PUCP

Sistemas dinámicos y control B

Tema 7: Control y estimación óptima – Parte II

Docente: Juan Carlos Suárez Quispe, M.Sc.

PUCP

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

La variable aleatoria

Una variable aleatoria es un número $x(\zeta)$ asignado a cada resultado ζ de un experimento.

Función de distribución de probabilidad ($\boldsymbol{F_x(x)}$)

La función de distribución de una variable aleatoria x, es la función $F_x(x)$, de modo que:

$$F_x(x) = P\{x \leq x\}$$

Donde:

- $P\{x \leq x\}$: Probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que un valor determinado.

Función de densidad de probabilidad ($\boldsymbol{f_x(x)}$)

Es la derivada de la función de distribución de probabilidad ($F_x(x)$) de una variable aleatoria x.

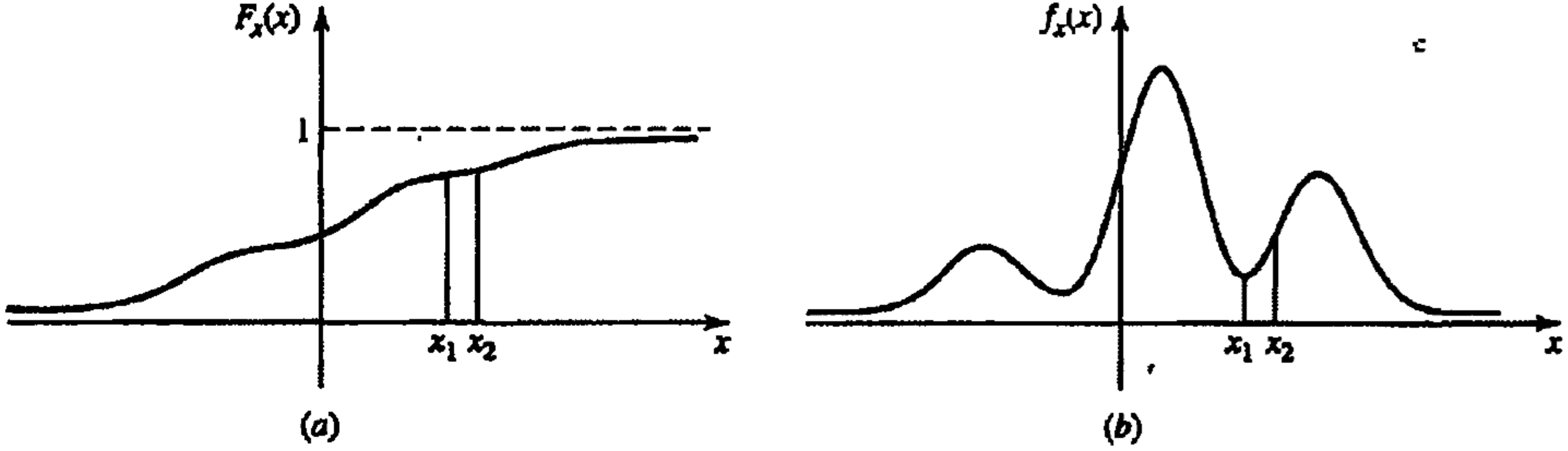

Figura 1: (izquierda) Función de distribución de probabilidad de una variable x, (derecha) su respectiva función de densidad de probabilidad [Papoulis, 1991].

La distribución normal gaussiana ($x \sim N(\mu, \sigma^2)$)

Es una de las distribuciones más comúnmente utilizadas. Se dice que x es una variable aleatoria normal o Gaussiana con parámetros μ (media) y σ^2 (varianza) si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Esta es una curva en forma de campana (tal como se puede ver en la Fig. 3), simétrica alrededor del parámetro μ y su función de distribución de probabilidad está dada por:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dy$$

Dado que $f_x(x)$ depende de dos parámetros μ y σ^2; se utiliza la notación $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ para representar la función de probabilidad gaussiana.

