PUCP

PROCESAMIENTO DE SEÑALES E IMÁGENES DIGITALES

IEE239

INGENIERÍA MECATRÓNICA

Facultad de Ciencias e Ingeniería

PUCP

MORFOLOGÍA MATEMÁTICA

- En biología se utiliza la palabra morfología para describir la forma, tamaño y estructuras de los animales, plantas y microrganismos.
- En procesamiento de señales/imágenes se utiliza la denominación morfología matemática para describir y representar las formas de una región; como el contorno, el esqueleto,…
- La morfología es una herramienta matemática que nos permite analizar estructuras espaciales y planares, así como las formas de lo objetos.
- La aplicación de Morfología Matemática es exitosa por la aplicación de una matemática simple y que abre la oportunidad a tener herramientas de procesamiento de imágenes muy poderosa.

MORFOLOGÍA MATEMÁTICA

- Surge a finales de los 70's (Ecole des mines. Paris)
- Se introduce y populariza a partir de las publicación:
  1. Matheron, G. Elements pour une Theorie del Milieux Poreux Masson. Paris, 1967.
  2. J. Serra. Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, London 1982.
- Muy útil para las aplicaciones donde la forma de los objetos son importantes.
- El enfoque clásico del procesamiento de imágenes es aproximar el cálculo matemático (concepto de función imagen, operadores lineales, …).
- El enfoque morfológico se basa en álgebra no lineal y trabaja con conjuntos de puntos, su forma y conectividad.

Imagen en tonos de Gris

- La gráfica G (superficie de intensidad) de una imagen f es el conjunto de puntos (x,t) tal que x pertenece al plano de f y t = f(x):

$$G(f) = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0 | t = f(\boldsymbol{x})\}$$

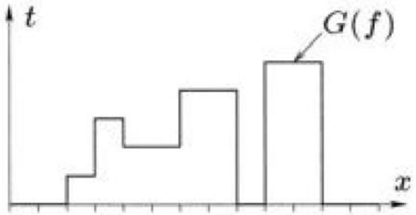
- El subgráfico SG de una imagen f es el conjunto de puntos de $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0$ que están debajo de la gráfica de la imagen:

$$SG(f) = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0 | 0 \leq t \leq f(\boldsymbol{x})\}$$

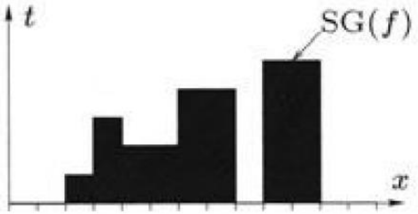
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$	0	0	1	3	2	2	4	4	0	5	5	3	0	0

Señal discreta 1-D de f

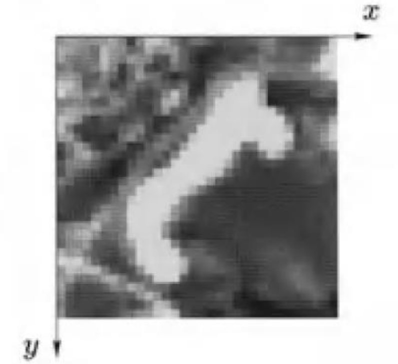
Imagen en tonos de Gris



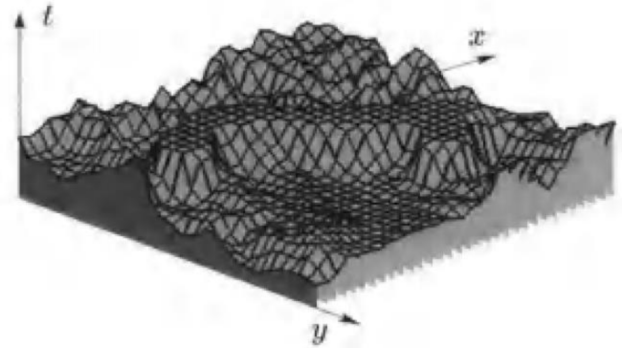
(b) Graph of the signal f defined in (a).



(c) Subgraph of f.



(d) Grey tone image.

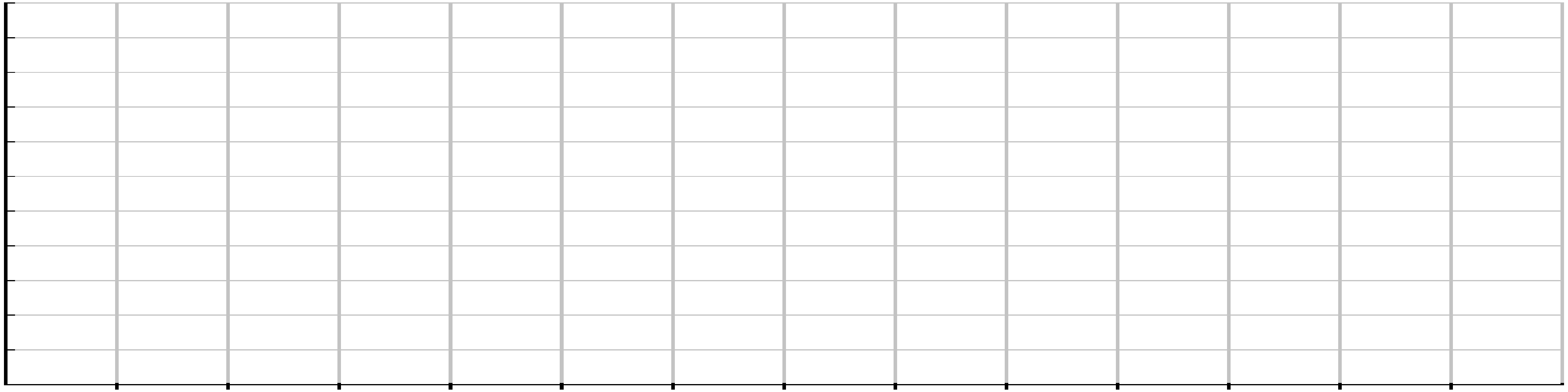


(e) Subgraph of (d).

