 36 \cdot (2x - 5) = 18$   
d)  $x \cdot (2x - 1,5) = -1,5$     e)  $3 \cdot (3 - x) \cdot (3 + x) = 0$     f)  $4x \cdot (x + 8) = 4x - 49$

**2** Ordne den Gleichungen die richtige Lösungsmenge zu.

1  $x^2 + 4x + 3 = 0$

4  $x^2 - 4x + 5 = 0$

7  $0 = x^2 + \frac{7}{20}x - \frac{3}{10}$

10  $x^2 - x = 0$

2  $x^2 + 2x - 15 = 0$

5  $x^2 - 5x + 4 = 0$

8  $x^2 - 6x + 9 = 0$

11  $x^2 + 2,5x + 3 = 0$

3  $x^2 + 3x + 2,25 = 0$

6  $x^2 + 3x + 2 = 0$

9  $x^2 + 2,5x - 3,5 = 0$

12  $0 = 12 + 8x + x^2$

I  $\mathbb{L} = \{-3,5; 1\}$

E  $\mathbb{L} = \{0; 1\}$

D  $\mathbb{L} = \{1; 4\}$

T  $\mathbb{L} = \{-1,5\}$

S  $\mathbb{L} = \{-3; -1\}$

V  $\mathbb{L} = \{3\}$

E  $\mathbb{L} = \{-2; -1\}$

Z  $\mathbb{L} = \emptyset$

A  $\mathbb{L} = \{-5; 3\}$

T  $\mathbb{L} = \emptyset$

A  $\mathbb{L} = \{-6; -2\}$

S  $\mathbb{L} = \{-0,75; 0,4\}$

**3** Löse die quadratischen Gleichungen grafisch.

- a)  $x^2 = 2x + 3$       b)  $x^2 - 6x + 5 = 0$       c)  $4x^2 + 36x + 77 = 0$   
d)  $x^2 - x = 0,75$       e)  $x \cdot (x - 1) = -2$       f)  $x^2 + 2x = 0$

**4** Löse rechnerisch. Runde gegebenenfalls auf zwei Dezimalen.

- a)  $2x^2 + 6x = x^2 - 3$       b)  $2 \cdot (x - 2)^2 + x^2 = x \cdot (x + 3)$   
c)  $x^2 - 3x + 16 = 2x^2 - 6x + 3$       d)  $4x^2 - 9 - x \cdot (x - 4) = (-2x + 4)^2$   
e)  $(x + 7) \cdot (x + 3) = (x - 3) \cdot (x + 1)$     f)  $(x - 2) \cdot (x + 3) = (x - 3) \cdot (x + 2)$

**5** Bestimme die Definitions- und die Lösungsmenge der Gleichungen.

a)  $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4}$       b)  $\frac{4x+4}{x+2} + x = 0$       c)  $\frac{3x+1}{-4-5x} = \frac{-x-1}{2x+0,5}$

**6** Bestimme die Zahl.

- a) Subtrahiert man vom Quadrat einer natürlichen Zahl das Dreifache der Zahl, so erhält man 130.  
b) Die Differenz aus einer Zahl und ihrem Kehrwert ist 2,1.  
c) Man erhält die fünffache Differenz einer Zahl und 3, wenn man die Zahl mit der Summe der Zahl und 13 multipliziert.

**7** Bestimme die Belegung des Koeffizienten  $a$  so, dass die Gleichung keine, eine oder zwei Lösung(en) hat.

- a)  $x^2 - 4x + a = 0$       b)  $(x - a)^2 = 0$       c)  $x^2 - ax + 3 = 0$

## AUFGABEN

Wenn nichts anderes vereinbart ist, gilt  $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ .

Als Lösungswort ergibt sich ein bekannter mathematischer Satz.

Lösungen zu 4:  
 $\mathbb{L} = \{-2,41; 5,41\};$   
 $\mathbb{L} = \{0,86; 4,64\};$   
 $\mathbb{L} = \{-5,45; -0,55\};$   
 $\mathbb{L} = \{-2\}; \mathbb{L} = \{0\}$   
 $\mathbb{L} = \{1,34; 18,66\}$

Im Folgenden gilt  $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ .

Bei der rechnerischen Lösung der Normalform einer quadratischen Gleichung werden stets dieselben Lösungsschritte durchlaufen. Eine Umformung der Normalform  $x^2 + px + q = 0$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) ergibt eine Lösungsformel, mit der alle Gleichungen dieser Art gelöst werden können.

- Übertrage die Umformung ins Heft und setze sie zur Herleitung einer Lösungsformel weiter fort.

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= 0 \\x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0\end{aligned}$$

- Überprüfe, unter welchen Bedingungen für  $p$  und  $q$  die quadratische Gleichung keine, eine bzw. zwei Lösung(en) hat.

### MERKWISSEN

**Herleitung der Lösungsformel** für die **allgemeine Form** einer quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}ax^2 + bx &+ c = 0 && | :a \\x^2 + \frac{b}{a}x &+ \frac{c}{a} = 0 && | \text{ quadr. Ergänzung} \\x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 && | \text{ Vereinfachung} \\ \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} &= 0 && | + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} && | - \frac{b}{2a}, \text{ Vereinfachung} \\x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\x_1 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Die Lösungsformel wird manchmal als *a-b-c-Formel* oder als *Mitternachtsformel* bezeichnet.

### BEISPIELE

I Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung mithilfe der Lösungsformel.

a)  $-2x^2 + 3x + 4 = 0$       b)  $\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24 = 0$

**Lösung:**

a)  $-2x^2 + 3x + 4 = 0$

$a = -2; b = 3; c = 4$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{-4}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{-4}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{41}}{-4}; \frac{-3 - \sqrt{41}}{-4} \right\}$$

b)  $\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24 = 0$

$a = \frac{2}{3}; b = -8; c = 24$

$$x_{1/2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 24}}{2 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{\frac{4}{3}}$$

$$x = \frac{8}{\frac{4}{3}} = 6$$

$$\mathbb{L} = \{6\}$$

Vergleiche die Koeffizienten der Gleichung mit der allgemeinen Form  $ax^2 + bx + c = 0$ . Beachte Vorzeichen und Rechenzeichen.

Oftmals gibt man auch gerundete Werte für  $x_1$  und  $x_2$  an.

**VERSTÄNDNIS**

- Bestimme die Koeffizienten a, b und c in folgenden Gleichungen:  
 1)  $-2x^2 + 3x - 4 = 0$       2)  $x^2 - 7,5x + 2 = 0$       3)  $3x^2 + 4 = 0$
- Stelle mithilfe der Lösungsformel aus dem Merkwissen die Lösungsformel für die Normalform einer quadratischen Gleichung (siehe Einstieg) auf.

**1** Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung. Runde geeignet.

- a)  $2x^2 - 6x + 4 = 0$       b)  $x^2 + 4x + 4 = 0$       c)  $x^2 - 0,5x - 7,5 = 0$   
 d)  $-3x^2 - 6x + 2,25 = 0$       e)  $0,5x^2 - 9x - 8 = 0$       f)  $1,5x^2 + 7x - 4 = 0$   
 g)  $2x^2 - 0,5x - 3,75 = 0$       h)  $x^2 + 1,5x + \frac{9}{16} = 0$       i)  $3x^2 + 18x + 21 = 0$

**2** Bringe die Gleichungen in die Form  $ax^2 + bx + c = 0$ . Bestimme die Lösungsmenge.

- a)  $x^2 = 2,4x - 1,43$       b)  $1,5x^2 + 0,75x = 1,26$       c)  $x^2 - 7x = 2,75$   
 d)  $2x^2 = 0,4x + 0,48$       e)  $x \cdot (x - 4) = -4$       f)  $(3 - x) \cdot 3x = -15$

**3** Bestimme die Lösungsmenge. Runde auf zwei Dezimalen.

- a)  $3x \cdot (2x - 7) - 8 = 4x \cdot (3x + 7)$   
 b)  $2 \cdot (5x - 3) \cdot x - 3 \cdot (7 - x) = -4 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$   
 c)  $5x \cdot [2 - (2x - 9) + 5x] = (9x - 4) \cdot (-2 - 5x)$   
 d)  $(x + 5)^2 - (3x + 8)^2 = (x + 7) \cdot (x - 7)$

**4 a)** Bestimme die Lösungen der quadratischen Gleichung mit der Lösungsformel. Was fällt dir auf?

- 1)  $2x^2 + x - 15 = 0$       2)  $9x^2 - 9x + 2,25 = 0$       3)  $x^2 - 0,1x + 0,9 = 0$

**b)** In der Lösungsformel der quadratischen Gleichung treten Wurzeln auf.

Den Term unter der Wurzel in der Lösungsformel nennt man **Diskriminante D** mit  $D = b^2 - 4ac$ .

Für die Lösbarkeit einer quadratischen Gleichung gibt es drei Fälle:

**D > 0**

Es ergeben sich  
**zwei verschiedene**  
**Lösungen**  $x_1$  und  $x_2$ .

**D = 0**

Es ergibt sich **eine**  
**Lösung**, da  $x_1 = x_2$  ist.

**D < 0**

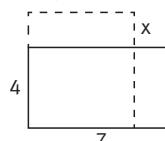
Der Term  $\sqrt{D}$  ist nicht definiert. Die Gleichung hat in **R keine Lösung**.

Bestimme mithilfe der Diskriminante die Anzahl der Lösungen und dann die Lösungsmenge.

- 1)  $2x^2 - 20x + 42 = 0$       2)  $-3x^2 + 18x - 75 = 0$       3)  $3x^2 + 6x - 105 = 0$   
 4)  $-x^2 - 5x - 5,25 = 0$       5)  $-x^2 - 5x + 24 = 0$       6)  $7x^2 = 3,5x + 10,5$   
 7)  $-3x = -2,24 - x^2$       8)  $100x \cdot (x + 3) = 559$       9)  $2,5x^2 - 25x = 62,5$

**5 a)** Die Seiten eines Rechtecks sind 4 cm und 7 cm lang. Eine Seite wird um x cm verkürzt, die andere um x cm verlängert. Bestimme x so, dass das neue Rechteck den Flächeninhalt  $21,25 \text{ cm}^2$  hat.

zu 5a):



**b)** Die Seiten eines Quadrats der Seitenlänge 12 cm werden um x cm verkürzt bzw. 2x cm verlängert. Prüfe, ob ein Rechteck mit dem Flächeninhalt  $165 \text{ cm}^2$  ( $160 \text{ cm}^2$ ) entstehen kann.

Lösungen zu 6:

-68; 6,5; 58; 76,5625;  
112,47; 500; 1296;

313 600

Angegeben sind nur die Werte der Diskriminanten.

- 6 Bestimme zuerst mithilfe der Diskriminante die Anzahl der Lösungen und dann die Lösungsmenge.
- $2x^2 - 10x + 21 = 0$
  - $-x^2 - 10x - 10,5 = 0$
  - $3x^2 + 6x - 105 = 0$
  - $3,5x^2 = 1,75x + 5,25$
  - $100x \cdot (x + 3) = 559$
  - $4x^2 - 9 = -x^2 + 16$
  - $1,5x^2 + 0,5\sqrt{2} \cdot x = 1$
  - $x^2 - 4 \cdot (\sqrt{12} - \sqrt{6})x - 12\sqrt{4} = 0$
- 7 Tritt in einer quadratischen Gleichung neben der Hauptvariable (hier: x) noch eine **Formvariable** auf, dann hängt die Lösbarkeit der Gleichung von dieser Formvariable ab. Mithilfe der Diskriminante kann die Lösbarkeit der Gleichung untersucht werden.

### Beispiele:

- 1 Für welche Werte von m ist  $x^2 - 8x + 2 - m = 0$  in  $\mathbb{R}$  nicht lösbar?

$$\begin{aligned} a &= 1; b = -8; c = 2 - m \\ D &= b^2 - 4ac \\ D &= (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - m) \\ D &= 56 + 4m \\ D < 0; \text{ also } 56 + 4m &< 0 \\ \Leftrightarrow m &< -14 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \emptyset \text{ für } m < -14$$

- 2 Für welche Belegung von k hat die Gleichung  $2kx^2 + 4x - 8 = 0$  in  $\mathbb{R}$  zwei Lösungen?

$$\begin{aligned} a &= 2k; b = 4; c = -8 \\ D &= b^2 - 4ac \\ D &= 4^2 - 4 \cdot 2k \cdot (-8) \\ D &= 16 + 64k \\ D > 0, \text{ also } 16 + 64k &> 0 \\ \Leftrightarrow k &> -0,25 \\ \mathbb{L} &= \left\{ \frac{-1 - \sqrt{1 + 4k}}{k}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k}}{k} \right\} \\ \text{für } k &> -0,25 \end{aligned}$$

- a) Für welche Belegung von k hat die Gleichung in  $\mathbb{R}$  zwei Lösungen? Bestimme die Lösungsmenge.

1	$x^2 - x + k = 0$	2	$x^2 - \frac{k}{4} = 7x$	3	$5x^2 - 7x = 49k$
4	$kx^2 + 2x + \frac{k}{4} = 0$	5	$kx^2 - 2x + 4 = 0$	6	$kx^2 + 1 = \frac{4}{5}x$

- b) Für welches t hat die Gleichung genau eine Lösung? Gib die Lösungsmenge an.

1	$0,2x^2 + 4x - 5t = 0$	2	$4x^2 + 12 = 12x - t$	3	$x^2 - 13x = 2t - 3$
4	$x^2 - (t + 0,5) \cdot x + \frac{25}{16} = 0$	5	$tx^2 + 3tx - 1 = 2tx - 1$	6	$3x^2 - 7x = \frac{1}{6}t - 2$

- c) Bestimme alle Werte von m, für die die Gleichung keine Lösung hat.

1	$3mx^2 - 6x + 9 = 0$	2	$(2 - m)x^2 - 5x - 5 = 0$	3	$x^2 - 13x = 2m - 3$
---	----------------------	---	---------------------------	---	----------------------

- 8 Bestimme t so, dass die Diskriminante D den angegebenen Wert annimmt. Bestimme dann die Lösungsmenge der Gleichung in  $\mathbb{R}$ .

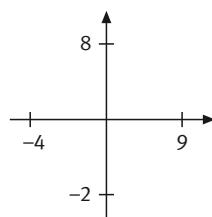
a)	$2x^2 + 8x - 6t = 0$ ( $D = 16$ )	b)	$3tx^2 - 4,5x + 5 = 0$ ( $D = -19,5$ )
c)	$x^2 + (t - 2) \cdot x - t = 0$ ( $D = 8$ )	d)	$0,5 \cdot (x - t) \cdot (x + 5) = 0$ ( $D = 0$ )

- 9 Gegeben ist der Punkt A (-3|2) eines Dreiecks ABC. Der Punkt B mit der Abszisse x ( $x > -1,5$ ) liegt auf der Geraden b:  $y = -0,5x + 3$ . Der x-Wert des Punktes C ist jeweils halb so groß wie der von B, wobei C auf c:  $y = 0,5x + 5$  liegt.

- a) Zeichne die Geraden b und c und die Dreiecke AB<sub>n</sub>C<sub>n</sub> für  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  und  $x_3 = 6$  in ein Koordinatensystem.
- b) Berechne mithilfe von Vektoren den Flächeninhalt A (x) der Dreiecke AB<sub>n</sub>C<sub>n</sub>.
- c) Für welchen Wert von x liegt ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 16,5 FE (38 FE) vor?

Lösungen zu 7 c):

$$m > \frac{1}{3}; m > \frac{13}{4}; m < -\frac{157}{8}$$



Lösung zu 9 b):

$$A(x) = \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{8}x + 3 \right) \text{FE}$$

10 Bestimme zunächst die Definitions- und dann die Lösungsmenge.

a)  $x + 2 = \frac{10}{x - 2}$

b)  $\frac{x-3}{2} = \frac{5x-4}{2x}$

c)  $\frac{5x+3}{4x-7} = 3x+8$

d)  $4x - 5 = \frac{3x}{5-x}$

e)  $\frac{1-x}{2-2x^2} = \frac{-2}{3x+1}$

f)  $\frac{4x+3}{-1-3x} = \frac{1-0,5x}{2x+0,5}$

11 Beim Postversand gibt es verschiedene Paketgrößen.

- a) Berechne die Länge und Breite des Pakets, wenn es doppelt so lang wie breit ist und bei einer Höhe von 15 cm ein Volumen von  $27 \text{ dm}^3$  hat.
- b) Ein 30 cm breites Paket ist um 24 cm länger als es hoch ist. Sein Volumen beträgt  $15\ 187,5 \text{ cm}^3$ . Berechne die Maße des Pakets.



## WERKZEUG

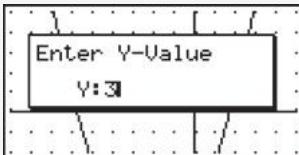
### Quadratische Gleichungen mit dem GTR

Der grafikfähige Taschenrechner (GTR) bietet verschiedene Möglichkeiten, quadratische Gleichungen zu lösen.

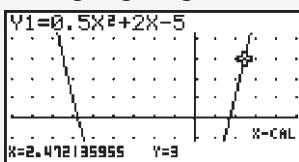
#### Grafische Lösungsmöglichkeit

Lösung der Gleichung  $0,5x^2 + 2x - 5 = 3$

- 1 Im Menü **F5** wird der Funktionsterm  $y = 0,5x^2 + 2x - 5$  eingegeben und der Funktionsgraph mit **F6** (DRAW) gezeichnet. Um die Lösung für  $y = 3$  zu erhalten, müssen die zugehörigen x-Werte bestimmt werden.
- 2 Mit **F5** (G-Solv) wird das Lösungsmenü geöffnet.
- 3 Mit **F6** ( $\square$ ) wird die zweite Seite der Funktionen aufgerufen.
- 4 **F2** (X-CAL) ermöglicht es, x-Werte zu vorgegebenen y-Werten zu berechnen. Es öffnet sich ein Fenster, um den y-Wert vorzugeben.



- 5 Mit **EXE** werden in der Grafik der Punkt und die Koordinaten des Punktes angezeigt, also auch der entsprechende x-Wert.
- 6 Mit der Cursor-Taste nach rechts wird die zweite Lösung angezeigt.



Um die **Nullstellen** einer Funktion anzuzeigen, muss  $y = 0$  festgelegt werden.

- Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung mit dem GTR grafisch und rechnerisch.

1  $20x^2 - 7x - 6 = 0$

2  $0,5x^2 - 5x = 12$

3  $4x^2 - 4x = 7$

4  $x^2 = 0,2x + 0,24$

#### Rechnerische Lösungsmöglichkeit

Um quadratische Gleichungen mit dem GTR lösen zu können, müssen sie in die Form  $ax^2 + bx + c = 0$  gebracht werden.

(Beispiel:  $0,5x^2 + 2x - 5 = 3 \Rightarrow 0,5x^2 + 2x - 8 = 0$ )

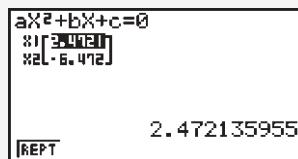
Der gewöhnliche Solver kann nicht angewendet werden, da dieser nur eine Lösung berechnet. Es muss daher über das Lösungsmenü **ALPHA** der Unterpunkt **F2** (Polynomgleichung) aufgerufen werden und der Grad 2 für quadratische Gleichungen mit **F1** festgelegt werden.

An der entsprechenden Stelle müssen die Werte für  $a$ ,  $b$  und  $c$  eingegeben werden.

Für das Beispiel:  $a = 0,5$ ;  $b = 2$  und  $c = -8$



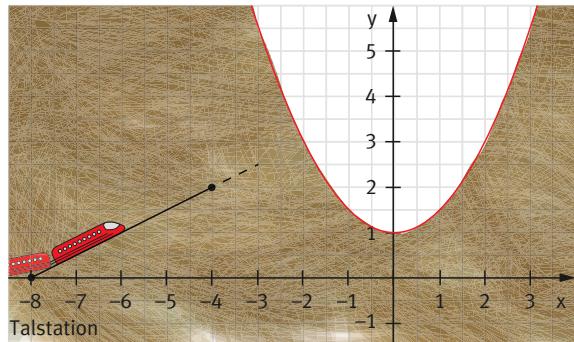
Mit **EXE** oder **F1** (SOLV) werden die beiden Lösungen  $x_1 = 2,4721$  und  $x_2 = -6,742$  angezeigt, allerdings meist nur gerundete Werte.



