Vizsgatételek - 2016. tavaszi félév

Lineáris programozás

1. Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmusa.
2. A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.
3. Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.
4. A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).
5. Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).
6. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.
7. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

Matroidok

8. Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.
9. Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.
10. Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.
11. Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).
12. Matroidok összege. k-matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.
13. A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.
14. k-polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

Közelítő és ütemező algoritmusok

15. Polinomiális időben megoldható feladat fogalma, példák. Az NP, co-NP, NP-nehéz és NP-teljes problémaosztályok definíciója, viszonyaik, példák problémákra valamennyi osztályból. NP-nehéz feladatok polinomiális speciális esetei: algoritmus a maximális független ponthalmaz problémára és az élszínezési problémára páros gráfokon. Additív hibával közelítő algoritmusok speciális pont-, illetve élszínezési problémákra.
16. A Hamilton-kör probléma visszavezetése a leghosszabb kör probléma additív közelítésére.
k-approximációs algoritmus fogalma, példák: két-két algoritmus a minimális lefogó ponthalmaz keresésére és a maximális páros részgráf keresésére. Minimális levelű, illetve maximális belső csúcsú feszítőfa keresése. Approximációs algoritmus az utóbbi feladatra (biz. nélkül).
17. A minimális lefogó ponthalmaz visszavezetése az általános utazóügynök probléma k-approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmusa.
18. A Hamilton-kör probléma visszavezetése az általános utazóügynök probléma k-approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a mtrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmusa.

19. Teljesen polinomiális approximációs séma fogalma. A részösszeg probléma, bonyolultsága. Teljesen polinomiális approximációs séma a részösszeg problémára.
20. Ütemezési feladatok típusai. Az $1|prec|C_{max}$ és az $1||\sum C_j$ feladat. Approximációs algoritmusok a $P||C_{max}$ feladatra: listás ütemezés tetszőleges sorrendben, éles példa tetszőleges számú gép esetére. Approximációs algoritmus a $P|prec|C_{max}$ feladatra (biz. nélkül), példák: az LPT sorrend, illetve a leghosszabb út szerinti ütemezés sem jobb, mint $(2 - \frac{1}{m})$-approximáció. A $P|prec, p_i = 1|C_{max}$ feladat, Hu algoritmusa (biz. nélkül).

Megbízható hálózatok tervezése

21. Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma, Menger irányítatlan gráfokra és élösszefüggőségre vonatkozó két tétele (biz. nélkül). $\lambda(G)$ meghatározása folyamatok segítségével négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel.
22. $\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader-tétele, Nagamochi és Ibaraki algoritmusa.
23. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráfok keresése. A probléma NP-nehézsége, Khuller-Vishkin algoritmus (biz. nélkül).

Hálózatelméleti alkalmazások

24. Kirchoff tételei a klasszikus villamos hálózatok analízisére.
25. Kirchoff eredményeinek általánosítása transzformátorokat vagy girátorokat is tartalmazó hálózatokra (biz. nélkül). Algoritmusok a feltételek ellenőrzésére.
26. Kirchoff eredményeinek általánosítása: szükséges feltétel tetszőleges lineáris sok-kapukat is tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságára. Villamos hálózatok duálisa.

Statikai alkalmazások

27. Rúdszerkezetek, merevségi mátrix, merevség, egyszerű rácsos tartók, Cremona-Maxwell diagramok.
28. Minimális merev rúdszerkezetek általános helyzetben, Laman tétele (biz. nélkül), Lovász és Yemini tétele.
29. Síkbeli négyzetrácsok és egyszintes épületek átlós merevítése.

Jó tanulást!

1. Tétel

Témakörök: Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmusa.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

2. Tétel

Témakörök: A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

3. Tétel

Témakörök: Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

4. Tétel

Témakörök: A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

5. Tétel

Témakörök: Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

6. Tétel

Témakörök: A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.