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

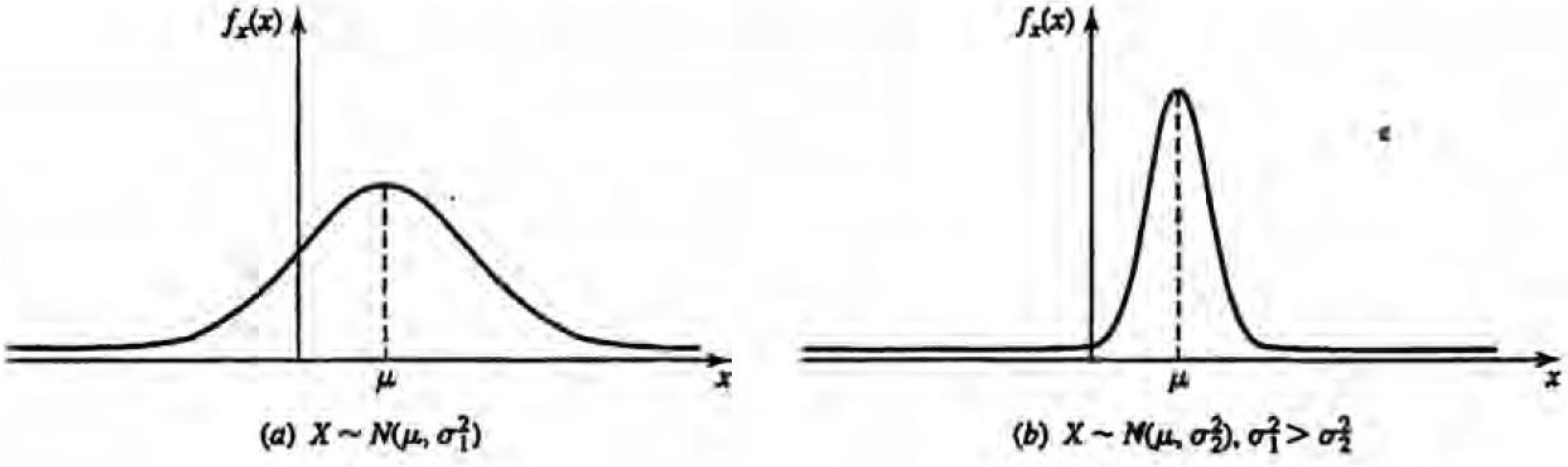

Figura 2: Histogramas para dos conjuntos de datos, (izquierda) datos con mayor varianza, (derecha) datos con menos varianza [Papoulis, 1991].

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

El filtro de Kalman Bucy

Considere el siguiente modelo de sistema lineal invariante en el tiempo, donde w(t) y v(t) son procesos aleatorios que representan el ruido de proceso y el ruido de medición, respectivamente:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$
$$y = Cx + v$$

Donde:

- $w(t)$: Ruido del proceso.
- $v(t)$: Ruido de medición.

El filtro de Kalman-Bucy es un estimador de estado óptimo en el sentido de que minimiza la covarianza del error de estimación.

$$J_e = E[e(t)^T e(t)]$$
$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

Donde:

- J_e : Covarianza del error de estimación.
- $e(t)$: Error de estimación

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

El filtro de Kalman Bucy

Se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Los vectores aleatorios $w(t)$ y $v(t)$ son ruido gaussiano de media cero.
- Los vectores aleatorios $w(t)$ y $v(t)$ son ruido blanco (es decir, no correlacionados).
- La correlación cruzada entre $w(t)$ y $v(t)$ es cero.

El error de estimación o error de observación es la diferencia entre la medida en la salida y la salida estimada $(y - \tilde{y})$:

El filtro de Kalman-Bucy es de la forma:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y})$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x}$$

$$\rightarrow \frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x})$$

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

Por lo tanto:

$$\therefore \frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly$$
$$\tilde{y} = C\tilde{x}$$

Donde:

- $\tilde{x}$: Vector de estado observado.
- $\tilde{y}$: Salida estimada.

L: Matriz de ganancia del observador, para este caso, ganancia de Kalman.

La ganancia L del observador es también llamada ganancia de Kalman y está dada por:

$$L = P_e C^T V^{-1}$$

Donde la matriz P_e es la solución de la siguiente ecuación de Ricatti:

$$AP_e + P_e A^T - P_e C^T V^{-1} C P_e + W = 0$$

Donde:

- W: Matriz de covarianza de $w(t)$, definida positiva.
- V: Matriz de covarianza de $v(t)$, definida positiva.

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

- Observe que, los elementos de la diagonal principal de $W_{i,i}$ son las varianzas de las perturbaciones aleatorias afectan directamente a la $i-ésima$ variable de estado. Para los elementos fuera de la diagonal principal, $W_{i,j}$ representa la covarianza entre los ruidos que afectan la $i-ésima$ y la $j-ésima$ variable de estado. Si son cero, los ruidos son no correlacionados.
- De forma similar, los elementos de la diagonal principal de $V_{i,i}$ representa la varianza del ruido de la $i-ésima$ medición (salida). Para los elementos fuera de la diagonal principal, $V_{i,j}$ representa la covarianza entre el ruido de la $i-ésima$ medición y el ruido de la $j-ésima$ medición. Si $V_{i,j}$ es cero, entonces los ruidos entre estas dos mediciones no están correlacionados.

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

El filtro de Kalman tiene las siguientes propiedades:

$$\lim_{t\to\infty} E[e(t)] = \lim_{t\to\infty} E[x(t) - \tilde{x}] = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} J = \lim_{t\to\infty} E[e^T(t)e(t)] = trace(P)$$

Donde:

- J: Función de costo. En este contexto es la energía del error de estimación.
- $E[\ ]$: Valor esperado (o media) de una variable aleatoria.
- $e(t)$: Error de estimación.
- $e^T(t)e(t)$: Cuadrado de la norma euclidiana del vector de error.
- P_e: Covarianza del error de estimación.
- $trace(P)$: Diagonal principal de P.

Cabe precisar que P_e contiene las varianzas de los errores de estimación para cada componente del estado. Por ejemplo $P_{e_{1,1}}$ es la varianza del error en la estimación de la primera variable de estado, $P_{e_{2,2}}$ es la varianza del error en la estimación de la segunda variable de estado, y así sucesivamente.

7.2 Estimación de estados óptima – Filtro de Kalman

Problema dual

El filtro de Kalman y el Regulador Cuadrático Lineal (LQR) son duales.

Regulador cuadrático lineal (LQR)	Filtro de Kalman
$K = R^{-1}B^TP$ $A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$ $J_{óptimo} = trace(P)$	$L = PC^TV^{-1}$ $AP + PA^T - PC^TV^{-1}CP + W = 0$ $J_{óptimo} = trace(P)$

Controlador (LQR) $\leftrightarrow$ Observador (Filtro de Kalman)

$$
\begin{aligned}
A^T &\leftrightarrow A \\
C^T &\leftrightarrow B \\
B^T &\leftrightarrow C \\
K^T &\leftrightarrow L \\
P &\leftrightarrow P_e \\
Q &\leftrightarrow W \\
R &\leftrightarrow V \\
A - BK &\leftrightarrow A^T - C^TL^T
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1

Diseñe un Filtro de Kalman para el sistema masa-resorte-amortiguador. Considere que tanto el ruido de proceso ($w(t)$) como el ruido de medición ($v(t)$) son de tipo gaussiano con media igual a cero.

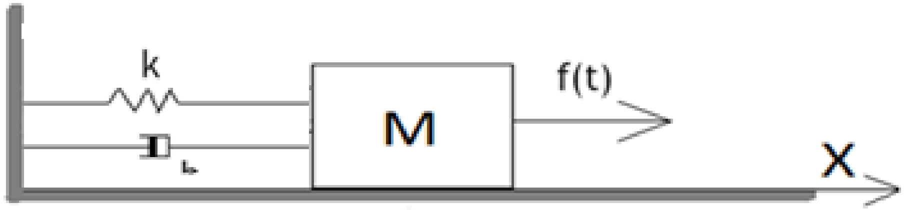

Figura 1: Sistema masa-resorte-amortiguador.