In der Zeichnung gilt:  
1 Einheit  $\hat{=} 50 \text{ m}$

Eine Zahnradbahn soll aus einem Tunnel kommend eine annähernd parabelförmige Schlucht überqueren und auf der anderen Seite die Fahrt in einem weiteren Tunnel fortsetzen. Die Steigung der Bahn ist konstant.

- In welcher Höhe über der Talstation verlässt die Bahn den Tunnel (fährt sie wieder in den Tunnel ein)? Beschreibe dein Vorgehen.



### MERKWISSEN

Bei der Bestimmung der Schnittpunkte zweier Geraden löst man ein lineares Gleichungssystem.

Die Bestimmung gemeinsamer Punkte einer Parabel und einer Gerade (oder einer anderen Parabel) führt auf ein Gleichungssystem, bei dem mindestens eine Gleichung quadratisch ist. Man spricht von einem **quadratischen Gleichungssystem**.

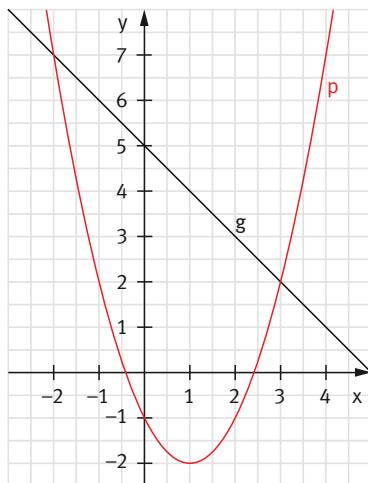
Quadratische Gleichungssysteme können wie lineare Gleichungssysteme **grafisch** und **rechnerisch** gelöst werden.

### BEISPIELE

- I Bestimme die gemeinsamen Punkte der Parabel  $p: y = (x - 1)^2 - 2$  und der Gerade  $g: y = -x + 5$  grafisch und rechnerisch ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ). Beschreibe dein Vorgehen.

#### Lösung: grafisch

- 1 Zeichne die Graphen zu  $p$  und  $g$  in ein Koordinatensystem.



Beim grafischen Lösungsverfahren sollte man eine Probe anschließen.

#### rechnerisch

- 1 Notiere das quadratische Gleichungssystem:
- $$\begin{aligned} I \quad & y = (x - 1)^2 - 2 \\ \wedge II \quad & y = -x + 5 \end{aligned}$$

- 2 Gleichsetzen der Gleichungen liefert:
- $$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 2 &= -x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 2 &= -x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

- 3 Löse die entstandene Gleichung:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} \\ x_1 &= -2; x_2 = 3 \end{aligned}$$

- 4 Berechne den Wert für  $y$  durch Einsetzen in I oder II:
- $$y_1 = -(-2) + 5 = 7; y_2 = -3 + 5 = 2$$

- 5 Lösungsmenge:  
 $\mathbb{L} = \{(-2|7); (3|2)\}$

- 2 Entnimm der Zeichnung die Schnittpunkte:  $S_1(-2|7)$  und  $S_2(3|2)$   
3 Lösungsmenge:  
 $\mathbb{L} = \{(-2|7); (3|2)\}$

## VERSTÄNDNIS

- Wie können eine Gerade und eine Parabel zueinander liegen?  
Beschreibe jeweils die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems.
- Philipp meint: Es gibt im Prinzip drei Möglichkeiten, wie zwei Parabeln zueinander liegen können. Stimmst du zu? Begründe.

- 1 Sabine und Luca lösen das quadratische Gleichungssystem auf verschiedene Weisen. Beschreibe das Vorgehen.

$$\begin{aligned} \text{I } y &= x^2 + 3x - 3 \\ \wedge \text{II } y &= -x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

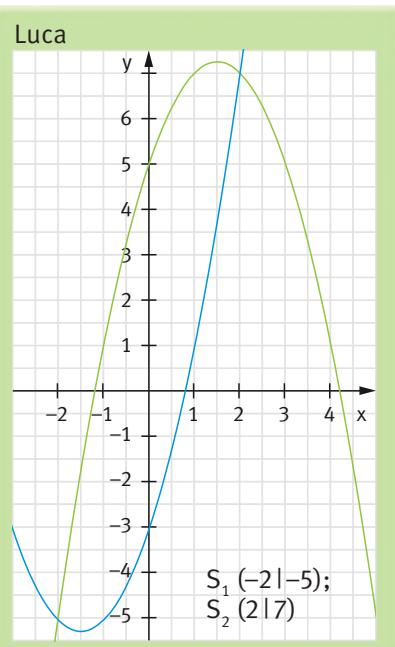
Sabine

$$\begin{aligned} \text{I } y &= x^2 + 3x - 3 \\ \wedge \text{II } y &= -x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 3 &= -x^2 + 3x + 5 \\ 2x^2 - 8 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ \Rightarrow x_1 &= -2; x_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 3 = -5 \\ y_2 &= 2^2 + 3 \cdot 2 - 3 = 7 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{(-2 | -5); (2 | 7)\}$$



- 2 Bestimme grafisch die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen.

## AUFGABEN

Es gilt:  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

a) g: $y = -x + 4$	b) g: $y = -2x + 3$	c) g: $y = 2x + 1$
p: $y = -x^2 + 6$	p: $y = x^2 - 3x + 3$	p: $y = -x^2 + 3x$
d) p <sub>1</sub> : $y = (x - 1)^2 - 2$	e) p <sub>1</sub> : $y = (x + 2)^2$	f) p <sub>1</sub> : $y = 2x^2$
p <sub>2</sub> : $y = -x^2 + 3$	p <sub>2</sub> : $y = -(x + 3)^2 + 5$	p <sub>2</sub> : $y = -0,5x^2 - 2,5x - 0,625$

- 3 a) Entnimm der Zeichnung die Gleichungen zu den Geraden  $g_1, g_2, g_3$  sowie zu den Parabeln  $p_1, p_2$  und  $p_3$ .

Überprüfe deine Ergebnisse durch Einsetzen.

Lösungen zu 2:  
 $(-1 | 2); (-1 | 5); (2 | 2);$  kein Schnittpunkt;  $(1 | 1); (0 | 3); (-1 | 1); (-4 | 4); (-0,5 | 0,5); (2 | -1)$

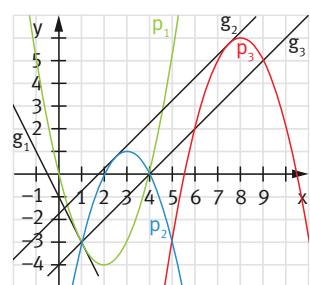
- b) Lies die Koordinaten der Punkte  $P_1$  ab:

$$\{P_1; P_2\} = g_3 \cap p_1 \quad \{P_3; P_4\} = g_3 \cap p_3 \quad \{P_5\} = g_1 \cap p_1 \quad \{P_6\} = g_2 \cap p_3$$

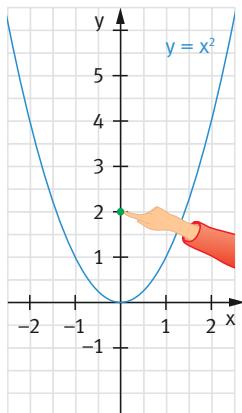
- c) Weise durch Rechnung nach, dass gilt:

$$1 \ g_3 \cap p_2 = p_1 \cap p_2 \quad 2 \ (g_1 \cap p_1) \subset (p_1 \cap p_2)$$

- 4 Bestimme die Lösungsmenge. Überprüfe mit dem GTR.



a) I $y = x + 4$ $\wedge$ II $y = x^2 - x + 4$	b) I $y = -x^2 + 6$ $\wedge$ II $y = x^2 + 3x$	c) I $y = x^2 - x + 9$ $\wedge$ II $y = 2x^2 + 8x - 2$
d) I $y = -x^2 - 5x + 4$ $\wedge$ II $y = 2x^2 + 2x - 3$	e) I $3x^2 + y - 27 = 0$ $\wedge$ II $y = \frac{1}{2}x \cdot (x - 6) + 7$	f) I $y = 0,2x^2 - x + 3$ $\wedge$ II $y = \frac{1}{10}x^2 + x + 3$

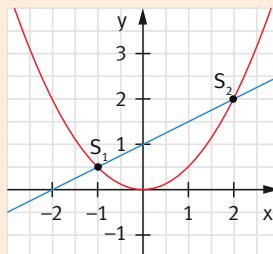


Gegeben sind die Parabel  $p$  mit  $y = x^2$  und die Geraden  $g_n$  mit  $g_1: y = x + 2$ ,  $g_2: y = -x - 1$  und  $g_3: y = x - 1$ .

- Zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen in verschiedenen Farben in ein Koordinatensystem.
- Bestimme aus den Graphen jeweils die Schnittpunkte der Parabel mit den Geraden. Überprüfe deine Ergebnisse rechnerisch.
- Formuliere einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der gemeinsamen Punkte und der Lösungsformel.

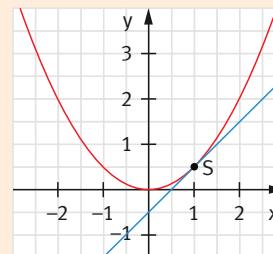
### MERKWISSEN

Untersucht man die **Anzahl** der **gemeinsamen Punkte** einer **Parabel** und einer **Gerade**, so können folgende Fälle auftreten:



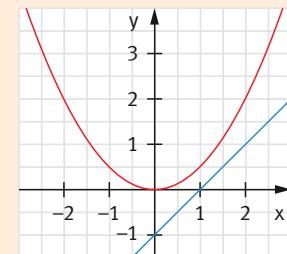
#### Parabelsekante

2 Schnittpunkte  $S_1, S_2$   
 $D > 0$   
 $\mathbb{L} = \{(x_1 | y_1); (x_2 | y_2)\}$



#### Parabeltangente

1 gemeinsamer Punkt  $S$   
 $D = 0$   
 $\mathbb{L} = \{(x | y)\}$



#### Parabelpassante

kein Schnittpunkt  
 $D < 0$   
 $\mathbb{L} = \emptyset$

Die Anzahl der gemeinsamen Punkte entspricht dabei der **Anzahl der Lösungen** des zugehörigen **quadratischen Gleichungssystems**. Die **Diskriminante D** gibt dabei Auskunft über diese Anzahl.

