Chapitre 6 : Représentation des nombres

ISN

Année scolaire 2019/2020

***** Introduction

La mémoire des ordinateurs est constituée d'une multitude de petits circuits électroniques (des transistors) et chacun ne peut être que dans deux états électriques : notés arbitrairement 0 et 1.

La valeur 0 ou 1 d'un circuit mémoire élémentaire s'appelle un chiffre binaire, un booléen ou un bit (abréviation de binary digit).

Depuis les années 1970, l'unité de mesure de l'espace (disque ou mémoire) est l'octet ou byte. Un octet correspond à 8 bits. Un octet peut donc prendre $2^8 = 256$ valeurs différentes.

En pratique, un ordinateur manipule des **mots machines** de plusieurs octets. La taille mot correspond au nombre d'adressages possibles de la mémoire vive RAM. On rappelle que dans l'architecture de Von Neumann, la mémoire contient des données et des programmes et en particulier un mot machine peut contenir l'adresse d'un autre mot mémoire ...

Les mots machines sont de nos jours le plus souvent de 64 bits.

Tout type d'information (nombre, caractère, couleur...) peut être stocké sous forme de séquence de bits. Un **encodage** est nécessaire pour définir une représentation binaire. Dans ce chapitre, nous aborderons les encodages simples des nombres entiers, entiers relatifs ou des réels.

Encodage des entiers naturels

Représentation en base 10



Exemple 1

L'entier naturel 7307 s'écrit en base 10 comme une séquence de trois chiffres dont le poids dépend de leur position dans l'écriture.

Séquence de chiffres	7	3	0	7
Position	3	2	1	0
Poids	10^{3}	10^{2}	10^1	10^0

La décomposition de 7307 en base 10 s'écrit donc : $7307 = 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$.



	Les chiffres sont ordonnés dans la liste par poids décroissant comme dans la représentation u
	In [2]: chiffres2nombre([7,3,4]) Out[2]: 734
2.	On considère l'algorithme d'Horner décrit ci-dessous :
	Fonction horner(liste)
	nombre prend la valeur 0
	Pour chiffre dans liste #on commence par les chiffres de poids fort nombre prend la valeur nombre x 10 + chiffre nombre prend la valeur nombre + chiffre
	Retourner nombre
	a. Dérouler l'exécution de cet algorithme appliqué à la liste [7, 3, 0, 7].
	••••••
	b. Implémenter en Python la fonction horner. Que fait cette fonction?
	b. Implémenter en Python la fonction horner. Que fait cette fonction?



\$

^^^^^^

Exercice 2

On donne ci-dessous une suite d'instructions permettant de collecter dans une liste les chiffres de 73 en base 10.

```
In [15]: (n, t) = (73, [])
In [16]: t.append(n % 10)
In [17]: n = n // 10
In [18]: (n, t)
Out[18]: (7, [3])
In [19]: t.append(n % 10)
In [20]: n = n // 10
In [21]: (n, t)
Out[21]: (0, [3, 7])
In [22]: t.reverse()
In [23]: t
Out[23]: [7, 3]
```

1.	Écrire en pseudo-code une fonction qui prend en argument un entier et retourne la liste de ses chiffres en base 10.
2.	Implémenter cette fonction en Python



Représentation en base 2



🄁 Théorème-Définition 1

La mémoire d'un ordinateur ne pouvant stocker que des séquences de bit pouvant prendre uniquement deux états, pour représenter un entier naturel en machine, il faut l'écrire en base deux où les seuls chiffres disponibles sont 0 et 1.

Pour se convaincre que tout entier naturel peut s'écrire en base deux, on pourra visionner la vidéo sur cette page http://video.math.cnrs.fr/magie-en-base-deux/.

