

Vizsgatételek - 2016. tavaszi félév

Lineáris programozás

1. Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmus.
2. A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.
3. Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.
4. A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).
5. Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).
6. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.
7. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

Matroidok

8. Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.
9. Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.
10. Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.
11. Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).
12. Matroidok összege. k -matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.
13. A k -matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.
14. k -polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

Közelítő és ütemező algoritmusok

15. Polinomiális időben megoldható feladat fogalma, példák. Az NP, co-NP, NP-nehéz és NP-teljes problémaosztályok definíciója, viszonyaik, példák problémákra valamennyi osztályból. NP-nehéz feladatok polinomiális speciális esetei: algoritmus a maximális független pontthalmaz problémára és az élszínezési problémára páros gráfokon. Additív hibával közelítő algoritmusok speciális pont-, illetve élszínezési problémákra.
16. A Hamilton-kör probléma visszavezetése a leghosszabb kör probléma additív közelítésére. k -approximációs algoritmus fogalma, példák: két-két algoritmus a minimális lefogó pontthalmaz keresésére és a maximális páros részgráf keresésére. Minimális levelű, illetve maximális belső csúcsú feszítőfa keresése. Approximációs algoritmus az utóbbi feladatra (biz. nélkül).
17. A minimális lefogó pontthalmaz visszavezetése az általános utazóügynök probléma k -approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmus.
18. A Hamilton-kör probléma visszavezetése az általános utazóügynök probléma k -approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmus.

19. Teljesen polinomiális approximációs séma fogalma. A részösszeg probléma, bonyolultsága. Teljesen polinomiális approximációs séma a részösszeg problémára.
20. Ütemezési feladatok típusai. Az $1|prec|C_{max}$ és az $1||\sum C_j$ feladat. Approximációs algoritmusok a $P||C_{max}$ feladatra: listás ütemezés tetszőleges sorrendben, éles példa tetszőleges számú gép esetére. Approximációs algoritmus a $P|prec|C_{max}$ feladatra (biz. nélkül), példák: az LPT sorrend, illetve a leghosszabb út szerinti ütemezés sem jobb, mint $(2 - \frac{1}{m})$ -approximáció. A $P|prec, p_i = 1|C_{max}$ feladat, Hu algoritmus (biz. nélkül).

Megbízható hálózatok tervezése

21. Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma, Menger irányítatlan gráfokra és élösszefüggőségre vonatkozó két tétele (biz. nélkül). $\lambda(G)$ meghatározása folyamatok segítségével négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel.
22. $\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader-tétele, Nagamochi és Ibaraki algoritmus.
23. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráfok keresése. A probléma NP-nehézsége, Khuller-Vishkin algoritmus (biz. nélkül).

Hálózatelméleti alkalmazások

24. Kirchoff tételei a klasszikus villamos hálózatok analizésére.
25. Kirchoff eredményeinek általánosítása transzformátorokat vagy girátorokat is tartalmazó hálózatokra (biz. nélkül). Algoritmusok a feltételek ellenőrzésére.
26. Kirchoff eredményeinek általánosítása: szükséges feltétel tetszőleges lineáris sok-kapukat is tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságára. Villamos hálózatok duálisa.

Statikai alkalmazások

27. Rúdszerkezetek, merevségi mátrix, merevség, egyszerű rácsos tartók, Cremona-Maxwell diagramok.
28. Minimális merev rúdszerkezetek általános helyzetben, Laman tétele (biz. nélkül), Lovász és Yemini tétele.
29. Síkbeli négyzetrácsok és egyszintes épületek átlós merevítése.

Jó tanulást!

6. Tétel

Témakörök: A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.

Definíció (Illeszkedési mátrix). Legyen n pontú gráfnak e éle és definiáljuk az $n \times e$ méretű $B(G) = b_{ij}$ mátrix elemeit, hogy:

Tétel. Minden irányított gráf illeszkedési mátrixa TU .

Bizonyítás (Teljes indukció). Válasszunk M $k \times k$ -as részmátrixot.

- ha $k = 1$, akkor nyilvánvaló az állítás, hisz minden elem 0 vagy ± 1
- ha $k \geq 2$ és:
 - M -nek van olyan oszlopa, melyben legfeljebb egy nemnulla elem van, akkor fejtsük ki $\det M$ -et eszerint az oszlop szerint, ekkor az indukciós feltétel szerint készen vagyunk.
 - egyébként minden oszlopban egy $+1$ és egy -1 elem van, ekkor M sorainak összege nullvektor, a determináns 0 .

Tétel. Páros gráf illeszkedési mátrixa TU .

Bizonyítás. Irányítsuk $G(A, B, E)$ páros gráf éleit úgy, hogy minden él A -ból B -be mutasson. Ekkor az előző tétel szerint $B(G)$ TU . A B -hez tartozó sorokat szorozzuk -1 -gyel, de ez nem változtat TU tulajdonságon.

12. Tétel

Témakörök: Matroidok összege. k -matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.

Matroidok összege

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok összege $M_1 \vee M_2 = (E, F')$, ahol $X \in F' \Leftrightarrow \exists X_1, X_2$, hogy $X = X_1 \cup X_2$ és $X_1 \in F_1$, valamint $X_2 \in F_2$. (Azaz előáll egy F_1 -beli és egy F_2 -beli elem uniójaként.)

Tétel. *A függetlenségi axiómák segítségével bizonyítható, hogy matroidok összege is matroid. ($F(3)$ -mat kell belátni.)*

Matroidok metszete

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok metszete: $M_1 \cap M_2 = (E, F_1 \cap F_2)$ halmazrendszer.

Tétel. *Két matroid metszete nem feltétlen matroid.*

(Súlyozott) matroid metszet probléma (k-MMP vagy MMP_k)

Két matroid metszetének egy minimális méretű vagy súlyú elemét keressük.

Adott: k db matroid közös alaphalmazon: $M_i = (E, F_i), i = 1, 2, \dots, k$

Kérdés: létezik-e valamely konstans p -re p méretű halmaz $\cap F_i$ -ben?

Azaz: \exists -e $X \subseteq E : |X| \geq p : X \in \bigcap_{i=1}^k F_i$

Bonyolultság

- $k = 1, 2$ esetén: polinomiális (Mohó algoritmus)
- $k \geq 3$ esetén: NP-teljes (Hamilton-út keresése)