### BEISPIELE

- I Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen. Runde die Werte auf zwei Dezimalen. Kontrolliere durch eine Zeichnung.

$$p: y = 0,5x^2 + 2x - 2$$

$$g: y = x + 1$$

#### Lösung:

Gleichsetzen liefert:

$$0,5x^2 + 2x - 2 = x + 1$$

$$0,5x^2 + x - 3 = 0$$

Berechnung von D:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-3) = 7$$

$D > 0$ , also gibt es zwei Schnittpunkte (bzw. zwei Lösungen).

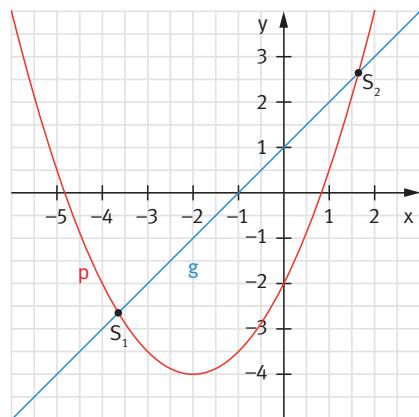
Koordinaten (Lösungen) bestimmen:

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{1} \Rightarrow x_1 = -3,65; x_2 = 1,65$$

Einsetzen gibt:  $y_1 = -2,65$ ;  $y_2 = 2,65$

$$S_1(-3,65 | -2,65) \quad S_2(1,65 | 2,65)$$

$$\mathbb{L} = \{(-3,65 | -2,65); (1,65 | 2,65)\}$$



## VERSTÄNDNIS

- Gib Beispiele von je zwei Parabeln an, die sich nur im Scheitel berühren.
- Zwei Parabeln sind beide nach oben geöffnet. Wie viele gemeinsame Punkte können die Parabeln haben? Veranschauliche an Beispielen.

**1** Untersuche rechnerisch, ob die gegebene Gerade  $g$  Tangente, Sekante oder Passante zur Parabel  $p$ :  $y = -x^2 + 4x$  ist. Überprüfe zeichnerisch.

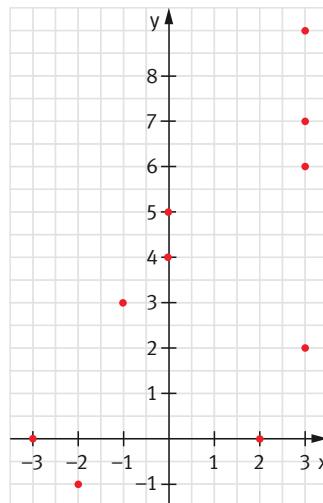
- |                              |                              |                    |                        |
|------------------------------|------------------------------|--------------------|------------------------|
| a) $g: y = 4$                | b) $g: x = 5$                | c) $g: y = 2x + 3$ | d) $g: y = -4x + 16$   |
| e) $g: y = \frac{1}{2}x - 1$ | f) $g: y = -x + \frac{3}{2}$ | g) $g: y + x = 7$  | h) $g: 6x - y + 1 = 0$ |

**2** Prüfe rechnerisch, ob die Graphen von  $g$  und  $p$  sich schneiden. Gib in dem Fall die Koordinaten der Schnittpunkte an.

- |                                            |                                                  |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $g: y = x + 4$<br>$p: y = x^2 - x + 1$  | b) $g: y = x + 3$<br>$p: y = \frac{1}{3}x^2 + x$ |
| c) $g: y = -x + 6,5$<br>$p: y = -x^2 + 2x$ | d) $g: y = -2x + 4$<br>$p: y = -x^2 + 4$         |
| e) $g: y = 2x + 3$<br>$p: y = x^2 + x - 3$ | f) $y = -x + 5$<br>$p: y = (x - 2)^2 + 1$        |

**3** Bestimme die Schnittpunkte von  $p_1$  und  $p_2$  grafisch.

- |                                                        |                                                                    |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| a) $p_1: y = 2x^2 + 3x$<br>$p_2: y = x^2 - x + 4$      | b) $p_1: y = -x^2 - 1$<br>$p_2: y = x^2 + 2x - 1$                  |
| c) $p_1: y = -x^2 + 2x - 1$<br>$p_2: y = x^2 + 6x + 2$ | d) $p_1: y = \frac{1}{3}x^2 - 0,5x - 1$<br>$p_2: y = x^2 - 3x + 1$ |



**4** Berechne die Seitenlängen eines Rechtecks. Stelle zunächst zwei Gleichungen auf.

- |                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|
| a) Umfang $u = 44$ cm; Flächeninhalt $A = 117$ cm $^2$               |
| b) Flächeninhalt $A = 5040$ m $^2$ ; Länge der Diagonale $d = 106$ m |

**5** Die Parabel  $p$  besitzt den Scheitel  $S(4|7)$ . Sie hat eine Gleichung der Form  $y = -0,25x^2 + bx + c$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $b, c \in \mathbb{R}$ . Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = 0,5x - 1$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- |                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) Zeige durch Rechnung, dass $p$ die Gleichung $y = -0,25x^2 + 2x + 3$ hat.<br>Zeichne $p$ und $g$ für $x \in [-3; 10]$ in ein Koordinatensystem. |
| b) Die Parabel $p$ und die Gerade $g$ schneiden sich in zwei Punkten A und B. Ermittle rechnerisch die Koordinaten der beiden Schnittpunkte.       |

**6** Die Fassade eines 5,8 m hohen Hauses mit Flachdach soll neu gestrichen werden. Die rechteckige Grundfläche des Hauses ist 84 m $^2$  groß. Die Wandfläche wird mit 191,9 m $^2$  berechnet. Dabei sind die Flächen für Fenster und Türen mit 28,5 m $^2$  schon abgezogen.

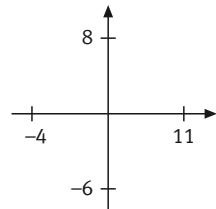
- |                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) Berechne die Außenmaße des Hauses.                                                                                                                       |
| b) Ermittle die Renovierungskosten, wenn ein Außengerüst 4,50 € pro laufendem Meter Miete kostet und ein 10-l-Eimer Fassadenfarbe mit 150 € berechnet wird. |

## AUFGABEN

Es gilt:  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Lösungen zu 2:  
Die gemeinsamen Punkte sind im Graphen markiert.

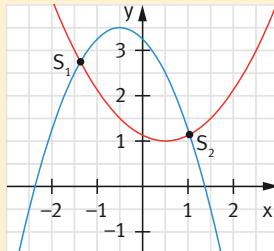
Eine Gleichung der Form  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  kann durch einen Trick gelöst werden. Setze  $x^2 = z$ .



Lösungen zu 5 b):  
A(-2|1); B(8|3)

Aus der Praxis:  
Farbverbrauch an einer Außenwand:  
etwa: 200 ml/m $^2$

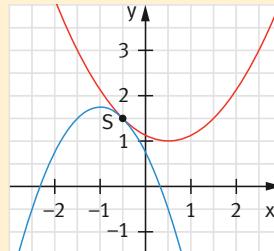
- 7 Untersucht man die **Anzahl der gemeinsamen Punkte zweier Parabeln**, so können (abgesehen von der Identität der beiden Parabeln) folgende drei Fälle auftreten:



**2 Schnittpunkte S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>**

$$D > 0$$

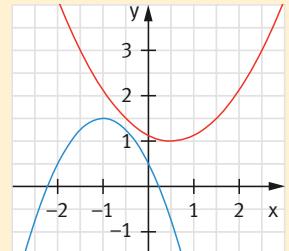
$$\mathbb{L} = \{(x_1 | y_1); (x_2 | y_2)\}$$



**ein gemeinsamer Punkt S**

$$D = 0$$

$$\mathbb{L} = \{(x | y)\}$$



**kein Schnittpunkt**

$$D < 0$$

$$\mathbb{L} = \emptyset$$

Zur rechnerischen Bestimmung der gemeinsamen Punkte sollten die Funktionsgleichungen in der allgemeinen Form oder der Scheitelpunktsform vorliegen. Dann lassen sich die Funktionsterme gleichsetzen, sodass man eine neue quadratische Gleichung erhält, deren Diskriminante über die Anzahl der gemeinsamen Punkte entscheidet.

**Beispiel:** Bestimme die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Parabeln

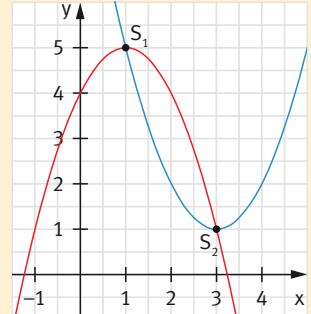
p<sub>1</sub>:  $y = -x^2 + 2x + 4$  und p<sub>2</sub>:  $y = (x - 3)^2 + 1$ . Kontrolliere zeichnerisch.

**Lösung:** Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 4 &= (x - 3)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 4 &= x^2 - 6x + 9 + 1 &| -x^2 + 6x - 10 \\ \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 &= 0 &| : (-2) \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 &= 0 &| \\ D = b^2 - 4ac & & \\ D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 &= 4 > 0, \text{ also zwei Schnittpunkte} & \\ x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2} &= 1 & x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2} = 3 \end{aligned}$$

Einsetzen der x-Werte in eine der beiden Parabelgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= -1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 5 & y_2 &= -3^2 + 2 \cdot 3 + 4 = 1 \\ S_1(1 | 5) & & S_2(3 | 1) & \end{aligned}$$



Prüfe ebenso, ob die Parabeln gemeinsame Punkte haben und bestimme gegebenenfalls deren Koordinaten. Überprüfe anhand einer Zeichnung oder mit dem GTR.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad p_1: y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2} & \text{b)} \quad p_1: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{16} & \text{c)} \quad p_1: y = \frac{1}{4} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ p_2: y = -x^2 + 7x - 11 & p_2: y = -x^2 + 4x - 3 & p_2: y = x^2 - 4x + \frac{23}{4} \\ \text{d)} \quad p_1: y = x^2 - 4x + 5 & \text{e)} \quad p_1: y = x^2 - 2x - \frac{1}{2} & \text{f)} \quad p_1: y = x^2 + 3x + \frac{13}{4} \\ p_2: y = -2x^2 + 3 & p_2: y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{21}{8} & p_2: y = -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2 + 4 \end{array}$$

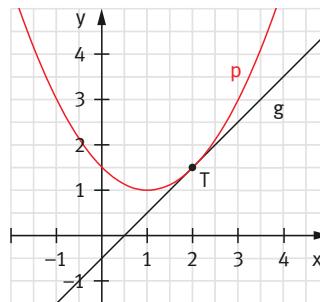
- 8 Gegeben sind die Parabeln p<sub>1</sub>:  $y = 2x^2 + 6x + 4$  und p<sub>2</sub>:  $y = -2x^2 - 16x - 26$ .

