

Vizsgatételek - 2016. tavaszi félév

Lineáris programozás

1. Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmus.
2. A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.
3. Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.
4. A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).
5. Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound). Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal (biz. nélkül).
6. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.
7. A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra: a maximális folyam, a minimális költségű folyam és a többtermékes folyam feladatai, ezek hatékony megoldhatósága a tört-, illetve egészértékű esetben.

Matroidok

8. Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.
9. Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.
10. Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.
11. Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).
12. Matroidok összege. k -matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.
13. A k -matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.
14. k -polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

Közelítő és ütemező algoritmusok

15. Polinomiális időben megoldható feladat fogalma, példák. Az NP, co-NP, NP-nehéz és NP-teljes problémaosztályok definíciója, viszonyaik, példák problémákra valamennyi osztályból. NP-nehéz feladatok polinomiális speciális esetei: algoritmus a maximális független pontthalmaz problémára és az élszínezési problémára páros gráfokon. Additív hibával közelítő algoritmusok speciális pont-, illetve élszínezési problémákra.
16. A Hamilton-kör probléma visszavezetése a leghosszabb kör probléma additív közelítésére. k -approximációs algoritmus fogalma, példák: két-két algoritmus a minimális lefogó pontthalmaz keresésére és a maximális páros részgráf keresésére. Minimális levelű, illetve maximális belső csúcsú feszítőfa keresése. Approximációs algoritmus az utóbbi feladatra (biz. nélkül).
17. A minimális lefogó pontthalmaz visszavezetése az általános utazóügynök probléma k -approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmus.
18. A Hamilton-kör probléma visszavezetése az általános utazóügynök probléma k -approximációs megoldására. Közelítő algoritmusok a metrikus utazóügynök problémára, Christofides algoritmus.

19. Teljesen polinomiális approximációs séma fogalma. A részösszeg probléma, bonyolultsága. Teljesen polinomiális approximációs séma a részösszeg problémára.
20. Ütemezési feladatok típusai. Az $1|prec|C_{max}$ és az $1||\sum C_j$ feladat. Approximációs algoritmusok a $P||C_{max}$ feladatra: listás ütemezés tetszőleges sorrendben, éles példa tetszőleges számú gép esetére. Approximációs algoritmus a $P|prec|C_{max}$ feladatra (biz. nélkül), példák: az LPT sorrend, illetve a leghosszabb út szerinti ütemezés sem jobb, mint $(2 - \frac{1}{m})$ -approximáció. A $P|prec, p_i = 1|C_{max}$ feladat, Hu algoritmus (biz. nélkül).

Megbízható hálózatok tervezése

21. Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma, Menger irányítatlan gráfokra és élösszefüggőségre vonatkozó két tétele (biz. nélkül). $\lambda(G)$ meghatározása folyamatok segítségével négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel.
22. $\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader-tétele, Nagamochi és Ibaraki algoritmus.
23. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráfok keresése. A probléma NP-nehézsége, Khuller-Vishkin algoritmus (biz. nélkül).

Hálózatelméleti alkalmazások

24. Kirchoff tételei a klasszikus villamos hálózatok analizésére.
25. Kirchoff eredményeinek általánosítása transzformátorokat vagy girátorokat is tartalmazó hálózatokra (biz. nélkül). Algoritmusok a feltételek ellenőrzésére.
26. Kirchoff eredményeinek általánosítása: szükséges feltétel tetszőleges lineáris sok-kapukat is tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságára. Villamos hálózatok duálisa.

Statikai alkalmazások

27. Rúdszerkezetek, merevségi mátrix, merevség, egyszerű rácsos tartók, Cremona-Maxwell diagramok.
28. Minimális merev rúdszerkezetek általános helyzetben, Laman tétele (biz. nélkül), Lovász és Yemini tétele.
29. Síkbeli négyzetrácsok és egyszintes épületek átlós merevítése.

Jó tanulást!

3. Tétel

Témakörök: Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.

Farkas-lemma 1.

Tetszőleges A, b esetén az alábbi rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása:

- (1) $Ax \leq b$
- (2) $yA = 0, y \geq 0, yb < 0$

Farkas-lemma 2.

Tetszőleges A, b esetén az alábbi rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása:

- (1) $Ax = b, x \geq 0$
- (2) $yA \geq 0, yb < 0$

Megjegyzés: a tétel (1) állítása felfogható egyenlőtlenség rendszerként is: $Ax \leq b$, $(-A)x \leq (-b)$, $(-E)x \leq 0$. Erre is alkalmazható a Farkas-lemma 1. alakja.

Következmény

Tetszőleges A, b esetén az alábbi rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása:

- (1) $Ax = b$
- (2) $yA = 0, yb \neq 0$

Célfüggvény korlátossága

Tegyük fel, hogy $Ax \leq b$ megoldható, c tetszőleges adott vektor. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

- (1) az $Ax \leq b$ megoldáshalmazán cx felülről korlátos,

- (2) nincs megoldása az $Az \leq 0, cz > 0$ rendszernek,
- (3) van megoldása az $yA = c, y \geq 0$ rendszernek.

4. Tétel

Témakörök: A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).

LP feladatok alakjai

Drakula Művek példája $c = (12, 12)$ célfüggvény mellett:

<u>Primal feladat</u>	<u>Duális feladat</u>	<u>Duális ekvivalens</u>
$\max \{12x_1 + 12x_2\}$	$\min \{18y_1 + 16y_2\}$	$\min \{18y_1 + 16y_2\}$
ha	ha	ha
$2x_1 + 3x_2 \leq 18$	$2y_1 + 4y_2 - y_3 = 12$	$2y_1 + 4y_2 \geq 12$
$4x_1 + x_2 \leq 16$	$3y_1 + y_2 - y_4 = 12$	$3y_1 + y_2 \geq 12$
$x_1 \geq 0$	$y_1 \geq 0$	$y_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$	$y_2 \geq 0$	$y_2 \geq 0$
	$y_3 \geq 0$	
	$y_4 \geq 0$	

Megjegyzés: y_3 és y_4 elhagyása a rendszerből nem befolyásolja a megoldhatóságot, sem a célfüggvényértéket. Az ekvivalens alak már könnyen ábrázolható grafikusán a síkon. Ha a primál feladatban elő van írva a változók nemnegatív értékűsége, akkor a duális esetében sem szabad erről megfeledkezni!

Dualitás tétel

Tétel. Ha a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:

1. a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,
2. a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,

3. továbbá ezek megegyeznek: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Megjegyzés: (2)-re szükség van, mert egy számhalmaz felülről korlátosságából általában nem következik, hogy létezik maximuma.

Ekvivalens alak

Tétel. Ha a $\max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos:

1. a $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos,
2. a primál programnak létezik maximuma és a duális programnak létezik minimuma,
3. továbbá ezek megegyeznek: $\max\{cx : AX \leq b, x \geq 0\} = \min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$

Bonyolultság

LP feladat, eldöntési problémaként megfogalmazva

Van-e az $Ax \leq b$ feltételt kielégítő x vektorok között olyan, amelyre $cx \geq t$?

- NP-beli: tanú egy ilyen x
- co-NP-beli: ha $cx < t$, akkor a duális megoldása (y) tanú erre
- (a tanúk polinomiális méretűek)

Módszerek

- Szimplex módszer (1947, Dantzig): nem polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során gyors
- Ellipszoid módszer (1979, Hacsijan): polinomiális, de a gyakorlati alkalmazások során lassú
- Belső pontos módszerek (1984, Karmarkar): polinomiális, a gyakorlati alkalmazások során eredményes, de nem elterjedt

6. Tétel

Témakörök: A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása páros gráfokra és intervallumrendszerekre: Egerváry tétele, intervallumrendszerek egyenletes színezése.

Definíció (Illeszkedési mátrix). Legyen n pontú gráfnak e éle és definiáljuk az $n \times e$ méretű $B(G) = b_{ij}$ mátrix elemeit, hogy:

Tétel. Minden irányított gráf illeszkedési mátrixa TU .