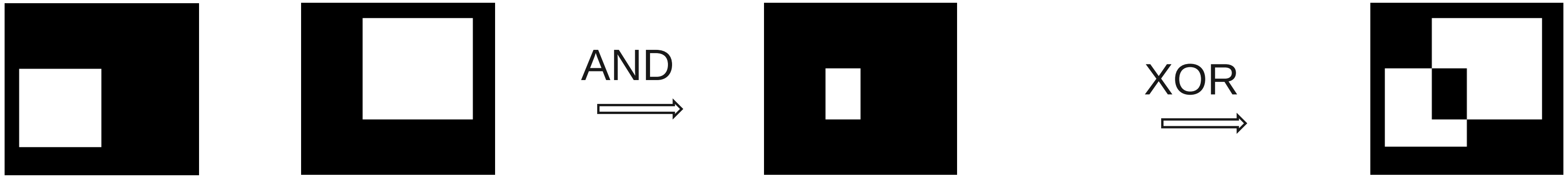
Fuente: **Morphological Image Analysis, Principles and Applications,** *P. Soille*

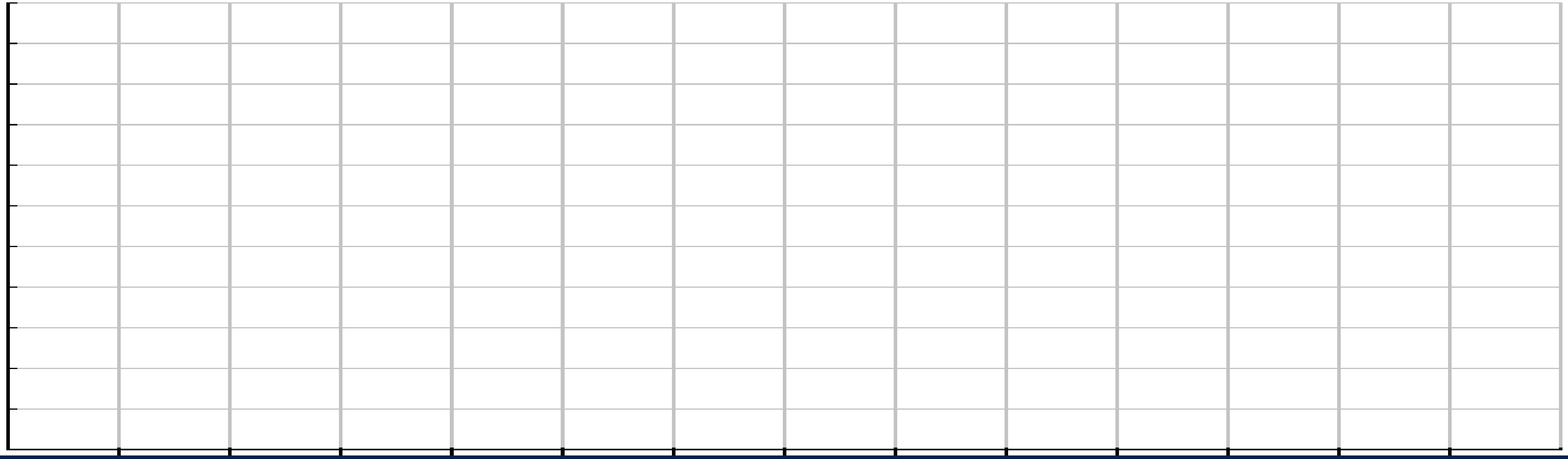
OPERACIONES LÓGICAS

- Las operaciones lógicas primarias en procesamiento de imagen son AND, OR y NOT (complemento).



OPERACIONES LÓGICAS





Propiedades de las Transformaciones de Imágenes

- Invariante a la traslación.
- Invariante a la rotación.
- Linealidad.
- Idempotencia.
- Invariante a la descomposición por umbral
- Extensividad

Propiedades de las Transformaciones de Imágenes

- Ψ es invariante a la traslación $\Leftrightarrow\ \forall f, \forall b, \Psi(f_b) = [\Psi(f)]_b$
- Ψ es invariante a la rotación $\Leftrightarrow\ \Psi\Theta = \Theta\Psi$
- Ψ es lineal $\Leftrightarrow\ \Psi(\sum_i a_i f_i) = \sum_i a_i [\Psi f_i]$
- Ψ es idempotente $\Leftrightarrow \Psi\Psi = \Psi$
- Ψ es invariante a la descomposición por umbral $\Leftrightarrow \Psi = \sum_{t=1}^{t_{max}} \Psi(CS_t)$
  - CS (Cross-section) Sección transversal.

