Vizsgatételek - 2016. tavaszi félév

Lineáris programozás

1. Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmusa.
2. A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.
3. Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.
4. A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).
5. Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).
6. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.
7. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

Matroidok

8. Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.
9. Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.
10. Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.
11. Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).
12. Matroidok összege. k-matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.
13. A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.
14. k-polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

Közelítő és ütemező algoritmusok

15. Polinomiális időben megoldható feladat fogalma, példák. Az NP, co-NP, NP-nehéz és NP-teljes problémaosztályok definíciója, viszonyaik, példák problémákra valamennyi osztályból. NP-nehéz feladatok polinomiális speciális esetei: algoritmus a maximális független ponthalmaz problémára és az élszínezési problémára páros gráfokon. Additív hibával közelítő algoritmusok speciális pont-, illetve élszínezési problémákra.
16. A Hamilton-kör probléma visszavezetése a leghosszabb kör probléma additív közelítésére.
k-approximációs algoritmus fogalma, példák: két-két algoritmus a minimális lefogó ponthalmaz keresésére és a maximális páros részgráf keresésére. Minimális levelű, illetve maximális belső csúcsú feszítőfa keresése. Approximációs algoritmus az utóbbi feladatra (biz. nélkül).
17. A minimális lefogó ponthalmaz visszavezetése az általános utazóügynök probléma k-approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmusa.
18. A Hamilton-kör probléma visszavezetése az általános utazóügynök probléma k-approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a mtrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmusa.

19. Teljesen polinomiális approximációs séma fogalma. A részösszeg probléma, bonyolultsága. Teljesen polinomiális approximációs séma a részösszeg problémára.

20. Ütemezési feladatok típusai. Az $1|prec|C_{max}$ és az $1||\sum C_j$ feladat. Approximációs algoritmusok a $P||C_{max}$ feladatra: listás ütemezés tetszőleges sorrendben, éles példa tetszőleges számú gép esetére. Approximációs algoritmus a $P|prec|C_{max}$ feladatra (biz. nélkül), példák: az LPT sorrend, illetve a leghosszabb út szerinti ütemezés sem jobb, mint $(2-\frac{1}{m})$-approximáció. A $P|prec, p_i = 1|C_{max}$ feladat, Hu algoritmusa (biz. nélkül).

Megbízható hálózatok tervezése

21. Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma, Menger irányítatlan gráfokra és élösszefüggőségre vonatkozó két tétele (biz. nélkül). $\lambda(G)$ meghatározása folyamatok segítségével négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel.

22. $\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader-tétele, Nagamochi és Ibaraki algoritmusa.

23. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráfok keresése. A probléma NP-nehézsége, Khuller-Vishkin algoritmus (biz. nélkül).

Hálózatelméleti alkalmazások

24. Kirchoff tételei a klasszikus villamos hálózatok analízisére.

25. Kirchoff eredményeinek általánosítása transzformátorokat vagy girátorokat is tartalmazó hálózatokra (biz. nélkül). Algoritmusok a feltételek ellenőrzésére.

26. Kirchoff eredményeinek általánosítása: szükséges feltétel tetszőleges lineáris sok-kapukat is tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságára. Villamos hálózatok duálisa.

Statikai alkalmazások

27. Rúdszerkezetek, merevségi mátrix, merevség, egyszerű rácsos tartók, Cremona-Maxwell diagramok.

28. Minimális merev rúdszerkezetek általános helyzetben, Laman tétele (biz. nélkül), Lovász és Yemini tétele.

29. Síkbeli négyzetrácsok és egyszintes épületek átlós merevítése.

Jó tanulást!

1. Tétel

Témakörök: Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmusa.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

2. Tétel

Témakörök: A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

3. Tétel

Témakörök: Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

- NP-beli: tanú egy ilyen x
- co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre
- (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

- Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors
- Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú
- Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

4. Tétel

Témakörök: A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

5. Tétel

Témakörök: Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

- NP-beli: tanú egy ilyen x
- co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre
- (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

- Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors
- Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú
- Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

6. Tétel

Témakörök: A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.

Definíció (Illeszkedési mátrix)**.** *Legyen n pontú gráfnak e éle és definiáljuk az $n \times e$ méretű $B(G) = b_{ij}$ mátrix elemeit, hogy:*

Tétel. *Minden irányított gráf illeszkedési mátrixa TU.*

Bizonyítás (Teljes indukció)**.** *Válasszunk M $k \times k$-as részmátrixot.*

– *ha $k = 1$, akkor nyilvánvaló az állítás, hisz minden elem 0 vagy ± 1*

– *ha $k \geq 2$ és:*

- *M-nek van olyan oszlopa, melyben legfeljebb egy nemnulla elem van, akkor fejtsük ki $\det M$-et eszerint az oszlop szerint, ekkor az indukciós feltétel szerint készen vagyunk.*
- *egyébként minden oszlopban egy $+1$ és egy -1 elem van, ekkor M sorainak összege nullvektor, a determináns 0.*

Tétel. *Páros gráf illeszkedési mátrixa TU.*

Bizonyítás. *Irányítsuk $G(A, B, E)$ páros gráf éleit úgy, hogy minden él A-ból B-be mutasson. Ekkor az előző tétel szerint $B(G)$ TU. A B-hez tartozó sorokat szorozzuk -1-gyel, de ez nem változtat TU tulajdonságon.*

7. Tétel

Témakörök: A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

- NP-beli: tanú egy ilyen x
- co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre
- (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

- Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors
- Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú
- Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

8. Tétel

Témakörök: Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

9. Tétel

Témakörök: Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

10. Tétel

Témakörök: Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

11. Tétel

Témakörök: Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a* $max\{cx : Ax \leq b\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ *primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a* $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ *duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek:* $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

- NP-beli: tanú egy ilyen x
- co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre
- (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

- Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors
- Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú
- Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

12. Tétel

Témakörök: Matroidok összege. k-matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.

Matroidok összege

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok összege $M_1 \vee M_2 = (E, F^{'})$, ahol $X \in$ $\in F^{'} \Leftrightarrow \exists X_1, X_2$, hogy $X = X_1 \cup X_2$ és $X_1 \in F_1$, valamint $X_2 \in F_2$. (Azaz előáll egy F_1-beli és egy F_2-beli elem uniójaként.)

Tétel. *A függetlenségi aximómák segítségével bizonyítható, hogy matroidok összege is matroid. ($F(3)$-mat kell belátni.)*

Matroidok metszete

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok metszete: $M_1 \cap M_2 = (E, F_1 \cap F_2)$ halmazrendszer.

Tétel. *Két matroid metszete nem feltétlen matroid.*

(Súlyozott) matroid metszet probléma (k-MMP vagy $\mathbf{MMP_k}$)

Két matroid metszetének egy minimális méretű vagy súlyú elemét keressük.
Adott: k db matroid közös alaphalmazon: $M_i = (E, F_i), i = 1{,}2, \ldots, k$
Kérdés: létezik-e valamely konstans p-re p méretű halmaz $\cap F_i$-ben?
Azaz: $\exists$-e $X \subseteq E : |X| \geq p : X \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i$

Bonyolultság

- $k = 1{,}2$ esetén: polinomiális (Mohó algoritmus)
- $k \geq 3$ esetén: NP-teljes (Hamilton-út keresése)

13. Tétel

Témakörök: A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

- NP-beli: tanú egy ilyen x
- co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre
- (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

- Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors
- Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú
- Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

14. Tétel

Témakörök: k-polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Tétel. *TODO*

Dualitás tétel

Tétel. *Ha a $max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : Ax \leq b\} = min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$*

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. *Ha a $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:*

1. *a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,*
2. *a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,*
3. *továbbá ezek megegyeznek: $max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$*

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

– NP-beli: tanú egy ilyen x

– co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre

– (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

– Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors

– Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú

– Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt