PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Sistemas dinámicos y control B (1MTR57)
Primer Semestre 2025

Guía del octavo laboratorio

Diseño de control óptimo y estimación óptima en espacio discreto

Índice

1 Objetivos

- Entender los cambios del dominio continuo al discreto en espacio estado
- Poder calcular ganancias de control y estimación en espacio estado discreto
- Aplicar el esquema completo de LQG discreto

2 Espacio estado discreto

Como se ha visto previamente en funciones de transferencia, el interés de estudiar los sistemas en el dominio discreto es la aplicación en sistemas reales donde existe una adquisición de datos inherentemente discreta o durante intervalos de tiempo definidos. Por ello, es útil estudiar las características del espacio estado discreto.

2.1 Discretización

Para aproximar la realidad del muestreo en intervalos de tiempo, el sistema en espacio estado cambia del dominio t, como se ve en las Ecuaciones 1, al dominio k, como se ve en las Ecuaciones 2.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k) \end{aligned} \tag{2}$$

Este modelo en espacio estado calcula los valores futuros (una muestra o intervalo de tiempo en el futuro) del vector de estados a partir de los valores actuales de este.

Para obtener el modelo discreto, se pueden utilizar las Ecuaciones 3 y 4 (donde I_n es la matriz identidad, n es la cantidad de estados y ts es el tiempo de muestreo).

$$A_d = e^{A_c ts} \tag{3}$$

$$B_d = (A_d - I_n) A_c^{-1} B_c \tag{4}$$

Para conseguir una discretización en Matlab, podemos reutilizar el comando *c2d*() que ya hemos visto en los primeros laboratorios o utilizar las ecuaciones directamente.

```
A                  = [-1  -3;
                        1  0];
B                  = [0;
                        -1];
C                  = [1  0];
D                  = 0;
sys_ss             = ss(A,B,C,D);

ts                 = 0.05;

sys_ssd1           = c2d(sys_ss,ts);

Ad                 = expm(A*ts);
Bd                 = (Ad-eye(size(A,1)))*(A^-1)*B;
Cd                 = C;
Dd                 = D;
sys_ssd2           = ss(Ad,Bd,Cd,Dd,ts);

step(sys_ssd1, sys_ssd2)
```

2.2 Estabilidad

Así como en el dominio continuo, los autovalores de la matriz A_d son las raíces de la ecuación característica del sistema (los polos de la función de transferencia). Por ende, el criterio de estabilidad discreto se mantiene.

Un sistema en espacio estado discreto es estable si la parte real de todos los autovalores de A_d es estrictamente menor a 0; es marginalmente estable, si alguno de estos tiene parte real igual a 0; y es inestable si alguno de los autovalores tiene parte real estrictamente mayor a 0.

2.3 Controlabilidad y observabilidad

La controlabilidad y observabilidad se analizan igual que en el caso continuo. Se calcula la matriz de controlabilidad S y la matriz de observabilidad V, se observa el rango de estas. Si el rango es igual al número de estados, entonces el sistema es completamente controlable u observable.

$$S = \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & A_d^2 B_d & \dots & A_d^{n-1} B_d \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$V = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ C_d A_d^2 \\ \dots \\ C_d A_d^{n-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Utilizando las mismas matrices que en la sección de discretización (A_d, B_d, C_d *y* D_d), se analiza la controlabilidad y observabilidad de estas.

```
S            = ctrb(A_d,B_d);
V            = obvs(A_d,C_d);

rango_c      = rank(S);
rango_o      = rank(V);
```

3 Control óptimo discreto - Regulador lineal cuadrático

El problema de optimización es similar al del tiempo continuo, el parámetro que cambia es la forma de la función objetivo para considerar que son variables discretas en vez de un espectro continuo.

3.1 Formulación

Dado un sistema expresado en forma de espacio estado discreto como se ve en la Ecuación 7, el cual tiene n estados x y m entradas del sistema u.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \tag{7}$$

Se considera una función de costo u objetivo similar a la que se utilizó en el tiempo continuo, pero utilizando la expresión discreta de suma en lugar de integral, la función objetivo utilizada es de la Ecuación 8, en Matlab se utiliza el comando *dlqr*().

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)] \tag{8}$$

Así como en el caso continuo, las matrices de importancia Q y R indican los pesos relativos de cada variable al resolver el problema de optimización de la función J. Esto quiere decir que se penaliza el incremento en una variable respecto de otra considerando esos pesos.

$$x(k+1) = (A_d - B_d K)x(k) \tag{9}$$

3.2 Objetivo de control - Matrices de importancia

Las matrices de importancia en discreto mantienen el mismo concepto que en continuo, siendo matrices con solo elementos en su diagonal principal, que representan los pesos de cada variable.

$$Q = \begin{bmatrix} W_{X_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{X_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & W_{X_3} & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{X_n} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$W_{x_1} \geq 0, \; W_{x_2} \geq 0, \; \dots \; W_{x_n} \geq 0$$

$$R = \begin{bmatrix} W_{U_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{U_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & W_{U_3} & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{U_m} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$W_{u_1} \geq 0, \; W_{u_2} \geq 0, \; \dots \; W_{u_m} \geq 0$$

3.3 Cálculo de ganancia LQR

Para calcular los valores de las ganancias de control se puede utilizar la función *lqr*() (Linear Quadratic Regulator) o la función *dlqr*() en Matlab. Estas funciones reciben como argumentos el sistema discreto definido como variable, la matriz de importancia Q y la matriz de importancia R.

```
% Se definen las matrices del sistema
A   = [-2 0 0; 0 -3 0; 0 0 -10];
B   = [0 ; 2 ; 0.5];
C   = [1 0 0];
D   = [0];
sys = ss(A,B,C,D);

% Discretizacion
ts  = 0.1;
sysd= c2d(sys,ts);

% Se definen las matrices de importancia
Q   = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
R   = [1];

% Calculo de las ganancias K optimas
K   = dlqr(sysd.A, sysd.B, Q, R)
K   = lqr(sysd, Q, R)
```

4 Observador óptimo - Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es el observador óptimo considerando el conocimiento del ruido o perturbaciones que pueden existir en los estados o las entradas del sistema.

4.1 Formulación

Dado un sistema representado en espacio estado, con ruido gaussiano aditivo (no relacionados entre sí) tanto en la dinámica del sistema ($x(k+1)$) como en la dinámica del sensor ($y(k)$), como se aprecia en el sistema de las Ecuaciones 12.

$$\begin{gathered} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + w(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) + v(k) \end{gathered} \tag{12}$$

Donde $w(k)$ es la incertidumbre o perturbaciones del sistema, es un vector de tamaño n, donde cada componente es el ruido estadístico de cada uno de los n estados x del sistema; y $v(k)$ es el ruido de los sensores, es un vector de tamaño m, donde cada componente es el ruido relacionado a cada una de las m salidas y del sistema.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \tag{14}$$

Semejante al diseño de un LQR, se aplica un método de optimización donde ahora las matrices de importancia tienen un significado distinto.

4.2 Objetivo de observación - Matrices de confianza

La matriz Q representa qué tanta confianza se tiene en que el modelo matemático es correcto o que no hay tantas perturbaciones; y la matriz R representa qué tanto ruido se espera que los sensores aporten.

Idealmente ambas matrices corresponden a la covarianza del ruido y las perturbaciones del sistema, según las Ecuaciones 16 y 15.

$$Q_n = E[w^T w] \tag{15}$$

$$R_n = E[v^T v] \tag{16}$$

Estimar la covarianza tanto del ruido como de las perturbaciones puede ser complejo, por lo que para efectos de este laboratorio, y entender cómo aplicar de manera básica el concepto del filtro de Kalman, se realizará un análisis parecido al del LQR y se mostrará la comparación con el caso ideal de conocer las covarianzas.

Se define la matriz de confianza para los estados Q_n, de tamaño n que corresponden a los n estados x del sistema, y la matriz de confianza para las lecturas de sensado R_n, de tamaño m que corresponden a cada salida y.

$$Q_n = \begin{bmatrix} C_{X_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{X_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_{X_3} & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{X_n} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$C_{x_1} \geq 0,\ C_{x_2} \geq 0,\ \dots\ C_{x_n} \geq 0$$

$$R_n = \begin{bmatrix} C_{y_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{y_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_{y_3} & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{y_m} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$C_{y_1} \geq 0,\ C_{y_2} \geq 0,\ \dots\ C_{y_m} \geq 0$$

Similar al análisis de LQR, cada elemento en la diagonal de la matriz representa el peso de cada variable. Pero en este caso, mientras mayor valor tenga uno de los pesos, menor confianza hay en que ese valor sea el verdadero.

Por ejemplo, se tiene un sistema de levitación para una esfera en un ducto de aire de 3 estados y 1 sensor. Se realizan experimentos para caracterizar el ruido del sistema. Llegan a la conclusión que el estado 2 tiene perturbaciones leves por las turbulencias del aire chocando con la esfera y el sensor sufre de ruido magnético que es bastante notorio.

$$Q_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$R_n = \begin{bmatrix} 20 \end{bmatrix} \tag{20}$$

4.3 Cálculo de ganancias de Kalman

Se formula la dinámica del error de estimación como se hizo para un observador en la Ecuación 21. Dado que los autovalores de una matriz cuadrada son los mismos que su transpuesta, se puede modificar la dinámica a la de la Ecuación 22.

$$\dot{e}e = (A - KC)ee \tag{21}$$

$$\dot{e}e = (A' - C'K')ee \tag{22}$$

La forma de la dinámica de estimación en la Ecuación 9 es semejante a la del planteamiento de LQR en la Ecuación 9. Por lo que se puede utilizar el mismo comando $lqr()$ para calcular las ganancias de estimación, pero con la transpuesta del resultado.

```
A       = [-1 0 0; 0 -5 0; 0 0 -2];
B       = [0;0;1];
C       = [1 0 0];
D       = [0];
sys     = ss(A,B,C,D);

% Discretizacion
ts      = 0.1;
sysd    = c2d(sys,ts);

Qn      = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
Rn      = [1];

Ke      = dlqr(sysd.A',sysd.C',Qn, Rn)'
```

5 Implementación de controladores digitales en una planta real

En este laboratorio se implementará un esquema de control y estimación discretos óptimos en el sistema de un péndulo invertido encima de un carro. Este sistema es muy beneficioso para poder estudiar las ventajas del espacio estado y del control óptimo, ya que en este sistema es tan deseable que el carrito vaya a una posición designada con una velocidad adecuada para que no sature el actuador, y además que el péndulo se mantenga erguido.

5.1 Sistema péndulo invertido

El sistema consta de dos sensores y una entrada de voltaje. Los sensores miden la posición del carro desde el punto en donde empezó a leer (donde empezó la simulación) y la posición angular del péndulo invertido.

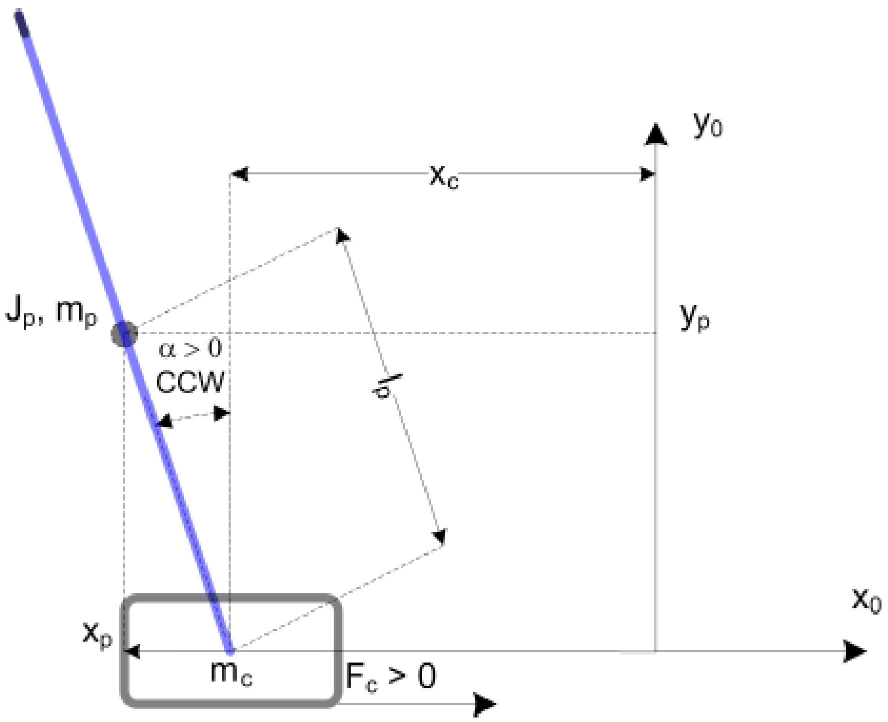

Figura 1. Modelo del sistema

El sistema actúa como dos sistemas de segundo orden acoplados. Para ello, se plantean las ecuaciones diferenciales de la posición del carrito y la posición angular del péndulo y se obtienen las matrices del sistema (A) y la matriz de control (B), considerando el vector de estados de la Ecuación 27.

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ \alpha \\ \dot{x}_c \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$A = \frac{1}{J_T}\begin{bmatrix} 0 & 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \\ 0 & M_p^2 l_p^2 g & -(J_p + M_p l_p^2)B_{eq} & -M_p l_p B_p \\ 0 & (J_{eq} + M_p)M_p l_p g & -M_p l_p B_p & -(J_p + M_p)B_{eq} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$B = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_p + M_p l_p^2 \\ M_p l_p \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Para poder evaluar el desempeño del controlador, previo a la implementación en la planta física, es necesario utilizar Simulink e iterar los parámetros adecuados hasta lograr el desempeño deseado, por ello se debe utilizar el esquema de la Figura 2. Colocamos el esquema de estimación de estados con un bloque espacio estado discreto, se agrega un ruido gaussiano a la retroalimentación de los sensores (el bloque de ruido debe tener un "Noise Power" de 0.1) y un bloque saturador que representa el límite de voltaje que puede recibir el sistema (de 6 a -6).

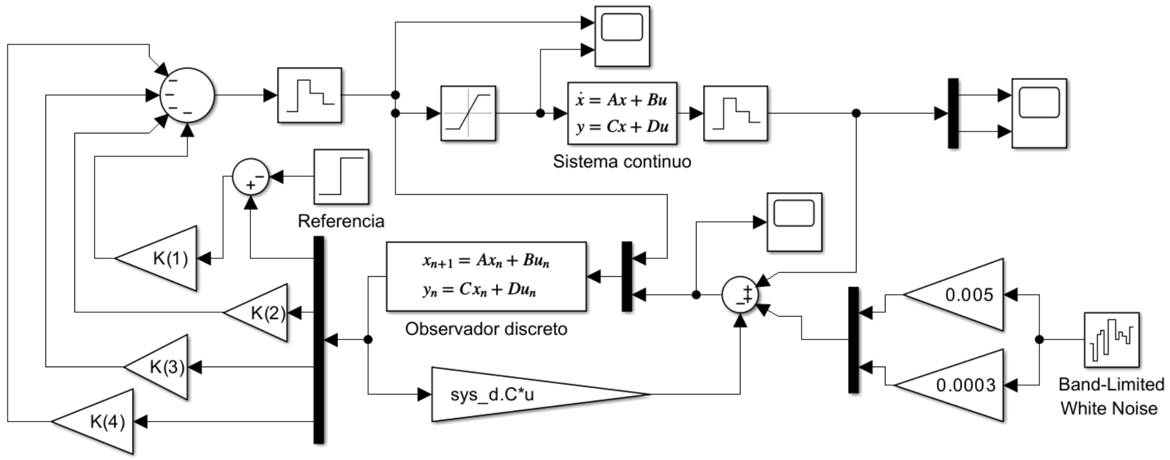

Figura 2. Esquema de simulación en Simulink

Ing. Luis Alonso Pun Mejía
Ing. Rodrigo Vega Centeno Ponce de León
San Miguel, Abril de 2025