Ejemplos:

$$f \vee g = \sum_{t=1}^{t_{max}} [CS_t(f) \cup CS_t(g)]$$

$$f \wedge g = \sum_{t=1}^{t_{max}} [CS_t(f) \cap CS_t(g)]$$

f	0	1	2	3	3	4	2	0		g	3	2	2	4	1	0	2	3
>0																		
>1																		
>2																		
>3																		

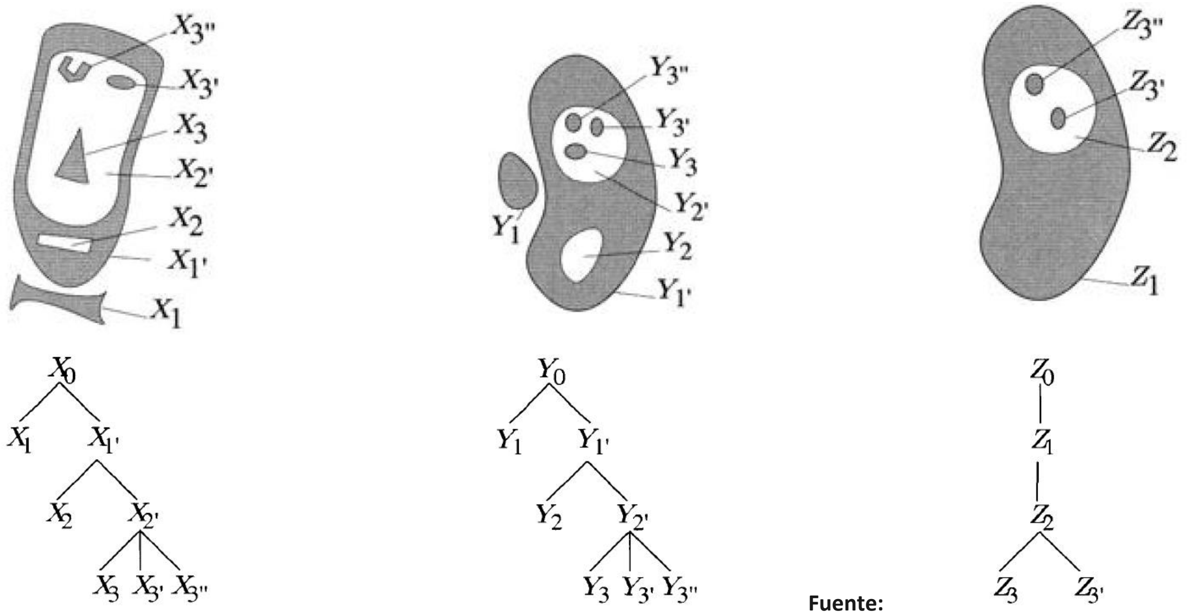
f		g								
		>0								
		>1								
		>2								
		>3								

Propiedades de las Transformaciones de Imágenes

- Ψ es extensiva $\Leftrightarrow\ I \leq \Psi$
- Ψ es anti-extensiva $\Leftrightarrow\ I \geq \Psi$
- Ψ es creciente $\Leftrightarrow \forall f, g, f \leq g \Longrightarrow \Psi(f) \leq \Psi(g)$
- Ψ y Φ son duales respecto a la operación complemento $C \Leftrightarrow \Psi = C\Phi C$
  - Ψ es idempotente $\Longrightarrow \Phi$ es idempotente
  - Ψ es extensiva $\Longrightarrow \Phi$ es anti-extensiva
  - Ψ es anti-extensiva $\Longrightarrow \Phi$ es extensiva
  - Ψ es creciente $\Longrightarrow \Phi$ es creciente
- Ψ es dual a sí mismo respecto a la operación complemento $C \Leftrightarrow \Psi = C\Psi C$

Propiedades de las Transformaciones de Imágenes

- Dos conjuntos son homotópicos si sus árboles de homotopía son idénticos.



Fuente:
Morphological Image Analysis, Principles and Applications,
P. Soille

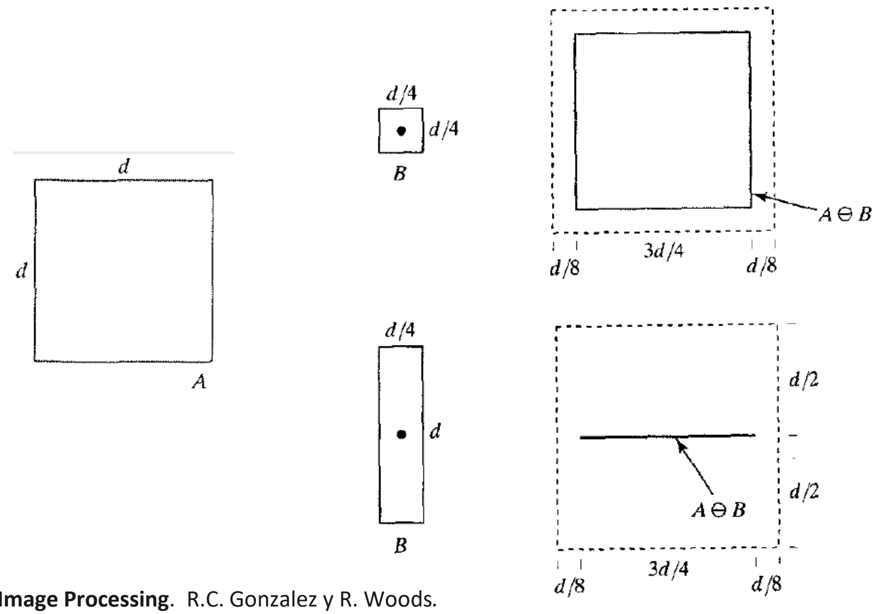
- Una transformación es homotópica si para cualquier imagen f, $\Psi(f)$ es homotópica a f.

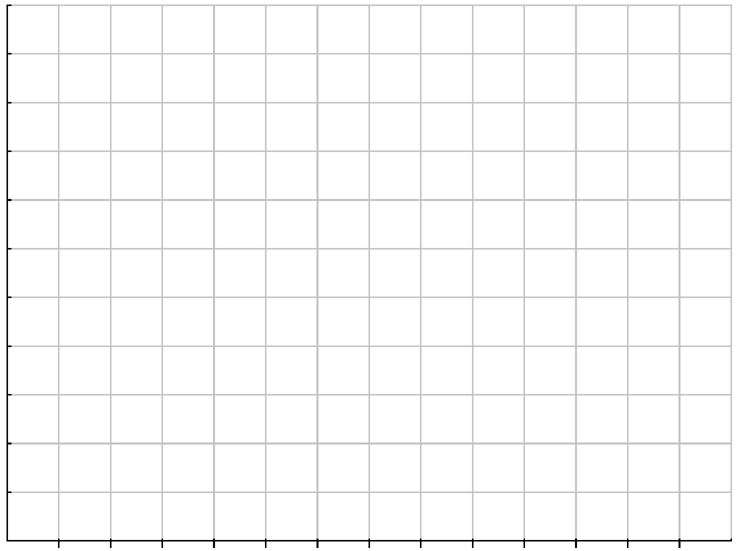
Elemento Estructurante

- Un Elemento Estructurante es un conjunto pequeño usado para probar la imagen bajo estudio.

Erosión

- Sean A y B conjuntos en $\mathbb{Z}^2$. La Erosión de A por B (SE) se caracteriza como: $A \ominus B = \{x | (B)_x \subseteq A\} = \varepsilon_B(A)$



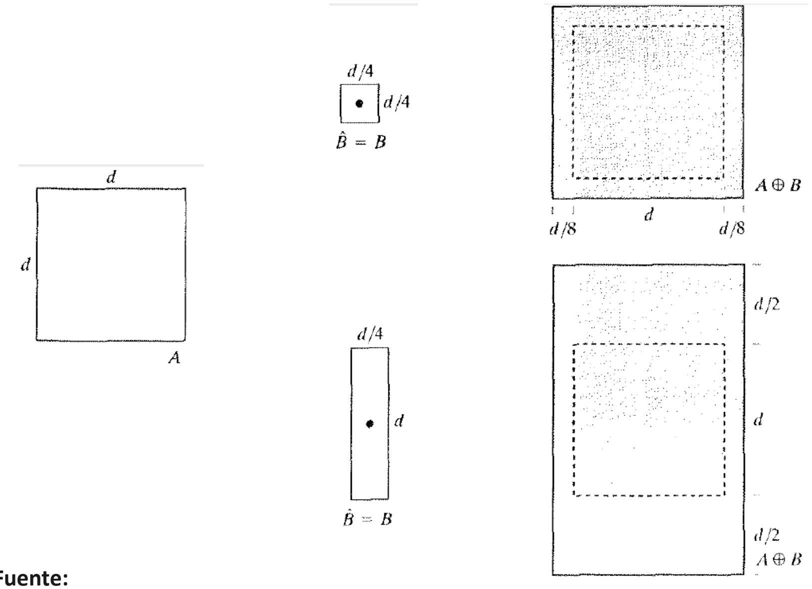


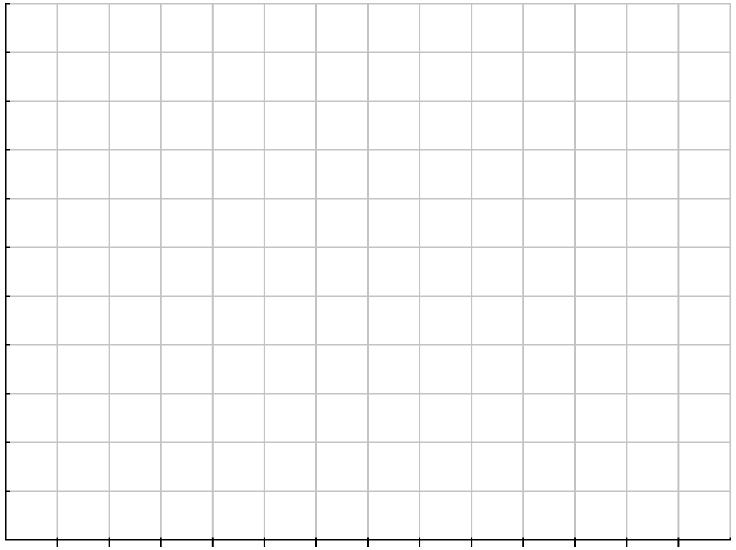
Fuente: Digital Image Processing. R.C. Gonzalez y R. Woods.

Dilatación

Sean A y B conjuntos en $\mathbb{Z}^2$. La Dilatación de A por B se caracteriza como:

$$A \oplus B = \left\{x \mid (\hat{B})_x \cap A \neq \phi\right\}$$
$$= \left\{x \mid [(\hat{B})_x \cap A] \subseteq A\right\} = \delta_B(A)$$





Fuente:
Digital Image Processing. R.C. Gonzalez y R. Woods.

Propiedades de la Erosión y Dilatación

- No preservan la homotopía de la imagen.
- Son duales una respecto a la otra: $\varepsilon_B = C\delta_B C$
- Son invariantes a la traslación
- Son crecientes:

$$f \leq g \Longrightarrow \begin{cases} \varepsilon(f) \leq \varepsilon(g) \\ \delta(f) \leq \delta(g) \end{cases}$$

- Son operadores planos (solo usan SE planos)

$$\delta_B = \sum_{t=1}^{t_{max}} \delta_B(CS_t) \qquad \varepsilon_B = \sum_{t=1}^{t_{max}} \varepsilon_B(CS_t)$$

- Composición:

$$\delta_{B2}\delta_{B1} = \delta_{(\delta_{\widehat{B2}}B1)} \qquad \varepsilon_{B2}\varepsilon_{B1} = \varepsilon_{(\delta_{\widehat{B2}}B1)}$$

- Relación de Orden $\varepsilon_B \leq \delta_B$

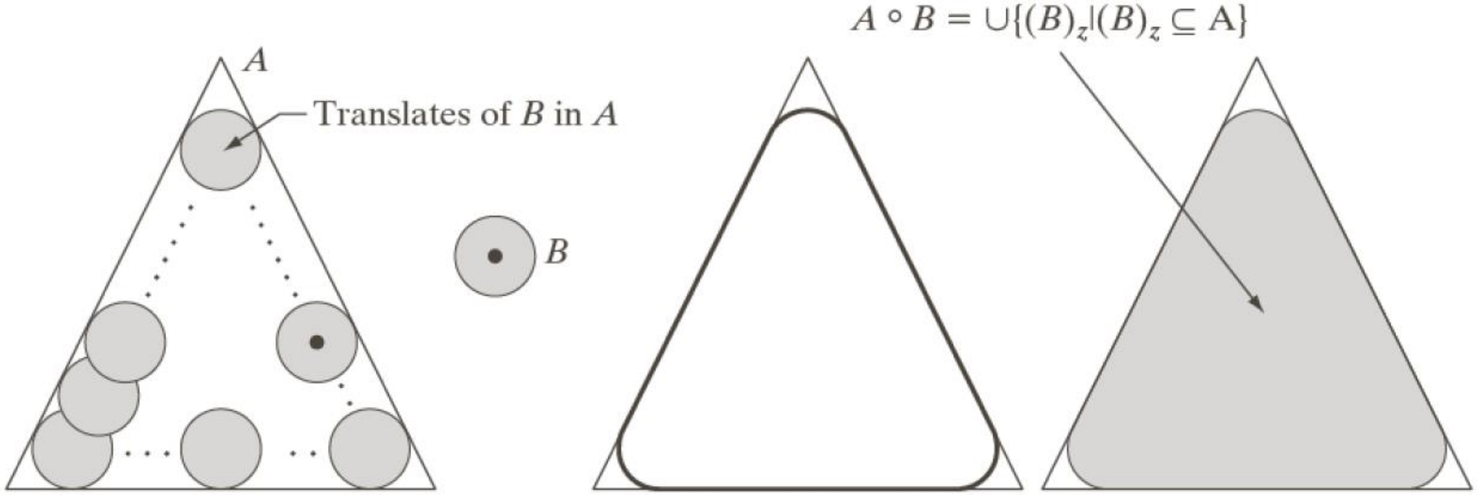
Opening

- Opening suaviza el contorno, eliminando las saliencias que se encuentra en los bordes.$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$

$$\gamma_B(f) = \delta_{\hat{B}}[\varepsilon_B(f)]$$

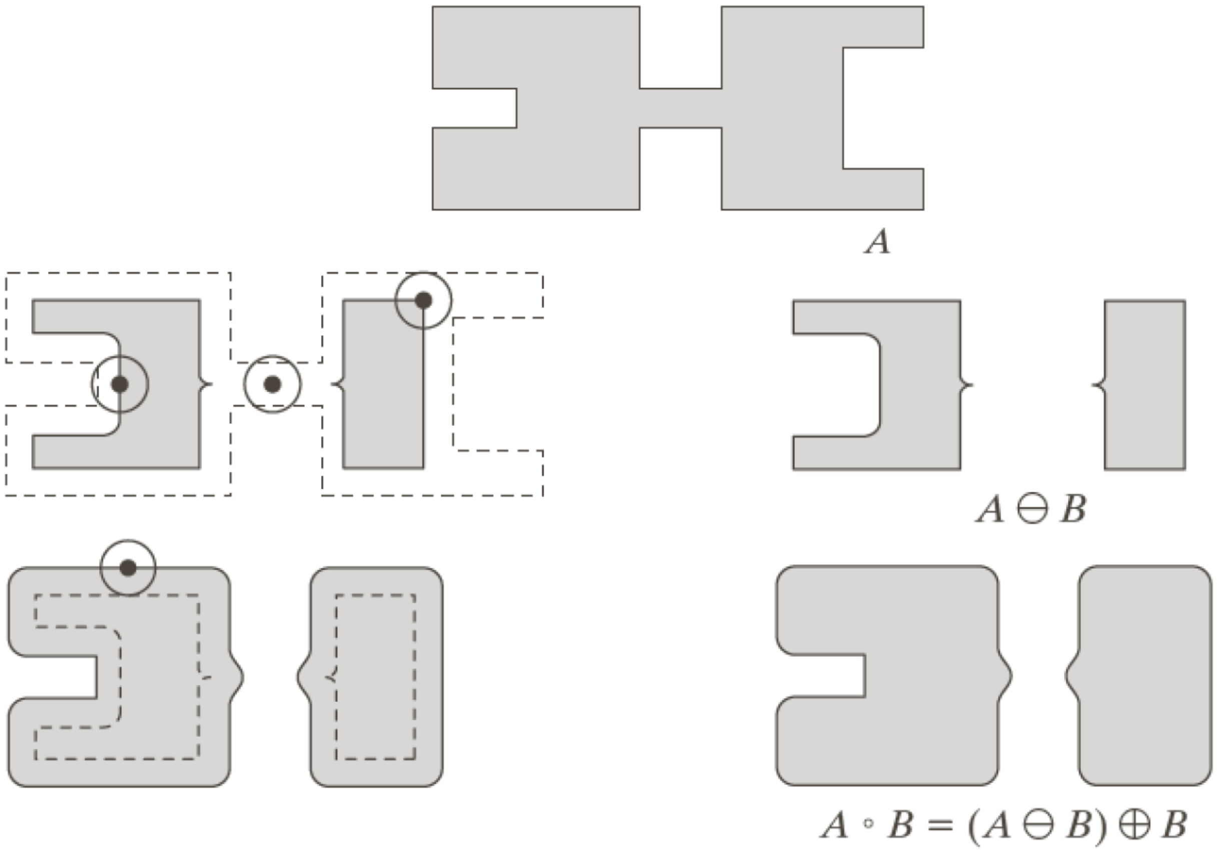
- También se puede definir a base de operaciones de conjunto:

$$\gamma_B(A) = \bigcup \{B_x | B_x \subseteq A\}$$



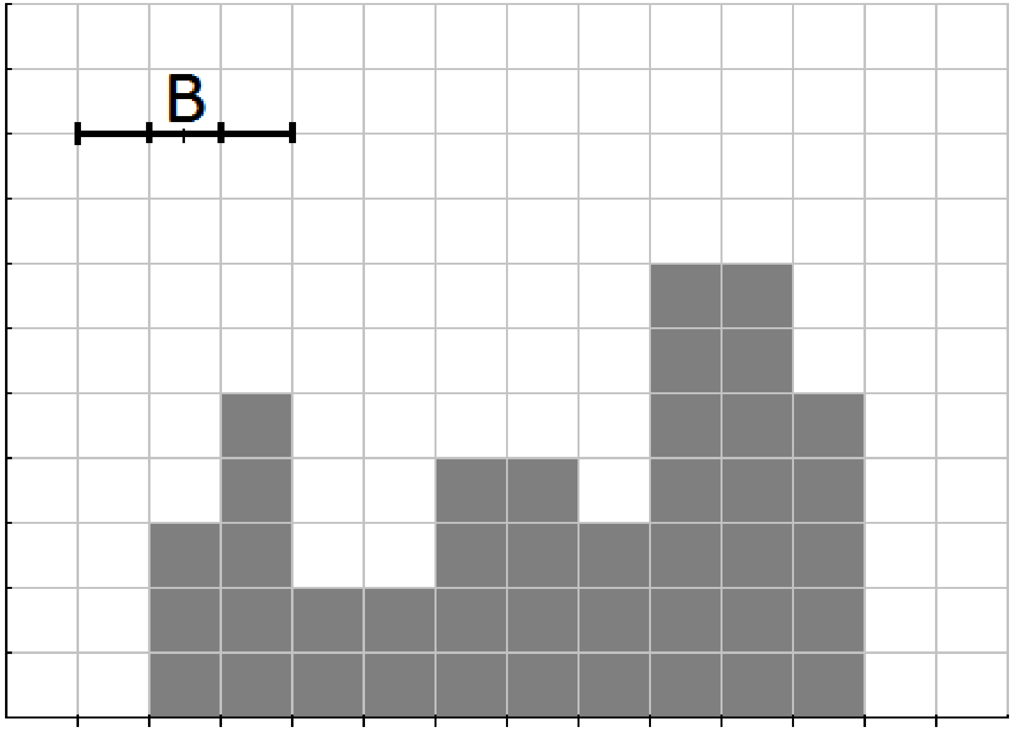
Digital Image Processing. R.C. Gonzalez y R. Woods.