- a) Berechne die Scheitelkoordinaten und stelle eine Vermutung über die Anzahl der Punkte, die beide Parabeln gemeinsam haben, auf.  
 b) Bestätige deine Vermutung aus Teil a) durch Rechnung.

- 9** Überprüfe, ob die Gerade  $g: y = 2x - 5$  ( $f: y = 5x + 2$ ) eine Tangente an die Parabel  $p: y = (x - 3)^2 + 2$  ist ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

- 10** Betrachte die nebenstehende Abbildung.

Begründe, dass die Gerade  $h$  mit  $x + 0 \cdot y - 3,5 = 0$  mit der Parabel  $p$  genau einen Punkt gemeinsam hat, aber keine Tangente ist.

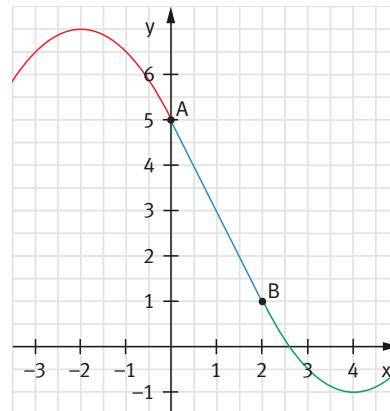


- 11** Gegeben ist die Gleichung  $x^2 - x - 3 = 0,5x + 1,5$  ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

- a) Interpretiere die Gleichung grafisch.  
b) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung rechnerisch und interpretiere diese wiederum grafisch.

- 12** Bei Autorennstrecken gibt es Kurven, deren Verlauf Parabeln gleicht. In der Zeichnung sind abschnittsweise gezeichnete Parabeln  $p_1$  und  $p_2$  durch eine Strecke [AB] verbunden. Es gilt:  
 $p_1: y = -0,5x^2 - 2x + 5$   
 $p_2: y = 0,5 \cdot (x - 4)^2 - 1$

- a) Ermittle die Funktionsgleichung von AB.  
b) Zeige, dass AB Tangente an beide Parabeln ist. Warum ist diese Eigenschaft essentiell für eine Rennstrecke?  
c) Berechne  $\overline{AB}$  wenn gilt: 1 LE =  $\triangleq 100$  m. Wie lange würde ein Sportwagen für diesen Streckenabschnitt brauchen, der mit durchschnittlich 180 km/h fährt?



- 13** Gib die Gleichungen einer Parabel  $p$  und einer linearen Funktion  $f$  an ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ), die ...

Findest du verschiedene Möglichkeiten?

- a) keinen Punkt gemeinsam haben.  
b) die beiden Punkte P(-2|4) und Q(2|4) gemeinsam haben.  
c) nur den Punkt R(-1|2) gemeinsam haben.  
d) mit der Gerade  $g$  mit der Gleichung  $x = 3$  denselben Punkt gemeinsam haben.

- 14** Roland überlegt:

Die Parabelschablone kann dir helfen.

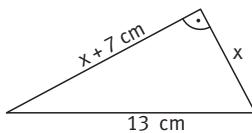


Zwei Normalparabeln berühren sich, wenn sie genau einen Punkt gemeinsam haben.

Was meinst du zu Rolands Überlegung? Begründe oder widerlege.

E gilt:  $\mathbb{G} = \mathbb{R}$  bzw.  
 $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Lösungen zu 1:  
 $\mathbb{L} = \{-16; 0\};$   
 $\mathbb{L} = \{-6,5; 3,5\}; \mathbb{L} = \{-4; 4\};$   
 $\mathbb{L} = \{-4; 14\}; \mathbb{L} = \{-4; 16\};$   
 $\mathbb{L} = \{-3,5; 14,5\}; \mathbb{L} = \emptyset;$   
 $\mathbb{L} = \{-2; 0\}; \mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\};$   
 $\mathbb{L} = \{-1; 1\}; \mathbb{L} = \{3; 11\};$   
 $\mathbb{L} = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$



Für geometrische Aufgaben sind Skizzen unentbehrlich.

Findest du verschiedene Möglichkeiten?

Lösungen zu 7:  
 $\mathbb{L} = \{-1; 1\}; \mathbb{L} = \{-4; 4\};$   
 $\mathbb{L} = \{1; 2\}; \mathbb{L} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\};$   
 $\mathbb{L} = \{-2; 2\}; \mathbb{L} = \{-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\};$   
 $\mathbb{L} = \{-21; -3\}$



Beachte die Definitionsmenge.

- 1 Bestimme rechnerisch die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung.
  - a)  $x^2 - 16 = 0$
  - b)  $x^2 + 16x = 0$
  - c)  $x^2 + 16 = 0$
  - d)  $x^2 - 2 = 0$
  - e)  $x^2 + 2x = 0$
  - f)  $x^2 - 8 = 0$
  - g)  $x^2 - 14x + 33 = 0$
  - h)  $x^2 - 12x - 64 = 0$
  - i)  $x^2 - 10x - 56 = 0$
  - j)  $x^2 - 11x = 50,75$
  - k)  $x^2 + 3x = 22,75$
  - l)  $x^2 - 17 = -16$
- 2 Bestimme zunächst die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung mithilfe der Diskriminante D. Ermittle anschließend die Lösungsmenge.
  - a)  $x^2 + x + 1 = 0$
  - b)  $x^2 - 4x + 8 = 0$
  - c)  $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = 0$
  - d)  $2x^2 + x + 1 = 0$
  - e)  $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$
  - f)  $2x^2 - 28x + 98 = 0$
- 3 Löse die Zahlenrätsel. Beachte die Definitionsmenge.
  - a) Die Summe einer natürlichen Zahl und ihrer Quadratzahl ergibt 132.
  - b) Das Produkt zweier aufeinander folgender natürlicher Zahlen beträgt 812.
  - c) Zwei Zahlen unterscheiden sich um 7. Das Produkt beider Zahlen ist 450.
  - d) Die Summe der Quadrate von vier aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen beträgt 1176.
  - e) Von zwei Zahlen ist eine um 12 größer als die andere. Das Produkt der beiden Zahlen beträgt 864.
  - f) Die Summe der Quadrate des dritten und vierten Teils einer Zahl ergibt 12,25.
- 4 Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 13 cm lang. Die beiden Katheten unterscheiden sich um 7 cm.
  - a) Berechne die Länge der Dreiecksseiten.
  - b) Ermittle den Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.
- 5 Die Höhe eines Dreiecks ist um 4 cm kleiner als die Grundseite. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks beträgt 160 cm<sup>2</sup>. Berechne die Länge der beiden Strecken.
- 6 Gib eine quadratische Gleichung an, welche  $\mathbb{L}$  als Lösungsmenge hat.
  - a)  $\mathbb{L} = \{-0,5; 2\}$
  - b)  $\mathbb{L} = \{0,03; 0,5\}$
  - c)  $\mathbb{L} = \{-8; 23\}$
- 7 Berechne die Lösungsmenge. Achte auf die Definitionsmenge.
  - a)  $6x^2 + 10x + 4 = (x + 1) \cdot (7x + 3)$
  - b)  $(12x + 3)^2 = 72x + 13$
  - c)  $(5x + 3)^2 + (5x - 3)^2 = 218$
  - d)  $(3 + x) \cdot (x - 3) + (x + 9)^2 = (x - 3)^2$
  - e)  $\frac{52 - 7x}{x - 36} = \frac{13x - 28}{4 - 9x}$
  - f)  $\frac{-7 + 3x}{3 + x} = \frac{2x - 5}{1 + 2x}$
  - g)  $\frac{3x^2 + 5}{12} = 1 + \frac{2x^2 - 5}{6}$
- 8 Wenn man den Radius eines Kreises um 39 cm vergrößert, so steigt sein Flächeninhalt auf das 6,25-Fache. Ermittle die Durchmesser beider Kreise.
- 9 Ulf kauft in einem Geschäft Schrauben für 30 €. In einem anderen Geschäft kostet eine Schraube 5 ct weniger, er erhält dort für den gleichen Betrag 100 Schrauben mehr. Wie viele Schrauben hat Ulf gekauft?
- 10 Für welche Werte von m besitzt die Gleichung zwei Lösungen?
  - a)  $mx^2 + 3x + 7 = 0$
  - b)  $4x^2 - 4mx + 4m + 16,25 = 0$
  - c)  $mx^2 + 4x - (3 - 2m) = 0$
  - d)  $-3mx^2 + 5m + 3 = 0$

- 11** Gib eine quadratische Gleichung der Form  $ax^2 + bx + c = 0$  mit dem angegebenen Koeffizienten an, die die angegebene Lösungsmenge besitzt.

- a)  $\mathbb{L} = \{-2; 3\}$        $a = 2$       b)  $\mathbb{L} = \{-7; 3\}$        $b = 4$   
 c)  $\mathbb{L} = \{-3,5; 1,5\}$        $c = -2$       d)  $\mathbb{L} = \{-0,1; 0,5\}$        $a = 5$

Am einfachsten ist die Aufgabe mithilfe von Linearfaktoren zu lösen.

- 12** Gegeben ist ein Quadrat mit 4 cm Seitenlänge. Man erhält neue Quadrate, wenn man die Quadratseiten um  $x$  cm verlängert.

- a) Stelle den Flächeninhalt des neuen Quadrats in Abhängigkeit von  $x$  dar.  
 b) Für welchen Wert von  $x$  hat der Flächeninhalt den Wert 64 FE?  
 c) Welche Bedingung gilt für  $x$ , wenn der Flächeninhalt 64 FE nicht übersteigen soll?

- 13** In einem rechteckigen Baugrundstück von 24 m Länge und 18 m Breite soll eine Baugrube so angelegt werden, dass sie  $\frac{2}{3}$  der ursprünglichen Fläche einnimmt und auf allen Seiten ein gleich breiter Grundstücksstreifen übrig bleibt. Berechne die Breite des Streifens.

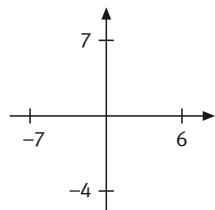


- 14** Gegeben sind die Punkte  $P(-1|0)$  und  $Q(-2|y_Q)$  sowie die Parabel  $p$  mit der Gleichung  $y = 2x^2 + 12x + 18$ .