Bizonyítás (Teljes indukció). Válasszunk M $k \times k$ -as részmátrixot.

- ha $k = 1$, akkor nyilvánvaló az állítás, hisz minden elem 0 vagy ± 1
- ha $k \geq 2$ és:
 - M -nek van olyan oszlopa, melyben legfeljebb egy nemnulla elem van, akkor fejtsük ki $\det M$ -et eszerint az oszlop szerint, ekkor az indukciós feltétel szerint készen vagyunk.
 - egyébként minden oszlopban egy $+1$ és egy -1 elem van, ekkor M sorainak összege nullvektor, a determináns 0 .

Tétel. Páros gráf illeszkedési mátrixa TU .

Bizonyítás. Irányítsuk $G(A, B, E)$ páros gráf éleit úgy, hogy minden él A -ból B -be mutasson. Ekkor az előző tétel szerint $B(G)$ TU . A B -hez tartozó sorokat szorozzuk -1 -gyel, de ez nem változtat TU tulajdonságon.

8. Tétel

Témakörök: Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.

Mohó algoritmus

Olyan algoritmus, amely a következők szerint működik:

- Adott: E, F és w , ahol F nem üres halmazrendszer, leszálló, w nemnegatív.
- Kiindulás: $0 \in F$ megengedett megoldásból.

Ha a pillanatnyi megoldás $X \subset E$, és létezik olyan elem, melyet X -hez hozzávéve az új halmaz is F -ben van, akkor legyen e olyan elem, melyre:

$w(e) = \max\{w(e') : e' \in E - X : X + e' \in F\}$ és legyen az új halmaz $X + e$. Ha nincs hozzávehető elem, akkor készen vagyunk.

Matroid

Definíció. Egy E alaphalmazon értelmezett, nemüres, leszálló halmazrendszer matroid, ha tetszőleges nemnegatív súlyfüggvényre a mohó algoritmus optimális - maximális súlyú - megoldást ad.

Fügetlenségi aximómák

Legyen F olyan halmazrendszer E -n, melyre teljesül az alábbi 2 feltétel:

- (F1) $\emptyset \in F$,
- (F1) ha $Y \subseteq X$ és $X \in F$, akkor $Y \in F$.

Ekkor $M = (E, F)$ akkor és csak akkor matroid, ha teljesül az alábbi:

- (F3) Ha $X, Y \in F$ és $|X| > |Y|$, akkor létezik olyan $x \in X - Y$, melyre $Y + x \in F$.

Alapfogalmak

- **Független halmazok:** $M = (E, F)$ matroidban az alaphalmaz F -hez tartozó részhalmazai.
- **Összefüggő halmaz:** ha $X \subseteq E$ és $X \notin F$, akkor X összefüggő.
- **Bázisok:** a maximális (nem bővíthető) független halmazok.
- **Körök:** a tartalmazásra nézve minimális összefüggő halmazok.
- **Hurok:** az egyelemű kör.
- **Rang:** $X \subseteq E$ halmaz ranja $r(X)$ egy X -beli maxfüggetlen halmaz mérete.
- **Rangfüggvény:** $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény (a matroid rangja t , ha $r(E) = t$).

Lemma. $M = (E, F)$ matroid, $A \subseteq E$. Ha X_1 és X_2 maxfüggetlen halmazok A -ban, akkor $|X_1| = |X_2|$.

Példák

- **Grafikus matroid:** G gráf által indukált matroid, melynek független halmazai a G -beli erdők. Jele: $M(G)$, másik neve: körmatroid.
- **Lineáris matroid:** valamely mátrix oszlopvektorai által indukált matroid. Másik neve: mátrixmatroid.
- **Uniform matroid:** F az n elemű E alaphalmaz összes legfeljebb k elemű halmazából áll ($0 \leq k \leq n$). Ekkor (E, F) matroid. Jele: $U_{n,k}$, $U_{n,n}$ a teljes vagy szabad matroid, $U_{n,0}$ a triviális matroid.

Tétel. Egy uniform matroid grafikus, ha $U_{n,0}$, $U_{n,1}$, $U_{n,n-1}$ vagy $U_{n,n}$ alakú.

Rangfüggvény szubmodularitása

Legyen R egy matroid rangfüggvénye, ekkor:

- (R1) $r(\emptyset) = 0$,
- (R2) $r(X) \leq |X|$, minden $X \subseteq E$ -re,
- (R3) $r(Y) \leq r(X)$, ha $Y \subseteq X$,
- (R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$ minden $X, Y \subseteq E$ halmazpárra.

Fordítva: ha r egy egészértékű függvény E részhalmazain, melyre (R1)-(R4) teljesülnek, akkor r egy $M = (E, F)$ matroid rangfüggvénye, ahol: $F = \{H : r(H) = |H|\}$

9. Tétel

Témakörök: Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisai-val (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.

Mohó algoritmus (röviden)

Legyen $M = (E, F)$ matroid, $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív súlyfüggvény. Keressük a maximális összsúlyú független halmazt, azaz: $\max_{X \in F} \sum_{e \in X} w(e)$.

A mohó algoritmus tetszőleges matroidra és súlyfüggvényre optimális (maximális összsúlyú) megoldást ad.

Matroid megadása

Függetlenségi axiómákkal (lásd: előző tétel).

Megadás bázisokkal

- (B1) $B \neq \emptyset$,
- (B2) $|X_1| = |X_2|$ minden $X_1, X_2 \in B$ -re,
- (B3) ha $X_1, X_2 \in B$ és $e_1 \in X_1$, akkor létezik olyan $e_2 \in X_2$, melyre $X_1 - e_1 + e_2 \in B$.

Fordítva: ha (E, B) egy halmazrendszer a (B1), (B2) és (B3) tulajdonságokkal, akkor $M = (E, F)$ matroidot alkot, ahol: $F = \{H : H \subseteq B\}$ valamely $B \in B$ -re.

Megadás rangfüggvénnyel

Lásd: korábban

Egyéb fogalmak

Definíció (Lezárt). (E, F) matroidban egy $X \subseteq E$ halmaz lezártja egy maximális olyan halmaz, mely tartalmazza X -et és rangja megegyezik X rangjával. Jele: \overline{X} .

Definíció (Zárt halmaz). *egy X halmaz zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Definíció (Izomorfia). *Két matroid izomorf, ha létezik olyan bijekció a két alaphalmaz között, mely független halmazt független halmazba visz. Jele: $M \equiv M'$.*

Duális

$M = (E, F)$, és M duálisának alaphalmaza legyen E , és egy $X \subseteq E$ halmaz akkor legyen az új halmazrendszer eleme, ha $E - X$ tartalmaz M -beli bázist. Ezt a halmazt jelöljük F^* -al.

Definíció. $M = (E, F)$ matroid bázisai $B = \{B_1, B_2, \dots, E - B_n\}$. Ebből már adódik F^* .

Tétel (Duális matroid tétel). *Az $M^* = (E, F^*)$ matroid.*

FYI: $(M^)^* \equiv M$*

Példa

$M = U_{5,2}$:

- M -ben minden legfeljebb 2-elemű halmaz független,
- a duálisban azon halmazok függetlenek, amelyek komplementerei tartalmaznak M -beli bázist, azaz 2-elemű halmazt,
- ezek a legfeljebb 3-elemű halmazok, tehát $M^* = U_{5,3}$.

Duális rangfüggvény

$$r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$$

10. Tétel

Témakörök: Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.

Elhagyás/törlés

$M = (E, F)$ a kiindulási matroidunk.

Akkor tartozzon egy halmaz F' -höz, ha F -hez tartozik és részhalmaza $E - X$ -nek.

$M \setminus X = (E - X, F')$ matroid.

Példa: grafikus matroidoknál élek egy halmazának törlése.

Összehúzás

Legyen $M = (E, r)$ matroid az r rangfüggvénnyel, és $X \subseteq E$.

Ekkor az $E - X$ alaphalmazon az $R(Y) = r(X \cup Y) - r(X)$ rangfüggvénnyel definiált $(E - X, R)$ matroid az M -ből az X összehúzásával áll ellő. Jele: M/X .

Lemma. R egy matroid rangfüggvénye az $E - X$ alaphalmazon.

Tétel. Az elhagyások és az összehúzások felcserélhetők. Minden M matroid N minora (elhagyások és összehúzások sorozata) előáll $N = (M \setminus A)/B$ alakban, ahol A és B diszjunkt halmazok.

Tétel. Az elhagyás és összehúzás duális műveletek:

$M = (E, F)$ matroidban $X \subseteq E$

Ekkor: $(M/X)^* = M^* \setminus X$ és $(M \setminus X)^* = M^*/X$

Direkt összeg

Legyen $M_1 = (E_1, F_1)$ és $M_2 = (E_2, F_2)$ két matroid a diszjunkt E_1 és E_2 nemüres alaphalmazokon. Ekkor a két matroid direkt összege az $N = M_1 + M_2$ matroid, melynek alaphalmaza $E_1 \cup E_2$ és egy $X \subseteq E_1 \cup E_2$ halmaz pontosan akkor független N -ben, ha $X \cap E_1$ és $X \cap E_2$ független M_1 -ben és M_2 -ben.

Összefüggőség

- Egy matroid összefüggő, ha nem áll elő minorok direkt összegeként.
- Egy grafikus matroid akkor és csak akkor összefüggő, ha a gráf kétszeresen összefüggő.

T-test feletti reprezentáció

Az $M = (E, F)$ matroid reprezentálható (koordinátázható) a T test felett, ha létezik olyan mátrix, amelynek oszlopai T feletti vektorok és az ezek által meghatározott lineáris matroid izomorf M -mel. (E minden eleme T feletti vektor.)

Lineáris matroid: M lineáris, ha létezik olyan F test, ami felett M reprezentálható.

Bináris matroid: a kételemű test felett reprezentálható matroid.

Reguláris matroid: tetszőleges test felett reprezentálható matroid.

Megjegyzés: M matroidnak több reprezentációja is lehet egy test felett.

Konstrukció

Legyen $r = r(E)$ és $n = |E|$. $M(E, F)$ leírható egy $r \times n$ -es A mátrixszal, melynek sorai lineárisan függetlenek. r sor mindenképp szükséges, ha pedig több sorból áll a mátrix, kiválaszthatunk r lineárisan függetlent, és elhagyhatjuk a maradékot: a matroid nem változik.

A kapott mátrix egy alkalmas nonszinguláris $r \times r$ -es mátrixszal való szorzással leképezhető úgy, hogy a bal oldalán egységmátrix legyen. A transzformált mátrix izomorf matroidot határoz meg.

The diagram shows a sequence of matrix transformations. It starts with a box labeled 'A' with dimensions $r \times n$ and a note 'det ≠ 0'. This is followed by an equals sign and a box labeled 'B' with dimension n . This is followed by another equals sign and a box representing a block matrix: $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, where I_r is an $r \times r$ identity matrix and A' is an $(n-r) \times (n-r)$ matrix.

Tétel. Grafikus matroidok tetszőleges test felett reprezentálhatók.

Tétel. Ha $M = (E, F)$ reprezentálható az F test felett, akkor M^* is.

Tétel. Ha $M = (E, F)$ reprezentálható az F test felett, akkor minden minora is reprezentálható.

11. Tétel

Témakörök: Grafikus, kografikus, reguláris, bináris és lineáris matroid fogalma, ezek kapcsolata (ebből bizonyítás csak a grafikus és reguláris matroidok közötti kapcsolatra), példák. Fano-matroid, példa nemlineáris matroidra. Bináris, reguláris és grafikus matroidok jellemzése tiltott minorokkal: Tutte tételei (biz. nélkül).

Matroid osztályok

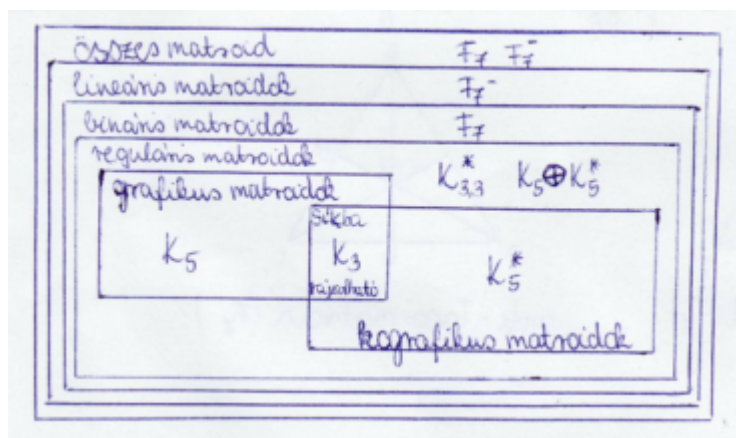
Grafikus vagy körmatroid: G gráf által indukált matroid, melyben $E = \{G \text{ élei}\}$, $F = \{G\text{-beli erdők}\}$.

Kografikus: grafikus matroid duálisa kografikus.

Reguláris: tetszőleges test felett reprezentálható.

Bináris: a kételemű (bináris) test felett reprezentálható.

Lineáris: van olyan test, ami felett reprezentálható.



Tétel. Grafikus matroid bármely test felett reprezentálható (reguláris).

Tétel. Ha $M = (E, F)$ reprezentálható az F test felett, akkor M^* is. \Rightarrow A kografikus matroidok is regulárisak!

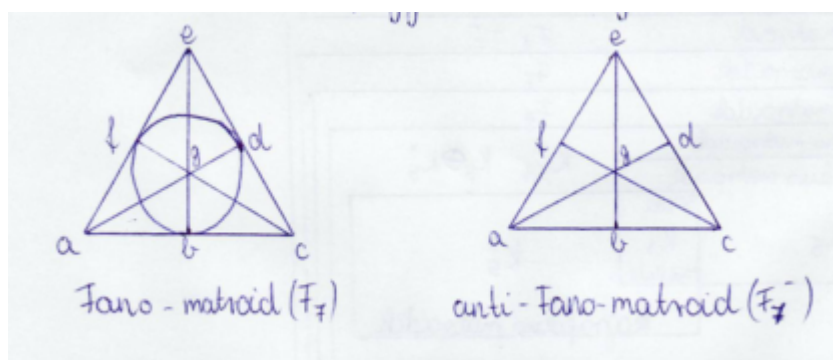
Karakterisztika

Ha az F testhez van olyan pozitív egész k , melyre teljesül, hogy az $x + x + \dots + x$ (k tagú) összeg értéke minden $x \in F$ elemre zérus, akkor a legkisebb ilyen k szám a test karakterisztikája. (Minden véges testnek van karakterisztikája, ami mindig egy prím.)

Fano matroid

Adott a hételemű halmaz: $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

- minden legfeljebb kételemű halmaz független
- minden legalább négyelemű halmaz összefüggő
- a háromeleműek közül azok függetlenek, melyeket nem köt össze vonal az ábrán



Tutte tételei

- M matroid bináris \Leftrightarrow nem tartalmaz minorként $U_{4,2}$ matroidot.
- M matroid reguláris \Leftrightarrow nem tartalmaz minorként $U_{4,2}$, F_7 és F_7^* matroidokat.
- M matroid grafikus \Leftrightarrow nem tartalmaz minorként $U_{4,2}$; F_7 , F_7^* , $M^*(K_5)$ és $M^*(K_{3,3})$ matroidokat.

12. Tétel

Témakörök: Matroidok összege. k -matroid metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.

Matroidok összege

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok összege $M_1 \vee M_2 = (E, F')$, ahol $X \in F' \Leftrightarrow \exists X_1, X_2$, hogy $X = X_1 \cup X_2$ és $X_1 \in F_1$, valamint $X_2 \in F_2$. (Azaz előáll egy F_1 -beli és egy F_2 -beli elem uniójaként.)

Tétel. *A függetlenségi axiómák segítségével bizonyítható, hogy matroidok összege is matroid. ($F(3)$ -mat kell belátni.)*

Matroidok metszete

$M_1 = (E, F_1)$ és $M_2 = (E, F_2)$ matroidok metszete: $M_1 \cap M_2 = (E, F_1 \cap F_2)$ halmazrendszer.

Tétel. *Két matroid metszete nem feltétlen matroid.*

(Súlyozott) matroid metszet probléma (k-MMP vagy MMP_k)

Két matroid metszetének egy minimális méretű vagy súlyú elemét keressük.

Adott: k db matroid közös alaphalmazon: $M_i = (E, F_i), i = 1, 2, \dots, k$

Kérdés: létezik-e valamely konstans p -re p méretű halmaz $\cap F_i$ -ben?

Azaz: \exists -e $X \subseteq E : |X| \geq p : X \in \bigcap_{i=1}^k F_i$

Bonyolultság

- $k = 1, 2$ esetén: polinomiális (Mohó algoritmus)
- $k \geq 3$ esetén: NP-teljes (Hamilton-út keresése)

13. Tétel

Témakörök: A k -matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.

k-matroid partíciós probléma (k-MPP vagy MPP_k)

Adott: k db matroid: $M_i = (E, F_i), i = 1, 2, \dots, k$

Kérdés: a matroidok összege a szabadmatroidot adja-e, vagyis E előáll-e $E_1 \cap \dots \cap E_k$ alakban úgy, hogy $E_i \in F_i \forall i$ -re.

Feltehető, hogy az E_i halmazok diszjunktak, ezért hívják a feladatott MPP-nak.

Bonyolultság

- MPP_k NP-beli, mert tanú rá egy partícionálás és a tanú polinom (lineáris) időben ellenőrizhető.
- MPP_k co-NP-beli, mert tanú rá egy $X \subseteq E$ halmaz, ami biztosan összefüggő az összegben, azaz $|X| > \sum r_i(X)$.
- MPP_k P-beli.

Algoritmus

Induljunk ki $\forall i E_i = \emptyset$ állapotból. Ekkor $E_i \in F_i$.

Az E_i halmazokat addig bővítjük, amíg az uniójuk E nem lesz, vagy ha nem bővíthető, mutatunk egy X tanút.

A bővítéshez bevezetünk egy $n + k$ pontú irányított segédgráfot, melynek:

- csúcsai E elemei $\cup \{p_1, \dots, p_k\}$. p_i az E_i partíció segédpontja
- $(x \rightarrow p_i) \in E(G)$, ha $x \notin E_i$ és $E_i \cup \{x\} \in F_i$
Az ilyen típusú élek azt jelképezik, hogy az E_i partícióba felvehető x a függetlenség megsértése nélkül.
- $(x \rightarrow y) \in E(G)$, ha $\exists i : x \notin E_i, y \in E_i, E_i \cup \{x\} \notin F_i$, de $E_i \cup \{x\} - \{y\} \in F_i$
Az ilyen típusú élek azt jelentik, hogy az E_i partícióban az y elem kicserélhető x -re a függetlenség megsértése nélkül.

Lépések

- 1. Megkeressük a legrövidebb irányított utat $(E - \cup E_i)$ -ből $\{p_1, \dots, p_k\}$ -ba.
- 2. Ha van ilyen út, javítunk az út mentén, azaz végrehajtjuk a cseréket. $\cup E_i$ mérete 1-gyel nő.
Azért kell a legrövidebb úton végigmenni, mert különben nem garantált, hogy a cserék során nem sérül a partíciók függetlensége.
- 3. Különben STOP, nemleges a válasz, és a tanú az $(E - \cup E_i)$ -ből irányított úton elérhető pontok halmaza.

2-matroid-metszet probléma

MMP_k (emlék)

Adott: k db matroid: $M_i = (E, F_i), i = 1, 2, \dots, k$ és egy p egész szám

Kérdés: létezik-e F_i -knek legalább p méretű közös elemük?