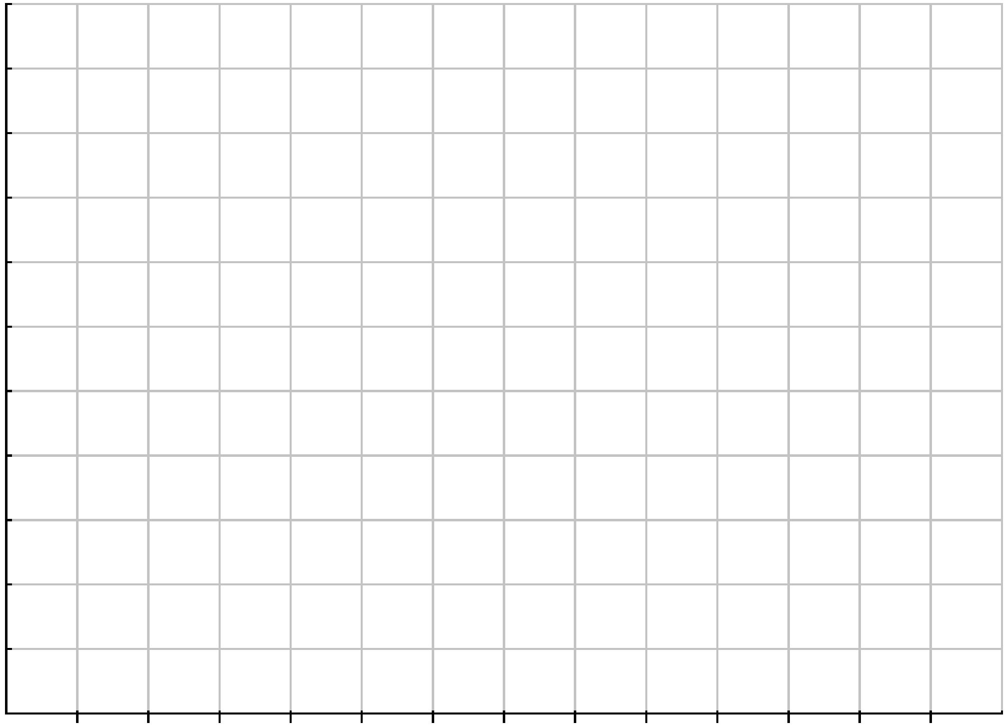
Opening



Digital Image Processing. R.C. Gonzalez y R. Woods.

Opening





Closing

- Closing es similar al opening, suaviza los contornos, eliminando los agujeros que se encuentran en el contorno.
- Se puede expresar como la composición de una dilatación seguida de una erosión.

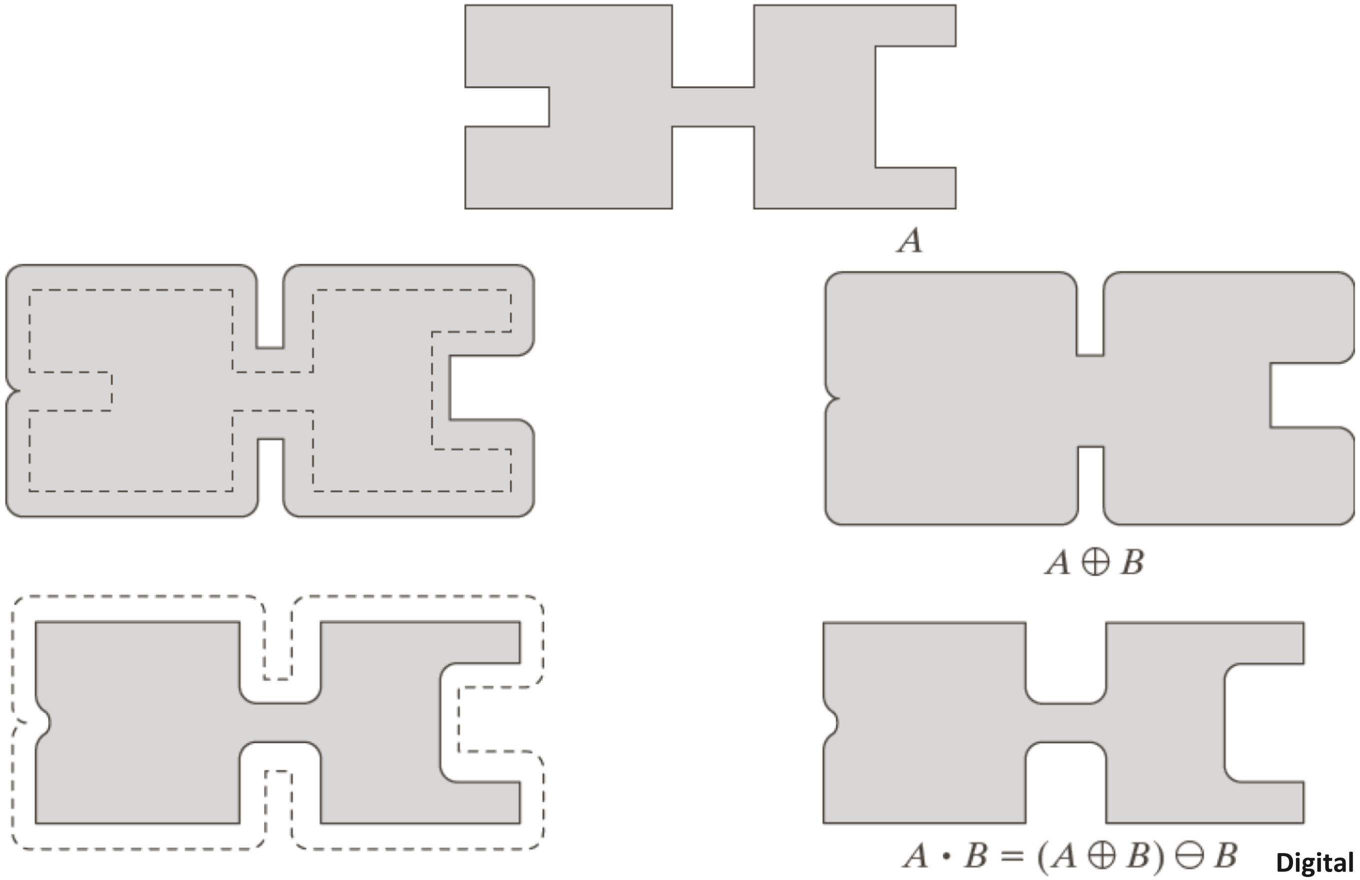
$$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B$$

$$\phi_B(f) = \varepsilon_{\hat{B}}[\delta_B(f)]$$

- Aquí aplica: “¿El SE está dentro del fondo?”. Si es afirmativo, entonces todos los puntos del SE pertenecen al complemento del “closing” del conjunto.

