Vizsgatételek - 2016. tavaszi félév

Lineáris programozás

1. Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmusa.
2. A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.
3. Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.
4. A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).
5. Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).
6. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.
7. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

Matroidok

8. Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.
9. Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.
10. Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.
11. Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).
12. Matroidok összege. k-matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.
13. A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.
14. k-polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

Közelítő és ütemező algoritmusok

15. Polinomiális időben megoldható feladat fogalma, példák. Az NP, co-NP, NP-nehéz és NP-teljes problémaosztályok definíciója, viszonyaik, példák problémákra valamennyi osztályból. NP-nehéz feladatok polinomiális speciális esetei: algoritmus a maximális független ponthalmaz problémára és az élszínezési problémára páros gráfokon. Additív hibával közelítő algoritmusok speciális pont-, illetve élszínezési problémákra.
16. A Hamilton-kör probléma visszavezetése a leghosszabb kör probléma additív közelítésére.
    k-approximációs algoritmus fogalma, példák: két-két algoritmus a minimális lefogó ponthalmaz keresésére és a maximális páros részgráf keresésére. Minimális levelű, illetve maximális belső csúcsú feszítőfa keresése. Approximációs algoritmus az utóbbi feladatra (biz. nélkül).
17. A minimális lefogó ponthalmaz visszavezetése a halmazfedési feladatra, a halmazfedési feladat közelítése, éles példa. Közelítő algoritmus a Steiner-fa problémára, éles példa.
18. A Hamilton-kör probléma visszavezetése az általános utazóügynök probléma k-approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a mtrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmusa.

19. Teljesen polinomiális approximációs séma fogalma. A részösszeg probléma, bonyolultsága. Teljesen polinomiális approximációs séma a részösszeg problémára.
20. Ütemezési feladatok típusai. Az $1|prec|C_{max}$ és az $1||\sum C_j$ feladat. Approximációs algoritmusok a $P||C_{max}$ feladatra: listás ütemezés tetszőleges sorrendben, éles példa tetszőleges számú gép esetére. Approximációs algoritmus a $P|prec|C_{max}$ feladatra (biz. nélkül), példák: az LPT sorrend, illetve a leghosszabb út szerinti ütemezés sem jobb, mint $(2 - \frac{1}{m})$-approximáció. A $P|prec, p_i = 1|C_{max}$ feladat, Hu algoritmusa (biz. nélkül).

Megbízható hálózatok tervezése

21. Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma, Menger irányítatlan gráfokra és élösszefüggőségre vonatkozó két tétele (biz. nélkül). $\lambda(G)$ meghatározása folyamatok segítségével négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel.
22. $\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader-tétele, Nagamochi és Ibaraki algoritmusa.
23. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráfok keresése. A probléma NP-nehézsége, Khuller-Vishkin algoritmus (biz. nélkül).

Hálózatelméleti alkalmazások

24. Kirchoff tételei a klasszikus villamos hálózatok analízisére.
25. Kirchoff eredményeinek általánosítása transzformátorokat vagy girátorokat is tartalmazó hálózatokra (biz. nélkül). Algoritmusok a feltételek ellenőrzésére.
26. Kirchoff eredményeinek általánosítása: szükséges feltétel tetszőleges lineáris sok-kapukat is tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságára. Villamos hálózatok duálisa.

Statikai alkalmazások

27. Rúdszerkezetek, merevségi mátrix, merevség, egyszerű rácsos tartók, Cremona-Maxwell diagramok.
28. Minimális merev rúdszerkezetek általános helyzetben, Laman tétele (biz. nélkül), Lovász és Yemini tétele.
29. Síkbeli négyzetrácsok és egyszintes épületek átlós merevítése.

Jó tanulást!

3. Tétel

Témakörök: Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.

Farkas-lemma 1.

Tetszőleges A, b esetén az alábbi rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása:

- (1) $Ax \leq b$
- (2) $yA = 0$, $y \geq 0$, $yb < 0$

Farkas-lemma 2.

Tetszőleges A, b esetén az alábbi rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása:

- (1) $Ax = b$, $x \geq 0$
- (2) $yA \geq 0$, $yb < 0$

Megjegyzés: a tétel (1) állítása felfogható egyenlőtlenség rendszerként is: $Ax \leq b$, $(-A)x \leq (-b)$, $(-E)x \leq 0$. Erre is alkalmazható a Farkas-lemma 1. alakja.