Tétel. $MMP_2 \in P$

Definíció (Csonkolt). $M = (E, F)$ csonkoltja $M' = (E, F')$, ahol F' az F elemeit tartalmazza a bázisok kivételével. A matroid rangja ettől 1-gyel csökken.

14. Tétel

Témakörök: k -polimatroid rangfüggvény fogalma. A 2-polimatroid-matching probléma, ennek bonyolultsága, Lovász tétele (biz. nélkül).

k -polimatroid rangfüggvény

$f : 2^E \rightarrow \mathbb{N}$ egy k -polimatroid rangfüggvény, ha teljesülnek rá az alábbi axiómák:

- (1) $r(\emptyset) = 0$,
- (2) $r(\{x\}) \leq k, \forall x \in E$ elemre ,
- (3) $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$,
- (4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$.

Általánosítása a matroid rangfüggvénynek, értsd:

$k = 1$: speciális eset: $r(\{x\}) \leq 1$, ekkor R egy matroid rangfüggvénye.

Megjegyzés: $r(\{x\}) \leq k$ -val ekvivalens az $r(X) \leq k|X|$, illetve az $r(X \cap Y) \leq r(X) + k|Y|$ axióma.

k -polimatroid matching probléma (k -PMM)

Definíció. $X \subseteq E$ k -polimatroid matching, ha $r(X) = k|X|$ egyenlőség fennáll.

Definíció. k -polimatroid matching probléma:

Adott: r és $t \in \mathbb{N}$

Kérdés: van-e legalább T elemű k -polimatroid matching?

Speciális esetek

- Input: tetszőleges G gráf, $t \in \mathbb{N}$. Kérdés: $\nu(G) \geq t$?
2-PMM-ként megfogalmazva: $r(X) = |X|$ által lefedett pontok halmaza $| \leq 2|X|$
A 2-matching épp a közönséges párosításnak felel meg (innen az elnevezés).
- Input: két matroid, $t \in \mathbb{N}$. Kérdés: létezik-e $X \subseteq E$, $|X| \geq t$, $X \in F_1 \cap F_2$ (matroid metszet probléma)?
2-PMM-ként megfogalmazva: $f(X) = r_1(X) + r_2(X) \leq 2|X|$

- Az utolsó két probléma közös speciális esete: páros gráfban $\nu(G) \geq t$?

Megoldás: a 2. probléma leképezése a 3.-ra:

M_1 grafikus matroidban e_1 és e_2 párhuzamos élek, ha e_1 -nek és e_2 -nek felül van egy közös pontja. M_2 -t hasonlóan értelmezzük a páros gráf alsó pontthalmazán.

Bonyolultság

- $k \geq 3$ eset: NP-nehéz, mert speciális esetként tartalmazza a k -MMP-t.
- $k = 2$ eset: "matroidpárosítási probléma", speciális esetként tartalmazza 2-MMP-t.

Tétel. *A matroidpárosítási probléma (2-PMM) teljes általánosságban nem oldható meg polinomidőben. A teljes általánosságban kifejezés a függvény megadási módjára vonatkozik: azt jelenti, hogy bármely $X \subseteq E$ részhalmazra egységnyi idő alatt megtudhatjuk $r(X)$ értékét, de ettől eltekintve a 2-polimatroid rangfüggvényről semmit sem tudunk.*

Lovász László tétele

"Legfontosabb speciális eset."

Tétel. *Vegyünk egy $k \times 2n$ méretű valós M mátrixot, oszlopai legyenek rendre $M = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ majd definiáljunk az $I = \{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmazon egy r függvényt úgy, hogy $X \subseteq I$ esetén legyen $r(X)$ az $\cup_{i \in X} \{a_i, b_i\}$ vektorhalmaz által kifeszített altér dimenziója. Könnyű látni, hogy ilyenkor r egy 2-polimatroid rangfüggvény.*

Tétel. *A matroidpárosítási probléma polinomidőben megoldható, ha a 2-polimatroid rangfüggvény egy adott valós elemű M mátrixból a fent leírt módon nyerhető.*