Definíció (Illeszkedési mátrix)**.** *Legyen n pontú gráfnak e éle és definiáljuk az $n \times e$ méretű $B(G) = b_{ij}$ mátrix elemeit, hogy:*

Tétel. *Minden irányított gráf illeszkedési mátrixa TU.*

Bizonyítás (Teljes indukció)**.** *Válasszunk M $k \times k$-as részmátrixot.*

– *ha $k = 1$, akkor nyilvánvaló az állítás, hisz minden elem 0 vagy ± 1*

– *ha $k \geq 2$ és:*

- *M-nek van olyan oszlopa, melyben legfeljebb egy nemnulla elem van, akkor fejtsük ki $\det M$-et eszerint az oszlop szerint, ekkor az indukciós feltétel szerint készen vagyunk.*
- *egyébként minden oszlopban egy $+1$ és egy -1 elem van, ekkor M sorainak összege nullvektor, a determináns 0.*

Tétel. *Páros gráf illeszkedési mátrixa TU.*

Bizonyítás. *Irányítsuk $G(A, B, E)$ páros gráf éleit úgy, hogy minden él A-ból B-be mutasson. Ekkor az előző tétel szerint $B(G)$ TU. A B-hez tartozó sorokat szorozzuk -1-gyel, de ez nem változtat TU tulajdonságon.*

7. Tétel

Témakörök: A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

8. Tétel

Témakörök: Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.

Mohó algoritmus

Olyan algoritmus, amely a következők szerint működik:

– Adott: E,F és w, ahol F nem üres halmazrendszer, leszálló, w nemnegatív.

– Kiindulás: $0 \in F$ megengedett megoldásból.

Ha a pillanatnyi megoldás $X \subset E$, és létezik olyan elem, melyet X-hez hozzávéve az új halmaz is F-ben van, akkor legyen e olyan elem, melyre:
$w(e) = max\{w(e^{'}) : e^{'} \in E - X : X + e^{'} \in F\}$ és legyen az új halmaz $X + e$. Ha nincs hozzávehető elem, akkor készen vagyunk.

Matroid

Definíció. *Egy E alaphalmazon értelmezett, nemüres, leszálló halmazrendszer metroid, ha tetszőleges nemnegatív súlyfüggvényre a mohó algoritmus optimális - maximális súlyú - megoldást ad.*

Fügetlenségi aximómák

Legyen F olyan halmazrendszer E-n, melyre teljesül az alábbi 2 feltétel:

– (F1) $\emptyset \in F$,

– (F1) ha $Y \subseteq X$ és $X \in F$, akkor $Y \in F$.

Ekkor $M = (E, F)$ akkor és csak akkor matroid, ha teljesül az alábbi:

– (F3) Ha $X, Y \in F$ és $|X| > |Y|$, akkor létezik olyan $x \in X - Y$, melyre $Y + x \in F$.

Alapfogalmak

- **Független halmazok:** $M = (E, F)$ matroidban az alaphalmaz F-hez tartozó részhalmazai.
- **Összefüggő halmaz:** ha $X \subseteq E$ és $X \notin F$, akkor X összefüggő.
- **Bázisok:** a maximális (nem bővíthető) független halmazok.
- **Körök:** a tartalmazásra nézve minimális összefüggő halmazok.
- **Hurok:** az egyelemű kör.
- **Rang:** $X \subseteq E$ halmaz ranja $r(X)$ egy X-beli maxfüggetlen halmaz mérete.
- **Rangfüggvény:** $r : 2^E \to \mathbb{Z}$ függvény (a matroid rangja t, ha $r(E) = t$).

Lemma. *$M = (E, F)$ matroid, $A \subseteq E$. Ha X_1 és X_2 maxfüggetlen halmazok A-ban, akkor $|X_1| = |X_2|$.*

Példák

- **Grafikus matroid:** G gráf által indukált matroid, melynek független halmazai a G-beli erdők. Jele: $M(G)$, másik neve: körmatroid.
- **Lineáris matroid:** valamely mátrix oszlopvektorai által indukált matroid. Másik neve: mátrixmatroid.
- **Uniform matroid:** F az n elemű E alaphalmaz összes legfeljebb k elemű halmazából áll ($0 \leq k \leq n$). Ekkor (E, F) matroid. Jele: $U_{n,k}$, $U_{n,n}$ a teljes vagy szabad matroid, $U_{n,0}$ a triviális matroid.

Tétel. *Egy uniform matroid grafikus, ha $U_{n,0}$, $U_{n,1}$, $U_{n,n-1}$ vagy $U_{n,n}$ alakú.*

Rangfüggvény szubmodularitása

Legyen R egy matroid rangfüggvénye, ekkor:

- (R1) $r(\emptyset) = 0$,
- (R2) $r(X) \leq |X|$, minden $X \subseteq E$-re,
- (R3) $r(Y) \leq r(X)$, ha $Y \subseteq X$,
- (R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$ minden $X, Y \subseteq E$ halmazpárra.

Fordítva: ha r egy egészértékű függvény E részhalmazain, melyre (R1)-(R4) teljesülnek, akkor r egy $M = (E, F)$ matroid rangfüggvénye, ahol: $F = \{H : r(H) = |H|\}$

9. Tétel

Témakörök: Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.