Következmény

Tetszőleges A, b esetén az alábbi rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása:

- (1) $Ax = b$
- (2) $yA = 0$, $yb \neq 0$

Célfüggvény korlátossága

Tegyük fel, hogy $Ax \leq b$ megoldható, c tetszőleges adott vektor. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

- (1) az $Ax \leq b$ megoldáshalmazán cx felülről korlátos,

– (2) nincs megoldása az $Az \leq 0$, $cz > 0$ rendszernek,

– (3) van megoldása az $yA = c$, $y \geq 0$ rendszernek.

4. Tétel

Témakörök: A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Drakula Művek példája $c = (12{,}12)$ célfüggvény mellett:

Primál feladat	Duális feladat	Duális ekvivalens
$\max\{12x_1+12x_2\}$	$\min\{18y_1+16y_2\}$	$\min\{18y_1+16y_2\}$
ha	ha	ha
$2x_1+3x_2 \leq 18$	$2y_1+4y_2-y_3=12$	$2y_1+4y_2 \geq 12$
$4x_1+x_2 \leq 16$	$3y_1+y_2-y_4=12$	$3y_1+y_2 \geq 12$
$x_1 \geq 0$	$y_1 \geq 0$	$y_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$	$y_2 \geq 0$	$y_2 \geq 0$
	$y_3 \geq 0$	
	$y_4 \geq 0$	

Megjegyzés: y_3 és y_4 elhagyása a rendszerből nem befolyásolja a megoldhatóságot, sem a célfüggvényértéket. Az ekvivalens alak már könnyen ábrázolható grafikusan a síkon. Ha a primál feladatban elő van írva a változók nemnegatív értékűsége, akkor a duális esetében sem szabad erről megfeledkezni!

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $\max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*

2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*

3. *további ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*

2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*

3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

6. Tétel

Témakörök: A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.

Definíció (Illeszkedési mátrix)**.** *Legyen n pontú gráfnak e éle és definiáljuk az $n \times e$ méretű $B(G) = b_{ij}$ mátrix elemeit, hogy:*

Tétel. *Minden irányított gráf illeszkedési mátrixa TU.*

Bizonyítás (Teljes indukció)**.** *Válasszunk M $k \times k$-as részmátrixot.*

– *ha $k = 1$, akkor nyilvánvaló az állítás, hisz minden elem 0 vagy ± 1*

– *ha $k \geq 2$ és:*

- *M-nek van olyan oszlopa, melyben legfeljebb egy nemnulla elem van, akkor fejtsük ki $\det M$-et eszerint az oszlop szerint, ekkor az indukciós feltétel szerint készen vagyunk.*
- *egyébként minden oszlopban egy $+1$ és egy -1 elem van, ekkor M sorainak összege nullvektor, a determináns 0.*

Tétel. *Páros gráf illeszkedési mátrixa TU.*

Bizonyítás. *Irányítsuk $G(A, B, E)$ páros gráf éleit úgy, hogy minden él A-ból B-be mutasson. Ekkor az előző tétel szerint $B(G)$ TU. A B-hez tartozó sorokat szorozzuk -1-gyel, de ez nem változtat TU tulajdonságon.*

8. Tétel

Témakörök: Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.

Mohó algoritmus

Olyan algoritmus, amely a következők szerint működik:

- Adott: E,F és w, ahol F nem üres halmazrendszer, leszálló, w nemnegatív.
- Kiindulás: $0 \in F$ megengedett megoldásból.

Ha a pillanatnyi megoldás $X \subset E$, és létezik olyan elem, melyet X-hez hozzávéve az új halmaz is F-ben van, akkor legyen e olyan elem, melyre:
$w(e) = max\{w(e^{'}) : e^{'} \in E - X : X + e^{'} \in F\}$ és legyen az új halmaz $X + e$. Ha nincs hozzávehető elem, akkor készen vagyunk.

Matroid

Definíció. *Egy E alaphalmazon értelmezett, nemüres, leszálló halmazrendszer metroid, ha tetszőleges nemnegatív súlyfüggvényre a mohó algoritmus optimális - maximális súlyú - megoldást ad.*

Fügetlenségi aximómák

Legyen F olyan halmazrendszer E-n, melyre teljesül az alábbi 2 feltétel:

- (F1) $\emptyset \in F$,
- (F1) ha $Y \subseteq X$ és $X \in F$, akkor $Y \in F$.