Tout entier naturel n peut s'écrire de façon unique en base 2 sous la forme $c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0$ telle que :

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i \times 2^i \text{ avec } \forall i \in [0; k], b_i \in [0; 1]$$

 b_k est le bit de poids fort et c_0 est le bit de poids faible. Pour distinguer l'écriture en base 2 de l'écriture en base 10 on pourra écrire $\overline{101}^2$ pour par exemple l'écriture de 5 en base 2.

	rcice 3 Expliquer la formule suivante : « Il existe 10 catégories de personnes : celles qui comprennent le binaire et les autres.»
2.	Compter jusqu'à 18 en binaire.
3.	Quel est le plus grand entier non signé qu'on peut représenter en base 2 avec un mot de 64 bits ? de n bits ?
4.	C'est en $\overline{11110010000}^2$ qu'Alan Turing a défini sa machine à calculer universelle. Exprimer ce nomb en base dix.

senté par la séquence de bits t avec les bits de poids fort à gauche.

5. Écrire en Python une fonction bits2nombre(t) qui retourne l'entier naturel (en base dix) repré-



		n ut							s2	2n	on	nb	r	e(([.1	, 1	1,	0	,	1])																														
	<u>. </u>																																																		İ	
															. . .				•					•								•	•																		•	•
• • • • •	•••		• •	• • •	• •	••		• •	•		••	• •	• •		• •				•					• •	• •					• •		•	•				• •					• •	•	• •							•	•
• • • • •	•••		• •	• • •		••	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •		• •	•	• •		• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •		•	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	
• • • • •	• • •	• • •	• •	• • •	• •	••	• •	• •	•	• •	••	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	
• • • • •	•••	• • •	• •	• • •	• •	••	• •	• •	•	• •	••	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	
• • • • •	• • •	• • •	• •	• • •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	

Exercice 4

1. Regarder la vidéo sur la page http://video.math.cnrs.fr/magie-en-base-deux/.

En utilisant les deux algorithmes présentés dans la video, convertir en base 2 les entiers naturels d'écritures décimales 37 et 18.

3. Compléter le code de la fonction codageBinaireGlouton(n) qui retourne une liste de 0 ou de 1 représentant le codage binaire de l'entier n écrit en base 10 en appliquant l'algorithme glouton décrit dans la vidéo.

```
def codageBinaireGlouton(n):
    binaire = []
    puissance2 = 1
    while puissance2 < n:
        puissance2 = puissance2 * 2
        ...
    return binaire</pre>
```

4. Compléter le code de la fonction <code>codageBinaire2(n)</code> qui retourne une liste de 0 ou de 1 représentant le codage binaire de l'entier n écrit en base 10 en appliquant l'algorithme des divisions



successives décrit dans la vidéo.

Exercice 5

1.	a. $\overline{10010}^{(2)} + \overline{1101}^{(2)}$	b. $\overline{100111}^{(2)} \times \overline{101}^{(2)}$

2. Écrire en Python une fonction additionBinaire8bits(t1, t2) qui retourne la liste t3 des bits de la somme des entiers représentés par les listes d de bits t1 et t2.

t1, t2 et t3 doivent être des listes de taille 8 correspondant à la représentation d'un entier sur un octet avec les bits de poids forts à gauche. Donner un exemple d'exécution où la fonction retourne un résultat faux. Expliquer pourquoi.

```
In [29]: additionBinaire8bits([1,0,1,0,1,1,1,0],[0,0,0,0,1,1,1,1])
Out[29]: [1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]
```



Méthode

En Python, les entiers naturels et relatifs sont de type int et sont représentés de façon exacte, la seule limitation étant celle de la mémoire disponible.

```
In [2]: (type(734), type(-1))
Out[2]: (int, int)
```

En Python, pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 2 vers la base 10, on préfixe la séquence de bits de 0b:

```
In [35]: 0b101
Out[35]: 5
```

Pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 10 vers la base 2, on utilise la fonction bin :

```
In [36]: bin(5)
Out[36]: '0b101'
```

I.3 Représentation en base 16



Théorème-Définition 2

Plus généralement, on peut représenter un entier naturel dans n'importe quelle base.

Une base très utilisée en informatique est la base 16.

On étend les dix chiffres de la base 10 avec A, B, C, D, E et F pour représenter 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

En base 16 chaque octet est représenté par deux chiffres ce qui permet de condenser l'écriture.