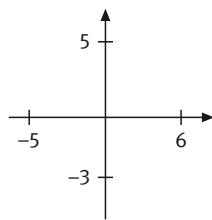
- a) Bestimme  $y_Q$  so, dass  $Q \in p$  gilt.  
 b) Die Gerade  $PQ$  hat mit  $p$  noch einen weiteren Punkt  $R$  gemeinsam. Berechne seine Koordinaten.  
 c) Zeige, dass die Geraden  $t_1: y = 0$  und  $t_2: y = 16x + 16$  die Parabel berühren und durch den Punkt  $P$  gehen.  
 d) Berechne die Koordinaten der Berührpunkte.  
 e) Welchen Wert kann die Steigung einer Gerade durch  $P$  haben, damit eine Passante bezüglich  $p$  vorliegt?

- 15** Die Parabel  $p: y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3,5$  und die Gerade  $g: y = -0,5x + 1,5$  sind gegeben.

- a) Zeichne  $p$  und  $g$  in ein Koordinatensystem.  
 b) Berechne die Nullstellen der beiden Funktionen.  
 c) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte  $A$  und  $B$  beider Graphen.  
 d) Eine Parallele zu  $g$  durch den Punkt  $D(3|3,125)$  ist Tangente an die Parabel  $p$ . Berechne die Gleichung von  $t$  und die Koordinaten des Berührpunktes  $T$ .  
 e) Auf dem Parabelbogen liegen zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  die Punkte  $C_n(x|-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3,5)$ . Zeichne das Dreieck  $ABC_1$  für  $x = -1$  ein.  
 f) Gib das Intervall für  $x$  an, in dem Dreiecke  $ABC_n$  existieren.  
 g) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke  $ABC_n$  in Abhängigkeit von  $x$ .  
 h) Bestimme den Wert für  $x$  so, dass das Dreieck den Flächeninhalt 5 FE hat.  
 i) Das Dreieck  $ABC_0$  habe maximalen Flächeninhalt. Bestimme die Koordinaten von  $C_0$  und begründe, warum  $T$  und  $C_0$  identisch sind.



Lösung zu 15 g):  
 $A(x) = (-1,25x^2 - 3,75x + 5) \text{ FE}$



Lösung zu 17 c):

$$A(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}\right) \text{ FE}$$

- 16** Gegeben ist die Parabel  $p$  mit  $y = -x^2 - 4x + 1$  und die Geradenschar  $g(t)$  mit  $y = -x + t$ .

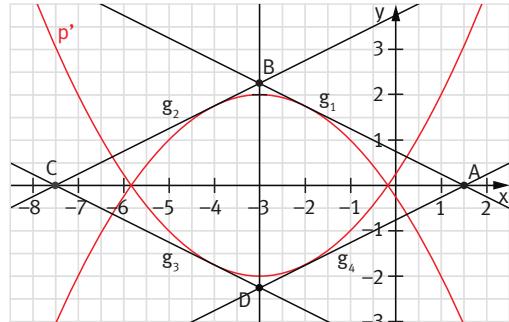
- Zeichne die zu  $t \in \{-3; 1; 6\}$  gehörenden Geraden  $g_1, g_2$  und  $g_3$  sowie die Parabel  $p$  in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- Ermittle aus der Zeichnung die Koordinaten der Schnittpunkte  $S_1$  und  $T_1$  von  $p$  mit  $g_1$ . Überprüfe durch Einsetzen in die entsprechende Gleichung.
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte  $S_2$  und  $T_2$  von  $p$  und  $g_2$ .
- Zeige, dass für  $t = 3,25$  die zugehörige Gerade  $g_4$  eine Tangente an die Parabel  $p$  ist. Berechne die Koordinaten des Berührpunktes und zeichne  $g_4$  ein.
- Gib mögliche Werte für  $t$  an, sodass die Gerade Passante an  $p$  ist.

- 17** Gegeben ist der Punkt  $A(1|2)$  eines Parallelogramms  $AB_nC_nD_n$ . Die Punkte  $B_n$  mit der Abszisse  $x$  liegen auf der  $x$ -Achse. Der  $x$ -Wert der Punkte  $C_n$  ist um 3 LE kleiner als der von  $B_n$ , wobei die Punkte  $C_n$  auf der Geraden  $g: y = 0,5x + 3$  liegen.

- Zeichne  $g$  und die Parallelogramme  $AB_nC_nD_n$  für  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 5$ .
- Unter den Parallelogrammen ist für  $-5 < x < 5$  auch ein Rechteck. Finde mithilfe der Zeichnung den zugehörigen  $x$ -Wert, gib die Koordinaten der Eckpunkte des Vierecks an und bestätige rechnerisch, dass ein Rechteck vorliegt.
- Berechne den Flächeninhalt  $A(x)$  der Parallelogramme  $AB_nC_nD_n$ .
- Für welche Werte von  $x$  liegt ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt 116,5 FE (64,5 FE) vor?

- 18** Gegeben ist die Parabel  $p$  mit der Gleichung  $y = -0,25(x+3)^2 + 2$ .

- Zeichne die Parabel und spiegle sie an der  $x$ -Achse.
- Ermittle die Gleichung der gespiegelten Parabel  $p'$  und bestätige rechnerisch, dass die Parabeln gemeinsame Nullstellen besitzen.
- Die Gerade  $g_1: y = -0,5x + 0,75$  ist Tangente an die Parabel  $p$ . Bestätige dies durch Rechnung.
- Gib Gleichungen der Geraden  $g_2, g_3$  und  $g_4$  an, die die Raute  $ABCD$  bilden.



- 19** Prüfe, ob die Funktionsgraphen gemeinsame Punkte haben, und bestimme gegebenenfalls deren Koordinaten. Überprüfe zeichnerisch oder mit dem GTR.

- |                                                          |                                              |                                   |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $g: y = -0,5x + 0,75$                                 | b) $g: y = -2x + 6$                          | c) $g: y = -\frac{3}{4}x + 4$     |
| $p: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}$     | $p: y = 0,5 \cdot (x-3)^2 + 2$               | $p: y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ |
| d) $g: y = x + 6$                                        | e) $g: y = 0,2x + 2$                         | f) $g: y = 2x - 2$                |
| $p: y = -x^2 - 6x - 4$                                   | $p: y = -x^2 + 4x - 2$                       | $p: y = x^2 - 3x + \frac{17}{4}$  |
| g) $p: y = -(x+1)^2 + 4,75$                              | h) $p: y = -(x-3,5)^2 + 3$                   | i) $p: y = (x-1)^2 + 1$           |
| $p: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{9}{8}$     | $p: y = x^2 - 3x + \frac{13}{4}$             | $p: y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$ |
| j) $p: y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{16}$ | k) $p: y = (x+1)^2 - 0,5$                    | l) $p: y = -x^2 - x + 3,25$       |
| $p: y = (x-1)^2 - 3,75$                                  | $p: y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{11}{2}$ | $p: y = x^2 + 3x + 3,75$          |

**20** Gegeben sind die Funktionen  $p_1: y = -(x - 3)^2 + 7$  und  $p_2: y = 0,4x^2 - x + 3,6$ .

- Berechne die Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  der beiden Graphen.
- Bestimme die Gleichung der Gerade  $g = S_1S_2$ .
- Begründe, dass  $h$  mit  $y = x + \frac{17}{4}$  Tangente an den Graphen zu  $p_1$  ist.

**21** Gegeben sind die Parabeln  $p_1: y = -x^2 + 4x$  und  $p_2: y = -0,25x + x - 1$ .

- Zeichne die Parabeln und berechne die Koordinaten ihrer Schnittpunkte.
- Die Punkte  $P_n \in p_1$  und  $Q_n \in p_2$  sind Endpunkte von Strecken  $[P_n Q_n]$ . Die Abszisse von  $Q_n$  ist doppelt so groß wie die Abszisse von  $P_n$ . Zeichne  $[P_1 Q_1]$  für  $x = 1,5$  ein.
- Berechne  $\overline{P_1 Q_1}$ .
- Stelle die Koordinaten der Punkte  $Q_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $P_n$  dar.
- Berechne  $\overline{P_n Q_n}$  in Abhängigkeit von  $x$ .

## GESCHICHTE

### François Viète

François Viète (1540–1603) war ein begeisterter französischer Hobby-mathematiker, der bis heute weltberühmt ist.

Unter anderem entdeckte er den Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer quadratischen Funktion und der Normalform der zugehörigen Funktionsgleichung. Dieser Zusammenhang steckt im „Satz von Vieta“, der lateinischen Form seines Nachnamens.



- Recherchiere über das Leben von François Viète.
- Nenne weitere bedeutende Erkenntnisse des Mathematikers François Viète.

### Satz von Vieta

Besitzt die quadratische Funktion  $y = x^2 + px + q$  die Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ , so gilt:  $x_1 + x_2 = -p$  und  $x_1 \cdot x_2 = q$

Weiterhin gilt:  $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Mithilfe dieses Satzes kannst du Nullstellen kontrollieren oder auch Nullstellen geschickt erraten.

### Beispiel:

Funktionsgleichung:  $y = x^2 - x - 72$

Für  $p = -1$  und  $q = -72$  lassen sich mit der Lösungsformel die Nullstellen  $x_1 = -8$  und  $x_2 = 9$  bestimmen.

Probe mit dem Satz von Vieta:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p & -8 + 9 &= 1 & \Rightarrow p = -1 \\ x_1 \cdot x_2 &= q & (-8) \cdot 9 &= -72 & \Rightarrow q = -72 \end{aligned}$$

- Berechne die Nullstellen der Funktionen und kontrolliere die Lösung mithilfe des Satzes von Vieta.

<input type="radio"/> 1 $y = x^2 - 7x + 10$	<input type="radio"/> 2 $y = x^2 - 3x - 18$	<input type="radio"/> 3 $y = x^2 - 6x - 27$	<input type="radio"/> 4 $y = x^2 + 7x - 120$
<input type="radio"/> 5 $y = x^2 - 12x - 45$	<input type="radio"/> 6 $y = x^2 + 4x - 45$	<input type="radio"/> 7 $y = x^2 - 2x - 35$	<input type="radio"/> 8 $y = x^2 + 8x + 7$

- Gegeben sind die Nullstellen einer verschobenen Normalparabel. Bestimme mithilfe des Satzes von Vieta die Funktionsvorschrift.