Ekkor $M = (E, F)$ akkor és csak akkor matroid, ha teljesül az alábbi:

- (F3) Ha $X, Y \in F$ és $|X| > |Y|$, akkor létezik olyan $x \in X - Y$, melyre $Y + x \in F$.

Alapfogalmak

- **Független halmazok:** $M = (E, F)$ matroidban az alaphalmaz F-hez tartozó részhalmazai.
- **Összefüggő halmaz:** ha $X \subseteq E$ és $X \notin F$, akkor X összefüggő.
- **Bázisok:** a maximális (nem bővíthető) független halmazok.
- **Körök:** a tartalmazásra nézve minimális összefüggő halmazok.
- **Hurok:** az egyelemű kör.
- **Rang:** $X \subseteq E$ halmaz ranja $r(X)$ egy X-beli maxfüggetlen halmaz mérete.
- **Rangfüggvény:** $r : 2^E \to \mathbb{Z}$ függvény (a matroid rangja t, ha $r(E) = t$).

Lemma. *$M = (E, F)$ matroid, $A \subseteq E$. Ha X_1 és X_2 maxfüggetlen halmazok A-ban, akkor $|X_1| = |X_2|$.*

Példák

- **Grafikus matroid:** G gráf által indukált matroid, melynek független halmazai a G-beli erdők. Jele: $M(G)$, másik neve: körmatroid.
- **Lineáris matroid:** valamely mátrix oszlopvektorai által indukált matroid. Másik neve: mátrixmatroid.
- **Uniform matroid:** F az n elemű E alaphalmaz összes legfeljebb k elemű halmazából áll ($0 \leq k \leq n$). Ekkor (E, F) matroid. Jele: $U_{n,k}$, $U_{n,n}$ a teljes vagy szabad matroid, $U_{n,0}$ a triviális matroid.

Tétel. *Egy uniform matroid grafikus, ha $U_{n,0}$, $U_{n,1}$, $U_{n,n-1}$ vagy $U_{n,n}$ alakú.*

Rangfüggvény szubmodularitása

Legyen R egy matroid rangfüggvénye, ekkor:

- (R1) $r(\emptyset) = 0$,
- (R2) $r(X) \leq |X|$, minden $X \subseteq E$-re,
- (R3) $r(Y) \leq r(X)$, ha $Y \subseteq X$,
- (R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$ minden $X, Y \subseteq E$ halmazpárra.

Fordítva: ha r egy egészértékű függvény E részhalmazain, melyre (R1)-(R4) teljesülnek, akkor r egy $M = (E, F)$ matroid rangfüggvénye, ahol: $F = \{H : r(H) = |H|\}$

9. Tétel

Témakörök: Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.

Mohó algoritmus (röviden)

Legyen $M = (E, F)$ matroid, $w : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív súlyfüggvény. Keressük a maximális összsúlyú független halmazt, azaz: $\max\limits_{X \in F} \sum\limits_{e \in X} w(e)$.
A mohó algoritmus tetszőleges matroidra és súlyfüggvényre optimális (maximális összsúlyú) megoldást ad.

Matroid megadása

Függetlenségi axiómákkal (lásd: előző tétel).

Megadás bázisokkal

- (B1) $B \neq \emptyset$,
- (B2) $|X_1| = |X_2|$ minden $X_1, X_2 \in B$-re,
- (B3) ha $X_1, X_2 \in B$ és $e_1 \in X_1$, akkor létezik olyan $e_2 \in X_2$, melyre $X_1 - e_1 + e_2 \in B$.

Fordítva: ha (E, B) egy halmazrendszer a (B1), (B2) és (B3) tulajdonságokkal, akkor $M = (E, F)$ matroidot alkot, ahol: $F = \{H : H \subseteq B\}$ valamely $B \in B$-re.

Megadás rangfüggvénnyel

Lásd: korábban

Egyéb fogalmak

Definíció (Lezárt)**.** *(E, F) matroidban egy $X \subseteq E$ halmaz lezártja egy maximális olyan halmaz, mely tartalmazza X-et és rangja megegyezik X rangjával. Jele: $\overline{X}$.*

Definíció (Zárt halmaz)**.** *egy X halmaz zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Definíció (Izomorfia)**.** *Két matroid izomorf, ha létezik olyan bijekció a két alaphalmaz között, mely független halmazt független halmazba visz. Jele: $M \equiv M'$.*

Duális

$M = (E, F)$, és M duálisának alaphalmaza legyen E, és egy $X \subseteq E$ halmaz akkor legyen az új halmazrendszer eleme, ha $E - X$ tartalmaz M-beli bázist. Ezt a halmazt jelöljük F^*-al.

Definíció. *$M = (E, F)$ matroid bázisai $B = \{B_1, B_2, \cdots, E - B_n\}$. Ebből már adódik F^*.*

Tétel (Duális matroid tétel)**.** *Az $M^* = (E, F^*)$ matroid.*
FYI: $(M^*)^* \equiv M$

Példa

$M = U_{5,2}$:

- M-ben minden legfeljebb 2-elemű halmaz független,
- a duálisban azon halmazok függetlenek, amelyek komplementerei tartalmaznak M-beli bázist, azaz 2-elemű halmazt,
- ezek a legfeljebb 3-elemű halmazok, tehát $M^* = U_{5,3}$.

Duális rangfüggvény

$r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$

10. Tétel

Témakörök: Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.

Elhagyás/törlés

$M = (E, F)$ a kiindulási matroidunk.
Akkor tartozzon egy halmaz F'-höz, ha F-hez tartozik és részhalmaza $E - X$-nek.
$M \setminus X = (E - X, F')$ matroid.
Példa: grafikus matroidoknál élek egy halmazának törlése.

Összehúzás

Legyen $M = (E, r)$ matroid az r rangfüggvénnyel, és $X \subseteq E$.
Ekkor az $E - X$ alaphalmazon az $R(Y) = r(X \cup Y) - r(X)$ rangfüggvénnyel definiált $(E - X, R)$ matroid az M-ből az X összehúzásával áll elő. Jele: M/X.

Lemma. *R egy matroid rangfüggvénye az $E - X$ alaphalmazon.*

Tétel. *Az elhagyások és az összehúzások felcserélhetők. Minden M matroid N minora (elhagyások és összehúzások sorozata) előáll $N = (M \setminus A)/B$ alakban, ahol A és B diszjunkt halmazok.*

Tétel. *Az elhagyás és összehúzás duális műveletek:*
$M = (E, F)$ matroidban $X \subseteq E$
Ekkor: $(M/X)^* = M^* \setminus X$ *és* $(M \setminus X)^* = M^*/X$

Direkt összeg

Legyen $M_1 = (E_1, F_1)$ és $M_2 = (E_2, F_2)$ két matroid a diszjunk E_1 és E_2 nemüres alaphalmazokon. Ekkor a két matroid direkt összege az $N = M_1 + M_2$ matroid, melynek alaphalmaza $E_1 \cup E_2$ és egy $X \subseteq E_1 \cup E_2$ halmaz pontosan akkor független N-ben, ha $X \cap E_1$ és $X \cap E_2$ független M_1-ben és M_2-ben.

Összefüggőség

- Egy matroid összefüggő, ha nem áll elő minorok direkt összegeként.
- Egy grafikus matroid akkor és csak akkor összefüggő, ha a gráf kétszeresen összefüggő.

T-test feletti reprezentáció

Az $M = (E, F)$ matroid reprezentálható (koordinátázható) a T test felett, ha létezik olyan mátrix, amelynek oszlopai T feletti vektorok és az ezek által meghatározott lineáris matroid izomorf M-mel. (E minden eleme T feletti vektor.)

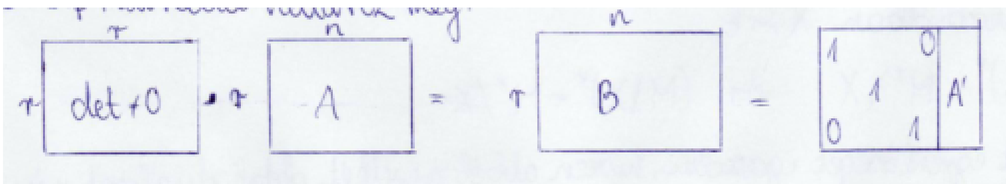
Lineáris matroid: M lineáris, ha létezik olyan F test, ami felett M reprezentálható.
Bináris matroid: a kételemű test felett reprezentálható matroid.
Reguláris matroid: tetszőleges test felett reprezentálható matroid.

Megjegyzés: M matroidnak több reprezentációja is lehet egy test felett.

Konstrukció

Legyen $r = r(E)$ és $n = |E|$. $M(E, F)$ leírható egy $r \times n$-es A mátrixszal, melynek sorai lineárisan függetlenek. r sor mindenképp szükséges, ha pedig több sorból áll a mátrix, kiválaszthatunk r lineárisan függetlent, és elhagyhatjuk a maradékot: a matroid nem változik.

A kapott mátrix egy alkalmas nemszinguláris $r \times r$-es mátrixszal való szorzással leképezhető úgy, hogy a bal oldalán egységmátrix legyen. A transzformált mátrix izomorf matroidot határoz meg.



Tétel. *Grafikus matroidok tetszőleges test felett reprezentálhatók.*

Tétel. *Ha $M = (E, F)$ reprezentálható az F test felett, akkor M^* is.*

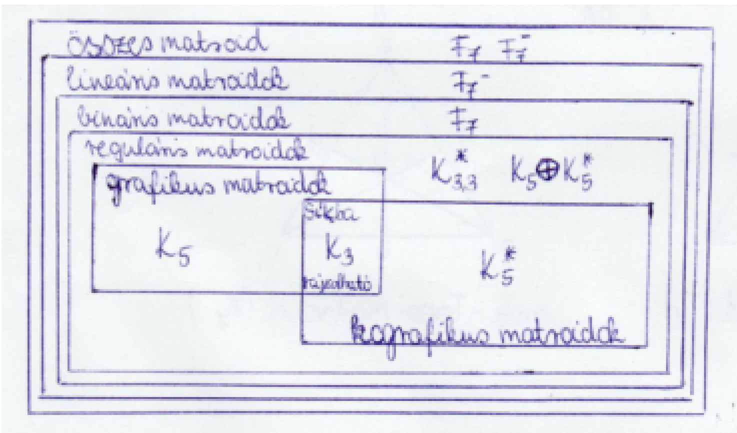
Tétel. *Ha $M = (E, F)$ reprezentálható az F test felett, akkor minden minora is reprezentálható.*

11. Tétel

Témakörök: Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).

Matroid osztályok

Grafikus vagy körmatroid: G gráf által indukált matroid, melyben $E = \{G \text{ élei}\}$, $F = \{G\text{-beli erdők}\}$.
Kografikus: grafikus matroid duálisa kografikus.
Reguláris: tetszőleges test felett reprezentálható.
Bináris: a kételemű (bináris) test felett reprezentálható.
Lineáris: van olyan test, ami felett reprezentálható.



Tétel. *Grafikus matroid bármely test felett reprezentálható (reguláris).*

Tétel. *Ha $M = (E, F)$ reprezentálható az F test felett, akkor M^* is. $\Rightarrow$ A kografikus matroidok is regulárisak!*

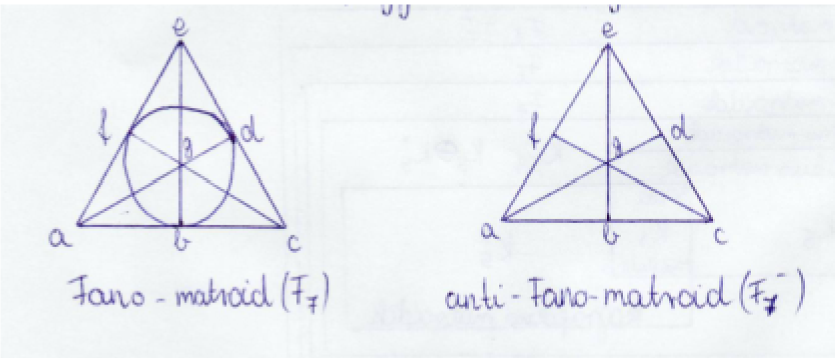
Karakterisztika

Ha az F testhez van olyan pozitív egész k, melyre teljesül, hogy az $x + x + \cdots + x$ (k tagú) összeg értéke minden $x \in F$ elemre zérus, akkor a legkisebb ilyen k szám a test karakterisztikája. (Minden véges testnek van karakterisztikája, ami mindig egy prím.)

Fano matroid

Adott a hételemű halmaz: $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

- minden legfeljebb kételemű halmaz független
- minden legalább négyelemű halmaz összefüggő
- a háromeleműek közül azok függetlenek, melyeket nem köt össze vonal az ábrán



Tutte tételei

- M matroid bináris $\Leftrightarrow$ nem tartalmaz minorként $U_{4,2}$ matroidot.
- M matroid reguláris $\Leftrightarrow$ nem tartalmaz minorként $U_{4,2}$, F_7 és F_7^* matroidokat.
- M matroid grafikus $\Leftrightarrow$ nem tartalmaz minorként $U_{4,2}$; F_7, F_7^*, $M^*(K_5)$ és $M^*(K_{3,3})$ matroidokat.

12. Tétel

Témakörök: Matroidok összege. k-matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.

Matroidok összege

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok összege $M_1 \vee M_2 = (E, F')$, ahol $X \in F' \Leftrightarrow \exists X_1, X_2$, hogy $X = X_1 \cup X_2$ és $X_1 \in F_1$, valamint $X_2 \in F_2$. (Azaz előáll egy F_1-beli és egy F_2-beli elem uniójaként.)

Tétel. *A függetlenségi aximómák segítségével bizonyítható, hogy matroidok összege is matroid. ($F(3)$-mat kell belátni.)*

Matroidok metszete

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok metszete: $M_1 \cap M_2 = (E, F_1 \cap F_2)$ halmazrendszer.

Tétel. *Két matroid metszete nem feltétlen matroid.*

(Súlyozott) matroid metszet probléma (k-MMP vagy $\mathbf{MMP_k}$)

Két matroid metszetének egy minimális méretű vagy súlyú elemét keressük.
Adott: k db matroid közös alaphalmazon: $M_i = (E, F_i), i = 1,2,\ldots,k$
Kérdés: létezik-e valamely konstans p-re p méretű halmaz $\cap F_i$-ben?
Azaz: $\exists$-e $X \subseteq E : |X| \geq p : X \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i$

Bonyolultság

- $k = 1,2$ esetén: polinomiális (Mohó algoritmus)
- $k \geq 3$ esetén: NP-teljes (Hamilton-út keresése)

13. Tétel

Témakörök: A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.

---

k-matroid partíciós probléma (k-MPP vagy $\mathrm{MPP_k}$)

Adott: k db matroid: $M_i = (E, F_i), i = 1{,}2, \cdots, k$
Kérdés: a matroidok összege a szabadmatroidot adja-e, vagyis E előáll-e $E_1 \cap \cdots \cap E_k$ alakban úgy, hogy $E_i \in F_i \forall i$-re.
Feltehető, hogy az E_i halmazok diszjunktak, ezért hívják a feladatott MPP-nak.

Bonyolultság

- $\mathrm{MPP_k}$ NP-beli, mert tanú rá egy partícionálás és a tanú polinom (lineáris) iidőben ellenőrizhető.
- $\mathrm{MPP_k}$ co-NP-beli, mert tanú rá egy $X \subseteq E$ halmaz, ami biztosan összefüggő az összegben, azaz $|X| > \sum r_i(X)$.
- $\mathrm{MPP_k}$ P-beli.

Algoritmus

Induljunk ki $\forall i E_i = \emptyset$ állapotból. Ekkor $E_i \in F_i$.
Az E_i halmazokat addig bővítjük, amíg az uniójuk E nem lesz, vagy ha nem bővíthető, mutatunk egy X tanút.

A bővítéshez bevezetünk egy $n + k$ pontú irányított segédgráfot, melynek:

- csúcsai E elemei $\cup\{p_1, \cdots, p_k\}$. p_i az E_i partíció segédpontja
- $(x \to p_i) \in E(G)$, ha $x \notin E_i$ és $E_i \cup \{x\} \in F_i$
  Az ilyen típusú élek azt jelképezik, hogy az E_i partícióba felvehető x a függetlenség megsértése nélkül.
- $(x \to y) \in E(G)$, ha $\exists i : x \notin E_i$, $y \in E_i$, $E_i \cup \{x\} \notin F_i$, de $E_i \cup \{x\} - \{y\} \in F_i$
  Az ilyen típusú élek azt jelentik, hogy az E_i partícióban az y elem kicserélhető x-re a függetlenség megsértése nélkül.

Lépések

- 1. Megkeressük a legrövidebb irányított utat $(E - \cup E_i)$-ből $\{p_1, \cdots, p_k\}$-ba.
- 2. Ha van ilyen út, javítunk az út mentén, azaz végrehajtjuk a cseréket. $\cup E_i$ mérete 1-gyel nő.
  Azért kell a legrövidebb úton végigmenni, mert különben nem garantált, hogy a cserék során nem sérül a partíciók függetlensége.
- 3. Különben STOP, nemleges a válasz, és a tanú az $(E - \cup E_i)$-ből irányított úton elérhető pontok halmaza.

2-matroid-metszet probléma

$\mathbf{MMP_k}$ (emlék)

Adott: k db matroid: $M_i = (E, F_i), i = 1{,}2, \cdots, k$ és egy p egész szám
Kérdés: létezik-e F_i-knek legalább p méretű közös elemük?

Tétel. *$MMP_2 \in P$*

Definíció (Csonkolt)**.** *$M = (E, F)$ csonkoltja $M' = (E, F')$, ahol F' az F elemeit tartalmazza a bázisok kivételével. A matroid rangja ettől 1-gyel csökken.*

14. Tétel

Témakörök: k-polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

---

k-polimatroid rangfüggvény

$f : 2^E \to \mathbb{N}$ egy k-polimatroid rangfüggvény, ha teljesülnek rá az alábbi axiómák:

- (1) $r(\emptyset) = 0$,
- (2) $r(\{x\}) \leq k$, $\forall x \in E$ elemre ,
- (3) $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$,
- (4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$.

Általánosítása a matroid rangfüggvénynek, értsd:
$k = 1$: speciális eset: $r(\{x\}) \leq 1$, ekkor R egy matroid rangfüggvénye.
Megjegyzés: $r(\{x\}) \leq k$-val ekvivalens az $r(X) \leq k|X|$, illetve az $r(X \cap Y) \leq r(X) + k|Y|$ axióma.

k-polimatroid matching probléma (k-PMM)

Definíció. *$X \subseteq E$ k-polimatroid matching, ha $r(X) = k|X|$ egyenlőség fennáll.*

Definíció. *k-polimatroid matching probléma:*
Adott: r és $t \in \mathbb{N}$
Kérdés: van-e legalább T elemű k-polimatroid matching?

Speciális esetek

- Input: tetszőleges G gráf, $t \in \mathbb{N}$. Kérdés: $\nu(G) \geq t$?
  2-PMM-ként megfogalmazva: $r(X) = |X$ által lefedett pontok halmaza $| \leq 2|X|$
  A 2-matching épp a közönséges párosításnak felel meg (innen az elnevezés).
- Input: két maroid, $t \in \mathbb{N}$. Kérdés: létezik-e $X \subseteq E$, $|X| \geq t$, $X \in F_1 \cap F_2$ (matroid metszet probléma)?
  2-PMM-ként megfogalmazva: $f(X) = r_1(X) + r_2(X) \leq 2|X|$

- Az utolsó két probléma közös speciális esete: páros gráfban $\nu(G) \geq t$?
  Megoldás: a 2. probléma leképezése a 3.-ra:
  M_1 grafikus matroidban e_1 és e_2 párhuzamos élek, ha e_1-nek és e_2-nek felül van egy közös pontja. M_2-t hasonlóan értelmezzük a páros gráf alsó ponthalmazán.

Bonyolultság

- $k \geq 3$ eset: NP-nehéz, mert speciális esetként tartalmazza a k-MMP-t.
- $k = 2$ eset: "matroidpárosítási probléma", speciális esetként tartalmazza 2-MMP-t.

Tétel. *A matroidpárosítási probléma (2-PMM) teljes általánosságban nem oldható meg polinomidőben. A teljes általánosságban kifejezés a függvény megadási módjára vonatkozik: azt jelenti, hogy bármely $X \subseteq E$ részhalmazra egységnyi idő alatt megtudhatjuk $r(X)$ értékét, de ettől eltekintve a 2-polimatroid rangfüggvényről semmit sem tudunk.*

Lovász László tétele

"Legfontosabb speciális eset."

Tétel. *Vegyünk egy $k \times 2n$ méretű valós M mátrixot, oszlopai legyenek rendre $M = (a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_b)$ majd definiáljunk az $I = \{1{,}2, \cdots, n\}$ indexhalmazon egy r függvényt úgy, hogy $X \subseteq I$ esetén legyen $r(X)$ az $\cup_{i \in X}\{a_i, b_i\}$ vektorhalmaz által kifeszített altér dimenziója. Könnyű látni, hogy ilyenkor r egy 2-polimatroid rangfüggvény.*

Tétel. *A matroidpárosítási probléma polinomidőben megoldható, ha a 2-polimatroid rangfüggvény egy adott valós elemű M mátrixból a fent leírt módon nyerhető.*