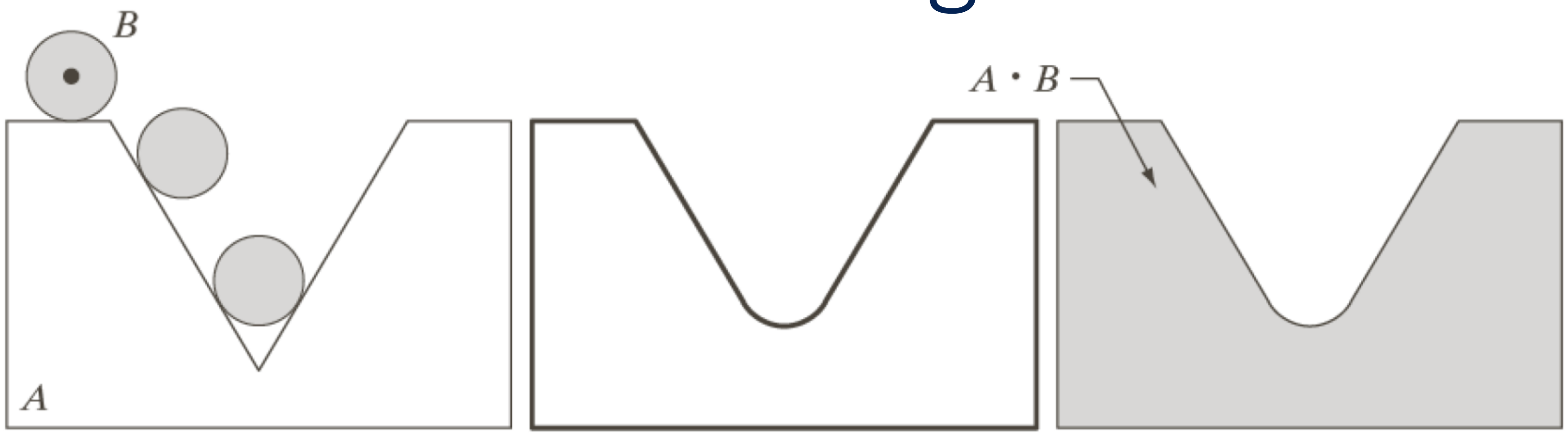
$$\phi_B(X) = [\cup \{B | B \subseteq X^c\}]^c$$

Closing

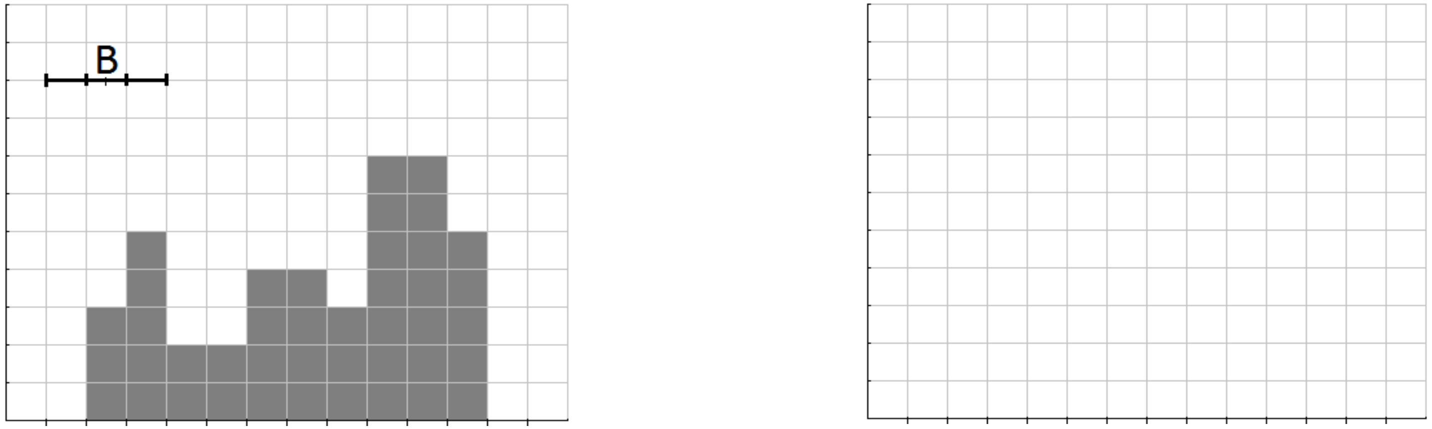


Digital Image Processing. R.C. Gonzalez y R. Woods.

Closing



Digital Image Processing. R.C. Gonzalez y R. Woods.



Propiedades del Open y el Close

- Invariante a la traslación del SE.
- Idempotencia: $\gamma\gamma = \gamma;\ \phi\phi = \phi$
- Dualidad: $\gamma_B = C\phi_B C$
- El open es anti-extensivo y el close extensivo:

$$\gamma_B \leq \mathrm{I} \leq \phi_B$$

- Operadores crecientes:

$$f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \gamma(f) \leq \gamma(g) \\ \phi(f) \leq \phi(g) \end{cases}$$