Par exemple, chaque carte réseau possède une adresse MAC codée sur 48 bits soit 6 octets et représentée par une séquence de 6 chiffres en base 16 séparés par le caractère : sous la forme : c8:60:00:a4:89:ab De même, les couleurs en représentation (R,G,B) sont codées sur 3 octets et dans le langage HTML des pages Web on les rencontre souvent notées comme séquence de six chiffres en base 16 préfixés par le caractère #: par exemple #FF0000 va coder un rouge pur.



Exercice 6

La représentation hexadécimale s'obtient facilement à partir de la représentation binaire. Puisque 2^4 = 16, pour convertir un octet de binaire en hexadécimal, il suffit de regrouper les bits par 4.

Ainsi 154 représenté en binaire sur un octet par $\overline{1001}^2$ a pour représentation hexadécimale $\overline{9A}^{16}$ car $9 \times 16 + 10 = 154$.

Convertir de même en hexadécimal les octets suivants :

• 11101010	• 10011011	• 1100000



^L Méthode

喀 En Python, pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 16 vers la base 10, on préfixe la séquence de bits de 0x:

```
In [5]: 0x9A
Out[5]: 154
```

Pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 10 vers la base 16, on utilise la fonction hex :

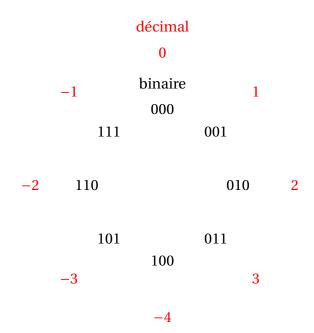
In [6]: hex(154) Out[6]: '0x9a'

Encodage des entiers relatifs

1.	Combien d'entiers relatifs peut-on représenter sur trois bits ?
2.	On décide de représenter le signe d'un entier par le bit de poids fort (0 pour positif et 1 pour négatif) et de garder les deux autres bits pour représenter la valeur absolue du nombre.
	a. Quels entiers peut-on représenter sur 3 bits avec cet encodage?
	b. Additionner les représentations de 1 et de −1 dans cet encodage ? Que remarque-t-on ?
3.	L'encodage par complément à 2 des entiers relatifs consiste à garder le bit de poids fort pour le



2 de 0 est 1 et celui de 1 est 0 car 1+1=10 en binaire). La figure ci-dessous illustre l'encodage en complément à 1 sur 3 bits.



a.	Vérifier si l'addition des représentations de 1 et de -1 dans cet encodage donne bien 0 .
b.	Vérifier si l'addition des représentations de 1 et de -1 dans cet encodage donne bien 0 et si l'addition des représentations de -1 et de -1 dans cet encodage donne bien -2 (en excluant la dernière retenue sortante).
c.	Que donne l'addition des représentations de 3 et 1 sur 3 bits ? Commenter
d.	Déterminer les entiers relatifs qu'on peut représenter en complément à 2 sur n bits?

e. Quels entiers relatifs peut-on représenter en complément à 2 sur *n* bits ?



f.	Com	ment peut-on obtenir l'encodage en complément à 2 d'un entier naturel inférieu
		bits?
	• • • • •	
	• • • • •	
g.	La cla	asse int8 du module numpy permet de créer des entiers signés codés sur 8 bits
		er les résultat des exécutions ci-dessous :
		er les résultat des exécutions ci-dessous : In [12]: import numpy
		er les résultat des exécutions ci-dessous : In [12]: import numpy In [13]: numpy.int8(127) + numpy.int8(1)
		er les résultat des exécutions ci-dessous : In [12]: import numpy In [13]: numpy.int8(127) + numpy.int8(1)
		<pre>er les résultat des exécutions ci-dessous: In [12]: import numpy In [13]: numpy.int8(127) + numpy.int8(1) main:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalar Out[13]: -128</pre>
		<pre>er les résultat des exécutions ci-dessous: In [12]: import numpy In [13]: numpy.int8(127) + numpy.int8(1)main:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalar</pre>

Encodage des réels III

1. Quel est le type de représentation des nombres réels en Python?

```
Exercice 8

1. Quel es

Ir

On

2. Comme
                In [15]: (type(1), type(1.0), type(4 // 2), type(4/2))
                Out[15]: (int, float, int, float)
```

2. Commenter les résultats d'exécution ci-dessous :

```
In [1]: 0. + 0.2 == 0.3
Out[1]: False
```



^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^

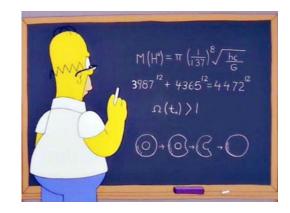
```
In [2]: 1.6 + (3.2 + 1.7)
Out[2]: 6.5
In [3]: (1.6 + 3.2) + 1.7
Out[3]: 6.500000000000001
In [4]: 1.5*(3.2+1.4)
Out[4]: 6.89999999999995
In [5]: 1.5 * 3.2 + 1.5 * 1.4
Out[5]: 6.9
In [6]: x = 1e200
In [7]: x * x
Out[7]: inf
In [8]: (x * x) * 0
Out[8]: nan
In [9]: y = 10 ** 400
In [10]: type(y + 1.0)
OverflowError
                                      Traceback (most recent call last)
<ipython-input-49-01ee37eb4b77> in <module>
---> 1 type(y + 1.0)
OverflowError: int too large to convert to float
In [10]: type(y + 1)
Out[10]: int
```

3. Lire l'article disponible sur la page Web http://www.apprendre-en-ligne.net/bloginfo/index.php/2008/10/10/79-problemes-d-arrondi. Quels problèmes peuvent causer la représentation



approchée des nombres réels en informatique ?

Dans l'épisode 2 de la saison 10 des Simpson (1998), intitulé "La Dernière Invention d'Homer", on peut voir le tableau ci-contre. Rappelons que le grand théorème de Fermat, démontré par Andrew Wiles, affirme qu'il n'existe pas de nombres entiers strictement positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ pour tout entier n > 2. Par défaut en Python, les flottants sont représentés en double précision sur 64 bits et les entiers sont en précision infinie. Le module numpy propose un type de flottants sur 32 bits.



Évaluez les tests suivants et commentez.

Théorème-Définition 3

Les nombres réels sont représentés usuellement en informatique sous la forme de **flottants** en référence au mode de représentation en virgule flottante similaire à la notation scientifique en base dix où un réel x est représenté sous la forme d'un triplet (signe s, mantisse m, exposant n) avec $x = (-1)^s \times m \times 10^n$. La représentation des flottants est fixée par la norme IEEE 754 : les différences avec la notation scientifique

La représentation des flottants est fixée par la norme IEEE 754 : les différences avec la notation scientifique sont la base (2 pour les flottants) et l'exposant n qui est décalé avec un biais d qui permet de représenter des exposants négatifs et positifs comme des entiers.

Un flottant f est alors de la forme $f = (-1)^s \times m \times 2^{n-d}$ avec $m \in [1; 2[$.



Par exemple pour $-12.015625 = -2^3 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^9}\right)$ le signe est -1, l'exposant est 3 et la mantisse est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^9}$.

On donne ci-après la représentation de -12.015625 comme flottant au format simple précision sur 32 bits obtenue avec le simulateur https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html.

En précision 32 bits, le signe s se code sur le bit de poids fort, puis l'exposant est codé sur 8 bits avec un biais $d = 2^{8-1} - 1 = 127$ et une mantisse codée sur 23 bits.

Par défaut le premier bit de la mantisse n'est pas codé et considéré comme égal à 1.

Comment peut-on représenter le 0? La convention est de réserver les valeurs extrêmes de l'exposant non biaisé e (0 et 255 pour un codage sur 8 bits) aux valeurs particulières comme 0 (exposant 0) ou l'infini (exposant 255).

			IEEE 75	4 Converter (JavaScript), V0.22						
	Sign	Exp	onent	Mantissa						
Value: Encoded as: Binary:	-1 1		2 ³ .30	1.501953125 4210688						
You en	tered		-12.015625		_					
Value a	actually s	stored in float:	-12.015625							
Error d	lue to co	nversion:	0.000000	-1						
Binary	Represe	ntation	110000010100	_						
Hexad	ecimal Re	epresentation	0xc1404000							

Les flottants permettent de représenter des nombres très grands ou très petits. Python est particulier car les entiers peuvent être arbitrairement grands mais le coût en espace mémoire est important. Mais les flottants ne sont que des représentations approchées des réels et il existe un écart non nul entre deux flottants consécutifs, un écart élastique qui dépasse 1 au delà de 2^{52} . Par conséquent il faut éviter de tester l'égalité entre deux flottants a et b mais plutôt tester une inégalité $|a-b| < \varepsilon$.



Exercice 9

En 1202, *Leonardo Fibonacci* a donné sans démonstration, dans son ouvrage *Liber Abaci* un algorithme permettant d'écrire toute fraction d'entiers positive $\frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q} \in]0;1[$ sous forme d'une somme de fractions égyptiennes, de numérateur 1:

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une fraction égyptienne. »

Il s'agit d'un algorithme glouton car à chaque étape, il réalise un choix localement optimal : la plus grande fraction égyptienne inférieure ou égale à la fraction restante.

grande fraction égyptienne inférieure ou égale à la fraction restante. Par exemple on a
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$
 ou $\frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$.

- 1. Appliquer cet algorithme à la main pour obtenir une décomposition de $\frac{2}{5}$ puis de $\frac{51}{105}$.
- **2.** On considère les deux fonctions de décomposition ci-après. Appeler ces fonctions avec les arguments 3/4 puis 2/5. Que peut-on observer? Comment l'expliquer?
- 3. On choisit désormais de représenter une fraction non pas sous forme d'approximation décimale (flottant en Python) mais sous la forme du couple d'entiers constitué par leur numérateur et leur dénominateur. Par exemple $\frac{4}{17} = \frac{p}{q}$ sera représenté par le couple d'entiers p = 4 et q = 17 et non par le flottant 0.23529411764705882.



- **4. a.** Soit p et q le numérateur et le dénominateur respectifs de la fraction au début d'une itération fixée de la boucle externe et soit n le dénominateur correspondant au choix glouton. Exprimer le numérateur et le dénominateur de la fraction restante en fonction de p, q et n. Tester les formules obtenues pour retrouver que $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}$.
 - **b.** Écrire une fonction decomposition3(p, q) qui implémente l'algorithme avec cette représentation des fractions.
 - c. Écrire un programme qui détermine le plus grand dénominateur et le n pour lequel il est atteint sur l'ensemble des décompositions calculées par l'algorithme pour les fractions $\frac{4}{n}$ avec $5 \le n \le 288$.
 - **d.** Tester l'appel decomposition 3 (4, 289). En cas d'erreur déboguer puis corriger le code. Indice : les calculs ne doivent manipuler que des entiers.

```
def decomposition1(x):
    decomp = []
    while x != 0:
        n = 1
        while 1/n > x:
        n += 1
        decomp.append(n)
        x = x - 1 / n
        print(x, decomp)
    return decomp
```

```
import math

def decomposition2(x):
    decomp = []
    while x != 0:
        n = math.ceil(1/x)
        decomp.append(n)
        x = x - 1 / n
        print(x, decomp)
    return decomp
```

Méthode

Pour la documentation Python sur les flottants lire l'article :

https://docs.python.org/fr/3.7/tutorial/floatingpoint.html.

• Le module sys permet d'obtenir des informations sur la précision de la représentation des flottants en Python (double précision sur 64 bits) :

On peut lire que les flottants représentables sont compris entre 10^{-308} et 10^{308} environ et que le plus petit écart entre deux flottants au voisinage de 1 est $2^{-52} \approx 2.220446049250313e - 16$.

• Le module decimal permet d'obtenir la représentation approchée d'un réel sous forme de flottant.