<input type="radio"/> 1 $x_1 = -2; x_2 = 5$	<input type="radio"/> 2 $x_1 = 6; x_2 = 18$	<input type="radio"/> 3 $x_1 = -7; x_2 = 4$
<input type="radio"/> 4 $x_1 = 3,5; x_2 = -2,5$	<input type="radio"/> 5 $x_1 = -1,2; x_2 = -3,6$	<input type="radio"/> 6 $x_1 = 8; x_2 = 0$

## KAPITEL 2

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse.  
Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

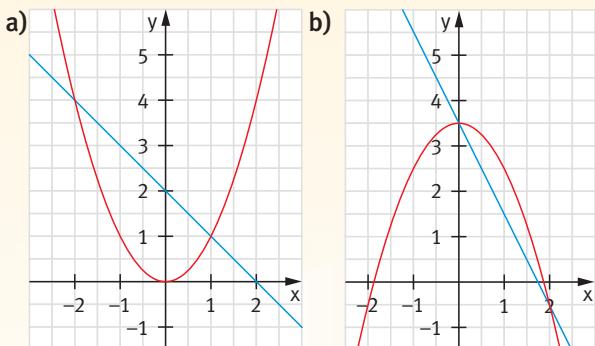
Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen findest du unter [www.ccbuchner.de/medien](http://www.ccbuchner.de/medien) (Eingabe 8470-02).

## Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Bestimme die Lösungsmenge ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ).

a)  $x^2 - 121 = 0$       b)  $(x + 9) \cdot (x - 9) = 0$   
 c)  $7x^2 - 63 = 0$       d)  $x \cdot (x + 25) = 25x + 529$

2 Gib eine Gleichung an, die hier grafisch gelöst wurde. Löse sie rechnerisch und überprüfe.



3 Sympathische und humorvolle, natürliche Zahl gesucht!

- a) Multipliziere dich mit dir selbst und vermehre dich um dein Doppeltes, dann erhältst du 323.  
 b) Die Summe aus deiner Hälfte und deinem Quadrat ergibt 742,5.  
 c) Die Summe aus deinem Quadrat und dem zehnten Teil von dir ergibt 101.  
 d) Die Differenz aus deinem Quadrat und dir ergibt dich.

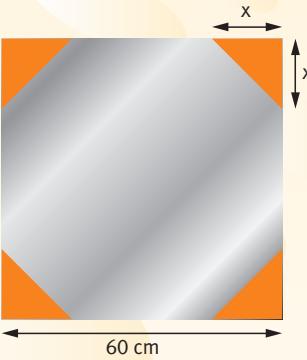
4 Löse die Gleichungen grafisch ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ).

a)  $x^2 = 3x - 2$       b)  $x^2 - 5x = -4$   
 c)  $2x^2 + x = 3$       d)  $x^2 + 2x - 3 = 0$   
 e)  $3x^2 + 3x = 0$       f)  $-7x + 5 = -2x^2$

5 Löse die Gleichungen rechnerisch ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ).

a)  $(x + 12)(x - 23) = 0$       b)  $2x^2 - 8x = 330$   
 c)  $0,5x^2 = 2x - 38,5$       d)  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{10}x = \frac{9}{25}$   
 e)  $3x^2 + 13x - 30 = 0$       f)  $16x^2 + 12 = 32x$   
 g)  $2x^2 - 13x - 45 = 0$       h)  $\frac{21}{8} = -3x^2 + \frac{45}{8}$   
 i)  $\frac{7+5x}{9-8x} = \frac{5+7x}{9x-8}$       j)  $\frac{52-7x}{x-36} = \frac{13x-28}{4-9x}$   
 k)  $6x^2 + 10x + 4 = (x + 1)(7x + 3)$

6 Von einer quadratischen Metallplatte werden an allen vier Ecken kongruente gleichschenklige Dreiecke abgeschnitten. Berechne die Länge  $x$ , wenn sich der Flächeninhalt der Platte um 12,5 % verringern soll.



7 Bestimme erst die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen und dann gegebenenfalls deren Koordinaten ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

a)  $y = 2x^2 - 2x$       y =  $0,5x + 2$   
 b)  $y = -0,25x^2 - 0,5x + 4,25$       y =  $-\frac{1}{8}x + 4,5$   
 c)  $y = -x^2 - 4x + 1$       y =  $-x + 3,25$   
 d)  $y = \frac{1}{4}x^2 + 0,5x$       y =  $x^2 - 4x + 6$   
 e)  $y = 0,125x^2 + 1,25x + 12,5$       y =  $0,5x^2 + 3x + 15$   
 f)  $y = x^2 - x - 1$       y =  $-x^2 + x + 1$

8 Überprüfe, ob die Gerade g eine Tangente an die Parabel p ist ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

a) p:  $y = x^2 + 1$       b) p:  $y = -0,5x^2 + 2x$   
 g:  $y = -2x$       g:  $y = -x + 5$

9 Gegeben ist die Parabel p:  $y = x^2 - 6x + 8$  ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) und die Gerade g, die durch die Punkte P (2|−4) und Q (8|8) verläuft. Ermittle die Gleichung der Geraden g und zeige, dass die Gerade die Parabel p im Punkt T (4|0) berührt.

- 10 Für den Bremsweg eines Pkw gilt die Faustformel:

$$s_B = 0,3 \cdot v + 0,01 \cdot v^2$$

Dabei ist  $s_B$  der zu erwartende Bremsweg in Meter (m) und  $v$  die Geschwindigkeit des Pkw in Kilometer pro Stunde (km/h).



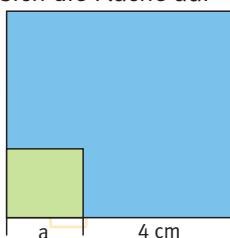
- a) Ermittle den zu erwartenden Bremsweg bei 30 km/h (bei 50 km/h).
- b) Stelle den Sachverhalt grafisch dar. Gib den Definitionsbereich an.
- c) Aufgrund eingeschränkter Sicht kann ein Autofahrer nur 10 m weit sehen. Bestimme die maximale Geschwindigkeit so, dass er bei einem plötzlichen Hindernis noch rechtzeitig bremsen kann.
- d) Ein Auto fährt 40 km/h, der Fahrer sieht plötzlich ein Hindernis. Er kann rechtzeitig abbremsen und kommt zum Stehen. Um wie viel vergrößert sich der Bremsweg, wenn er 60 km/h gefahren wäre?

- 11 Wolfgang tankt immer für 50,00 €. Nach einer Benzinpreiserhöhung um fünf Cent erhält er etwa 1 Liter weniger Benzin.

Wie teuer war ein Liter Benzin vor der Preiserhöhung? Runde geeignet.

- 12 a) In einem Rechteck unterscheiden sich die beiden Seiten um 3 cm. Die Diagonale ist 15 cm lang. Berechne die Länge der Seiten.

- b) Verlängert man die Seitenlängen eines Quadrats um 4 cm, vergrößert sich die Fläche auf das Neunfache. Gib die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats an.



### Arbeitsschritte

- 1 Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
- 2 Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
- 3 Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

- 13 Eine reinquadratische Gleichung heißt reinquadratisch, weil alle vorkommenden Terme quadratisch sind.

- 14 Reinquadratische Gleichungen der Form  $x^2 = d$  sind nur lösbar, wenn  $d$  eine Quadratzahl ist.

- 15 Die Diskriminante  $D$  für die Gleichung  $-3x^2 - 2x + 5 = 0$  lautet  $D = -2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5$

- 16 Die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form  $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$  können grafisch auch als Schnittpunkte zweier Parabeln aufgefasst werden.

- 17 Aus einer Parallelenschar von Geraden gibt es stets eine Gerade, die Tangente an eine Parabel ist.

- 18 Die Lösungsmenge einer Gleichung ist immer eine Teilmenge ihrer Definitionsmenge.

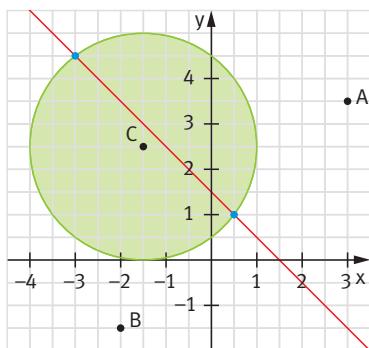
Aufgabe	Ich kann ...	Hilfe
1, 13, 14	reinquadratische Gleichungen rechnerisch lösen.	S. 40
4, 16	quadratische Gleichungen grafisch lösen.	S. 42
3, 5, 6, 18	die Lösungsformel für quadratische Gleichungen anwenden.	S. 44
2, 7, 8, 9, 11, 12, 17	Geraden und Parabeln zeichnerisch und rechnerisch auf gemeinsame Punkte untersuchen.	S. 50, 52, 53
15	die Diskriminantenbedingung anwenden.	S. 45

## KAPITEL 2

S. 40	$x^2 = 81$ $x = \pm \sqrt{81}$ $\mathbb{L} = \{-9; 9\}$	$(x+3)^2 = 64$ $x+3 = \pm \sqrt{64}$ $\mathbb{L} = \{-11; 5\}$	Eine quadratische Gleichung lässt sich direkt lösen, wenn sie <b>reinquadratisch</b> oder als <b>binomische Formel</b> dargestellt ist.
S. 42	$-0,5x^2 + 2x + 6 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot 6}}{2 \cdot (-0,5)}$ $x_1 = -2; x_2 = 6$ $\mathbb{L} = \{-2; 6\}$		<b>Gemischtquadratische Gleichungen</b> der Form $ax^2 + bx + c = 0$ lassen sich mit der <b>allgemeinen Lösungsformel</b> lösen. $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
S. 45	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 <math>2x^2 - 3x - 2 = 0</math>  <math>\Rightarrow D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25</math></li> <li>2 <math>-0,5x^2 + 5x - 12,5 = 0</math>  <math>\Rightarrow D = 5^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-12,5) = 0</math></li> <li>3 <math>-3x^2 - 5x - 4 = 0</math>  <math>\Rightarrow D = (-5)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = -23</math></li> </ol>		<p>Bei quadratischen Gleichungen kann man die Anzahl der Lösungen an der <b>Diskriminante D</b> aus der Lösungsformel ablesen mit <math>D = b^2 - 4ac</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 <math>D &gt; 0</math>: Es gibt zwei Lösungen.</li> <li>2 <math>D = 0</math>: Es gibt eine Lösung.</li> <li>3 <math>D &lt; 0</math>: Es gibt keine Lösung.</li> </ol>
S. 48	$p_1: y = x^2 - 2x - 1$ $x^2 - 2x - 1 = -0,5x^2 - x + 1,5$ $\Leftrightarrow 1,5x^2 - x - 2,5 = 0$ $x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{3}$ in $p_1$ : $y_1 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 2$ $y_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} - 1 = -\frac{14}{9}$ $\mathbb{L} = \{(-1 2); (\frac{5}{3} -\frac{14}{9})\}$		<p>Die Lösungsmenge eines <b>quadratischen Gleichungssystems</b> kann man durch das <b>Gleichsetzungsverfahren</b> und mithilfe der <b>Lösungsformel</b> bestimmen.</p> <p>Geometrisch entspricht das Vorgehen der Bestimmung der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen.</p>
S. 50 S. 52 S. 53	 		<p>Untersucht man die <b>Anzahl der gemeinsamen Punkte</b> einer <b>Parabel</b> und einer <b>Gerade</b> oder die Anzahl der <b>gemeinsamen Punkte</b> zweier <b>Parabeln</b>, so können – abhängig vom Wert der <b>Diskriminante D</b> in der Lösungsformel – folgende drei Fälle auftreten:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 <math>D &gt; 0</math>: zwei Schnittpunkte <math>S_1</math> und <math>S_2</math></li> <li>2 <math>D = 0</math>: ein gemeinsamer Punkt</li> <li>3 <math>D &lt; 0</math>: kein Schnittpunkt</li> </ol> <p><b>Hinweis:</b> Schneidet man zwei Parabeln, so können auch unendlich viele gemeinsame Punkte vorliegen: Die Parabeln sind in diesem Fall identisch.</p>

### Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

- 1 Ordne die durch verschiedene Farben gekennzeichneten Ortslinien und Ortsbereiche den Mengen  $M_1$  bis  $M_3$  zu.



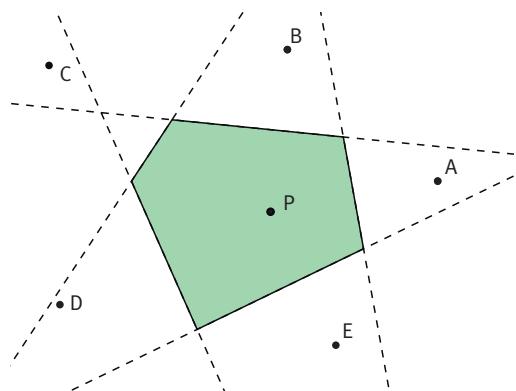
$$M_1 = \{P \mid \overline{PC} \leq 2,5 \text{ LE}\}$$

$$M_2 = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$$

$$M_3 = \{P \mid \overline{PC} = 2,5 \text{ LE} \wedge \overline{PA} = \overline{PB}\}$$

- 2 Von einem Dreieck ABC ist sein Umkreismittelpunkt M (3|1) sowie der Eckpunkt A (7|-1) bekannt. Der Punkt C liegt auf der positiven y-Achse, der Punkt B auf einer Geraden durch die Punkte P (0|7) und Q (8|3). Ermittle die Lage der Punkte B und C durch Konstruktion.

- 3 Gegeben sind die Eckpunkte eines konvexen Fünfecks ABCDE und ein Punkt P innerhalb dieses Fünfecks. Der deutsche Mathematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet hat durch Konstruktion den hier grün markierten Bereich festgelegt. Man bezeichnet den Bereich als „Dirichlet-Zelle“.



- a) Vervollständige folgenden Satz: „Der grün markierte Bereich ist die Menge aller Punkte, ...“  
 b) Führe die Konstruktion mit fünf beliebigen Punkten A, B, C, D, E und einem Punkt P selbst durch. Du kannst auch ein dynamisches Geometrieprogramm verwenden.

### Prozent- und Zinsrechnung

- 4 Ordne jedem Bruch die entsprechende Prozentangabe zu.

75 %	65 %	35 %	5 %
15 %	25 %	45 %	55 %
$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{60}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{2}{40}$

- 5 Aufgrund von Umbaumaßnahmen wurden die Preise sämtlicher Waren zunächst um 25 % und zwei Wochen später nochmals um 10 % herabgesetzt. Wie hoch ist nunmehr der Verkaufspreis für folgende Waren, wenn das Preisschild den ursprünglichen Preis zeigt?



- 6 Nachdem ein Paar Schuhe zweimal hintereinander um je 25 % ermäßigt wurde, kosten sie jetzt 54 €. Wie teuer waren die Schuhe ursprünglich?

- 7 Für einen Barkredit über 5000 € liegen drei Angebote vor.

Bank A: Barkredit über 5000 €

- Rückzahlung nach 1 Jahr
- Zinssatz: 7,2 %
- keine Bearbeitungsgebühr

Bank B: Barkredit über 5000 €

- Rückzahlung nach 1 Jahr
- Zinssatz: 6,5 %
- Bearbeitungsgebühr: 30 €

Bank C: Barkredit über 5000 €

- Rückzahlung nach 1 Jahr
- Zinsen: 199 €
- Bearbeitungsgebühr: 29 €

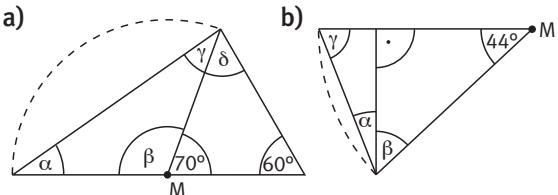
Für welches Angebot würdest du dich entscheiden? Begründe.



## Besondere Dreiecke

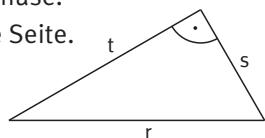
**8** Welche Dreiecksarten lassen sich in Bezug auf Seitenlängen (auf Winkelmaße) unterscheiden?

**9** Bestimme die fehlenden Winkelmaße.



**10** Welche der Aussagen sind für das nebenstehende Dreieck wahr, welche falsch?

- a) Die Seite t ist eine Kathete.
- b) Die Seite r ist die Hypotenuse.
- c) Die Seite r ist die längste Seite.
- d)  $t^2 + s^2 = r^2$
- e)  $s = \sqrt{r} - \sqrt{t}$

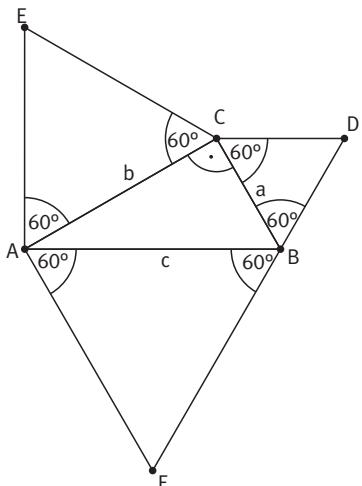


**11** Konstruiere mithilfe des Thaleskreises ein rechtwinkliges Dreieck ABC, für das gilt:  $c = 6 \text{ cm}$ ;  $a = 4 \text{ cm}$ ;  $\gamma = 90^\circ$

**12** Gegeben ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC mit  $c = 8 \text{ cm}$ . Ferner gilt:  $\overline{AC} = x \text{ cm}$  mit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

- a) Zeige, dass gilt:  $0 < x < 8$ .
- b) Stelle den Flächeninhalt A des Dreiecks in Abhängigkeit von x dar.
- c) Welcher Flächeninhalt ergibt sich für  $x = 5$ ?

**13** Was lässt sich über die Flächeninhalte der Dreiecke AFB, BDC und CEA aussagen?

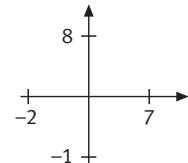


## Funktionale Abhängigkeiten

**14** Ein Parallelogramm ABCD mit den Eckpunkten A (4|3), B (1|3) und C (x|2) mit  $x \in \mathbb{R}$  hat den Flächeninhalt A = 25 FE. Berechne die x-Koordinate des Punktes C sowie die Koordinaten des Punktes D.

**15** Gegeben sind Dreiecke  $ABC_n$  mit A (1|1) und B (6|0).

Es gilt:  $C_n \in g: y = x + 1$  ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).



- a) Zeichne die Gerade g und die Dreiecke  $ABC_1$  für  $x = 3$  und  $ABC_2$  für  $x = 6$  in ein Koordinatensystem.
- b) Gib an, für welche Belegung von x sich Dreiecke  $ABC_n$  ergeben.
- c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC_1$ .
- d) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke  $ABC_n$  in Abhängigkeit von x.  
(Ergebnis:  $A(x) = (3x - 0,5) \text{ FE}$ )
- e) Bestimme rechnerisch, ob ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 58 FE existiert.

**16** Gegeben sind gleichschenklige Dreiecke  $ABC_n$  mit der Basis  $[AB]$  und den Eckpunkten A (-2|-2), B (1|1) und  $C_n(x|y)$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- a) Gib die Gleichung der Gerade g an, auf der alle Punkte  $C_n$  liegen.
- b) Zeichne das Dreieck  $ABC_1$  für  $x = -3$  in ein Koordinatensystem und berechne seinen Flächeninhalt.

**17** Gegeben ist das gleichschenklige Trapez ABCD.

Die parallelen Seiten  $[AB]$  und  $[CD]$  haben die Seitenlängen  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$  und  $\overline{CD} = 9 \text{ cm}$ . Die Höhe des Trapezes beträgt 6 cm. Verlängert man die Seite  $[AB]$  über A und B hinaus um jeweils  $x \text{ cm}$  ( $x \in [0; 6[\mathbb{R}]$ ) und verkürzt gleichzeitig die Höhe um  $x \text{ cm}$ , so entstehen gleichschenklige Trapeze  $A_nB_nC_nD_n$  (Hinweis:  $\overline{C_nD_n} = 9 \text{ cm}$ ).

- a) Zeichne das Trapez ABCD und das Trapez  $A_1B_1C_1D_1$  für  $x = 3$ .
- b) Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze  $A_nB_nC_nD_n$  in Abhängigkeit von x.  
(Ergebnis:  $A(x) = -(x^2 + x - 42) \text{ cm}^2$ )
- c) Berechne den maximalen Flächeninhalt und gib an, für welchen Wert von x dieser angenommen wird.