Problème 1 : Le début justifie la fin

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté $\mathscr{S}$, des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathscr{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1) Démontrer que toute suite appartenant à $\mathscr{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.
2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
3) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

4) Démontrer que $0 \in E_0$.
5) a) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que, si x est un élément de E_0, alors l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans E_0.
6) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
   b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.
   c) Démontrer que $1 \in E_\infty$.
7) Démontrer que, si x est un élément de E_∞, alors l'intervalle $[x, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

8) On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante. Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$ si $(a_n + b_n)/2 \in E_0$, et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ sinon.
   a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et ont même limite.
   b) Soit δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.
9) On pose $c_2 = \ln(\ln(2)), c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$ et $c_4 = \ln(\ln(2\ln(3\ln(4))))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\cdots\ln((\ell-1)\ln(\ell))\ldots))))$.
   Démontrer que, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, le nombre réel c_ℓ appartient à E_0.
10) Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$ converge.
11) Démontrer que $\delta \in E_\infty$.

Tournez la page S.V.P.

Problème 2 : La loi du milieu

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \dots, 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément ;
- si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathbf{P}[D_n = k]$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I – Étude des petits cas

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.

II – Valeurs extrêmes et symétrie

3) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 0]$.
4) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 1]$ en fonction de n.
5) Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbf{P}[D_n = i] = \mathbf{P}[D_n = 2n - i]$?
6) Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.

III – Comportement limite

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de D_n lorsque n tend vers $+\infty$. Afin de faciliter cette étude, on démontre tout d'abord un résultat préliminaire.

7) On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par
$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$$
pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Il est maintenant temps d'étudier la loi de D_n elle-même.

8) Déterminer, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$, la probabilité p_j que la boule de numéro j soit éliminée lors de la première sélection.
9) Démontrer que, si $n \geqslant 3$, alors $p_j \geqslant \dfrac{1}{2n}$ pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$.
10) On note M_n la plus grande des probabilités $\mathbf{P}[D_n = j]$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant 2n$. Démontrer que M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 : Que la force soit avec f !

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0,+\infty[$, et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.

On dit que la fonction f est « k-forte » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \geqslant 0.$$

On dit que f est « k-faible » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \leqslant 0.$$

I – Quelques exemples et propriétés

1) Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.
2) Démontrer que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0,1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.
3) Démontrer que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.
4) Démontrer que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$ est k-faible pour tout entier $k \geqslant 1$.
5) Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geqslant 1$?

II – Quelques critères de force et de faiblesse

6) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \leqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

7) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \leqslant \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \geqslant \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

8) On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par

$$g_k(x) = x^k f(x) \text{ et } h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}.$$

IV – Résultat le plus probable

On rappelle que, pour deux événements A et B, on note $A \setminus B$ l'événement selon lequel A est réalisé, mais pas B. En outre, si $\mathbf{P}[B] \neq 0$, on note $\mathbf{P}_B[A]$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On souhaite ici démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$. Dans ce but, on va démontrer la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1, \text{ on a } \mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1].$$

11) Démontrer que, si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$.

12) Démontrer $\mathscr{P}_1$.

On suppose maintenant que l'on dispose d'un entier $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie et d'un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

13) Pour tout entier ℓ compris entre 0 et $2n$, distinct de k et de $k+1$, on note X_ℓ l'événement selon lequel les trois boules de numéros k, $k+1$ et ℓ sont choisies dès la première sélection.

   a) Pourquoi, si $\ell > k+1$, a-t-on $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$?

   b) Donner des résultats analogues sur $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k]$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1]$ lorsque $\ell < k$.

   c) On note maintenant X l'événement selon lequel les deux boules de numéros k et $k+1$ sont choisies dès la première sélection. Démontrer que $\mathbf{P}_X[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_X[D_n = k+1]$.

14) Soit Y l'événement selon lequel l'une des boules de numéros k et $k+1$ est éliminée lors de la première sélection.

   a) Démontrer que $\mathbf{P}_{Y \setminus X}[D_n = k] = \mathbf{P}_{Y \setminus X}[D_n = k+1]$.

   b) En déduire que $\mathbf{P}_Y[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_Y[D_n = k+1]$.

15) Soit a, b et c les numéros des trois boules choisies lors de la première sélection, avec $a < b < c$.

   a) Soit G l'événement selon lequel $c < k$. Démontrer que $\mathbf{P}_G[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_G[D_n = k+1]$.

   b) Soit H l'événement selon lequel $a < k$ et $k+1 < c$. Démontrer que $\mathbf{P}_H[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_H[D_n = k+1]$.

   c) Soit I l'événement selon lequel $k+1 < a$. Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}_I[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_I[D_n = k+1]$.

16) Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$.

17) Démontrer $\mathscr{P}_n$.

Tournez la page S.V.P.

a) Démontrer que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k-forte ou k-faible.

b) Démontrer que, si f est k-faible, alors g_k et h_k sont monotones.

c) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1\,; \\ 4 & \text{si } x = 1\,; \\ x & \text{si } 1 < x < 2\,; \\ 4x & \text{si } 2 \leqslant x. \end{cases}$$

Démontrer que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

9) On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

a) Démontrer que, si $|f'(x)| \geqslant k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-forte.

b) Démontrer que, si $|f'(x)| \leqslant k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-faible.

c) Démontrer que les réciproques aux questions 9)a) et 9)b) sont vraies.

III – Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est « forte » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-forte, et que f est « faible » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-faible.

10) Démontrer que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est faible.

11) Démontrer que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ sont faibles.

12) Démontrer à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.

13) Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0,+\infty[$.

a) Démontrer que, si f et g sont faibles, la fonction $g \circ f$ est faible.

b) Démontrer que, si f et g sont fortes, la fonction $g \circ f$ est forte.

IV – Application à la démonstration d'inégalités

14) Soit a, b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

15) Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ de dérivées respectivement $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

La fonction tan est définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}.$$