

- a) Démontrer que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k -forte ou k -faible.
 b) Démontrer que, si f est k -faible, alors g_k et h_k sont monotones.
 c) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ x & \text{si } 1 < x < 2; \\ 4x & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

Démontrer que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

- 9) On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I .
- a) Démontrer que, si $|f'(x)| \geq k \frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k -forte.
 b) Démontrer que, si $|f'(x)| \leq k \frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k -faible.
 c) Démontrer que les réciproques aux questions 9)a) et 9)b) sont vraies.

III – Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est « forte » s'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel f est k -forte, et que f est « faible » s'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel f est k -faible.

- 10) Démontrer que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ est faible.
 11) Démontrer que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont faibles.
 12) Démontrer à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.
 13) Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
 a) Démontrer que, si f et g sont faibles, la fonction $g \circ f$ est faible.
 b) Démontrer que, si f et g sont fortes, la fonction $g \circ f$ est forte.

IV – Application à la démonstration d'inégalités

- 14) Soit a , b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n \leq \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

- 15) Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions \cos et \sin sont dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de dérivées respectivement $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

La fonction \tan est définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}.$$