Mohó algoritmus (röviden)

Legyen $M = (E, F)$ matroid, $w : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív súlyfüggvény. Keressük a maximális összsúlyú független halmazt, azaz: $\max\limits_{X \in F} \sum\limits_{e \in X} w(e)$.
A mohó algoritmus tetszőleges matroidra és súlyfüggvényre optimális (maximális összsúlyú) megoldást ad.

Matroid megadása

Függetlenségi axiómákkal (lásd: előző tétel).

Megadás bázisokkal

- (B1) $B \neq \emptyset$,
- (B2) $|X_1| = |X_2|$ minden $X_1, X_2 \in B$-re,
- (B3) ha $X_1, X_2 \in B$ és $e_1 \in X_1$, akkor létezik olyan $e_2 \in X_2$, melyre $X_1 - e_1 + e_2 \in B$.

Fordítva: ha (E, B) egy halmazrendszer a (B1), (B2) és (B3) tulajdonságokkal, akkor $M = (E, F)$ matroidot alkot, ahol: $F = \{H : H \subseteq B\}$ valamely $B \in B$-re.

Megadás rangfüggvénnyel

Lásd: korábban

Egyéb fogalmak

Definíció (Lezárt)**.** *(E, F) matroidban egy $X \subseteq E$ halmaz lezártja egy maximális olyan halmaz, mely tartalmazza X-et és rangja megegyezik X rangjával. Jele: $\overline{X}$.*

Definíció (Zárt halmaz)**.** *egy X halmaz zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Definíció (Izomorfia)**.** *Két matroid izomorf, ha létezik olyan bijekció a két alaphalmaz között, mely független halmazt független halmazba visz. Jele: $M \equiv M'$.*

Duális

$M = (E, F)$, és M duálisának alaphalmaza legyen E, és egy $X \subseteq E$ halmaz akkor legyen az új halmazrendszer eleme, ha $E - X$ tartalmaz M-beli bázist. Ezt a halmazt jelöljük F^*-al.

Definíció. *$M = (E, F)$ matroid bázisai $B = \{B_1, B_2, \cdots, E - B_n\}$. Ebből már adódik F^*.*

Tétel (Duális matroid tétel)**.** *Az $M^* = (E, F^*)$ matroid.*
FYI: $(M^*)^* \equiv M$

Példa

$M = U_{5,2}$:

- M-ben minden legfeljebb 2-elemű halmaz független,
- a duálisban azon halmazok függetlenek, amelyek komplementerei tartalmaznak M-beli bázist, azaz 2-elemű halmazt,
- ezek a legfeljebb 3-elemű halmazok, tehát $M^* = U_{5,3}$.

Duális rangfüggvény

$r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$

10. Tétel

Témakörök: Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

- NP-beli: tanú egy ilyen x
- co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre
- (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

- Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors
- Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú
- Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

11. Tétel

Témakörök: Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

12. Tétel

Témakörök: Matroidok összege. k-matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.

Matroidok összege

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok összege $M_1 \vee M_2 = (E, F^{'})$, ahol $X \in$ $\in F^{'} \Leftrightarrow \exists X_1, X_2$, hogy $X = X_1 \cup X_2$ és $X_1 \in F_1$, valamint $X_2 \in F_2$. (Azaz előáll egy F_1-beli és egy F_2-beli elem uniójaként.)

Tétel. *A függetlenségi aximómák segítségével bizonyítható, hogy matroidok összege is matroid. ($F(3)$-mat kell belátni.)*

Matroidok metszete

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok metszete: $M_1 \cap M_2 = (E, F_1 \cap F_2)$ halmazrendszer.

Tétel. *Két matroid metszete nem feltétlen matroid.*

(Súlyozott) matroid metszet probléma (k-MMP vagy $\mathbf{MMP_k}$)

Két matroid metszetének egy minimális méretű vagy súlyú elemét keressük.
Adott: k db matroid közös alaphalmazon: $M_i = (E, F_i), i = 1{,}2, \ldots, k$
Kérdés: létezik-e valamely konstans p-re p méretű halmaz $\cap F_i$-ben?
Azaz: $\exists$-e $X \subseteq E : |X| \geq p : X \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i$

Bonyolultság

- $k = 1{,}2$ esetén: polinomiális (Mohó algoritmus)
- $k \geq 3$ esetén: NP-teljes (Hamilton-út keresése)

13. Tétel

Témakörök: A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

14. Tétel

Témakörök: k-polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt