Problème 2 : La loi du milieu

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \ldots, 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

— on tire trois boules simultanément ;

— si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b ;

— on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathbf{P}[D_n = k]$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I – Étude des petits cas

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.

II – Valeurs extrêmes et symétrie

3) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 0]$.
4) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 1]$ en fonction de n.
5) Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbf{P}[D_n = i] = \mathbf{P}[D_n = 2n - i]$?
6) Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.

III – Comportement limite

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de D_n lorsque n tend vers $+\infty$. Afin de faciliter cette étude, on démontre tout d'abord un résultat préliminaire.

7) On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Il est maintenant temps d'étudier la loi de D_n elle-même.

8) Déterminer, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$, la probabilité p_j que la boule de numéro j soit éliminée lors de la première sélection.
9) Démontrer que, si $n \geqslant 3$, alors $p_j \geqslant \dfrac{1}{2n}$ pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$.
10) On note M_n la plus grande des probabilités $\mathbf{P}[D_n = j]$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant 2n$. Démontrer que M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.