Problème 1 : Le début justifie la fin

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté $\mathscr{S}$, des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathscr{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1) Démontrer que toute suite appartenant à $\mathscr{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.
2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
3) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

4) Démontrer que $0 \in E_0$.
5) a) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que, si x est un élément de E_0, alors l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans E_0.
6) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
   b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.
   c) Démontrer que $1 \in E_\infty$.
7) Démontrer que, si x est un élément de E_∞, alors l'intervalle $[x, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

8) On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante. Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$ si $(a_n + b_n)/2 \in E_0$, et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ sinon.
   a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et ont même limite.
   b) Soit δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.
9) On pose $c_2 = \ln(\ln(2)), c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$ et $c_4 = \ln(\ln(2\ln(3\ln(4))))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\cdots\ln((\ell-1)\ln(\ell))\ldots))))$.
   Démontrer que, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, le nombre réel c_ℓ appartient à E_0.
10) Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$ converge.
11) Démontrer que $\delta \in E_\infty$.

Tournez la page S.V.P.