IV – Résultat le plus probable

On rappelle que, pour deux événements A et B, on note $A \setminus B$ l'événement selon lequel A est réalisé, mais pas B. En outre, si $\mathbf{P}[B] \neq 0$, on note $\mathbf{P}_B[A]$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On souhaite ici démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$. Dans ce but, on va démontrer la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1, \text{ on a } \mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1].$$

11) Démontrer que, si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$.

12) Démontrer $\mathscr{P}_1$.

On suppose maintenant que l'on dispose d'un entier $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie et d'un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

13) Pour tout entier ℓ compris entre 0 et $2n$, distinct de k et de $k+1$, on note X_ℓ l'événement selon lequel les trois boules de numéros k, $k+1$ et ℓ sont choisies dès la première sélection.

   a) Pourquoi, si $\ell > k+1$, a-t-on $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$?

   b) Donner des résultats analogues sur $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k]$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1]$ lorsque $\ell < k$.

   c) On note maintenant X l'événement selon lequel les deux boules de numéros k et $k+1$ sont choisies dès la première sélection. Démontrer que $\mathbf{P}_X[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_X[D_n = k+1]$.

14) Soit Y l'événement selon lequel l'une des boules de numéros k et $k+1$ est éliminée lors de la première sélection.

   a) Démontrer que $\mathbf{P}_{Y \setminus X}[D_n = k] = \mathbf{P}_{Y \setminus X}[D_n = k+1]$.

   b) En déduire que $\mathbf{P}_Y[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_Y[D_n = k+1]$.

15) Soit a, b et c les numéros des trois boules choisies lors de la première sélection, avec $a < b < c$.

   a) Soit G l'événement selon lequel $c < k$. Démontrer que $\mathbf{P}_G[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_G[D_n = k+1]$.

   b) Soit H l'événement selon lequel $a < k$ et $k+1 < c$. Démontrer que $\mathbf{P}_H[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_H[D_n = k+1]$.

   c) Soit I l'événement selon lequel $k+1 < a$. Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}_I[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_I[D_n = k+1]$.

16) Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$.

17) Démontrer $\mathscr{P}_n$.

Tournez la page S.V.P.