

# Automatismes en première 2022/2023

Frédéric Junier

Lycée du Parc  
1 Boulevard Anatole France  
69006 Lyon

12 septembre 2023

# Plan

- 1 Calcul
- 2 Calculs d'aire
- 3 Second degré
- 4 Dérivation locale
- 5 Dérivation Globale
- 6 Suites numériques
- 7 Exponentielle
- 8 Application du produit scalaire

## Automatisme 1 *thème : Puissances*

- 1 Écrire  $(3^2 \times 3^5)^4$  sous la forme d'une puissance de 3.
- 2 Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  tel que  $AB = 5$  et  $BC = 13$ , calculer la longueur  $AC$ .
- 3 Simplifier  $(2\sqrt{3})^4$
- 4 Simplifier  $\frac{4+\sqrt{60}}{2}$
- 5 Soit  $a$  et  $b$  des réels avec  $b \geq 0$ , simplifier  $\frac{a-\sqrt{b}}{2} - \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$
- 6 Développer et réduire  $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$

## Automatisme 2 thème : Fractions

Réduire au même dénominateur et simplifier les expressions suivantes définies pour l'indéterminée  $x$  ou  $n$ .

- $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $\frac{1}{n-4} - n$
- $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$
- $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$
- $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

## Automatisme 3 *thème : Factoriser*

Soit  $a$  un réel.

- Factoriser  $a^4 - 16$
- Factoriser  $a^2 - 1 + 3a - 3$  par  $a - 1$
- Factoriser  $2a^2 + 5a + 2$  par  $a + 2$
- Factoriser  $a^2 + a - 2$
- Factoriser  $a^2 + a - 6$

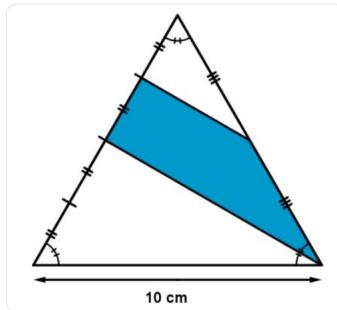
# Plan

- 1 Calcul
- 2 **Calculs d'aire**
- 3 Second degré
- 4 Dérivation locale
- 5 Dérivation Globale
- 6 Suites numériques
- 7 Exponentielle
- 8 Application du produit scalaire

## Automatisme 4 thème : Calcul d'aire

Quelle fraction du triangle équilatéral est recouverte par l'aire bleue ? Quelle est la valeur exacte de l'aire bleue ?

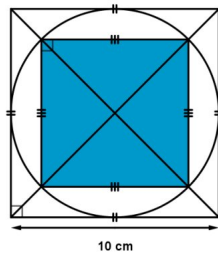
Source : Daniel Mentrard



## Automatisme 5 thème : Calcul d'aire

Quelle est la valeur exacte de l'aire bleue ?

Source : Daniel Mentrard

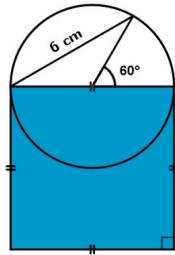




## Automatisme 6 *thème : Calcul d'aire*

Quelle est la valeur exacte de l'aire bleue ?

*Source : Daniel Mentrard*



# Plan

- 1 Calcul
- 2 Calculs d'aire
- 3 Second degré**
- 4 Dérivation locale
- 5 Dérivation Globale
- 6 Suites numériques
- 7 Exponentielle
- 8 Application du produit scalaire

## Automatisme 7 thème : Résoudre une équation du second degré

- Déterminer le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $x^2 = m$  si  $m > 0$
- Déterminer le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $x^2 = m$  si  $m = 0$
- Déterminer le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $x^2 = m$  si  $m < 0$
- Résoudre mentalement dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 = 9$
- Résoudre mentalement dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(x - 1)^2 = 9$
- Résoudre mentalement dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $16 - (x - 1)^2 = 7$

## Automatisme 8 *thème : Déterminer l'axe de symétrie d'une parabole*

- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation  $y = x^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation  $y = 3 - x^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation  $y = (x - 3)^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation  $y = (x + 3)^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation  $y = (3 - x)^2 - 1$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation  $y = -3x^2 - 6x + 1$

## Automatisme 9 *thème : Déterminer les racines d'un trinôme*

- Déterminer les racines du trinôme d'expression  $f(x) = -3(x+2)(1-x)$
- Déterminer les racines du trinôme d'expression  $f(x) = 16 - x^2$
- Déterminer les racines du trinôme d'expression  $f(x) = x^2 + 1$
- Déterminer les racines du trinôme d'expression  $f(x) = 16 - (x-1)^2$

## Automatisme 10 *thème : second degré*

Pour chacun des trinômes suivants déterminer le signe de son discriminant sans le calculer.

- $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = x^2 + 100$
- $f_2$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_2(x) = (x - 100)^2$
- $f_3$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_3(x) = (x + 100)^2$
- $f_4$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_4(x) = x^2 - 100$

## Automatisme 11 *thème : second degré*

Un problème :

*Un batelier descend une rivière de 120 km. Il la remonte ensuite et met un jour de plus, car, chaque jour, il fait 6 km de moins qu'en descendant.*

*Combien de jours a-t-il mis pour descendre ?*

## Automatisme 12 *thème : second degré*

- 1 Déterminer deux réels dont la somme est 2002 et le produit 2002.
- 2 Peut-on construire un rectangle d'aire  $7 \text{ cm}^2$  et de périmètre  $10,6 \text{ cm}$  ?



## Automatisme 13 *thème : équations avec changement d'inconnue*

- 1 Résoudre l'équation d'inconnue réelle  $x : x^2 - 2x = 3$ .
- 2 Avec le changement d'inconnue  $X = x^2$ , résoudre l'équation d'inconnue réelle  $x : x^4 - 2x^2 = 3$ .
- 3 Avec le changement d'inconnue  $X = \sqrt{x}$ , résoudre l'équation d'inconnue réelle  $x : x - 2\sqrt{x} = 3$ .
- 4 Avec le changement d'inconnue  $X = \frac{1}{x}$ , résoudre l'équation d'inconnue réelle  $x : \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} = 3$ .

# Plan

- 1 Calcul
- 2 Calculs d'aire
- 3 Second degré
- 4 Dérivation locale**
- 5 Dérivation Globale
- 6 Suites numériques
- 7 Exponentielle
- 8 Application du produit scalaire

## Automatisme 14 *thème : dérivation locale*

On considère la fonction affine  $f$   
telle que :

$$f(0) = 5 \text{ et } f(4) = 13.$$

En notant  $f(x) = mx + p$ , déterminer  $m$   
puis  $p$ .

## Automatisme 15 *thème : dérivation locale*

On considère la fonction affine  $g$   
telle que :

$$g(-2) = 7 \text{ et } g(2) = 11.$$

En notant  $g(x) = mx + p$ , déterminer  $m$   
puis  $p$ .

## Automatisme 16 *thème : dérivation locale*

Déterminer le coefficient directeur des droites suivantes.

1.  $\mathcal{D}_1$ , droite passant par  $A(-1 ; 5)$  et  $B(3 ; 7)$ .

2.  $\mathcal{D}_2$ , droite passant par  $C(7 ; 8)$  et  $D(-1 ; 8)$ .

3.  $\mathcal{D}_3$ , droite passant par  $E(4 ; 0,25)$  et  $F(13 ; 0,75)$ .

## Automatisme 17 *thème : dérivation locale*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty; 0[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

- Soit un réel  $a < 0$  et un réel  $h \neq 0$  tel que  $a + h < 0$ , démontrer que  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-h}{(a+h)a}$ .
- En déduire que  $f$  est dérivable en tout réel  $a < 0$  et déterminer l'expression de  $f'(a)$ .
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $-2$ .

## Automatisme 18 *thème : dérivation locale*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ .

- Démontrer que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 3$ .
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0

# Plan

- 1 Calcul
- 2 Calculs d'aire
- 3 Second degré
- 4 Dérivation locale
- 5 Dérivation Globale**
- 6 Suites numériques
- 7 Exponentielle
- 8 Application du produit scalaire



## Automatisme 19 *thème : dérivation*

Déterminer une expression de la fonction dérivée pour la fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $I$ .

- $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{5x^2+1}$  sur  $\mathbb{R}$  ;
- $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$  sur  $]0; +\infty[$  ;
- $f : x \mapsto (8-3x)^7$  sur  $]0; +\infty[$  ;
- $f : x \mapsto 4x - \frac{1}{x-3}$  sur  $]3; +\infty[$ .

## Automatisme 20 *thème : dérivation*

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[-8; 6]$  dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

$x$	$-8$	$-5$	$2$	$3$	$6$
$f'(x)$	4	0	-1	0	

- 1 Dresser le tableau de signes de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  sur l'intervalle  $[-8; 6]$ .
- 2 Dresser le tableau de variations d'une fonction  $F$  dérivable sur l'intervalle  $[-8; 6]$  et dont la dérivée est  $f$ .

## Automatisme 21 *thème : dérivation*

Déterminer une expression de la fonction dérivée pour la fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $I$ .

- $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$  sur  $]-\frac{1}{3}; +\infty[$  ;
- $f : x \mapsto (5x-3)\sqrt{x}$  sur  $]0; +\infty[$  ;
- $f : x \mapsto (605x-3)^{607}$  sur  $\mathbb{R}$  ;
- $f : x \mapsto \frac{1}{3} - \frac{2}{3-x}$  sur  $]3; +\infty[$ .

# Plan

- 1 Calcul
- 2 Calculs d'aire
- 3 Second degré
- 4 Dérivation locale
- 5 Dérivation Globale
- 6 Suites numériques**
- 7 Exponentielle
- 8 Application du produit scalaire

## Automatisme 22 *thème : suites*

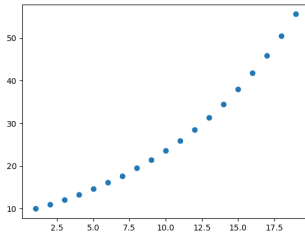
On considère deux modèles d'évolution d'un abonnement mensuel d'électricité dont le tarif évolue au premier janvier de chaque année.

- Modèle 1 : l'abonnement coûte 10 euros la première année puis augmente de 1,5 euros chaque année
  - Modèle 2 : l'abonnement coûte 10 euros la première année puis augmente de 8 % chaque année.
- ① Avec le modèle 1, quel est le prix de l'abonnement la deuxième année ? la troisième année ? la  $n^{\text{ième}}$  année ?
  - ② Avec le modèle 1, quel est le prix de l'abonnement la deuxième année ? la troisième année ? la  $n^{\text{ième}}$  année ?

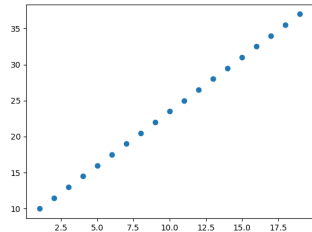
## Automatisme 23 *thème : suites*

On reprend les deux modèles d'évolution de la question précédente. Associez un graphique à chaque modèle.

**Graphique A**



**Graphique B**



## Automatisme 24 *thème : suites*

Pour tout  $n$  entier naturel, on définit l'expression  
 $u(n) = 2n^2 - 3n + 1$ .

- ① Calculer  $u(5)$ . Peut-on calculer  $u(-5)$  et  $u(2,4)$  et  $u(12/3)$  ?
- ② Soit  $m$  un entier naturel, exprimer  $u(m+1)$  en fonction de  $m$ .
- ③ Soit  $n$  un entier naturel, exprimer  $u(n+1)$  en fonction de  $n$ .
- ④ Soit  $m$  un entier strictement positif, exprimer  $u(m-1)$  en fonction de  $m$ .
- ⑤ Soit  $n$  un entier strictement positif, exprimer  $u(n-1)$  en fonction de  $n$ .

## Automatisme 25 *thème : suites*

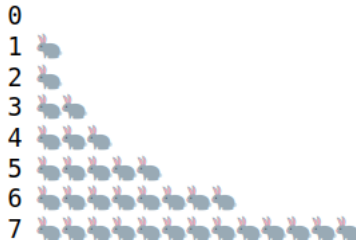
Pour tout  $n$  entier naturel, on définit l'expression  $v(n) = \frac{3^{2n}}{2^n}$ .

- 1 Exprimer  $v(1)$  et  $v(4)$  sous forme de fractions irréductibles.
- 2 Soit  $m$  un entier naturel, exprimer  $v(m+1)$  en fonction de  $m$ .
- 3 Soit  $n$  un entier naturel, exprimer  $\frac{v(n+1)}{v(n)}$  en fonction de  $n$ .



## Automatisme 26 *thème : suites*

Quel est le terme suivant de la suite logique ci-dessous ?



## Automatisme 27 thème : suites

- Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n^2 - n$ . Calculer  $u_4$  et  $u_7$  puis démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} - u_n = 2n$ .
- Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = 2u_n - 1$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_{30}$ .
- Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_0 = 1$  et  $u_n = u_{n-1} - n + 1$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_{30}$ .

## Automatisme 28 *thème : suites*

Pour tout  $n$  entier naturel, on définit l'expression  $v(n) = \frac{3^{2n}}{2^n}$ .

- ❶ Exprimer  $v(1)$  et  $v(4)$  sous forme de fractions irréductibles.
- ❷ Soit  $m$  un entier naturel, exprimer  $v(m+1)$  en fonction de  $m$ .
- ❸ Soit  $n$  un entier naturel, exprimer  $\frac{v(n+1)}{v(n)}$  en fonction de  $n$ .

## Automatisme 29 *thème : suites*

```
#On définit la suite (Un) par Un=f(n)
def f(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return 1/n**2
# n**2 signifie le carré de n
```

Interpréteur en ligne :

<https://repl.it/@Reformelycee/suite-explicite>.

- $u_0 = 1$  Vrai ou Faux ?
- $u_1 = 0,5$  Vrai ou Faux ?
- $u_{50} = 0,0004$  Vrai ou Faux ?

La suite n'est pas définie en 0 Vrai ou Faux ?

## Automatisme 30 *thème : suites*



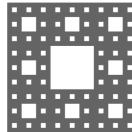
Étape 0 : 0 découpe



Étape 1 : 1 découpe



Étape 2 : 9 découpes



Étape 3 : 73 découpes

On poursuit cette suite logique de construction de figures.  
Combien de carrés blancs seront sur la figure de l'étape 12 ?

## Automatisme 31 *thème : suites*

Déterminer la nature (arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre) des suites ci-dessous définies par leur terme général :

- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = e^{3n+4}$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = e^3 n + 5$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \frac{e^{3n} e^{-4n}}{e^{-5}}$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = e^n + e^{2n}$ .

# Plan

- 1 Calcul
- 2 Calculs d'aire
- 3 Second degré
- 4 Dérivation locale
- 5 Dérivation Globale
- 6 Suites numériques
- 7 Exponentielle**
- 8 Application du produit scalaire

## Automatisme 32 *thème : Exponentielle*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- 1 Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$ .
- 2 Déterminer une expression de  $f'(x)$  pour  $x$  réel.
- 3 En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



# Plan

- 1 Calcul
- 2 Calculs d'aire
- 3 Second degré
- 4 Dérivation locale
- 5 Dérivation Globale
- 6 Suites numériques
- 7 Exponentielle
- 8 Application du produit scalaire

## Automatisme 33 thème : Application du produit scalaire

On se place dans un repère orthonormé.  
Dans chacun des cas suivants, dire si les  
vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

a.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

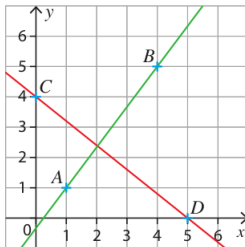
b.  $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

c.  $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

## Automatisme 34 thème : Application du produit scalaire

Dans le repère orthonormé ci-dessous, les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont des coordonnées entières.

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont-elles perpendiculaires ?



## Automatisme 35 *thème : Application du produit scalaire*

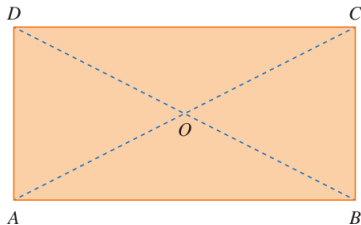
Soit  $\triangle ABC$  un triangle tel que  $AB = 4$ ,  $AC = 5$   
et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots$$

## Automatisme 36 thème : Application du produit scalaire

### QCM une seule réponse exacte

$ABCD$  est un rectangle de centre  $O$  tel que  $AB = 4$  et  $AD = 2$ .



$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB}$  vaut :

**a** 8

**b** -8

**c**  $-4\sqrt{5}$

## Automatisme 37 thème : Application du produit scalaire

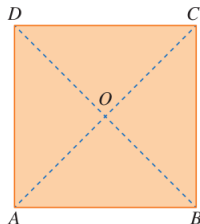
### VRAI ou FAUX

$ABCD$  est un carré  
de centre  $O$  et de côté 1.  
Indiquer si les égalités suivantes  
sont vraies ou fausses.

a.  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$

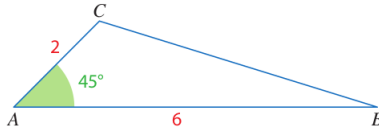
b.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

c.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$



## Automatisme 38 *thème : Application du produit scalaire*

Calculer la valeur exacte de la longueur  $BC$ .



## Automatisme 39 *thème : Application du produit scalaire*

### QCM une seule réponse exacte

$A$  et  $B$  sont deux points distincts.

L'ensemble des points  $M$  vérifiant  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$  :

- a** est une droite ;
- b** est un cercle ;
- c** n'est ni une droite ni un cercle.



## Automatisme 40 *thème : Application du produit scalaire*

### QCM une seule réponse exacte

$A$  et  $B$  sont deux points distincts.

L'ensemble des points  $M$  vérifiant  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$  :

- a** est une droite ;
- b** est un cercle ;
- c** n'est ni une droite ni un cercle.