Problème 3 : Que la force soit avec f !

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0,+\infty[$, et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.

On dit que la fonction f est « k-forte » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \geqslant 0.$$

On dit que f est « k-faible » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \leqslant 0.$$

I – Quelques exemples et propriétés

1) Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.
2) Démontrer que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0,1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.
3) Démontrer que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.
4) Démontrer que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$ est k-faible pour tout entier $k \geqslant 1$.
5) Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geqslant 1$?

II – Quelques critères de force et de faiblesse

6) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \leqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

7) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{\max\left(x^k, y^k\right)}{\min\left(x^k, y^k\right)} \leqslant \frac{\max\left(f(x), f(y)\right)}{\min\left(f(x), f(y)\right)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{\max\left(x^k, y^k\right)}{\min\left(x^k, y^k\right)} \geqslant \frac{\max\left(f(x), f(y)\right)}{\min\left(f(x), f(y)\right)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

8) On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par

$$g_k(x) = x^k f(x) \text{ et } h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}.$$