Donde:

- f: Fuerza externa, manipulable.
- k: Constante de elasticidad del resorte.
- b: Coeficiente de amortiguamiento.
- m: Masa del bloque.

$$m = 0.2Kg, k = \frac{0.7N}{m}, b = 0.5Kg/s$$

Considere que la matriz de covarianza del ruido del proceso W, y la matriz de covarianza del ruido de medición (V) están dadas por:

$$W = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, V = 0.1$$

Ejercicio 1

Solución

Modelamiento del sistema dinámico sin ruido

$$f - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Sin embargo, con fines de generalización, se cambiará el nombre de la variable "f", a "u". Por lo que, la dinámica del sistema queda expresada de la siguiente forma:

$$u - kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \quad \dots (1)$$

Representación del sistema dinámico en el espacio de estados

- Entradas : u
- Salidas : x
- Variables de estado : $x, \dot{x}$
- Vector de estado : $X = [x, \dot{x}]^T$
- Obtención de la ecuación de estado

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{-kx - b\dot{x}}{m} + \frac{u}{m} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Solución

- Obtención de la ecuación de salida

$$y = x = g(x, \dot{x}, u, t) = CX + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0u$$
$$\therefore C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Luego, dado que el sistema real involucra ruido de proceso ($w(t)$) y ruido de medición ($v(t)$), la ecuación de estado y la ecuación de salida son:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw$$
$$y = Cx + Du + v$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Además,

$$W = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, V = 0.1$$

Ejercicio 1

Solución

Se plantea el sistema dual. En donde, se emplearán los términos A_d, B_d, C_d, para referirse a A^T, C^T, B^T. De modo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}, \rightarrow A_d = A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3.5 \\ 1 & -2.5 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B_d = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow C_d = B^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$Q_d = W = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$
$$R_d = V = 0.1$$

Se diseña un controlador LQR para el sistema dual, se calcula P_e de modo de que satisfaga la ecuación de Ricatti.

$$A_d^T P_e + P_e A_d - P_e B_d R_d^{-1} B_d^T P_e + Q_d = 0$$
$$\rightarrow A P_e + P_e A^T - P_e C^T V^{-1} C P_e + W = 0$$

Ejercicio 1

Solución

Se plantea $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ de modo de que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3.5 \\ 1 & -2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[0.1]^{-1}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P_e = \begin{bmatrix} 0.055 & -0.0348 \\ -0.0348 & 0.0864 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$K_d = R_d^{-1} B_d^T P_e = [0.55 \quad -0.3485]$$

Por lo tanto

$$L = K_d^T = \begin{bmatrix} 0.55 \\ -0.3485 \end{bmatrix} = P_e C^T V^{-1}$$

7.5 Controlador gaussiano cuadrático lineal (LQG)

Paso 1: Diseñar un controlador LQR que resuelva el siguiente problema:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u)\, dt, \qquad Q \geq 0, R > 0$$

Luego,

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \qquad P > 0$$
$$\rightarrow K = R^{-1}B^T P$$

Paso 2: Diseñar un Filtro de Kalman para la planta dada, es decir:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly$$

$\tilde{y} = C\tilde{x}$Donde:

$$L = P_e C^T V^{-1}, \qquad P_e > 0$$
$$P_e A^T + AP_e - P_e C^T V^{-1} C P_e + W = 0$$

Paso 3: La ley de control LQG esta dada por $u = -K\tilde{x}$, es decir:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly = (A - LC)\tilde{x} + B(-K\tilde{x}) + Ly = (A - LC - BK)\tilde{x} + Ly$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - LC - BK)\tilde{x} + Ly$$

Referencias

- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables, and stochastic processes* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Chen, Y. (2003). Lecture Notes: Week 1a ECE/MAE 7360 Optimal and Robust Control. Universidad Hebrea de Jerusalén. Recuperado de https://www.cs.huji.ac.il/course/2009/control/handouts/7360w1a_overview_linear_algebra.pdf
- Thierry Miquel. Introduction to Optimal Control. Master. Introduction to optimal control, ENAC, France. 2022, pp.188. hal-02987731v2. Recuperado de https://cel.hal.science/hal-02987731v2/file/OptimalControl.pdf

Muchas gracias

PUCP

PUCP